ಗಣಿತ

MATHEMATICS

ತರಗತಿ

IX

ಭಾಗ - 1

Part-1

ಕೇರಳ ಸರಕಾರ
ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ

ತಯಾರಿಸಿದವರು
ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಮಿತಿ (SCERT) ಕೇರಳ

2024

ST-509-1-MATHS (K)-9-VOL-1

ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

ಜನಗಣ ಮನ ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ
ಪಂಜಾಬ ಸಿಂಧು ಗುಜರಾತ ಮರಾಠ
ದ್ರಾವಿಡ ಉತ್ಕಲ ವಂಗ
ವಿಂಧ್ಯ ಹಿಮಾಚಲ ಯಮುನಾ ಗಂಗಾ
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿತರಂಗ
ತವಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ
ತವಶುಭ ಆಶಿಷ ಮಾಗೇ
ಗಾಹೇ ತವಜಯ ಗಾಥಾ
ಜನಗಣ ಮಂಗಲದಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ
ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ
ಜಯ ಜಯ ಜಯ ಜಯಹೇ!

ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

ಭಾರತವು ನನ್ನ ದೇಶ. ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ ಸಹೋದರ, ಸಹೋದರಿಯರು.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ಅದರ ಸಂಪನ್ನ ಹಾಗೂ ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣವಾದ ಪರಂಪರೆಗೆ ನಾನು ಹೆಮ್ಮೆಪಡುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ತಂದೆ, ತಾಯಿ ಮತ್ತು ಗುರುಹಿರಿಯರನ್ನು ಗೌರವಿಸುತ್ತೇನೆ. ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರೊಡನೆ ಸೌಜನ್ಯದಿಂದ ವರ್ತಿಸುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶ ಮತ್ತು ದೇಶದ ಜನರಿಗೆ ನನ್ನ ಶ್ರದ್ಧೆಯನ್ನು ಮುಡಿಪಾಗಿಡುತ್ತೇನೆ. ಅವರ ಕ್ಷೇಮ ಮತ್ತು ಸಮೃದ್ಧಿಯಲ್ಲೇ ನನ್ನ ಆನಂದವಿದೆ.

ಗಣಿತ

9

Prepared by
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in, e-mail : scertkerala@gmail.com
Typeset and design by : SCERT
First Edition : 2024
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of General Education, Government of Kerala

ಪ್ರೀತಿಯ ಮಕ್ಕಳೇ,

ಜಗತ್ತನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಮತ್ತು ವಿಶೇಷತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಮಾನವನಿಗೆ ಹಲವು ರೀತಿಯ ಅಳತೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವು ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗಿತ್ತು. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ರೂಪುಗೊಳ್ಳುವುದು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿನ ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ತಿಳಿದಿರುವೆವು. ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೋ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೋ ಸೂಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಇರುವ ಹೊಸ ರೀತಿಗಳ ಕುರಿತು ಇಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯೋಣ. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರೂಪಗಳ ಕಲಿಕೆಯೂ ಇಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವುದು.

ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು, ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನೂ ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳ ಕುರಿತಾದ ಯೋಚನೆಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಒತ್ತು ನೀಡುವ ಗಣನೆ ಚಿಂತನೆಯಾಗಿದೆ ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯ ಹೊಸ ದೃಷ್ಟಿಕೋನ. ಹಲವು ತರದ ಕ್ರಿಯಾ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಕಲಿತು ಅವುಗಳನ್ನು ಸಂದರ್ಭೋಚಿತವಾಗಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ ಪ್ರಧಾನವಾಗಿರುವುದು ಅವು ಹೇಗೆ ಕಾರ್ಯವೆಸಗುವುದು ಎಂಬುದಾಗಿ ತಿಳಿಯುವುದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಕಾರ್ಯಕ್ಷಮವಾಗಿಸಲು ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು. ಇದಾಗಿದೆ ಗಣನೆ ಚಿಂತನೆಯಿಂದ ಅರ್ಥವಾಗುವುದು. ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಚಲನಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೆಚ್ಚು ಆಶಯಗ್ರಹಣವನ್ನು ಸ್ವಾಯತ್ತಗೊಳಿಸಲು ಸೂಕ್ತವಾಗಿರುವ ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ಎಂಬ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಶುಭ ಹಾರೈಕೆಗಳೊಂದಿಗೆ,

ಡಾ. ಜಯಪ್ರಕಾಶ್ ಆರ್. ಕೆ.
ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ.

TEXTBOOK DEVELOPMENT COMMITTEE

Advisor

Dr. E. Krishnan
Head of the Department, Mathematics (Rtd),
University College, Thiruvananthapuram

Chairman

Dr. P. Ramesh Kumar
Head of the Department, Mathematics,
Karyavattam, Thiruvananthapuram

Experts

Dr. Anil Kumar C. V.
Head of the Department, Mathematics,
Indian Institute of Space
Science & Technology,
Valiyamala, Thiruvannathapuram

Madhu B.
Assistant Professor,
Regional Institute of
Education, Mysore

A. Sukesh
Assistant Professor,
Govt. College of Engineering,
Kannur

Members

R. Ramanujam
H.S.S.T. Mathematics,
M.N.K.M. Govt. Higher
Secondary School
Pulappatta, Palakkad

Vijaya Kumaran T. K.
H.S.S.T., (Rtd),
G.M.R.H.S.S. for Girls,
Paravanadukam, Kasaragod

C. T. Firos Babu
H.S.T. Mathematics,
Govt. Higher Secondary School
Pookottumpadam, Malappuram

Unnikrishnan M. V.
H.S.T. Mathematics,
G.H.S. Kuttiyeri,
P. O. Kuttiyeri, Kannur

Nandakumar C
H.S.T. Mathematics,
Chodavoor Higher Secondary
School Chambad, Kannur

Shrijith Muriyambath
H.S.T. Mathematics,
G.H.S.S. Chorod, Kurikkilad,
Vadakara, Kozhikode

Padmaprasad K
H.S.T. Mathematics,
Pandalloor H.S.S.,
Kadambod Post, Malappuaram

Ubaidulla K C
H.S.T. Mathematics,
S.O.H.S. Arikkode,
Malappuram

Firosa Moidu
H.S.T. Mathematics,
Calicut Girls V.H.S.S.
Kundungal, Kallayi, Kozhikode

Priya Raj
H.S.T. Mathematics,
M.G.D. Highschool
Pudusseri, Pudusseri South,
Pathanamthitta

Dhaneshan M. V.
H.S.S.T English,
G.F.H.S.S. Padannakadappuram,
Kasaragod

Geomy N George
China Media, Shornur

KANNADA VERSION

Subject Expert

Mahalingeshwar Raj D.
Rtd. DDE

Language Expert

Ramanna D., Rtd. HM

Participants

Harshakumara M., H.S.T., SGKHS Kudlu
Raghava A., HM, GHSS Edneer
Balakrishna P., H.S.T., BEMHSS, Kasaragod
Ratheesha D., H.S.T., GVHSS Karadka
Subhas V.S., H.S.T., GHSS Kasaragod
Nagaraja N., H.S.T., SSHSS Sheni
Krishna Prakash S., H.S.T., SNHS Perla

Academic Co-ordinator

Dr. Shivakumar K. S.
Research Officer, S.C.E.R.T.

State Council of Educational Research and Technology (SCERT)
Vidyabhavan, Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

1	ಸಮವಾಕ್ಯ ಜೋಡಿಗಳು	7
2	ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	19
3	ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು	33
4	ಗುಣಾಕಾರ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು	61
5	ಅಭಿನ್ನಕ ಗುಣಾಕಾರ	83
6	ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳು	99
7	ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	119

ಈ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ

ಸಂಶೋಧನೆ

ಐ.ಸಿ.ಟಿ. ಸಾಧ್ಯತೆ

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ಭಾರತದ ಜನರಾದ ನಾವು ಭಾರತವನ್ನು ಒಂದು [1]**[ಸಾರ್ವಭೌಮ ಸಮಾಜವಾದೀ ಸರ್ವಧರ್ಮ ಸಮಭಾವದ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ಗಣರಾಜ್ಯವಾಗಿ]** ರಚಿಸಲು ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮಸ್ತ ನಾಗರಿಕರಿಗೆ:

ಸಾಮಾಜಿಕ, ಆರ್ಥಿಕ ಮತ್ತು ರಾಜಕೀಯ **ನ್ಯಾಯ** ;
ವಿಚಾರ, ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ, ವಿಶ್ವಾಸ, ಧರ್ಮಶ್ರದ್ಧೆ ಮತ್ತು ಉಪಾಸನಾ **ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ** ;
ಸ್ಥಾನಮಾನ ಹಾಗೂ ಅವಕಾಶ **ಸಮಾನತೆ**

ದೊರೆಯುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಮತ್ತು ವ್ಯಕ್ತಿ ಗೌರವವನ್ನು,[2][ರಾಷ್ಟ್ರದ ಏಕತೆಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಅಖಂಡತೆಯನ್ನು] ಸುನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸಿ ಅವರಲ್ಲಿ **ಭ್ರಾತೃಭಾವನೆಯನ್ನು** ವೃದ್ಧಿಸಲು ಶ್ರದ್ಧಾಪೂರ್ವಕ ಸಂಕಲ್ಪ ಮಾಡಿದವರಾಗಿ;

ನಮ್ಮ ಸಂವಿಧಾನ ಸಭೆಯಲ್ಲಿ 1949ನೆಯ ಇಸವಿ ನವೆಂಬರ್ ತಿಂಗಳ ಇಪ್ಪತ್ತಾರನೆಯ ತಾರೀಖಾದ ಈ ದಿವಸ **ಈ ಮೂಲಕ ಈ ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿ, ಅಧಿನಿಯಮಿಸಿ ಅರ್ಪಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.**

---

1. 1976ನೇ ಇಸವಿಯ ಭಾರತ ಸಂವಿಧಾನ (ನಲವತ್ತೆರಡನೆಯ ತಿದ್ದುಪಡಿ) ಅಧಿನಿಯಮದ 2ನೇ ಪ್ರಕರಣದ ಮೇರೆಗೆ "ಸಂಪೂರ್ಣ ಪ್ರಭುತ್ವ ಸಂಪನ್ನ ಲೋಕತಂತ್ರಾತ್ಮಕ ಗಣರಾಜ್ಯವಾಗಿ" ಎಂಬ ಪದಗಳ ಬದಲಾಗಿ (3-1-1977 ರಿಂದ ಜಾರಿಗೆ ಬರುವಂತೆ) ಪ್ರತ್ಯಾಯೋಜಿಸಲಾಗಿದೆ.
2. ಮೇಲ್ಕಂಡ ಅಧಿನಿಯಮದ 2ನೇ ಪ್ರಕರಣದ ಮೇರೆಗೆ "ರಾಷ್ಟ್ರದ ಏಕತೆಯನ್ನೂ" ಎಂಬ ಪದಗಳ ಬದಲಾಗಿ (3 - 1 - 1977ರಿಂದ ಜಾರಿಗೆ ಬರುವಂತೆ) ಪ್ರತ್ಯಾಯೋಜಿಸಲಾಗಿದೆ.

1

ಸಮವಾಕ್ಯ ಜೋಡಿಗಳು

ಮನ ಲೆಕ್ಕ ಮತ್ತು ಬೀಜಗಣಿತ

ಆರಂಭದಲ್ಲೇ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡೋಣ:

ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಕಪ್ಪು ಮತ್ತು ಬಿಳಿ ಬಣ್ಣದ 100 ಮಣಿಗಳಿವೆ. ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದ ಮಣಿಗಳು ಬಿಳಿ ಬಣ್ಣದ ಮಣಿಗಳಿಗಿಂತ 10 ಅಧಿಕವಾಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳೆಷ್ಟು? ಬಿಳಿ ಮಣಿಗಳೆಷ್ಟು?

ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು. ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ 10 ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳನ್ನು ಸದ್ಯಕ್ಕೆ ಹೊರತುಪಡಿಸಿದರೆ, ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ 90 ಮಣಿಗಳು. ಇದರಲ್ಲಿ ಕಪ್ಪು ಮತ್ತು ಬಿಳಿ ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು; ಅಂದರೆ ತಲಾ 45 ರಂತೆ. ಇನ್ನು ತೆಗೆದಿರಿಸಿದ ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದ ಮಣಿಗಳು 55 ಆಗುವುದು. ಬಿಳಿ ಬಣ್ಣದ ಮಣಿಗಳು 45 ಇರುವುದು.

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯ). ಕಪ್ಪು ಬಣ್ಣದ ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಬಿಳಿ ಬಣ್ಣದ ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $x - 10$. ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಎಲ್ಲವೂ ಸೇರಿ 100 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

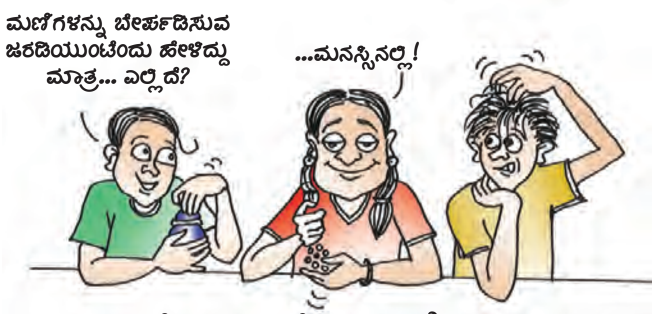
$$x + (x - 10) = 100$$

ಇದರಿಂದ x ನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿ ತೆಗೆದರೆ,

$$2x - 10 = 100$$

$$2x = 110$$

$$x = 55$$



ಆದ್ದರಿಂದ ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳು 55 ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು. 10 ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ಬಿಳಿ ಮಣಿಗಳು 45 ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ ನೋಡೋಣ:

ಒಂದು ಮೇಜು ಮತ್ತು ಕುರ್ಚಿಯ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಯು 11000 ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿದೆ. ಒಂದು ಮೇಜು ಮತ್ತು 4 ಕುರ್ಚಿಯ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಯು 14000 ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿರುವುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಮೊದಲು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಹುದೇ ಎಂದು ನೋಡೋಣ. ಒಂದು ಮೇಜು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಕುರ್ಚಿಯಾದಾಗ, ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ 3000 ರೂಪಾಯಿಯ ಹೆಚ್ಚಳವುಂಟಾಯಿತು. ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವು ಮೂರು ಕುರ್ಚಿಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಖರೀದಿಸಿರುವುದರಿಂದಲ್ಲವೇ? ಅಂದರೆ, ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ 3000 ರೂಪಾಯಿಯು ಮೂರು ಕುರ್ಚಿಗಳ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ. ಆಗ ಒಂದು ಕುರ್ಚಿಯ ಬೆಲೆಯು 1000 ರೂಪಾಯಿ, ಹಾಗೂ ಮೇಜಿನ ಬೆಲೆಯು 10000 ರೂಪಾಯಿ.

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಲೋಚಿಸದೆ, ಕುರ್ಚಿಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು x ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆರಂಭಿಸೋಣ; ಇನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಆಲೋಚಿಸಿದರೆ, ಮೇಜಿನ ಬೆಲೆಯು $11000 - x$ ರೂಪಾಯಿ ಎಂದಾಗುವುದು; ಒಂದು ಮೇಜು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಕುರ್ಚಿಯಾದರೆ, $(11000 - x) + 4x = 11000 + 3x$ ರೂಪಾಯಿ ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದು 14000 ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ,

$$11000 + 3x = 14000$$

ಇದರಿಂದ x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ:

$$\begin{aligned} 11000 + 3x &= 14000 \\ 3x &= 3000 \\ x &= 1000 \end{aligned}$$

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕುರ್ಚಿಯ ಬೆಲೆ 1000 ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು; ಮೇಜಿನ ಬೆಲೆಯು $11000 - 1000 = 10000$ ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕುರ್ಚಿಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು x ರೂಪಾಯಿ ಮತ್ತು ಮೇಜಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು y ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆರಂಭಿಸೋಣ. ಆಗ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡೋಣ.

$$\begin{aligned} x + y &= 11000 \\ 4x + y &= 14000 \end{aligned}$$

ಇನ್ನು ಮೊದಲ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ x, y ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯೋಣ:

$$y = 11000 - x$$

ಆಗ ಎರಡನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದ y ಗೆ ಬದಲಾಗಿ $11000 - x$ ಎಂದು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ:

$$4x + (11000 - x) = 14000$$

ಅಂದರೆ,

$$11000 + 3x = 14000$$

ಇದು ಕುರ್ಚಿಯ ಬೆಲೆ x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಲಭಿಸಿದ ಹಳೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

ಇದರಿಂದ ಮೊದಲಿನಂತೆ ಮೇಜು ಮತ್ತು ಕುರ್ಚಿಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ;

> ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ, ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ 5 ಮಡಿಯಾಗಿದೆ; ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ 32 ಸಿಗುವುದು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಹುದೇ?

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಐದು ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದಲ್ಲವೇ?

ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಐದು ಮಡಿಯಿಂದ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೇ ಕಳೆಯಬೇಕು; ಅಂದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕು ಮಡಿ.

ಹೀಗೆ ಕಳೆದು ಸಿಗುವುದು 32 ಆಗಿದೆ ಎಂದಲ್ಲವೇ ಹೇಳಿರುವುದು. ಆಗ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ 4 ಮಡಿಯು 32. ಆದುದರಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆ 8.

ಇನ್ನು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ರ 5 ಮಡಿ 40 ಆಗಿದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೋ?

ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆರಂಭಿಸೋಣ. ಆಗ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯು $5x$ ಆಗಿದೆ.

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ $5x - x = 4x$

ಕಳೆದು ಸಿಗುವುದು 32 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $4x = 32$

ಇದರಿಂದ $x = 8$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಅಂದರೆ, ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ $5 \times 8 = 40$ ಆಗಿದೆ.

ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ x ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ y ಎಂದು ತೆಗೆದು ಆರಂಭಿಸಿದರೋ?

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿ ಬರೆಯೋಣ.

$$y = 5x$$

$$y - x = 32$$

ಎರಡನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದ y ಗೆ ಬದಲಾಗಿ $5x$ ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೋ?

$$5x - x = 32$$

ಅಂದರೆ,

$$4x = 32$$

ಇದರಿಂದ $x = 8$ ಎಂದೂ, ಬಳಿಕ $y = 5 \times 8 = 40$ ಎಂದೂ ಗಣನೆ ಮಾಡಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕ:

ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಶಕ್ಕೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ $\frac{1}{2}$ ಲಭಿಸಿತು. ಛೇದಕ್ಕೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ $\frac{1}{3}$ ಲಭಿಸಿತು. ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಇದನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬಹುದೇ?

ಅಂಶ ಅಥವಾ ಛೇದವನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಹೆಚ್ಚು ಮುಂದಕ್ಕೆ ಹೋಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಅಂಶ x ಎಂದೂ ಛೇದ y ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆರಂಭಿಸೋಣ.

ಆಗ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು $\frac{x}{y}$ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡೋಣ:

$$\frac{x+1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{3}$$

ಮೊದಲ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಅರ್ಥವೇನು?

$\frac{x+1}{y}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು, $\frac{1}{2}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ರೂಪವಾಗಿದೆ.

$\frac{1}{2}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಿನ್ನ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ, ಛೇದವು ಅಂಶದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಬೇಕಲ್ಲವೇ?

ಆಗ, ಛೇದವಾದ y, ಅಂಶವಾದ $x + 1$ ರ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ

$$y = 2(x + 1)$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಎರಡನೇ ಸಮವಾಕ್ಯ $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{3}$ ರಿಂದ

$$y + 1 = 3x$$

ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು.

ಒಂದನೇ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಹೇಳುವುದೇನೆಂದರೆ, y ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ $2(x + 1)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ; ಆಗ ಎರಡನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದ y ಗೆ ಬದಲಾಗಿ $2(x + 1)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು:

$$2(x + 1) + 1 = 3x$$

ಅಂದರೆ,

$$2x + 2 + 1 = 3x$$

$$2x + 3 = 3x$$

ಇದರಿಂದ $x = 3$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು; ನಂತರ ಮೊದಲ ಸಮವಾಕ್ಯದಿಂದ

$y = 2 \times (3 + 1) = 2 \times 4 = 8$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ, ಈ ಲೆಕ್ಕದ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು $\frac{3}{8}$ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೋ, ಒಂದು ಚರ ಮಾತ್ರವಿರುವ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿಯೋ, ಎರಡು ಚರಗಳಿರುವ ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿಯೋ ಮಾಡಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) ಪ್ರಿಯಾಳು 1100 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಬ್ಯಾಗು, ಚಪ್ಪಲಿಯನ್ನು ಪಡಕೊಂಡಳು. ಬ್ಯಾಗಿಗೆ ಚಪ್ಪಲಿಗಿಂತ 300 ರೂಪಾಯಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಚಪ್ಪಲಿಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು? ಬ್ಯಾಗಿನ ಬೆಲೆಯೋ?

(2) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 26 ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸ 4 ಆಗಿದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

(3) ಒಂದು ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ 40 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಒಂದು ಭುಜವು ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜಕ್ಕಿಂತ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) ಮೂರುವರೆ ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಸರಿಗೆಯನ್ನು ಎರಡು ತುಂಡುಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, ಒಂದು ತುಂಡನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ಚೌಕವನ್ನಾಗಿಯೂ, ಇನ್ನೊಂದು ತುಂಡನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನಾಗಿಯೂ ಮಾಡಬೇಕು; ಎರಡೂ ಆಕೃತಿಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು. ಹೇಗೆ ತುಂಡರಿಸಬಹುದು?

(5) ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 4 ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ. 8 ಹುಡುಗರು ಬಾರದಿರುವ ಒಂದು ದಿನ, ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು? ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

(6) ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಶಕ್ಕೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ $\frac{1}{3}$ ಲಭಿಸಿತು; ಛೇದಕ್ಕೆ 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ $\frac{1}{4}$ ಲಭಿಸಿದರೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

(7) ಒಬ್ಬನು 100000 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಎರಡು ಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿಕ್ಷೇಪಿಸಿದನು. ಬಡ್ಡಿದರವು 7 ಶೇಕಡಾ ಮತ್ತು 6 ಶೇಕಡಾ ಆಗಿವೆ. ಒಂದು ವರ್ಷದ ಬಳಿಕ ಎರಡೂ ಯೋಜನೆಗಳಿಂದಾಗಿ 6750 ರೂಪಾಯಿ ಬಡ್ಡಿ ಲಭಿಸಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ನಿಕ್ಷೇಪಿಸಿದ ಹಣ ಎಷ್ಟು?

(8) ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ u ಮೀಟರ್ ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಆರಂಭಿಸಿ ಪ್ರತಿ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ a ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ವೇಗವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ನೇರ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ t ಸೆಕೆಂಡಿನ ವೇಗವು $u + at$ ಆಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಸಂಚರಿಸುವ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಒಂದನೇ ಸೆಕೆಂಡಿನ ವೇಗವು 5 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಮತ್ತು ಐದನೇ ಸೆಕೆಂಡಿನ ವೇಗವು 13 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಆಗಿರುವುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುವ ವೇಗದ ದರ ಎಷ್ಟು? ಯಾತ್ರೆಯ ಆರಂಭದ ವೇಗ ಎಷ್ಟು?

ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ;

2 ಪೆನ್ನು ಮತ್ತು 3 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಕ್ಕೆ ಸೇರಿ ಒಟ್ಟು 110 ರೂಪಾಯಿ. 2 ಪೆನ್ನು ಮತ್ತು 5 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಕ್ಕಾದರೆ 170 ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿದೆ. ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು? ಒಂದು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಮೊದಲು ಮಾಡಿದ ಕುರ್ಚಿ-ಮೇಜು ಲೆಕ್ಕದಂತೆ ಆಲೋಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ: ಮೊದಲು ಹೇಳಿದ 110 ರೂಪಾಯಿಯಿಂದ, 170 ರೂಪಾಯಿಯಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು ಹೇಗೆ?

2 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಪಡಕೊಂಡಿರುವುದರಿಂದ ಅಲ್ಲವೇ?

ಅಂದರೆ, ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ 60 ರೂಪಾಯಿಯು 2 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಒಂದು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆಯು 30 ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಮೊದಲು ಹೇಳಿರುವುದರಿಂದ 2 ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ಲಭಿಸಲು, 110 ರೂಪಾಯಿಯಿಂದ ಮೂರು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ?

ಅಂದರೆ, 110 – 90 = 20 ರೂಪಾಯಿ. ಆಗ ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಯು 10 ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿದೆ.

ವಿವರಗಳು ಮತ್ತು ಪರಿಹಾರಗಳು

ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಕಪ್ಪು ಮತ್ತು ಬಿಳಿ ಬಣ್ಣದ ಹತ್ತು ಮಣಿಗಳಿವೆ ಎಂದು ಮಾತ್ರ ಹೇಳಿದರೆ ಕಪ್ಪು ಎಷ್ಟು ಬಿಳಿ ಎಷ್ಟು ಎಂದು ನಿಖರವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ. ಕಪ್ಪು ಒಂದು ಬಿಳಿ ಒಂಬತ್ತು, ಕಪ್ಪು ಎರಡು ಬಿಳಿ ಎಂಟು ಹೀಗೆ ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಬಹುದು. ಕಪ್ಪು ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬಿಳಿ ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಎರಡು ಅಧಿಕವಾಗಿರುವುದು ಎಂಬುದಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ನಿಖರವಾಗಿ ಉತ್ತರವನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು. ಕಪ್ಪು ಆರು, ಬಿಳಿ ನಾಲ್ಕು.

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ, $x + y = 10$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಸರಿಹೊಂದುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು x, y ಅನೇಕವಿರಬಹುದು. ಆದರೆ

$$x + y = 10$$

$$x - y = 2$$

ಎಂಬ ಎರಡೂ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಸರಿಹೊಂದುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದು ಜೋಡಿ ಮಾತ್ರವಿರುವುದು.

$$x = 6, \quad y = 4$$

ಇನ್ನು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ x ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ y ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ:

2 ಪೆನ್ನು ಮತ್ತು 3 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ 110 ರೂಪಾಯಿ	$2x + 3y = 110$
2 ಪೆನ್ನು ಮತ್ತು 5 ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ 170 ರೂಪಾಯಿ	$2x + 5y = 170$
ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು 2 ನೋಟುಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆ	$(2x + 5y) - (2x + 3y) = 2y$
ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು 60 ರೂಪಾಯಿ	$170 - 110 = 60$
2 ನೋಟುಪುಸ್ತಕಗಳ ಬೆಲೆ 60 ರೂಪಾಯಿ	$2y = 60$
ಒಂದು ನೋಟುಪುಸ್ತಕದ ಬೆಲೆ 30 ರೂಪಾಯಿ	$y = 30$
2 ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಯು, 110 ರೂಪಾಯಿಯಿಂದ 90 ರೂಪಾಯಿಯನ್ನು ಕಳೆದಿರುವುದು	$2x = 110 - (3 \times 30) = 20$
ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ 10 ರೂಪಾಯಿ	$x = 10$

ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಭಿನ್ನವಾದ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ:

3 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 4 ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಯು 66 ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿದೆ. 6 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 3 ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಯು 72 ರೂಪಾಯಿ ಆದರೆ ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಮೊದಲು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಮಾಡಬಹುದೇ ಎಂಬುದಾಗಿ ನೋಡೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಬೆಲೆಯು ಹೆಚ್ಚಾಗಲು ಕಾರಣವು ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದ ಹಾಗೆ, ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಬೆಲೆ ಮಾತ್ರ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದರಿಂದಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಲೆಕ್ಕವು ಅದರಂತೆ ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ.

ಎರಡು ಮಾಹಿತಿಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಪೆನ್ಸಿಲು ಅಥವಾ ಪೆನ್ನುಗಳು ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುದಾದರೆ ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಂತೆ ಮಾಡಬಹುದಾಗಿತ್ತು. ಆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದರೋ?

ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿ ಬರೆಯೋಣ:

ಪೆನ್ಸಿಲು	ಪೆನ್ನು	ಬೆಲೆ
3	4	66
6	3	72

ಮೊದಲು ಹೇಳಿರುವುದರಲ್ಲಿ 3 ಪೆನ್ಸಿಲುಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದಾಗಿ ಹೇಳಿರುವುದರಲ್ಲಿ 6 ಪೆನ್ಸಿಲುಗಳು ಆಗಿರುವುದು. ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲೂ 6 ಪೆನ್ಸಿಲುಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ?

6 ಪೆನ್ಸಿಲುಗಳು ಮತ್ತು 8 ಪೆನ್ನುಗಳಾದರೋ?

	ಪೆನ್ಸಿಲು	ಪೆನ್ನು	ಬೆಲೆ
	3	4	66
$\times 2$	6	3	72
	→ 6	8	132

ಮೂರನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಸಾಲಿಗಿಂತ ಬೆಲೆಯು ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ?

ಯಾಕೆ?

60 ರೂಪಾಯಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು, 5 ಪೆನ್ನಿನ ಮಾತ್ರ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

ಆಗ, ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ 12 ರೂಪಾಯಿ. ಇನ್ನು ಮೊದಲ ಸಾಲಿನಿಂದ, 3 ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆಯು $66 - 48 = 18$ ರೂಪಾಯಿ. ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ 6 ರೂಪಾಯಿ ಎಂಬುದಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಈ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ನೋಡೋಣ. ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ x ರೂಪಾಯಿ ಎಂದೂ ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು y ರೂಪಾಯಿಯೆಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಲೆಕ್ಕದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ರೀತಿಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

3 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 4 ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ 66 ರೂಪಾಯಿ.

$$3x + 4y = 66$$

6 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 3 ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ 72 ರೂಪಾಯಿ.

$$6x + 3y = 72$$

6 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 8 ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ 132 ರೂಪಾಯಿ

$$6x + 8y = 2(3x + 4y) = 132$$

ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು 5 ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ

$$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 5y$$

ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು 60 ರೂಪಾಯಿ

$$132 - 72 = 60$$

5 ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ 60 ರೂಪಾಯಿ

$$5y = 60$$

ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ 12 ರೂಪಾಯಿ

$$y = 12$$

3 ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆಯು, 66 ರೂಪಾಯಿಯಿಂದ 4 ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಳೆದಿರುವುದು.

$3x = 66 - (4 \times 12) = 18$

ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ, 6 ರೂಪಾಯಿ

$$x = 6$$

ಈ ರೀತಿ ಮಾಡಿರುವುದನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಳಿಸಿರಿ. ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಿಂದ ಲಭಿಸಿದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿ ಬರೆಯೋಣ. ಅವುಗಳನ್ನು 1 ನೇ ಸಮವಾಕ್ಯವೆಂದೂ, 2 ನೇ ಸಮವಾಕ್ಯವೆಂದೂ ಹೇಳೋಣ:

$$3x + 4y = 66 \qquad (1)$$

$$6x + 3y = 72 \qquad (2)$$

ವಿಭಿನ್ನವಲ್ಲದ ಮಾಹಿತಿಗಳು

ರಾಮು 7 ರೂಪಾಯಿ ಕೊಟ್ಟು ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು ಒಂದು ಪೆನ್ನನ್ನು ಪಡಕೊಂಡನು. ಅಜು 4 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 4 ಪೆನ್ನನ್ನೂ ಪಡಕೊಂಡನು; 28 ರೂಪಾಯಿಯಾಯಿತು. ಈ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅವರು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರು. ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ x ಎಂಬುದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೊದಲು ಹೇಳಿರುವುದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು $7 - x$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಮಾಡಿದರು.

ಎರಡನೇ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ

$$4x + 4(7 - x) = 28$$

ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆದರು. ಇದನ್ನು ಸರಳ ಗೊಳಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸಿರುವುದೋ? $28 = 28$

ಇಲ್ಲಿ ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ x ಎಂದೂ ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ y ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರುತ್ತಿದ್ದರೋ?

$$x + y = 7$$

$$4x + 4y = 28$$

ಎರಡನೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು

$$4(x + y) = 28$$

ಎಂಬುದಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ ಪುನಃ

$$x + y = 7$$

ಎಂದಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ ಲಭಿಸುವುದು?

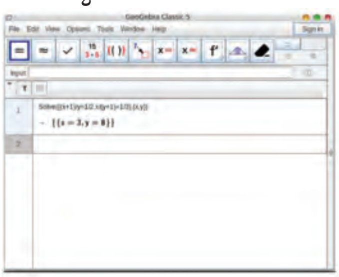
ಅಂದರೆ, ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಎರಡಾಗಿ ಹೇಳಿರುವುದಾದರೂ, ಬೆಲೆಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮಾತ್ರವೇ ಯಥಾರ್ಥವಾಗಿ ಹೇಳಿರುವುದು. ಅದನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಬೀಜಗಣಿತ

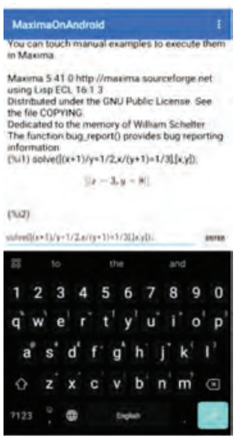
ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಸಂಕೀರ್ಣವಾದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲೂ ಕಂಪ್ಯೂಟರನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಸಜ್ಜುಗೊಳಿಸಿದ ಸೋಫ್ಟ್‌ವೇರ್ ಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ Computer Algebra System (CAS) ಅಥವಾ Symbolic Algebra System ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯಲ್ಪಡುವುದು.

SageMath, Maxima ಎಂಬಿವುಗಳಾಗಿವೆ ಈ ರೀತಿಯ ಪ್ರಧಾನವಾಗಿರುವ ಸ್ವತಂತ್ರ ಸೋಫ್ಟ್ ವೇರ್ ಗಳು.

GeoGebra ಕ್ಕೂ ಬೀಜಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.



ಆಂಡ್ರೋಯಿಡ್ ಫೋನ್ ಗಳಲ್ಲೂ GeoGebra ಮತ್ತು Maxima ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.



ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರಾದಲ್ಲಿನ CAS ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $5x + 2y = 20$, $2x + 3y = 19$ ಎಂಬೀ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು

CAS ತೆರೆದು (view → CAS)

Solve ({5x + 2y = 20, 2x + 3y = 19}, {x, y})

ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದು.

$3x + 4y$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 66 ಆಗಿದೆಯೆಂದು 1ನೇ ಸಮವಾಕ್ಯ ಹೇಳುವುದು; ಆಗ ಅದರ ಎರಡು ಮಡಿಯು 132 ಆಗಿದೆ.

$$6x + 8y = 132 \qquad (3)$$

ಇನ್ನು 2ನೇ ಸಮವಾಕ್ಯ ಮತ್ತು 3ನೇ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ, ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 132 - 72$$

ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ

$5y = 60$ ಎಂದೂ

ಅದರಿಂದ $y = 12$ ಎಂದೂ ಲಭಿಸುವುದು.

ಬಳಿಕ 1 ನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ y ಆಗಿ 12 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$3x + (4 \times 12) = 66$$
$$3x = 66 - 48 = 18$$
$$x = 6$$

ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

(1) ನಾಲ್ಕು ಪೆನ್ನುಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಪೆನ್ಸಿಲುಗಳಿಗೆ ಸೇರಿ ಒಟ್ಟು 66 ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿದೆ. ಏಳು ಪೆನ್ನುಗಳು ಮತ್ತು ಮೂರು ಪೆನ್ಸಿಲುಗಳಿಗೆ ಒಟ್ಟು 111 ರೂಪಾಯಿ ಆದರೆ ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು? ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆಯೋ?

(2) ಒಂದು ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ 26 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಈ ಆಯತದ ಉದ್ದವನ್ನು ಎರಡು ಮಡಿ ಮತ್ತು ಅಗಲವನ್ನು ಮೂರು ಮಡಿಯನ್ನಾಗಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿದಾಗ ಸುತ್ತಳತೆಯು 62 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಯಿತು. ಮೊದಲ ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ ನೋಡೋಣ :

ಸಣ್ಣ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಐದು ಸಲ ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಲ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿಸಿ ಒಂದು ಬಾಲ್ದಿಗೆ ಎರೆದಾಗ 20 ಲೀಟರ್ ಆಯಿತು. ಸಣ್ಣ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಲವೂ ದೊಡ್ಡ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ಸಲವೂ ನೀರನ್ನು ತುಂಬಿಸಿ ಎರೆದಾಗ 19 ಲೀಟರ್ ಆಗುವುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ನೀರು ತುಂಬುವುದು?

ಸಣ್ಣ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ x ಲೀಟರ್ ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ y ಲೀಟರ್ ನೀರು ಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ:

$$5x + 2y = 20 \quad (1)$$

$$2x + 3y = 19 \quad (2)$$

ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ (1) ರಲ್ಲಿ $2x$ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ, $\frac{2}{5}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು; ಬದಲಾಗಿ, (2) ರಲ್ಲಿ $5x$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, $\frac{5}{2}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆ ಇದನ್ನು ಮಾಡಲು ಏನಾದರೂ ವಿಧಾನಗಳಿವೆಯೇ? ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಯಾವುದರಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ. 1ನೇ ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದಲೂ, 2ನೇ ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಿ, ಸಮವಾಕ್ಯಗಳ x ನ ಸಂಖ್ಯಾಗುಣಕಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದೇ?

$$(1) \times 2: \quad 10x + 4y = 40 \quad (3)$$

$$(2) \times 5: \quad 10x + 15y = 95 \quad (4)$$

ಇನ್ನು (4) ರಿಂದ (3) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

$$11y = 55$$

ಎಂದೂ, ಅದರಿಂದ

$y = 5$ ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು.

ಬಳಿಕ, ಇದನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ x ನ ಬೆಲೆ ಸಿಗುವುದು:

$$5x + 10 = 20$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

ಹೀಗೆ ಸಣ್ಣ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ 2 ಲೀಟರ್ ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ 5 ಲೀಟರ್ ನೀರು ಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರ

ಪೆನ್ಸಿಲು-ಪೆನ್ನು ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ x, y ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದೆವಲ್ಲವೇ? ಇತರ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಪಾತ್ರೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಆರಂಭಿಸೋಣ.

ಸಣ್ಣ ಪಾತ್ರೆ	ದೊಡ್ಡ ಪಾತ್ರೆ	ನೀರು
5	2	20
2	3	19

ಬಳಿಕದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

	5	2	20	
×2	2	3	19	
	10	4	40	×5
	10	15	95	

ಇನ್ನು ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಸಾಲು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

−	10	4	40
	10	15	95

÷ 11	0	11	55
	0	1	5

ಆಗ ದೊಡ್ಡ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ 5 ಲೀಟರ್. ಇನ್ನು ಸಣ್ಣ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ 2 ಲೀಟರ್ ಎಂದು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲೇ ಗಣನೆ ಮಾಡಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡುವುದಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲು ಪ್ರಾಚೀನ ಚೀನದ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದರು.

(1) ಎರಡು ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣು ಮತ್ತು ಮೂರು ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಸೇಬು ಹಣ್ಣಿಗೆ ಸೇರಿ ಒಟ್ಟು 520 ರೂಪಾಯಿ. ಮೂರು ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣು ಮತ್ತು ಎರಡು ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಸೇಬು ಹಣ್ಣಿಗೆ ಸೇರಿ ಒಟ್ಟು 480 ರೂಪಾಯಿ ಆದರೆ ಒಂದು ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಕಿತ್ತಳೆ ಹಣ್ಣಿನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು? ಸೇಬಿನ ಬೆಲೆಯೋ?

(2) 1 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಸರಿಗೆಯನ್ನು ಎರಡಾಗಿ ತುಂಡರಿಸಿ, ಒಂದು ತುಂಡನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನೂ ಇನ್ನೊಂದು ತುಂಡನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಚೌಕದ ಭುಜದ ಮೂರು ಮಡಿ ಮತ್ತು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜದ ಎರಡು ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 71 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಲಭಿಸಿತು. ತುಂಡರಿಸಿದ ಸರಿಗೆಗಳ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು?

(3) ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ಮೊದಲು ರಹೀಮಿನ ಪ್ರಾಯವು ರಾಮುವಿನ ಪ್ರಾಯದ ಮೂರು ಮಡಿಯಾಗಿತ್ತು. ಎರಡು ವರ್ಷ ಕಳೆಯುವಾಗ ಇದು ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವುದು. ಅವರ ಈಗಿನ ಪ್ರಾಯ ಎಷ್ಟು?

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ:

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕು ಮಡಿ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರು ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 43 ಲಭಿಸಿತು. ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರು ಮಡಿಯಿಂದ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯನ್ನು ಕಳೆದಾಗ 11 ಲಭಿಸಿತು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದೂ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ y ಎಂಬುದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಆರಂಭಿಸೋಣ.

ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ,

$$4x + 3y = 43 \qquad (1)$$

$$3x - 2y = 11 \qquad (2)$$

ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆ ಸಮವಾಕ್ಯ (1) ನ್ನು 3 ರಿಂದಲೂ, ಸಮವಾಕ್ಯ (2) ನ್ನು 4 ರಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಿ ಬರೆದರೆ,

$$(1) \times 3 : \; 12x + 9y = 129 \qquad (3)$$

$$(2) \times 4 : \; 12x - 8y = 44 \qquad (4)$$

ಇನ್ನು (3) ರಿಂದ (4)ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

$$12x + 9y - (12x - 8y) = 129 - 44$$

$$12x + 9y - 12x + 8y = 85$$

$$17y = 85$$

$$y = 5$$

ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು.

ಬಳಿಕ $y = 5$ ಎಂಬುದನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$4x + 15 = 43$$

$$4x = 28$$

$$x = 7$$

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ 7 ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು.

