# ഗണിതം

**ഭാഗം - 1**

**സ്റ്റാൻഡേർഡ്**

# IX

കേരളസർക്കാർ
പൊതുവിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്


തയ്യാറാക്കിയത്
സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി **(SCERT)**, കേരളം

**2024**

ST-361-1-MATHS (M)-9-VOL-1

## ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

## പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണ്ണവും വൈവിധ്യപൂർണ്ണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

ഗണിതം

9

**State Council of Educational Research and Training (SCERT)**
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in
e-mail : scertkerala@gmail.com, Phone : 0471 - 2341883,
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2024
*Printed at* : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

ലോകത്തെ മനസ്സിലാക്കുന്നതിനും സവിശേഷതകൾ തിരിച്ചറിയുന്നതിനും മനുഷ്യർക്ക് പലതരം അളവുകളും അവയുടെ പരസ്പരബന്ധവും അനിവാര്യമായിരുന്നു. ഇത്തരത്തിൽ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഭിന്നസംഖ്യകളും രൂപപ്പെടുന്നതും അവ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ക്രിയകളുടെ പ്രത്യേകതകളും കഴിഞ്ഞ ക്ലാസുകളിലെ ഗണിതപഠനത്തിൽ നാം മനസ്സിലാക്കി.
എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ടോ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കൊണ്ടോ സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയാത്ത അളവുകളെയും അവ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിനുള്ള പുതിയ രീതികളെക്കുറിച്ചും ഇവിടെ പരിചയപ്പെടാം.
ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചുള്ള പഠനവും ഇവിടെ തുടരുന്നു. സമാന്തരവരകളും സദൃശത്രികോണങ്ങളും അവ തമ്മിലുള്ള പരസ്പര ബന്ധവും ഈ പുസ്തകത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.
പ്രക്രിയകളെക്കുറിച്ചുള്ള ചിന്തയ്ക്ക് ഊന്നൽ നൽകുന്ന ഗണനചിന്തയാണ് ഗണിതപഠനത്തിന്റെ പുതിയ കാഴ്ചപ്പാട്. പലതരം ക്രിയാരീതികൾ പഠിക്കുകയും അവ നിശ്ചിത സന്ദർഭങ്ങളിൽ പ്രയോഗിക്കുകയും ചെയ്യുന്നതിനേക്കാൾ പ്രധാനം അവ എങ്ങനെ പ്രവർത്തിക്കുന്നു എന്ന് മനസ്സിലാക്കുകയും അവ കൂടുതൽ കാര്യക്ഷമമാക്കാൻ വ്യത്യസ്ത രീതികൾ പ്രയോജനപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യുന്നതാണ്.
ഇതാണ് ഗണനചിന്തകൊണ്ട് അർഥമാക്കുന്നത്.
ജ്യാമിതിയെ ചലനാത്മകമായി ഉപയോഗിച്ച് കൂടുതൽ ആശയഗ്രഹണം സാധ്യമാക്കുന്നതിന് അനുയോജ്യമായ ജിയോജിബ്ര എന്ന കമ്പ്യൂട്ടർ പ്രോഗ്രാമിന്റെ സാധ്യതകളും വിശദീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

**ഡോ. ജയപ്രകാശ് ആർ.കെ.**
ഡയറക്ടർ
എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി., കേരളം

# പാഠപുസ്തകരചനാസമിതി

## അഡ്വൈസർ

**ഡോ. ഇ. കൃഷ്ണൻ,**
ഗണിതവിഭാഗം മേധാവി (റിട്ട.),
യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം

## ചെയർപേഴ്സൺ

**ഡോ. പി. രമേശ് കുമാർ**
ഗണിതവിഭാഗം മേധാവി, യൂണിവേഴ്സിറ്റി ഓഫ് കേരള
കാര്യവട്ടം, തിരുവനന്തപുരം

## വിദഗ്ധർ

**ഡോ. അനിൽകുമാർ സി.വി.**
ഗണിതവിഭാഗം മേധാവി,
ഇന്ത്യൻ ഇൻസ്റ്റിറ്റ്യൂട്ട് ഓഫ് സ്പെയ്സ്
സയൻസ് & ടെക്നോളജി
വലിയമല, തിരുവനന്തപുരം

**മധു ബി.**
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫസർ
റീജിയണൽ ഇൻസ്റ്റിറ്റ്യൂട്ട് ഓഫ്
എഡ്യുക്കേഷൻ, മൈസൂർ

**എ. സുകേഷ്**
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫസർ,
ഗവൺമെന്റ് കോളേജ് ഓഫ്
എഞ്ചിനിയറിംഗ്, കണ്ണൂർ

## അംഗങ്ങൾ

**ആർ. രാമാനുജം**
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
എം.എൻ.കെ.എം. ഗവ:
ഹയർസെക്കന്ററി സ്കൂൾ
പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

**വിജയകുമാരൻ ടി. കെ.**
എച്ച് എസ് എസ് ടി (റിട്ട.),
ജി.എം.ആർ.എച്ച്.എസ്.എസ്.
ഫോർ ഗേൾസ്, പരവനടുക്കം,
കാസറഗോഡ്

**സി. ടി. ഫിറോസ് ബാബു**
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ഗവ: ഹയർസക്കന്ററി സ്കൂൾ
പൂക്കോട്ടുംപാടം, മലപ്പുറം

**ഉണ്ണികൃഷ്ണൻ എം. വി.**
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്. കുറ്റിയേരി
പി.ഒ കുറ്റിയേരി, കണ്ണൂർ

**നന്ദകുമാർ സി.**
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ചോതാവൂർ ഹയർ
സെക്കൻഡറി സ്കൂൾ
ചമ്പാട്, കണ്ണൂർ

**ശ്രീജിത്ത് മുറിയമ്പത്ത്**
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. ചോറോട്,
കുരിക്കിലാട്, വടകര, കോഴിക്കോട്

**പത്മപ്രസാദ് കെ.**
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
പന്തല്ലൂർ എച്ച്.എസ്.എസ്.,
കടമ്പോട് പോസ്റ്റ്, മലപ്പുറം

**ഉബൈദുള്ള കെ.സി.**
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം
എസ്.ഒ.എച്ച്.എസ്., അരീക്കോട്,
മലപ്പുറം

**ഫിറോസ മൊയ്തു**
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
കാലിക്കറ്റ് ഗേൾസ് വി.എച്ച്.എസ്.
എസ്., കുണ്ടുങ്ങൽ, കല്ലായി,
കോഴിക്കോട്

**പ്രിയ രാജ്**
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
എം. ജി. ഡി. ഹൈസ്കൂൾ
പുതുശ്ശേരി,
പുതുശ്ശേരി സൗത്ത് പി.ഒ,
പത്തനംതിട്ട

**ധനേശൻ എം. വി.**
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. ഇംഗ്ലീഷ്,
ജി.എഫ്.എച്ച്.എസ്.എസ്.
പടന്നക്കടപ്പുറം, കാസറഗോഡ്

**ജിയോമി എൻ ജോർജ്ജ്**
ചിന്ത മീഡിയ, ഷൊർണ്ണൂർ

## അക്കാദമിക് കോഡിനേറ്റർ

**ഡോ. ശിവകുമാർ കെ.എസ്.**
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT)
വിദ്യാഭവൻ, പൂജപ്പുര, തിരുവനന്തപുരം 695 012

# ഉള്ളടക്കം



ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി
ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു


കണക്കു ചെയ്തു നോക്കാം


ഗവേഷണം


ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത

# ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

## ആമുഖം

**ഭാരതത്തിലെ ജനങ്ങളായ നാം** ഭാരതത്തെ ഒരു [1]**[പരമാധികാര സ്ഥിതിസമത്വ മതേതര ജനാധിപത്യ റിപ്പബ്ലിക്കായി]** സംവിധാനം ചെയ്യുവാനും അതിലെ പൗരന്മാർക്കെല്ലാം:

സാമൂഹ്യവും സാമ്പത്തികവും രാഷ്ട്രീയവും ആയ **നീതിയും;**

ചിന്തയ്ക്കും ആശയപ്രകടനത്തിനും വിശ്വാസത്തിനും മതനിഷ്ഠയ്ക്കും ആരാധനയ്ക്കും ഉള്ള **സ്വാതന്ത്ര്യവും;**

പദവിയിലും അവസരത്തിലും **സമത്വവും;** സംപ്രാപ്തമാക്കുവാനും;

അവർക്കെല്ലാമിടയിൽ

വ്യക്തിയുടെ അന്തസ്സും [2][രാഷ്ട്രത്തിന്റെ ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും] ഉറപ്പുവരുത്തിക്കൊണ്ട് **സാഹോദര്യം** പുലർത്തുവാനും;

സഗൗരവം തീരുമാനിച്ചിരിക്കയാൽ;

**നമ്മുടെ ഭരണഘടനാനിർമ്മാണസഭയിൽ** ഈ 1949 നവംബർ ഇരുപത്താറാം ദിവസം **ഇതിനാൽ ഈ ഭരണഘടനയെ സ്വീകരിക്കുകയും നിയമമാക്കുകയും നമുക്കു തന്നെ പ്രദാനം ചെയ്യുകയും ചെയ്യുന്നു.**

---

1. 1976 - ലെ ഭരണഘടന (നാല്പത്തിരണ്ടാം ഭേദഗതി) ആക്റ്റ് 2-ാം വകുപ്പു പ്രകാരം "പരമാധികാര ജനാധിപത്യ റിപ്പബ്ലിക്" എന്നതിന് പകരം ചേർത്തത് (3.1.1977 മുതൽ പ്രാബല്യം).
2. മേല്പറഞ്ഞ ആക്റ്റ് 2-ാം വകുപ്പു പ്രകാരം "രാഷ്ട്രത്തിന്റെ ഐക്യം" എന്നതിനു പകരം ചേർത്തത് (3.1.1977 മുതൽ പ്രാബല്യം).

# 1

# സമവാക്യജോടികൾ

## മനക്കണക്കും ബീജഗണിതവും

**ആദ്യം തന്നെ ഒരു കണക്കാവാം:**

> ഒരു ചെപ്പിൽ കറുപ്പും വെളുപ്പുമായി 100 മുത്തുകളുണ്ട്. വെളുപ്പിനേക്കാൾ 10 കൂടുതലാണ് കറുപ്പ്. കറുപ്പെത്ര ? വെളുപ്പെത്ര ?

പലതരത്തിൽ ആലോചിക്കാം. കൂടുതലുള്ള 10 കറുത്ത മുത്തുകൾ തൽക്കാലം മാറ്റിവച്ചാൽ, ചെപ്പിൽ 90 മുത്തുകൾ; ഇതിൽ കറുപ്പും വെളുപ്പും തുല്യം; അതായത് 45 വീതം. ഇനി മാറ്റിവച്ച കറുപ്പും കൂടിയെടുത്താൽ കറുപ്പ് 55 ആകും; വെളുപ്പ് 45 തന്നെ.

ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചും ചെയ്യാം (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **സമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠം). കറുത്ത മുത്തുകളുടെ എണ്ണം $x$ എന്നെടുത്താൽ, വെളുത്ത മുത്തുകളുടെ എണ്ണം $x - 10$. എല്ലാംകൂടി 100 ആയതിനാൽ

$$x + (x - 10) = 100$$


ഇതിൽ നിന്ന് $x$ മാത്രം വേർതിരിച്ചെടുക്കാം:

$$2x - 10 = 100$$

$$2x = 110$$

$$x = 55$$

അങ്ങനെ, കറുത്ത മുത്തുകൾ 55 എന്നു കിട്ടും; 10 കുറച്ച്, വെളുത്ത മുത്തുകൾ 45 എന്നും കാണാം.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

> ഒരു മേശയ്ക്കും കസേരയ്ക്കും കൂടി 11000 രൂപയാണ് വില. ഒരു മേശയ്ക്കും നാലു കസേരയ്ക്കും കൂടി 14000 രൂപയും. ഓരോന്നിന്റെയും വിലയെത്രയാണ് ?

ആദ്യം മനസ്സിൽത്തന്നെ ചെയ്യാമോ എന്നു നോക്കാം. ഒരു മേശയും നാലു കസേരയുമായപ്പോൾ, വില 3000 രൂപ കൂടി; ഇതിനു കാരണം, മൂന്നു കസേരകൂടി വാങ്ങുന്നതുകൊണ്ടല്ലേ ? അതായത്, മൂന്നു കസേരയുടെ വിലയാണ് കൂടുതൽ വന്ന 3000 രൂപ. അപ്പോൾ ഒരു കസേരയുടെ വില 1000 രൂപ, മേശയുടെ വില 10000 രൂപ.

ഇങ്ങനെയൊന്നും ആലോചിക്കാതെ, കസേരയുടെ വില $x$ രൂപ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം; ഇനി അല്പമൊന്നാലോചിച്ചാൽ, മേശയുടെ വില $11000 - x$ രൂപ എന്നു കാണാം; ഒരു മേശയും, നാലു കസേരയുമായാൽ, $(11000 - x) + 4x = 11000 + 3x$ രൂപ. ഇത് 14000 രൂപയാണെന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. അതായത്,

$$11000 + 3x = 14000$$

ഇതിൽ നിന്ന് $x$ കണക്കാക്കാം:

$$\begin{aligned} 11000 + 3x &= 14000 \\ 3x &= 3000 \\ x &= 1000 \end{aligned}$$

അങ്ങനെ കസേരയുടെ വില 1000 രൂപ എന്നു കിട്ടും; മേശയുടെ വില $11000 - 1000 = 10000$ രൂപയെന്നും.

മറ്റൊരു രീതിയിൽ കസേരയുടെ വില $x$ രൂപ, മേശയുടെ വില $y$ രൂപ എന്നെടുത്തും തുടങ്ങാം. അപ്പോൾ കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളാക്കാം.

$$\begin{aligned} x + y &= 11000 \\ 4x + y &= 14000 \end{aligned}$$

ഇനി ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിൽ $x$, $y$ എന്നീ സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ബന്ധം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$$y = 11000 - x$$

അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിലെ $y$ യ്ക്കു പകരം $11000 - x$ ഉപയോഗിക്കാം:

$$4x + (11000 - x) = 14000$$

അതായത്

$$11000 + 3x = 14000$$

ഇത് കസേരയുടെ വില മാത്രം $x$ എന്നെടുത്തു കിട്ടിയ പഴയ സമവാക്യം തന്നെയല്ലേ ?

ഇതിൽ നിന്ന് ആദ്യത്തെപ്പോലെ വില രണ്ടും കണക്കാക്കാം.

മറ്റൊരു കണക്ക്;

> രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ വലുത്, ചെറുതിന്റെ 5 മടങ്ങാണ്; വലുതിൽ നിന്നു ചെറുതു കുറച്ചാൽ 32. സംഖ്യകൾ എന്താണ് ?

മനസ്സിൽത്തന്നെ കണക്കു കൂട്ടാമോ ?

വലിയ സംഖ്യ, ചെറിയ സംഖ്യയുടെ അഞ്ചു മടങ്ങാണല്ലോ. അപ്പോൾ, വലിയ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് ചെറുതു കുറയ്ക്കുക എന്നത് മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞുകൂടേ ?

ചെറിയ സംഖ്യയുടെ അഞ്ചു മടങ്ങിൽ നിന്ന് ആ സംഖ്യ തന്നെ കുറയ്ക്കുക; അതായത് സംഖ്യയുടെ നാലു മടങ്ങ്.

ഇങ്ങനെ കുറച്ചുകിട്ടുന്നത് 32 എന്നാണല്ലോ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. അപ്പോൾ ചെറിയ സംഖ്യയുടെ 4 മടങ്ങ് 32. സംഖ്യ 8.

ഇനി വലിയ സംഖ്യ 8 ന്റെ 5 മടങ്ങ്, 40.

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചാലോ ?

ചെറിയ സംഖ്യ $x$ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം. അപ്പോൾ വലിയ സംഖ്യ $5x$

വലുതിൽനിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചാൽ $5x - x = 4x$

കുറച്ചുകിട്ടുന്നത് 32 ആയതിനാൽ $4x = 32$

ഇതിൽനിന്ന് $x = 8$ എന്നു കിട്ടുമല്ലോ.

അതായത്, ചെറിയ സംഖ്യ 8, വലിയ സംഖ്യ $5 \times 8 = 40$

ചെറിയ സംഖ്യ $x$, വലിയ സംഖ്യ $y$ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങിയാലോ ?

പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങൾ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളായി എഴുതാം.

$$y = 5x$$

$$y - x = 32$$

രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിലെ $y$ ക്കു പകരം $5x$ ഉപയോഗിച്ചാലോ ?

$$5x - x = 32$$

അതായത്,

$$4x = 32$$

ഇതിൽ നിന്ന് $x = 8$ എന്നും, തുടർന്ന് $y = 5 \times 8 = 40$ എന്നും കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഒരു കണക്കുകൂടി:

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടി ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ $\frac{1}{2}$ കിട്ടി. ഛേദത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടി ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയത് $\frac{1}{3}$ ഉം. ഏതാണ് ഭിന്നസംഖ്യ ?


ഇത് മനക്കണക്കായി ചെയ്യാനാകുമോ ?

അംശമോ ഛേദമോ $x$ എന്നു മാത്രമെടുത്താലും ഏറെയൊന്നും മുന്നോട്ട് പോകില്ല. അംശം $x$ ഉം ഛേദം $y$ ഉം എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം.

അപ്പോൾ ഭിന്നസംഖ്യ $\frac{x}{y}$.

ഇനി കണക്കിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങളോരോന്നും സമവാക്യങ്ങളാക്കാം:

$$\frac{x+1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{3}$$

ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിന്റെ അർഥം എന്താണ് ?

$\frac{x+1}{y}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യ, $\frac{1}{2}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യയുടെ മറ്റൊരു രൂപമാണ്.

$\frac{1}{2}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യയുടെ പല പല രൂപങ്ങളിലെല്ലാം, ഛേദം അംശത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാകണ്ടേ ?

അപ്പോൾ, ഛേദമായ $y$ അംശമായ $x + 1$ ന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്. അതായത്

$$y = 2(x+1)$$

ഇതുപോലെ, രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യം $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{3}$ എന്നതിൽ നിന്ന്

$$y + 1 = 3x$$

എന്നു കിട്ടും

ആദ്യത്തെ സമവാക്യം പറയുന്നത് $y$ എന്ന സംഖ്യയും $2(x+1)$ എന്ന സംഖ്യയും തുല്യമാണെന്നാണ്; അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യത്തിലെ $y$ ക്കു പകരം $2(x + 1)$ എഴുതാം:

$$2(x+1)+1 = 3x$$

അതായത്,

$$2x+2+1 = 3x$$

$$2x+3 = 3x$$

ഇതിൽ നിന്ന് $x = 3$ എന്നു കാണാം; തുടർന്ന് ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന്

$y = 2 \times (3 + 1) = 2 \times 4 = 8$ എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ $\frac{3}{8}$ ആണ് ഈ കണക്കിലെ ഭിന്നസംഖ്യ.

ഇനി ചുവടെപ്പറയുന്ന കണക്കുകളോരോന്നും മനക്കണക്കായോ, ഒരക്ഷരം മാത്രമുള്ള സമവാക്യമാക്കിയോ, രണ്ടക്ഷരമുള്ള രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളാക്കിയോ ചെയ്യുക :

(1) പ്രിയ 1100 രൂപ കൊടുത്ത് ബാഗും ചെരുപ്പും വാങ്ങി. ബാഗിന് ചെരുപ്പിനേക്കാൾ 300 രൂപ കൂടുതലാണ്. ചെരുപ്പിന്റെ വില എന്താണ് ? ബാഗിന്റേയോ ?

(2) രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക 26 ഉം, വ്യത്യാസം 4 ഉം ആണ്. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

(3) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 40 സെന്റിമീറ്റർ. ഒരു വശം മറ്റേ വശത്തേക്കാൾ 8 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്. വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

(4) മൂന്നര മീറ്റർ നീളമുള്ള കമ്പി രണ്ടായി മുറിച്ച്, ഒരു കഷണം വളച്ചൊരു സമചതുരവും, മറുകഷണം വളച്ചൊരു സമഭുജത്രികോണവുമുണ്ടാക്കണം; രണ്ടിന്റെയും വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമായിരിക്കണം. എങ്ങനെ മുറിക്കണം ?

(5) ഒരു ക്ലാസിൽ ആൺകുട്ടികളെക്കാൾ 4 പെൺകുട്ടികൾ കൂടുതലുണ്ട്. 8 ആൺകുട്ടികൾ മാത്രം വരാതിരുന്ന ഒരു ദിവസം, ആൺകുട്ടികളുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് പെൺകുട്ടികളായി. ക്ലാസിൽ എത്ര പെൺകുട്ടികളും എത്ര ആൺകുട്ടികളുമാണ് ?

(6) ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടി ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ $\frac{1}{3}$ കിട്ടി; ഛേദത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടി ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയത് $\frac{1}{4}$ ഉം. ഏതാണ് ഭിന്നസംഖ്യ ?

(7) ഒരാൾ 100000 രൂപ രണ്ടു പദ്ധതികളിലായി നിക്ഷേപിച്ചു. 7 ശതമാനവും, 6 ശതമാനവുമാണ് പലിശനിരക്ക്. ഒരു വർഷം കഴിഞ്ഞ് രണ്ടു പദ്ധതിയിൽ നിന്നുമായി 6750 രൂപ പലിശ കിട്ടി. ഓരോന്നിലും എത്ര രൂപയാണ് നിക്ഷേപിച്ചത് ?


(8) ഒരു സെക്കന്റിൽ $u$ മീറ്റർ എന്ന വേഗത്തിൽ തുടങ്ങി, ഓരോ സെക്കന്റിലും $a$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കൂടി, നേർവരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ $t$ സെക്കന്റിലെ വേഗം $u + at$ ആണ്. ഇങ്ങനെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഒന്നാമത്തെ സെക്കന്റിലെ വേഗം 5 മീറ്റർ/സെക്കന്റും, അഞ്ചാമത്തെ സെക്കന്റിലെ വേഗം 13 മീറ്റർ/സെക്കന്റുമാണ്. ഓരോ സെക്കന്റിലേയും വേഗം കൂടുന്നതിന്റെ നിരക്ക് എന്താണ് ? യാത്രയുടെ തുടക്കത്തിലെ വേഗം എന്താണ് ?

## രണ്ടു സമവാക്യങ്ങൾ

ഈ കണക്കു നോക്കൂ;

> 2 പേനയ്ക്കും 3 നോട്ടുബുക്കിനും കൂടി 110 രൂപ. 2 പേനയ്ക്കും 5 നോട്ടുബുക്കിനുമാണെങ്കിൽ 170 രൂപ. ഒരു പേനയുടെ വില എത്രയാണ് ? ഒരു നോട്ടുബുക്കിന്റെയോ ?

നേരത്തെ ചെയ്ത കസേര-മേശ കണക്കുപോലെ ആലോചിച്ചുനോക്കൂ: ആദ്യം പറഞ്ഞ 110 രൂപയിൽ നിന്ന്, വില 170 രൂപയായി കൂടിയതെങ്ങനെ ?

2 നോട്ടുബുക്ക് കൂടി വാങ്ങിയതുകൊണ്ടല്ലേ ?

അതായത്, 2 നോട്ടുബുക്കിന്റെ വിലയാണ് കൂടുതലായ 60 രൂപ. അപ്പോൾ ഒരു നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില 30 രൂപ.

ഇനി ആദ്യം പറഞ്ഞതിൽനിന്ന് 2 പേനയുടെ വില കിട്ടാൻ, 110 രൂപയിൽ നിന്ന് മൂന്നു നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില കുറച്ചാൽപ്പോരേ ?

അതായത്, $110 - 90 = 20$ രൂപ. അപ്പോൾ ഒരു പേനയുടെ വില 10 രൂപ.

### വിവരങ്ങളും പരിഹാരങ്ങളും

ഒരു ചെപ്പിൽ കറുപ്പും വെളുപ്പുമായി പത്തു മുത്തുകളുണ്ട് എന്നു മാത്രം പറഞ്ഞാൽ, കറുപ്പെത്ര, വെളുപ്പെത്ര എന്നു കൃത്യമായി പറയാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. കറുപ്പ് ഒന്നും വെളുപ്പ് ഒമ്പതും, കറുപ്പ് രണ്ടും വെളുപ്പ് എട്ടും ഇങ്ങനെ പല തരത്തിലാകാം. വെളുപ്പിനേക്കാൾ രണ്ടെണ്ണം കൂടുതലാണ് കറുപ്പ് എന്നും കൂടി പറഞ്ഞാൽ, കൃത്യമായിത്തന്നെ പറയാം. കറുപ്പ് ആറ്, വെളുപ്പ് നാല്.

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് പറഞ്ഞാൽ, $x + y = 10$ എന്ന ഒറ്റ സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ $x$, $y$ അനേകമുണ്ടാകും. എന്നാൽ

$$x + y = 10$$

$$x - y = 2$$

എന്ന രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളും അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ ഒരു ജോടിയേ ഉള്ളൂ.

$$x = 6, \quad y = 4$$

ഇനി, പേനയുടെ വില $x$ രൂപ, നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില $y$ രൂപ എന്നെടുത്ത്, കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞതെല്ലാം ബീജഗണിതസമവാക്യങ്ങളാക്കി, ഇതു ചെയ്യുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം:

| | |
|---|---|
| 2 പേനയുടെയും 3 നോട്ടുബുക്കിന്റെയും വില 110 രൂപ | $2x + 3y = 110$ |
| 2 പേനയുടെയും 5 നോട്ടുബുക്കിന്റെയും വില 170 രൂപ | $2x + 5y = 170$ |
| കൂടുതലായത് 2 നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില | $(2x + 5y) - (2x + 3y) = 2y$ |
| കൂടുതലായത് 60 രൂപ | $170 - 110 = 60$ |
| 2 നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില 60 രൂപ | $2y = 60$ |
| ഒരു നോട്ടുബുക്കിന്റെ വില 30 രൂപ | $y = 30$ |
| 2 പേനയുടെ വില, 110 രൂപയിൽ നിന്ന് 90 രൂപ കുറച്ചത് | $2x = 110 - (3 \times 30) = 20$ |
| ഒരു പേനയുടെ വില 10 രൂപ | $x = 10$ |

അല്പം വ്യത്യസ്തമായ ഒരു കണക്കു നോക്കൂ:

3 പെൻസിലിനും 4 പേനയ്ക്കും കൂടി 66 രൂപയാണ് വില. 6 പെൻസിലിനും 3 പേനയ്ക്കുമാണെങ്കിൽ 72 രൂപയും. പെൻസിലിന്റേയും പേനയുടേയും വില എത്രയാണ് ?

ആദ്യം മനസ്സിൽ ചെയ്യാമോ എന്നു നോക്കാം. ഇവിടെ രണ്ടാമത്തെ വില കൂടാൻ കാരണം, ആദ്യത്തെ കണക്കുപോലെ, ഒരു സാധനം മാത്രം കൂടിയതു കൊണ്ടല്ല. അപ്പോൾ അതുപോലെ അത്ര എളുപ്പമല്ല ഇതിലെ കാര്യങ്ങൾ.

രണ്ടു വിവരങ്ങളിലും പെൻസിലോ, പേനയോ ഒരേ എണ്ണമായിരുന്നെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ കണക്കുപോലെ ചെയ്യാമായിരുന്നു. അങ്ങനെയാക്കിയാലോ ?

വിലകൾ ഇങ്ങനെ എഴുതിവയ്ക്കാം:

| പെൻസിൽ | പേന | വില |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 66 |
| 6 | 3 | 72 |


ആദ്യം പറഞ്ഞതിൽ 3 പെൻസിലും രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതിൽ 6 പെൻസിലുമാണ്. ആദ്യത്തേതിലും 6 പെൻസിൽതന്നെ ആക്കാൻ പറ്റുമോ ?

6 പെൻസിലും, 8 പേനയുമായാലോ ?

| | പെൻസിൽ | പേന | വില |
|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 66 |
| ×2 | 6 | 3 | 72 |
| | 6 | 8 | 132 |

മൂന്നാമത്തെ വരിയിൽ രണ്ടാമത്തെ വരിയേക്കാൾ വില എത്ര കൂടി ?

എന്തുകൊണ്ട് ?

60 രൂപ കൂടിയത്, 5 പേനയുടെ മാത്രം വിലയല്ലേ ?

അപ്പോൾ, ഒരു പേനയുടെ വില 12 രൂപ. ഇനി ആദ്യത്തെ വരിയിൽ നിന്ന്, 3 പെൻസിലിന്റെ വില 66 – 48 = 18 രൂപ. ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില 6 രൂപ എന്നിങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

ഇനി ഈ ചിന്തകളെല്ലാം ബീജഗണിതത്തിലെഴുതിനോക്കാം. ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില $x$ രൂപയെന്നും, ഒരു പേനയുടെ വില $y$ രൂപയെന്നുമെടുത്താൽ, കണക്കിലെ വിവരങ്ങളും അതുപയോഗിച്ച് വിലകൾ കണ്ടുപിടിച്ച രീതിയുമെല്ലാം ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

3 പെൻസിലിന്റെയും 4 പേനയുടെയും വില 66 രൂപ

$$3x + 4y = 66$$

6 പെൻസിലിന്റെയും 3 പേനയുടെയും വില 72 രൂപ

$$6x + 3y = 72$$

6 പെൻസിലിന്റെയും 8 പേനയുടെയും വില 132 രൂപ

$$6x + 8y = 2(3x + 4y) = 132$$

കൂടുതലായത് 5 പേനയുടെ വില

$$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 5y$$

കൂടുതലായത് 60 രൂപ

$$132 - 72 = 60$$

5 പേനയുടെ വില 60 രൂപ

$$5y = 60$$

ഒരു പേനയുടെ വില 12 രൂപ

$$y = 12$$

3 പെൻസിലിന്റെ വില, 66 രൂപയിൽ നിന്ന് 4 പേനയുടെ വില കുറച്ചത്

$$3x = 66 - (4 \times 12) = 18$$

ഒരു പെൻസിലിന്റെ വില, 6 രൂപ

$$x = 6$$

ഈ ചെയ്തതെല്ലാം ചുരുക്കിയെഴുതാം. ആദ്യം കണക്കിൽ നിന്ന് കിട്ടിയ വിവരങ്ങൾ സമവാക്യങ്ങളായി എഴുതാം. അവയെ 1-ാം സമവാക്യമെന്നും, 2-ാം സമവാക്യമെന്നും വിളിക്കാം:

$$3x + 4y = 66 \quad (1)$$

$$6x + 3y = 72 \quad (2)$$

## വ്യത്യസ്തമല്ലാത്ത വിവരങ്ങൾ

രാമു 7 രൂപ കൊടുത്ത് ഒരു പെൻസിലും ഒരു പേനയും വാങ്ങി. അജു 4 പെൻസിലും 4 പേനയും വാങ്ങി; 28 രൂപയായി. ഈ വിവരങ്ങൾ വച്ചുകൊണ്ട് ഓരോന്നിന്റേയും വില കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഇവർ ശ്രമിച്ചു. പെൻസിലിന്റെ വില $x$ എന്നെടുത്ത് ആദ്യം പറഞ്ഞതുപയോഗിച്ച് പേനയുടെ വില $7 - x$ എന്നാക്കി.

രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതുപയോഗിച്ച്

$$4x + 4(7 - x) = 28$$

എന്നെഴുതി. ഇതു ലഘൂകരിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയതോ ? $28 = 28$

ഇവിടെ, പെൻസിലിന്റെ വില $x$, പേനയുടെ വില $y$ എന്നെടുത്തിരുന്നെങ്കിലോ ?

$$x + y = 7$$

$$4x + 4y = 28$$

രണ്ടാമതെഴുതിയ സമവാക്യത്തിനെ

$$4(x + y) = 28$$

എന്നാക്കിയാൽ വീണ്ടും

$$x + y = 7$$

എന്നു തന്നെയല്ലേ കിട്ടുന്നത് ?

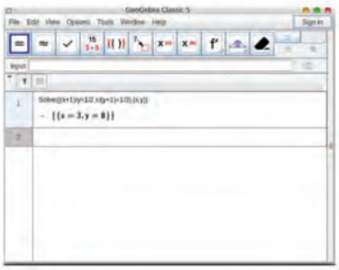
അതായത്, ഈ കണക്കിൽ രണ്ടായിപ്പറഞ്ഞുവെങ്കിലും, വിലകൾ തമ്മിലുള്ള ഒരു ബന്ധം മാത്രമേ യഥാർത്ഥത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ളൂ. അതു മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് വിലകൾ വെവ്വേറെ കണ്ടുപിടിക്കാനും കഴിയില്ല.

## കമ്പ്യൂട്ടർ ബീജഗണിതം

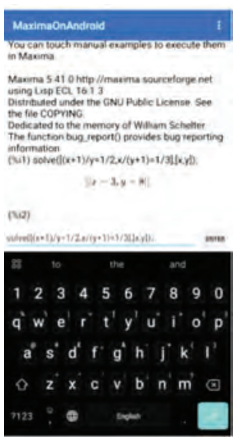
സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള സങ്കീർണ്ണമായ കണക്കുകൂട്ടലുകൾ മാത്രമല്ല, ബീജഗണിത പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കാനും കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിക്കാം. ഇതിനായി തയ്യാറാക്കപ്പെട്ട സോഫ്റ്റ്‌വെയറുകൾ പൊതുവെ Computer Algebra System (CAS) അല്ലെങ്കിൽ Symbolic Algebra System എന്ന പേരിലാണ് അറിയപ്പെടുന്നത്.

SageMath, Maxima എന്നിവയാണ് ഇത്തരം പ്രമുഖമായ സ്വതന്ത്ര സോഫ്റ്റ്‌വെയറുകൾ.

GeoGebra യ്ക്കും ബീജഗണിതക്രിയകൾ ചെയ്യാൻ കഴിയും.



ആൻഡ്രോയ്ഡ് ഫോണുകളിലും GeoGebra യും Maxima യും ഉപയോഗിക്കാം.




ഒരു ജോടി സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കാണാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ CAS ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണത്തിന് $5x + 2y = 20$, $2x + 3y = 19$ എന്നീ സമവാക്യജോടികളുടെ പരിഹാരം കാണാൻ

CAS തുറന്ന് (view → CAS)

Solve ({$5x + 2y = 20$, $2x + 3y = 19$}, {$x, y$}) എന്ന് നൽകിയാൽ മതി.

$3x + 4y$ എന്ന സംഖ്യ 66 ആണെന്നാണ് 1-ാം സമവാക്യം പറയുന്നത്; അപ്പോൾ അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് 132.

$$6x + 8y = 132 \qquad (3)$$

ഇനി 2-ാം സമവാക്യവും, 3-ാം സമവാക്യവും ഉപയോഗിച്ച്, ഇങ്ങനെയെഴുതാം.

$$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 132 - 72$$

ഇത് ലഘൂകരിച്ച്

$$5y = 60 \text{ എന്നും}$$

അതിൽ നിന്ന് $y = 12$ എന്നും കിട്ടും.

തുടർന്ന് 1-ാം സമവാക്യത്തിൽ $y$ ആയി 12 എടുത്താൽ $x$ ഉം കണക്കാക്കാം.

$$3x + (4 \times 12) = 66$$
$$3x = 66 - 48 = 18$$
$$x = 6$$

(1) നാല് പേനയ്ക്കും, മൂന്ന് പെൻസിലിനും കൂടി 66 രൂപയാണ് വില. ഏഴ് പേനയ്ക്കും, മൂന്ന് പെൻസിലിനും കൂടി 111 രൂപ. ഒരു പേനയുടെ വില എത്രയാണ് ? പെൻസിലിന്റെ വിലയോ ?

(2) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 26 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഈ ചതുരത്തിന്റെ നീളം രണ്ട് മടങ്ങും വീതി മൂന്ന് മടങ്ങുമാക്കി മറ്റൊരു ചതുരം വരച്ചപ്പോൾ ചുറ്റളവ് 62 സെന്റിമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും എത്രയാണ് ?

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം:

ചെറിയ പാത്രത്തിൽ അഞ്ചു തവണയും, വലിയ പാത്രത്തിൽ രണ്ടു തവണയും വെള്ളം നിറച്ച് ഒരു തൊട്ടിയിൽ ഒഴിച്ചപ്പോൾ 20 ലിറ്റർ; ചെറിയ പാത്രത്തിൽ രണ്ടു തവണയും, വലിയ പാത്രത്തിൽ മൂന്നു തവണയും നിറച്ചൊഴിച്ചപ്പോഴോ, 19 ലിറ്ററും. ഓരോ പാത്രത്തിലും എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും ?

ചെറിയ പാത്രത്തിൽ $x$ ലിറ്ററും, വലിയ പാത്രത്തിൽ $y$ ലിറ്ററും കൊള്ളും എന്നെടുത്ത് കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞിട്ടുള്ള കാര്യങ്ങൾ സമവാക്യങ്ങൾ ആക്കാം:

$$5x + 2y = 20 \qquad (1)$$

$$2x + 3y = 19 \qquad (2)$$

ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ ചെയ്തതുപോലെ, ഇതിലെ (1) ലും $2x$ തന്നെയാക്കണമെങ്കിൽ, $\frac{2}{5}$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കണം; മറിച്ച്, (2) ൽ $5x$ ആക്കണമെങ്കിൽ, $\frac{5}{2}$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കണം. ഇങ്ങനെ ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ, ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാതെ ഇതു ചെയ്യാനെന്തെങ്കിലും മാർഗമുണ്ടോ? സമവാക്യങ്ങളെ എന്തുകൊണ്ടും ഗുണിക്കാമല്ലോ. 1-ാം സമവാക്യത്തെ ഒരു സംഖ്യകൊണ്ടും 2-ാം സമവാക്യത്തെ മറ്റൊരു സംഖ്യകൊണ്ടും ഗുണിച്ച്, ഇവയിലെ $x$ ന്റെ ഗുണിതം ഒരേ സംഖ്യയാക്കാമോ ?

$$(1) \times 2 : \quad 10x + 4y = 40 \qquad (3)$$

$$(2) \times 5 : \quad 10x + 15y = 95 \qquad (4)$$

ഇനി (4) ൽ നിന്ന് (3) കുറച്ച്

$$11y = 55$$

എന്നും, അതിൽനിന്ന്

$y = 5$ എന്നും കാണാം.

തുടർന്ന്, ഇത് (1) ൽ ഉപയോഗിച്ച് $x$ ഉം കിട്ടും:

$$5x + 10 = 20$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

അങ്ങനെ ചെറിയ പാത്രത്തിൽ 2 ലിറ്ററും, വലിയ പാത്രത്തിൽ 5 ലിറ്ററും കൊള്ളുമെന്നു കണക്കാക്കാം.

## സംഖ്യകൾ മാത്രം

പെൻസിൽ-പേന കണക്ക് $x$, $y$ ഉപയോഗിക്കാതെ സംഖ്യകൾ മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് ആലോചിച്ചില്ലേ ? മറ്റു കണക്കുകളും ഇതുപോലെ ചെയ്യാം.

ഉദാഹരണമായി, പാത്രക്കണക്ക് ഇങ്ങനെ എഴുതി തുടങ്ങാം.

| ചെറിയ പാത്രം | വലിയ പാത്രം | വെള്ളം |
|---|---|---|
| 5 | 2 | 20 |
| 2 | 3 | 19 |

തുടർന്നുള്ള ക്രിയകൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 5 | 2 | 20 | |
| ×2 | 2 | 3 | 19 | |
| | 10 | 4 | 40 | ×5 |
| | 10 | 15 | 95 | |

ഇനി അവസാനത്തെ രണ്ടുവരിമാത്രം എടുത്ത് ഇങ്ങനെ തുടരാം:

| | | | |
|---|---|---|---|
| − | 10 | 4 | 40 |
| | 10 | 15 | 95 |
| ÷ 11 | 0 | 11 | 55 |
| | 0 | 1 | 5 |

അപ്പോൾ വലിയ പാത്രത്തിൽ 5 ലിറ്റർ. ഇനി ചെറിയ പാത്രത്തിൽ 2 ലിറ്റർ എന്ന് മനസ്സിൽ ത്തന്നെ കണക്കു കൂട്ടാമല്ലോ. ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു തുടങ്ങുന്നതിനുമുമ്പ് പ്രാചീന ചൈനയിലെ ഗണിതകാരന്മാർ ഇത്തരം കണക്കുകൾ ചെയ്തിരുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്.

(1) രണ്ടു കിലോഗ്രാം മധുരനാരങ്ങയ്ക്കും മൂന്നു കിലോഗ്രാം ആപ്പിളിനും കൂടി 520 രൂപ; മൂന്നു കിലോഗ്രാം മധുരനാരങ്ങയ്ക്കും രണ്ടു കിലോഗ്രാം ആപ്പിളിനും കൂടി 480 രൂപ. ഒരു കിലോഗ്രാം മധുരനാരങ്ങയുടെ വില എത്രയാണ് ? ആപ്പിളിന്റെയോ ?