ಮತ್ತೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 28 ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸ 12 ಆಗಿದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮೊದಲು ಮಾಡಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದೂ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು y ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನಾಗಿ ಬರೆದು ನೋಡೋಣ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ $x + y = 28$

ವ್ಯತ್ಯಾಸ $x - y = 12$

ಈ ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳ ಮೊತ್ತ

$$(x + y) + (x - y) = 28 + 12$$

ಅಂದರೆ, $2x = 40$

$$x = 20$$

ಇನ್ನು ಇವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

$$(x + y) - (x - y) = 28 - 12$$

$$x + y - x + y = 16$$

ಅಂದರೆ, $2y = 16$

$$y = 8$$

ಆಗ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ 20 ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಈ ಲೆಕ್ಕದಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿ ಲಭಿಸುವುದು.

$$(x + y) + (x - y) = 2x$$

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದಿಂದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿ ಲಭಿಸುವುದು.

$$(x + y) - (x - y) = 2y$$

ಲೆಕ್ಕವೂ ವಾಸ್ತವವೂ

10 ಮೀಟರ್ ಸುತ್ತಳತೆಯಿರುವ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. ಉದ್ದವು ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ 5.5 ಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬೇಕು. ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಅಗಲ x ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಉದ್ದವು $x + 5.5$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಸುತ್ತಳತೆ 10 ಮೀಟರ್ ಆಗಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$x + (x + 5.5) = \frac{10}{2} = 5$$

ಅಂದರೆ,

$$2x + 5.5 = 5$$

ಅಥವಾ

$$2x = -0.5$$

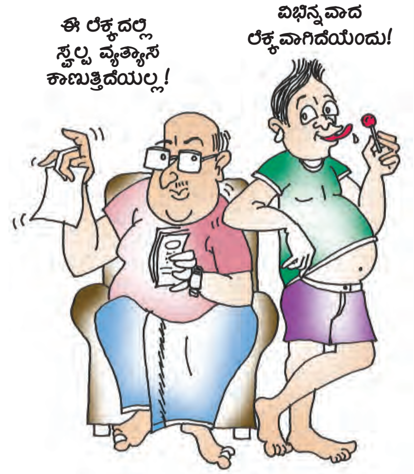
ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ. ಆಯತದ ಅಳತೆಗಳು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವುದು ಹೇಗೆ?

ಇದರ ಅರ್ಥವು, ಈ ನಿಬಂಧನೆಗಳೆರಡೂ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ. ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಅಗಲ x ಮತ್ತು ಉದ್ದ y ಎಂದು ತೆಗೆಯುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳಿಂದ ಲಭಿಸುವ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು

$$x + y = 5$$

$$y - x = 5.5$$

ಇವುಗಳೆರಡೂ ಸರಿಹೊಂದುವ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲವೆಂದು ಫಕ್ಕನೆ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. (ಎರಡು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದಾಗಿರಬಾರದಲ್ಲವೇ).



(1) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಣ್ಣ ಕೋನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $20°$ ಆಗಿದೆ. ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವು 2 ರಂತೆ ಲಭಿಸಿತು. ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ 5 ಮಡಿಯನ್ನು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗಲೂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವು 2 ಆಗಿರುವುದು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

(3) ಎರಡಂಕೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ 11 ಆಗಿದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 27 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

(4) ಹದಿನೇಳು ಟ್ರೋಫಿ ಮತ್ತು ಹದಿನಾರು ಮೆಡಲುಗಳಿಗೆ ಸೇರಿ ಒಟ್ಟು 2180 ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿದೆ. ಹದಿನಾರು ಟ್ರೋಫಿಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಹದಿನೇಳು ಮೆಡಲುಗಳಿಗೆ ಒಟ್ಟು 2110 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆಯಾಗಿರುವುದಾದರೆ ಒಂದು ಟ್ರೋಫಿಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು? ಒಂದು ಮೆಡಲಿನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

(5) u ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ a ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡಿನ ಪ್ರಕಾರ ವೇಗವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ನೇರ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ಒಂದು ವಸ್ತು t ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ದೂರವು $ut + \frac{1}{2}at^2$ ಆಗಿದೆ. ಒಂದು ವಸ್ತು 2 ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 10 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 4 ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 28 ಮೀಟರ್ ಸಂಚರಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರಯಾಣದ ಪ್ರಾರಂಭದ ವೇಗ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು? ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುವ ವೇಗದ ದರ ಎಷ್ಟು?

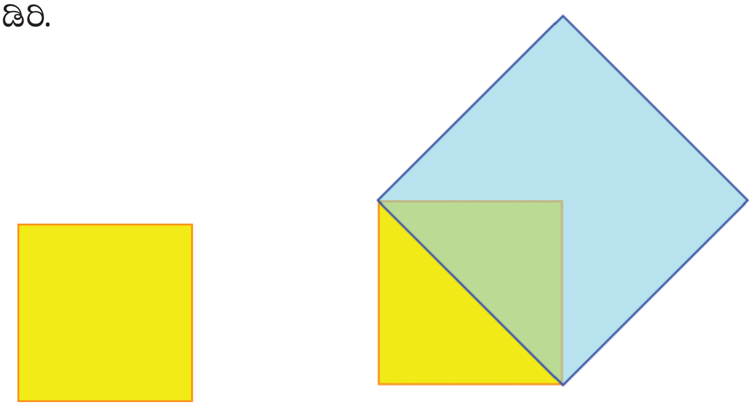
(6) ಎರಡಂಕೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅದರ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಆರು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅದರ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತದ 4 ಮಡಿಗಿಂತ 9 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ. ಆ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

(7) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 11 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯೂ, ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 20 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯೂ ಲಭಿಸಿತು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

2 ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಉದ್ದಗಳೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ

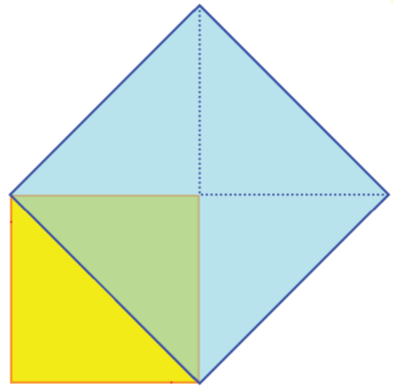
ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಒಂದು ಚೌಕ ಮತ್ತು ಅದರ ಕರ್ಣದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸಣ್ಣ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಎಷ್ಟು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ?

ಕರ್ಣವು ಸಣ್ಣ ಚೌಕವನ್ನು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವುದಲ್ಲವೇ. ಇಂತಹ ಎಷ್ಟು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸೇರಿರುವುದಾಗಿದೆ ದೊಡ್ಡ ಚೌಕ?



ಆಗ ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸಣ್ಣ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

ಸಣ್ಣ ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ 1 ಮೀಟರ್ ಆದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 1 ಚದರಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 2 ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದು.

ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

ಅದು ಸಣ್ಣ ಚೌಕದ ಕರ್ಣ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ 1 ಮೀಟರಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು.

ಎರಡು ಭುಜಗಳು 1 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜವು 2 ಮೀಟರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದು.

ಒಂದು ಮತ್ತು ಎರಡರ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಬಹುದು. ಆದರೆ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಎರಡು ಚದರ ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಭುಜದ ಉದ್ದವಾಗಿರುವ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಎರಡು ಆಗಿರಬೇಕು.

ಯಾವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಎರಡು ಆಗಿರುವುದು?

ಒಂದೂವರೆಯಾಗಬಹುದೇ?

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

ಅದು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ; ಒಂದೂ ಕಾಲು ಆದರೋ?

$$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 1\frac{9}{16}$$

ಅದು ಕಡಿಮೆಯಾಯಿತು.

ಒಂದು ಮೂರನೇ ಒಂದು ಆದರೋ?

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = 1\frac{7}{9}$$

ಅದೂ ಕಡಿಮೆಯೇ, ಆದರೂ ಒಂದೂ ಕಾಲಿಗಿಂತ ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ.

ಹೀಗೆ ಹಲವು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿಕೊಂಡು ಪರಿಶೋಧಿಸಿದರೆ ವರ್ಗಗಳು 2 ಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ನಿಕಟವಾಗುವುದಲ್ಲದೆ, ನಿಖರವಾಗಿ 2 ಸಿಗಲಾರದು. ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲವೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. (ಪಾಠಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾದ ಅನುಬಂಧವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.)

ಅಂದರೆ,

ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ 2 ಅಲ್ಲ.

ಹಾಗಾದರೆ ನಮ್ಮ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆ ಏನಾಯಿತು?

ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ 1 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು 1 ಮೀಟರಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯಾ ಮಡಿಯಾದರೆ ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು 2 ಆಗಬೇಕು. (ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾದರೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ವರ್ಗವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ.)

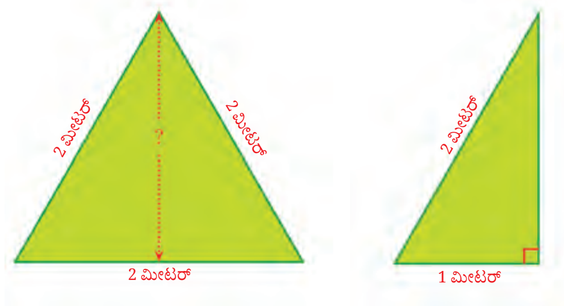
ಆದರೆ ವರ್ಗ 2 ಆಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲ.

ಅಂದರೆ,

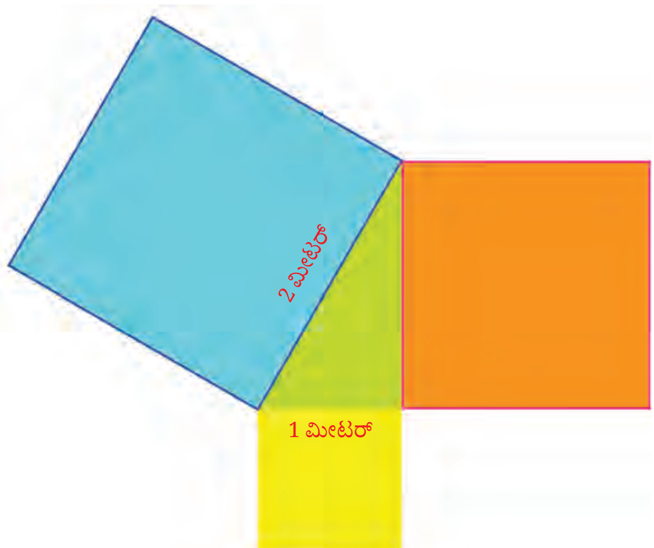
ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 1 ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವನ್ನು ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಹೀಗೆ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಯೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಯೋ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಅಳತೆಗಳು ಹಲವು ಇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಭುಜದ ಉದ್ದ 2 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಉನ್ನತಿ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಉನ್ನತಿಯ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಿ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಲಭಿಸುವುದಿಲ್ಲವೇ.



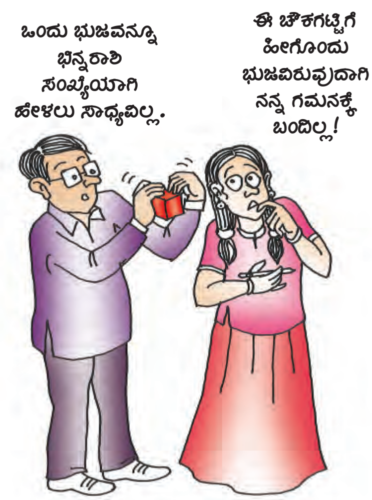
ಇದರ ಮೂರನೇ ಭುಜವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಚೌಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡೋಣ.



ಪೈಥಗೋರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ ಓರೆಂಜ್ ಬಣ್ಣದ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 4 – 1 = 3 ಚದರ ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಆಗ ಅದರ ಭುಜದ ಉದ್ದ 1 ಮೀಟರಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯಾ ಮಡಿಯಾದರೆ, ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ 3 ಆಗಬೇಕು.

ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ 2 ಅಲ್ಲವೆಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡಂತೆ, ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ 3 ಸಹಾ ಅಲ್ಲವೆಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.



ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಘನಫಲ 2 ಘನ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕೆಂದಿರಲಿ. ಇದರ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು? ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ 2 ಅಲ್ಲ ಎಂಬಂತೆಯೇ ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರನೇ ಘಾತವೂ 2 ಅಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಚೌಕಗಟ್ಟಿಯ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಈ ರೀತಿ ಹಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಉದ್ದಗಳು ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಬರುವುದು.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಉಂಟಾಗುವುದು

ಯಾವುದನ್ನೇ ಆದರೂ ಅಳೆದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರಪಂಚವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವ. ಇದುವೇ ಗಣಿತದ ಒಂದು ಪ್ರಧಾನ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿದೆ.

ಅಳತೆಗೊಳಪಡುವುದರ ಸ್ವಭಾವವು ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಬೇಕಾದೀತು. ಪ್ರಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ ಸಿಗುವ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತಿಂದು ಬದುಕುವ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಮಾನವನಿಗೆ ಗುಂಪಿನ ಸದಸ್ಯರ ಸಂಖ್ಯೆ, ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವುಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಅಗತ್ಯವಾಗಿತ್ತಷ್ಟೆ. ಆ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಸಾಕಾಗಿತ್ತು.

ಕ್ರಿ.ಪೂ. ಐದು ಸಾವಿರದ ಸುಮಾರಿಗೆ ನದೀ ದಡದಲ್ಲಿ ಶಾಶ್ವತವಾಗಿ ವಾಸವಾಗಿದ್ದು ಕೃಷಿ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೃಷಿಭೂಮಿಯನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಲು, ವಸತಿಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಹಲವು ರೀತಿಯ ಉದ್ದ, ವಿಸ್ತಾರಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿ ಬಂದಿತು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಎಂಬ ಸಂಕೇತ ಉಂಟಾಯಿತು. ಪಾಲು ಹಂಚುವಾಗಲೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಗತ್ಯವಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದರೊಂದಿಗೆ ಹೊಸ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅನಿವಾರ್ಯತೆ ಉಂಟಾಯಿತು.

ಇಂದಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಭೌತಿಕ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗಲ್ಲದೆ ಗಣಿತದ ಸೌಂದರ್ಯಕ್ಕಾಗಿಯೂ ಹೊಸ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಂಟುಮಾಡಲಾಯಿತು. ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (Complex numbers) ಎಂಬಿವುಗಳು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದವುಗಳಾಗಿವೆ. ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದಂತಿರುವ ಇತರ ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುವುದು ಎಂಬುದು ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರ.

ಅಳತೆಗಳೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ

ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೋ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಹೊಸಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಂಟು ಮಾಡಬೇಕು. ನಾವು ನೋಡಿದ ಮೊದಲ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 1 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೇಗೆ ಸೂಚಿಸಬಹುದು?

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಹೀಗೂ ಕೇಳಬಹುದು: ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 2 ಚದರ ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೇಗೆ ಸೂಚಿಸಬಹುದು?

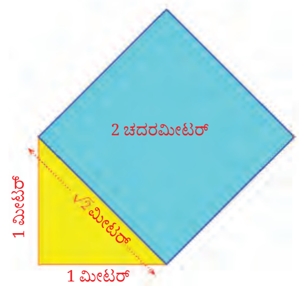
ಭುಜವು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಆಗಿರುವ ಚೌಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಉದ್ದವು ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ವರ್ಗಮೂಲವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 4 ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಅಳತೆ $\sqrt{4} = 2$ ಮೀಟರ್,

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $2\frac{1}{4}$ ಚದರಮೀಟರ್ ಆದರೆ ಭುಜದ ಉದ್ದ $\sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}$ ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ,

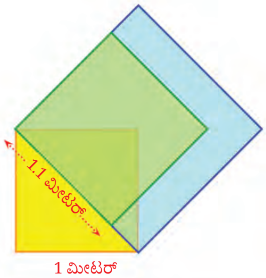
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 2 ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದ $\sqrt{2}$ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

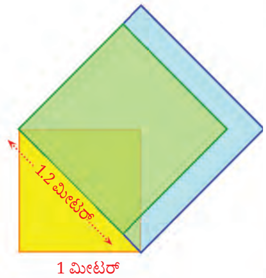


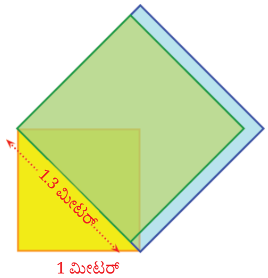
ಉದ್ದವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಒಂದು ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಸಾಲದಲ್ಲವೇ. ಅದರ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು, ಗೊತ್ತಿರುವ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಹೊಂದಿಸಿ ನೋಡಬೇಕಲ್ಲವೇ?

ಅದಕ್ಕಾಗಿರುವ ವಿಧಾನ, ಈ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೇ ಆಗಿದೆ. ಈ ರೀತಿ ಉದ್ದವನ್ನು ಕರ್ಣವಾಗಿಯೇ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಇವು ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ಚೌಕಗಳು, ಕರ್ಣವು ಭುಜವಾಗಿರುವ ಚೌಕಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ನಿಕಟವಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ.

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.







ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾಗಿ ಮಾತ್ರವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಈ ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು 2 ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವುದು. ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$1.1^2 = 1.21$$

$$1.2^2 = 1.44$$

$$1.3^2 = 1.69$$

$$1.4^2 = 1.96$$

$$\mathbf{1.5^2 = 2.25}$$

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಏನನ್ನು ನೋಡಿದೆವು?

$$1.4^2 < 2 < 1.5^2$$

ವರ್ಗಗಳು 2 ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸೋಣ.

ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$1^2 < 2 < 2^2$$

ಹತ್ತನೇ ಒಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ?

ಕುಸಿಯುವ ನಂಬಿಕೆಗಳು

ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೋಲಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದಾಗಿ ಕ್ರಿ.ಪೂ. ಆರನೇ ಶತಮಾನದ ಪೈಥಗೋರಸ್ ಮತ್ತು ಆತನ ಶಿಷ್ಯರ ನಂಬಿಕೆಯಾಗಿತ್ತು. ಇನ್ನೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದೇ ಈ ನಂಬಿಕೆಯಾಗಿತ್ತು. ಆದರೆ ಒಂದು ಚೌಕದ ಕರ್ಣದ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ಭುಜದ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಈ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ $a : b$ ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕಾದರೆ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು ಭುಜದ $\frac{a}{b}$ ಮಡಿಯಾಗಿರಬೇಕು. ಹಾಗಾದರೆ ಕರ್ಣದ ವರ್ಗವು ಭುಜದ ವರ್ಗದ $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ ಮಡಿಯಾಗಬೇಕು. ಕರ್ಣದಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕವು ಭುಜದ ಚೌಕದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ ಆಗಬೇಕು. ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿದೆವಲ್ಲವೇ.

ಪೈಥಗೋರಸನ ಶಿಷ್ಯನೇ ಆದ ಹಿಪ್ಪಾರಸ ಈ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದನೆಂದು ತಿಳಿಯಲಾಗಿದೆ.

ಚೌಕದ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಭುಜಗಳಿರುವಂತೆ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೋಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಅಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಅಳತೆಗಳು (incommensurable magnitudes) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

$$\left(1\frac{4}{10}\right)^2 < 2 < \left(1\frac{5}{10}\right)^2$$

ನೂರನೇ ಒಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ?

$$1.41^2 = 1.9881$$

$$1.42^2 = 2.0164$$

ಆಗ

$$1.41^2 < 2 < 1.42^2$$

ಅಥವಾ

$$\left(1\frac{41}{100}\right)^2 < 2 < \left(1\frac{42}{100}\right)^2$$

ಈ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ,

$1.4^2 = 1.96$	$1.5^2 = 2.25$
$1.41^2 = 1.9881$	$1.42^2 = 2.0164$
$1.414^2 = 1.999396$	$1.415^2 = 2.002225$
$1.4142^2 = 1.99996164$	$1.4143^2 = 2.00024449$
$1.41421^2 = 1.9999899241$	$1.41422^2 = 2.0000182084$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಐದು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ (ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಒಂದುಗಳ ವರೆಗೆ) ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$1.41421^2 < 2 < 1.41422^2$$

ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

$1\frac{4}{10}, 1\frac{41}{100}, 1\frac{414}{1000}, 1\frac{4142}{10000}, 1\frac{41421}{100000}$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು 2 ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತವೆ.

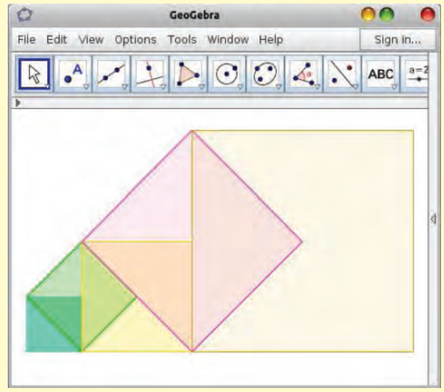
ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ,

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421 ಎಂಬಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು 2 ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವುದು.

ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\sqrt{2} = 1.41421...$$

ಹಾಗಾದರೆ $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ ಬರೆದರೆ 1.4, ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಬರೆದರೆ 1.41, ಎಂಬಂತೆ ಹೇಳಬಹುದು.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ. ಇಂತಹ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ. (Regular polygon Tool ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು). Area ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದರಲ್ಲಿ ಯಾವೆಲ್ಲ ಚೌಕಗಳ ಭುಜಗಳನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವುದು?

ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ

$$2 - 1.4^2 = 0.04$$

$$2 - 1.41^2 = 0.0119$$

$$2 - 1.414^2 = 0.000604$$

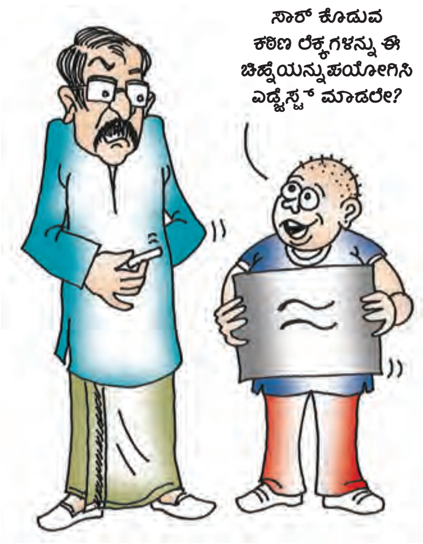
$$2 - 1.4142^2 = 0.00003836$$

$$2 - 1.41421^2 = 0.0000100759$$

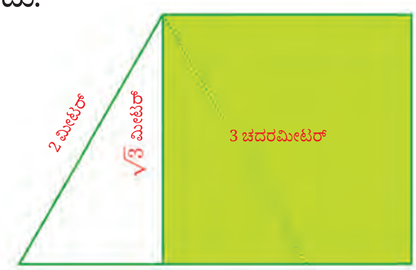
ಇದನ್ನು ಬರೆಯುವುದು,

$$\sqrt{2} \approx 1.4$$
$$\sqrt{2} \approx 1.41$$

ಎಂಬಂತಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ≈ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯ ಅರ್ಥ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನ ಎಂದಾಗಿದೆ.



ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ 2 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ಭುಜವಾಗಿ ರಚಿಸಿದ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 3 ಚದರ ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಉನ್ನತಿಯನ್ನು $\sqrt{3}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.



ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕಗಳಂತೆ, 1.7, 1.73, 1.732, ... ಎಂಬಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು 3 ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತವೆಯೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಚುಟುಕಾಗಿ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\sqrt{3} = 1.73205...$$

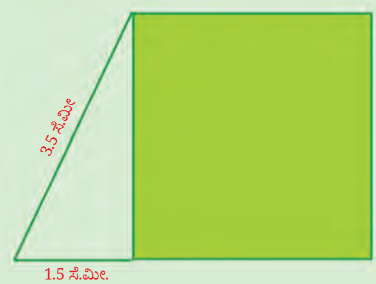
ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

x ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ x ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದವು $\sqrt{x}$ ಆಗಿರುವುದು.

ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ $\sqrt{x}$ ಒಂದು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಆಗಬಹುದು; ಅಲ್ಲವಾದರೆ, ವರ್ಗವು x ನ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವ, ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, $\sqrt{x}$ ನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

(1) ಯಾವುದೇ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ. ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ 7 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 11 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂಬೀ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಿರುವ ಚೌಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಯಾವುವು?

(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು? ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವೋ?



ಗೆರೆಯೂ ವರ್ಗಮೂಲವೂ

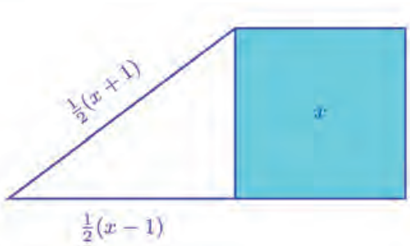
x ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ

$$(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$$

ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ ವರ್ಗಗಳ ಕುರಿತಿರುವ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ) ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಿಸಿ ಬರೆಯೋಣ.

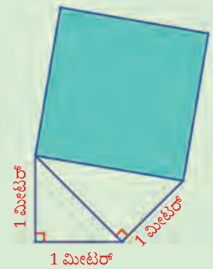
$$x = \left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(x-1)\right)^2$$

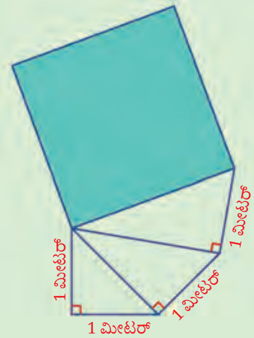
ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $x > 1$ ಆಗಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

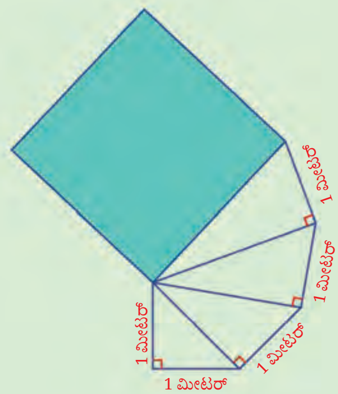


$x < 1$ ಆದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವು $\frac{1}{2}(1-x)$ ಆಗಿ ತೆಗೆಯಬೇಕು.

(3) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಭುಜದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



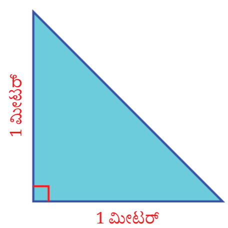




(4) $\sqrt{2}$ ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಮತ್ತು $\sqrt{3}$ ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದೂ ಆಗಿರುವ ಮೂರು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

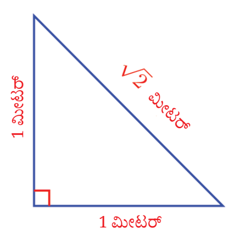
ಕೂಡಿಸುವುದೂ ಕಳೆಯುವುದೂ

ಲಂಬಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 1 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?



ಸುತ್ತಳತೆಯೋ?

ಇದರ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ $\sqrt{2}$ ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.



ಆಗ ಸುತ್ತಳತೆ ಲಭಿಸಲು 2 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು $\sqrt{2}$ ಮೀಟರನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಈ ಉದ್ದವನ್ನು $2+\sqrt{2}$ ಮೀಟರ್ ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯುವುದಾಗಿದೆ.

$\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142... ಎಂಬಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯುವುದಲ್ಲವೇ.

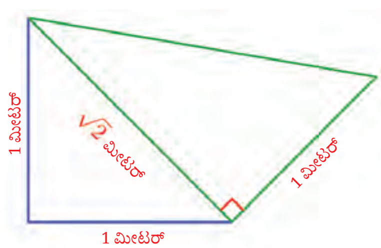
ಆಗ $2+\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಇವುಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ 2 ಕೂಡಿಸಿದುದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ 3.4, 3.41, 3.414, 3.4142, ... ಎಂಬೀ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

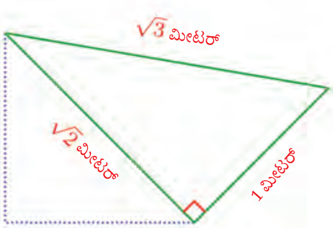
$$2+\sqrt{2} = 3.4142...$$

ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ನವರೆಗೆ ನಿಖರವಾದ ಅಳತೆ ಸಾಕೆಂದಿದ್ದರೆ ಸುತ್ತಳತೆ 3.41 ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾದ ಬೆಲೆ ಬೇಕೆಂದಾದರೆ 3.414 ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣವನ್ನು ಪಾದವಾಗುವಂತೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೋ?



ಇದರ ಮೂರನೇ ಭುಜದ ಉದ್ದ $\sqrt{3}$ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ.



ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳು

ಛೇದ 10 ರ ಘಾತಗಳಾಗುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದ್ದೇವೆ.

$$\frac{7}{10} = 0.7, \quad \frac{21}{100} = 0.21$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5, \quad \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0.25$$

ಬಳಿಕ ಆ ರೀತಿಯಲ್ಲದ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪವನ್ನುಂಟುಮಾಡಲಾಯಿತು.

$$\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \dots$$

ಎಂಬಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{1}{3}$ ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದರಿಂದ

$$\frac{1}{3} = 0.333...$$

ಎಂದು ಬರೆದೆವು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$\frac{1}{6} = 0.1666...$$

$$\frac{1}{11} = 0.090909...$$

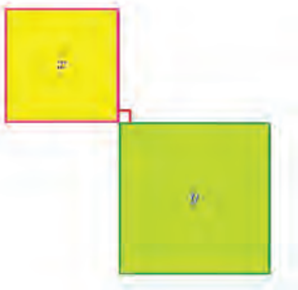
ಎಂಬುದಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$\sqrt{2} = 1.41421...$$

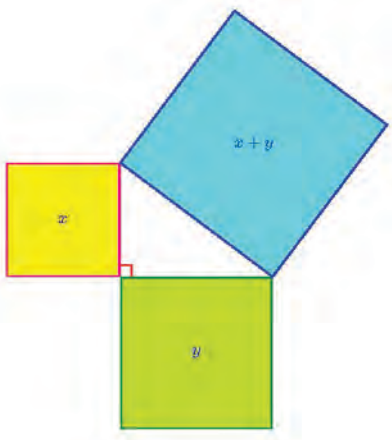
ಎಂದು ಬರೆಯುವುದೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಒಂದು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ. $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{11}$ ಇತ್ಯಾದಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಕೆಗಳ ಗುಂಪು ಆವರ್ತಿಸುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಆದರೆ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪಗಳು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆವರ್ತಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ವರ್ಗಮೂಲ

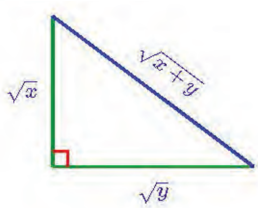
ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು x, y ಆಗಿರುವ ಎರಡು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿಡೋಣ.



ಇನ್ನು ಮೇಲಿನ ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೋ. ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?



ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?



ಇದರಿಂದ ಏನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು?

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{x+y}$$

ಇದರ ಸುತ್ತಳತೆ $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗಲು ಇವುಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

1.4	1.41	1.414	...	$\rightarrow$	$\sqrt{2}$
1.7	1.73	1.732	...	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$
3.1	3.14	3.146	...	$\rightarrow$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$

ಇವುಗಳೊಂದಿಗೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುವುದು.

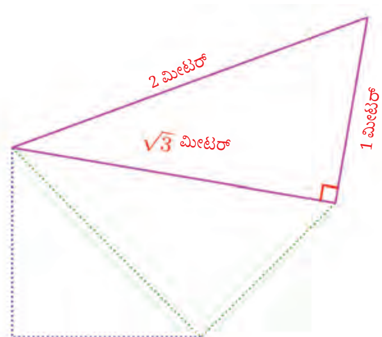
ಆಗ ಹೊಸ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ, ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ 4.146 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದು.

ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ, ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಗಿಂತ ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು?

ಸರಿಸುಮಾರು $4.146 - 3.414 = 0.732$ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು:

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})-(2+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{3}-2$$
$$= \sqrt{3}-1 \approx 0.732$$

ಇನ್ನು ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲೆಯೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೋ? ಅದರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?



ಇದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ಎರಡನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಗಿಂತ ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ?

ಹೊಸ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ, $2 + 1 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$ ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕದೇ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆಯೆಂದು ನೋಡೋಣ.

ಎರಡನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು?

ಆಗ ಸುತ್ತಳತೆಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

$$(3 + \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{2}$$

ಇದನ್ನು ಮೂರು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ

$$2 - 1.414 = 0.586$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಸುತ್ತಳತೆ ಸರಿಸುಮಾರು 586 ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್, ಅಥವಾ 58.6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವುದು.

ವ್ಯವಕಲನ

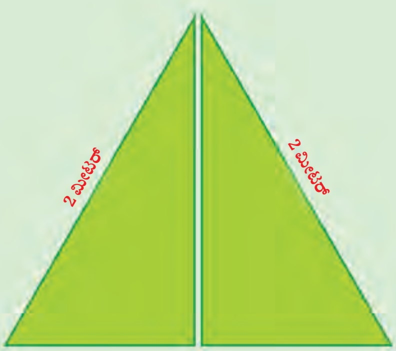
$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಂತೆ, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

1.7	1.73	1.732	...	→	$\sqrt{3}$
1.4	1.41	1.414	...	→	$\sqrt{2}$
0.3	0.32	0.318	...	→	$\sqrt{3} - \sqrt{2}$

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0.318$$

(1) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ $1\frac{1}{2}$ ಮೀಟರ್, ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜ $\frac{1}{2}$ ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

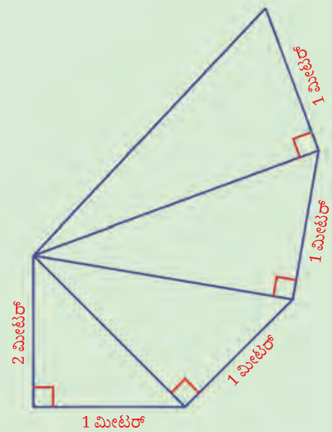
(2) ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಶಿರದ ಮೂಲಕ ಕತ್ತರಿಸಿ ಎರಡು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.



(i) ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ?

(ii) ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಗಿಂತ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಎಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ?

(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಈ ಮೊದಲೇ ಕಂಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ:



(i) ಈ ರೀತಿ ರಚಿಸಿದ ಹತ್ತನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(ii) ಹತ್ತನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಒಂಬತ್ತನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಗಿಂತ ಎಷ್ಟು ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ?

(4) ಲಂಬಭುಜಗಳು $\sqrt{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, $\sqrt{3}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು? ಲಂಬ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಕರ್ಣದ ಅಳತೆಗಿಂತ ಎಷ್ಟು ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ?

ಅನುಬಂಧ

ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ 2 ಅಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ನೋಡೋಣ.

ಹಾಗೆ ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವುದಾದರೆ, ಅದರ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದದ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಗಳು ಏನಾಗಿರುವುದೆಂದು ನೋಡೋಣ. ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಹಲವು ರೂಪಗಳಿರುವುದರಲ್ಲಿ, ಅತಿ ಸರಳವಾಗಿರುವ ಒಂದು ರೂಪವಿರುವುದಲ್ಲವೇ - ಅಂದರೆ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಕ್ಕೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಲ್ಲದ ರೂಪ. ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ (ವರ್ಗ 2 ಆಗಿರುವ) ಈ ರೂಪವು $\frac{x}{y}$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ x, y ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಇವುಗಳಿಗೆ ಬೇರೆ ಯಾವ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಗಳು ಇವೆ?

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2$$

ಅಂದರೆ,

$$\frac{x^2}{y^2} = 2$$

ಇದರಿಂದ

$$x^2 = 2y^2$$

ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು. ಆಗ x^2 ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. x ಏನಾಗಿರುವುದು?

ಎಲ್ಲಾ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಗಿರುವುದು. (ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು). ಆಗ x^2 ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ x ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು.

x, y ಎಂಬಿವುಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಲ್ಲ; x ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ y ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. (ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ 2 ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ) ಆಗ y ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಅಂದರೆ ನಾವು ಅನ್ವೇಷಣೆ ಮಾಡುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಶ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಛೇದ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಹೆಚ್ಚೇನಾದರೂ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ? ನಮ್ಮ ಅನ್ವೇಷಣೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸೋಣ. x ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೂ ಒಂದು ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಲಭಿಸುವುದು. ಅಂದರೆ $\frac{x}{2}$ ಒಂದು ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ. ಇದನ್ನು z ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$\frac{x}{2} = z$$

ಅಥವಾ,

$$x = 2z$$

ಇನ್ನು $x^2 = 2y^2$ ಎಂದು ಮೊದಲು ಬರೆದಿರುವುದರಲ್ಲಿ x ನ ಬದಲು $2z$ ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ

$$(2z)^2 = 2y^2$$

ಅಂದರೆ,

$$4z^2 = 2y^2$$

ಇದರಿಂದ

$$y^2 = 2z^2$$

ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು.

ಆಗ y^2 ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ, ಮೊದಲು x ನ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಕಂಡಂತೆ, y ಯೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಅದು ಹೇಗೆ ಸರಿಯಾಗುವುದು? y ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು ಎಂದಲ್ಲವೇ ಮೊದಲು ಹೇಳಿರುವುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಏನು ಸಂಭವಿಸಿತು? ಅತಿ ಸರಳ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ 2 ಆಗುವುದಾದರೆ ಅದರ ಛೇದ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಮೊದಲು ನೋಡಿದೆವು. ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಆಲೋಚಿಸಿದಾಗ ಈ ಛೇದವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ನೋಡಿದೆವು. ಇದೆರಡೂ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ.

ಇದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು 2 ಅಲ್ಲ ಎಂಬುದಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

3 ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು

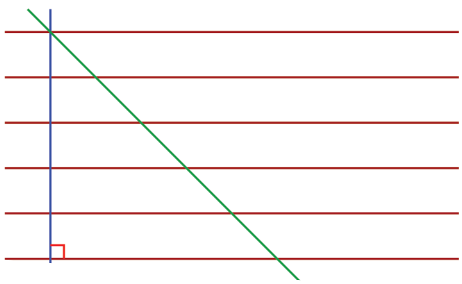
ಸಮಭಾಗ

ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳ ಕುರಿತು ಹಲವು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಕಲಿತೆವು; ಅವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹಲವಾರು ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದೆವು. ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳ ಅನೇಕ ವಿಶೇಷತೆಗಳು ಇನ್ನೂ ಇವೆ.

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಕೆಲವು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಲಂಬವಾದ ಒಂದು ಗೆರೆ ಇದೆ.

ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ; ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಲಂಬವನ್ನು ಸಮಾನ ಅಳತೆಯಿರುವ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದು.

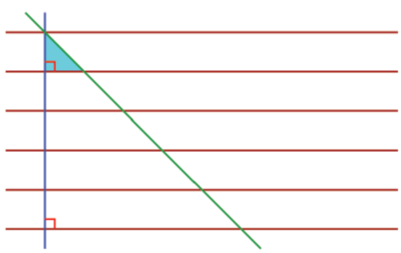


ಲಂಬದ ಬದಲು ಸ್ವಲ್ಪ ಓರೆಯಾಗಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆ ಎಳೆದರೋ?

ಈ ಗೆರೆಯನ್ನು ಕೂಡ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನ ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದು ಎಂದು ತೋರುವುದಿಲ್ಲವೇ? ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ಪರಿಶೋಧಿಸಬಹುದು?

ಅಳೆದು ನೋಡಬಹುದು;

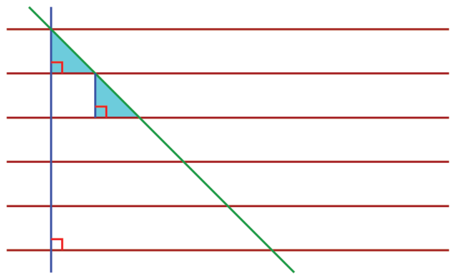
ಅಳೆದು ನೋಡುವ ಬದಲು ಯೋಚಿಸಿ ಹೇಳುವುದರಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲವೇ ಗಣಿತದ ಮೋಜಿರುವುದು. ಚಿತ್ರದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಕಾಣುತ್ತಿದೆಯೇ?



ST-509-5-MATHS (K)-9-VOL-1

ಇದರ ಮೇಲಕ್ಕೆ ನೇರವಾಗಿರುವ ಭುಜವು ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿದೆ; ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಕರ್ಣವು ಓರೆಯಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಸಣ್ಣ ಲಂಬವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ಸ್ವಲ್ಪ ಕೆಳಗೆ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಸಿಗುವುದು.

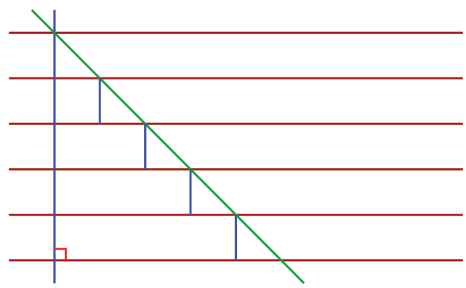


ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ಮೇಲಕ್ಕೆ ನೇರವಾಗಿರುವ (ನೀಲಿ) ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು (ಯಾಕೆ?) ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಈ ಲಂಬಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾದುದರಿಂದ, ಹಸಿರು ಗೆರೆ ಇವುಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಮಾನ ಬಾಗುವಿಕೆಯಲ್ಲಿರುವುದು.

ಅಂದರೆ, ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೇಲಕ್ಕೆ ನೇರವಾಗಿರುವ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವುಗಳ ಕರ್ಣಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದಲ್ಲವೇ.

ಆಗ ಓರೆಯಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು.

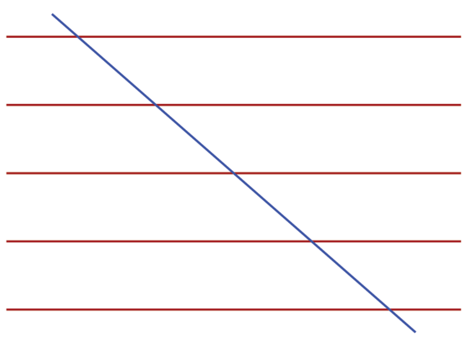
ಇದೇ ರೀತಿ ಇತರ ಭಾಗಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದೆಂದು ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ.



ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

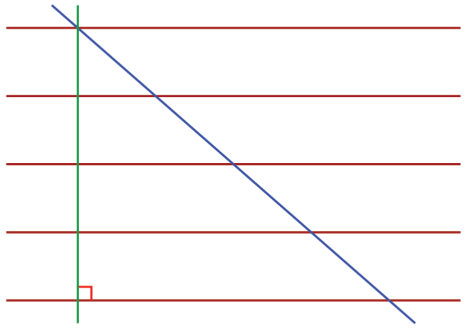
ಒಂದೇ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದು.