(2) 1 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പി രണ്ടായി മുറിച്ച് ഒരു കഷണം വളച്ച് ഒരു സമചതുരവും മറ്റേ കഷണം വളച്ച് ഒരു സമഭുജത്രികോണവും ഉണ്ടാക്കുന്നു. സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങും സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങും കൂട്ടിയപ്പോൾ 71 സെന്റിമീറ്റർ ആണ് കിട്ടിയത്. എത്ര നീളത്തിലാണ് കമ്പി മുറിച്ചത് ?

(3) നാലു വർഷം മുൻപ് റഹിമിന്റെ പ്രായം, രാമുവിന്റെ പ്രായത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങായിരുന്നു. രണ്ടു വർഷം കഴിയുമ്പോൾ ഇത് രണ്ടു മടങ്ങാകും. അവരുടെ ഇപ്പോഴത്തെ പ്രായം എത്രയാണ് ?

മറ്റൊരു കണക്ക് നോക്കാം:

ഒരു സംഖ്യയുടെ നാല് മടങ്ങും മറ്റൊരു സംഖ്യയുടെ മൂന്ന് മടങ്ങും കൂട്ടിയപ്പോൾ 43 കിട്ടി. ആദ്യത്തെ സംഖ്യയുടെ മൂന്ന് മടങ്ങിൽ നിന്ന് രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയുടെ രണ്ട് മടങ്ങ് കുറച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയത് 11. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

ഒന്നാമത്തെ സംഖ്യ $x$ എന്നും രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ $y$ എന്നും എടുത്ത് തുടങ്ങാം.

കണക്കിൽ പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങളെ സമവാക്യങ്ങളാക്കിയാൽ

$$4x + 3y = 43 \qquad (1)$$
$$3x - 2y = 11 \qquad (2)$$

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ സമവാക്യം (1) നെ 3 കൊണ്ടും (2) നെ 4 കൊണ്ടും ഗുണിച്ച് എഴുതിയാൽ,

$$(1) \times 3 : \; 12x + 9y = 129 \qquad (3)$$
$$(2) \times 4 : \; 12x - 8y = 44 \qquad (4)$$

ഇനി (3) ൽ നിന്ന് (4) കുറച്ച്,

$$\begin{aligned} 12x + 9y - (12x - 8y) &= 129 - 44 \\ 12x + 9y - 12x + 8y &= 85 \\ 17y &= 85 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

എന്നും കിട്ടും.

തുടർന്ന് $y = 5$ എന്നത് (1) ൽ ഉപയോഗിച്ച് $x$ ഉം കണക്കാക്കാം.

$$\begin{aligned} 4x + 15 &= 43 \\ 4x &= 28 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

അങ്ങനെ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 7 എന്നും രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ 5 എന്നും കിട്ടുന്നു.

ഒരു കണക്ക് കൂടി നോക്കാം

രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ തുക 28 ഉം, വ്യത്യാസം 12 ഉം ആണ്. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

ഇത്തരത്തിലുള്ള മറ്റൊരു കണക്ക് മുൻപ് ചെയ്തതോർമ്മയില്ലേ ? വലിയ സംഖ്യ $x$ എന്നും ചെറിയ സംഖ്യ $y$ എന്നും എടുത്ത് കണക്കിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളായി എഴുതി നോക്കാം.

സംഖ്യകളുടെ തുക $\quad x + y = 28$

വ്യത്യാസം $\quad x - y = 12$

ഈ രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളുടെ തുക

$$(x + y) + (x - y) = 28 + 12$$

അതായത്,

$$2x = 40$$

$$x = 20$$

ഇനി, ഇവയുടെ വ്യത്യാസം

$$(x + y) - (x - y) = 28 - 12$$

$$x + y - x + y = 16$$

അതായത്,

$$2y = 16$$

$$y = 8$$

അപ്പോൾ വലിയ സംഖ്യ 20 ഉം, ചെറിയ സംഖ്യ 8 ഉം.

## കണക്കും കാര്യവും

10 മീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം. നീളം, വീതിയേക്കാൾ 5.5 മീറ്റർ കൂടുതലാകണം. നീളവും വീതിയും എത്രയാകണം ?

വീതി $x$ എന്നെടുത്താൽ, നീളം $x + 5.5$ ആകണം. ചുറ്റളവ് 10 മീറ്ററാകണം എന്നതിനാൽ

$$x + (x + 5.5) = \frac{10}{2} = 5$$

അതായത്,

$$2x + 5.5 = 5$$

അഥവാ

$$2x = -0.5$$

ഇത് ശരിയാകില്ലല്ലോ. ചതുരത്തിന്റെ അളവുകളെങ്ങനെ ന്യൂനസംഖ്യകളാകും ?

ഇതിന്റെ അർഥം, ഈ നിബന്ധനകൾ രണ്ടും ശരിയാകുന്ന തരത്തിൽ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല എന്നതാണ്. ഈ കണക്കിൽ വീതി $x$, നീളം $y$ എന്നെടുത്തിരുന്നെങ്കിൽ, തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന് കിട്ടുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ

$$x + y = 5$$

$$y - x = 5.5$$

ഇത് രണ്ടും ശരിയാകുന്ന അധിസംഖ്യകൾ ഇല്ലെന്ന് പെട്ടെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം (രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ തുക, അവയുടെ വ്യത്യാസത്തെക്കാൾ ചെറുതാകില്ലല്ലോ).

ഈ കണക്കിൽനിന്ന് മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി മനസ്സിലാക്കാം.

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും കൂട്ടിയാൽ വലിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങു കിട്ടും.

$$(x + y) + (x - y) = 2x$$

തുകയിൽ നിന്ന് വ്യത്യാസം കുറച്ചാൽ ചെറിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങു കിട്ടും.

$$(x + y) - (x - y) = 2y$$




ST-361-2-MATHS (M)-9-VOL-1

(1) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിലെ ചെറിയ കോണുകളുടെ വ്യത്യാസം $20°$. അതിന്റെ കോണുകൾ മൂന്നും കണക്കാക്കുക.

(2) രണ്ട് സംഖ്യകളിൽ വലുതിനെ ചെറുത് കൊണ്ട് ഹരിച്ചപ്പോൾ ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും 2 കിട്ടി. ചെറുതിന്റെ 5 മടങ്ങിനെ വലിയ സംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിച്ചപ്പോഴും ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും 2 തന്നെ. സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുക 11 ആണ്. ഈ സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങൾ പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യയേക്കാൾ 27 കൂടുതലാണ്. ഏതാണ് സംഖ്യ ?

(4) പതിനേഴ് ട്രോഫികൾക്കും, പതിനാറ് മെഡലുകൾക്കും കൂടി 2180 രൂപയാണ് വില. പതിനാറ് ട്രോഫികൾക്കും, പതിനേഴ് മെഡലുകൾക്കും കൂടി 2110 രൂപയാണ് വില. ഒരു ട്രോഫിയുടെ വില എന്താണ് ? ഒരു മെഡലിന്റെ വില എന്താണ് ?

(5) $u$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ തുടങ്ങി, ഓരോ സെക്കന്റിലും $a$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കൂടി, നേർവരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു, ഇങ്ങനെ $t$ സെക്കന്റിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം $ut + \frac{1}{2}at^2$ ആണ്. ഒരു വസ്തു 2 സെക്കന്റിൽ 10 മീറ്ററും, 4 സെക്കന്റിൽ 28 മീറ്ററും സഞ്ചരിക്കുന്നു. യാത്രയുടെ തുടക്കത്തിൽ വേഗം എന്തായിരുന്നു ? ഓരോ സെക്കന്റിലും വേഗം കൂടുന്നതിന്റെ നിരക്കെന്താണ് ?

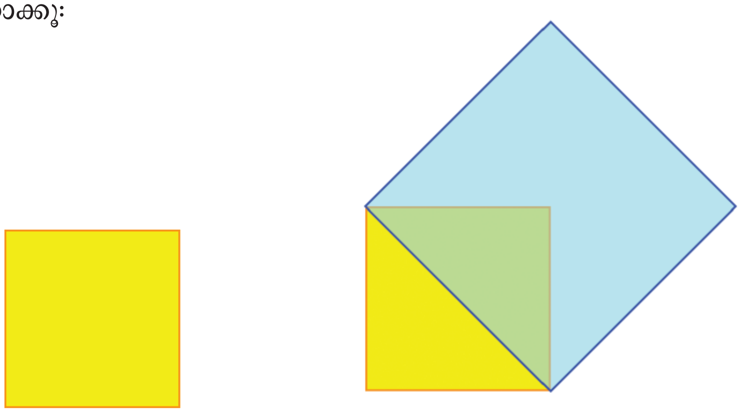
(6) ഒരു രണ്ടക്ക സംഖ്യ, അതിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുകയുടെ ആറ് മടങ്ങാണ്. അക്കങ്ങൾ പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന രണ്ടക്ക സംഖ്യ അക്കങ്ങളുടെ തുകയുടെ 4 മടങ്ങിനേക്കാൾ 9 കൂടുതലാണ്. രണ്ടക്കസംഖ്യയേതാണ് ?

(7) രണ്ട് സംഖ്യകളിൽ, ആദ്യ സംഖ്യയോട് 11 കൂട്ടിയപ്പോൾ രണ്ടാമത്തേതിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങും, രണ്ടാമത്തേതിനോട് 20 കൂട്ടിയപ്പോൾ ഒന്നാമത്തേതിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങും കിട്ടി. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

# 2 പുതിയ സംഖ്യകൾ

## നീളങ്ങളും സംഖ്യകളും

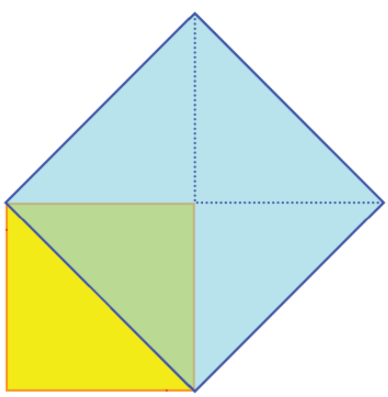
ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



ഒരു സമചതുരവും, അതിന്റെ വികർണ്ണത്തിൽ മറ്റൊരു സമചതുരവും.

വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ്?

വികർണ്ണം ചെറിയ സമചതുരത്തെ ഒരേ വലുപ്പമുള്ള രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളാക്കുന്നുണ്ടല്ലോ. ഇത്തരം എത്ര മട്ടത്രികോണങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് വലിയ സമചതുരം?



അപ്പോൾ ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 1 മീറ്ററാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ പരപ്പളവ് 1 ചതുരശ്രമീറ്റർ, വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 2 ചതുരശ്രമീറ്റർ.

വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

അത് ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണം ആയതിനാൽ 1 മീറ്ററിനേക്കാൾ കൂടുതലാണ്.

രണ്ടു വശങ്ങൾ 1 മീറ്റർ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം വശം ആയതിനാൽ 2 മീറ്ററിനേക്കാൾ കുറവുമാണ്.

ഒന്നിനും രണ്ടിനും ഇടയ്ക്കുള്ള ഭിന്നസംഖ്യ ആകാം; പക്ഷേ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് രണ്ടു ചതുരശ്രമീറ്ററായതിനാൽ, വശത്തിന്റെ നീളമായ ഈ സംഖ്യയുടെ വർഗം രണ്ടാകണം.

ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗമാണ് രണ്ട്?

ഒന്നരയാകുമോ?

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

അത് കൂടുതലാണ്; ഒന്നേകാൽ ആയാലോ?

$$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 1\frac{9}{16}$$

അത് കുറഞ്ഞും പോയി.

ഒന്നും മൂന്നിലൊന്നും ആയാലോ?

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = 1\frac{7}{9}$$

അതും കുറവ് തന്നെ; പക്ഷേ ഒന്നേകാലിനേക്കാൾ മെച്ചമാണ്.

ഇങ്ങനെ പല ഭിന്നസംഖ്യകൾ പരിശോധിച്ചാലും, വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നല്ലാതെ കൃത്യം 2 കിട്ടില്ല. ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച്, ഇതു സാധിക്കില്ലെന്നു തെളിയിക്കുകയും ചെയ്യാം (പാഠത്തിന്റെ അവസാനം ചേർത്തിരിക്കുന്ന അനുബന്ധം നോക്കുക).

അതായത്,

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല.

അപ്പോൾ നമ്മുടെ ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നം എന്തായി?

വശങ്ങളെല്ലാം 1 മീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം ഒരു മീറ്ററിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാമടങ്ങാണെങ്കിൽ, ആ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം 2 ആകണം (വശങ്ങളുടെ നീളം ഭിന്നസംഖ്യയായാലും പരപ്പളവ് അതിന്റെ വർഗമാണെന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ).

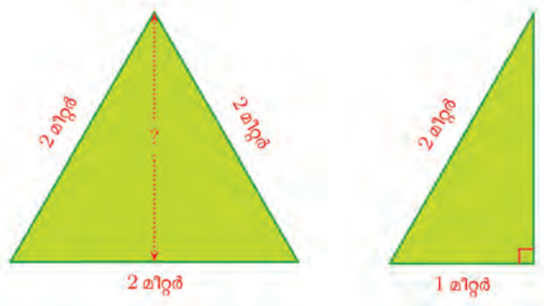
പക്ഷേ, വർഗം 2 ആയ ഭിന്നസംഖ്യ ഇല്ല.

അതായത്,

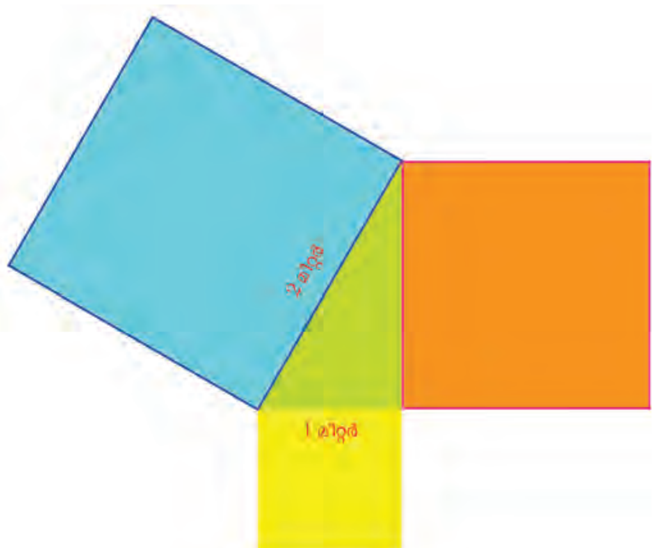
വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 1 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

ഇങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആയി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങൾ പലതുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളെല്ലാം 2 മീറ്റർ ആയ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണെന്നു നോക്കാം:

ത്രികോണത്തെ ഉയരത്തിലൂടെ മുറിച്ച് ഒരു ഭാഗം എടുത്താൽ ഒരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടുമല്ലോ:




ഇതിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശം കണക്കാക്കാൻ, വശങ്ങളിലെല്ലാം സമചതുരങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കാം:




പൈഥാഗറസ് തത്വമനുസരിച്ച് ഓറഞ്ച് സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $4 - 1 = 3$ ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്.

അപ്പോൾ അതിന്റെ നീളം 1 മീറ്ററിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാമടങ്ങാണെങ്കിൽ, ആ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം 3 ആകണം.

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ലെന്നു കണ്ടതുപോലെത്തന്നെ, ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 3 അല്ലെന്നും കാണാം. അതായത്, ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയായും പറയാൻ കഴിയില്ല.


മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം: വ്യാപ്തം 2 ഘനസെന്റിമീറ്ററായ ഒരു സമചതുരക്കട്ട ഉണ്ടാക്കണമെന്നു കരുതുക. ഇതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എന്തായിരിക്കണം ? ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല എന്നതുപോലെതന്നെ, ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും മൂന്നാംകൃതിയും 2 അല്ല. അപ്പോൾ ഈ സമചതുരക്കട്ടയുടെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

ഇങ്ങനെ പല സന്ദർഭങ്ങളിലും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങൾ ആവശ്യമായി വരും.

### സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകുന്നത്

എന്തിനേയും അളന്ന് സംഖ്യയാക്കുക; ഈ സംഖ്യകളിലൂടെയും അവയുടെ പരസ്പരബന്ധങ്ങളിലൂടെയും ലോകത്തെ മനസ്സിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കുക. ഇതാണ് ഗണിതത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാന ധർമ്മം.

അളക്കപ്പെടുന്നതിന്റെ സ്വഭാവം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വ്യത്യസ്ത തരത്തിലുള്ള സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കേണ്ടി വരും. പ്രകൃതിയിൽ നിന്ന് നേരിട്ട് കിട്ടുന്നതു മാത്രം ഭക്ഷിച്ചു നടന്നിരുന്ന കാലത്ത് മനുഷ്യന് കൂട്ടത്തിലെ ആളുകളുടെ എണ്ണം, വളർത്തുന്ന കന്നുകാലികളുടെ എണ്ണം തുടങ്ങിയവ മാത്രമേ ആവശ്യമായിരുന്നുള്ളൂ. അക്കാലത്ത് എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ മാത്രം മതിയായിരുന്നു.

ബി.സി.ഇ. അയ്യായിരത്തോടടുപ്പിച്ച്, നദീതീരങ്ങളിൽ സ്ഥിരമായി താമസിച്ചുകൊണ്ട് വ്യാപകമായ കൃഷി തുടങ്ങിയതോടെ, കൃഷിയിടങ്ങൾ തിട്ടപ്പെടുത്താനും, പാർപ്പിടങ്ങൾ പണിയാനുമെല്ലാം പലതരത്തിലുള്ള നീളവും പരപ്പുമെല്ലാം അളക്കേണ്ടതായി വന്നു. ഇക്കാലത്താണ് ഭിന്നസംഖ്യകൾ എന്ന സങ്കേതം ഉണ്ടായത്. പങ്കുവയ്ക്കുമ്പോഴും ഭിന്നസംഖ്യകൾ ആവശ്യമുണ്ടല്ലോ. എല്ലാ അളവുകളേയും ഭിന്നസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയില്ല എന്ന തിരിച്ചറിവിൽ നിന്നാണ് പുതിയതരം സംഖ്യകൾ ആവശ്യമായി വന്നത്.

പിൽക്കാലത്ത് ഭൗതികമായ ആവശ്യങ്ങൾക്കല്ലാതെ ഗണിതത്തിന്റെ തന്നെ സൗകര്യങ്ങൾക്കായും പുതിയതരം സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കപ്പെട്ടു. ന്യൂനസംഖ്യകൾ, സങ്കീർണ്ണസംഖ്യകൾ (Complex numbers) എന്നിവ ഇങ്ങനെ ഉണ്ടായവയാണ്. ഇത്തരം സംഖ്യകൾ ഭൗതികശാസ്ത്രം പോലുള്ള മറ്റു ശാസ്ത്രങ്ങളിൽ വളരെയധികം ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നുണ്ട് എന്നത് മറ്റൊരു കാര്യം.

## അളവുകളും സംഖ്യകളും

എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ പുതിയ സംഖ്യകളുണ്ടാക്കണം. നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ ഉദാഹരണം തന്നെയെടുക്കുക. വശങ്ങളുടെ നീളം 1 മീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാം ?

ഈ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയും ചോദിക്കാം: പരപ്പളവ് 2 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാം ?

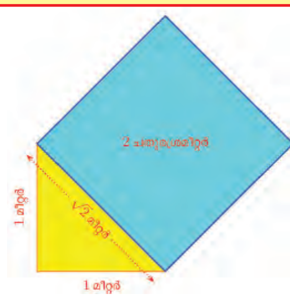
വശം എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയ സമചതുരമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നീളം പരപ്പളവിന്റെ വർഗമൂലമാണല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി, പരപ്പളവ് 4 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{4} = 2$ മീറ്റർ;

പരപ്പളവ് $2\frac{1}{4}$ ചതുരശ്രമീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}$ മീറ്റർ

ഇതുപോലെ,

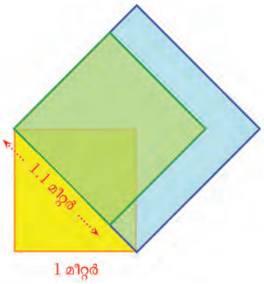
**പരപ്പളവ് 2 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2}$ മീറ്റർ എന്നെഴുതാം.**

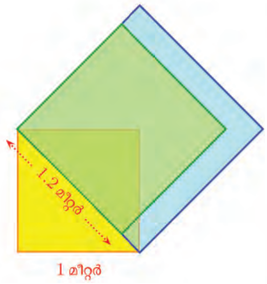


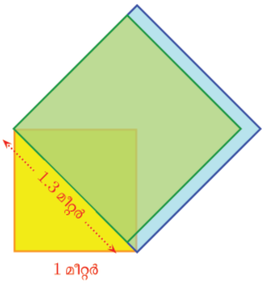

നീളത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഒരു ചിഹ്നം കൊടുത്തതുകൊണ്ടായില്ലല്ലോ; അതിന്റെ വലുപ്പം മനസ്സിലാക്കാൻ, അറിയാവുന്ന നീളങ്ങളുമായി ഒത്തുനോക്കണ്ടേ ?

അതിനുള്ള വഴി, ഈ നീളത്തോട് അടുത്തടുത്തുവരുന്ന, ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയുന്ന നീളങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക എന്നതാണ്. ഇത്തരം നീളങ്ങൾ വികർണ്ണത്തിൽത്തന്നെ എടുത്താൽ ഇവ വശങ്ങളായ സമചതുരങ്ങൾ, വികർണ്ണം വശമായ സമചതുരത്തോട് അടുക്കുമല്ലോ:

ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്തിയത് നോക്കൂ.




സംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറഞ്ഞാൽ, ഈ വരകളുടെ നീളങ്ങളായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരും. കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച് ഈ വർഗങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാം:

$$1.1^2 = 1.21$$

$$1.2^2 = 1.44$$

$$1.3^2 = 1.69$$

$$1.4^2 = 1.96$$

$$\mathbf{1.5^2 = 2.25}$$

ഇവിടെ കണ്ടത് എന്താണ്?

$$1.4^2 < 2 < 1.5^2$$

വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്ത് വരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി കുറേക്കൂടി വ്യക്തമാക്കാം.

എണ്ണൽസംഖ്യകൾ മാത്രമെടുത്താൽ

$$1^2 < 2 < 2^2$$

പത്തിലൊന്നുകളും കൂടി എടുത്താലോ?

## തകരുന്ന വിശ്വാസങ്ങൾ

എല്ലാ അളവുകളേയും എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് താരതമ്യം ചെയ്യാം എന്നായിരുന്നു ബി.സി.ഇ. ആറാം നൂറ്റാണ്ടിലെ പൈഥാഗറസിന്റേയും ശിഷ്യരുടേയും വിശ്വാസം. കുറേക്കൂടി കൃത്യമായിപ്പറഞ്ഞാൽ, ഏതു രണ്ട് അളവുകളേയും എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ അംശബന്ധം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം എന്നതാണ് ഈ വിശ്വാസം. എന്നാൽ, ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റേയും വശത്തിന്റേയും നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് എഴുതാൻ സാധ്യമല്ല. ഈ അംശബന്ധം എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് $a : b$ എന്നെഴുതണമെങ്കിൽ, വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം വശത്തിന്റെ $\frac{a}{b}$ മടങ്ങാകണം. അങ്ങനെയെങ്കിൽ വികർണ്ണത്തിന്റെ വർഗം വശത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ മടങ്ങാകണം. വികർണ്ണത്തിലെ സമചതുരം, വശത്തിലെ സമചതുരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായതിനാൽ $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ ആകണം. ഇതു സാധ്യമല്ല എന്നു കണ്ടല്ലോ.

പൈഥാഗറസിന്റെ തന്നെ ശിഷ്യനായ ഹിപ്പാസസ് ആണ് ഈ വസ്തുത കണ്ടെത്തിയതെന്നാണ് കരുതപ്പെടുന്നത്.

സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണവും വശവും പോലെ, എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ അംശബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് താരതമ്യം ചെയ്യാൻ കഴിയാത്ത അളവുകളെ ഒരുമിച്ചളക്കാൻ കഴിയാത്ത അളവുകൾ (incommensurable magnitudes) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

$$\left(1\frac{4}{10}\right)^2 < 2 < \left(1\frac{5}{10}\right)^2$$

നൂറിലൊന്നുകളും കൂടി എടുത്താലോ ?

$$1.41^2 = 1.9881$$

$$1.42^2 = 2.0164$$

അപ്പോൾ

$$1.41^2 < 2 < 1.42^2$$

അഥവാ

$$\left(1\frac{41}{100}\right)^2 < 2 < \left(1\frac{42}{100}\right)^2$$

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ

| | |
|---|---|
| $1.4^2 = 1.96$ | $1.5^2 = 2.25$ |
| $1.41^2 = 1.9881$ | $1.42^2 = 2.0164$ |
| $1.414^2 = 1.999396$ | $1.415^2 = 2.002225$ |
| $1.4142^2 = 1.99996164$ | $1.4143^2 = 2.00024449$ |
| $1.41421^2 = 1.9999899241$ | $1.41422^2 = 2.0000182084$ |

എന്നെല്ലാം കാണാം. അതായത്, അഞ്ചു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ (ലക്ഷത്തിലൊന്നുകൾ വരെ) എടുത്താൽ

$$1.41421^2 < 2 < 1.41422^2$$

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

$1\frac{4}{10}$, $1\frac{41}{100}$, $1\frac{414}{1000}$, $1\frac{4142}{10000}$, $1\frac{41421}{100000}$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

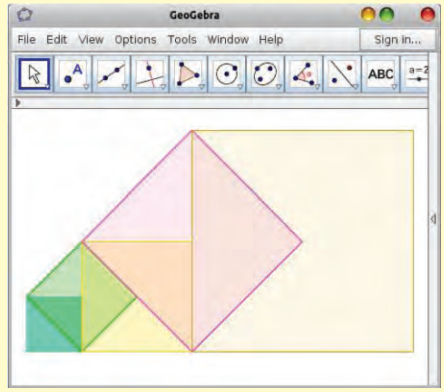
ദശാംശരൂപങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാൽ,

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421 എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്ത് വരുന്നു.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്.

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots$$

അപ്പോൾ $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയെ, ഒരു ദശാംശസ്ഥാനം മാത്രമെടുത്താൽ 1.4, രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെയെടുത്താൽ 1.41, എന്നിങ്ങനെ പറയാം.




ചിത്രത്തിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 1 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഏറ്റവും വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കുക. ഇത്തരം ഒരു ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക (Regular polygon ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം). Area ഉപയോഗിച്ച് ഓരോ സമചതുരത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കി നോക്കൂ. ഇതിൽ ഏതൊക്കെ സമചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങളാണ് ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയുന്നവ ?

**അടുത്തടുത്ത്**

$$2 - 1.4^2 = 0.04$$

$$2 - 1.41^2 = 0.0119$$

$$2 - 1.414^2 = 0.000604$$

$$2 - 1.4142^2 = 0.00003836$$

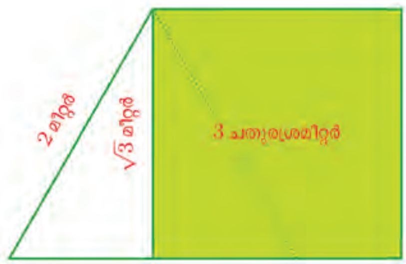
$$2 - 1.41421^2 = 0.000010075\underline{9}$$

ഇതെഴുതുന്നത്.

$$\sqrt{2} \approx 1.4$$
$$\sqrt{2} \approx 1.41$$

എന്നൊക്കെയാണ്. ഇതിൽ ≈ എന്ന ചിഹ്നത്തിന്റെ അർഥം, ഏകദേശം തുല്യം എന്നാണ്.


ഇതുപോലെ, വശങ്ങളെല്ലാം 2 മീറ്റർ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം വശമാക്കി വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 3 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആയതിനാൽ, ഈ ഉയരത്തെ $\sqrt{3}$ എന്നെഴുതാം.




നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലുള്ള കണക്കുകൂട്ടലുകളിലൂടെ, 1.7, 1.73, 1.732, ... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 3 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു എന്നും കാണാം. ഇക്കാര്യം ചുരുക്കി ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\sqrt{3} = 1.73205...$$

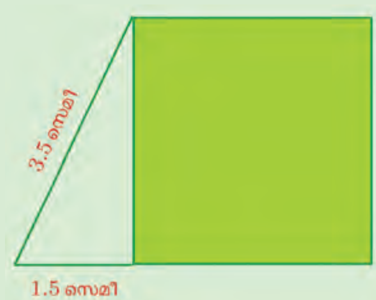
പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ,

> $x$ ഏത് അധിസംഖ്യ ആയാലും, പരപ്പളവ് $x$ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളമാണ് $\sqrt{x}$ .

ചിലപ്പോൾ $\sqrt{x}$ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആകാം; അല്ലെങ്കിൽ, വർഗം $x$ നോട് അടുത്തുവരുന്ന, ദശാംശരൂപത്തിലുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കി, $\sqrt{x}$ നെ ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതാം.

(1) ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയെയും രണ്ടു പൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാമെന്ന് എട്ടാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. ഇതുപയോഗിച്ച്, 7 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ, 11 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ എന്നീ പരപ്പളവുകളുള്ള സമചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അവയുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയാണ്?

(2) ചിത്രത്തിലെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്? ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമോ?



## വരയും വർഗമൂലവും

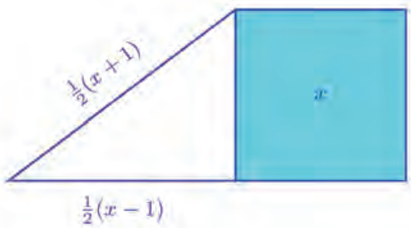
$x$ ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$$

(എട്ടാം ക്ലാസിൽ വർഗങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ). ഇത് ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം

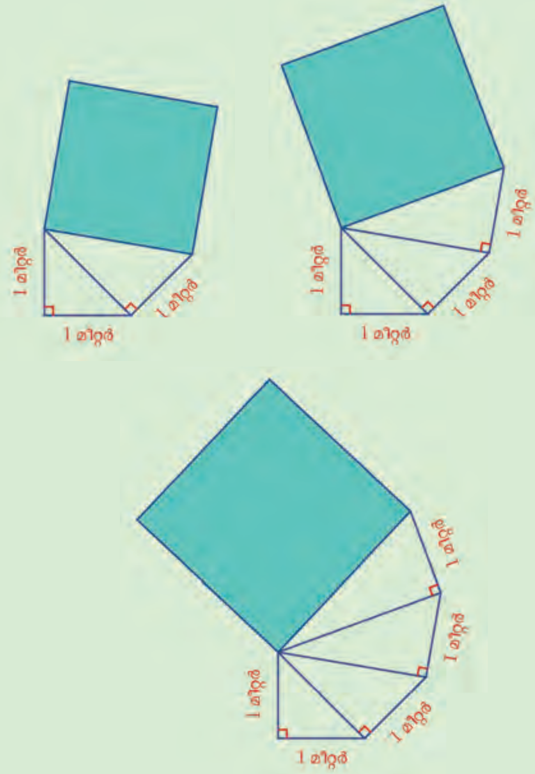
$$x = \left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(x-1)\right)^2$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, പരപ്പളവ് $x > 1$ ആയ സമചതുരം വരയ്ക്കാം :




$x < 1$ ആണെങ്കിൽ താഴത്തെ വശം $\frac{1}{2}(1-x)$ ആയി എടുക്കണം.

(3) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ചിത്രത്തിലെയും സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും, വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കുക.



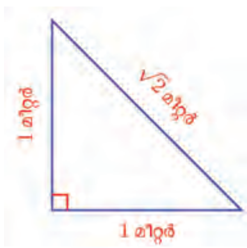

(4) $\sqrt{2}$ നേക്കാൾ വലുതും, $\sqrt{3}$ നേക്കാൾ ചെറുതുമായ മൂന്നു ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

## കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും

ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം 1 മീറ്ററായ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ് ?


ചുറ്റളവോ ?

ഇതിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2}$ മീറ്ററാണല്ലോ.



അപ്പോൾ ചുറ്റളവ് കിട്ടാൻ 2 മീറ്ററും $\sqrt{2}$ മീറ്ററും കൂട്ടണം. ഈ നീളത്തെ $2+\sqrt{2}$ മീറ്റർ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

$\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142... എന്നിങ്ങനെ തുടരുമല്ലോ.

അപ്പോൾ $2+\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ, ഇവയോടെല്ലാം 2 കൂട്ടിയതാണ്. അതായത്, 3.4, 3.41, 3.414, 3.4142, ... എന്നീ ഭിന്നസംഖ്യകൾ.

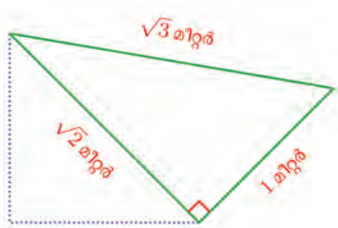
ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$$2+\sqrt{2} = 3.4142...$$

സെന്റിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായ അളവ് മതിയെന്നു തീരുമാനിച്ചാൽ ചുറ്റളവ് 3.41 മീറ്റർ എന്നെടുക്കാം. ഇനി അതല്ല, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമാകണമെന്നുണ്ടെങ്കിൽ 3.414 മീറ്റർ എന്നെടുക്കണം.

ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം പാദമാക്കി ഇവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മറ്റൊരു മട്ടത്രികോണമുണ്ടാക്കിയാലോ ?


ഇതിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{3}$ മീറ്റർ എന്നു കണ്ടല്ലോ.




## ദശാംശരൂപങ്ങൾ

ഛേദം 10 ന്റെ കൃതികളാക്കാവുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളെയാണ് ആദ്യം ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതിയത്.

$$\frac{7}{10} = 0.7, \qquad \frac{21}{100} = 0.21$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5, \qquad \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0.25$$

തുടർന്ന് അങ്ങനെയല്ലാത്ത ഭിന്നസംഖ്യകൾക്കും മറ്റൊരു തരത്തിലുള്ള ദശാംശരൂപം ഉണ്ടാക്കി.

$$\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \dots$$

എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നതിനാൽ

$$\frac{1}{3} = 0.333...$$

എന്നെഴുതി. ഇതുപോലെ

$$\frac{1}{6} = 0.1666...$$

$$\frac{1}{11} = 0.090909...$$

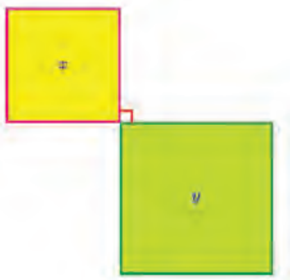
എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം.

$$\sqrt{2} = 1.41421...$$

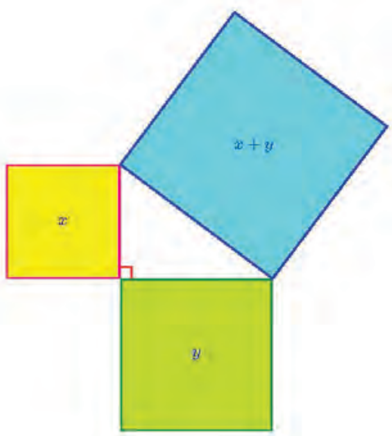
എന്നെഴുതുന്നതും ഇത് പോലെയാണ്, എന്നാൽ ഒരു വ്യത്യാസമുണ്ട്. $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{11}$ പോലെയുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകളിലൂടെ ദശാംശരൂപങ്ങളിൽ അക്കക്കൂട്ടങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുന്നതു കാണാം. എന്നാൽ, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ പോലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപങ്ങളിൽ ഇത്തരം ആവർത്തനം ഇല്ല.

## തുകയും വർഗമൂലവും

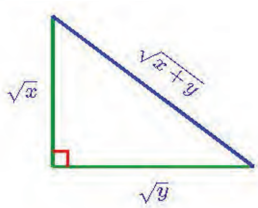
പരപ്പളവുകൾ $x$, $y$ ആയ രണ്ട് സമചതുരങ്ങൾ ഇങ്ങനെ ചേർത്തു വയ്ക്കുക.




ഇനി മുകളിലെ മൂലകൾ ചേർത്തുവരച്ച്, ഒരു സമചതുരവും കൂടി വരച്ചാലോ ? അതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?




നടുവിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ് ?




ഇതിൽനിന്ന് എന്തു മനസ്സിലാക്കാം?

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{x+y}$$

ഇതിന്റെ ചുറ്റളവ് $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ മീറ്റർ എന്നെഴുതാം.

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടാൻ, ഇവ ഓരോന്നിനോടും ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ക്രമമായി കൂട്ടണം.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.4 | 1.41 | 1.414 | ... | $\rightarrow$ | $\sqrt{2}$ |
| 1.7 | 1.73 | 1.732 | ... | $\rightarrow$ | $\sqrt{3}$ |
| 3.1 | 3.14 | 3.146 | ... | $\rightarrow$ | $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ |

ഇവയോടെല്ലാം 1 കൂട്ടിയാൽ $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടും.

അപ്പോൾ പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, മില്ലി മീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി 4.146 മീറ്റർ.

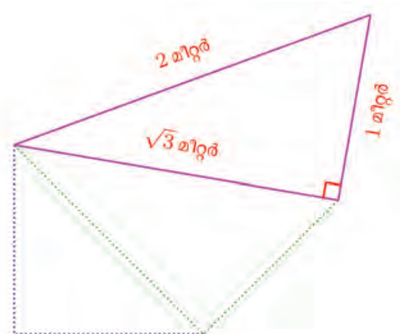
ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ് ?

ഏകദേശം $4.146 - 3.414 = 0.732$ മീറ്റർ എന്നു പറയാം; അല്ലെങ്കിൽ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{3} - 2$$

$$= \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$$

ഇനി ഈ ത്രികോണത്തിന്റെയും മുകളിൽ ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ത്രികോണം വരച്ചാലോ ? അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ് ?




ഇതിന്റെ ചുറ്റളവ്, രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ് ?

പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, $2 + 1 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$ മീറ്റർ. ഇതിനോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാതെ തന്നെ ചുറ്റളവ് എത്ര കൂടുതലാണെന്ന് നോക്കാം.

രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ്?

അപ്പോൾ ചുറ്റളവിന്റെ വ്യത്യാസം

$$(3 + \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{2}$$

ഇത് മൂന്നു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ കൃത്യമായി

$$2 - 1.414 = 0.586$$

എന്നു കണക്കാക്കാം. അതായത്, ചുറ്റളവ് ഏകദേശം 586 മില്ലിമീറ്റർ, അഥവാ 58.6 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്.

### വ്യവകലനം

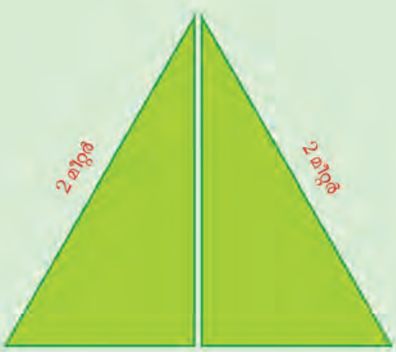
$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കിയതുപോലെ, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളും കണക്കാക്കാം.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.7 | 1.73 | 1.732 | ... | $\rightarrow$ | $\sqrt{3}$ |
| 1.4 | 1.41 | 1.414 | ... | $\rightarrow$ | $\sqrt{2}$ |
| 0.3 | 0.32 | 0.318 | ... | $\rightarrow$ | $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ |

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0.318$$

(1) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം $1\frac{1}{2}$ മീറ്ററും, മറ്റൊരു വശം $\frac{1}{2}$ മീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ ചുറ്റളവ്, സെന്റിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.

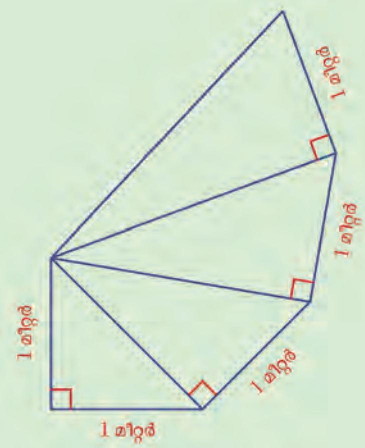

(2) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിനെ ഒരു മൂലയിലൂടെ മുറിച്ച് രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കിയതാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.




(i) ഇവയിലൊന്നിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്?