ತಿರುಗಿಸಿ ಆದರೋ? ಅಂದರೆ ಕೆಲವು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ. ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಒಂದೇ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವುದು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದೇ?

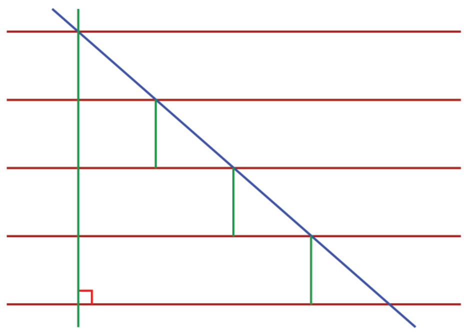


ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಓರೆಯಾಗಿರುವ ನೀಲಿ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದು. ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಒಂದೇ ಅಂತರದಲ್ಲಿವೆಯೇ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ ಸಮಸ್ಯೆ.

ಅಂದರೆ, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಸಿರು ಬಣ್ಣದಲ್ಲಿರುವ ಲಂಬವನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದೋ ಎಂದು ನೋಡಬೇಕು.



ಮೊದಲು ಮಾಡಿದ ಹಾಗೆ ಸಣ್ಣಲಂಬಗಳನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

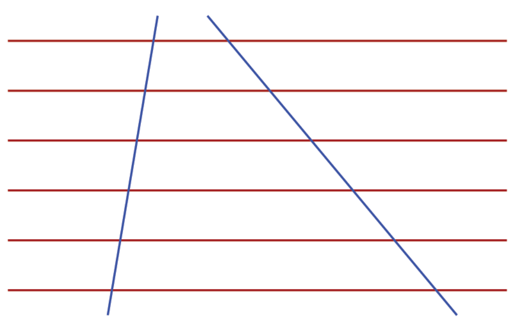


ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿದಂತೆ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಸಿಗುವ ಸಣ್ಣತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಕರ್ಣಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಲಂಬಭುಜಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು.

ಅಂದರೆ, ಮೊದಲ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿವೆ.

ಇದನ್ನು ಕೂಡ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವುದು.



ಈ ಎರಡು ತತ್ವಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು. ಕೆಲವು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದು ಎಂದು ಭಾವಿಸುವ. ಈಗ ನೋಡಿದ ತತ್ವವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಅವುಗಳು ಸಮಾನ

ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿದ ತತ್ವಕ್ಕೆ ಅನುಸರಿಸಿ ಅವುಗಳು ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದು.

ಅಂದರೆ,

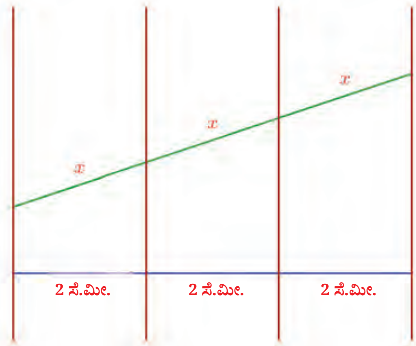
ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು, ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಛೇದಿಸುವುದು.

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯನ್ನು ಬೇಕಾದಷ್ಟು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡುವುದು ಹೇಗೆಂದು ನೋಡುವ.

6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಇದು ಸುಲಭವಾಗಿರುವುದು.

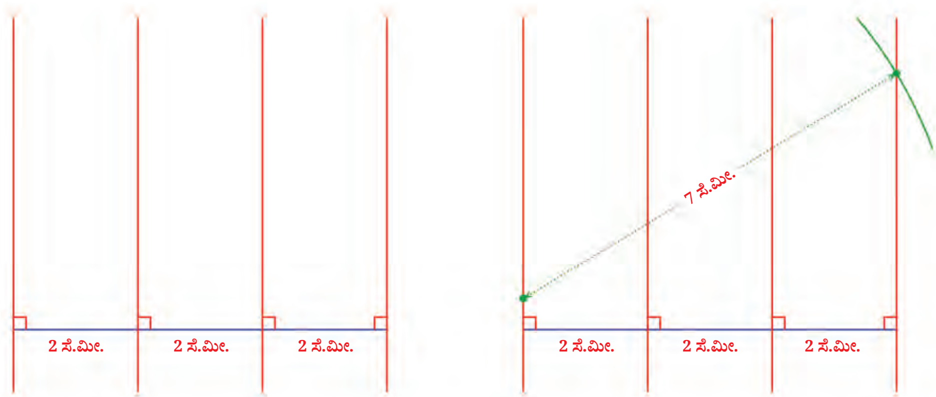
6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡುವ ನಾಲ್ಕು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು, ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡುವುದಲ್ಲವೇ.



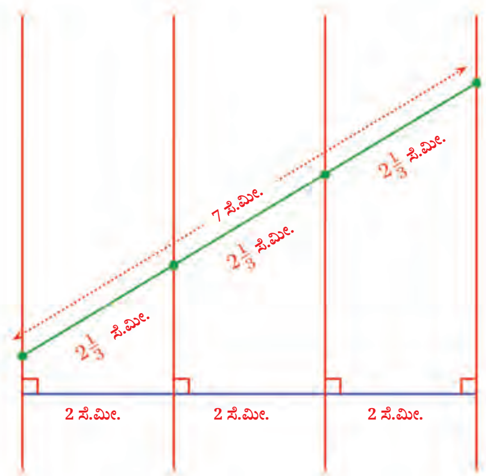
ಎರಡನೇ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮಾಡಿದರೋ?

ಹಾಗಾದರೆ ನಮ್ಮ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವ ದಾರಿಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಯಿತಲ್ಲವೇ?

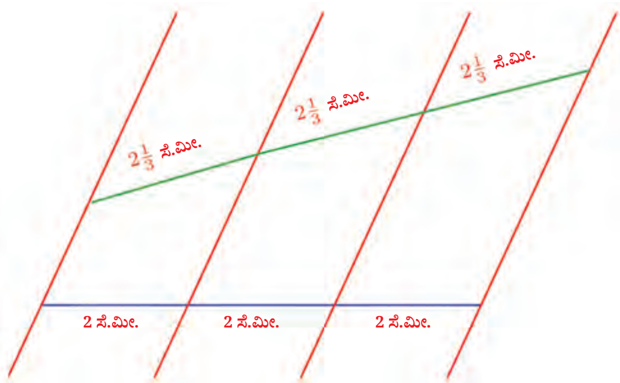
6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆ ಎಳೆದು, ಅದರಲ್ಲಿ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ; ಮೊದಲ ಲಂಬದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಚಾಪವನ್ನು ಎಳೆದು, ಇದು ಕೊನೆಯ ಲಂಬವನ್ನು ಖಂಡಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.



ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ, 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳು ದೊರಕುವುದು.



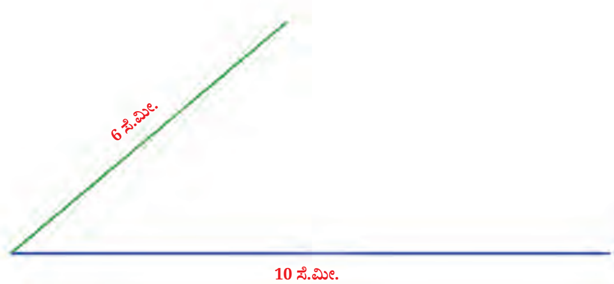
ಇದರಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯಿಂದ ಲಂಬಗಳನ್ನೇ ಎಳೆಯಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಓರೆಯಾಗಿಯೂ ಎಳೆಯಬಹುದು. ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರಬೇಕು ಎಂದು ಮಾತ್ರ.



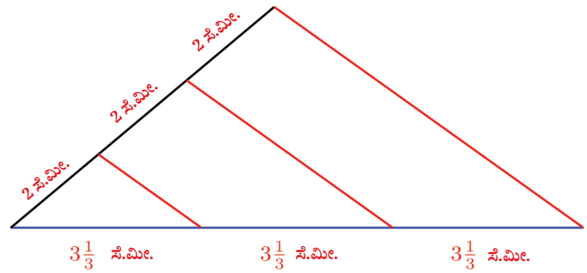
ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ :

10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿರಿ.

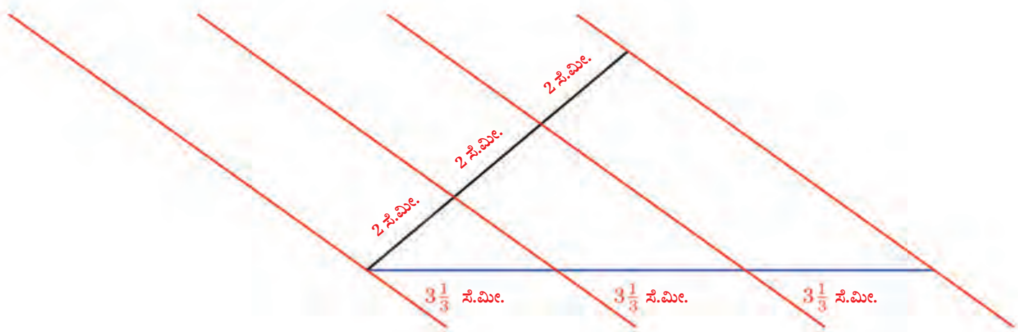
ಛೇದಿಸಬೇಕಾದ ಗೆರೆಯನ್ನು ಓರೆಯಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಬದಲು ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಎಳೆದು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವುದು ಸುಲಭ. ಇನ್ನು ಛೇದಿಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಈ ಗೆರೆಯ ಒಂದು ತುದಿಯಿಂದ ಓರೆಯಾಗಿ ಎಳೆಯಬಹುದು.



ಈ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆ ಎಳೆಯಬೇಕು. ಇನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಲು, ಓರೆಯಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ, ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ?

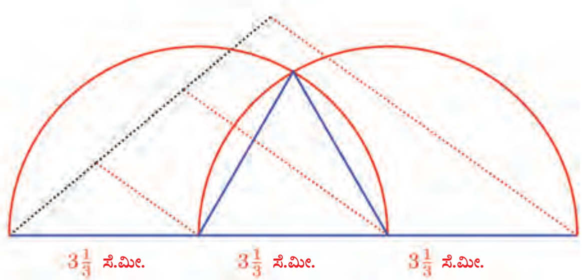


ಇದು ಯಾಕೆ ಎಂದು ಅರ್ಥವಾಗದಿದ್ದರೆ, ಸ್ವಲ್ಪ ಮುಂದುವರಿಸಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳನ್ನೂ ನಾಲ್ಕನೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಯೊಂದನ್ನೂ ಊಹಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.



ಹೀಗೆ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದೆವು.

ಈ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಮಾಡಿದರೋ?



ಭುಜಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ ಕಾರಣ ಇದೊಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. ಈ ಭುಜಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್; ಅಂದರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡುವ ಬದಲು, ನಾಲ್ಕು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ, ಇದೇ ರೀತಿ ಮೇಲೆ ಓರೆಯಾಗಿ ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಉತ್ತಮ?

ಹಾಗೆ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ, 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಸುತ್ತಳತೆಯಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

(1) 11 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಸುತ್ತಳತೆಯಿರುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(2) 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಸುತ್ತಳತೆಯಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

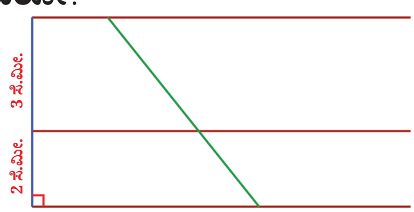
(3) 20 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಸುತ್ತಳತೆಯಿರುವ ಸಮಷಡ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಸಮಾನವಲ್ಲದ ಭಾಗಗಳು

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಂತರವಿರುವ ಮೂರು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು.

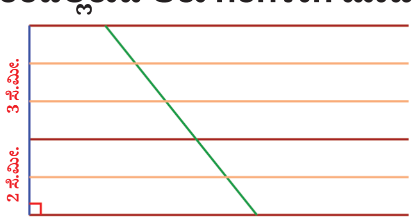
ಮೊದಲು ಮಾಡಿದ ಹಾಗೆ ಓರೆಯಾಗಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆದರೋ?



ಹಸಿರು ಗೆರೆಯ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಲ್ಲವೆಂದು ನೋಡಿದಾಗ ಹೇಳಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಈ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳಿಗೆ 2 ಮತ್ತು 3 ರೊಂದಿಗೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ?

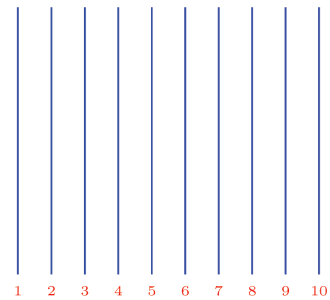
ಇನ್ನೂ ಮೂರು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದು ಒಂದೇ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಆರು ಗೆರೆಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದರೋ?



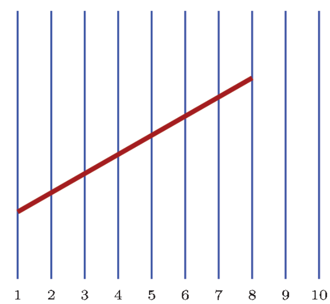
ಈಗ ಓರೆಯಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯು ಐದು ಸಮಭಾಗಗಳಾಯಿತು. ಇದರಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಭಾಗಗಳು ಸೇರಿರುವುದಾಗಿದೆ ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಣ್ಣ ಭಾಗ; ಮೇಲಿನ ಮೂರು ಭಾಗಗಳು ಸೇರಿರುವುದಾಗಿದೆ ದೊಡ್ಡ ಭಾಗ.

ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಭಾಗ

ಒಂದು ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಅಂತರ ಬಿಟ್ಟು ಎಳೆಯಿರಿ.

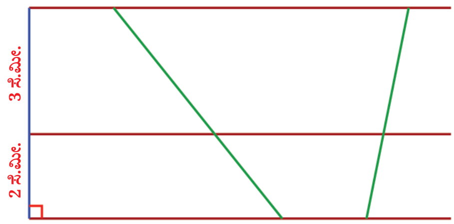


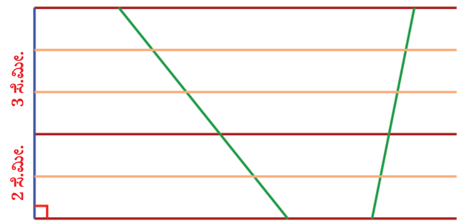
ಇನ್ನು ಒಂದು ಸರಳನ್ನು 7 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಅದನ್ನು ಎಂಟು ಗೆರೆಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾಗಿ ಇರಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.



ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಓರೆಯಾದ ಗೆರೆಯ ಸಣ್ಣ ಭಾಗ ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ಭಾಗಗಳು $2 : 3$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿವೆ.

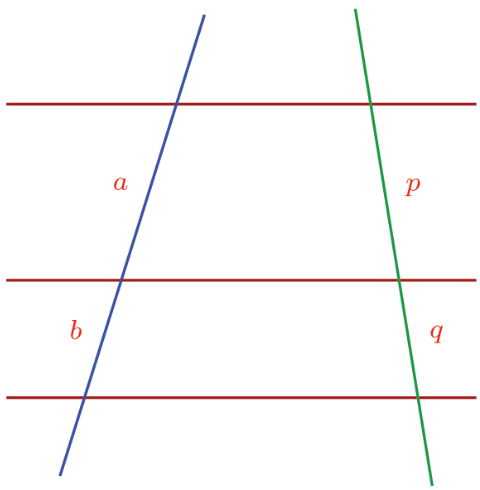
ಗೆರೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಿಸಿ ಎಳೆದರೋ?





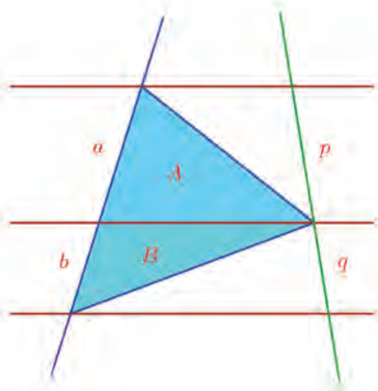
ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವಾದರೂ, ಎರಡು ಸಮಭಾಗಗಳು ಸೇರಿ ಸಣ್ಣ ಭಾಗವೂ, ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳು ಸೇರಿ ದೊಡ್ಡ ಭಾಗವೂ ಆಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ? ಅಂದರೆ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ $2 : 3$ ಎಂಬುದೇ ಆಗಿರುವುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು, ಉಳಿದೆಲ್ಲಾ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದೇ?



ಅಡ್ಡವಾಗಿ ಮೂರು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು; ಅವುಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಓರೆಯಾಗಿರುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳು. ಎಡ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ತುಂಡುಗಳ ಉದ್ದ a, b ಎಂದೂ ಬಲ ಬದಿಯ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ತುಂಡುಗಳ ಉದ್ದ p, q ಎಂದೂ ತೆಗೆದರೆ $a : b$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಮತ್ತು, $p : q$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೋ ಎಂದು ನಾವು ನೋಡಬೇಕಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ, $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ ಆಗಿದೆಯೋ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ ಪ್ರಶ್ನೆ.

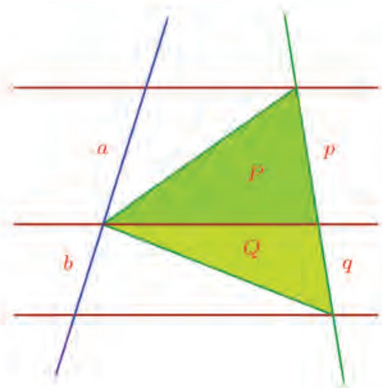
ಅದನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು ಮೊದಲು ಉದ್ದಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸೋಣ.



ಈಗ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇರುವ ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ $a : b$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಲಿತಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ; ಅಂದರೆ, ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು A, B ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ,

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$$

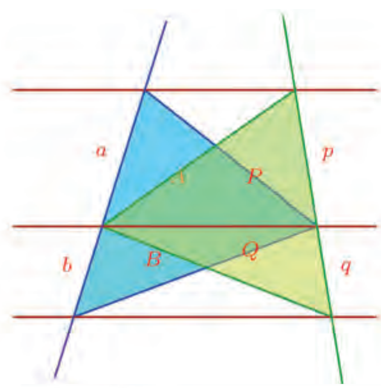
ಇದರಂತೆ p, q ಎಂಬೀ ಉದ್ದಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು.



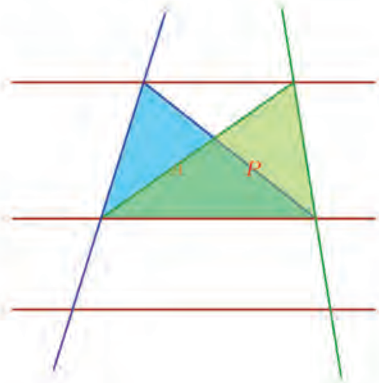
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ, ಹಸಿರು ಬಣ್ಣದ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು P, Q ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

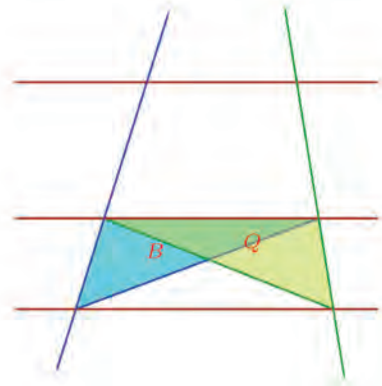
$$\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$$

ಇನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಇರಿಸಿ ನೋಡುವ.



ಕೆಳಗೆ ಮತ್ತು ಮೇಲೆ ಒಂದೊಂದು ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನ ಇವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಜೋಡಿಗಳಾಗಿ ನೋಡುವ.





ಈಗ ಮೇಲಿನ ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಮತ್ತು ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಮೂರನೇ ಶಿರಗಳು ಈ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲೂ ಇವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನ.

$$A = P$$

ಕೆಳಗಿನ ನೀಲಿ ಮತ್ತು ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಚಾರವೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

$$B = Q$$

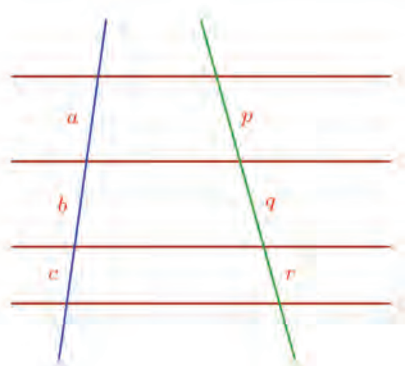
$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ ಎಂದೂ $\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$ ಎಂದೂ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವೆವಲ್ಲವೇ. ಈಗ ಇದರಲ್ಲಿ $A = P$ ಎಂದೂ $B = Q$ ಎಂದೂ ಲಭಿಸಿತು. ಆಗ

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

ಅಂದರೆ, ಈ ಮೂರು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವುದು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಗೆರೆಗಳು ಮೂರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದರೋ?

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಇದರಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಇತರ ಮೂರನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದ ಹಾಗೆ $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಅತ್ಯಂತ ಮೇಲಿನ ಗೆರೆಯನ್ನು ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ, ಇತರ ಮೂರು ಗೆರೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, $\frac{b}{c}=\frac{q}{r}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

$\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$ ಎಂದೂ $\frac{b}{c}=\frac{q}{r}$ ಸಿಕ್ಕಿರುವುದರಿಂದ $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{p}{q}\times\frac{q}{r}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಅಂದರೆ $\frac{a}{c}=\frac{p}{r}$. ಆಗ a, b, c ಎಂಬ ಮೂರು ಉದ್ದಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ಎಷ್ಟು ಭಾಗ ಅಥವಾ ಮಡಿ ಆಗಿರುವುದೋ p, q, r ಎಂಬೀ ಉದ್ದಗಳೂ ಅಷ್ಟೇ ಭಾಗ ಅಥವಾ ಮಡಿ ಆಗಿರುವುವು.

ಆಗ a,b,c ಎಂಬೀ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಮತ್ತು p,q,r ಎಂಬೀ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.

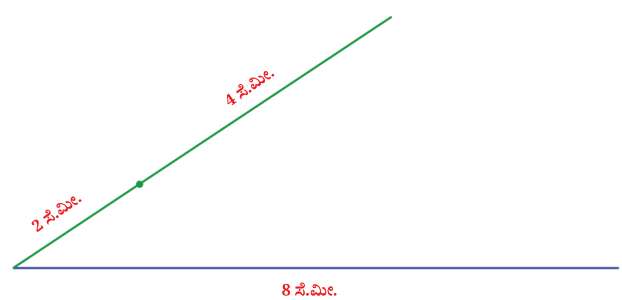
ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟೇ ಆದರೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಮೂರು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು.

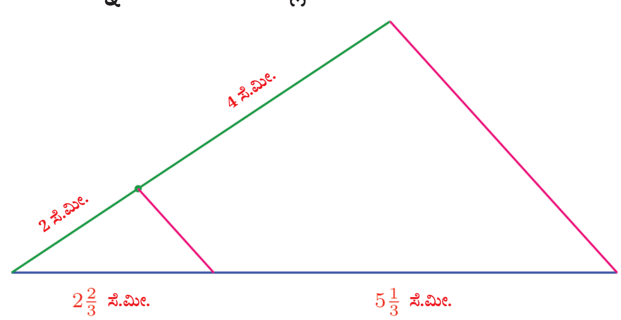
ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಯಾವುದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ವಿಭಜಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು 1 : 2 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು ಸುಲಭವಲ್ಲವೇ?

ಹಾಗಾದರೆ ಇದಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲು ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡಿದ ಹಾಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ರಚಿಸಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ.



ಇನ್ನು ಈ ಗೆರೆಗಳ ಉಳಿದ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ಗೆರೆ ಮತ್ತು ಹಸಿರು ಗೆರೆಯನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ



ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ

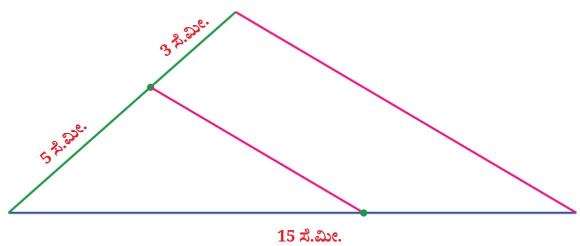
ಸುತ್ತಳತೆ 30 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 5 : 3 ಆಗಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

ಸುತ್ತಳತೆ 30 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದ ಕಾರಣ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

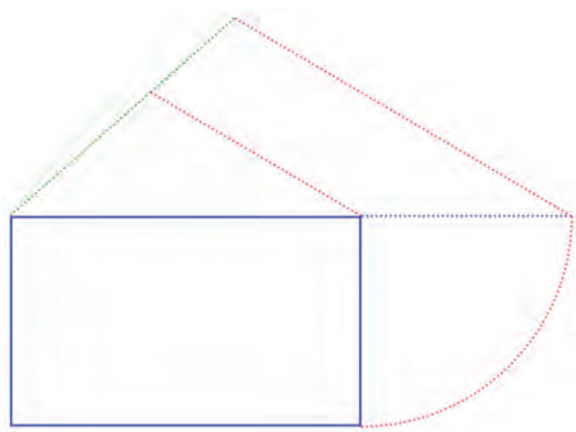
ಹಾಗಾದರೆ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು, 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಗೆರೆಯನ್ನು 5 : 3 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುವ ತುಂಡುಗಳಾಗಿವೆ.

ಈ ಭಾಗಗಳು ಸಿಗಲು ಹೀಗೆ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ.

ಗೆರೆಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವ.



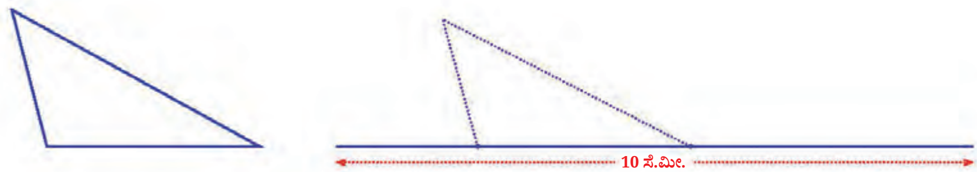
ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯ ತುಂಡುಗಳು ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳಾಗಿರುವ ಆಯತವಲ್ಲವೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವುದು.



ಮತ್ತೊಂದು ಲೆಕ್ಕ :

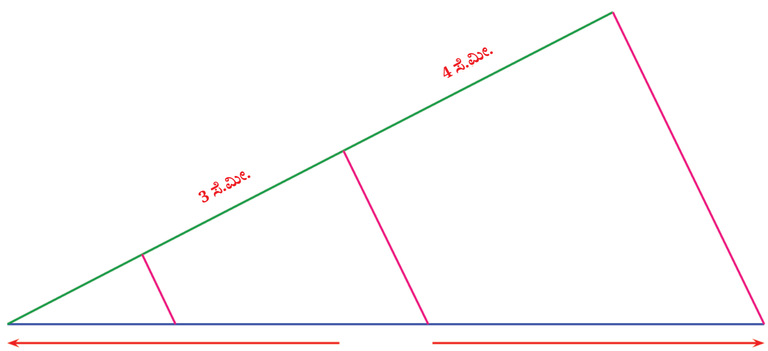
ಸುತ್ತಳತೆ 10 **ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ** 2 : 3 : 4 **ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.**

ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಬಿಡಿಸಿಟ್ಟರೆ ಸಿಗುವ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ 10 **ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.**

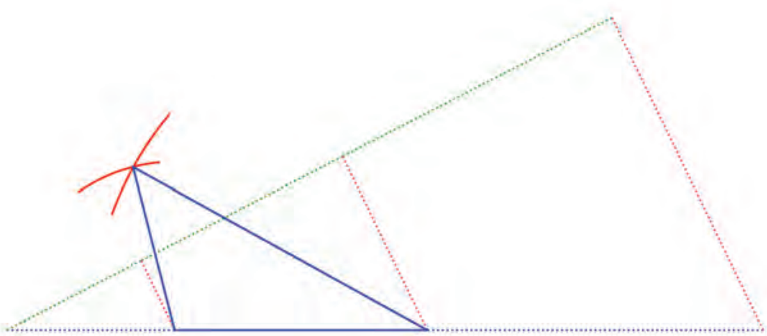


ಹಾಗಾದರೆ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಲು ಮೊದಲು 10 **ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದನ್ನು** 2 : 3 : 4 **ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿ, ಎರಡೂ ಭಾಗದ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಮಡಚಿದರೆ ಸಾಲದೇ?**

ಈ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಉದ್ದದ ಗೆರೆಯು ಸುಲಭವಾಗುವುದು?



ಇನ್ನು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ.



(1) 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಸುತ್ತಳತೆಯಿರುವ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಉದ್ದಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 3 : 4 ಆಗಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(2) ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಧದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು, ಸುತ್ತಳತೆಯು 13 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿರಿ.

(i) ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ

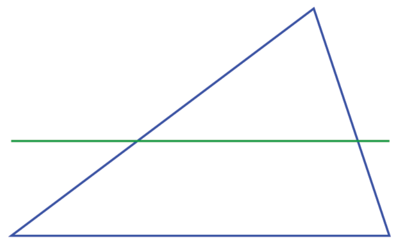
(ii) ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 3 : 4 : 5

(iii) ಪಾರ್ಶ್ವಭುಜಗಳು ಪಾದದ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಾಗಿರುವ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನ.

(3) ಯಾವುದೇ ಸಮಲಂಬದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

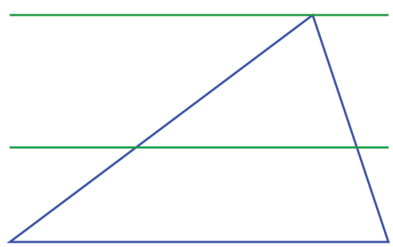
ತ್ರಿಕೋನ ಭಾಗ

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರೊಳಗೆ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



ಈ ಗೆರೆಯು ತ್ರಿಕೋನದ ಇತರ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಭಾಗಗಳೊಳಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ?

ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಶಿರದ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದರೋ?

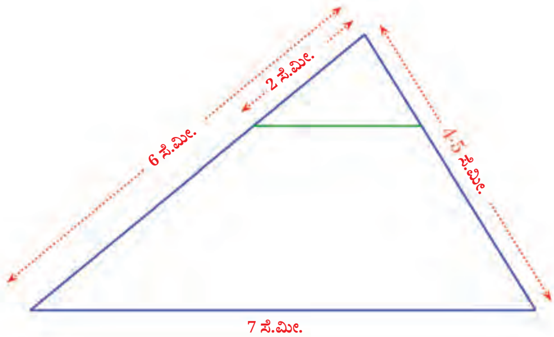


ಈಗ ಮೂರು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡಭಾಗದ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಭಾಗಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಸಮಾನವಾಗಬೇಕಲ್ಲವೇ.

ಹಾಗಾದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಏನನ್ನು ತಿಳಿದೆವು?

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಗೆರೆಯು ಉಳಿದ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವುದು.

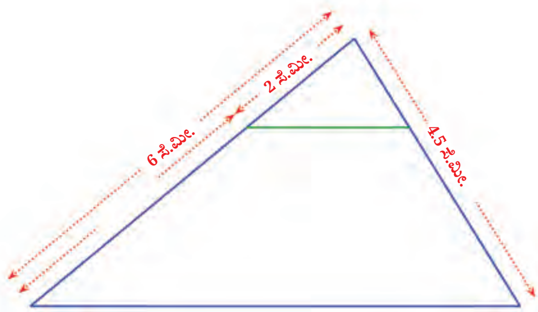
ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ:



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಗಿರುವ ಹಸಿರು ಗೆರೆಯು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ.

ಈ ಗೆರೆಯು ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಭುಜವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಎರಡೂ ಭುಜಗಳನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲವೇ.

ಎಡಬದಿಯ ಭುಜವನ್ನು ಯಾವ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು?



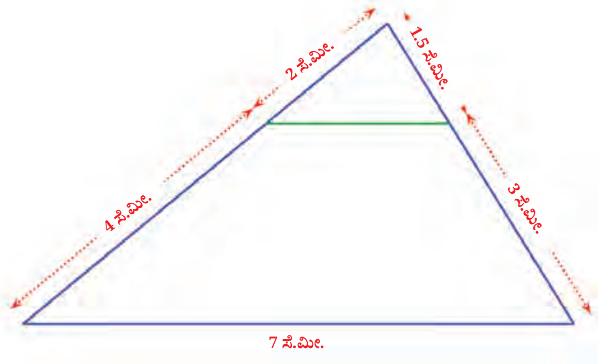
Min = 0, Max = 1, Increment = 0.01 ಆಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ 'a' ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ABC ರಚಿಸಿರಿ. Enlarge from Point (Dilate from point) ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ C ಯಲ್ಲೂ ನಂತರ A ಯಲ್ಲೂ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ಮಾಹಿತಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ Scale Factor ಆಗಿ a ಎಂದು ನೀಡಿರಿ. AC ಎಂಬ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ C' ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದು ಲಭಿಸುವುದು. AC' ಉದ್ದ AC ಯ ಉದ್ದದ 'a' ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು. (a = 0.5 ಆದರೆ C', AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಆಗುವುದು. a = 0.1 ಆದರೆ AC', C'C ಇವುಗಳ ಉದ್ದ 1:9 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಆಗುವುದು. AC', C'C ಇವುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆದು ಪರಿಶೋಧಿಸಿರಿ.). C' ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ AB ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಈ ಗೆರೆಯು BC ಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು D ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿರಿ. BD, DC ಎಂಬೀ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. AC' : C'C, BD : DC ಎಂಬೀ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿರಿ.

ಎಡಬದಿಯ ದೊಡ್ಡ ಭಾಗವು ಸಣ್ಣ ಭಾಗದ ಎರಡು ಮಡಿ, ಅಂದರೆ ಈ ಭಾಗಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 1 : 2

ಹಾಗಾದರೆ ಬಲಬದಿಯ ಭುಜವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದೂ 1 : 2 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲವೇ.

ಸಣ್ಣ ಭಾಗದ ಉದ್ದ $= 4.5 \times \frac{1}{3} = 1.5$ ಸೆ.ಮೀ.

ದೊಡ್ಡ ಭಾಗದ ಉದ್ದ $= 4.5 \times \frac{2}{3} = 3$ ಸೆ.ಮೀ.



ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಾ? ಯಾವುದೇ ಭುಜದ ಸಣ್ಣ ಭಾಗವು, ಭುಜದ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ದೊಡ್ಡ ಭಾಗವು, ಭುಜದ $\frac{2}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ.

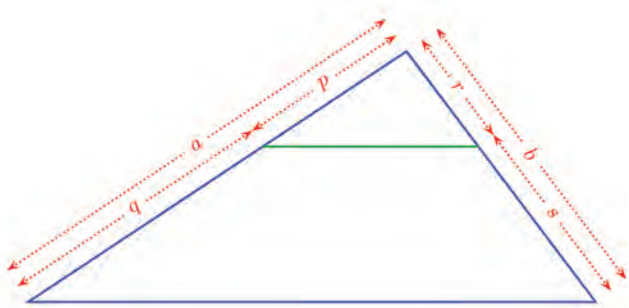
ಎರಡೂ ಭುಜಗಳನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದು 3 : 5 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಆದರೋ?

ಎರಡು ಭುಜಗಳಲ್ಲೂ ಸಣ್ಣ ತುಂಡು ಭುಜದ $\frac{3}{8}$ ಭಾಗ; ದೊಡ್ಡ ತುಂಡು, ಭುಜದ $\frac{5}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದ ತತ್ವವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು ಇತರ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು, ಅವುಗಳ ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು.

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



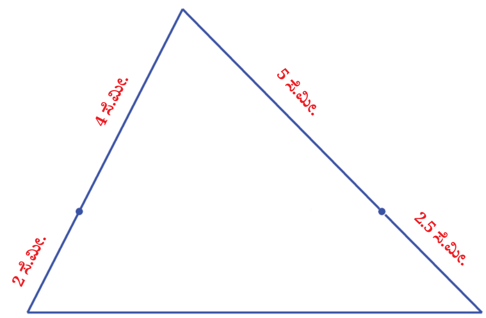
ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಗಿನ ಹಸಿರು ಗೆರೆಯು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ. ಭುಜಗಳ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಹಾಗೆ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಈಗ ನೋಡಿದ ತತ್ವಕ್ಕೆ ಅನುಸರಿಸಿ,

$$\frac{p}{a} = \frac{r}{b} \qquad \frac{q}{a} = \frac{s}{b}$$

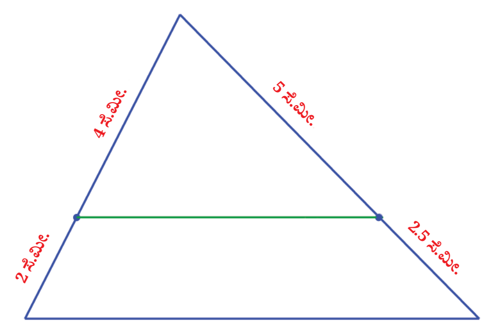
ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು, ಉಳಿದ ಎರಡೂ ಭುಜಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ ಇದೆ. ಇದನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

ಅಂದರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಗೆರೆಯು ಮೂರನೇ ಗೆರೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದೇ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೆಳಗಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ಭಾಗದ ಭುಜಗಳನ್ನು $1 : 2$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ.

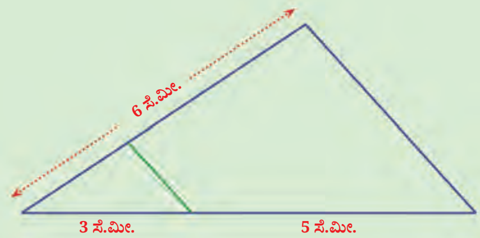


ಎಡಭಾಗದ ಭುಜದ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು, ಬಲಭಾಗದ ಭುಜವನ್ನು $1 : 2$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಬೇಕಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಅದು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜದ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವೂ ಹಾದುಹೋಗಬೇಕು; ಅಂದರೆ, ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯೇ ಆಗಿದೆ. ಆಗ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದು.



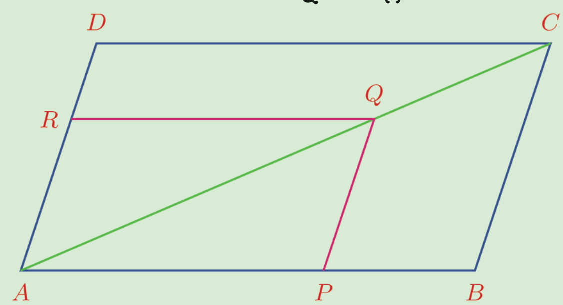
ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಗೆರೆಯು ಮೂರನೇ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದು.

(1) ಕೆಳಗಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಸಿರು ಗೆರೆಯು ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದು.



ಈ ಗೆರೆಯು ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

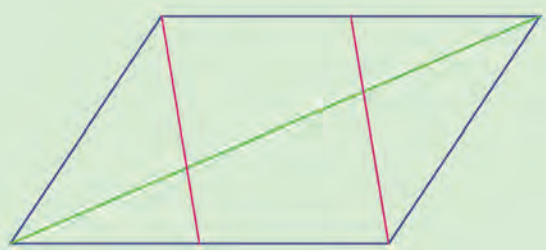
(2) $ABCD$ ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ AB ಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು P ಯ ಮೂಲಕ BC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು, AC ಯನ್ನು Q ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು. Q ನ ಮೂಲಕ AB ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆ, AD ಯನ್ನು R ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು.



(i) $\frac{AP}{PB} = \frac{AR}{RD}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

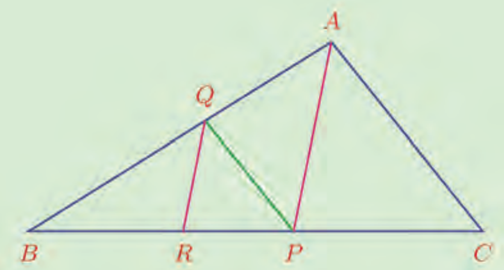
(ii) $\frac{AP}{AB} = \frac{AR}{AD}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(3) ಕೆಳಗಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎರಡು ಶಿರಗಳನ್ನು, ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಈ ಗೆರೆಗಳು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಕರ್ಣವನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

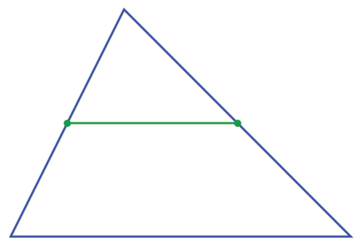
(4) ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ, BC ಯ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ AC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು, AB ಯನ್ನು Q ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು. Q ನ ಮೂಲಕ AP ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು, BC ಯನ್ನು R ನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವುದು.



$\frac{BP}{PC} = \frac{BR}{RP}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಮಧ್ಯಭಾಗ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



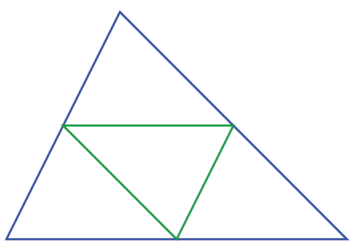
ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಒಳಗಿನ ಹಸಿರು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

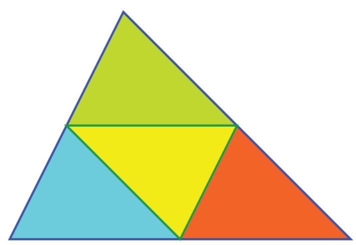
ಇದು ಎಡಭಾಗದ ಭುಜವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ಭಾಗಗಳು ಆ ಭುಜದ ಅರ್ಧ ಆದುದರಿಂದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜವೂ ಸಮಭಾಗಗಳಾಗುವುದು; ಅಂದರೆ, ಬಲಭಾಗದ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದು. ತಿರುಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೋ? ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆ, ಅವುಗಳೆರಡನ್ನೂ $1:1$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದಲ್ಲವೇ. ಆದ ಕಾರಣ ಆ ಗೆರೆ, ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ.

ಇದು ಕೂಡ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಒಂದು ವಿಷಯವಾಗಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆ, ಮೂರನೇ ಭುಜದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಖಂಡಿಸುವುದು. ಅಲ್ಲದೆ, ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆ, ಮೂರನೇ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದು.

ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೋ?





ಜಿಯೋಜೆಬ್ರದಲ್ಲಿಒಂದುತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಒಳಗಿರುವ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಇವುಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು? ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳನ್ನು ಚಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಈ ನಾಲ್ಕು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಹುದು? ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಹಳದಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಾ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ.

ಈನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೆಂದು ತೋರುವುದಿಲ್ಲವೇ? ಅದು ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

ಮೊದಲು ನೀಲಿ ಮತ್ತು ಹಳದಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜವೂ ಹಳದಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜವೂ ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಾಗಿದೆ.

ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಈ ಭುಜದ ಮೇಲಿನ ಕೋನ ಮತ್ತು ಹಳದಿ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಈ ಭುಜದ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ (ಯಾಕೆ?) ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನವೂ ಹಳದಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಕೋನವೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಇದರಂತೆ ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಕೆಂಪು ತ್ರಿಕೋನ ಎಲ್ಲವೂ ಹಳದಿ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂದರೆ, ಈ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಇದರಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರವು ಸಿಗುವುದು. ಈ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಸಮಾನವಾದುದರಿಂದ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ:

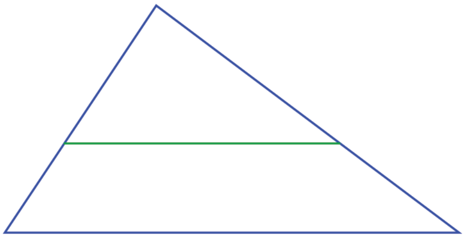
ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದವು ಮೂರನೇ ಭುಜದ ಉದ್ದದ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದು.

ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು ಮೂರನೇ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆಯೆಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ.

ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಎರಡು ತತ್ವಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು, ಮೂರನೇ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವೂ ಅದರ ಅರ್ಧವೂ ಆಗಿರುವುದು.

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಬಹುದು. ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವುದಲ್ಲವೇ.



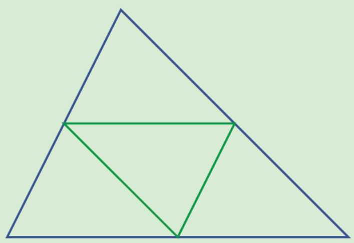
ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು, ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಂದಲೇ ಆಗಿದೆ. ಈ ಸಣ್ಣ ಭುಜಗಳು, ದೊಡ್ಡ ಭುಜಗಳ ಒಂದೇ ಭಾಗಗಳಾಗಿವೆಯೆಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

ಈ ಭಾಗಗಳು ಅರ್ಧವಾದರೆ, ಮೂರನೇ ಭುಜವೂ ಅರ್ಧವೇ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಈಗ ನೋಡಿದೆವು.

ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದು ಮೂರನೇ ಒಂದು ಆದರೋ? ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜವೂ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜದ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗುವುದೇ?

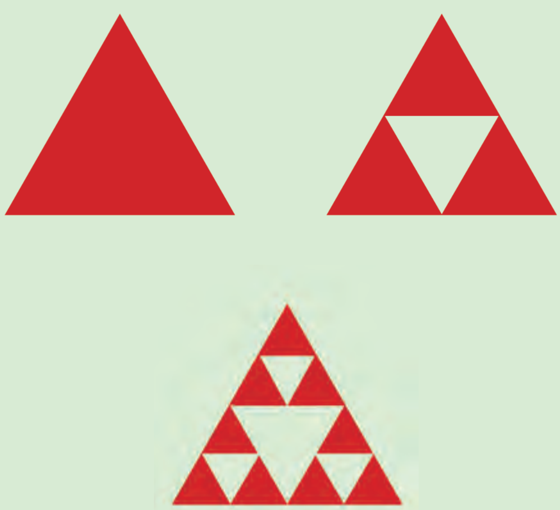
ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದು ಯಾವ ಭಾಗವಾದರೂ, ಮೂರನೇ ಭುಜವೂ ಅದೇ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಮುಂದೆ ನೋಡಬಹುದು.

(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಎಷ್ಟು ಮಡಿ ಆಗಿದೆ? ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೋ?

(2) ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಕಾಗದದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಚಿತ್ರವಾಗಿದೆ ಮೊದಲನೆಯದ್ದು. ಅದರಿಂದ ಭುಜಗಳ

ಕಾಲು ಲೆಕ್ಕ

ಚಿತ್ರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನವೂ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ $\frac{1}{4}$ ಭಾಗವಲ್ಲವೇ.

ಕೆಳಗೆ ಇರುವ ಮೂರು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, $\frac{3}{4}$ ಭಾಗ, ಮೇಲಿನ ಹಳದಿ ತ್ರಿಕೋನ, ಬಾಕಿ $\frac{1}{4}$ ಭಾಗ ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲೋ?

ನೀಲಿ, ಕೆಂಪು ಮತ್ತು ಹಸಿರು ಸೇರಿ $3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\right)$ ಭಾಗ ಹಳದಿ $\frac{1}{16}$ ಭಾಗ. ಮುಂದಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲೋ?

ನೀಲಿ, ಹಸಿರು, ಕೆಂಪು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮುಂದುವರಿದಂತೆ ಕ್ರಮೇಣ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತುಂಬುವುದಲ್ಲವೇ.

ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, $\frac{3}{4}$, $3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\right)$, $3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}\right)$ ... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 1 ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದು.

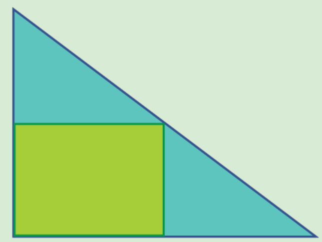
ಅಂದರೆ, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{1}{3}$ ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದು.

ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಸಿಗುವ ಮಧ್ಯದ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಸಿಕ್ಕಿದ ಚಿತ್ರವಾಗಿದೆ ಎರಡನೆಯದ್ದು. ಇದರ ಮೂರು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಂದಲೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಮಧ್ಯದ ತ್ರಿಕೋನ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಸಿಕ್ಕಿದ ಚಿತ್ರವಾಗಿದೆ ಮೂರನೆಯದ್ದು.

(i) ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದ ಕಾಗದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಮೊದಲ ಚಿತ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆ?

(ii) ಮೂರನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲೋ?

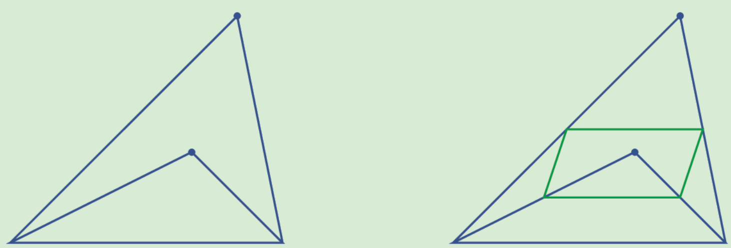
(3) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಶಿರ ಮತ್ತು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಶಿರಗಳಾಗಿ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



(i) ಈ ಚತುರ್ಭುಜವು ಆಯತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(ii) ಈ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆ?

(4) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೊದಲ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗೆರೆಯ ತುದಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನೂ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



AB ಎಂಬ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆದು ಅದರ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ C, D ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು A, B ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಈ ಚತುರ್ಭುಜದ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆ ಏನು? C, D ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ನೋಡಿ. ಈ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜ, ಆಯತ, ಚೌಕ ಎಂಬಿವುಗಳಾಗಿ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಎಲ್ಲಿರಬೇಕು? C, D ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು AB ಯ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಾದರೆ ಇದೆಲ್ಲಾ ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

(i) ಈ ಚತುರ್ಭುಜ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(ii) ಈ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಹೇಳಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೀತಿಯ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಬೇಕೆಂದು ವಿಶದೀಕರಿಸಿರಿ.

(a) ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜ (b) ಆಯತ

(c) ಚೌಕ

(iii) ಒಂದು ಬಿಂದು ಗೆರೆಯ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಇನ್ನೊಂದು ಗೆರೆಯ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಆದರೆ ಇದೆಲ್ಲಾ ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

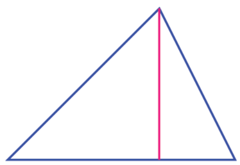
(5) (i) ಯಾವುದೇ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿಯೂ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಸಿಗುವ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(ii) ಒಳಭಾಗದ ಚತುರ್ಭುಜವು ಕೆಳಗೆ ಹೇಳಿರುವ ಹಾಗೆ ಸಿಗಬೇಕಾದರೆ ಮೊದಲ ಚತುರ್ಭುಜದ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಗಳು ಏನಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ವಿಶದೀಕರಿಸಿರಿ.

(a) ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜ (b) ಆಯತ (c) ಚೌಕ

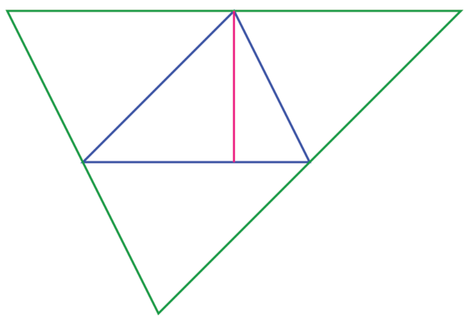
ತ್ರಿಕೋನ ಕೇಂದ್ರಗಳು

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಶಿರದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ಯಾವುದೇ ಶಿರದಿಂದಲೂ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಈ ಲಂಬಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರಗಳು (altitudes) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. (ಉನ್ನತಿಗಳು ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು)

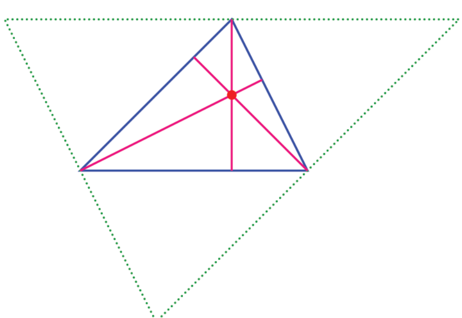
ಇನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದ ಮೂಲಕ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೋ?



ಕೆಂಪು ಗೆರೆಯು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬ ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಅದರ ಸಮಭಾಜಕವೂ ಆಗಿದೆ.

ಹಾಗಾದರೆ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಕಿ ಉನ್ನತಿಗಳನ್ನೂ ಎಳೆದರೆ, ಅವುಗಳು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಇತರ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದು ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ:



ಜಿಯೋಜಿಬ್ರಾದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದಿಂದಲೂ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಇವುಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದೇ? ಇವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು (ಲಂಬಕೇಂದ್ರ) ಗುರುತಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಲಂಬಕೇಂದ್ರ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಯದಲ್ಲೂ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಗೆ ಇರುವುದೇ? ಒಂದು ಕೋನ ಲಂಬಕೋನ ಆಗುವಾಗ ಲಂಬಕೇಂದ್ರದ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು? ಲಂಬಕೋನಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕವಾದರೋ?

ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕಗಳು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಉನ್ನತಿಗಳಾಗಿವೆ.

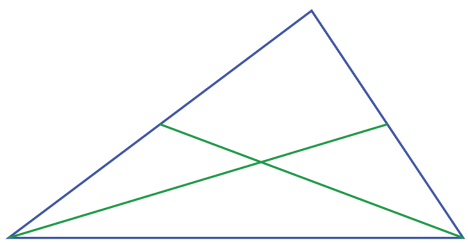
ಹಾಗಾದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

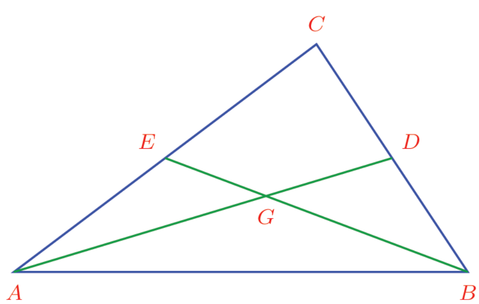
ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಉನ್ನತಿಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದು.

ಉನ್ನತಿಗಳು ಹಾದುಹೋಗುವ ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರ (orthocentre) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಗೆ ಎಳೆಯುವ ಕೆಲವು ವಿಶಿಷ್ಟ ಗೆರೆಗಳಾಗಿವೆ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕಗಳು ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಗಳು. ಇದೇ ರೀತಿಯ ಇತರ ಗೆರೆಗಳಾಗಿವೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಗಳು. ಇವುಗಳ ಹೆಸರು ಮಧ್ಯಮ ಗೆರೆ (medians) ಎಂದು ಈ ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ. ಇವುಗಳೂ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದೇ?

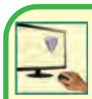
ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.





ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಮಧ್ಯಮ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳು ಛೇದಿಸಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವೇ ಮೂರನೇ ಮಧ್ಯಮ ಗೆರೆಯೂ ಹಾದು ಹೋಗುವುದೇ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗಬೇಕಿದೆ.

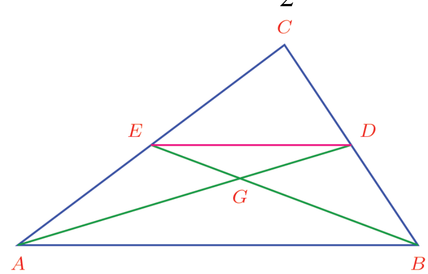
ಎಳೆದು ನೋಡುವ. ಆದರೆ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೆಂದು ಪುರಾವೆ ಬೇಡವೇ? ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಚಿತ್ರದ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಹೆಸರು ಕೊಡುವ.



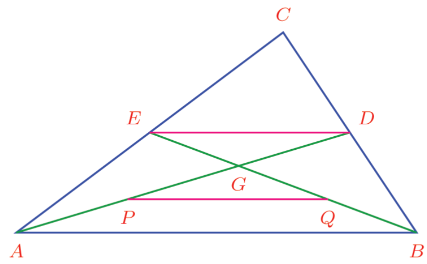
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೆಳೆದು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿಗೆ ಗೆರೆ ಎಳೆಯಿರಿ. (ಮಧ್ಯಮ ಗೆರೆ) ಮೂರು ಮಧ್ಯಮ ಗೆರೆಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದೇ? ಈ ಬಿಂದು (ಮಧ್ಯಮ ಕೇಂದ್ರ) ವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದಿಂದ ಮಧ್ಯಮ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕಿರುವ ದೂರವನ್ನೂ ಅಲ್ಲಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನೂ ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ದೂರಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು? ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವೂ ಅದರ ಅರ್ಧವೂ ಆಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ,

$$ED = \frac{1}{2}AB$$



ಇನ್ನು, ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಮೇಲೆ GAB ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನವಿದೆ ಅಲ್ಲವೇ; ಅದರ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೂಡ ಜೋಡಿಸಿದರೋ?



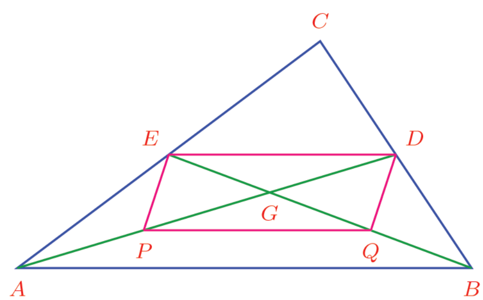
$$PQ = \frac{1}{2}AB$$

ಆಗ,

$$PQ = ED$$

$PQDE$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜದ PQ, ED ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಮತ್ತು ಸಮಾನಾಂತರವಾದುದರಿಂದ, ಈ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ; ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಕರ್ಣಗಳಾದ PD, QE ಇವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದು; ಅಂದರೆ,

$$PG = GD \qquad QG = GE$$



AG ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು P ಮತ್ತು BG ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು Q ಆದಕಾರಣ

$$AP = PG \qquad BQ = QG$$

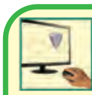
ಆಗ,

$$AG = AP + PG = 2PG = 2GD$$

ಎಂದೂ

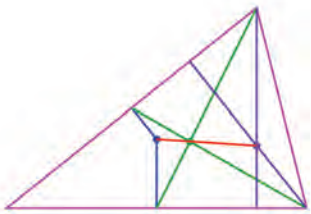
$$BG = BQ + QG = 2QG = 2GE$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.


ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೆಳೆದು ಅದರ ಮಧ್ಯಮ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. (Polygon ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನ ಎಳೆದರೆ Midpoint or Centre ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನದೊಳಗೆ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಮಧ್ಯಮಕೇಂದ್ರ ಸಿಗುವುದು.) ಮಧ್ಯಮ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಶಿರಗಳು ಸೇರಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಿರಿ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು? ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಯೂಲರ್ ಗೆರೆ

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ, ಮಧ್ಯಮ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಲಂಬಕೇಂದ್ರಗಳು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದು ಎಂದು ಹದಿನೆಂಟನೇ ಶತಮಾನದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಯೂಲರ್ ಕಂಡುಹಿಡಿದನು. ಯೂಲರ್ ಗೆರೆ (Euler line) ಎಂದು ಈ ಗೆರೆಯು ತಿಳಿಯಲ್ಪಡುವುದು.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೀಲಿ ಗೆರೆಗಳು, ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಲಂಬಸಮಭಾಜಕಗಳಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದು, ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ. ಹಸಿರು ಗೆರೆಗಳು, ಮಧ್ಯಮ ಗೆರೆಗಳು; ಅವುಗಳು ಖಂಡಿಸಿ ಹಾದುಹೋಗುವವುಗಳು ಮಧ್ಯಮಕೇಂದ್ರ, ನೇರಳೆ ಗೆರೆಗಳು ಉನ್ನತಿಗಳು; ಅವುಗಳನ್ನು ಖಂಡಿಸುವುದು ಲಂಬಕೇಂದ್ರ.

ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಕೆಂಪುಗೆರೆಯಾಗಿದೆ ಯೂಲರ್ ಗೆರೆ.

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಮಕೇಂದ್ರವು ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಲಂಬಕೇಂದ್ರದ ಎಡೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದೆಂದೂ ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು $1:2$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು ಎಂದೂ ಯೂಲರ್ ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾನೆ.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ, ಮಧ್ಯಮ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಲಂಬಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಗೆರೆ ಎಳೆಯಿರಿ (ಯೂಲರ್ ಗೆರೆ). ಇದು ಮೂರನೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವೂ ಹಾದುಹೋಗುವುದೇ? ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಸಮಾನವಾಗುವಾಗ ಯೂಲರ್ ಗೆರೆಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು? ಮೂರು ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗುವಾಗ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು?

ಅಂದರೆ, G ಎಂಬ ಬಿಂದು AD, BE ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳನ್ನು $2:1$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು. ಇನ್ನು A, B ಇವುಗಳನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ಬದಲು B, C ಎಂಬೀ ಶಿರಗಳನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ಭುಜದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೋ?

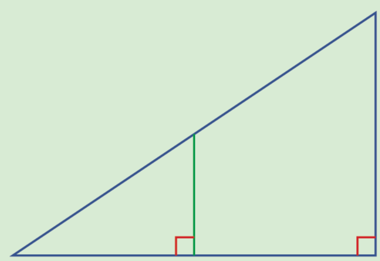
ಅವುಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದು BE ಯನ್ನು $2:1$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು; ಅಂದರೆ, ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದು G ಆಗಿದೆ.

ಈಗ ನೋಡಿದ ವಿಷಯವನ್ನು ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದು?

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಮಧ್ಯಮಗೆರೆಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವುದು; ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದಿಂದ ಈ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವು, ವಿರುದ್ಧ ಭುಜದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇರುವ ದೂರದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ, ಈ ಬಿಂದು ಮಧ್ಯಮ ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ $2:1$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು.

ಮಧ್ಯಮ ಗೆರೆಗಳು ಛೇದಿಸಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಮ ಕೇಂದ್ರ (centroid) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

(1) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



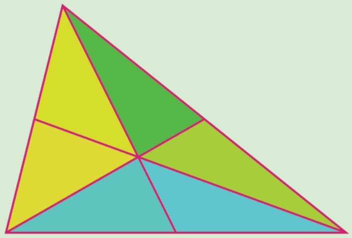
(i) ಈ ಲಂಬವು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(ii) ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮೂರು ಶಿರಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(iii) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರವು ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

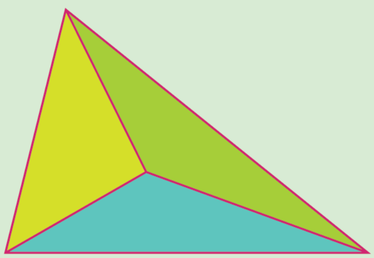
(2) ಯಾವುದೇ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ, ಲಂಬಕೇಂದ್ರ, ಮಧ್ಯಮ ಕೇಂದ್ರ ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಮ ಗೆರೆಗಳು ಆರು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿವೆ.



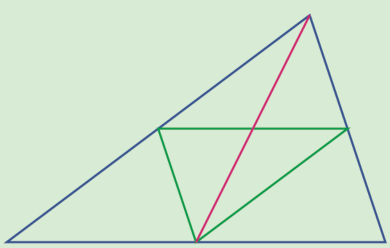
ಈ ಆರು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ, ಮಧ್ಯಮ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಮೂರು ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಮೂರು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಮೂರು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಸಣ್ಣ ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಕೆಂಪು ಗೆರೆಯು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಮಧ್ಯಮ ಗೆರೆಯಾಗಿದೆ.



ಸಮತೋಲನ

ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಬಾರಿ ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಭಾರ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಕರಿಸುವುದಾಗಿ ಕಲ್ಪಿಸುವುದಿದೆ. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯ ಕೇಂದ್ರ (center of mass) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಇದು ಪ್ರಯೋಗದಲ್ಲಿ ಅನುಭವ ಆಗುವುದು, ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಆಧಾರಕೊಟ್ಟು ಅದನ್ನು ಬೀಳದೆ ನಿಲ್ಲಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದರ ಮೂಲಕವಾಗಿದೆ.

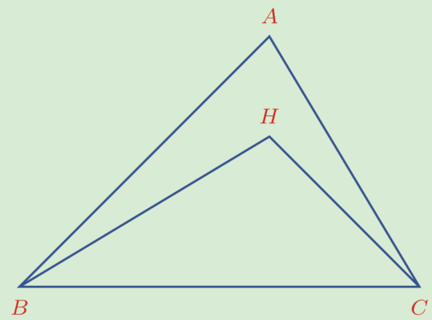
ದಪ್ಪ ಕಾಗದದಲ್ಲೋ, ತಗಡಿನಲ್ಲೋ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ ಕೇಂದ್ರ ಅದರ ಮಧ್ಯಮಕೇಂದ್ರವೇ ಆಗಿರುವುದು.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಎಳೆದು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದಿಂದಲೂ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದು ವಿರುದ್ಧ ಭುಜದೊಂದಿಗೆ ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳನ್ನು ಲಂಬಕೇಂದ್ರಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವೂ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿ. (Circle through 3 Points ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು) ಲಂಬಗಳು ವಿರುದ್ಧ ಭುಜದೊಂದಿಗೆ ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಮತ್ತು ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲವೇ? ಈ ಒಂಬತ್ತು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು Nine Point Circle ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

(i) ಈ ಮಧ್ಯಮ ಗೆರೆಯು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಭುಜವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(ii) ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಮಕೇಂದ್ರವು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಮಕೇಂದ್ರವೇ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(6) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ H.



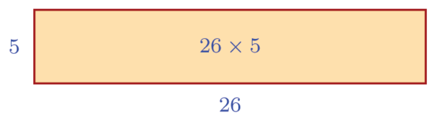
HBC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಕೇಂದ್ರ A ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

4

ಗುಣಾಕಾರ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು

ಮೊತ್ತಗಳ ಗುಣಾಕಾರ

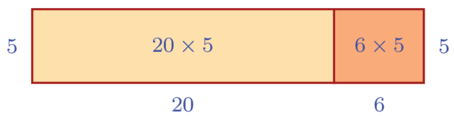
ಉದ್ದ 26 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಅಗಲ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

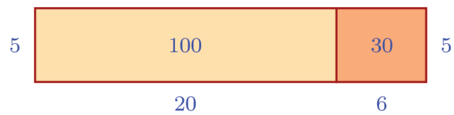


ನೇರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯದೆ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದರೋ?

$$26 \times 5 = (20 + 6) \times 5$$

ಚಿತ್ರವನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ:





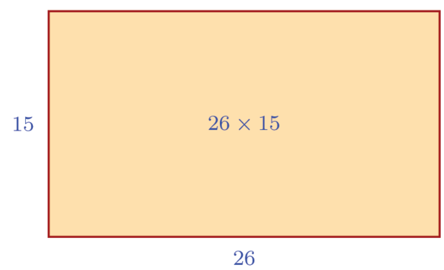
ಆಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$100 + 30 = 130$$ ಚ.ಸೆ.ಮೀ

ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವ ಕ್ರಿಯೆ ಏನು?

$$\begin{aligned} 26 \times 5 &= (20 + 6) \times 5 \\ &= (20 \times 5) + (6 \times 5) \\ &= 100 + 30 \\ &= 130 \end{aligned}$$

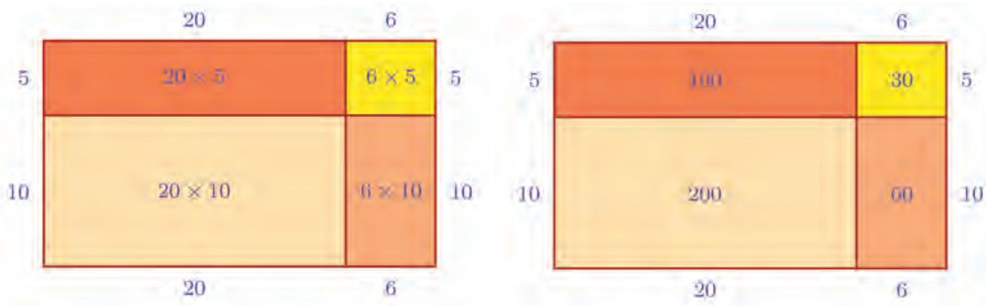
ಇನ್ನು 26 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದ ಮತ್ತು 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಗಲವಿರುವ ಆಯತವಾದರೋ?



ನೇರವಾಗಿ ಗುಣಿಸದೆ,

$$26 \times 15 = (20 + 6) \times (10 + 5)$$

ಎಂದು ಬರೆದು, ಚಿತ್ರವನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಸುಲಭವಾಗುವುದು.



ಇನ್ನು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ:

$$200 + 100 + 60 + 30 = 390$$ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ದೊರಕಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದರೋ?

$$\begin{aligned} 26 \times 15 &= (20 + 6) \times (10 + 5) \\ &= (20 \times 10) + (20 \times 5) + (6 \times 10) + (6 \times 5) \\ &= 200 + 100 + 60 + 30 \\ &= 390 \end{aligned}$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಕೆಳಗೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ಬರೆದು ಗುಣಿಸುವಾಗಲೂ (ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ) ಮಾಡುವುದು ಇದನ್ನೇ ಅಲ್ಲವೇ?

$$\begin{array}{r l} 26 \times & \\ \underline{15} & \\ 130 & \leftarrow 26 \times 5 = (6 + 20) \times 5 = 30 + 100 \\ \underline{260} & \leftarrow 26 \times 10 = (6 + 20) \times 10 = 60 + 200 \\ 390 & \end{array}$$

ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವರಿಸುವ:

20 + 6 ಎಂಬ ಮೊತ್ತವನ್ನು 10 + 5 ಎಂಬ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಗುಣಿಸಲು, ಮೊದಲ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿರುವ 20, 6 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡನೇ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿರುವ 10, 5 ಎಂಬೀ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಿ, ಹಾಗೆ ದೊರಕಿದ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಲಾಯಿತು.

ಮೊತ್ತಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$6\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{3} = \left(6+\frac{1}{2}\right) \times \left(8+\frac{1}{3}\right)$$

$$= (6 \times 8) + \left(6 \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} \times 8\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)$$

$$= 48 + 2 + 4 + \frac{1}{6}$$

$$= 54\frac{1}{6}$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ಮೊತ್ತವನ್ನು ಮೊತ್ತದಿಂದ ಗುಣಿಸಲು, ಮೊದಲ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ನಂತರದ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಿ, ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

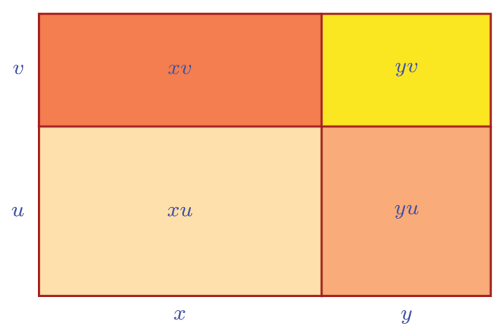
ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆದರೋ?

ಮೊದಲನೇ ಮೊತ್ತವನ್ನು $x + y$ ಎಂದೂ, ನಂತರದ ಮೊತ್ತವನ್ನು $u + v$ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು xu, xv, yu, yv ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ,

x, y, u, v ಎಂಬೀ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ

$$(x + y)(u + v) = xu + xv + yu + yv$$

ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಲೆಕ್ಕವಾಗಿ ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನೋಡಬಹುದು.



ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಈ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಲಾದ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 31×51 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$30 \times 50 = 1500$ ಎಂದು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಮಾಡಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಈಗ ನೋಡಿದ ತತ್ವವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ,

$$31 \times 51 = (30 + 1) \times (50 + 1) = 1500 + 30 + 50 + 1 = 1581$$

ಎಂದು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯ ಯಾವುದು?

$$(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$$

ಅಂದರೆ, ಎರಡು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ತಿಳಿದರೆ, ಸಮೀಪದ ನಂತರದ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು, ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನೂ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನೂ ಮತ್ತು ಅದರೊಂದಿಗೆ ಒಂದನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$21 \times 71 = (20 \times 70) + 20 + 70 + 1 = 1400 + 91 = 1491$$

$$81 \times 91 = (80 \times 90) + 80 + 90 + 1 = 7200 + 171 = 7371$$

$$201 \times 401 = (200 \times 400) + 200 + 400 + 1 = 80000 + 601 = 80601$$

ಒಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಹಾಗೆಯೇ, ಎರಡನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸುಲಭ ದಾರಿಯಿದೆಯೇ? ಯೋಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಕೆಲವು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲೂ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಲಾದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) = xy + \left(x \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times y\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = xy + \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{4}$$

ಆಗ

$$6\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2} = 48 + \left(\frac{1}{2} \times 14\right) + \frac{1}{4} = 48 + 7\frac{1}{4} = 55\frac{1}{4}$$

$$10\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2} = 50 + \left(\frac{1}{2} \times 15\right) + \frac{1}{4} = 50 + 7\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 57\frac{3}{4}$$

ಎಂದೆಲ್ಲಾ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

(1) ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಮಾಡಿ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 71×91 (ii) 42×62 (iii) $10\frac{1}{2} \times 6\frac{1}{2}$ (iv) 9.5×3.5 (v) $10\frac{1}{4} \times 6\frac{1}{4}$

(2) ಎರಡು ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 1400 ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 81 ಆಗಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸಮೀಪದ ನಂತರದ ಎರಡು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಷ್ಟು?

(3) ಎರಡು ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 621 ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 50 ಆಗಿವೆ. ಈ ಎರಡೂ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮೀಪದ ನಂತರದ ಎರಡು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಷ್ಟು?

ಕ್ರಿಯೆಗಳ ವಿಶೇಷತೆಗಳು

ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಿಯೆಗಳ ಕುರಿತಾದ ಕೆಲವು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವಗಳನ್ನಲ್ಲವೇ ಸರ್ವಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು. ಇವುಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಇತರ ಕೆಲವು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವಗಳನ್ನೂ ಸಮರ್ಥಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

ಎರಡು ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಕೆಲವು ವಿಷಮಸಂಖ್ಯಾ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಕಾಣಬಹುದು. ಇದು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಸರಿಯಾಗುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ

$$2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ಎಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವಿರಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಎರಡು ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $2m + 1$, $2n + 1$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$(2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1$$

ಇದು ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆಯೇ?

ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆದರೋ?

$$(2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$$

ಗುಣಲಬ್ಧವೂ ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಈಗ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಯಿತಲ್ಲವೇ?

ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದರೆ, ಎರಡರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆಯೆಂದು ಹೇಳಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಮೂರರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ ಯಾವುದು?

ಅವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಮೂರರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳೊಂದಿಗೆ 1 ಕೂಡಿಸಿರುವವುಗಳಲ್ಲವೇ?

ಹಾಗೆ ಯೋಚಿಸಿದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪವನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$3n + 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ಹೀಗಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೋ?

$$(3m + 1)(3n + 1) = 9mn + 3m + 3n + 1$$

ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನೂ ಮೂರರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷವು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಅದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಈ ಮೇಲಿನ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಹೀಗೆ ಬರೆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ?

$$(3m + 1)(3n + 1) = 3(3mn + m + n) + 1$$

ಇದೂ ಮೂರರ ಅಪವರ್ತ್ಯಕ್ಕೆ ಒಂದು ಕೂಡಿಸಿದುದಲ್ಲವೇ?

ಅಂದರೆ, ಮೂರರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ ಒಂದು ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ:

ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 1, 2, 3, 4 ಆಗಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ,

ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $1 \times 4 = 4$

ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $2 \times 3 = 6$

2, 3, 4, 5 ಪರಿಗಣಿಸಿದರೋ?

ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $2 \times 5 = 10$

ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $3 \times 4 = 12$

ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ನಾಲ್ಕು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಗುಣಲಬ್ಧಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಲ್ಲದರಲ್ಲೂ 2 ಎಂಬುದೇ ಆಗಿದೆಯೇ?

ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

ಅದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು, ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ನಾಲ್ಕು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಆರಂಭಿಸುವಾ.

ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $x(x + 3) = x^2 + 3x$

ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ = $(x + 1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$

ಆಗ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 2 ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಯಿತಲ್ಲವೇ?

x ಆಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಈ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು ಸರಿಯಾಗುವುವು. ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವುದಾದರೆ, ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ, ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ (ಅಂತ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ) ಗುಣಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎರಡು ಆಗಿದೆ.

(1) ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ, ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಿಶೋಧಿಸಿರಿ. ಅವುಗಳಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಒಂದು ತತ್ವವನ್ನು ಊಹಿಸಿರಿ. ಊಹನೆಯು ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

(i) 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಶೇಷ 2 ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷ.

(ii) 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಶೇಷ 1 ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಶೇಷ 2 ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷ.

(iii) ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಆರು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ.

(2) 36×28 ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

$3 \times 2 = 6$	6×100	600
$(3 \times 8) + (6 \times 2) = 36$	36×10	360
6×8		48
36×28		1008

(i) ಇತರ ಕೆಲವು ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

(ii) ಇದು ಸರಿಯಾಗಿರುವುದಕ್ಕಿರುವ ಕಾರಣವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿರಿ.

(ಎಲ್ಲಾ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $10m + n$ ಎಂಬ ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ).

ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಚಮತ್ಕಾರಗಳು

ಸಂಖ್ಯಾ ಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ಚಮತ್ಕಾರಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$$12 \times 63 = 756$$
$$21 \times 36 = 756$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಎರಡಂಕೆಗಳಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂಬಿವುಗಳು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ (ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ). ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವೆಯೇ?

ಇದನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$$32 \times 46 = 1472$$
$$23 \times 64 = 1472$$

ಇಂತಹ ಜೊತೆಗಳು ಇನ್ನೂ ಇವೆಯೇ?

ಯಾವುದೇ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $10m + n$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ:

ಮೊದಲ ಅಂಕೆ m, ಎರಡನೇ ಅಂಕೆ n.

ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೋ?

ಮೊದಲ ಅಂಕೆ n, ಎರಡನೇ ಅಂಕೆ m; ಸಂಖ್ಯೆ $10n + m$

ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವುದು, ಎರಡಂಕೆಗಳಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಲ್ಲವೇ; ಅವುಗಳನ್ನು $10m + n$, $10p + q$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ. ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆದರೆ $10n + m$, $10q + p$

ಎರಡೂ ಜೊತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ವಿಧದಲ್ಲಿ m, n, p, q ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಿರುವುದಾಗಿದೆ ನಮ್ಮ ಪ್ರಯತ್ನ.

ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$(10m + n)(10p + q) = 100mp + 10mq + 10np + nq$$

ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆದಾಗ ಲಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$(10n + m)(10q + p) = 100nq + 10np + 10mq + mp$$

ಎರಡೂ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಎರಡು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಲ್ಲೂ $10mq + 10np$ ಇದೆ. ಆಗ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮಾನವಾಗಲು, ಉಳಿದ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ,

$$100mp + nq = 100nq + mp$$

ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು?

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ನೂರು ಮಡಿಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ, ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನೂರು ಮಡಿಗೆ ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಷ್ಟೇ ಆಗುವುದೇ?

ಆಗ mp, nq ಎಂಬೀ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಬೇಕು.

ಅಂದರೆ,

$$mp = nq$$

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಮಾಡಬಹುದು. $100mp + nq$, $100nq + mp$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, ಈ ಮೊತ್ತಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಬೇಕಲ್ಲವೇ? ಅಂದರೆ,

$$(100mp + nq) - (100nq + mp) = 0$$

ಇದರಿಂದ

$$99mp - 99nq = 0$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆದರೆ,

$$99(mp - nq) = 0$$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ 99 ಮಡಿ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಬೇಕಲ್ಲವೇ? ಅಂದರೆ,

$$mp - nq = 0$$

ಅಥವಾ

$$mp = nq$$

ಆಗ ನಾವು ಪರಿಶೋಧಿಸುವ ಎಲ್ಲಾ ಎರಡಂಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಅಂಕೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವೂ, ಎರಡನೇ ಅಂಕೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವೂ ಸಮಾನ ಆಗಬೇಕು.

ನಾವು ನೋಡಿದ ಮೊದಲನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 12, 63

ಇವುಗಳ ಮೊದಲನೇ ಅಂಕೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 1 \times 6 = 6$

ಎರಡನೇ ಅಂಕೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 2 \times 3 = 6$

ಎರಡನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯೋ? ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 32, 46

ಮೊದಲನೇ ಅಂಕೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 3 \times 4 = 12$

ಎರಡನೇ ಅಂಕೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= 2 \times 6 = 12$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$2 \times 9 = 18$$

$$3 \times 6 = 18$$

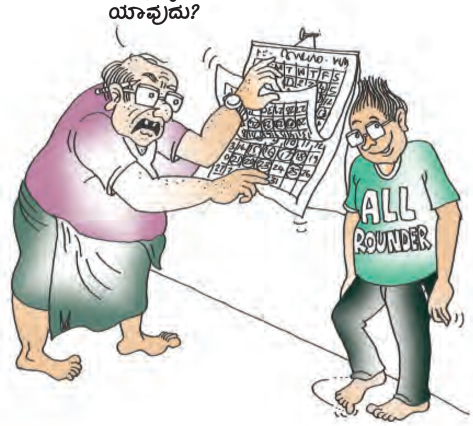
ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, 23 × 96 **ಮತ್ತು** 32 × 69 **ಎಂಬೀ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು. (ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ)**

ಈ ರೀತಿಯ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕುರಿತಾದ ಕೆಲವು ಸ್ವಾರಸ್ಯಕರವಾದ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ನಾವು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ. ಇನ್ನು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಕುರಿತಾದ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ತಿಂಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ, ಒಂದು ಚೌಕವಾಗಿ ಬರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ:

ಆದಿತ್ಯ	ಸೋಮ	ಮಂಗಳ	ಬುಧ	ಗುರು	ಶುಕ್ರ	ಶನಿ
			1	2	3	4
5	(6)	(7)	8	9	10	11
12	(13)	(14)	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	



ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

$$14 \times 6 = 84$$

$$13 \times 7 = 91$$

ಇವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

$$91 - 84 = 7$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಚೌಕವಾಗಿ ಬರುವ ಬೇರೆ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೋಡಿರಿ.

$$22 \times 30 = 660$$

$$23 \times 29 = 667$$

$$667 - 660 = 7$$

ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಯಾವಾಗಲೂ 7 **ಆಗಿರಲು ಕಾರಣವೇನು**?

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನೋಡೋಣ:

ಚೌಕದಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ನಾಲ್ಕೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

x	$x+1$
$x+7$	$x+8$

ವಿರುದ್ಧ ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು $x(x + 8)$ ಮತ್ತು $(x + 1)(x + 7)$ ಆಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$x(x + 8) = x^2 + 8x$$

ಎರಡನೇ ಗುಣಲಬ್ಧ

$$(x + 1)(x + 7) = x^2 + 7x + x + 7 = x^2 + 8x + 7$$

ಎರಡೂ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ವ್ಯತ್ಯಾಸ 7 ಅಲ್ಲವೇ?

ಇದರಲ್ಲಿ x ಆಗಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ; ಅಂದರೆ, ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನ ಯಾವುದೇ ಭಾಗದಲ್ಲೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ

ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವಂತಹ ಒಂದು ಗುಣಾಕಾರ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಿರಿ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವಂತೆಯೇ ಒಂದು ಚೌಕದೊಳಗೆ ಬರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿರಿ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚೌಕದಲ್ಲೂ ವಿರುದ್ಧ ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದರ ಬದಲು ಕೂಡಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

$12 + 20 = 32$ $\qquad$ $35 + 48 = 83$

$16 + 15 = 31$ $\qquad$ $40 + 42 = 82$

ಪಟ್ಟಿಯ ಯಾವುದೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಮೊತ್ತಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1 ಆಗಿರುವುದೇ?

ಇದನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು, ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ರೂಪವನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು.

ಪಟ್ಟಿಯ ಮೊದಲ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 9 ರ ವರೆಗಿನ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು; ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಇವುಗಳನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು...