(ii) മുഴുവൻ ത്രികോണത്തേക്കാൾ ചുറ്റളവ് എത്ര കുറഞ്ഞു?

(3) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ തുടർച്ചയായി മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്ന രീതി നേരത്തെ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ:





(i) ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന പത്താമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയാണ് ?

(ii) പത്താമത്തെ ത്രികോണത്തിന് ഒൻപതാമത്തെ ത്രികോണത്തേക്കാൾ ചുറ്റളവ് എത്ര കൂടുതലാണ് ?

(4) ലംബവശങ്ങൾ $\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്റർ, $\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്റർ ആയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്? ലംബവശങ്ങളുടെ തുക കർണ്ണത്തേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ് ?

## അനുബന്ധം

ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല എന്നു തെളിയിക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്നു നോക്കാം.

അങ്ങനെ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യ ഉണ്ടെങ്കിൽ, അതിന്റെ അംശത്തിന്റെയും ഛേദത്തിന്റെയും പ്രത്യേകതകൾ എന്തൊക്കെയായിരിക്കുമെന്നു നോക്കാം. ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയ്ക്കും പല രൂപങ്ങളുള്ളതിൽ, ഏറ്റവും ലഘുവായ ഒരു രൂപമുണ്ടല്ലോ - അതായത്, അംശത്തിനും ഛേദത്തിനും പൊതുവായ ഘടകങ്ങളില്ലാത്ത രൂപം. നാം അന്വേഷിക്കുന്ന ഭിന്നസംഖ്യയുടെ (വർഗം 2 ആയ) ഈ രൂപം $\frac{x}{y}$ ആണെന്നു കരുതുക. അപ്പോൾ $x, y$ ഇവ പൊതുവായ ഘടകങ്ങൾ ഇല്ലാത്ത സംഖ്യകളാണ്.

മറ്റെന്തൊക്കെയാണ് ഇവയുടെ സവിശേഷതകൾ ?

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2$$

അതായത്,

$$\frac{x^2}{y^2} = 2$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$x^2 = 2y^2$$

എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ $x^2$ ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്. $x$ ന്റെ കാര്യമോ ?

ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗങ്ങളും ഒറ്റസംഖ്യകളാണ്. (ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ ഇരട്ട സംഖ്യകളും). അപ്പോൾ $x^2$ ഇരട്ടസംഖ്യ ആയതിനാൽ $x$ ഉം ഇരട്ടസംഖ്യതന്നെ.

$x$, $y$ ഇവയ്ക്ക് പൊതുവായ ഘടകങ്ങളില്ല; $x$ ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്. അതിനാൽ $y$ ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാൻ തരമില്ല (ഏതു രണ്ടു ഇരട്ടസംഖ്യകൾക്കും 2 ഒരു പൊതുഘടകമാണല്ലോ). അപ്പോൾ $y$ ഒറ്റസംഖ്യ യാകണം.

അതായത്, നാം അന്വേഷിക്കുന്ന ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശം ഇരട്ടസംഖ്യ, ഛേദം ഒറ്റസംഖ്യ.

കൂടുതൽ വല്ലതും പറയാൻ കഴിയുമോ ? അന്വേഷണം തുടരാം. $x$ ഇരട്ടസംഖ്യ ആയതിനാൽ, അതിനെ 2 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും എണ്ണൽസംഖ്യതന്നെ കിട്ടും. അതായത് $\frac{x}{2}$ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ യാണ്. ഇതിനെ $z$ എന്നെഴുതാം.

$$\frac{x}{2} = z$$

അഥവാ,

$$x = 2z$$

ഇനി $x^2 = 2y^2$ എന്ന് ആദ്യം എഴുതിയതിൽ $x$ നു പകരം $2z$ ഉപയോഗിക്കാമല്ലോ:

$$(2z)^2 = 2y^2$$

അതായത്,

$$4z^2 = 2y^2$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$y^2 = 2z^2$$

എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ $y^2$ ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്. ഇതിൽനിന്ന്, മുമ്പ് $x$ ന്റെ കാര്യത്തിൽ കണ്ടതുപോലെ, $y$ ഉം ഇരട്ട സംഖ്യതന്നെയാണെന്നു കാണാമല്ലോ.

അതെങ്ങനെ ശരിയാകും ? $y$ ഒറ്റസംഖ്യ ആണെന്നല്ലേ ആദ്യം കണ്ടത്.

എന്താണിവിടെ സംഭവിച്ചത് ? ഏറ്റവും ലഘുവായ രൂപത്തിലുള്ള ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം 2 ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ ഛേദം ഒറ്റസംഖ്യയാണെന്ന് ആദ്യം കണ്ടു. കുറേക്കൂടി ആലോചിച്ചപ്പോൾ ഈ ഛേദം ഇരട്ടസംഖ്യ ആണെന്നും കിട്ടി. ഇതു രണ്ടും കൂടി സാധ്യമല്ലല്ലോ.

ഇതിൽ നിന്ന് ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ലെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

# 3

# സമാന്തരവരകൾ

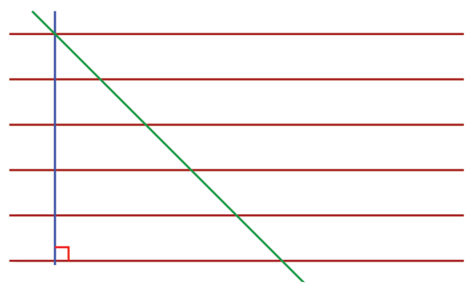
## സമഭാഗം

സമാന്തരവരകളെക്കുറിച്ച് പലതും പഠിച്ചു; അവയുപയോഗിച്ച് പലതും വരച്ചു. സമാന്തരവിശേഷങ്ങൾ ഇനിയുമുണ്ട് പലതും.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

കുറേ സമാന്തരവരകളും, അവയ്ക്കെല്ലാം ലംബമായ ഒരു വരയും.

സമാന്തരവരകൾ ഒരേ അകലം ഇടവിട്ടാണ് വരച്ചിരിക്കുന്നത്; മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, സമാന്തരവരകൾ ലംബത്തെ ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത്.

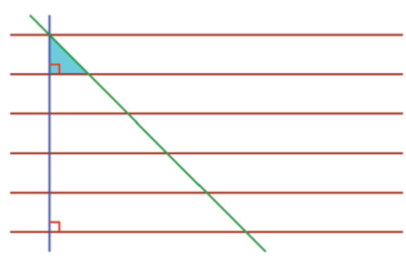


ലംബത്തിനു പകരം അല്പം ചരിച്ചൊരു വര വരച്ചാലോ ?

ഈ വരയെയും സമാന്തരവരകൾ ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത് എന്നു തോന്നുന്നില്ലേ ? അതെങ്ങനെ പരിശോധിക്കും ?

അളന്നു നോക്കാം;

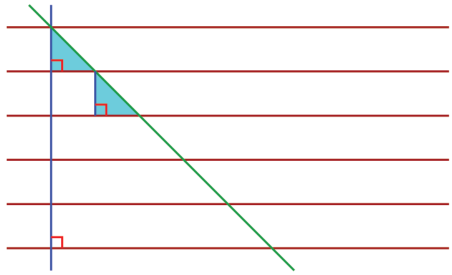
അളക്കാതെതന്നെ ചിന്തിച്ചു പറയാൻ കഴിയുന്നതാണല്ലോ കണക്കിന്റെ രസം. ചിത്രത്തിന്റെ ഏറ്റവും മുകളിൽ ഒരു മട്ടത്രികോണം കാണുന്നുണ്ടോ ?



ST-361-3-MATHS (M)-9-VOL-1

ഇതിന്റെ കുത്തനെയുള്ള വശം ലംബവരയുടെ ഒരു ഭാഗമാണ്; കർണ്ണം ചരിഞ്ഞ വരയുടെ ഒരു ഭാഗവും.

ഒരു ചെറിയ ലംബം കൂടി വരച്ചാൽ, ഇതുപോലൊരു ത്രികോണം തൊട്ടുതാഴെയും കിട്ടും.

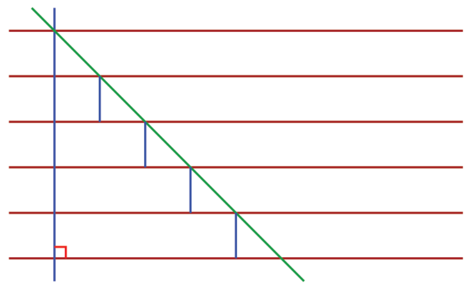


ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കുത്തനെയുള്ള (നീല) വശങ്ങൾക്ക് ഒരേനീളമാണ് (എന്തു കൊണ്ട് ?) മാത്രമല്ല ഈ ലംബങ്ങൾ സമാന്തരമായതുകൊണ്ട്, പച്ച വര ഇവയുമായി ഒരേ ചരിവി ലുമാണ്.

അതായത്, ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും കുത്തനെയുള്ള വശങ്ങളും, അവയുടെ ഇരു വശങ്ങ ളിലുമുള്ള കോണുകളും തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ അവയുടെ കർണ്ണങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണല്ലോ.

അപ്പോൾ, ചരിഞ്ഞ വരയുടെ മുകളിലെ രണ്ടു ഭാഗ ങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണ്.

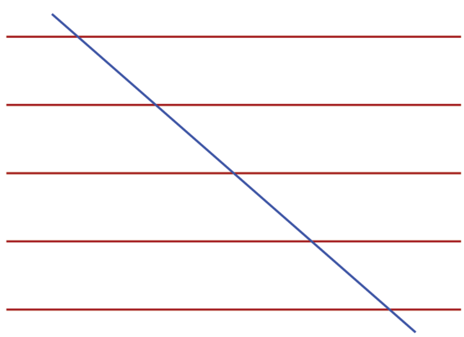
ഇതുപോലെ മറ്റു ഭാഗങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണെന്നു കാണാമല്ലോ:



ഇത് ഒരു പൊതുതത്വമായി പറയാം:

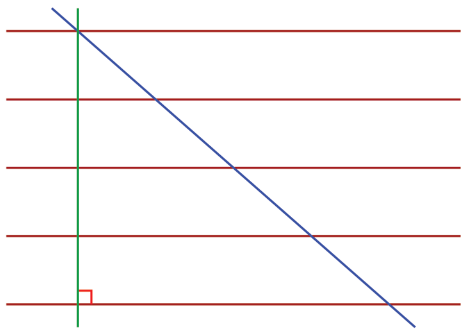
**ഒരേ അകലം ഇടവിട്ടുള്ള സമാന്തരവരകൾ മറ്റ് ഏതു വരയേയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായാണ്.**

മറിച്ചായാലോ ? അതായത് കുറേ സമാന്തരവരകൾ ഒരു വരയെ ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായി മുറി ക്കുന്നുവെന്നു കരുതുക. അവ തമ്മിൽ ഒരേ അകലത്തിലാണെന്നു പറയാമോ ?

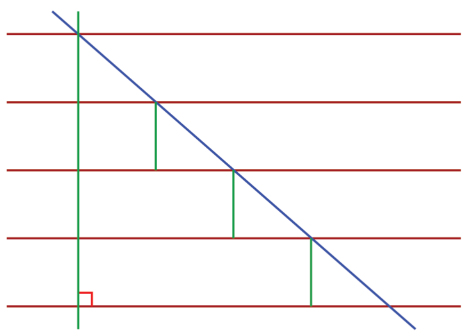


ചിത്രത്തിലെ സമാന്തരവരകൾ ചരിഞ്ഞ നീല വരയെ ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത്. സമാന്തരവരകൾ ഒരേ അകലത്തിലാണോ എന്നതാണ് ചോദ്യം.

അതായത്, ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ പച്ച നിറമുള്ള ലംബത്തേയും സമാന്തരവരകൾ ഒരേ ഭാഗങ്ങളായാണോ മുറിക്കുന്നത് എന്നു നോക്കണം.



ആദ്യം ചെയ്തതുപോലെ ചെറുലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.

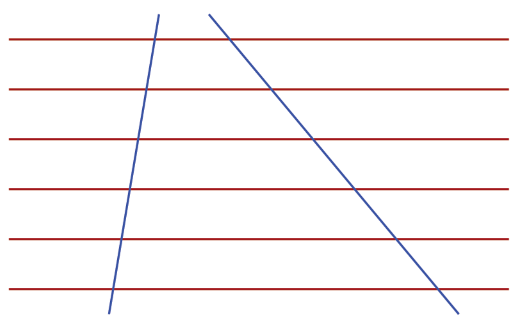


നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ചെറിയ ത്രികോണങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ കോണുകളാണ്. ഇവിടെ അവയുടെ കർണ്ണങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണ്. അതിനാൽ അവയുടെ ലംബവശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണ്.

അതായത്, ആദ്യത്തെ സമാന്തരവരകൾ ഒരേ അകലത്തിലാണ്.

ഇതും ഒരു പൊതുതത്വമായി പറയാം:

**ഏതെങ്കിലും വരയെ ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായി മുറിക്കുന്ന സമാന്തരവരകൾ ഒരേ അകലത്തിലാണ്.**



ഈ രണ്ടു തത്വങ്ങളും ഉപയോഗിച്ച് മറ്റൊരു കാര്യം കാണാം. ഒരു കൂട്ടം സമാന്തരവരകൾ ഏതെങ്കിലും വരയെ ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത് എന്നു കരുതുക. ഇപ്പോൾ കണ്ട തത്വം അനു

സരിച്ച്, അവ ഒരേ അകലത്തിലാണ്. അപ്പോൾ നേരത്തെ കണ്ട തത്വം അനുസരിച്ച് അവ മറ്റ് ഏതു വരയേയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായിട്ടാണ്.

അതായത്,

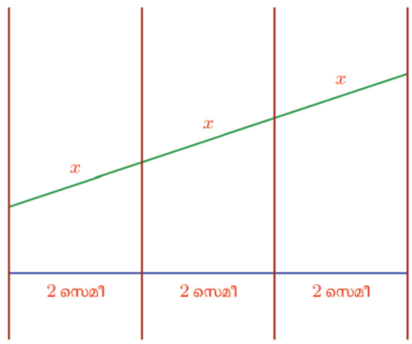
ഒരു വരയെ ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായി മുറിക്കുന്ന സമാന്തരവരകൾ, ഏതു വരയേയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളായിട്ടാണ്.

ഇതുപയോഗിച്ച്, ഏതു വരയേയും വേണ്ടത്ര സമഭാഗങ്ങളാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, 7 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയിൽ ഇതെളുപ്പമാണ്.

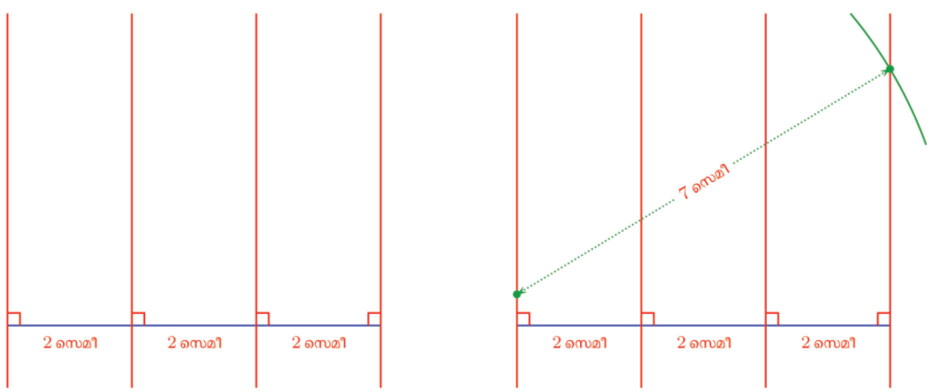
6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്ന നാലു സമാന്തരവരകൾ, ഏതു വരയെയും മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുമല്ലോ:



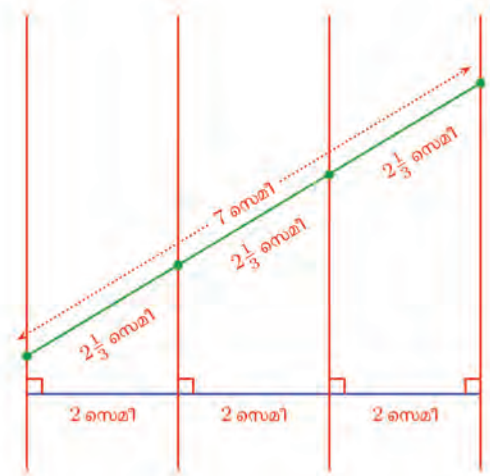

രണ്ടാമത്തെ വരയുടെ നീളം 7 സെന്റിമീറ്ററാക്കിയാലോ ?

അപ്പോൾ നമ്മുടെ പ്രശ്നം തീർക്കാനുള്ള വഴി തെളിഞ്ഞില്ലേ ?

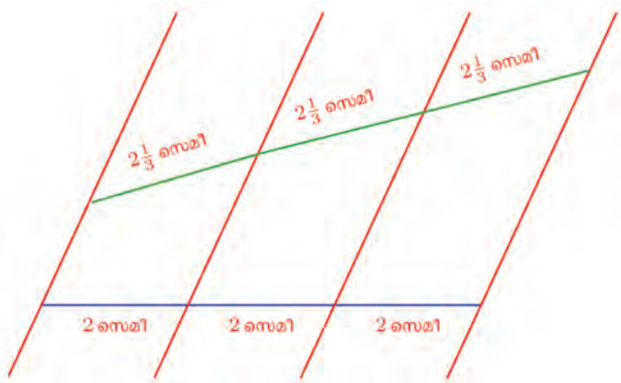
6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വര വരച്ച്, അതിൽ 2 സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ട് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക; ആദ്യത്തെ ലംബത്തിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് 7 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തഭാഗം വരച്ച്, ഇത് അവസാനത്തെ ലംബത്തെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.



ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ, 7 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയും, അതിന്റെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളുമായി.



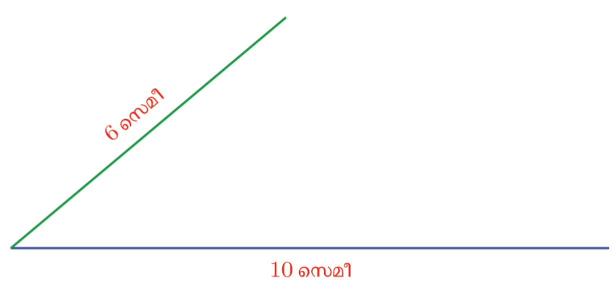

ഇതിൽ താഴത്തെ വരയിൽ നിന്ന് ലംബങ്ങൾ തന്നെ വരയ്ക്കണമെന്നില്ല. ചരിച്ചും വരയ്ക്കാം - സമാന്തരമായിരിക്കണമെന്നുമാത്രം.



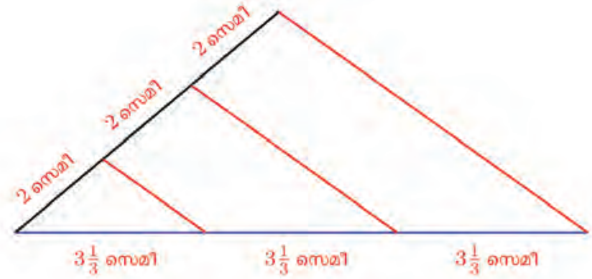

മറ്റൊരു ചോദ്യം :

10 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വര വരച്ച്, അതിനെ മൂന്ന് സമഭാഗങ്ങളാക്കുക.

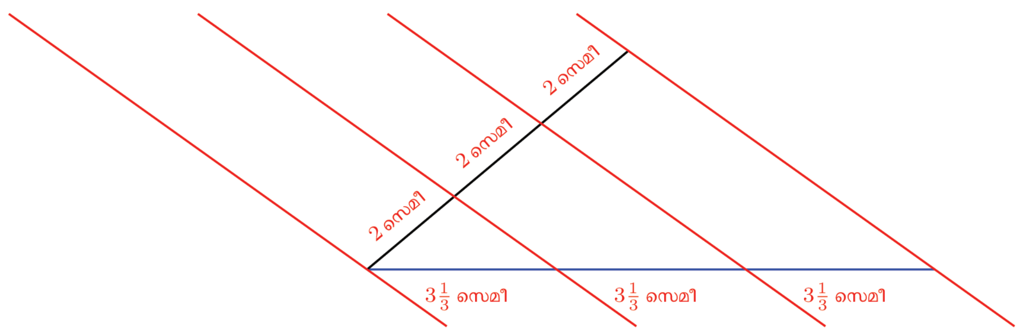
മുറിക്കേണ്ട വര ചരിച്ചുവരയ്ക്കാതെ വിലങ്ങനെതന്നെ വരച്ചു തുടങ്ങുന്നതാണ് സൗകര്യം. ഇനി മുറിക്കാൻ സഹായിക്കുന്ന വര ഒരറ്റത്തുനിന്ന് ചരിച്ചു വരയ്ക്കാം.



വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചൊരു വര വരയ്ക്കുക. ഇനി താഴത്തെ വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കാൻ, മുകളിലെ വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കി, ആ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ സമാന്തരവരകൾ വരച്ചാൽ പ്പോരേ ?

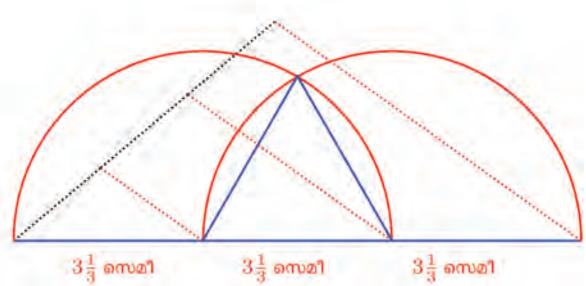



ഇത് മനസ്സിലായില്ലെങ്കിൽ, അല്പം നീട്ടിയ സമാന്തരവരകളും നാലാമതൊരു സമാന്തരവരയും സങ്കല്പിച്ചുനോക്കൂ:




അങ്ങനെ 10 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കി.

ഈ ഭാഗങ്ങൾ ചേർത്തു വച്ചൊരു ത്രികോണം ഉണ്ടാക്കിയാലോ ?




വശങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ നീളമായതിനാൽ ഇതൊരു സമഭുജത്രികോണമാണ്. അവയെല്ലാം കൂട്ടിയാൽ 10 സെന്റിമീറ്റർ; അതായത്, ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 10 സെന്റിമീറ്റർ.

10 സെന്റിമീറ്റർ വരയെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നതിനു പകരം, നാലു സമഭാഗങ്ങളാക്കണമെങ്കിൽ, ഇതുപോലെ മുകളിൽ എത്ര നീളത്തിലുള്ള വര ചരിച്ചു വരയ്ക്കുന്നതാണ് സൗകര്യം ?

അങ്ങനെ ഭാഗിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, 10 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള സമചതുരവും വരയ്ക്കാമല്ലോ.

ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ.

(1) 11 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(2) 15 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

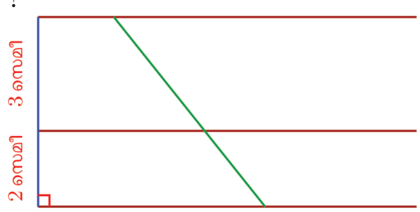
(3) 20 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള സമഷഡ്ഭുജം വരയ്ക്കുക.

## അസമഭാഗങ്ങൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ


വ്യത്യസ്ത അകലം ഇടവിട്ട് മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ.

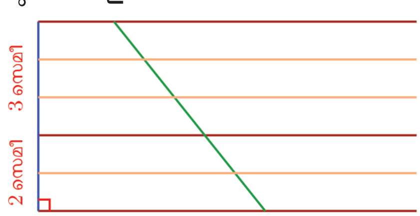
നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ഒരു ചരിഞ്ഞ വര വരച്ചാലോ ?




പച്ച വരയുടെ ഭാഗങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററും 3 സെന്റിമീറ്ററും അല്ലെന്ന് ഒറ്റ നോട്ടത്തിൽത്തന്നെ പറയാമല്ലോ.

ഈ നീളങ്ങൾക്ക് 2 ഉം 3 ഉം ആയി എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ ?

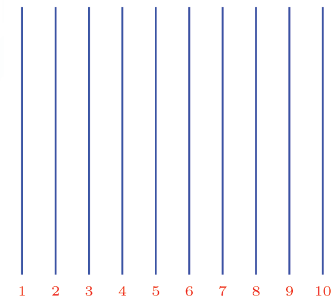
മൂന്നു വരകൾ കൂടി സമാന്തരമായി വരച്ച്, ഒരേ അകലത്തിലുള്ള ആറു വരകളാക്കിയാലോ ?



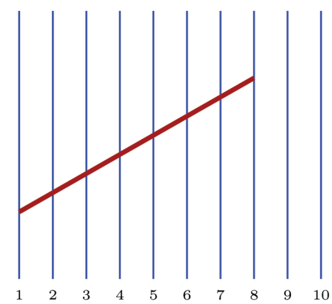

ഇപ്പോൾ ചരിഞ്ഞ വര അഞ്ചു സമഭാഗങ്ങളായി. ഇതിലെ താഴത്തെ രണ്ടു ഭാഗം ചേർന്നതാണ്, ആദ്യം കണ്ട രണ്ടു ഭാഗങ്ങളിലെ ചെറിയ ഭാഗം; മുകളിലെ മൂന്നെണ്ണം ചേർന്നത്, വലിയ ഭാഗവും.

### സമാന്തര സമഭാഗം

ഒരു കടലാസിൽ കുറേ സമാന്തരവരകൾ ഒരേ അകലം ഇടവിട്ടു വരയ്ക്കുക.

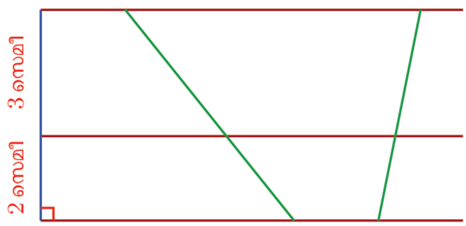


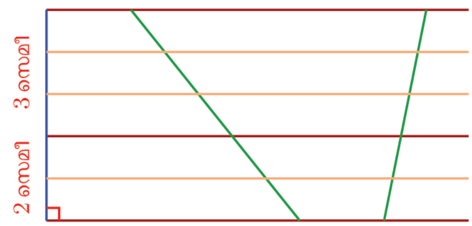

ഇനി ഒരു കമ്പി 7 സമഭാഗങ്ങളായി മുറിക്കണമെങ്കിൽ, ഇതിലെ എട്ടു വരകൾക്കിടയിലായി അതിനെ കൃത്യമായി വച്ചാൽ മതി.




മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ചരിഞ്ഞ വരയുടെ ചെറിയ ഭാഗവും വലിയ ഭാഗവും 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്.

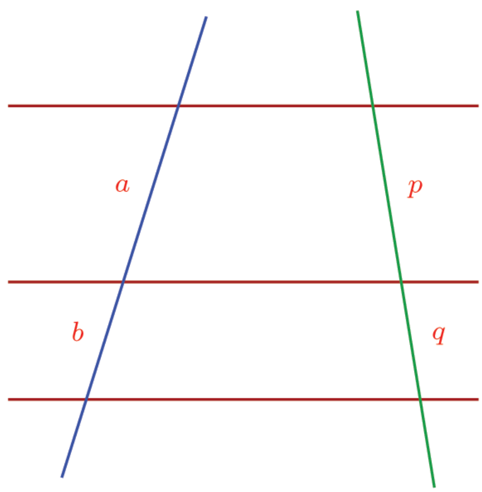
വര അല്പം മാറ്റി വരച്ചാലോ ?



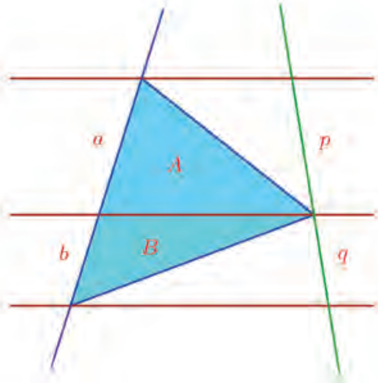

ഭാഗങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾക്ക് വ്യത്യാസം വരുമെങ്കിലും, സമഭാഗങ്ങൾ രണ്ടെണ്ണം ചേർന്നത് ചെറിയ ഭാഗവും, മൂന്നെണ്ണം ചേർന്നത് വലിയ ഭാഗവും ആയിരിക്കുമല്ലോ; അതായത് അംശബന്ധം 2 : 3 തന്നെ ആയിരിക്കും.

ഇതുപോലെ, ഏതു മൂന്നു സമാന്തരവരകളും, മറ്റെല്ലാ വരകളെയും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണോ ഭാഗിക്കുന്നത് ?




വിലങ്ങനെ മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ; അവയെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന രണ്ടു ചരിഞ്ഞ വരകൾ. ഇടതു വരയെ സമാന്തരവരകൾ മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന കഷണങ്ങളുടെ നീളം $a, b$ എന്നും, വലതു വരയെ സമാന്തരവരകൾ മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന കഷണങ്ങളുടെ നീളം $p, q$ എന്നുമെടുത്താൽ $a : b$ എന്ന അംശബന്ധവും, $p : q$ എന്ന അംശബന്ധവും ഒന്നുതന്നെയാണോ എന്നാണ് അന്വേഷിക്കേണ്ടത്; അതായത്, $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ ആണോ എന്നതാണ് ചോദ്യം.

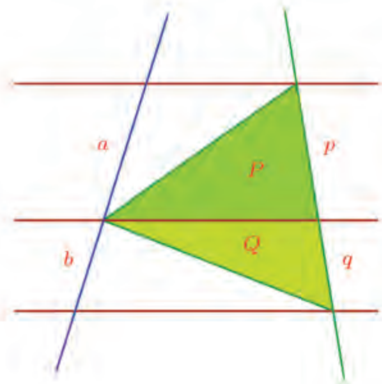
അത് പരിശോധിക്കാൻ, ആദ്യം നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തെ പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധമായി മാറ്റാം:




ഇപ്പോൾ താഴെയും മുകളിലുമുള്ള നീല ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധം $a : b$ തന്നെയാണെന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ; അതായത്, ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ $A, B$ എന്നെടുത്താൽ

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$$

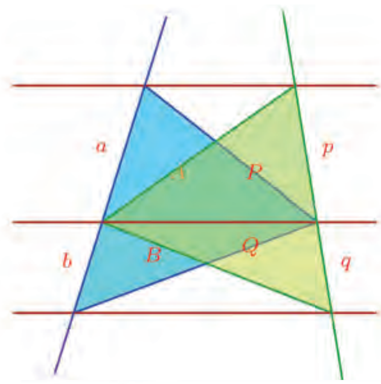
ഇതുപോലെ $p, q$ എന്നീ നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തെയും, പരപ്പളവുകളുടെ അംശബന്ധമാക്കാം:



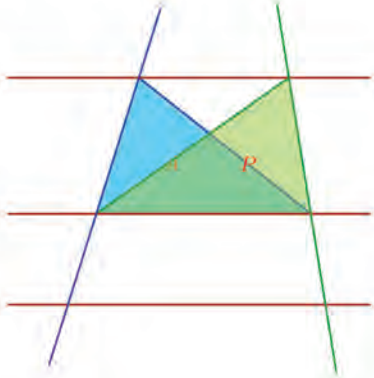

ചിത്രത്തിലേതുപോലെ, പച്ച ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ $P, Q$ എന്നെടുത്താൽ,

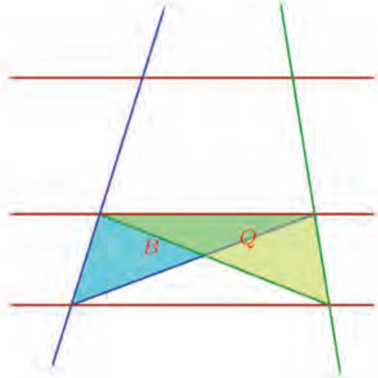
$$\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$$

ഇനി എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളും ഒരുമിച്ചുവച്ചു നോക്കാം:



താഴെയും മുകളിലും ഓരോ നീല ത്രികോണവും പച്ച ത്രികോണവും ഉണ്ട്. അവയെ വെവ്വേറെ ജോടികളായി നോക്കാം:




മുകളിലെ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും താഴത്തെ വശം ഒരേ വരയാണ്; അവയുടെ മൂന്നാം മൂലകൾ ഈ വശത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലുമാണ്. അതിനാൽ അവയ്ക്ക് ഒരേ പരപ്പളവാണ്.

$$A = P$$

ഇതുതന്നെയല്ലേ താഴത്തെ നീലയും പച്ചയും ത്രികോണങ്ങളുടെ കാര്യവും

$$B = Q$$

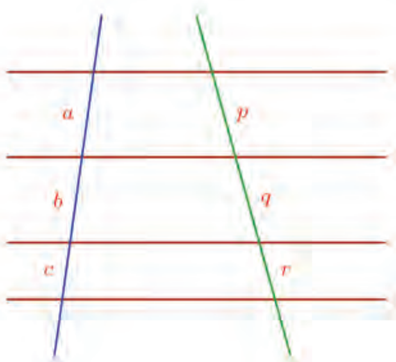
$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ എന്നും, $\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$ എന്നും നേരത്തെ കണ്ടതാണല്ലോ. ഇപ്പോൾ ഇതിലെ $A = P$ യും $B = Q$ യും ആണെന്നും കിട്ടി. അങ്ങനെ

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

അതായത്, ഈ മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ ഇടതും വലതും വരകളെ മുറിക്കുന്നത് ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

വരകൾ മൂന്നിൽ കൂടുതലായാലോ ?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഇതിലെ ഏറ്റവും താഴത്തെ സമാന്തരവര ഒഴിവാക്കി, മറ്റു മൂന്നെണ്ണം മാത്രം നോക്കിയാൽ, ഇപ്പോൾ കണ്ടതുപോലെ $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ എന്നു കിട്ടും.

ഏറ്റവും മുകളിലെ വര ഒഴിവാക്കി, മറ്റു മൂന്നെണ്ണം മാത്രം നോക്കിയാൽ, $\frac{b}{c} = \frac{q}{r}$ എന്നും കിട്ടും.

$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ എന്നും, $\frac{b}{c} = \frac{q}{r}$ എന്നും കിട്ടിയതിൽ നിന്ന്, $\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{p}{q} \times \frac{q}{r}$ എന്നും കിട്ടുമല്ലോ. അതായത് $\frac{a}{c} = \frac{p}{r}$. അപ്പോൾ $a, b, c$ എന്ന മൂന്നു നീളങ്ങളിൽ ഒന്നു മറ്റൊന്നിന്റെ ഏതു ഭാഗമോ മടങ്ങോ ആയാലും, അതേ ഭാഗമോ മടങ്ങോ തന്നെയാണ് $p, q, r$ എന്നീ നീളങ്ങളിലും.

അപ്പോൾ $a, b, c$ എന്നീ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും $p, q, r$ എന്നീ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും ഒന്നുതന്നെയാണ്.

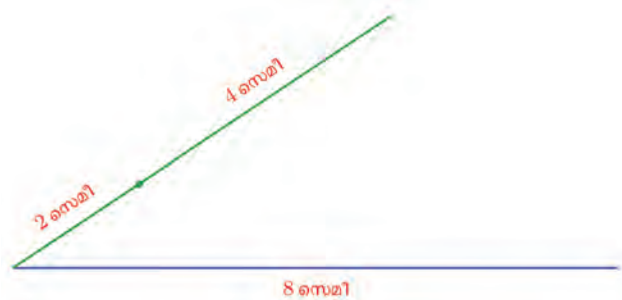
സമാന്തരവരകൾ എത്രയെണ്ണം ആയാലും, ഇതുപോലെതന്നെ തുടരാമല്ലോ.

**മൂന്നോ അതിലധികമോ സമാന്തരവരകൾ, ഏതു രണ്ടു വരകളെയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.**

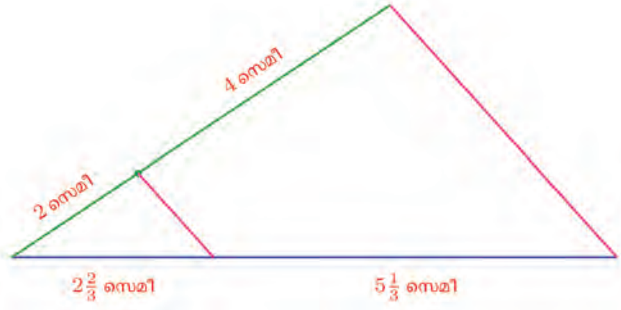
ഇതുപയോഗിച്ച് ഒരു വരയെ ഏത് അംശബന്ധത്തിലും ഭാഗിക്കാമല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ ഇങ്ങനെ ഭാഗിക്കാൻ എളുപ്പമല്ലേ ?

അപ്പോൾ, മുമ്പ് വരയെ സമഭാഗം ചെയ്തതുപോലെ, ആദ്യം ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം.




ഇനി വരകളുടെ മറ്റേ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച വരയും പച്ച വരയെ ഭാഗിക്കുന്ന കുത്തിലൂടെ സമാന്തരവരയും വരച്ചാൽ മതിയല്ലോ:



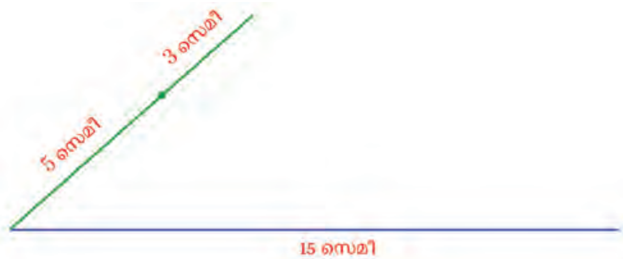
മറ്റൊരു കണക്ക്:

ചുറ്റളവ് 30 സെന്റിമീറ്ററും, വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 5 : 3 ഉം ആയ ചതുരം വരയ്ക്കണം:

ചുറ്റളവ് 30 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, നീളവും വീതിയും കൂട്ടിയാൽ 15 സെന്റിമീറ്റർ.

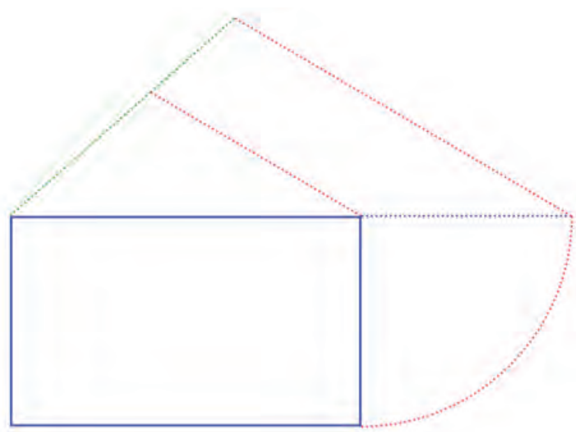
അപ്പോൾ 15 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ 5 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിച്ചു കിട്ടുന്ന കഷണങ്ങളാണ് നീളവും വീതിയും.

ഈ ഭാഗങ്ങൾ കിട്ടാൻ, ഇങ്ങനെ തുടങ്ങാം:




വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച വരയും സമാന്തരവരയും വരയ്ക്കാം:

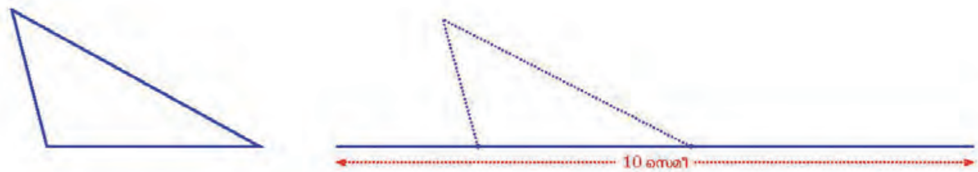

താഴത്തെ വരയുടെ ഭാഗങ്ങൾ നീളവും വീതിയുമായ ചതുരമാണ് നമുക്കാവശ്യം.



ഒരു കണക്കു കൂടി :

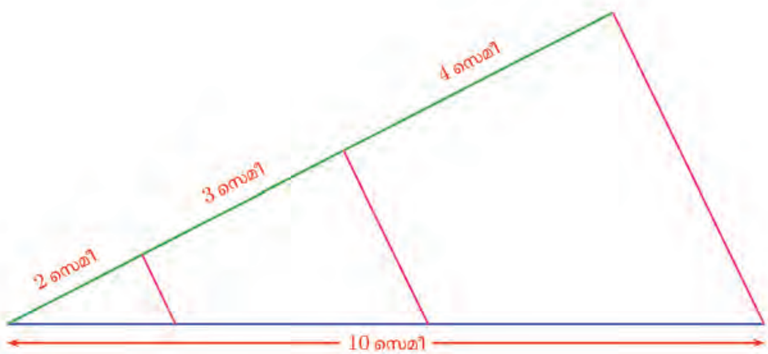
ചുറ്റളവ് 10 സെന്റിമീറ്ററും, വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 : 4 ഉം ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കണം.