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, 1 ರಿಂದ 9 ರ ವರೆಗಿನ ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆ n ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ n ನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$$n \quad 2n \quad 3n \quad 4n \quad 5n \quad 6n \quad 7n \quad 8n \quad 9n$$

ನಂತರದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಾದರೇ?

ಮೊದಲನೇ ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ?

ಈ ಎರಡೂ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೋ?

n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	$6n$	$7n$	$8n$	$9n$
$n+1$	$2(n+1)$	$3(n+1)$	$4(n+1)$	$5(n+1)$	$6(n+1)$	$7(n+1)$	$8(n+1)$	$9(n+1)$

ಇನ್ನು ಚೌಕದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲು, ಮೊದಲನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದಲೂ ಆರಂಭಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಹೀಗೆಲ್ಲಾ ಆಗಬಹುದು:

$2n$	$3n$
$2(n+1)$	$3(n+1)$

$5n$	$6n$
$5(n+1)$	$6(n+1)$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, n ನ್ನು m ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಆರಂಭಿಸುವುದಾದರೆ,

ಚೌಕದಲ್ಲಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವೆಲ್ಲಾ ಆಗಿರಬಹುದು? ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಬರೆದು ನೋಡೋಣ:

mn	$(m+1)n$

mn	$(m+1)n$
$m(n+1)$	

mn	$(m+1)n$
$m(n+1)$	$(m+1)(n+1)$

ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆದರೆ,

mn	$mn+n$
$mn+m$	$mn+m+n+1$

ವಿರುದ್ಧ ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ, ಒಂದು ಮೊತ್ತ

$$mn + (mn + m + n + 1) = 2mn + m + n + 1$$

ಇನ್ನೊಂದು ಮೊತ್ತ

$$(mn + n) + (mn + m) = 2mn + n + m$$

ಹೀಗೆ ಪರಿಗಣಿಸುವಂತಹ ಯಾವುದೇ ಚೌಕದಲ್ಲೂ ಮೊತ್ತಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1 ಎಂಬುದೇ ಆಗಿರುವುದೆಂದೂ ಅದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವೇನೆಂದೂ ಈಗ ಅರ್ಥವಾಯಿತಲ್ಲವೇ?

(1) ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

(i) ಕ್ಯಾಲೆಂಡರಿನಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವಂತೆಯೇ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ವಿರುದ್ಧ ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಯಾವುದೇ ಚೌಕವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ ಇದೇ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಸಿಗುವುದೇ?

(ii) ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವೇನೆಂಬುದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಿರಿ.

(2) ಗುಣಾಕಾರ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಚೌಕದ ಬದಲು, ಒಂಬತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ನಾಲ್ಕೂ ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಗುರುತಿಸಿರಿ:

(6)	8	(10)
9	12	15
(12)	16	(20)

(i) ವಿರುದ್ಧ ಮೂಲೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಷ್ಟು?

(ii) ಹೀಗಿರುವ ಚೌಕಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 4 ಎಂದೇ ಸಿಗಲು ಕಾರಣವೇನೆಂದು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ವಿವರಿಸಿರಿ.

(iii) ಹದಿನಾರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೋ?

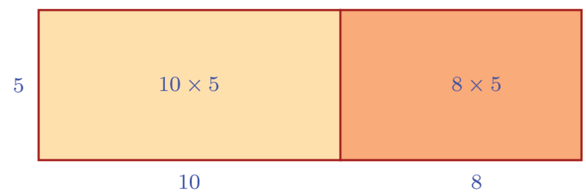
ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಗುಣಕಾರ

18×5 ನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವಿರಿ?

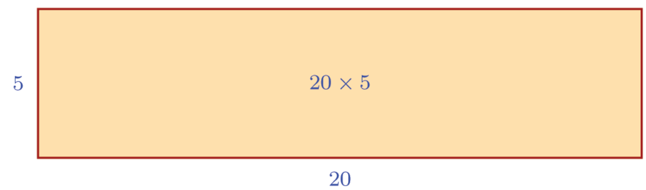
ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿರುವಂತೆಯೇ

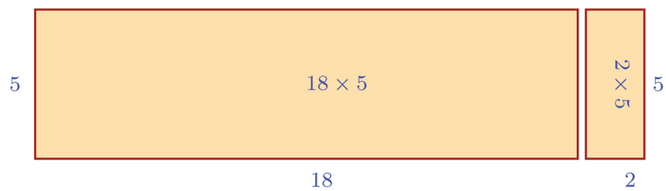
$$18 \times 5 = (10 + 8) \times 5 = (10 \times 5) + (8 \times 5) = 50 + 40 = 90$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.



ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಇದನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.



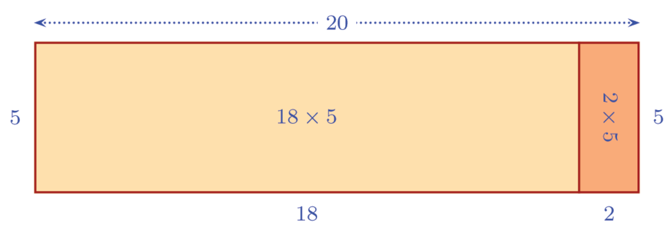


ಅಂದರೆ,

$$\begin{aligned} 18 \times 5 &= (20 - 2) \times 5 \\ &= (20 \times 5) - (2 \times 5) \\ &= 100 - 10 \\ &= 90 \end{aligned}$$

ಹೀಗೂ ಯೋಚಿಸಬಹುದು: 18×5 ರೊಂದಿಗೆ 2×5 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 20×5 ಆಗುವುದಲ್ಲವೇ.

$$(18 \times 5) + (2 \times 5) = (18 + 2) \times 5 = 20 \times 5$$



ಆಗ

$$18 \times 5 = (20 \times 5) - (2 \times 5)$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$38 \times 5 = (40 - 2) \times 5 = (40 \times 5) - (2 \times 5) = 200 - 10 = 190$$

ಎಂದೂ

$$45 \times 8 = 45 \times (10 - 2) = (45 \times 10) - (45 \times 2) = 450 - 90 = 360$$

ಎಂದೆಲ್ಲಾ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಈ ಎರಡೂ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವುದೇನು? ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದಂತೆಯೇ, ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನೂ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

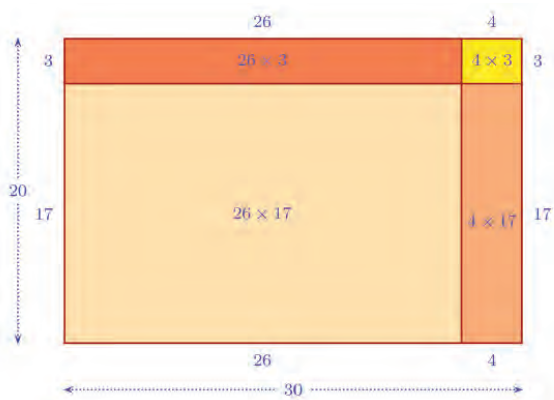
ಇನ್ನು, ಎರಡು ಮೊತ್ತಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದಂತೆಯೇ, ಎರಡು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$26 \times 17 = (30 - 4) \times (20 - 3)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇವುಗಳನ್ನು ಮೊತ್ತಗಳ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆಯೇ ನಾಲ್ಕು ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯುವುದು ಹೇಗೆ?

ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 26 ಮತ್ತು 17 ಆಗಿರುವ ಆಯತವನ್ನು, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು 30 ಮತ್ತು 20 ಆಗಿರುವ ಆಯತವನ್ನಾಗಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ಯೋಚಿಸಿದರೆ ಸುಲಭ.



ಚಿತ್ರದಿಂದ

$$(26 \times 17) + (26 \times 3) + (4 \times 17) + (4 \times 3) = 30 \times 20$$

ಎಂದು ಇದರಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ?

$$(26 \times 17) = 30 \times 20 - (26 \times 3) - (4 \times 17) - (4 \times 3)$$

ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಇನ್ನು, ಸಮವಾಕ್ಯದ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ:

$$30 \times 20 = 600$$

$$26 \times 3 = (30 - 4) \times 3 = 90 - 12 = 78$$

$$4 \times 17 = 4 \times (20 - 3) = 80 - 12 = 68$$

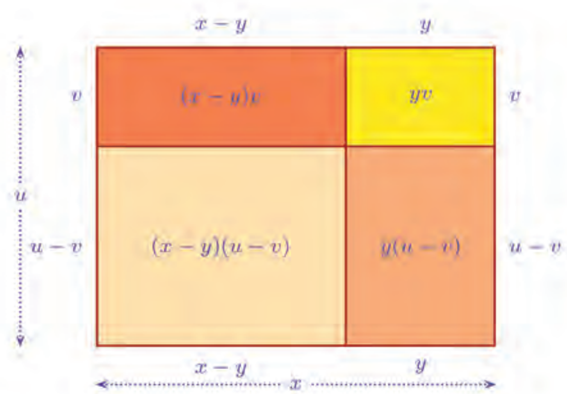
$$4 \times 3 = 12$$

ಆಗ

$$\begin{aligned}(26 \times 17) &= 600 - 78 - 68 - 12 \\ &= 600 - (78 + 68 + 12) \\ &= 600 - 158 \\ &= 442\end{aligned}$$

ಇಷ್ಟೆಲ್ಲಾ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡದೆಯೇ ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ ಮುಂದಿನ ಯೋಚನೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಲ್ಲದೇ ಬೀಜಗಣಿತದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಯೋಚಿಸಿ ನೋಡುವ.

$(x - y)(u - v)$ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ ಸಮಸ್ಯೆ. ಈ ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವಂತೆಯೇ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ $x - y$, $u - v$ ಆಗಿರುವ ಆಯತದ ಭುಜಗಳನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ, ಈ ಉದ್ದಗಳನ್ನು x, u ಆಗಿರುವ ಆಯತವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವ:



ಇದರಿಂದ

$$(x - y)(u - v) + y(u - v) + (x - y)v + yv = xu$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಸಮವಾಕ್ಯದ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದರೆ,

$$(x - y)(u - v) + (yu - yv) + (xv - yv) + yv = xu$$

ಅಂದರೆ,

$$(x - y)(u - v) + yu - yv + xv = xu$$

ಇದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, $(x - y)\ (u - v)$ ಯನ್ನು xu ಆಗಿ ಮಾಡಲು, xv ಯನ್ನೂ yu ವನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿ, yv ಯನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಯಿತು. (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಕಾಣಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ?).

ಆಗ xu ವನ್ನು ಪುನಃ $(x - y)(u - v)$ ಆಗಿ ಮಾಡಲು, ಮೊದಲು ಕೂಡಿಸಿದ xv ಯನ್ನೂ yu ವನ್ನೂ ಕಳೆಯಬೇಕು; ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಕಳೆದ yv ಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ,

$$(x - y)\ (u - v) = xu - xv - yu + yv$$

ಹಾಗೆ ಗುಣಾಕಾರದ ಕುರಿತಾದ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವೂ ಆಯಿತು:

> $x > y,\ u > v$ ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲೂ
>
> $(x - y)(u - v) = xu - xv - yu + yv$

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ನಮ್ಮ ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಾಗಿಸಬಹುದು:

$$\begin{aligned} 26 \times 17 &= (30 - 4) \times (20 - 3) \\ &= (30 \times 20) - (30 \times 3) - (4 \times 20) + (4 \times 3) \\ &= 600 - 90 - 80 + 12 \\ &= 612 - 170 \end{aligned}$$

612 ರಿಂದ 170 ನ್ನು ಕಳೆಯಲು 200 ನ್ನು ಕಳೆದು, 30 ನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದಲ್ಲವೇ ಸುಲಭ.

$$26 \times 17 = 612 - 200 + 30 = 442$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

(i) 38×49 (ii) 47×99 (iii) 29×46 (iv) $9\frac{1}{2} \times 19\frac{1}{2}$

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ

ಎರಡು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಸಮೀಪದ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಇದನ್ನು ಮೊತ್ತಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಿರುವುದಾಗಿದೆ. ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಸಮೀಪದ ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$\begin{aligned} 29 \times 49 &= (30 - 1) \times (50 - 1) \\ &= (30 \times 50) - (30 \times 1) - (50 \times 1) + (1 \times 1) \\ &= 1500 - 30 - 50 + 1 \\ &= 1500 - 80 + 1 \\ &= 1421 \end{aligned}$$

ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು:

$$(x - 1)(y - 1) = xy - x - y + 1$$

ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ:

$$(x - 1)(y - 1) = xy - (x + y) + 1$$

ಅಂದರೆ, ಎರಡು ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಸಮೀಪದ ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು, ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಳೆದು, ಒಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

ಬದಲಾಗಿ, ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸಮೀಪದ ನಂತರದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಹಾಗೂ ಸಮೀಪದ ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ತಿಳಿದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲೂ ಈ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಸಮೀಪದ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 525, ಸಮೀಪದ ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 437 ಎಂದಿರಲಿ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು x, y ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$(x + 1)(y + 1) = 525$$

$$(x - 1)(y - 1) = 437$$

ಅಂದರೆ

$$xy + x + y + 1 = 525$$

$$xy - (x + y) + 1 = 437$$

ಈ ಎರಡೂ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ

$$2xy + 2 = 962$$

ಇದರಿಂದ

$$xy = \frac{1}{2}(962 - 2) = 480$$

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಸಿಕ್ಕಿತಲ್ಲವೇ.

ಇನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರ ಬದಲು, ಮೊದಲನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದಿಂದ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕಳೆದರೋ?

$$2(x + y) = 88$$

ಆಗ,

$$x + y = 44$$

ಹಾಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೂ ಸಿಕ್ಕಿತು.

ಗುಣಲಬ್ಧವೂ ಮೊತ್ತವೂ ಸಿಕ್ಕಿದರೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ.

ಆಗ ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ,

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &= 44^2 - (4 \times 480)\\ &= (4^2 \times 11^2) - (4^2 \times 120)\\ &= (4^2 \times 121) - (4^2 \times 120)\\ &= 4^2\end{aligned}$$

ಅಂದರೆ,

$$x - y = 4$$

ಮೊತ್ತವನ್ನೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನೂ ತಿಳಿದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. (ಸಮವಾಕ್ಯ ಜೋಡಿಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠ)

$$x = \frac{1}{2}(44 + 4) = 24$$

$$y = \frac{1}{2}(44 - 4) = 20$$

(1) ಒಂದು ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ 40 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 70 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ಈ ಆಯತಕ್ಕಿಂತಲೂ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.

(2) ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದವನ್ನೂ ಅಗಲವನ್ನೂ ತಲಾ ಒಂದು ಮೀಟರಿನಂತೆ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 741 ಚದರಮೀಟರಾಗುವುದು; ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಮೀಟರಿನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 861 ಚದರಮೀಟರಾಗುವುದು.

(i) ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟಾಗುವುದು?

(ii) ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟಾಗುವುದು?

(iii) ಉದ್ದವನ್ನೂ ಅಗಲವನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

(3) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಒಂದೊಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 1271 ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಿಂದಲೂ ಒಂದೊಂದನ್ನು ಕಳೆದು ಗುಣಿಸಿದಾಗ 1131 ಸಿಗುವುದು.

(i) ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಷ್ಟು?

(ii) ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?

(iii) ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

(4) ಎರಡು ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸಮೀಪದ ಮುಂದಿನ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 285 ಹಾಗೂ ಸಮೀಪದ ಹಿಂದಿನ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 165 ಆಗಿವೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

ಎರಡು ಮೊತ್ತಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಹಾಗೂ ಎರಡು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಕುರಿತಾದ ಸರ್ವಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಮೊತ್ತದ ಹಾಗೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಗುಣಲಬ್ಧವಾದರೇ?

ಅಂದರೆ, $(x + y)(u - v)$ ನ್ನು ಹೇಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು?

ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿಯೇ ಮುಂದುವರಿಯುವ; ಮೊದಲು ಹೀಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯುವ:

$$(x + y)(u - v) = x(u - v) + y(u - v)$$

ಇನ್ನು ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನೂ ಒಂದೊಂದಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯುವ:

$$x(u - v) = xu - xv$$

$$y(u - v) = yu - yv$$

ಆಗ $(x + y)(u - v) = xu - xv + yu - yv$

x, y, u, v ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ, $u > v$ ಆದರೆ

$$(x + y)(u - v) = xu - xv + yu - yv$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 14×59 ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು,

$$\begin{aligned} 14 \times 59 &= (10 + 4) \times (60 - 1) \\ &= 600 - 10 + 240 - 4 \\ &= 590 + 236 \\ &= 826 \end{aligned}$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿನೋಡಿರಿ.

(i) 52×19 (ii) 101×48 (iii) 97×102 (iv) $9\frac{3}{4} \times 20\frac{1}{2}$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನೂ ಮೊತ್ತವನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಒಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗಲೂ ಅಥವಾ ಒಂದನ್ನು ಕಳೆದಾಗಲೂ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದುದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಒಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದರಿಂದ ಒಂದನ್ನು ಕಳೆದರೋ?

8 ಮತ್ತು 5 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಿಶೀಲಿಸುವ.

$$\begin{aligned} 8 \times 5 &= 40 \\ (8 + 1) \times (5 - 1) = 9 \times 4 &= 36 \\ (8 - 1) \times (5 + 1) = 7 \times 6 &= 42 \end{aligned}$$

ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೋಡಿರಿ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಒಂದು ಕೂಡಿಸಿ, ಸಣ್ಣದರಿಂದ ಒಂದನ್ನು ಕಳೆದರೆ, ಗುಣಲಬ್ಧ ಹೆಚ್ಚುವುದೇ, ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದೇ?

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಒಂದನ್ನು ಕಳೆದು, ಸಣ್ಣದಕ್ಕೆ ಒಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೋ?

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನೋಡುವ. ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದೂ, ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ y ಎಂದೂ ತೆಗೆಯುವ. ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಒಂದು ಕೂಡಿಸಿ, ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಒಂದನ್ನು ಕಳೆದರೆ, ಗುಣಲಬ್ಧ

$$(x + 1)(y - 1) = xy - x + y - 1$$

ಅಂದರೆ, ಮೊದಲ ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ x ನ್ನು ಕಳೆದು, ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ y ಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಲಾಯಿತು. ಆಗ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಡಿಮೆಯಾಯಿತಲ್ಲವೇ. ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಒಂದನ್ನು ಕಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೊಸ ಗುಣಲಬ್ಧ ಕಡಿಮೆಯಾಯಿತಲ್ಲವೇ?

ಇನ್ನು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಒಂದನ್ನು ಕಳೆದು, ಸಣ್ಣದಕ್ಕೆ ಒಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೋ?

$$(x - 1)(y + 1) = xy + x - y - 1$$

ಕೂಡಿಸಿದುದು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ x; ಕಳೆದುದು ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ y; ಆದುದರಿಂದ ಗುಣಲಬ್ಧ ಹೆಚ್ಚಾಯಿತು. ಆದರೆ ಇನ್ನೂ ಒಂದನ್ನು ಕಳೆದಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ?

ಇಲ್ಲಿ ಹೊಸ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಬಹುದು:

- ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಯಿಲ್ಲ.
- ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಲ್ಲದ, ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ಗುಣಲಬ್ಧ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು.

ಈ ಹೇಳಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಿಚಾರಗಳ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಯೋಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

(1) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 713 ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸ 8 ಆಗಿದೆ.

(i) ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಒಂದು ಕೂಡಿಸಿ, ಸಣ್ಣದರಿಂದ ಒಂದನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಷ್ಟು?

(ii) ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 1 ನ್ನು ಕಳೆದು, ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಷ್ಟು?

(2) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದರೊಂದಿಗೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, ಸಣ್ಣದರಿಂದ 1 ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವು, ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕಿಂತಲೂ 5 ಕಡಿಮೆ ಆಗಿದೆ. ದೊಡ್ಡದರಿಂದ 1 ನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಸಣ್ಣದರೊಂದಿಗೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕಿಂತ ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು?

(3) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ, ದೊಡ್ಡದರೊಂದಿಗೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, ಸಣ್ಣದರಿಂದ 1 ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧ 540 ಆಗಿದೆ. ದೊಡ್ಡದರಿಂದ 1 ನ್ನು ಕಳೆದು, ಸಣ್ಣದಕ್ಕೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧ 560 ಆಗಿದೆ.

(i) ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಷ್ಟು?

(ii) ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಷ್ಟು?

(iii) ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

(4) ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದವನ್ನು 3 ಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ಆಗಲವನ್ನು 2 ಮೀಟರಿನಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದಾಗ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 10 ಚದರಮೀಟರುಗಳಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. ಉದ್ದವನ್ನು 2 ಮೀಟರುಗಳಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ, ಅಗಲವನ್ನು 3 ಮೀಟರುಗಳಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 30 ಚದರಮೀಟರುಗಳಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲನೇ ಆಯತದ ಉದ್ದವನ್ನೂ ಅಗಲವನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.

5

ಅಭಿನ್ನಕ ಗುಣಾಕಾರ

ಒಂದು ಚೌಕದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವನ್ನು, ಅದರ ಭುಜದ ಉದ್ದದ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯಾಮಡಿಯಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಏಕಕವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಈ ಉದ್ದವನ್ನು $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುವುದು ಎಂಬುದನ್ನೂ ನೋಡಿದೆವು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಪರಿಚಯಿಸಿಕೊಂಡೆವು. (ಇಂತಹ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು **ವೃತ್ತಗಳ ಅಳತೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೋಡಬಹುದು).

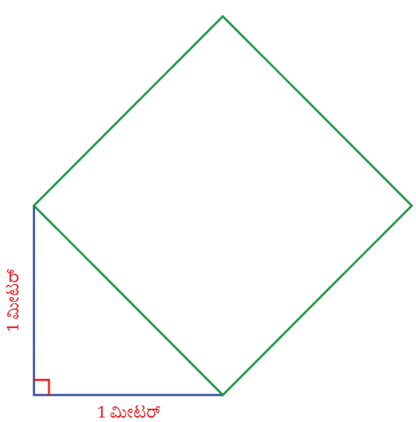
ಹೀಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಏಕಕದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಸಂದರ್ಭಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿ ರೂಪುಗೊಂಡಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿದೆವು.

ಇನ್ನು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳು, ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆ-ಯೆಡೆಗೆ ಸಾಗುವುದು ಹೇಗೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಗುಣಾಕಾರ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಹಲವು ಬಾರಿ ನೋಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ; ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು ಮೀಟರ್?



ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ $\sqrt{2}$ ಮೀಟರಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ; ಆಗ ಸುತ್ತಳತೆ ಸಿಗಲು ಇದರ ನಾಲ್ಕು ಮಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದರೆ ಸಾಕು;

ಅಂದರೆ $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$

ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೇ $\sqrt{2}$ ರ 4 ಮಡಿಯನ್ನೂ $4\times\sqrt{2}$ ಅಥವಾ $\sqrt{2}\times 4$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು; ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಗುಣಾಕಾರ ಚಿಹ್ನೆಯಿಲ್ಲದೆ, $4\sqrt{2}$ ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುವುದು.

$$4\sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$$

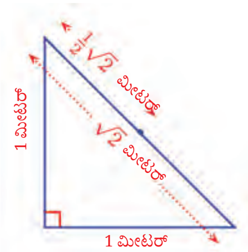
ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಾಲ್ಕು ಮಡಿಯನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು:

$$4 \times 1.4, \quad 4 \times 1.41, \quad 4 \times 1.414, \ldots$$

ಆಗ ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಮಿಲ್ಲೀಮೀಟರ್ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಬರೆದರೆ,

$4 \times 1.414 = 5.656$ ಮೀಟರ್.

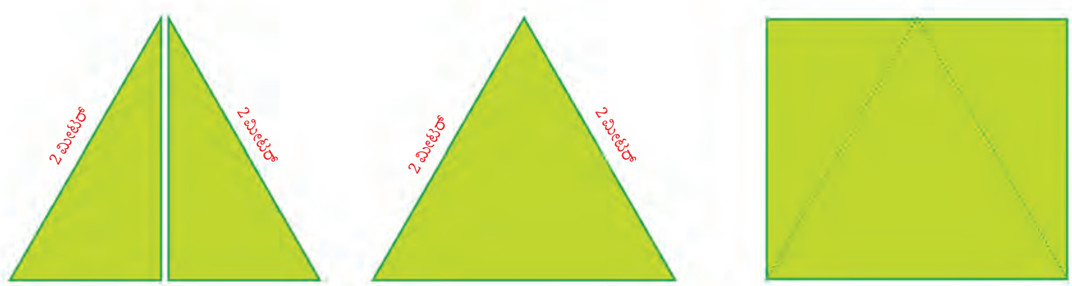
ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\sqrt{2}$ ರ ಅರ್ಧವನ್ನು $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದಾಗಿದೆ:



$\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅರ್ಧವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುವುವು; ಅಂದರೆ,

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.7071\ldots$$

ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿ, ಇನ್ನೊಂದರ ಇಕ್ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿರಿಸಿ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಾಗಿದೆ.

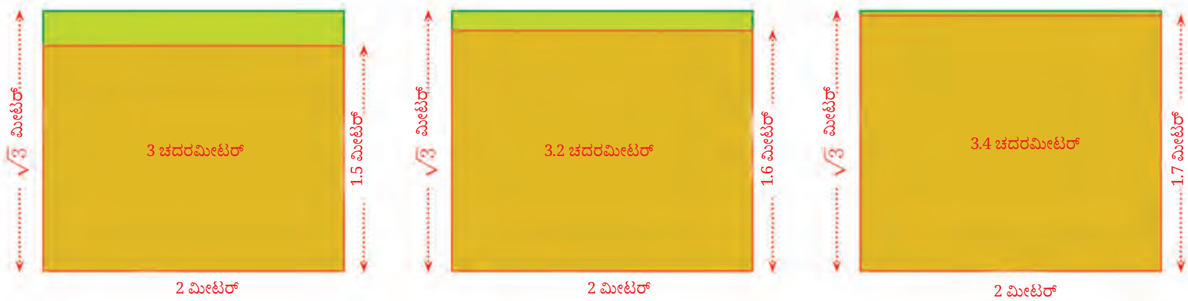
ಈ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ:

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿಯೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಭುಜಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾದ $2\sqrt{3}$ ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆಯೇ?

ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು, ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ 2 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ $\sqrt{3}$ ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಆಯತಗಳನ್ನು ಇದರೊಳಗೆ ರಚಿಸಿ ನೋಡೋಣ.



ಆಮೇಲೆ ಒಳಗಿನ ಆಯತಗಳ ಅಗಲಗಳು 1.73 ಮೀಟರ್, 1.732 ಮೀಟರ್... ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಗಣಿಸುವಾಗ ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎರಡು ಮಡಿಯಷ್ಟು ಚದರಮೀಟರಾಗಿರುವುದು.

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ನೋಡಿದರೆ ಹೀಗೆ ಒಳಗೆ ರಚಿಸುವ ಆಯತಗಳು ಹೊರಗಿನ ಆಯತದ ಗಾತ್ರಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರ ಸಾಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು, ಹೊರಗಿನ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದು.

ಅಂದರೆ

$$2 \times 1.7, \qquad 2 \times 1.73, \qquad 2 \times 1.732, \ldots$$

ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಹೊರಗಿನ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದು.

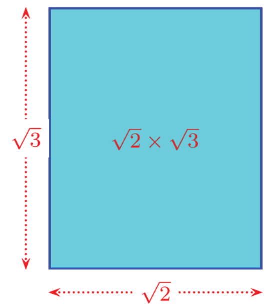
ಈ ಮೊದಲೇ ಹೇಳಿರುವಂತೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮೀಪಿಸುವುದು $2\sqrt{3}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

ಹಾಗೆ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು 2 ಮತ್ತು $\sqrt{3}$ ಆಗಿರುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, $2\sqrt{3}$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸಿಕ್ಕಿತು.

ಇನ್ನು ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ಆದರೋ?

ಈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಆಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾಗಿ ವಿವರಿಸಲು $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ಎಂಬಿವುಗಳಿಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಗುಣಿಸಿ, ಅಗತ್ಯವಿರುವಷ್ಟು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.



$$\begin{array}{ccccc} 1.4 & 1.41 & 1.414 & \ldots & \rightarrow \sqrt{2} \\ 1.7 & 1.73 & 1.732 & \ldots & \rightarrow \sqrt{3} \\ \hline 2.4 & 2.44 & 2.449 & \ldots & \rightarrow \sqrt{2} \times \sqrt{3} \end{array}$$

ಅಂದರೆ

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2.449\ldots$$

ಇಲ್ಲಿ ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಒಂದು ಸಂಶಯ ಬರಬಹುದು.

ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು, ಗುಣಲಬ್ಧದ ವರ್ಗಮೂಲಕ್ಕೆ ಸಮಾನ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$\sqrt{4} \times \sqrt{25} = 2 \times 5 = 10$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದಂತೆಯೇ,

$$\sqrt{4} \times \sqrt{25} = \sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = 10$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

ಎಂದೂ

$$\sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10}$$

ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

> **ದಶಮಾಂಶ ಲೆಕ್ಕ**
>
> ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಸ್ಥಾನದವರೆಗೆ ಸರಳಗೊಳಿಸಿ ಬರೆಯುವಾಗ, ನಂತರದ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಯು 5 ಅಥವಾ 5 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಯೊಂದಿಗೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಲಾಗುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $1.7 \times 1.4 = 2.38$ ಆಗಿರುವ ಕಾರಣ, ಈ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಒಂದು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನದವರೆಗೆ ಬರೆಯುವಾಗ 2.4 ಆಗುವುದು.

ಆದರೆ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ಆಗುವುದೇ?

ಇದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು, $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವ 2.4, 2.44, 2.449, ... ಎಂಬೀ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು 6 ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು.

$$2.4^2 = 5.76$$

$$2.44^2 \approx 5.95$$

$$2.449^2 \approx 5.998$$

ಇವುಗಳ ವರ್ಗಗಳು 6 ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದರಿಂದ,

$$\sqrt{6} = 2.449\ldots$$

ಈ ಮೊದಲು $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ಆಗಿ ಸಿಕ್ಕಿರುವುದೂ ಇದುವೇ ಅಲ್ಲವೇ?

ಆಗ,

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

2 ಮತ್ತು 3 ರ ಬದಲು ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ, ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು, ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವಾಗಿರುವುದೆಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂದರೆ,

> x, y ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ $\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ ಬರೆಯಲು ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಎರಡು ಲಂಬ ಭುಜಗಳು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಪೈಥಗೋರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ಕರ್ಣವು ಭುಜವಾಗಿರುವ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $3^2 + 3^2 = 18$ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಆಗ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ $\sqrt{18}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

ಇನ್ನು 18 ನ್ನು 9×2 ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

ಗುಣಾಕಾರವೂ ವರ್ಗಮೂಲವೂ

$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 2.4, 2.44, 2.449, ... ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಇವುಗಳ ವರ್ಗಗಳು 6 ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವೇನು?

$$1.4 \times 1.7,\ 1.41 \times 1.73,\ 1.414 \times 1.732,\ \ldots$$

ಎಂಬೀ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಿಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯಲ್ಲವೇ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಕ್ಕಿರುವುದು. ಇವುಗಳ ವರ್ಗಗಳು

$$(1.4 \times 1.7)^2,\ (1.41 \times 1.73)^2,\ (1.414 \times 1.732)^2,\ \ldots$$

ಈ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ವರ್ಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

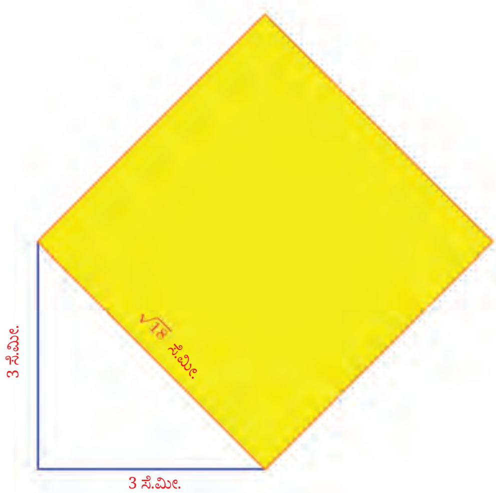
$$(1.4 \times 1.7)^2 = 1.4^2 \times 1.7^2$$

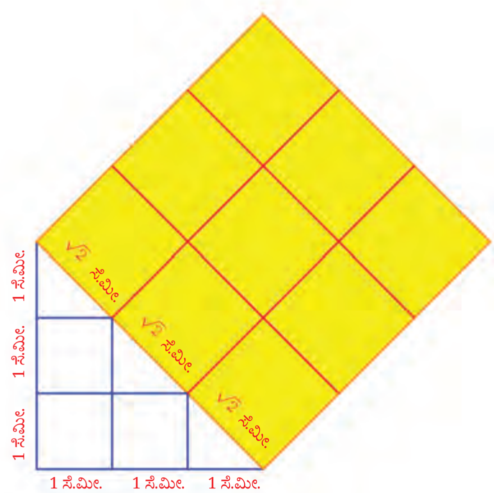
$$(1.41 \times 1.73)^2 = 1.41^2 \times 1.73^2$$

$$(1.414 \times 1.732)^2 = 1.414^2 \times 1.732^2$$

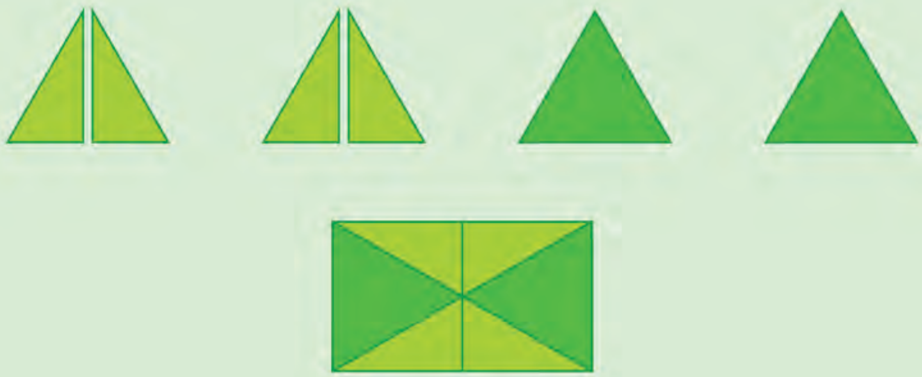
ಬಲಭಾಗದ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಲ್ಲಿ 1.4^2, 1.41^2, 1.414^2, ... ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 2 ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ, 1.7^2, 1.73^2, 1.732^2, ... ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 3 ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಆಗಿವೆ. ಆಗ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು 6 ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದು.

ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿಯೂ ಕಾಣಬಹುದು:





(1) ಸಮಾನ ಗಾತ್ರವಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನ್ನು ನೇರಕ್ಕೆ ಕತ್ತರಿಸಿಯೂ ಉಳಿದೆರಡನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ಸೇರಿಸಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದು.

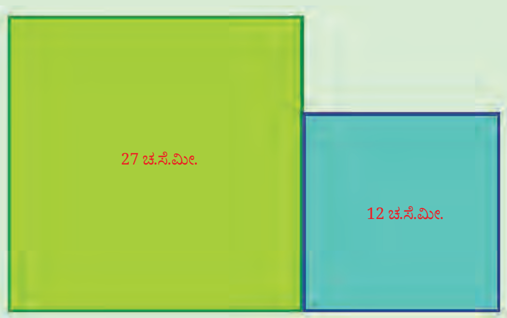


ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದಾದರೆ, ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

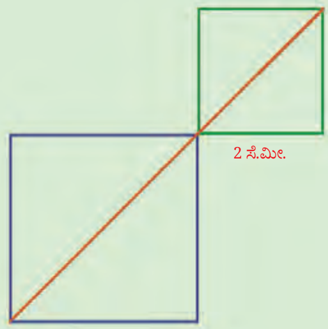
(2) ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಮತ್ತು ಅದರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದದ ಎರಡು ಮಡಿಯಷ್ಟು ಉದ್ದದ ಭುಜಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಕತ್ತರಿಸಿ ಬೇರ್ಪಡಿಸಿಟ್ಟು ಒಂದು ಸಮಲಂಬವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದು:

ಚೌಕದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಸಮಲಂಬದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

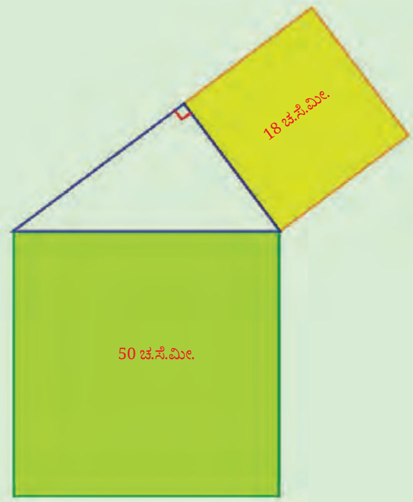
(3) ಎರಡು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟು ನಿರ್ಮಿಸಲಾದ ಒಂದು ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಆಕೃತಿಯ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು, ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.



(4) ಎರಡು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಲಾದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೆಯ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನೂ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.



(6) ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಆಗಿವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\sqrt{3}, \sqrt{12}$ (ii) $\sqrt{3}, \sqrt{1.2}$ (iii) $\sqrt{5}, \sqrt{8}$

(iv) $\sqrt{0.5}, \sqrt{8}$ (v) $\sqrt{7\frac{1}{2}}, \sqrt{3\frac{1}{3}}$ (vi) $\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{1}{10}}$

ಭಾಗಾಕಾರ

$2 \times 3 = 6$ ಎಂಬ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು $\frac{6}{2} = 3$ ಎಂದೋ $\frac{6}{3} = 2$ ಎಂದೋ ಭಾಗಾಕಾರವಾಗಿಯೂ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ಎಂಬ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೋ ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ x, y ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $x \times y = z$ ಎಂಬ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು $\frac{z}{x} = y$ ಎಂದೂ $\frac{z}{y} = x$ ಎಂದೂ ಭಾಗಾಕಾರವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ,

> x, y ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ
>
> $$\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{z}$$
>
> ಎಂಬ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರವಾಗಿ
>
> $$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}} = \sqrt{y} \quad \text{ಹಾಗೂ} \quad \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}$$
>
> ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇನ್ನು $\frac{6}{2} = 3$ ಮತ್ತು $\frac{6}{3} = 2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}, \qquad \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$$

ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು. ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿರುವುದೇನು?

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

ಈ ಎರಡು ಜೊತೆ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಿಂದ

$$\sqrt{\frac{6}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \qquad \sqrt{\frac{6}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

ಎಂದೆಲ್ಲಾ ಕಾಣಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{3 \times \frac{2}{3}} = \sqrt{2}$$

ಎಂದೂ ಆಮೇಲೆ ಈ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಭಾಗಾಕಾರವಾಗಿ

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

x, y ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

ಇನ್ನು ಇಂತಹ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಹೇಗೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಮೊದಲು

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆಮೇಲೆ $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಒಂದನ್ನು ಭಾಗಿಸಿ, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1.414} = 0.707$$

ಇನ್ನೊಂದು ಸುಲಭ ದಾರಿಯಿದೆ; $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು:

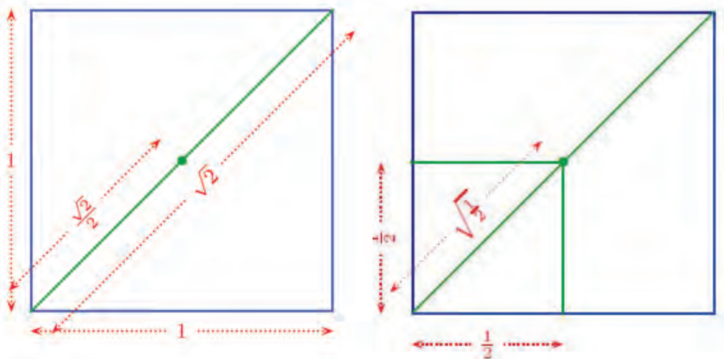
$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ಇನ್ನು

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1.414}{2} = 0.707$$

ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿಯೂ ನೋಡಬಹುದು:



ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

> x ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ
>
> $$\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x}{x^2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

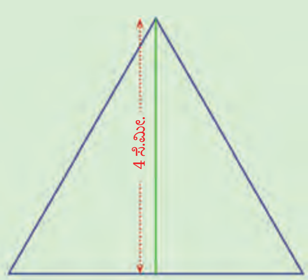
(1) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ ನ್ನು ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ನ್ನು ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

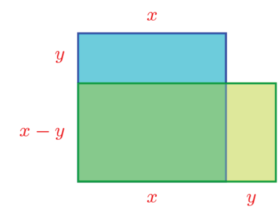
(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



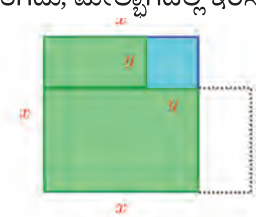
ಗುಣಾಕಾರ ಸಮವಾಕ್ಯ

$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ನೆನಪಿದೆಯೇ?

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ x ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು y ಯಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜವನ್ನು y ಯಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಯಿತೆಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ.



ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $(x+y)(x-y)$. ಆಯತದಲ್ಲಿ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಸಿರುವ ಭಾಗವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು, ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದರೇ?



ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಸುರು ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $x^2 - y^2$ ಇದು ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದ ಹಸುರು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇ ಅಲ್ಲವೇ?

ಉದ್ದಗಳು ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಗುಣಲಬ್ಧವೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ x, y ಎಂಬುದು ಅಭಿನ್ನಕಗಳಾದರೂ $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ ಎಂಬುದೇ ಆಗಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇತರ ಸರ್ವಸಮ ವಾಕ್ಯಗಳೂ ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೆಂಪು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಹೊರಗಿನ ಚೌಕದ ಮತ್ತು ಒಳಗಿನ ಚೌಕದ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.?