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെയെല്ലാം നിവർത്തിവച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ഒറ്റ വരയുടെ നീളമാണ് 10 സെന്റിമീറ്റർ:

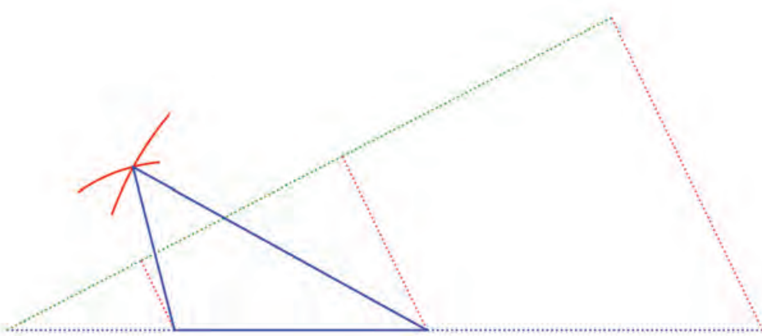



അപ്പോൾ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ ആദ്യം 10 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വര വരച്ച്, 2 : 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിച്ച്, ഇരു വശത്തെയും ഭാഗങ്ങൾ മടക്കി വച്ചാൽപ്പോരേ ?

ഈ അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കാൻ എളുപ്പം എത്ര നീളമുള്ള വരയാണ് ?




ഇനി ത്രികോണം വരയ്ക്കാമല്ലോ.



(1) ചുറ്റളവ് 15 സെന്റിമീറ്ററും വീതിയും നീളവും 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിലുമായ ചതുരം വരയ്ക്കുക.

(2) ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ തരത്തിലുമുള്ള ത്രികോണം, ചുറ്റളവ് 13 സെന്റിമീറ്ററായി വരയ്ക്കുക.

(i) സമഭുജത്രികോണം

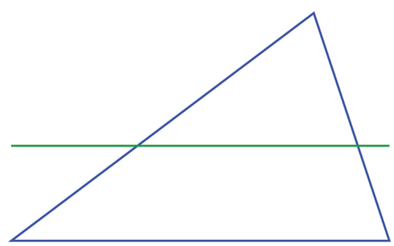
(ii) വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 3 : 4 : 5

(iii) പാർശ്വവശങ്ങൾ പാദത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങായ സമപാർശ്വത്രികോണം.

(3) ഏതു ലംബകത്തിന്റെയും വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം മുറിക്കുന്നത് ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

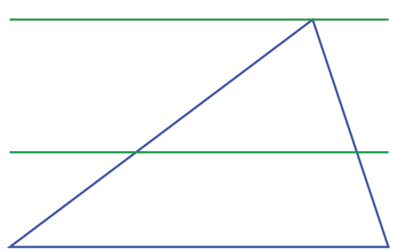
## ത്രികോണഭാഗം

ഒരു ത്രികോണം വരച്ച്, അതിനുള്ളിൽത്തന്നെ ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വര വരയ്ക്കുക.



ഈ വര ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെയും മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ ?

ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽമൂലയിലൂടെ ഒരു വര കൂടി താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരച്ചാലോ ?

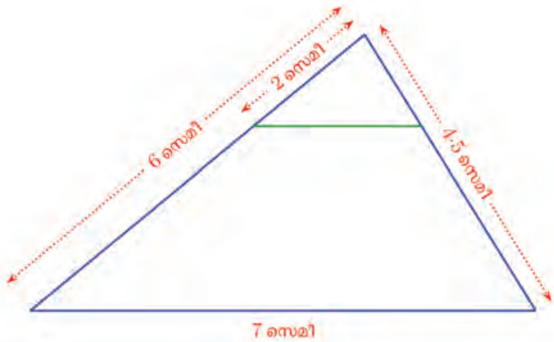


ഇപ്പോൾ മൂന്നു സമാന്തരവരകൾ, ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്നു; മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന ഭാഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം ഒന്നുതന്നെ ആണല്ലോ.

ഇവിടെ എന്താണു കണ്ടത് ?

ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് മുറിക്കുന്നത്.

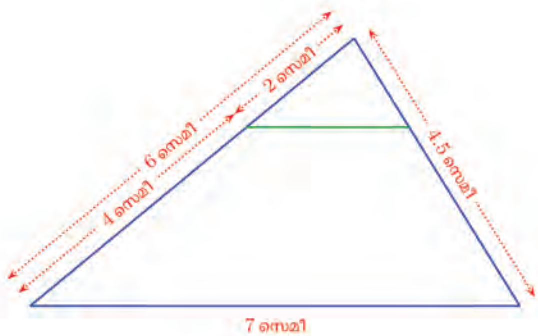
ഒരു കണക്കു നോക്കാം:




ചിത്രത്തിൽ നീല ത്രികോണത്തിനുള്ളിലെ പച്ച വര, താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമാണ്.

ഈ വര ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശത്തെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കണം. ഇരു വശങ്ങളെയും മുറിക്കുന്നത് ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണല്ലോ.

ഇടതുവശത്തെ മുറിക്കുന്നത്, ഏത് അംശബന്ധത്തിലാണ് ?



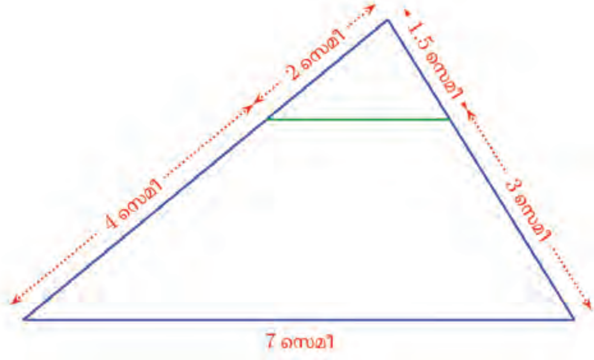

ഇടതുവശത്തിന്റെ വലിയ ഭാഗം, ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ്; അതായത്, ഈ ഭാഗങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 1 : 2

അപ്പോൾ വലതുവശത്തെ മുറിക്കുന്നതും 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആകണമല്ലോ.

ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ നീളം $= 4.5 \times \frac{1}{3} = 1.5$ സെമീ

വലിയ ഭാഗത്തിന്റെ നീളം $= 4.5 \times \frac{2}{3} = 3$ സെമീ

Min = 0, Max = 1, Increment = 0.01 ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ 'a' നിർമ്മിക്കുക. ഒരു ത്രികോണം ABC വരയ്ക്കുക. Enlarge from Point (Dilate from point) ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് C യിലും തുടർന്ന് A യിലും ക്ലിക്കുചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ Scale Factor ആയി a എന്ന് നൽകുക. AC എന്ന വരയിൽ C' എന്ന ഒരു ബിന്ദു ലഭിക്കും. AC' ന്റെ നീളം AC യുടെ നീളത്തിന്റെ 'a' ഭാഗമായിരിക്കും. (a = 0.5 ആയാൽ C', AC യുടെ മധ്യബിന്ദു ആവും, a = 0.1 ആയാൽ AC', C'C ഇവയുടെ നീളം 1:9 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാവും. AC', C'C ഇവയുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തി പരിശോധിച്ചുനോക്കൂ). C' എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ AB യ്ക്ക് സമാന്തരമായി ഒരു വര വരച്ച് ഈ വര BC യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. BD, DC എന്നീ നീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. AC' : C'C, BD : DC എന്നീ അംശബന്ധങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യുക.




ഇവിടെ ഒരു കാര്യം ശ്രദ്ധിച്ചോ ? ഏതു വശത്തെയും ചെറിയ ഭാഗം, വശത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ്; വലിയ ഭാഗം, വശത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗവും.

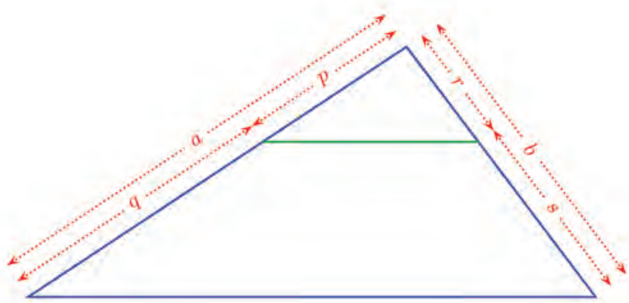
രണ്ടു വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്നത് 3 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലായാലോ ?

രണ്ടു വശങ്ങളിലും ചെറിയ കഷണം, വശത്തിന്റെ $\frac{3}{8}$ ഭാഗം; വലിയ കഷണം, വശത്തിന്റെ $\frac{5}{8}$ ഭാഗം.

അപ്പോൾ മുമ്പു പറഞ്ഞ തത്വം ഇങ്ങനെയും പറയാം:

**ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര മറ്റു രണ്ടുവശങ്ങളെ മുറിക്കുന്നത്, അവയുടെ ഒരേ ഭാഗങ്ങളായിട്ടാണ്.**

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



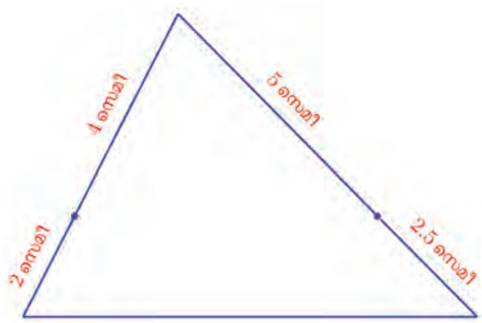

ത്രികോണത്തിനുള്ളിലെ പച്ച വര, താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമാണ്. വശങ്ങളുടെയും അവയുടെ ഭാഗങ്ങളുടെയും നീളങ്ങളെ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ അക്ഷരങ്ങൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചാൽ, ഇപ്പോൾ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച്,

$$\frac{p}{a} = \frac{r}{b} \qquad \frac{q}{a} = \frac{s}{b}$$

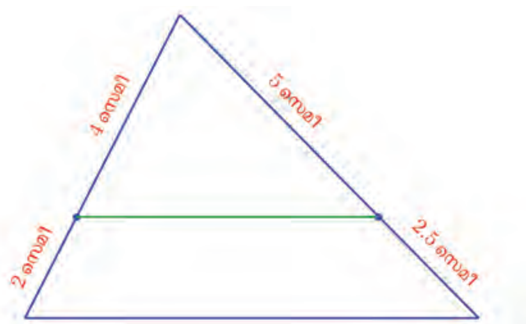
ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു എന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ ഒരു ചോദ്യമുണ്ട്. ഇത് മറിച്ചു പറഞ്ഞാൽ ശരിയാകുമോ ?

അതായത്, ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന വര, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമാണെന്നു പറയാമോ ?

ഉദാഹരണമായി ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിൽ, ഇടതും വലതും വശങ്ങളെ 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന കുത്തുകൾ ഇട്ടിട്ടുണ്ട്.

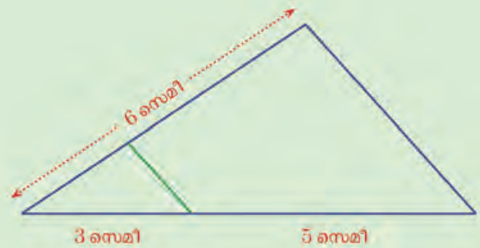



ഇടതുവശത്തെ കുത്തിലൂടെ താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, വലതുവശത്തെയും 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കണമല്ലോ. അപ്പോൾ അത് വലതുവശത്തെ കുത്തിലൂടെയും കടന്നുപോകണം; അതായത്, താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, ഈ കുത്തുകൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര തന്നെയാണ്. അപ്പോൾ ഈ കുത്തുകൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര താഴത്തെ വശത്തിന് സമാന്തരമാണ്.



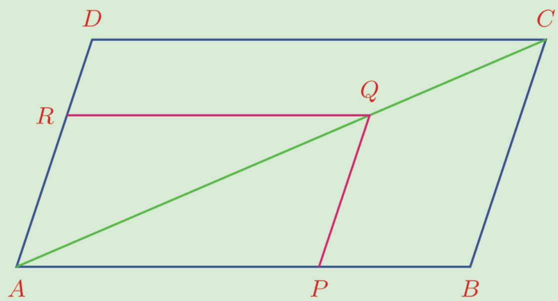

ഏതു ത്രികോണത്തിലും രണ്ടു വശങ്ങളെ ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന വര, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമാണ്.

(1) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ പച്ച വര, നീല ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു വശത്തിനു സമാന്തരമാണ്.




ഈ വര ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

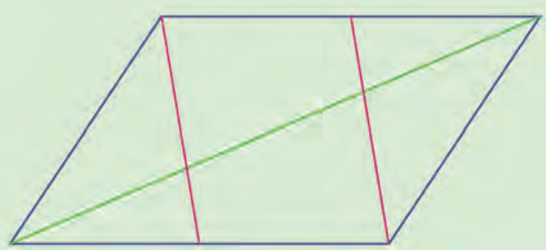
(2) $ABCD$ എന്ന സാമാന്തരികത്തിൽ $AB$ യിലെ $P$ എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടി $BC$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, $AC$ യുമായി $Q$ ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. $Q$ യിലൂടെ $AB$ യ്ക്കു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, $AD$ യുമായി $R$ ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.




(i) $\frac{AP}{PB} = \frac{AR}{RD}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

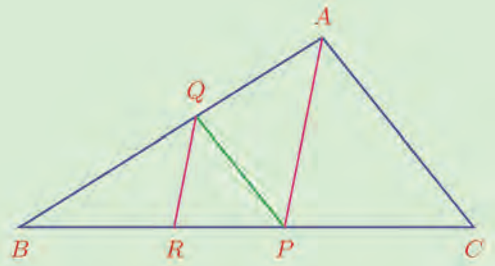
(ii) $\frac{AP}{AB} = \frac{AR}{AD}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ടു മൂലകളെ, രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളുമായി യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



ഈ വരകൾ ചിത്രത്തിലെ വികർണ്ണത്തെ മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു എന്നു തെളിയിക്കുക.

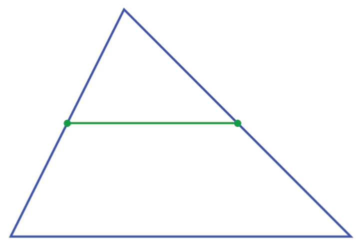
(4) $ABC$ എന്ന ത്രികോണത്തിൽ, $BC$ യിലെ $P$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ $AC$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, $AB$ യുമായി $Q$ യിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. $Q$ ൽ നിന്ന് $AP$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, $BC$ യുമായി $R$ ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു.




$\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{BR}{RP}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

## മധ്യഭാഗം

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



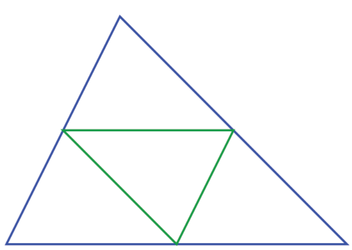
ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽക്കൂടി, താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരച്ചതാണ് ഉള്ളിലെ പച്ച വര.

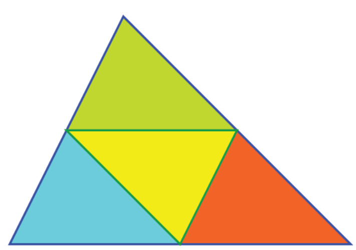
ഇത് ഇടതുവശത്തെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ ആ വശത്തിന്റെ പകുതി ആയതിനാൽ, വലതുവശത്തെയും സമഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു; അതായത്, വലതുവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നു. തിരിച്ചായാലോ ? ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, അവ രണ്ടിനേയും $1 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണല്ലോ ഭാഗിക്കുന്നത്. അതിനാൽ ആ വര, താഴത്തെ വശത്തിന് സമാന്തരമാണ്.

ഇതും എടുത്തുപറയേണ്ട ഒരു കാര്യമാണ്.

ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി മറ്റൊരു വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന വര, മൂന്നാമത്തെ വശത്തെ മുട്ടുന്നതും അതിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലാണ്. മറിച്ച്, ഏതു ത്രികോണത്തിലും രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു വരയ്ക്കുന്ന വര, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരവുമാണ്.

ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാലോ ?





ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെയും ഉള്ളിലുള്ള ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം ? വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി നോക്കൂ.

ഈ നാലു ചെറുത്രികോണങ്ങളെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ? നടുവിലെ മഞ്ഞത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കു സമാന്തരമാണ്.

ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണെന്നു തോന്നുന്നില്ലേ? അതു ശരിയാണോ എന്നു നോക്കാം.

ആദ്യം നീലത്രികോണവും മഞ്ഞത്രികോണവും എടുക്കാം. നീലത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശവും മഞ്ഞത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശവും ഒരേ വരയാണ്.

നീലത്രികോണത്തിന്റെ ഈ വശത്തിന്റെ മുകളിലെ കോണും, മഞ്ഞത്രികോണത്തിൽ ഈ വശത്തിന്റെ താഴെയുള്ള കോണും തുല്യമാണ് (എന്തുകൊണ്ട് ?); നീലത്രികോണത്തിലെ താഴത്തെ കോണും മഞ്ഞത്രികോണത്തിലെ മുകളിലെ കോണും തുല്യമാണ്.

അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണ്. ഇതുപോലെ പച്ചത്രികോണവും, ചുവന്ന ത്രികോണവും എല്ലാം മഞ്ഞത്രികോണത്തിനു തുല്യമാണെന്നു കാണാം. അതായത്, ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളും തുല്യമാണ്.

ഇതിൽനിന്ന് മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി കിട്ടും. ഈ നാലു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമായതിനാൽ, ഓരോ വശവും വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശത്തിന്റെ പകുതിയാണ്. അതായത് :

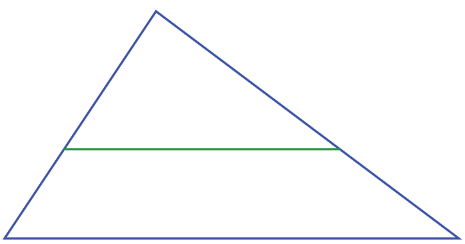
**ഏതു ത്രികോണത്തിലും രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ നീളം, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.**

ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുവരയ്ക്കുന്ന വര മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന് സമാന്തരമാണെന്നും കണ്ടല്ലോ.

അപ്പോൾ ഇക്കാര്യവും, ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞ തത്വവും ചേർത്ത് ഇങ്ങനെ പറയാം:

**ഏതു ത്രികോണത്തിലും രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരവും അതിന്റെ പകുതിയുമാണ്.**

ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിൽ കാണാം. ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ മറ്റൊരു ചെറിയ ത്രികോണം ഉണ്ടാക്കുന്നുണ്ടല്ലോ.



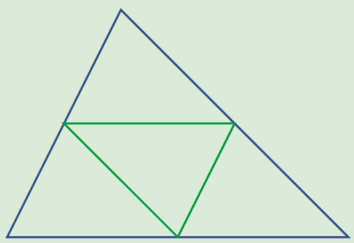
ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളിൽത്തന്നെയാണ്. ഈ ചെറിയ വശങ്ങൾ, വലിയ വശങ്ങളുടെ ഒരേ ഭാഗമാണെന്നതും കണ്ടു.

ഈ ഭാഗങ്ങൾ പകുതിയാണെങ്കിൽ, മൂന്നാമത്തെ വശവും പകുതിതന്നെ ആണെന്നാണ് ഇപ്പോൾ കണ്ടത്.

രണ്ടു വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്നത് മൂന്നിലൊന്നായിട്ടാണെങ്കിലോ ? ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം വശവും, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം വശത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നുതന്നെ ആകുമോ ?

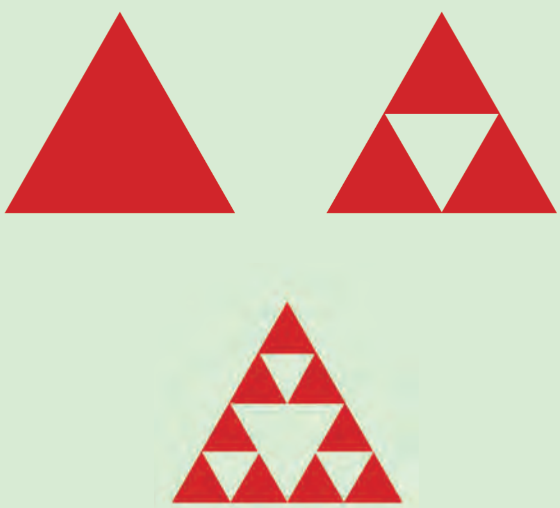
രണ്ടു വശങ്ങളെ മുറിക്കുന്നത് ഏതു ഭാഗമായിട്ടാണെങ്കിലും, മൂന്നാമത്തെ വശവും അതേ ഭാഗം തന്നെയാണെന്ന് പിന്നീട് കാണാം.