(4) $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ ಎಂದೂ $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$ ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

(5) ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಜೊತೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಕೆಲವು ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಆಗಿ ಸಿಗುವುವು. ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\sqrt{72}, \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{27}, \sqrt{3}$ (iii) $\sqrt{125}, \sqrt{50}$

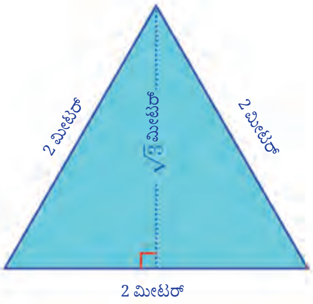
(iv) $\sqrt{10}, \sqrt{2}$ (v) $\sqrt{20}, \sqrt{5}$ (vi) $\sqrt{18}, \sqrt{8}$

ತ್ರಿಕೋನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು

ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಕೆಲವು ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ಮೊದಲಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿವೆ. ಆ ನಂತರ ಕೆಲವು ಆಯತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲೂ ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಗತ್ಯವಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದೆವು.

ಒಂದು ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೋ ಆಗಿರುವುದಾದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೂ ಹಾಗೆಯೇ ಆಗಿರುವುದು. ಆದರೆ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೋ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಹಾಗೆ ಆಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

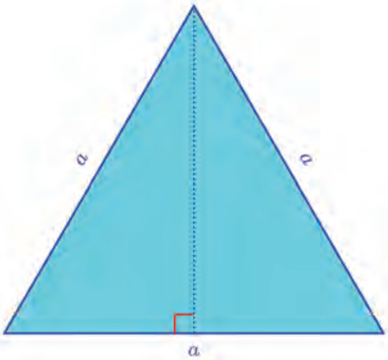
ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ 2 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರ $\sqrt{3}$ ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ:



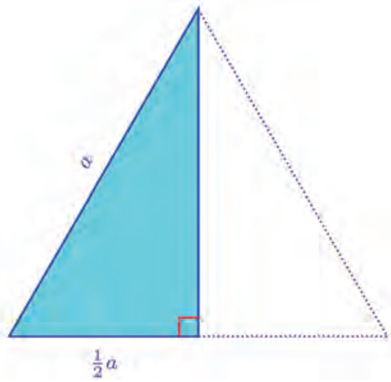
ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

$\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ಚದರ ಮೀಟರ್

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಭುಜದ ಉದ್ದ (ಸೆಂಟಿಮೀಟರೋ ಮೀಟರೋ ಯಾವುದೇ ಆದರೂ ಒಂದು ಏಕಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಳೆದಾಗ) a ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಅದರ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟಾಗುವುದು?



ಇದರೊಳಗಿರುವ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವನ್ನೂ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನೂ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ:



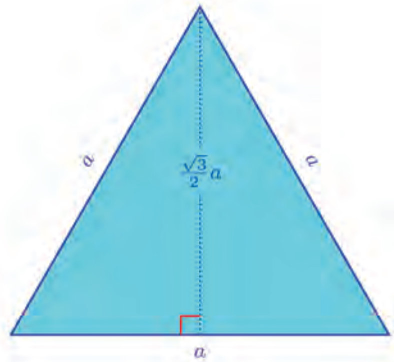
ಆಗ ಮೂರನೇ ಭುಜದ ವರ್ಗ

$$a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$$

ಇದರಿಂದ ಈ ಭುಜದ ಉದ್ದ

$$\sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

ಇದುವೇ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಉನ್ನತಿ.



ಇನ್ನು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ:

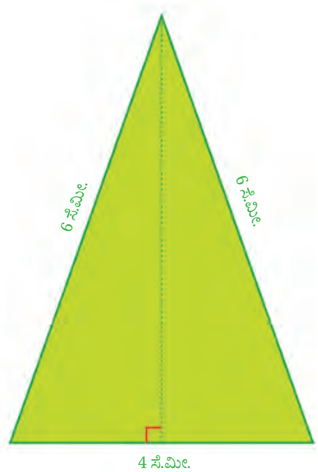
$$\text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

ಅಂದರೆ,

ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಉನ್ನತಿಯು ಭುಜದ ಅರ್ಧದ $\sqrt{3}$ ಮಡಿ ಆಗಿದೆ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಭುಜದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗದ $\sqrt{3}$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಾ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಉನ್ನತಿ $4\sqrt{3}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹಾಗೂ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $16\sqrt{3}$ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಭುಜ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ಭುಜಗಳು ತಲಾ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಇದರಲ್ಲೂ ಮೇಲಿನ ಶಿರದಿಂದ ಇರುವ ಲಂಬವು, ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದಲ್ಲವೇ (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠ)

ಆಗ, ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಹಾಗೆಯೇ ಇದರಲ್ಲೂ ಉನ್ನತಿಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ?

$$\text{ಉನ್ನತಿಯ ವರ್ಗ} = 6^2 - 2^2 = 32$$

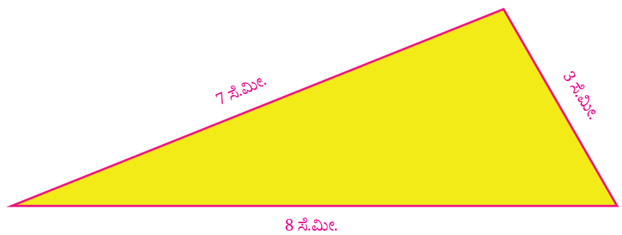
ಆಗ ಉನ್ನತಿ

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

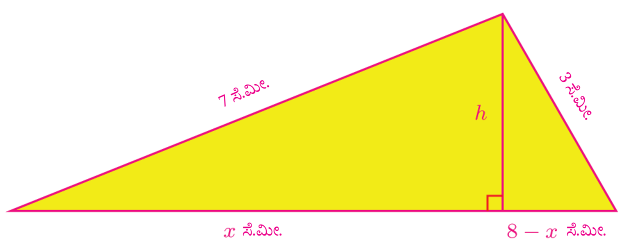
ಇನ್ನು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ

$$\text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. (ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಷ್ಟೆ.) ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಮೊದಲು ಇದರ ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಇದನ್ನು h ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ, ಈ ಲಂಬವು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು ಖಂಡಿಸುವ ಒಂದು ತುಂಡಿನ ಉದ್ದವು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಬರೆಯುವ:



ಆಗ ಎಡಭಾಗದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ,

$$x^2 + h^2 = 49$$

ಎಂದೂ ಬಲಭಾಗದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ

$$(8 - x)^2 + h^2 = 9$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಮೊದಲನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದಿಂದ ಎರಡನೇ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕಳೆದರೆ,

$$x^2 - (8 - x)^2 = 40$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಮೊತ್ತದ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ:

$$x^2 - (8 - x)^2 = (x + (8 - x))\,(x - (8 - x))$$

$$= 8(2x - 8)$$

ಆಗ ನಮ್ಮ ಸಮವಾಕ್ಯ

$$8(2x - 8) = 40$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದರಿಂದ $2x - 8 = 5$ ಎಂದೂ, ಆಮೇಲೆ $x = \frac{1}{2}(5+8) = 6\frac{1}{2}$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

ಇನ್ನು ಪುನಃ ಎಡಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ,

$$h^2 = 7^2 - \left(6\frac{1}{2}\right)^2 = 13\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= 6\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 6\frac{3}{4}$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಆಗ

$$h = \sqrt{6\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ

$$\text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{3}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಲ್ಲಿ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ a, b, c ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯದೆಯೇ ನೇರವಾಗಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಗಣನೆ ಮಾಡಲಿರುವ ಒಂದು ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಚಕವು ಸಿಗುವುದು. ಅದು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು.

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ a, b, c ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ಇದನ್ನು ಆರನೇ ದಶಕದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಸಿನಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಹೆರೋನ್ ಎಂಬ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನು ಕಂಡುಹಿಡಿದನು. (ಇದು ಹೇಗೆ ಸಿಕ್ಕಿದುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು ಆಸಕ್ತಿಯಿದ್ದರೆ, ಪಾಠದ ಕೊನೆಗೆ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಅನುಬಂಧವನ್ನು ನೋಡಿರಿ).

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈಗ ಮಾಡಿರುವ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ,

$$a = 8 \quad b = 7 \quad c = 3$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$s = \frac{1}{2}(8 + 7 + 3) = 9$$

ಆಮೇಲೆ

$$s - a = 1$$

$$s - b = 2$$

$$s - c = 6$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಆಗ

$$\text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \sqrt{9 \times 1 \times 2 \times 6} = \sqrt{9 \times 4 \times 3} = 6\sqrt{3}$$

(1) ಕೆಲವು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 10 ಸೆ.ಮೀ. (ii) 5 ಸೆ.ಮೀ. (iii) $\sqrt{3}$ ಸೆ.ಮೀ.

(2) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಸಮಷಡ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಉನ್ನತಿ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) ಸಮಾನಾಂತರ ಭುಜಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಸಮಷಡ್ಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.

(5) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಉನ್ನತಿಯನ್ನೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6) ಕೆಲವು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

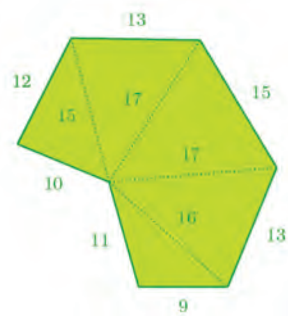
(i) 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

(ii) 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 13 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

(iii) 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 13 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

ಸ್ಥಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

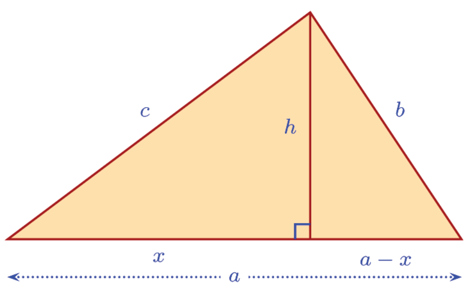
ಗಡಿಗಳು ನೇರ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಥಳಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವು, ಮೊದಲು ಅದನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದಾಗಿದೆ.



ಇನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೆರೋನ್ ಸೂತ್ರವಾಕ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ, ಅವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸ್ಥಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಯಿತು..

ಅನುಬಂಧ

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಹೆರೋನ್ ಸೂತ್ರವಾಕ್ಯ ಸಿಕ್ಕಿದುದು ಹೇಗೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವ. ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು a, b, c ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ. ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿರುವಂತೆಯೇ, ಒಂದು ಶಿರದಿಂದ ಅದರ ಎದುರು ಇರುವ ಭುಜಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬದ ಉದ್ದ h ಎಂದೂ ಈ ಲಂಬವು ಭುಜವನ್ನು ಖಂಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಒಂದು ತುಂಡಿನ ಉದ್ದವನ್ನು x ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.



ಆಗ ಎಡಭಾಗದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ,

$$x^2 + h^2 = c^2$$

ಎಂದೂ, ಬಲಭಾಗದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ,

$$(a - x)^2 + h^2 = b^2$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಮೊದಲನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದಿಂದ ಎರಡನೇ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕಳೆದರೆ,

$$x^2 - (a - x)^2 = c^2 - b^2$$

ಇನ್ನು $x^2 - (a - x)^2$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು, ಮೊತ್ತದ ಹಾಗೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯುವ.

$$x^2 - (a - x)^2 = (x + (a - x))\,(x - (a - x)) = a(2x - a)$$

ಆಗ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ ದೊರೆತ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$a(2x - a) = c^2 - b^2$$

ಇದರಿಂದ

$$2x - a = \frac{c^2 - b^2}{a}$$

ಎಂದೂ, ಆಮೇಲೆ

$$2x = \frac{c^2 - b^2}{a} + a = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{a}$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ

$$x = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}$$

ಇನ್ನು ಎಡಭಾಗದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ ಸಿಗುವ

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c + x)\,(c - x)$$

ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ x ನ್ನು ಈಗ ನೋಡಿದ ಹಾಗೆ, a, b, c ಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$h^2 = \left(c + \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}\right)\left(c - \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}\right)$$

ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$h^2 = \left(\frac{2ac + (c^2 - b^2 + a^2)}{2a}\right)\left(\frac{2ac - (c^2 - b^2 + a^2)}{2a}\right)$$

ಮೊದಲನೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸರಳಗೊಳಿಸಬಹುದು:

$$\begin{aligned} 2ac + (c^2 - b^2 + a^2) &= (a^2 + c^2 + 2ac) - b^2 \\ &= (a + c)^2 - b^2 \end{aligned}$$

$$= ((a + c) + b)\,((a + c) - b)$$

$$= (a + c + b)\,(a + c - b)$$

ಎರಡನೇ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶವನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ:

$$2ac - (c^2 - b^2 + a^2) = 2ac - c^2 + b^2 - a^2$$

$$= b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac)$$

$$= b^2 - (a - c)^2$$

$$= (b + a - c)\,(b - (a - c))$$

$$= (b + a - c)\,(b - a + c)$$

ಇವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, h^2 ನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$h^2 = \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}$$

ಇನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು p ಎಂದು ಬರೆದರೆ,

$$p = a + b + c$$

ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೇ

$$p - 2a = (a + b + c) - 2a = (b + c - a)$$

$$p - 2b = (a + b + c) - 2b = (a - b + c)$$

$$p - 2c = (a + b + c) - 2c = (a + b - c)$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಆಗ

$$h^2 = \frac{p(p-2b)(p-2c)(p-2a)}{4a^2}$$

ಇನ್ನು, ಸುತ್ತಳತೆಯ ಅರ್ಧವನ್ನು s ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ $p = 2s$ ಆಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ

$$h^2 = \frac{2s(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}{4a^2}$$

$$= \frac{2s \times 2(s-b) \times 2(s-c) \times 2(s-a)}{4a^2}$$

$$= \frac{4s(s-b)(s-c) \times (s-a)}{a^2}$$

ಇದರಿಂದ

$$h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

$$\text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \times a \times \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

6

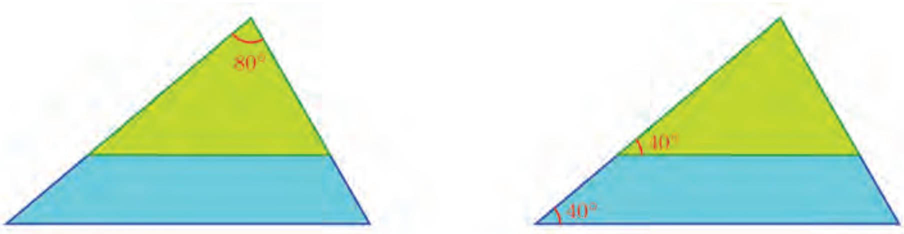
ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳು

ಕೋನಗಳೂ ಭುಜಗಳೂ

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಾ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೆಂದು ತಿಳಿದಿರುವಿರಲ್ಲವೇ; ತಿರುಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ ಎಂದೂ ತಿಳಿದಿದೆ. (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠ) ಹಾಗಾದರೆ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ, ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳೊಳಗೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ?

ಇದನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನದ ಅಳತೆಗಳಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗಾತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಚಾರ್ಟ್ ಪೇಪರಿನಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಿರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ರೀತಿಯ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಬಹುದು:

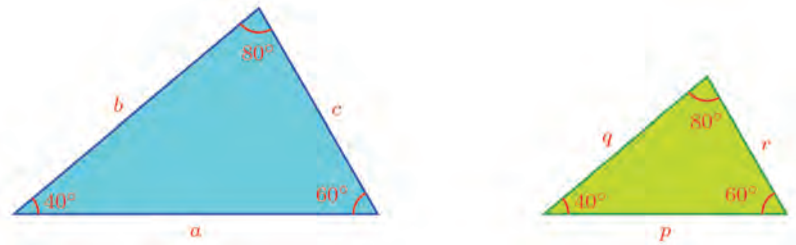
ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಲು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಭಾಗಕ್ಕೆ ತನ್ನಿರಿ. ಮೇಲಿನ ಶಿರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಡಿರಿ. ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದುದರಿಂದ ಈ ಶಿರದ ಭುಜಗಳೂ ಸೇರಿರುತ್ತವೆ.



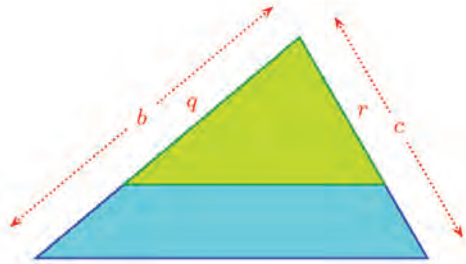
ಇಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೆಳಭಾಗದ ಭುಜಗಳು ಎಡಭಾಗದ ಭುಜದೊಂದಿಗೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುವುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಈ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ.

ಆದುದರಿಂದ, ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜ, ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡಭಾಗದ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ತುಂಡರಿಸುವುದು. (ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠ)

ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹೇಳಲು, ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ.



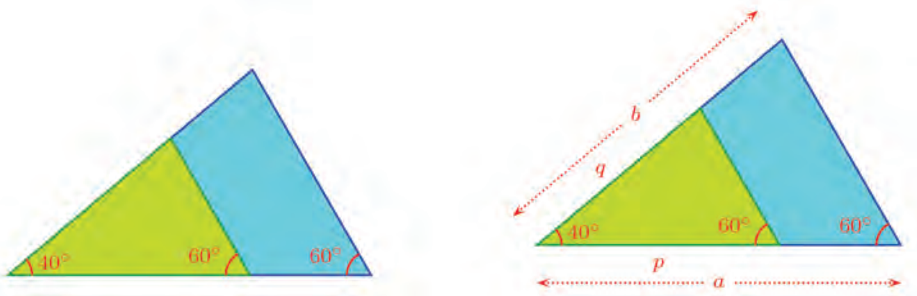
ಸೇರಿಸಿ ಇಡುವಾಗ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.



ಆಗ ಈ ಮೊದಲು ಹೇಳಿದ (ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ತುಂಡರಿಸಲ್ಪಡುವುದು) ವಿಷಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$\frac{q}{b} = \frac{r}{c}$$

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೇಲಿನ ಶಿರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಇಡುವುದರ ಬದಲು ಎಡಭಾಗದ ಶಿರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟರೋ?



ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆ, ಈಗ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆಯೆಂದೂ, ಆದುದರಿಂದ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜವು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಮತ್ತು ಎಡಭಾಗದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ತುಂಡರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ತಿಳಿಯುವುದಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ,

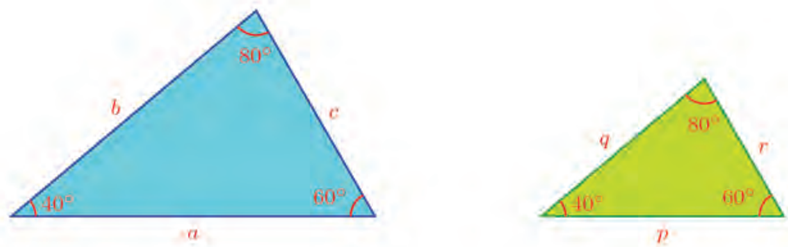
$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b}$$

ಇದನ್ನೂ, ಈ ಮೊದಲಿನ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c}$$

ಈ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಅರ್ಥವೇನು?

ಮೊದಲು, ಇಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷರಗಳು ಏನನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.



- 80° ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು a, p
- 60° ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು b, q
- 40° ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು c, r

ಇನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅರ್ಥವೇನೆಂದು ನೋಡುವ:

- $\frac{p}{a}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, p ಎಂಬ ಅಳತೆಯು a ಎಂಬ ಅಳತೆಯ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.
- $\frac{q}{b}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, q ಎಂಬ ಅಳತೆಯು b ಎಂಬ ಅಳತೆಯ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.
- $\frac{r}{c}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, r ಎಂಬ ಅಳತೆಯು c ಎಂಬ ಅಳತೆಯ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಆಗ

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c}$$

ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಅರ್ಥವೇನು?

ಈ ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಗಳು ಸಮಾನವೇ ಆಗಿರುವುವು.

ಅಂದರೆ, ಸಮಾನವಾದ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು $(p, a), (q, b), (r, c)$ ಎಂಬೀ ಜೊತೆಗಳಾದರೆ, ಸಣ್ಣ ಉದ್ದಗಳಾದ p, q, r ಎಂಬಿವುಗಳು ದೊಡ್ಡ ಉದ್ದಗಳಾದ a, b, c ಎಂಬಿವುಗಳ ಒಂದೇ ಭಾಗಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ದೊಡ್ಡ ಉದ್ದಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಣ್ಣ ಉದ್ದಗಳ ಒಂದೇ ಮಡಿಗಳಾಗಿರುವುವು ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಕೋನಗಳು 80°, 60°, 40° ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ, ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಅಳತೆಗಳಾದರೂ ಈಗ ಹೇಳಿದ ವಿಚಾರ ಸರಿಯಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ.

ಆಗ ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳನ್ನು ಜೊತೆಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಸಣ್ಣ ಉದ್ದಗಳೆಲ್ಲಾ ದೊಡ್ಡ ಉದ್ದಗಳ ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿರುವುವು. (ಅಥವಾ ದೊಡ್ಡ ಉದ್ದಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಣ್ಣ ಉದ್ದಗಳ ಸಮಾನ ಮಡಿಗಳಾಗಿರುವುವು)

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಕೋನದ ಎದುರಿರುವ ಭುಜದ ಅಳತೆಯು ಅತಿ ಚಿಕ್ಕದೂ, ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನದ ಎದುರಿರುವ ಭುಜದ ಅಳತೆಯು ಅತಿ ದೊಡ್ಡದೂ ಆಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಅವುಗಳ ಎದುರಿನ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳಿರುವುವು.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Min = 0 ಆಗಿ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ d ಯನ್ನು ಮಾಡಿರಿ. Segment with Given Length ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಉದ್ದವು AB ಯ d ಮಡಿಯೋ ಭಾಗವೋ ಬರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದವನ್ನು d * AB ಎಂದು ಕೊಟ್ಟರೆ ಸಾಕು. ಇನ್ನು ∠D = ∠A, ∠E = ∠B ಆಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನ DEF ರಚಿಸಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ Angle with Given Size ಉಪಯೋಗಿಸಿ E, D ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಅಳತೆಯಾಗಿ α ವನ್ನು (∠A ಯ ಅಳತೆ) ನೀಡಿರಿ. ಇದರಂತೆ D, E ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ β ಎಂದು clockwise ಆಗಿ ನೀಡಿರಿ. DE', ED' ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದು F ನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಇವುಗಳು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿವೆಯೇ? ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯ ಅಳತೆಗಳನ್ನೂ ಸ್ಲೈಡರನ್ನೂ ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಇದನ್ನನುಸರಿಸಿ ಈಗ ನೋಡಿದ ತತ್ವವನ್ನು ಹೀಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು:

ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳು ಉದ್ದಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಸಮಾನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುವು.

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಹೇಳಬಹುದು. ಎರಡು ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ಎಷ್ಟು ಮಡಿ (ಅಥವಾ ಭಾಗ) ಎಂಬುದನ್ನು ಬದಲಾವಣೆಯ ದರ (scale factor) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆ ಹಾಗೂ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ದೊಡ್ಡ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದವು ಸಣ್ಣ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದ $1\frac{1}{2}$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಸಣ್ಣ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದವು ದೊಡ್ಡ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದದ $\frac{2}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ಉದ್ದದಿಂದ ದೊಡ್ಡ ಉದ್ದಕ್ಕಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರ $1\frac{1}{2}$ ಎಂದೂ ದೊಡ್ಡ ಉದ್ದದಿಂದ ಸಣ್ಣ ಉದ್ದಕ್ಕಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರ $\frac{2}{3}$ ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ a, b, c ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ p, q, r ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಸಮಾನ ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳಿರುವುದಾದರೆ p, q, r ಎಂಬಿವುಗಳು a, b, c ಎಂಬ ಉದ್ದಗಳ ಸಮಾನ ಮಡಿಯೋ, ಭಾಗವೋ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಿತಲ್ಲವೇ. ಇದನ್ನನುಸರಿಸಿ, ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಳತೆಗಳು ಎರಡನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಳತೆಗಳಾಗುವುದು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಾಗಿರುವುದು. ಈ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವು k ಎಂದಾದರೆ, ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$a = kp, b = kq, c = kr$$

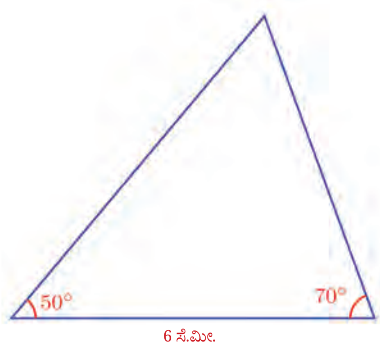
ಆಗ ತ್ರಿಕೋನದ ಕುರಿತಾದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಬದಲಾಗುವುದು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

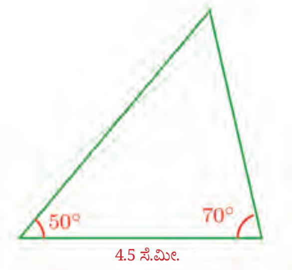
ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ $\frac{3}{4}$ ಭಾಗ ಮಾಡಿ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

ಕೆಳಗಿನ ಭುಜ 4.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾದರೆ ಸಾಕು. ಇತರ ಭುಜಗಳೋ?



ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಎಳೆದು ಉಳಿದೆರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಅಳೆದು $\frac{3}{4}$ ಭಾಗ ಮಾಡಿ ರಚಿಸಬೇಕೇ?

4.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಗೆರೆಯ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ಇದೇ ಕೋನಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ?



ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದುದರಿಂದ ಈಗ ನೋಡಿದ ತತ್ವಕ್ಕನುಸರಿಸಿ $\frac{3}{4}$ ಭಾಗವಾಗುವುದಲ್ಲವೇ.

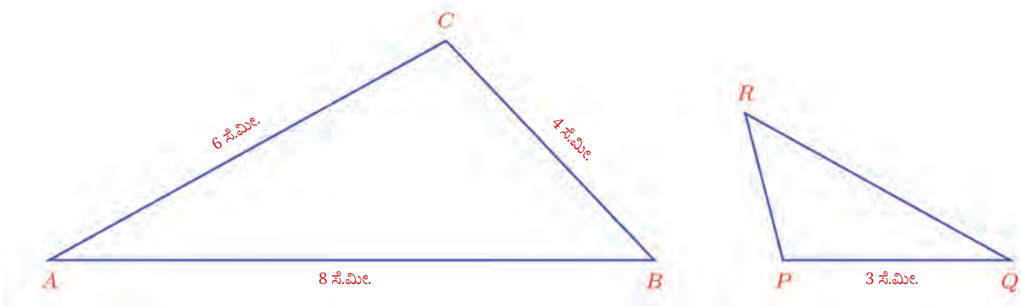
ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ ನೋಡುವ:

ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಶೇಷತೆ

ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ಕೋನ ಇರುವವುಗಳಾದರೆ ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುವು. ಇದು ಇತರ ಬಹುಭುಜಗಳಿಗಿರದ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

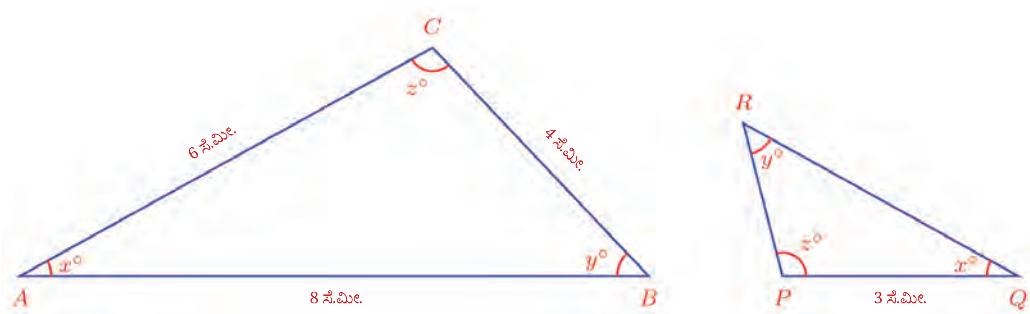
ಆಯತದಲ್ಲಿಯೂ, ಚೌಕದಲ್ಲಿಯೂ ಎಲ್ಲಾ ಕೋನಗಳೂ ಲಂಬ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. (ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 1:1) ಬಲಭಾಗದ ಬದಿಗಳೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಆದರೆ, ಆಯತದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಭುಜ ಮತ್ತು ಚೌಕದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಭುಜಗಳು ಸಮಾನ ಅಳತೆಯದ್ದಲ್ಲ. ಕೆಳಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳೂ ಸಮಾನವಲ್ಲ.



$$\angle P = \angle C \qquad \angle Q = \angle A \qquad \angle R = \angle B$$

PQR ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ಇತರ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

ಮೊದಲು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು $x°$, $y°$, $z°$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮಾನವಾದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು.



ಇನ್ನು ಸಮಾನವಾದ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ.

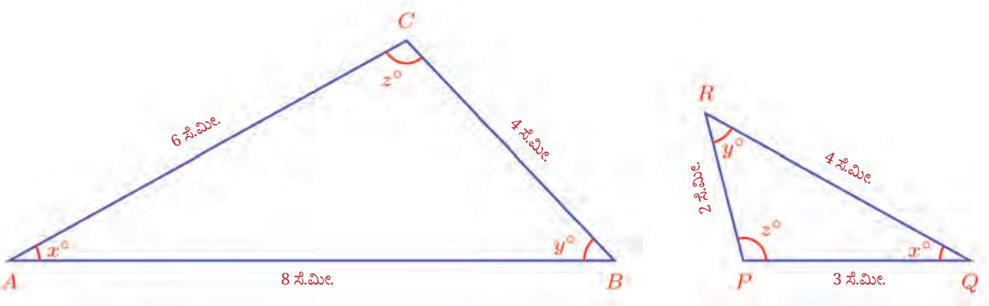
x	BC	PR
y	AC	PQ
z	AB	QR

ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳ ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದ ಅಳತೆಗಳು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

x	$BC = 4$	PR
y	$AC = 6$	$PQ = 3$
z	$AB = 8$	QR

ಇದರಲ್ಲಿ $y°$ ಕೋನದ ಎದುರಿನ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜವು ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ. ಆಗ ಇತರ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿನ ಭುಜಗಳೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಆಗಿರಬೇಕು.

x	$BC = 4$	$PR = 2$
y	$AC = 6$	$PQ = 3$
z	$AB = 8$	$QR = 4$



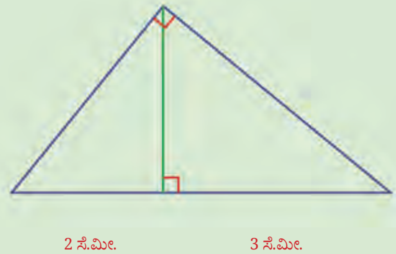
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಕ್ರಮವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಕೋನಗಳನ್ನು ಬರೆಯದೆಯೂ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು:

	ಚಿಕ್ಕದು	ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವುದು	ದೊಡ್ಡದು
ΔABC	$BC = 4$	$AC = 6$	$AB = 8$
ΔPQR	PR	$PQ = 3$	QR

ಇದರಿಂದ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಿಗುವುದು. ನಂತರ ಉಳಿದ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

(1) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜ 8 ಸೆ.ಮೀ. ಅದರ ಎರಡು ಕೋನಗಳು 60° ಹಾಗೂ 70° ಆಗಿವೆ. ಕೋನಗಳು ಬದಲಾಗದೆ ಭುಜಗಳು ಇದರ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(2) ಒಂದು ಲಂಬ ಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬ ಶಿರದಿಂದ ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಕರ್ಣವನ್ನು 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.



(i) ಲಂಬವು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಎರಡು ಸಣ್ಣ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(ii) ಲಂಬದ ಎತ್ತರವನ್ನು h ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $\frac{h}{2} = \frac{3}{h}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(iii) ದೊಡ್ಡ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iv) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬ ಶಿರದಿಂದ ಕರ್ಣಕ್ಕೆಳೆದ ಲಂಬದ ಉದ್ದವನ್ನು h ಎಂದೂ, ಅದು ಕರ್ಣವನ್ನು ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು a, b ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $h^2 = ab$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

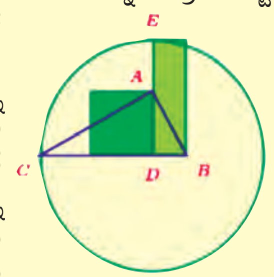
(3) ಅಡ್ಡಕ್ಕಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ವಿಸ್ತಾರದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೂ ಕೆಳಕ್ಕೂ ಎಳೆದು, ಬಾಗಿದ ಗೆರೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಯಿತು.

(i) ಅಡ್ಡಕ್ಕಿರುವ ಗೆರೆಯ (ನೀಲ) ಭಾಗಗಳೂ, ಬಾಗಿದ (ಕೆಂಪು) ಗೆರೆಯ ಭಾಗಗಳೂ ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(ii) ಅಡ್ಡಕ್ಕಿರುವ ಗೆರೆಯ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಬಾಗಿದ (ಹಸುರು) ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೂ ಇದಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(iii) ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು 3 : 4 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸಿರಿ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ABC ಎಂಬ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಲಂಬ ಶಿರದಿಂದ ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಕರ್ಣವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು D ಆಗಿರಲಿ. D ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟು C ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ವೃತ್ತ ಹಾಗೂ ಲಂಬ ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು E ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. AD ಒಂದು ಭುಜವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕ, BD ಮತ್ತು DE ಇವುಗಳು ಭುಜವಾಗಿರುವಂತೆ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಚೌಕ ಮತ್ತು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಇವು ಸಮಾನವಲ್ಲವೇ? ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

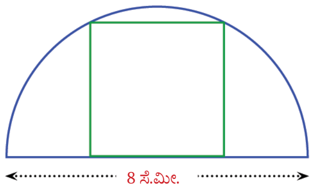


ST-509-14-MATHS (K)-9-VOL-1

(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬ ಶಿರ ಹಾಗೂ ಮೂರೂ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಂದೊಂದು ಬಿಂದುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗಿ ಬರುವಂತೆ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

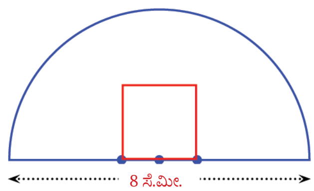
ಅರ್ಧವೃತ್ತವೂ ಚೌಕವೂ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

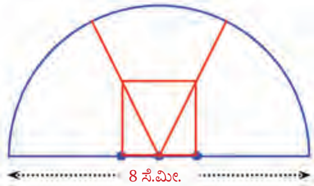


ಅರ್ಧ ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

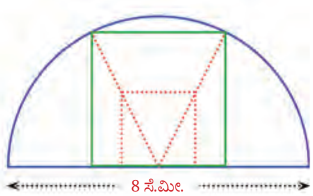
ಮೊದಲು ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ವ್ಯಾಸದ ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜ ಇರುವಂತೆ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.



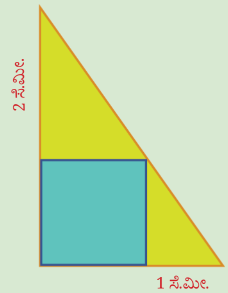
ಈ ಚೌಕದ ಉಳಿದೆರಡು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಎಳೆದ ಗೆರೆಯನ್ನು ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಬೇಕು



ಗೆರೆಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬೇಕು ಈ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು.



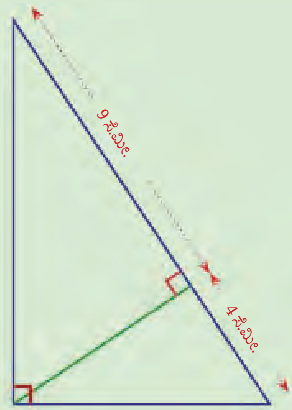
ಹೀಗೆ ಸಿಗುವುದು ಚೌಕವೇ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದೇ ?



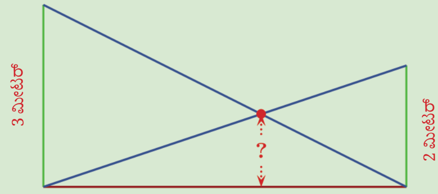
(i) ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು 3, 4, 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದು?

(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(6) 3 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 2 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಎರಡು ಕೋಲುಗಳನ್ನು ನೆಲದಲ್ಲಿ ಊರಲಾಯಿತು. ಒಂದು ಕೋಲಿನ ತುದಿಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಕೋಲಿನ ಬುಡಕ್ಕೆ ಪರಸ್ಪರ ಹಗ್ಗವನ್ನು ಎಳೆದು ಕಟ್ಟಲಾಗಿದೆ.



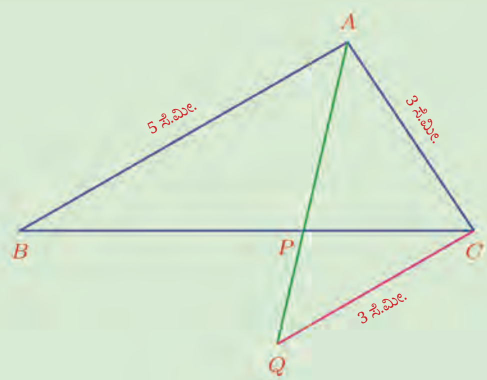
(i) ಹಗ್ಗಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದು ನೆಲದಿಂದ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದೆ?

(ii) ಕೋಲುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ ಎಷ್ಟಾದರೂ ಈ ಎತ್ತರವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(iii) ಕೋಲುಗಳ ಉದ್ದ a, b ಎಂದೂ, ಹಗ್ಗಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಎತ್ತರ h ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು a, b, h ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಡ್ಡಕ್ಕಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆದು ಅದರಲ್ಲಿ C, D ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಗೆರೆಗೆ ಲಂಬಗಳನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. C ಯ ಮೂಲಕವಿರುವ ಲಂಬದಲ್ಲಿ E ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನೂ, D ಯ ಮೂಲಕವಿರುವ ಲಂಬದಲ್ಲಿ F ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಗುರುತಿಸಿರಿ. ED, FC ಎಂಬ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು, ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು G ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. C, D ಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. G ಯಲ್ಲಿ Right Click ಮಾಡಿ Trace on ನೀಡಿರಿ. C, D ಗಳೆಡೆಯ ದೂರವು ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ G ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಹೇಗೆ ಚಲಿಸುವುದು?

(7) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ $\angle A$ ಯ ಸಮಭಾಜಕವು AP ಆಗಿದೆ.



ABC ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ $\angle C$ ಯ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ಗೆರೆ AB ಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು D ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. AC, BC ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಮತ್ತು AD, BD ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಹೋಲಿಸಿರಿ. Input Box ನಲ್ಲಿ AC/BC ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ $\frac{AC}{BC}$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $\frac{AD}{BD}$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ABP ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು CPQ ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳಿರುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

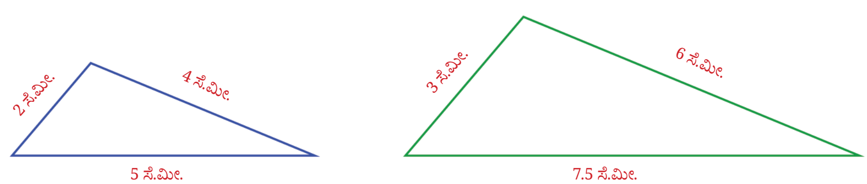
(ii) $\frac{BP}{PC}$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iii) ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವು ಆ ಕೋನದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜವನ್ನು ಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಯ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಭುಜಗಳೂ ಕೋನಗಳೂ

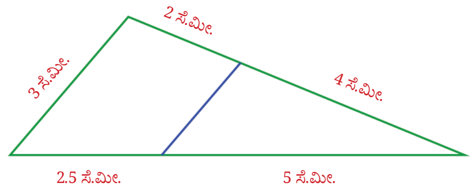
ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣದು ಅಥವಾ ದೊಡ್ಡದು ಮಾಡಿದರೆ ಕೋನಗಳು ಬದಲಾಗದೇ ಇದ್ದೀತೇ?

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

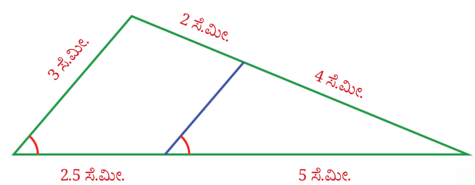


ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಷ್ಟು ದೊಡ್ಡದು ಮಾಡಿದುದಾಗಿದೆ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು. ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವುದೇ?

ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು, ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿ, ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ.

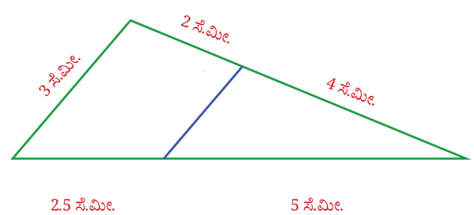


ಈ ಗೆರೆ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜ ಹಾಗೂ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳನ್ನು (1 : 2 ಎಂಬ) ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಗೆರೆ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜಕ್ಕೂ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ. (ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠದ ತ್ರಿಕೋನ ಭಾಗ), ಆದುದರಿಂದ ಇವುಗಳೆರಡೂ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದೊಂದಿಗೆ ಸಮಾನ ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

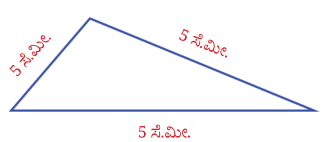


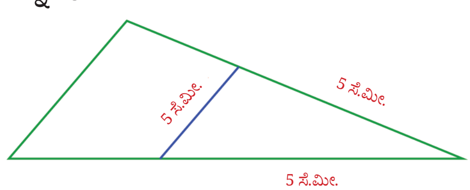
ಆಗ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ, ಅದರೊಳಗಿರುವ ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನೂ ಮಾತ್ರ ನೋಡಿದಾಗ (ಸದ್ಯಕ್ಕೆ ಹೊರಗಿರುವ ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ). ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ಅಳತೆಯ ಕೋನಗಳಿರುವುದಾಗಿ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿದ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ, ಈ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆ ಬದಲಾಗುವುದು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಾಗಿರುವುದು. ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜ, ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ $\frac{2}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಬಲ ಭಾಗದ ಭುಜಗಳೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲಿರುವುವು. ಮೂರೂ ಬುಜಗಳೂ ಬದಲಾಗುವುದು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜಗಳೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುವು. ಆಗ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.



ಇನ್ನು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಹೊರಗೆ ಇರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಪುನಃ ನೋಡುವ.





ಒಳಗೆ ಮತ್ತು ಹೊರಗೆ ಇರುವ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಉದ್ದವಿರುವುದಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿವೆ. (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠದ ಭುಜಗಳೂ ಕೋನಗಳೂ ಎಂಬ ಭಾಗ)

ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು ಅದರೊಳಗಿರುವ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳೇ ಆಗಿವೆಯೆಂದು ಈ ಮೊದಲೇ ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ.

ಹಾಗಾದರೆ ಏನು ತಿಳಿಯುವುದು?

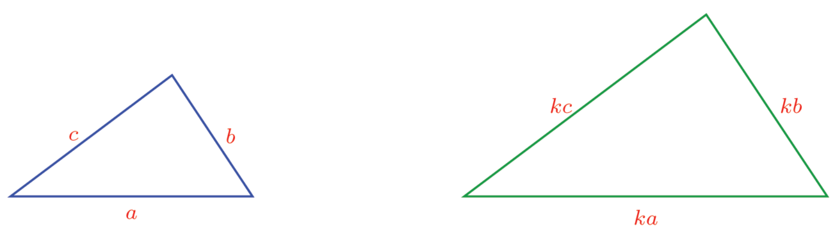
ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದರೂ, ಇದೇ ತತ್ವಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೂ ಸಮಾನಕೋನಗಳಿರುವುದೆಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಬಹುದು.

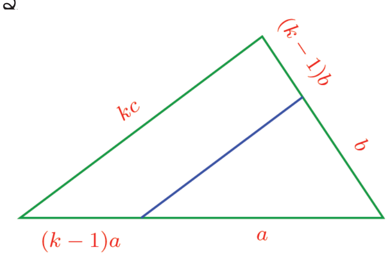
ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ನಿಖರತೆ ಬೇಕೆಂದು ಇಚ್ಛಿಸುವವರಿಗೆ ಇದನ್ನೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಬಹುದು.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ, ಅದರ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ. ಅಂದರೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದುದಾಗಿದೆ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು.

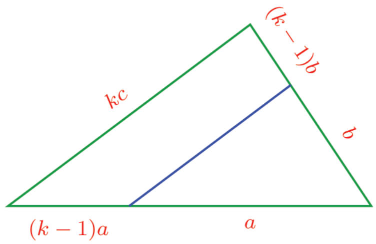
ಆಗ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು a, b, c ಹಾಗೂ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ka, kb, kc ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.



ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ, ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿರಿ.

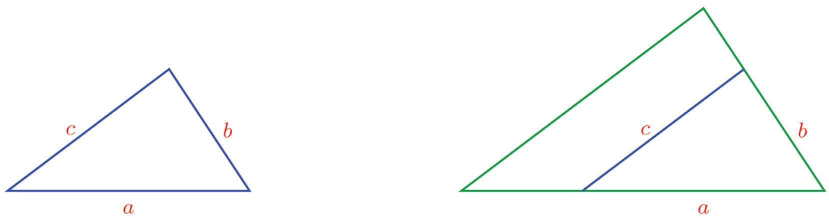


ಈ ಗೆರೆ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಭಾಗದ ಭುಜ ಹಾಗೂ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜ ಇವುಗಳನ್ನು $(k - 1) : 1$ ಎಂಬ ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದು, ಆದುದರಿಂದ ಈ ಗೆರೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನ ಹಾಗೂ ಅದರೊಳಗಿನ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯೂ ಒಂದೇ



ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುವುದು. ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಭಾಗದ ಭುಜದ $\frac{1}{k}$ ಭಾಗವು ಅದರೊಳಗಿರುವ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಭಾಗದ ಭುಜದ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ. ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಾಗಿದೆ. ಆಗ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜಗಳು ಹೀಗೆಯೇ ಇರಬೇಕು.

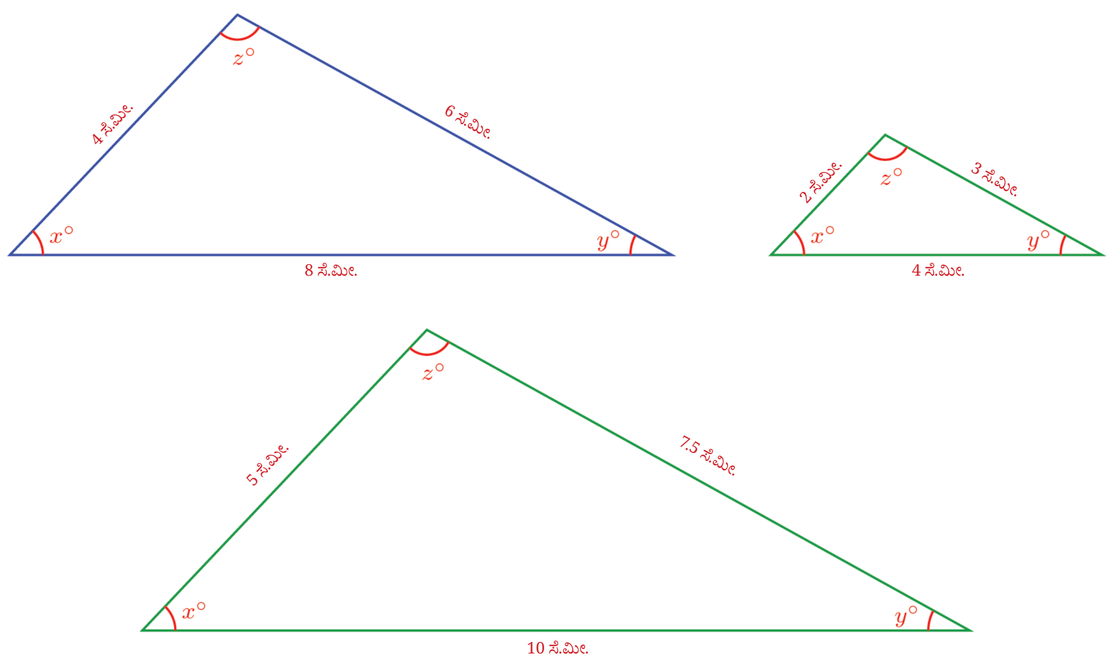
ಇನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ, ಹೊರಗೂ ಒಳಗೂ ಇರುವ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಈ ಎರಡು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಸಮಾನವಾದುದರಿಂದ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಒಳಗಿನ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಈ ಮೊದಲೇ ನೋಡಿದೆವು. ಹಾಗಾದರೆ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವುದು.

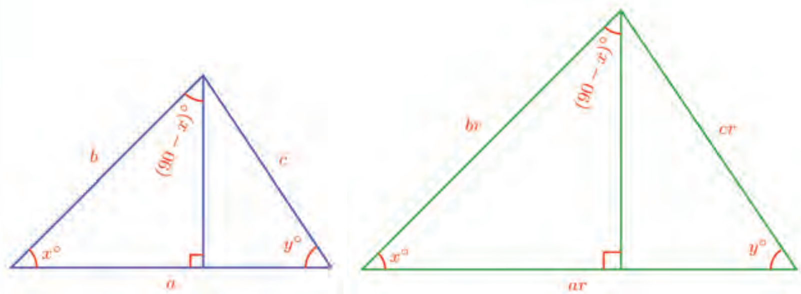
ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಬದಲಾವಣೆಗಳು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿರುವುದಾದರೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಆಗ ಕೋನಗಳು ಬದಲಾಗದೆ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಸಣ್ಣದೋ ದೊಡ್ಡದೋ ಆದ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಲು ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.



ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಬಹುದಾದ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದೋ ಸಣ್ಣದೋ ಮಾಡಿದರೆ ಸುತ್ತಳತೆಯೂ ಅದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದೆಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಕಷ್ಟಕರವೇನಲ್ಲ. (ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ)

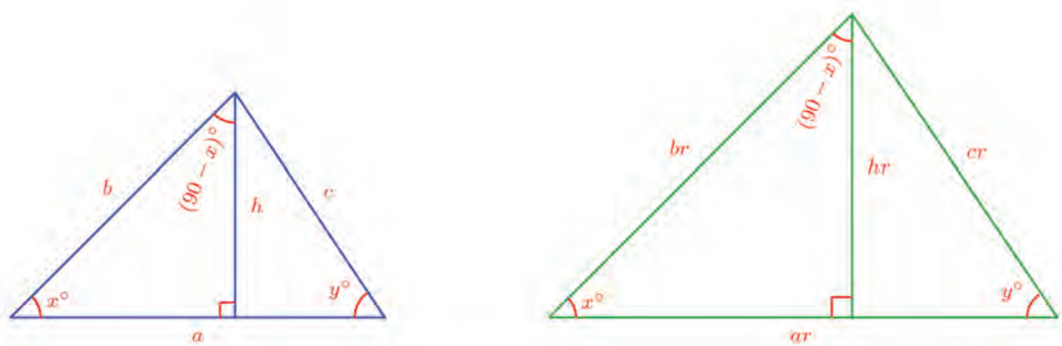
ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಇದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದೇ? ಅದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಹೀಗಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ನೋಡುವ. ಈಗ ಹೇಳಿರುವುದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿವೆ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಲು, ಸಮಾನ ಕೋನವಿರುವ ಒಂದು ಶಿರಗಳಿಂದ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವ.



ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (ಭುಜಗಳು a, b, c ಎಂಬ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಾಗಬಹುದು). Min = 0 ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ k ಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. ka ಉದ್ದದ ಒಂದು ಗೆರೆ DE ಯನ್ನೆಳೆದು ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳು ಕೇಂದ್ರವಾಗುವುದರಿಂದ ತ್ರಿಜ್ಯ kb, kc ಆಗುವಂತೆ ವೃತ್ತಗಳನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು F ನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನ DEF ನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಅವುಗಳು ಸಮಾನವಲ್ಲವೇ? ಸ್ಲೈಡರಿನ ಬೆಲೆ ಹಾಗೂ ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ ಹಾಗೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಸುತ್ತಳತೆಯ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರ ಎಷ್ಟು? ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವೋ?

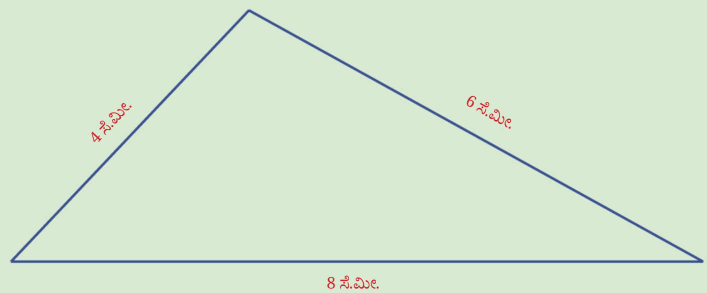
ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎಡಭಾಗದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ನೋಡುವ. ಎರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಕೋನಗಳು $x°$, $90°$, $(90 - x)°$ ಎಂಬ ಅಳತೆಗಳೇ ಆಗಿವೆ. ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದೆ. ನೀಲಿ ಬಣ್ಣದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ b ಮತ್ತು ಹಸಿರು ಬಣ್ಣದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ br ಆಗಿವೆ. ಆಗ ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬವನ್ನು h ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬವು hr ಆಗುವುದು.



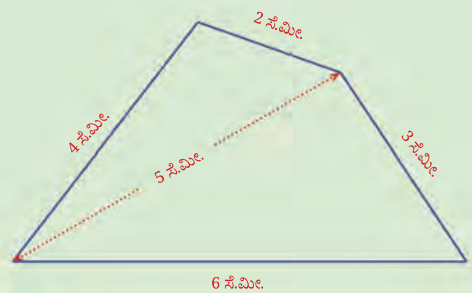
ಇನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2}ah$; ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2}ahr^2$

ಹಾಗಾದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಬದಲಾಗುವ ಪ್ರಮಾಣವು, ಭುಜಗಳು ಬದಲಾಗುವ ಪ್ರಮಾಣದ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ.

(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳೇ ಆಗಿರುವ ಹಾಗೂ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು $1\frac{1}{4}$ ಮಡಿಯಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



(2) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



(i) ಇದೇ ಕೋನಗಳಿರುವ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳೆಲ್ಲ $1\frac{1}{2}$ ಮಡಿಯಾಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(ii) ಕೋನಗಳು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವಾಗಿರುವ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳೆಲ್ಲ $1\frac{1}{2}$ ಮಡಿಯಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(3) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 6 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಮಡಿಯಷ್ಟು ಉದ್ದವಿರುವ ಭುಜಗಳಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು? ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಅಳತೆಯು ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿದ್ದರೋ?

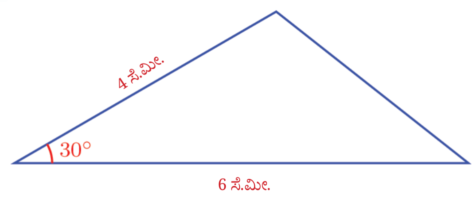
ಮೂರನೇ ದಾರಿ

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ತಿಳಿದಿರುವುದಾದರೆ, ಕೋನಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸದೆ ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣದೋ ದೊಡ್ಡದೋ ಆಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ಮೊದಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದೆವು. ತಿಳಿದಿರುವ ಭುಜವನ್ನು ಬೇಕಾದ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸಿ, ಅದರ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ಅದೇ ಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಇತರ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಅದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗಿಕೊಳ್ಳುವುದು.

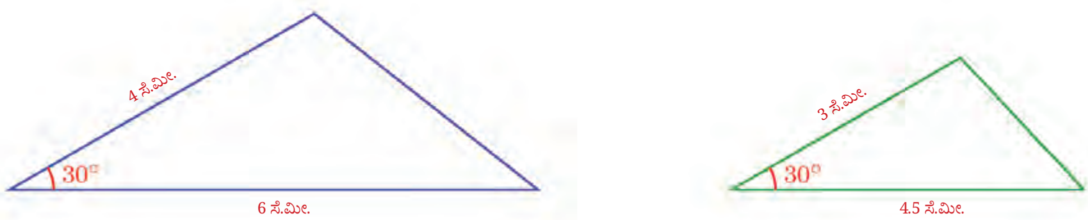
ಮೂರು ಭುಜಗಳ ಅಳತೆ ತಿಳಿದಿರುವುದು ಎಂದಾದರೆ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಎರಡನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದುಕೊಂಡೆವು. ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳನ್ನು ಬೇಕಾದ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಿಸಿ ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕು; ಕೋನಗಳು ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಇರುವುವು.

ಇನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕಾದ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳೂ ಅವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕೋನವೂ ತಿಳಿದಿರುವು-ದಾದರೋ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಕೋನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳನ್ನು $\frac{3}{4}$ ಭಾಗವಾಗಿಸಬೇಕು.

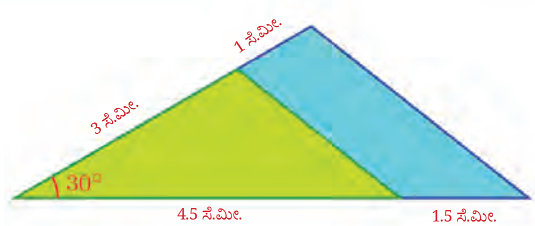


ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು, 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಗಳ $\frac{3}{4}$ ಭಾಗವೂ, ಅವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕೋನ 30° ಯೂ ಆಗುವಂತೆ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವ.

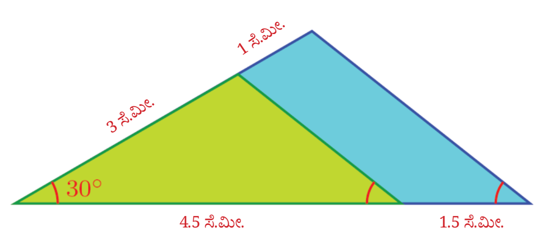


ಆದರೆ ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮೊದಲನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ಇರುವುದೆಂದೋ, ಮೂರನೇ ಭುಜವು ಮೊದಲನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೇ ಭುಜದ $\frac{3}{4}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೆಂದೋ ತಿಳಿದಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ.

ಇದನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು ಪಾಠದ ಆರಂಭದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಚಾರ್ಟ್ ಪೇಪರಿನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಎಡಭಾಗದ ಶಿರಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಇಡಿರಿ. ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾದುದರಿಂದ ಈ ಶಿರದ ಭುಜಗಳೂ ಸೇರಿಕೊಳ್ಳುವುವು.



ಈಗ ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜ, ನೀಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜವನ್ನು ಒಂದೇ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಗೆರೆ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳು ಕೆಳಭಾಗದ ಭುಜಗಳೊಂದಿಗೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯಲ್ಲಿವೆ.

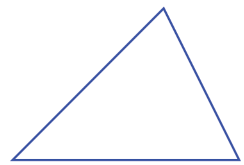


ಹೀಗೆ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಇವುಗಳ ಮೂರು ಭುಜಗಳು ಬದಲಾಗುವುದು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಹೀಗೆ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜದ $\frac{3}{4}$ ಭಾಗವೇ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಅಳತೆಗಳನ್ನೂ ದರಗಳನ್ನೂ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ನಿಗಮನಕ್ಕೆ ತಲಪುವುದಲ್ಲವೇ.

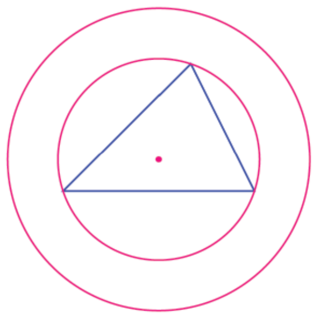
ಎರಡು ಭುಜಗಳಲ್ಲಿನ ಬದಲಾವಣೆಯು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಇದ್ದು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರನೇ ಭುಜದ ಬದಲಾವಣೆಯೂ ಇದೇ ದರದಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.

ಈ ತತ್ವವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಭುಜಗಳನ್ನೋ ಕೋನಗಳನ್ನೋ ಅಳತೆ ಮಾಡದೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬೇಕಾದ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



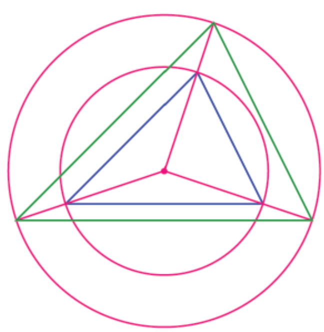
ಇದರ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿ ದೊಡ್ಡದಾಗಿಸಬೇಕು.

ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲು ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನೂ, ಅದೇ ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಹಾಗೂ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಷ್ಟಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

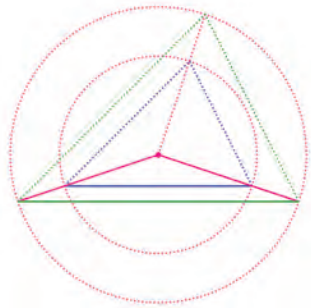


ಇನ್ನು ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ವರೆಗೆ ಎಳೆಯಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಸಿಗುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ದೊಡ್ಡ (ಹಸಿರು) ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಸಣ್ಣ (ನೀಲ) ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು, ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ನೋಡಿರಿ.

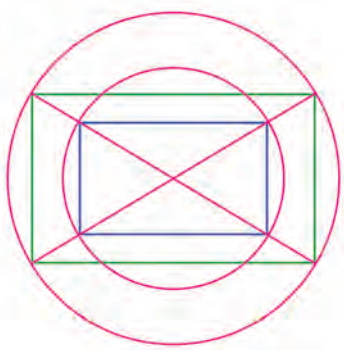


ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡ ಹಾಗೂ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳು, ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡ ಹಾಗೂ ಬಲ ಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಷ್ಟಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. (ಯಾಕೆ?). ಇವುಗಳು ಸೇರುವಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವು ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿದೆ. ಆಗ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಗಳೂ ಇದೇ ದರದಲ್ಲಿರುವುದು.



ಎಂದರೆ, ಮೊದಲ ನೀಲ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ ಕೊನೆಗೆ ರಚಿಸಿದ ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜ. ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಉಳಿದ ಭುಜಗಳ ದರವೂ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಆಯತದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದೋ ಸಣ್ಣದೋ ಮಾಡಬಹುದು.



Min = 0 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ '*a*' ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನ ABC ರಚಿಸಿ ಆದರ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ D ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. (Circle through 3 Points ಎಂಬ ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪರಿವೃತ್ತ ರಚಿಸಿ, ಬಳಿಕ Midpoint or Centre ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಸಾಕು). D ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ *a* ಮಡಿ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯಬೇಕು. (ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿ *a**AD ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕು). D ಯಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. (Ray ಟೂಲನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು). ಈ ಗೆರೆಗಳು ಎರಡನೇ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗಿ ಬರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಇದರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಎಲ್ಲಾ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಈ ರೀತಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆಯತವಲ್ಲದ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕೂ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ.

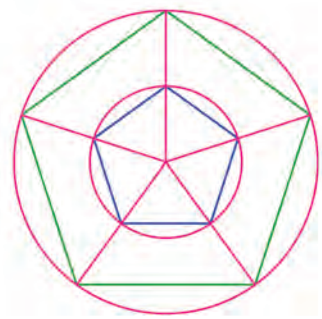
ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ

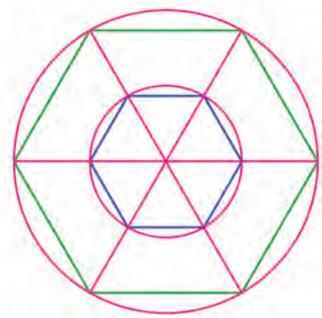
ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು, ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದರೆ, ಆ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಮೂರನೇ ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಈ ಭುಜಗಳು ಸೇರುವಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಬೇಕು.

ಆದರೆ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, ಪೈಥಗೋರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಕಾರ ಮೂರನೇ ಭುಜವೂ ನಿರ್ಧರಿಸಲ್ಪಡುವುದು; ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಮಾನ ವಾಗುವುವು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿರುವುದು ಎಂಬುದರಿಂದ, ಅವುಗಳು ಸದೃಶವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಮೂರನೇ ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವೂ ಇದೇ ಆಗಿರಬೇಕು. ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಈ ಭುಜಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನವು ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು. ಆದರೆ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸದೃಶವಾಗಿರುವುವು.

ಆದರೆ ಸಮಪಂಚಭುಜಗಳ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸಲು ಈ ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.





ಇದುವರೆಗೆ ಹೇಳಿದ ತತ್ವಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಹೀಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

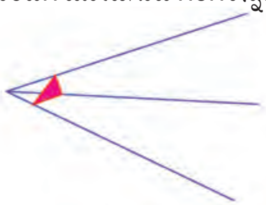
ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳೊಳಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವಿರುವುದಾದರೂ, ಉಳಿದ ಎರಡು ಸಂಬಂಧಗಳೂ ಇರುವುವು.

- ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳನ್ನಾಗಿಸಬೇಕು.
- ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಾಗಿಸಬೇಕು.
- ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿದ್ದು, ಅವುಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನವನ್ನು ಸಮಾನವಾಗಿಸಬೇಕು.

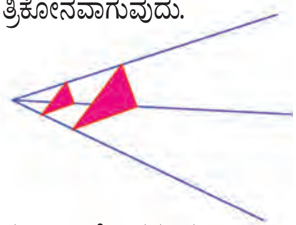
ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ರೀತಿಯ ಸಂಬಂಧವಿರುವುದಾದರೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸದೃಶವಾಗಿವೆ (similar) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಪ್ರಸಾರ

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಹೊರಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನೆಳೆಯಬೇಕು.

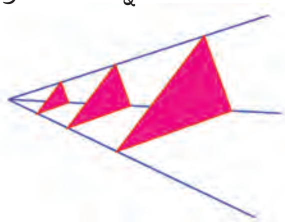


ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ, ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆಯಬೇಕು. ಇದು ಮೇಲಿನ ನೀಲಿ ಗೆರೆಯೊಂದಿಗೆ ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆಯಬೇಕು. ಈ ಗೆರೆಯು ನಡುವಿನ ನೀಲಿ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಮೂರನೇ ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆಯಬೇಕು. ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನವಾಗುವುದು.



ಈ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿರುವುದು. (ಯಾಕೆ?) ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದಾಗುವುದು.

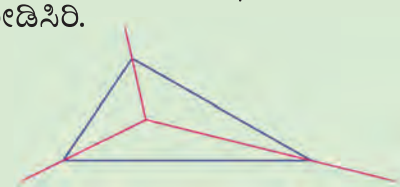
ಹೀಗೆ ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ.

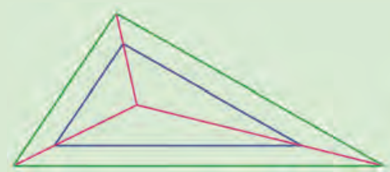


(1) ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಲಂಬ ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿರುವುದಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಕರ್ಣಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯೂ ಇದೇ ದರದಲ್ಲಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(2) ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿರುವುದಾದರೆ, ಮೂರನೇ ಭುಜದ ಬದಲಾವಣೆಯೂ ಇದೇ ದರದಲ್ಲಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(3) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರೊಳಗೆ ಒಂದು ಚುಕ್ಕಿಯನ್ನು ಹಾಕಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರವನ್ನೂ ಈ ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಈ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಹೊರಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ, ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿರಿ.

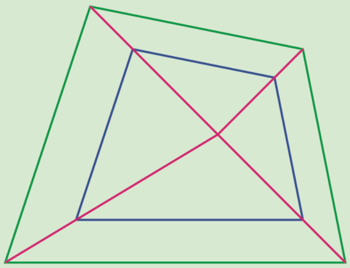




ಹೀಗೆ ದೊರೆತ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ, ಮೊದಲ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯನ್ನೆಳೆದು ಅದರ ಹೊರಗೆ D ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. D ಯಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (Ray ಟೂಲನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು). DA ಎಂಬ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ E ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನುಗುರುತಿಸಿರಿ. E ಯ ಮೂಲಕ AB ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆದು, ಈ ಗೆರೆಯು DB ಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು F ನ್ನುಗುರುತಿಸಿರಿ. ಇದೇ ರೀತಿ, E ಯ ಮೂಲಕ AC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆದು DC ಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು G ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನ EFG ರಚಿಸಿರಿ. ABC, EFG ಎಂಬೀ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಇವುಗಳು ಸಮಾನವಲ್ಲವೇ? E ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. EFG ಯ ಗಾತ್ರ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೇ. ಅದರ ಭುಜಗಳೂ ABC ಯ ಸಮಾನಾಂತರ ಭುಜಗಳೂ ಬದಲಾಗುವುದು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಾಗಿದೆಯೋ?

(4) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಳಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಚತುರ್ಭುಜದ ಶಿರಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳು, ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಹೊರಭಾಗಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಗೆರೆಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಇನ್ನೊಂದು ಚತುರ್ಭುಜ ಉಂಟಾಗುವುದು.



(i) ದೊಡ್ಡ ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳು ಸಣ್ಣ ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(ii) ಎರಡೂ ಚತುರ್ಭುಜಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಕೋನಗಳಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ Enlarge from Point ಎಂಬ ಟೂಲನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

Min = 0 ಬರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ಲೈಡರ್ '*a*' ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಿ ಅದರ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Enlarge from Point tool (Dilate from point) ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು, ಬಿಂದುವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ Scale Factor ಆಗಿ '*a*' ಎಂದು ನೀಡಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸದೃಶವಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಲಭಿಸುವುದು. '*a*' ಯನ್ನೂ, ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನೂ ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ತ್ರಿಕೋನದ ಹೊರತಾಗಿ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಆಕೃತಿಯ ಸದೃಶ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ರಚಿಸಬಹುದು.

ಸಂಶೋಧನೆ

ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಎತ್ತರ, ಮಧ್ಯಮ ಗೆರೆಗಳು, ಕೋನ ಸಮಭಾಜಕಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರದಲ್ಲೇ ಆಗಿದೆಯೋ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7

ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಅಳತೆಗಳೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ

ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ ಕೆಳಗಿನ ಉಷ್ಣತೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ರೀತಿ ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ? ನೀರು ಘನೀಕರಿಸಿ ಮಂಜುಗಡ್ಡೆಯಾಗುವ ಉಷ್ಣತೆಯಾಗಿದೆ 0°C, ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆ ಡಿಗ್ರಿ ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದು. ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆಯಿರುವ ಉಷ್ಣತೆಯನ್ನು ಹೇಳಲು −1°C, −20.5°C ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕಾಗಿ ಬರುವುದು.

ಕೆಲವು ಆಟಗಳಲ್ಲಿ ಪಾಯಿಂಟ್ ಸೂಚಿಸಲು, ಕೆಲವು ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಳನ್ನು ನೀಡಲು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿರುವೆವು. ಇವುಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಬೇಕಾದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಿದೆವು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಉಷ್ಣತೆಯು 3°C ಆಗಿರುವ ಉಷ್ಣತೆಯು ಪುನಃ 7°C ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ ಆ ಪ್ರದೇಶದ ಈಗಿನ ಉಷ್ಣತೆ ಎಷ್ಟು?

ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಉತ್ತರವು

$$3 - 7 = -4$$

ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿರುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯ ಬೇರೆ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯುವಾಗ ಋಣಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ನೋಡಿರುವೆವು.

ಈ ರೀತಿಯ ಹಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪಗಳಾಗಿರುವ ಮೂರು ತತ್ವಗಳನ್ನು ನೋಡಿರುವೆವು.

> x, y ಎಂಬಿವುಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ
>
> (i) $x < y$ ಆದರೆ $x - y = -(y - x)$
>
> (ii) $-x + y = y - x$
>
> (iii) $-x - y = -(x + y)$

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾದ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರಿ.

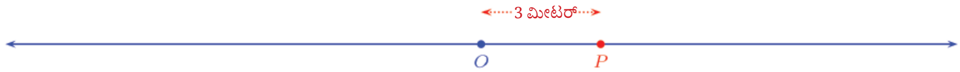
(i) $6 - 8$ (ii) $-6 + 8$ (iii) $-6 - 8$

(iv) $2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}$ (v) $-2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$ (vi) $-2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}$

ಇನ್ನು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮತ್ತೊಂದು ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ನೋಡುವ.

ಸ್ಥಾನವೂ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ

ನೇರ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಊಹಿಸಿರಿ. ಇದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಈ ಬಿಂದುವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದು (ಯಾವುದೇ ಏಕಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ) ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.



ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವನ್ನು O ಎಂದೂ, ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು P ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು O ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ 3 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿ P ಇರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಮೇಲೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

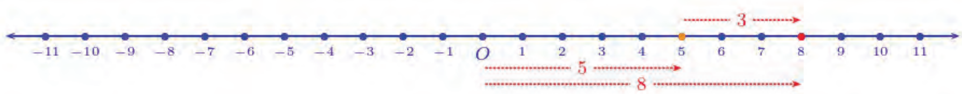
O ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ 3 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿ P ಇರಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಆಗ P ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಹೇಳಲು O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೇಳಿದರೆ ಸಾಲದು, ಅದು ಯಾವ ಭಾಗದಲ್ಲಿದೆಯೆಂದೂ ಹೇಳಬೇಕು.

ಇದನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಒಂದು ದಾರಿಯು, ಎಡಕ್ಕಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾಗಿದೆ. ಅಳೆಯುವ ಏಕಕವನ್ನು (ಮೀಟರ್, ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಯಾವುದಾದರೂ) ತೀರ್ಮಾನಿಸಿದ ನಂತರ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ O ಬಿಂದುವಿನ ಹೊರತಾಗಿ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಬಹುದು.

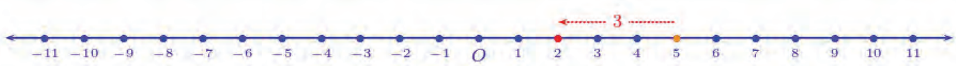
O ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು 0 (ಸೊನ್ನೆ) ಎಂದು ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ 5 ಎಂಬ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿದ್ದ ಒಂದು ಬಿಂದುವು 8 ಎಂಬ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಹೋಯಿತು ಎಂದು ಊಹಿಸುವ. ಸ್ಥಾನದಲ್ಲುಂಟಾದ ಬದಲಾವಣೆ $8 - 5 = 3$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.



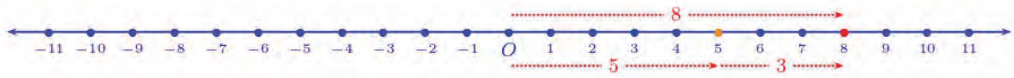
ಬದಲಾಗಿ 5 ರಿಂದ 3 ಸ್ಥಾನಗಳಷ್ಟು ಚಲಿಸಿತು ಅಂದರೆ, ಈಗಿನ ಸ್ಥಾನವು 8 ಮಾತ್ರ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದೇ?

ಬದಲಾವಣೆಯು ಬಲಕ್ಕಾದರೆ ಸರಿಯಾಗುವುದು. ಎಡಕ್ಕಾದರೋ?

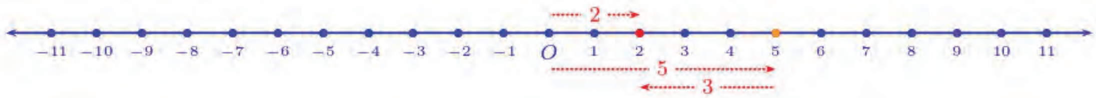


ಆಗ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯು ಎಷ್ಟಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದ ಮಾತ್ರಕ್ಕೆ ಈಗಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಬಲಕ್ಕೆ ಅಥವಾ ಎಡಕ್ಕೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡಾ ಹೇಳಬೇಕಾಗುವುದು.

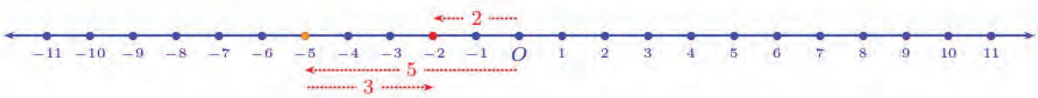
ಆದುದರಿಂದ 5 ಎಂಬ ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ 3 ಸ್ಥಾನಗಳಷ್ಟು ಬದಲಾಯಿತು ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನವು 8 ಆಗಿರುವುದು.



ಸ್ಥಾನದಲ್ಲುಂಟಾದ ಬದಲಾವಣೆಯು ಎಡಕ್ಕಾದರೆ ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನವು 2:



ಹಾಗೆಯೇ −5 ಎಂಬ ಸ್ಥಾನದಿಂದ 3 ಸ್ಥಾನಗಳಷ್ಟು ಬಲಕ್ಕೆ ಚಲಿಸಿದರೋ?



ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನವೂ ದಿಕ್ಕಿನೊಂದಿಗಿರುವ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯೂ ತಿಳಿದರೆ ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೀತಿಯನ್ನು ಹೇಳಲು, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಹೇಗಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಒಂದು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ.

ಮೊದಲಿಗೆ ಬಲಭಾಗಕ್ಕುಂಟಾಗುವ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ನೋಡುವ.

ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ	ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ	ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನ
5	3 ಬಲಕ್ಕೆ	8
3	5 ಬಲಕ್ಕೆ	8
−5	3 ಬಲಕ್ಕೆ	−2
−3	5 ಬಲಕ್ಕೆ	

ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಿ (ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಮನಸಿನಲ್ಲೇ ಊಹಿಸಿ) ಪಟ್ಟಿಯ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಹೇಳಿದರೋ?

ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ	ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ	ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನ
5	3	8
3	5	8
−5	3	−2
−3	5	2

ಇನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವೇನೆಂದು ಹುಡುಕುವ.

ಮೊದಲ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ, ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಿಗುವುದೆಂದು ಒಂದೇ ನೋಟದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯುವುದು.

ಮುಂದಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲೋ?

$$-5 + 3 = 3 - 5 = -2$$

ಎಂದು ಈ ಮೊದಲೇ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ.

ಕೊನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲೋ?

$$-3 + 5 = 5 - 3 = 2$$

ಎಂದು ಮೊದಲೇ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ.

ಆಗ ಪಟ್ಟಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲೂ, ಮೊದಲ ಎರಡು ಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ	ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ	ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನ
5	3	8 = 5 + 3
3	5	8 = 3 + 5
–5	3	–2 = –5 + 3
–3	5	2 = –3 + 5

ಇನ್ನು ಎಡಭಾಗಕ್ಕಿರುವ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ನೋಡುವ.

ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ	ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ	ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನ
5	3 ಎಡಕ್ಕೆ	2
3	5 ಎಡಕ್ಕೆ	–2
–5	3 ಎಡಕ್ಕೆ	–8
–3	5 ಎಡಕ್ಕೆ	–8

ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ, ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು, ಎಡಭಾಗಕ್ಕಿರುವ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಬರೆಯುವ.

ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ	ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ	ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನ
5	–3	2
3	–5	–2
–5	–3	–8
–3	–5	–8

ಮೊದಲ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಇದರಲ್ಲಿಯೂ ಪ್ರತೀ ಸಾಲಿನಲ್ಲೂ ಮೊದಲ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆಯೇ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ?

ಮೊದಲ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು $5 + (-3)$ ಎಂಬ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬೇಕು. ಹೀಗಿರುವ ಒಂದು ಮೊತ್ತವನ್ನು ನಾವು ಈ ವರೆಗೆ ನೋಡಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ.

ಹೀಗೆ ಆಲೋಚಿಸುವಾ, ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸುವ ಕ್ರಮ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೂ ಮೊತ್ತ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$5 + 3 = 3 + 5 \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \qquad \sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

ಆಗ ಇಲ್ಲಿಯೂ

$$5 + (-3) = -3 + 5$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ

$$-3 + 5 = 5 - 3 = 2$$

ಎಂದು ಈ ಮೊದಲೇ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ.

ಹಾಗೆ,

$$5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು. ಆಗ ಒಂದನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ,

$$3 + (-5) = -5 + 3 = 3 - 5 = -2$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಪಟ್ಟಿಯ ಮುಂದಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲೂ ಈ ಸಂಬಂಧವು ಸರಿಯಾಗಿರುವುದು.

ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ	ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ	ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನ
5	–3	2 = 5 + (–3)
3	–5	–2 = 3 + (–5)
–5	–3	–8
–3	–5	–8

ಉಳಿದ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳಲ್ಲೋ?

ಆ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲೂ ಮೊದಲ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೇಳಬೇಕು. ಈ ಮೊದಲಿನ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ, ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದು, ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆದಲ್ಲವೇ.

$$5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

$$3 + (-5) = 3 - 5 = -2$$

ಮುಂದಿನ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ

$$(-5) + (-3) = -5 - 3$$

$$(-3) + (-5) = -3 - 5$$

ಎಂದು ಬರೆದರೋ?

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗೆ ಬರೆದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಈ ಮೊದಲೇ ಮಾಡಿರುವೆವು.

$$-5 - 3 = -(5 + 3) = -8$$

$$-3 - 5 = -(3 + 5) = -8$$

ಇದರಿಂದ

$$(-5) + (-3) = -5 - 3 = -8$$

$$(-3) + (-5) = -3 - 5 = -8$$

ಎಂದಾದರೆ, ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಸಾಲುಗಳಲ್ಲೂ, ಮೊದಲಿನ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಬಂಧವು ಸರಿಯಾಗಿರುವುದು.

ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ	ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ	ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನ
5	–3	2 = 5 + (–3)
3	–5	–2 = 3 + (–5)
–5	–3	–8 = –5 + (–3)
–3	–5	–8 = –3 + (–5)

ಇನ್ನು ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸುವ ಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸುವ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಬರೆದು ನೋಡುವಾ.

ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ x	ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ y	ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನ $x + y$
5	3	8 = 5 + 3
3	5	8 = 3 + 5
–5	3	–2 = (–5) + 3
–3	5	2 = (–3) + 5
5	–3	2 = 5 + (–3)
3	–5	–2 = 3 + (–5)
–5	–3	–8 = (–5) + (–3)
–3	–5	–8 = (–3) + (–5)

ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ ಹಾಗೂ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ ಎಂಬಿವುಗಳಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ ಒಂದು ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ	ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ	ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನ
7	3 ಬಲಕ್ಕೆ	
3	7 ಬಲಕ್ಕೆ	
–7	3 ಬಲಕ್ಕೆ	
–3	7 ಬಲಕ್ಕೆ	
7	3 ಎಡಕ್ಕೆ	
3	7 ಎಡಕ್ಕೆ	
–7	3 ಎಡಕ್ಕೆ	
–3	7 ಎಡಕ್ಕೆ	

ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಿ ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ನಂತರ, ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಅಥವಾ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಬರೆದು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿರಿ. ಪಟ್ಟಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲೂ ಮೊದಲ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೇ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಪಟ್ಟಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲೂ, ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೊದಲ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಲು, ಕೆಲವು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಸರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ?

$$3 + (-5) = 3 - 5 = -2$$

$$5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

$$(-5) + (-3) = -5 - 3 = -8$$

$$(-3) + (-5) = -3 - 5 = -8$$

ಇವುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕಂಡು ಬರುವುದೆಂದರೆ, ಒಂದು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿರುವುದು ಈ ಮೊತ್ತದ ಬದಲಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯವಕಲನವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದ್ದಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

x ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ, y ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ

$$x + (-y) = x - y$$

ಇದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ ಹಾಗೂ ಅಲ್ಲಿಂದ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ ಎಂಬಿವುಗಳು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೂ ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತವೇ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ತಲುಪಿದ ಸ್ಥಾನದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದು.

ಅಂದರೆ, ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ x, ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ y ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನ z ಎಂದಾದರೆ ಇವುಗಳು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೂ ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು

$$z = x + y$$

ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಸಾಕಾಗುವುದು.

ಒಂದು ಕಾರ್ಯ ಹಲವು ವಾಕ್ಯಗಳು

ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸದೆ ಸ್ಥಾನಗಳ ಹಾಗೂ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲುಂಟಾದ ಬದಲಾವಣೆಯ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರೋ? ಮೊದಲ ಹಾಗೂ ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ O ದಿಂದಿರುವ ದೂರಗಳು x, z ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ y, ಎಂದೆಲ್ಲಾ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇವುಗಳನ್ನು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೇ ಹೇಳುವುದರಿಂದ, ಇವುಗಳೊಂದಿಗೆ ಎಡಕ್ಕೆ ಅಥವಾ ಬಲಕ್ಕೆ ಇರುವುದೆಂದೂ ಹೇಳಬೇಕಾಗುವುದು.

x, y ಗಳು ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಆದರೆ
$z = x + y$, ಅದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವುದು.

x, y ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕುಗಳಲ್ಲಾದರೆ,

$x > y$ ಆಗಿರುವುದಾದರೆ

$z = x - y$, x ನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವುದು.

$x < y$ ಆಗಿರುವುದಾದರೆ

$z = y - x$, y ಯ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವುದೆಂದೆಲ್ಲಾ ಹೇಳಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ x, y, z ಎಂಬಿವುಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ, ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ ಆಗಬಹುದು ಎಂಬುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಒಂದೇ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುವುದು.

ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸದೆ, ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಎಂಬ ವಿಶೇಷತೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದಾದರೆ, ಕೊನೆಯ ಸ್ಥಾನ ಎಂಬುದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದೆಂದು ಯೋಚಿಸಿರಿ.

(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿರಿ.

x	y	$x + y$
6	−10	
−6	10	
−6	−10	
−6	6	
6	−6	

(2) ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲೂ x, y ಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವು ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಎರಡು ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) x ಧನಸಂಖ್ಯೆ, y ಋಣಸಂಖ್ಯೆ, $x + y = 1$

(ii) x ಋಣಸಂಖ್ಯೆ, y ಧನಸಂಖ್ಯೆ, $x + y = 1$

(iii) x ಧನಸಂಖ್ಯೆ, y ಋಣಸಂಖ್ಯೆ, $x + y = -1$

(iv) x ಋಣಸಂಖ್ಯೆ, y ಧನಸಂಖ್ಯೆ, $x + y = -1$

(3) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿರಿ.

x	y	z	$(x + y) + z$	$x + (y + z)$
2	4	−5		
2	−4	5		
−2	4	−5		
2	−4	−5		
−2	4	5		
−2	−4	5		
−2	−4	−5		

ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ

ಸ್ಥಾನಗಳ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡುವ. 4 ಎಂಬ ಸ್ಥಾನದಿಂದ 7 ಎಂಬ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ತಲುಪಲು, ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಬದಲಾಗಬೇಕು?

ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆ 3 ಆಗಬೇಕು ಎಂದು ಮಾತ್ರ ಹೇಳಿದರೆ ಸಾಲದಲ್ಲವೇ; ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯು ಎಡಕ್ಕಾದರೆ 1 ಕ್ಕೆ ತಲುಪುವುದಲ್ಲವೇ? ಹಾಗಾದರೆ 4 ರಿಂದ 7 ಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು 3 ಸ್ಥಾನಗಳಷ್ಟು ಬಲಕ್ಕೆ ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕು.

7 ರಿಂದ 4 ಕ್ಕೆ ತಲುಪಲೋ?

ಇದರಲ್ಲೂ 3 ಸ್ಥಾನಗಳಷ್ಟು ಬದಲಾಗಬೇಕು, ಆದರೆ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಆಗಿರಬೇಕು.

4 ರಿಂದ −7 ಕ್ಕೆ ತಲುಪಲೋ?

ಚಿತ್ರ ಬಿಡಿಸಿ ನೋಡುವ.

ವಿಭಿನ್ನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ

17 ರಿಂದ 9 ನ್ನು ಕಳೆಯಲಿರುವ ಒಂದು ಸುಲಭ ವಿಧಾನ, 10 ರಿಂದ 9 ಕಳೆದು 7 ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

$$17 - 9 = (10 + 7) - 9$$
$$= (10 - 9) + 7$$
$$= 1 + 7 = 8$$

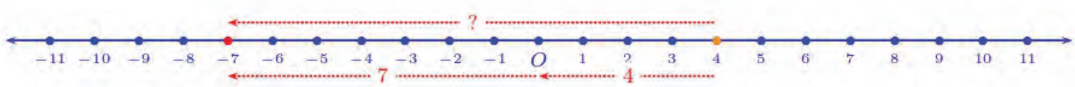
ಋಣ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$17 - 9 = (10 + 7) - 9$$
$$= 10 + (7 - 9)$$
$$= 10 + (-2)$$
$$= 10 - 2 = 8$$

ಇದೇ ರೀತಿ,

$$57 - 29 = (50 - 20) + (7 - 9)$$
$$= 30 + (-2)$$
$$= 30 - 2 = 28$$

ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.



ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆ ವಿವಿಧ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಹಾಗೂ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ ಒಂದು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವ. ಮೊದಲು ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಸ್ಥಾನದ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಎಡ – ಬಲ ವಿಶೇಷಣಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿ ಬರೆಯುವ.

ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ	ತಲುಪಬೇಕಾದ ಸ್ಥಾನ	ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ
4	7	3 ಬಲಕ್ಕೆ
7	4	3 ಎಡಕ್ಕೆ
4	−7	11 ಎಡಕ್ಕೆ
−7	4	
−4	7	
7	−4	
−4	−7	
−7	−4	

ಇನ್ನು ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಮಾತ್ರ ಬರೆಯುವ: ಎಡಭಾಗಕ್ಕಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ	ತಲುಪಬೇಕಾದ ಸ್ಥಾನ	ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ
4	7	3
7	4	−3
4	−7	−11
−7	4	11
−4	7	11
7	−4	−11
−4	−7	−3
−7	−4	3

ಇನ್ನು ಈ ಪಟ್ಟಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗೆ ಏನು ಸಂಬಂಧವಿದೆ ಎಂದು ಯೋಚಿಸೋಣ.

ಮೊದಲ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ, ಸ್ಥಾನದಲ್ಲುಂಟಾದ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರುವುದು $7 - 4 = 3$ ಎಂದಲ್ಲವೇ.

ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದೇ?

$$4 - 7 = -3$$

ಆಗ ಇಲ್ಲಿಯೂ, ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಮುಂದಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲೋ?

$$-7 - 4 = -(7 + 4) = -11$$

ಎಂದು ಮೊದಲೇ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಇದೇ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವು ಸರಿಯಾಗುವುದು.

ನಾಲ್ಕನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ ಎಂದು ನೋಡಬೇಕಾದರೆ, ಮೊದಲು $4 - (-7)$ ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆಯ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಅದನ್ನು ಹೀಗೆ ಯೋಚಿಸುವ, ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕಳೆಯುವಿಕೆಯನ್ನು ಹಲವಾರು ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು. $10 - 6$ ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬೇಕು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ, 6 ನ್ನು 10 ಮಾಡಲು ಎಷ್ಟನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಹೀಗೆ $6 + 4 = 10$ ಎಂಬುದರಿಂದ $10 - 6 = 4$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇದೇರೀತಿ $4 - (-7)$ ಎಂಬುದನ್ನು -7 ನ್ನು 4 ಮಾಡಲು ಎಷ್ಟನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು ಎಂಬ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿ ನೋಡುವ. ಇದನ್ನು ಎರಡು ಹಂತಗಳಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. -7 ರೊಂದಿಗೆ 7 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 0 ಸಿಗುವುದು. 4 ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಇನ್ನೂ 4 ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಒಟ್ಟು ಕೂಡಿಸಿರುವುದು $7 + 4 = 11$ ಎಂಬ ನಿರ್ವಚನಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ

$$4 - (-7) = 7 + 4 = 11$$

ಎಂದು ತೆಗೆಯಬಹುದು. ಇದು

$$4 - (-7) = 4 + 7 = 11$$

ಎಂದು ಬರೆದರೆ ನೆನಪಿಡಲು ಸುಲಭವಾಗುವುದು.

ಆಗ ನಾಲ್ಕನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲೂ, ಎರಡನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಯೋಚಿಸಿದರೆ

$$7 - (-4) = 7 + 4 = 11$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇದರಿಂದ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಐದನೇ ಸಾಲು ಕೂಡಾ ಸರಿಯಾಗುವುದು.

$$-4 - 7 = -(4 + 7) = -11$$

ಎಂದು ಮೊದಲೇ ನೋಡಿದ್ದನ್ನನುಸರಿಸಿ, ಆರನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗೂ ಇದೇ ಸಂಬಂಧವಿರುವುದು. ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಕಂಡುಕೊಂಡ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ.

ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ	ತಲುಪಬೇಕಾದ ಸ್ಥಾನ	ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ
4	7	3 = 7 – 4
7	4	–3 = 4 – 7
4	–7	–11 = – 7 – 4
–7	4	11 = 4 – (–7)
–4	7	11 = 7 – (– 4)
7	–4	–11 = – 4 – 7
–4	–7	–3
–7	–4	3

ಮುಂದಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲೂ ಇದನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿದರೆ (–7) – (–4) ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೇಳಬೇಕಾಗುವುದು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಇದೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ

$$7 - (-4) = 7 + 4$$

ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ. ಇದೇ ರೀತಿ

$$(-7) - (-4) = -7 + 4$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಇದರಲ್ಲಿ –7 + 4 ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಮೊದಲೇ ಮಾಡಿದಂತೆ

$$-7 + 4 = 4 - 7 = -3$$

ಹಾಗಾಗಿ

$$(-7) - (-4) = -7 + 4 = -3$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಪಟ್ಟಿಯ ಏಳನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲೂ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ವಿಷಯವು ಸರಿಯಾಗುವುದು.

ಕೊನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$(-4) - (-7) = -4 + 7 = 3$$

ಎಂದು ಬರೆಯುವುದರಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲೂ ಮೇಲಿನ ವಿಷಯವು ಸರಿಯಾಗುವುದು.

ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನ x	ತಲುಪಬೇಕಾದ ಸ್ಥಾನ y	ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ $y - x$
4	7	3 = 7 – 4
7	4	–3 = 4 – 7
4	–7	–11 = – 7 – 4
–7	4	11 = 4 – (–7)
–4	7	11 = 7 – (– 4)
7	–4	–11 = – 4 – 7
–4	–7	–3 = (–7) – (–4)
–7	–4	3 = –4 – (–7)

ಇದನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿಸಲು, ವ್ಯವಕಲನವನ್ನು ಕೆಲವು ಹೊಸ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ವಚಿಸಿದೆವಲ್ಲವೇ.

$$4 - (-7) = 4 + 7 = 11$$

$$7 - (-4) = 7 + 4 = 11$$

ಎಂದೂ

$$(-7) - (-4) = -7 + 4 = -3$$

$$(-4) - (-7) = -4 + 7 = 3$$

ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡಿರುವೆವು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯುವುದು ಎಂದರೆ, ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಕೂಡಿಸುವುದು. ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು.

x ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೂ, y ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೂ

$$x - (-y) = x + y$$

ಈ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ $x = 0, y = 3$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ?

$$0 - (-3) = 0 + 3 = 3$$

$0 - 3 = -3$ ಆಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ. ಇದೇ ರೀತಿ, $0 - (-3)$ ನ್ನು $-(-3)$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆದರೋ?

ಆಗ

$$-(-3) = 0 - (-3) = 0 + 3 = 3$$

ಒಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಋಣದ ಋಣ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥ, ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಹೊಸ ನಿರ್ವಚನವಾಗಿದೆ.

x ಯಾವುದೇ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ

$$-(-x) = 0 - (-x) = 0 + x = x$$

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಈ ಪಾಠಭಾಗದ ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿಸ್ತರಿಸುವ. ಆ ಸಮವಾಕ್ಯವು,

x, y ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೂ $x < y$ ಆಗಿರುವುದಾದರೆ $x - y = -(y - x)$

ಇಲ್ಲಿ $x > y$ ಆದರೋ?

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $x = 10, y = 3$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.

$$x - y = 10 - 3 = 7$$

$$y - x = 3 - 10 = -7$$

$$-(y - x) = -(-7) = 7$$

ಇಲ್ಲಿಯೂ $x - y = -(y - x)$ ಆಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ.

ಋಣ ಎಂದರೆ

ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ ಸಣ್ಣದಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಬೇಕಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬ ಆಶಯವನ್ನು ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಲಾಯಿತು. ನಂತರ, ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು. ಇದಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗುವಂತೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನಕ್ಕೆ ಕೆಲವು ಹೊಸ ನಿರ್ವಚನಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಯಿತು.

ಇದರ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಾಗಿ ಋಣದ ಋಣ ಎಂಬ ನಿರ್ವಚನದಲ್ಲಿ ಋಣವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸುವುದು ಎಂಬುದು ಒಂದು ಹೊಸ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಈ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ $x < y$ ಆದರೆ, $y - x$ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು. ಹಾಗೂ $x - y$ ಯು ಅದರ ಋಣವಾಗಿರುವುದು.

$x > y$ ಆದರೆ, $y - x$ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು, $x - y$ ಅದರ ಋಣವಾಗಿರುವುದು.

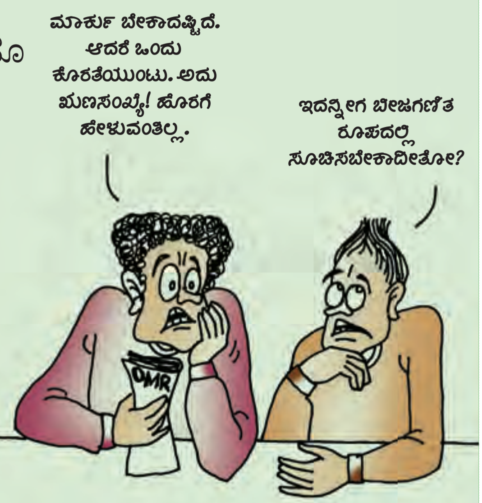
ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಋಣದ ಋಣವು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ನಿರ್ವಚಿಸಿರುವುದರಿಂದ, ಎರಡನೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಸರಿಯಾಗುವುದು.

ಆಗ ಈ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಮಾರ್ಪಡಿಸಬಹುದು.

x, y ಎಂಬಿವುಗಳು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ

$$x - y = -(y - x)$$

(1) x, y, z ಎಂಬಿವುಗಳು ವಿವಿಧ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, $x - (y - z)$ ಹಾಗೂ $(x - y) + z$ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಎರಡೂ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆಯೇ?



(2) ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲೂ x, y ಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳು ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ ಎರಡು ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) x ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ, y ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆ, $x - y = 1$

(ii) x ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆ, y ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ, $x - y = -1$

(3) (i) a, b, c, d ಇವುಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾದ ನಾಲ್ಕು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಅವುಗಳ ಋಣಗಳೋ ಆಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿ, $a - b - c + d$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುದಾದರೂ ಇದು ಯಾಕೆ ಸೊನ್ನೆಯೇ ಆಗುವುದೆಂದು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವಿವರಿಸಿರಿ.

(iii) $a - b - c + d$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ $a + b - c -$ d ಆದರೋ?

(iv) $a - b + c - d$ ಆದರೋ?

ಸಮಯವೂ ವೇಗವೂ

ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿನ ಸ್ಥಾನ ಅಥವಾ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಭಾಗಗಳಿಗಾದರೂ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು, ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯುವುದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ.

ಸ್ಥಾನವು ಬದಲಾಗಬೇಕಾದರೆ ಚಲಿಸಬೇಕಲ್ಲವೇ. ಚಲನೆಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸೂಚಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಸಂಚರಿಸಿದ ದೂರದೊಂದಿಗೆ, ಸಮಯವನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬೇಕು.

5 ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 50 ಮೀಟರ್ ಸಂಚರಿಸಿತು ಎಂದರೆ, ವೇಗದ ಕುರಿತಾಗಿ ಅರಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಇನ್ನು ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ ವೇಗವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸದೆ ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡದಿದ್ದರೆ ಅದು ಸಮಾನ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವುದಾದರೆ ವೇಗವು ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 10 ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಇದೇ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸಿದರೆ 10 ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 100 ಮೀಟರ್ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಬಹುದೆಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. (ಓಟದ ಸ್ಪರ್ಧೆಯಲ್ಲಿ 100 ಮೀಟರ್ ದೂರವನ್ನು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸಿದ್ದು 9.58 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಬಹುದು).

ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ ಯಾವ ದಿಕ್ಕಿಗಾದರೂ ಸಮಾನ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ವೇಗವನ್ನೂ, ಸಂಚರಿಸಿದ ಸಮಯವನ್ನೂ ತಿಳಿದರೆ ಅದು ಸಂಚರಿಸಿದ ದೂರವನ್ನುಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ 1 ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 10 ಮೀಟರ್ (ಬರೆಯುವುದು 10 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್) ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದು, 4 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ, $10 \times 4 = 40$ ಮೀಟರ್ ಸಂಚರಿಸಿದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಆದರೆ ಚಲನೆಯ ದಿಕ್ಕು ತಿಳಿಯದೆ ಅದು ಅಂತಿಮವಾಗಿ ತಲುಪಿದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

O ಎಂಬ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಡಕ್ಕೊ ಬಲಕ್ಕೊ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ ಸಂಚರಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಊಹಿಸುವ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಲಭಾಗದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೂ, ಎಡಭಾಗದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೂ O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇರುವ ದೂರಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಗುರುತಿಸಬಹುದು, O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಚಲಿಸಲು ಆರಂಭಿಸಿದೆಯೆಂದು ಊಹಿಸುವ. ದೂರವನ್ನಳೆಯಲು ಮೀಟರ್, ವೇಗವನ್ನಳೆಯಲು ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ದೂರ ಕ್ರಮಿಸಿದೆ ಎಂಬ ಯೂನಿಟ್ (ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್), ಸಮಯವನ್ನಳೆಯಲು ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ.

ಆಗ O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೊರಟು 10 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ, ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ 3 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಷ್ಟು ಸಂಚರಿಸಿದರೆ $10 \times 3 = 30$ ಎಂಬ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತಲುಪುವುದು. ಸಂಚರಿಸಿದುದು ಎಡಭಾಗಕ್ಕಾದರೋ?

$-(10 \times 3) = -30$ ಎಂಬ ಸ್ಥಾನವಾಗುವುದು.

ವೇಗದ ಲೆಕ್ಕ

ಜಮೈಕಾದ ಉಸೇನ್ ಬೋಲ್ಟ್ 2009 ರಲ್ಲಿ ಬರ್ಲಿನ್‌ನಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಕ್ರೀಡಾಕೂಟದಲ್ಲಿ 9.58 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ 100 ಮೀಟರ್ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಿರುವುದು, ಇದುವರೆಗೆ ದಾಖಲಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ವೇಗವಾಗಿದೆ.

ಸತತವಾಗಿ ಆತ ಒಂದೇ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಓಡಿರುವುದಲ್ಲ ಪ್ರತಿ 20 ಮೀಟರ್ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಿದ ಸಮಯವನ್ನು ದಾಖಲಿಸಲಾಗಿದೆ.

ದೂರ ಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ	ಸಮಯ ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ
0 – 20	2.89
20 – 40	1.75
40 – 60	1.67
60 – 80	1.61
80 – 100	1.66

ಆಗ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸಿದರೆ, ವೇಗಕ್ಕೆ ಸಮಯದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಸಾಕು: ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸಿದರೆ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಋಣವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕು. ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಲು, ವೇಗ v, ಸಮಯ t, ಸ್ಥಾನ s ಎಂದಾದರೆ,

ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸಿದರೆ $s = vt$

ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸಿದರೆ $s = -(vt)$

ಎಂದೂ ಹೇಳಬೇಕು.

ಇವುಗಳೆರಡನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಂದೇ ಸಮವಾಕ್ಯರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಳಲು ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸಿದ ದೂರಗಳನ್ನು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಹೇಳಿದರೋ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 10 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸಿದರೆ $v = 10$ ಎಂದೂ ಎಡಭಾಗಕ್ಕಾದರೆ $v = -10$ ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಆಗ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆ ಎದುರಾಗುವುದು: O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, 10 ಮೀಟರ್ / ಸೆಕೆಂಡ್ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ 3 ಸೆಕೆಂಡ್ ಸಂಚರಿಸಿದರೆ, ಸ್ಥಾನವನ್ನು ವೇಗ ಮತ್ತು ಸಮಯದ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಹೇಳಲು, $(-10) \times 3$ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೇಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳುವ.

ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಎಂದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮಡಿಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$10 \times 3 = 10 \text{ ರ } 3 \text{ ಮಡಿ } = 10 + 10 + 10 = 30$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $(-10) \times 3$ ಮಡಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ?

$$(-10) \times 3 = -10 \text{ ರ } 3 \text{ ಮಡಿ } = (-10) + (-10) + (-10) = -30$$

ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸುವ ಈ ರೀತಿಯನ್ನು, ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯವಾಗುವಂತೆ ನಿರ್ವಚಿಸಬಹುದು.

ಆಗ ಯಾವುದೇ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಸಂಚರಿಸಿದರೂ, ವೇಗ v, ಸಮಯ t, ಸ್ಥಾನ s ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಇವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧ $s = vt$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸುವ, ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ 10 ಮೀಟರ್ / ಸೆಕೆಂಡ್ ಏಕರೂಪದ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಚಲನೆಯನ್ನು ಅದು O ಗೆ ತಲುಪಿದ ನಂತರ ವೀಕ್ಷಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಲಾಯಿತು ಎಂದು ಊಹಿಸುವ.

ಬಿಂದುವು ಎಡದಿಂದ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸುವುದಾದರೆ, ಚಲನೆಯನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ 2 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಅದರ ಸ್ಥಾನವು 20 ರಲ್ಲಿರುವುದು.

2 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಮೊದಲು?

O ವನ್ನು ತಲುಪಲು ಇನ್ನೂ 2 ಸೆಕೆಂಡ್ ಬೇಕಲ್ಲವೇ. ಆಗ O ವಿನ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ 20 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿತ್ತು ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ. ಅಂದರೆ -20 ಎಂಬ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿತ್ತು.

ಬಲಭಾಗದಿಂದ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಂಚರಿಸಿರುವುದಾದರೋ?

ಸಂಚಾರದ ದಿಕ್ಕು, ಸಮಯ - ಮೊದಲೋ ನಂತರವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವ. ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಿಯೋ ಅಥವಾ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲೇ ಊಹಿಸಿಯೋ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬರೆಯಲು ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ, ವೇಗವನ್ನೂ ಸಮಯವನ್ನೂ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಹಾಗೂ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ಮೊದಲು ಬರೆಯುವ.

ವೇಗ	ಸಮಯ	ತಲುಪುವ ಸ್ಥಾನ
10 ಬಲಕ್ಕೆ	2 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರ	20 ಬಲಕ್ಕೆ
10 ಎಡಕ್ಕೆ	2 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರ	20 ಎಡಕ್ಕೆ
10 ಬಲಕ್ಕೆ	2 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಮೊದಲು	20 ಎಡಕ್ಕೆ
10 ಎಡಕ್ಕೆ	2 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಮೊದಲು	20 ಬಲಕ್ಕೆ

ಇನ್ನು ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ವೇಗವನ್ನು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವ.

ವೇಗ	ಸಮಯ	ತಲುಪುವ ಸ್ಥಾನ
10	2 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರ	20
–10	2 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರ	–20
10	2 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಮೊದಲು	–20
–10	2 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಮೊದಲು	20

ಸಮಯದ ವಿಚಾರದಲ್ಲೂ ನಂತರ ಅಥವಾ ಮೊದಲು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, ವೀಕ್ಷಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ ನಂತರದ ಸಮಯವನ್ನು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಯೂ, ಮೊದಲಿನ ಸಮಯವನ್ನು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಯೂ ಬರೆದರೋ?

ವೇಗ	ಸಮಯ	ತಲುಪುವ ಸ್ಥಾನ
10	2	20
–10	2	–20
10	–2	–20
–10	–2	20

ಇದರ ಒಂದನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಎರಡನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲೂ ಈ ಮೊದಲಿನ ನಿರ್ವಚನಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, $(-10) \times 2 = -20$ ಆಗಿರುವುದು.

ಮೂರನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲೋ?

$10 \times (-2)$ ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆಯ ಅರ್ಥವೇನು?

ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಯೋಚಿಸುವ, ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿ ಬದಲಾದರೂ, ಗುಣಲಬ್ಧ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$5 \times 3 = 3 \times 5 \qquad \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \qquad \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$$

ಹಾಗಾದರೆ ಇಲ್ಲಿಯೂ

$10 \times (-2) = (-2) \times 10$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ

$$(-2) \times 10 = -20$$

ಎಂದಾಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಇದರಿಂದ,

$$10 \times (-2) = (-2) \times 10 = -20$$

ಎಂದು ನಿರ್ವಚಿಸಿದರೆ, ಪಟ್ಟಿಯ ಮೂರನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲೂ, ಮೊದಲೆರಡು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವೇ ಇರುವುದು.

ಕೊನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲೋ?

$(-10) \times (-2)$ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೋಡುವ.

ಇದನ್ನು 20 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಪಟ್ಟಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲೂ ಒಂದೇ ಸಂಬಂಧವಿರುವುದು.

ಹೀಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಿರುವ ಕಾರಣವನ್ನು ಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವ.

ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಲು, ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಗುಣಿಸಿ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$(15 + 10) \times 2 = (15 \times 2) + (10 \times 2)$$

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ x, y, z ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ

$$(x + y)z = xz + yz$$

ಈ ತತ್ವವು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯವಾಗಲು ಏನು ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ನೋಡುವ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ $x = 15, y = -10, z = -2$ ಆದರೆ $(x + y)z$, $xz + yz$ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಮಾಡಿ ನೋಡುವ.

$$(x + y)z = (15+ (-10)) \times (-2) = 5 \times (-2) = -10$$

$$xz + yz = (15 \times (-2)) + ((-10) \times (-2)) = -30 + ((-10) \times (-2))$$

ಮೊದಲಿನ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಸಮಾನವಾಗಲು $(-10) \times (-2)$ ಎಂಬುದು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕು?

ಮೊದಲ ಗುಣಲಬ್ಧ -10; ಎರಡನೇ ಗುಣಲಬ್ಧವು -30 ರೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರುವುದು. -30 ಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಕೂಡಿಸಿದರೆ -10 ಆಗುವುದು?

ಆಗ $(x + y)z = xz + yz$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ $x = 15, y = -10, z = -2$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸರಿಹೊಂದಬೇಕಾದರೆ, $(-10) \times (-2) = 20$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಹೀಗೆ ಪಟ್ಟಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲೂ ಮೊದಲ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವುದು.

ವೇಗ v	ಸಮಯ t	ತಲುಪುವ ಸ್ಥಾನ vt
10	2	$20 = 10 \times 2$
−10	2	$-20 = (-10) \times 2$
10	−2	$-20 = 10 \times (-2)$
−10	−2	$20 = (-10) \times (-2)$

ಅಂದರೆ ವೇಗ v, ಸಮಯ t, ಸ್ಥಾನ s ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವು ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ

$$s = vt$$

ಎಂಬ ಒಂದೇ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸಿದ ಹೊಸ ನಿರ್ವಚನವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯುವ.

x, y ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ

$$(-x)y = x(-y) = -(xy)$$

$$(-x)(-y) = xy$$

(1) x, y, z ಗಳಾಗಿ ಹಲವು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, $(x + y) z$ ಮತ್ತು $xz + yz$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ $(x + y) z = xz + yz$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಸರಿಹೊಂದುವುದೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರಿ.

(2) $(x+y)(u+v) = xu + xv + yu + yv$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ, x, y, u, v ಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ $-x, -y, -u, -v$ ಗಳಾದರೂ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಸರಿಹೊಂದುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಆಂದೋಲನ

$(-1) \times (-1)$ ಎಷ್ಟು? ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ನಿಯಮವನ್ನನುಸರಿಸಿ ಇದು 1 ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. $(-1) \times (-1) \times (-1)$ ಆದರೋ?

ಮೊದಲ ಎರಡು -1 ಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ 1; ಇನ್ನೂ -1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ -1. ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು.

$$(-1)^2 = 1$$

$$(-1)^3 = -1$$

ಇನ್ನೂ ಹಲವು ಘಾತಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

ಘಾತಸೂಚಿಯ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, -1; ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ 1 ಸಿಗುವುದು.

ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು

n ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ

$$(-1)^{2n-1} = -1$$

$$(-1)^{2n} = 1$$

n ಆಗಿ ಹಲವು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, $1 + (-1)^n$ ನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ ನೋಡಿರಿ.

$\frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$ ಆದರೋ?

ST-509-18-MATHS (K)-9-VOL-1

(3) ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲೂ x ಆಗಿ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, y ಆಗಿ ದೊರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $y = x^2, x = -1$ (ii) $y = x^2 + 3x + 2, x = -1$ (iii) $y = x^2 + 3x + 2, x = -2$

(iv) $y = (x + 1)(x + 2), x = -1$ (v) $y = (x + 1)(x + 2), x = -2$

(4) $y = x^2 + 4x + 4$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ x ಆಗಿ ಹಲವು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು y ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. x ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ y ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆ ಆಗುವುದು ಯಾಕೆ?

(5) ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಅವುಗಳ ಋಣಗಳು ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆ ಇವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎನ್ನುವರು.

(i) $x^2 + y^2 = 25$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ ಎಷ್ಟು ಜೊತೆ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

(ii) $x^2 - y^2 = 25$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ ಎಷ್ಟು ಜೊತೆ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

(6) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

$(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5)$ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(7) $(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) + [(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5)]$ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

ಋಣ ಭಾಗಾಕಾರ

ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾಗಾಕಾರಕ್ಕೆ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುವುದು, ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯ ಮೂಲಕವಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $6 \div 2$ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥವು, 2 ರೊಂದಿಗೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ 6 ಸಿಗುವುದು ಎಂದಾಗಿದೆ.

$2 \times 3 = 6$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$6 \div 2 = 3$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

3×2 ಎಂಬುದು 6 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$6 \div 3 = 2$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇದನ್ನನುಸರಿಸಿ, $(-6) \div 2$ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

$2 \times (-3) = -6$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$-6 \div 2 = (-3)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದಲ್ಲದೆ, $(-3) \times 2 = -6$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$-6 \div (-3) = 2$$

ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ $(-3) \times (-4) = 12$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$12 \div (-3) = -4$$

ಎಂದು

$$12 \div (-4) = -3$$

ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇತರ ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $x \div y$ ಎಂಬುದನ್ನು $\frac{x}{y}$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದಾಗಿದೆ. ಆಗ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಹೇಳಬಹುದು.

x, y ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ

$$\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$$

ಸಮವಾಕ್ಯ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ

ನೆಲದಿಂದ ಮೇಲಕ್ಕೆಸೆದ ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಗರಿಷ್ಠ ಎತ್ತರವನ್ನು ತಲುಪಿದ ನಂತರ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಬೀಳುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೂ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕ ಇದೆ.

ನೇರವಾಗಿ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದರೆ ಪ್ರತಿ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 9.8 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ವೇಗ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. ಹಾಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ, ವೇಗವೇ ಇಲ್ಲದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಬೀಳಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಕೆಳಮುಖ ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 9.8 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ವೇಗವು ಜಾಸ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆ. 49 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಎಸೆಯಲಾಯಿತು ಎಂದು ಊಹಿಸಿರಿ. ಎಸೆದ 5 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಬಳಿಕ ವೇಗವು $49 - (5 \times 9.8) = 0$. ಆಗ 5 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಬಳಿಕ ವೇಗವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತಾ ಕೆಳಮುಖವಾಗಿ ಇರುವುದು. ಈ ಮೊದಲೇ ಹೇಳಿದಂತೆ, 7 ಸೆಕೆಂಡ್ ಆಗುವಾಗ ವೇಗ $0 + (2 \times 9.8) = 19.6$ ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್.

ಆಗ ಈ ಚಲನೆಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯನ್ನು ಹೇಳಲು ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು ಬೇಕಾಗುವುದು.

$$v = 49 - 9.8t, \quad t < 5 \text{ ಆದರೆ}$$

$$v = 9.8t - 49, \quad t > 5 \text{ ಆದರೆ}$$

ಮೇಲ್ಮುಖ ವೇಗವನ್ನು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಯೂ ಕೆಳಮುಖ ವೇಗವನ್ನು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಒಂದೇ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಸಾಕು.

$$v = 49 - 9.8t$$

(1) $y = \frac{1}{x}$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ, x ಆಗಿ $2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, y ಆಗಿ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ..

(2) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ, $x = -2$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗಲೂ, $x = -\frac{1}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗಲೂ, y ಆಗಿ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ, x, y ಆಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, z ಆಗಿ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x = 10, y = -5$ (ii) $x = -10, y = 5$ (iii) $x = -10, y = -5$

ಟಿಪ್ಪಣಿ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ಟಿಪ್ಪಣಿ

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಭಾಗ IV ಕ

ಕರ್ತವ್ಯಗಳು

51ಕ. **ಮೂಲಭೂತ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು – ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಭಾರತದ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಪೌರನ ಕರ್ತವ್ಯಗಳಾಗಿವೆ.**

(ಕ) ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಆನುಸರಿಸುವುದು, ಅದರ ಆದರ್ಶಗಳನ್ನು, ಸಂಸ್ಥೆಗಳನ್ನು ರಾಷ್ಟ್ರಧ್ವಜವನ್ನು ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು;

(ಖ) ನಮ್ಮ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ ಸಂಗ್ರಾಮಕ್ಕೆ ಸ್ಫೂರ್ತಿದಾಯಕವಾದ ಉದಾತ್ತ ಆದರ್ಶಗಳನ್ನು ಘೋಷಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಅನುಸರಿಸುವುದು.

(ಗ) ಭಾರತದ ಸಾರ್ವಭೌಮತೆಯನ್ನು, ಏಕತೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅಖಂಡತೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಸಂರಕ್ಷಿಸುವುದು.

(ಘ) ದೇಶವನ್ನು ರಕ್ಷಿಸಲು ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರಕ್ಕೆ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸಲು ಕರೆ ಬಂದಾಗ ಅದನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದು.

(ಙ) ಧಾರ್ಮಿಕ, ಭಾಷಿಕ ಮತ್ತು ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಅಥವಾ ಜಾತಿ ಪಂಗಡಗಳ ಭಿನ್ನತೆಗಳಿಂದ ಅತೀತವಾಗಿ ಭಾರತದ ಎಲ್ಲ ಜನತೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಮರಸ್ಯವನ್ನು ಮತ್ತು ಭ್ರಾತೃತ್ವದ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದು, ಸ್ತ್ರೀಯರ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಕುಂದುಂಟುಮಾಡುವ ಆಚರಣೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬಿಡುವುದು.

(ಚ) ನಮ್ಮ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಭವ್ಯ ಪರಂಪರೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಕಾಪಾಡುವುದು.

(ಛ) ಅರಣ್ಯಗಳು, ಸರೋವರಗಳು, ನದಿಗಳು ಮತ್ತು ವನ್ಯಜೀವಿಗಳು ಸೇರಿದಂತೆ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಪರಿಸರವನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮಾಡುವುದು, ಪ್ರಾಣಿಗಳಿಗೆ ಅನುಕಂಪ ತೋರಿಸುವುದು.

(ಜ) ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಮನೋಭಾವ, ಮಾನವೀಯತೆ, ಜಿಜ್ಞಾಸೆ ಮತ್ತು ಸುಧಾರಣ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದು.

(ಝ) ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಸೊತ್ತನ್ನು ರಕ್ಷಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಹಿಂಸೆಯನ್ನು ತ್ಯಜಿಸುವುದು.

(ಞ) ರಾಷ್ಟ್ರವು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಸಾಧನೆ ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧಿಯ ಔನ್ನತ್ಯಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು ವೈಯಕ್ತಿಕ ಹಾಗೂ ಸಾಮಾಜಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಎಲ್ಲ ಕಾರ್ಯಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಮಾಣಿಕವಾಗಿ ಶ್ರಮಿಸುವುದು.

(ಟ) ಆರರಿಂದ ಹದಿನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ನಡುವಿನ ತನ್ನ ಮಕ್ಕಳಿಗೋ, ತನ್ನ ರಕ್ಷಣೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮಕ್ಕಳಿಗೋ ಆಯಾ ಸಂದರ್ಭಾನುಸಾರ ಹೆತ್ತವರೋ ರಕ್ಷಕರೋ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸಕ್ಕಿರುವ ಅವಕಾಶವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುವುದು.

ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕುಗಳು

ಪ್ರೀತಿಯ ಮಕ್ಕಳೇ,

ನಿಮ್ಮ ಹಕ್ಕುಗಳ ಕುರಿತು ತಿಳಿಯಬೇಕಲ್ಲವೇ? ಹಕ್ಕುಗಳ ಕುರಿತಾಗಿರುವ ತಿಳುವಳಿಕೆಯು ನಿಮ್ಮ ಭಾಗವಹಿಸುವಿಕೆ, ಸಂರಕ್ಷಣೆ, ಸಾಮಾಜಿಕ ನ್ಯಾಯ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಖಾತರಿಪಡಿಸಲು ಪ್ರೇರಣೆಯನ್ನೂ ಪ್ರಚೋದನೆಯನ್ನೂ ನೀಡುತ್ತದೆ. ನಿಮ್ಮ ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಲು ಈಗ ಒಂದು ಆಯೋಗವು ಕಾರ್ಯಾಚರಿಸುತ್ತಿದೆ. ‘ಕೇರಳ ಪ್ರಾಂತ್ಯ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕು ಸಂರಕ್ಷಣ ಆಯೋಗ’ ಎಂದು ಅದರ ಹೆಸರು. ನಿಮ್ಮ ಹಕ್ಕುಗಳು ಯಾವುವು ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

- ವಾಕ್ ಮತ್ತು ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ.
- ಜೀವ ಮತ್ತು ವ್ಯಕ್ತಿ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯದ ರಕ್ಷಣೆ.
- ಪರಿಪೂರ್ಣವಾದ ಬದುಕು ಹಾಗೂ ವಿಕಾಸದ ಹಕ್ಕು.
- ಜಾತಿ, ಮತ, ವರ್ಗ, ವರ್ಣ ಎಂಬ ಚಿಂತನೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಗೌರವಿಸಲ್ಪಡುವ ಮತ್ತು ಅಂಗೀಕರಿಸಲ್ಪಡುವ ಹಕ್ಕು.
- ದೈಹಿಕ, ಮಾನಸಿಕ ಹಾಗೂ ಲೈಂಗಿಕ ದೌರ್ಜನ್ಯಗಳಿಂದ ರಕ್ಷಣೆ ಪಡೆಯಲೂ ಶುಶ್ರೂಷೆ ಪಡೆಯಲೂ ಇರುವ ಹಕ್ಕು.
- ಬಾಲ ಕಾರ್ಮಿಕತನದಿಂದ ಹಾಗೂ ಅಪಾಯಕಾರಿ ಕೆಲಸಗಳಿಂದ ಬಿಡುಗಡೆ.
- ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವಿಕೆಯ ಹಕ್ಕು.
- ಬಾಲ್ಯವಿವಾಹದಿಂದ ರಕ್ಷಣೆ.
- ವೈಯಕ್ತಿಕ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯನ್ನು ಅರಿತುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಬದುಕುವ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ.
- ನಿರ್ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಒಳಗಾಗದಂತೆ ಸಂರಕ್ಷಣೆ.
- ಉಚಿತ ಹಾಗೂ ಕಡ್ಡಾಯ ಶಿಕ್ಷಣದ ಹಕ್ಕು.
- ಕಲಿಯಲೂ ಆಟವಾಡಲೂ ಇರುವ ಹಕ್ಕು.
- ಪ್ರೀತಿ ಹಾಗೂ ರಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ಒದಗಿಸುವ ಕುಟುಂಬ ಹಾಗೂ ಸಮಾಜವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಹಕ್ಕು.

ನಿಮ್ಮ ಕೆಲವು ಜವಾಬ್ದಾರಿಗಳು

- ಶಾಲೆ, ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಸೊತ್ತುಗಳನ್ನು ಹಾನಿ ಮಾಡದೆ ರಕ್ಷಿಸುವುದು.
- ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಶಿಸ್ತು ಪಾಲಿಸುವುದು.
- ಶಾಲಾ ಅಧಿಕಾರಿಗಳನ್ನು, ಅಧ್ಯಾಪಕರನ್ನು, ಹೆತ್ತವರನ್ನು ಹಾಗೂ ಸಹಪಾಠಿಗಳನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಅಂಗೀಕರಿಸುವುದು.
- ಜಾತಿ, ಮತ, ವರ್ಗ, ವರ್ಣ ಇತ್ಯಾದಿ ಚಿಂತನೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಇತರರನ್ನು ಗೌರವಿಸಲೂ ಅಂಗೀಕರಿಸಲೂ ಸಿದ್ಧರಾಗುವುದು.

ಸಂಪರ್ಕಿಸಬೇಕಾದ ವಿಳಾಸ

ಕೇರಳ ಪ್ರಾಂತ್ಯ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕು ಸಂರಕ್ಷಣ ಆಯೋಗ

‘ಶ್ರೀ ಗಣೇಶ್’, ಟಿ.ಸಿ. 14/2036, ವಾನ್ ರೋಸ್ ಜಂಕ್ಷನ್, ತಿರುವನಂತಪುರ-34

ಫೋನ್ : 0471-2326603

E-mail : childrightscpcr@kerala.gov.in, rtecpcr@kerala.gov.in

Website : www.kescpcr.kerala.gov.in.

ಮಕ್ಕಳ ಸಹಾಯವಾಣಿ : 1098, ಅಪರಾಧ ನಿಯಂತ್ರಣ : 1090, ನಿರ್ಭಯ : 1800 425 1400

ಕೇರಳ ಪೋಲೀಸ್ ಸಹಾಯವಾಣಿ : 0471-3243000/44000/45000

Online R.T.E Monitoring : www.nireekshana.org.in