(1) ചിത്രത്തിൽ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് മറ്റൊരു ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് ? പരപ്പളവോ ?

(2) ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത ഒരു ത്രികോണമാണ് ആദ്യചിത്രം. അതിൽ നിന്ന് വശങ്ങളുടെ

## കാൽക്കണക്ക്

ചിത്രത്തിലെ ഓരോ ചെറിയ ത്രികോണവും വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗമാണല്ലോ:

ചുവടെയുള്ള മൂന്നു ത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം എടുത്താൽ, $\frac{3}{4}$ ഭാഗം, മുകളിലെ മഞ്ഞ ത്രികോണം, ബാക്കി $\frac{1}{4}$ ഭാഗം. ഈ ചിത്രത്തിലോ ?

നീലയും ചുവപ്പും പച്ചയും ചേർന്ന് $3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\right)$ ഭാഗം, മഞ്ഞ $\frac{1}{16}$ ഭാഗം. അടുത്ത ചിത്രത്തിലോ ?

നീല, പച്ച, ചുവപ്പു ത്രികോണങ്ങൾ ക്രമേണ വലിയ ത്രികോണത്തെ നിറയ്ക്കുന്നുണ്ടല്ലോ.

ഇക്കാര്യം സംഖ്യകളായി പറഞ്ഞാൽ, $\frac{3}{4}$,

$3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\right)$, $3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}\right)$ ... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സംഖ്യകൾ 1 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

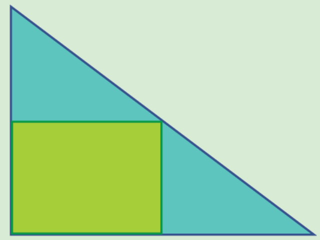
അതായത്, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സംഖ്യകൾ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചുകിട്ടുന്ന നടുവിലെ ചെറിയ ത്രികോണം വെട്ടിമാറ്റിയതാണ് രണ്ടാമത്തെ ചിത്രം. ഇതിലെ മൂന്നു ത്രികോണങ്ങളിൽനിന്നും ഇതുപോലെ നടുവിലെ ത്രികോണം വെട്ടിമാറ്റിയതാണ് മൂന്നാമത്തെ ചിത്രം.

(i) രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലെ കടലാസിന്റെ പരപ്പളവ്, ആദ്യ ചിത്രത്തിലെ പരപ്പളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

(ii) മൂന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിലോ?

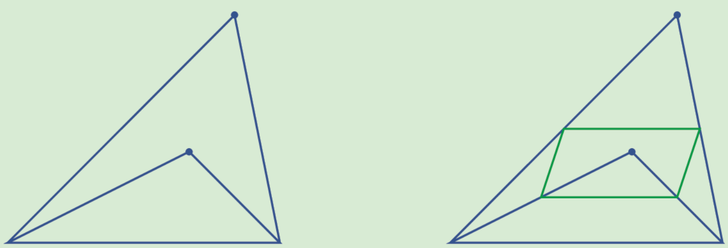
(3) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മട്ടമൂലയും, വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളും മൂലകളായി ഒരു ചതുർഭുജം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



(i) ഈ ചതുർഭുജം ചതുരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(ii) ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

(4) ചുവടെയുള്ള ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ, ഒരു വരയുടെ മുകളിലെ രണ്ടു കുത്തുകൾ വരയുടെ അറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിച്ച് രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ, ത്രികോണങ്ങളുടെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ചതുർഭുജവും:



(i) ഈ ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാണെന്നു തെളിയിക്കുക

(ii) ഈ ചതുർഭുജം ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ രൂപങ്ങളുമാകാൻ, മുകളിലെ കുത്തുകൾ എവിടെ ആയിരിക്കണമെന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

(a) സമഭുജസാമാന്തരികം (b) ചതുരം

(c) സമചതുരം

(iii) ഒരു കുത്ത് വരയുടെ മുകളിലും ഒരു കുത്ത് താഴെയുമായി എടുത്താലും ഇതെല്ലാം ശരിയാകുമോ?

(5) (i) ഏതു ചതുർഭുജത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

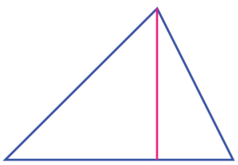
AB എന്ന ഒരു വര വരച്ച് അതിനു മുകളിലായി രണ്ടു കുത്തുകൾ C, D ഇവ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ കുത്തുകളെ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളുമായി യോജിപ്പിച്ച് രണ്ട് ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ ഇടതും വലതുമുള്ള വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി അവ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ചതുർഭുജം നിർമ്മിക്കുക. ഈ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പ്രത്യേകത എന്താണ്? C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. ഈ ചതുർഭുജം സമഭുജ സാമാന്തരികം, ചതുരം, സമചതുരം എന്നിവ ആകണമെങ്കിൽ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം എവിടെയായിരിക്കണം? C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ AB യുടെ രണ്ടു വശങ്ങളിലാകുമ്പോൾ ഇതെല്ലാം ശരിയാകുമോ?

(ii) അകത്തെ ചതുർഭുജം ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ രൂപങ്ങളുമാകാൻ, ആദ്യത്തെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ എന്തായിരിക്കണമെന്നു വിശദീകരിക്കുക.

(a) സമഭുജസാമാന്തരികം (b) ചതുരം (c) സമചതുരം

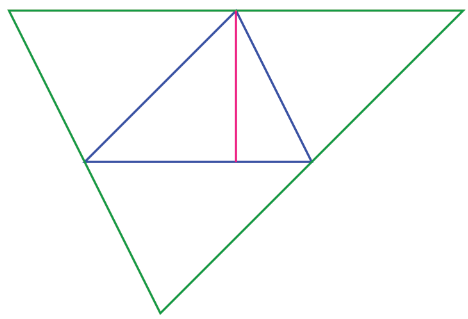
## ത്രികോണകേന്ദ്രങ്ങൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽമൂലയിൽ നിന്ന് താഴത്തെ വശത്തേക്ക് ലംബം വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ ഏതു മൂലയിൽ നിന്നും എതിർവശത്തേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കാമല്ലോ. ഈ ലംബങ്ങളെ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരങ്ങൾ (altitudes) എന്നാണ് പറയുന്നത് (ഉന്നതികൾ എന്നും പറയാം).

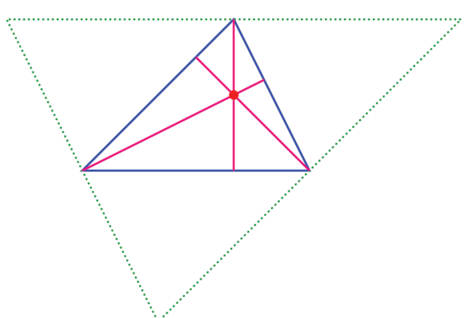
ഇനി ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയിൽനിന്നും എതിർവശത്തിനു സമാന്തരമായ വര വരച്ചാലോ?



ചുവന്ന വര വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ വശത്തിനു ലംബം മാത്രമല്ല, അതിന്റെ സമഭാജിയും കൂടിയാണ്.

അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റ് ഉയരങ്ങളും വരച്ചാൽ, അവ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെയും ലംബസമഭാജികൾ ആകും.

ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും മൂന്നു ലംബസമഭാജികളും ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ പരസ്പരം മുറിച്ചുകടക്കുമെന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ:



ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ ഓരോ മൂലയിൽ നിന്നും എതിർവശത്തേക്കുള്ള ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഇവ മൂന്നും ഒരേ ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നുണ്ടോ? ഇവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു (ലംബകേന്ദ്രം) അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കൂ. ലംബകേന്ദ്രം എല്ലായ്പ്പോഴും ത്രികോണത്തിനകത്തു തന്നെയാണോ? ഒരു കോൺ മട്ടമാകുമ്പോൾ ലംബകേന്ദ്രത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തിന് എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്? മട്ടത്തേക്കാൾ കൂടിയാലോ?

വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബസമഭാജികൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതികൾ ആണ്.

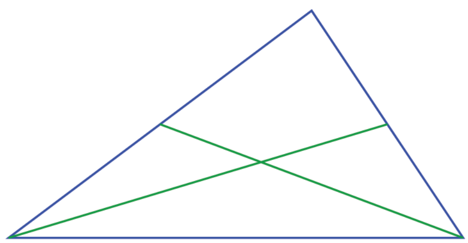
അപ്പോൾ ഇവിടെ കണ്ടത് എന്താണ്?

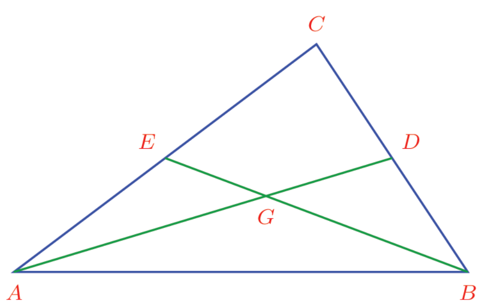
**ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും ഉന്നതികളെല്ലാം ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും.**

ഉന്നതികൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ഈ ബിന്ദുവിനെ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രം (orthocentre) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ വരയ്ക്കുന്ന ചില സവിശേഷ വരകളാണ് ലംബസമഭാജികളും, ഉന്നതികളും. ഇതുപോലെയുള്ള മറ്റു വരകളാണ്, ഓരോ മൂലയും എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും ചേർത്തു വരയ്ക്കുന്ന വരകൾ. ഇവയുടെ പേര് നടുവരകൾ (medians) എന്നാണെന്ന് നേരത്തെ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇവയും ഒറ്റബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുമോ?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:





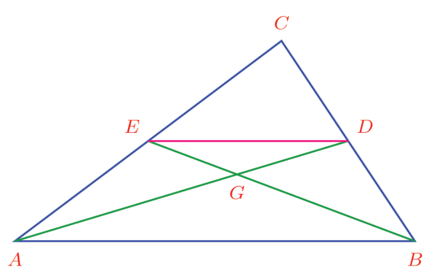

ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു നടുവരകൾ വരച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടിത്തന്നെ മൂന്നാമത്തെ നടുവരയും കടന്നുപോകുമോ എന്നാണ് അറിയേണ്ടത്.

വരച്ചു നോക്കാം. പക്ഷേ എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളിലും ഇതു ശരിയാണെന്നതിന് തെളിവു വേണ്ടേ? അതിന്, ചിത്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം പേരു കൊടുക്കാം:

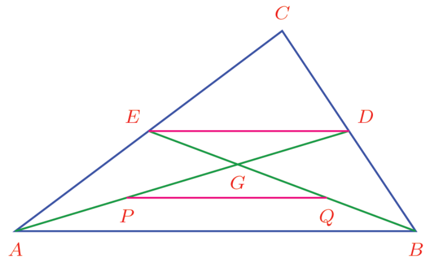
ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയിൽനിന്നും എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലേക്ക് വരയ്ക്കുക (നടുവര). മൂന്ന് നടുവരകളും ഒരേ ബിന്ദുവിലാണോ കൂട്ടിമുട്ടുന്നത്? ഈ ബിന്ദു (മധ്യമകേന്ദ്രം) അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഓരോ മൂലയിൽനിന്നും മധ്യമകേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള അകലവും അവിടെ നിന്ന് എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലവും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ അകലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്? ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കൂ.

ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരവും അതിന്റെ പകുതിയുമാണ്; അതായത്,

$$ED = \frac{1}{2}AB$$



ഇനി താഴത്തെ വശത്തിന്മേൽത്തന്നെ $GAB$ എന്ന മറ്റൊരു ചെറിയ ത്രികോണമുണ്ടല്ലോ; അതിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ കൂടി യോജിപ്പിച്ചാലോ?



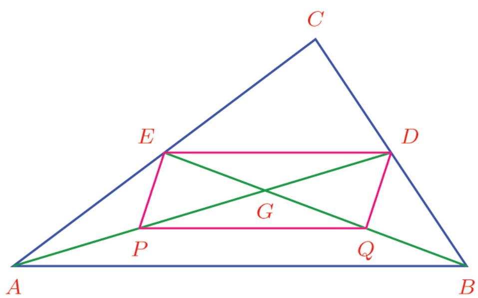

$$PQ = \frac{1}{2}AB$$

അപ്പോൾ,

$$PQ = ED$$

$PQDE$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിലെ, $PQ$, $ED$ എന്നീ വശങ്ങൾ തുല്യവും സമാന്തരവുമായതിനാൽ, ഈ ചതുർഭുജമൊരു സാമാന്തരികമാണ്; അതിനാൽ അവയുടെ വികർണ്ണങ്ങളായ $PD$, $QE$ ഇവ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യും; അതായത്,

$$PG = GD \qquad QG = GE$$




$AG$ യുടെ മധ്യബിന്ദു $P$ യും $BG$ യുടെ മധ്യബിന്ദു $Q$ യും ആയതിനാൽ

$$AP = PG \qquad BQ = QG$$

അപ്പോൾ,

$$AG = AP + PG = 2PG = 2GD$$

എന്നും

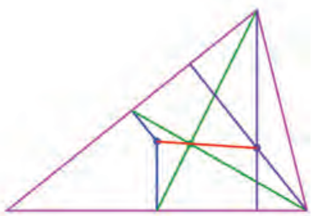
$$BG = BQ + QG = 2QG = 2GE$$

എന്നും കിട്ടും.

ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രം അടയാളപ്പെടുത്തുക. (Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നതെങ്കിൽ Midpoint or Centre ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മധ്യമകേന്ദ്രം ലഭിക്കും). മധ്യമകേന്ദ്രവും ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് മൂലകളും ചേർത്ത് ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇത്തരത്തിൽ മൂന്ന് ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാമല്ലോ. ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ കാണുക. അവ തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം ? ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ.

## ഓയ്‌ലർ വര

ഏതു ത്രികോണത്തിലും പരിവൃത്തകേന്ദ്രം, മധ്യമകേന്ദ്രം, ലംബകേന്ദ്രം ഇവ ഒരേ വരയിലായിരിക്കും എന്ന് പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിലെ പ്രസിദ്ധ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ ഓയ്‌ലർ കണ്ടുപിടിച്ചു. ഓയ്‌ലർ വര (Euler line) എന്നാണ് ഈ വര അറിയപ്പെടുന്നത്.



ചിത്രത്തിൽ നീല വരകൾ, രണ്ടു വശങ്ങളുടെ ലംബസമഭാജികളാണ്, ഇവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു, പരിവൃത്തകേന്ദ്രം. പച്ച വരകൾ, നടുവരകൾ; അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്നത്, മധ്യമ കേന്ദ്രം, വയലറ്റ് വരകൾ ഉന്നതികൾ; അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്നത്, ലംബകേന്ദ്രം.

ഈ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും കടന്നുപോകുന്ന ചുവന്ന വരയാണ്, ഓയ്‌ലർ വര.

ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും മധ്യമകേന്ദ്രം, പരിവൃത്തകേന്ദ്രത്തിന്റെയും ലംബകേന്ദ്രത്തിന്റെയും ഇടയ്ക്കായിരിക്കുമെന്നും, ഇവയെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ $1 : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കും എന്നുകൂടി ഓയ്‌ലർ തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ പരിവൃത്ത കേന്ദ്രവും മധ്യമകേന്ദ്രവും ലംബകേന്ദ്രവും കണ്ടുപിടിക്കുക. ഈ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വര വരയ്ക്കുക. (ഓയ്‌ലർ വര). ഇത് മൂന്നാമത്തെ ബിന്ദുവിലൂടെയും കടന്നുപോകുന്നുണ്ടോ ? ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റിനോക്കൂ. രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമാകുമ്പോൾ ഓയ്‌ലർ വരയ്ക്ക് എന്തു സംഭവിക്കും ? മൂന്നു വശങ്ങളും തുല്യനീളമാകുമ്പോൾ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾക്കും എന്ത് സംഭവിക്കും ?

അതായത്, $G$ എന്ന ബിന്ദു, $AD$, $BE$ എന്നീ വരകളെ $2 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു. ഇനി $A$, $B$ ഇവയെ എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്നതിനു പകരം, $B$, $C$ എന്നീ മൂലകളെ എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലോ ?

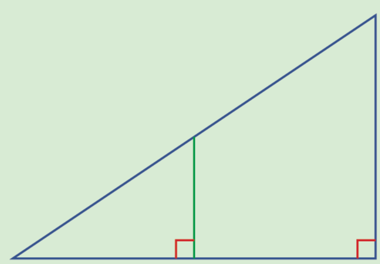
അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു $BE$ യെ $2 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കും; അതായത്, മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു $G$ തന്നെയാണ്.

ഇപ്പോൾ കണ്ട കാര്യം എങ്ങനെ പറയാം ?

**ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും നടുവരകൾ മൂന്നും ഒറ്റ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും; ഓരോ മൂലയിൽ നിന്നും ഈ ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം, എതിർവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്; അതായത്, ഈ ബിന്ദു നടുവരകളെയെല്ലാം $2 : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കും.**

നടുവരകളെല്ലാം കടന്നുപോകുന്ന ഈ ബിന്ദുവിന് ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രം (centroid) എന്നാണ് പേര്.

(1) ഒരു മട്ടത്രികോണം വരച്ച്, കർണ്ണത്തിന്റെ മധ്യ ബിന്ദുവിൽനിന്ന് പാദത്തിലേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക:



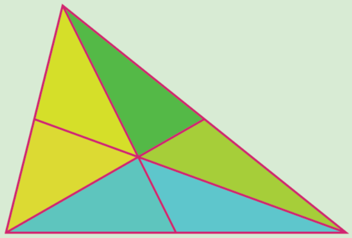
(i) ഈ ലംബം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബത്തിന്റെ പകുതിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക

(ii) വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽനിന്ന് മൂന്നു മൂലകളിലേയ്ക്കുമുള്ള അകലം തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(iii) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തകേന്ദ്രം, കർണ്ണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

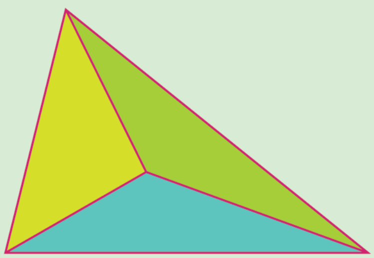
(2) ഏതു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെയും, പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം, ലംബകേന്ദ്രം, മധ്യമകേന്ദ്രം ഇവയെല്ലാം ഒരേ ബിന്ദുവാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(3) ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തെ നടുവരകൾ ആറു ചെറു ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു.



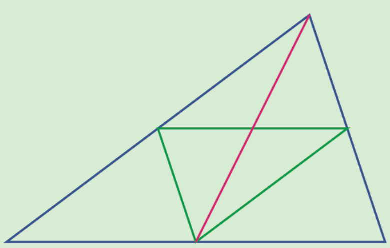
ഈ ആറു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ പരപ്പളവാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിൽ, മധ്യമകേന്ദ്രവും മൂന്നു മൂലകളും യോജിപ്പിച്ച്, ത്രികോണത്തെ മൂന്നു ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു.



മൂന്നു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ പരപ്പളവാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(5) ചിത്രത്തിലെ നീലത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാണ് ചെറിയ പച്ച ത്രികോണം വരച്ചിരിക്കുന്നത്. ചുവന്ന വര വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു നടുവരയാണ്.



## സമതുലനം

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലെ കണക്കുകൂട്ടലുകളിൽ പലപ്പോഴും ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഭാരം മുഴുവൻ ഒരു ബിന്ദുവിൽ കേന്ദ്രീകരിച്ചതായി സങ്കല്പിക്കാറുണ്ട്. ഈ ബിന്ദുവിനെ ദ്രവ്യകേന്ദ്രം (center of mass) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇത് പ്രയോഗത്തിൽ അനുഭവപ്പെടുന്നത്, ഈ ബിന്ദുവിൽ മാത്രം താങ്ങുകൊടുത്ത് അതിനെ വീഴാതെ നിർത്താം എന്നതിലൂടെയാണ്.

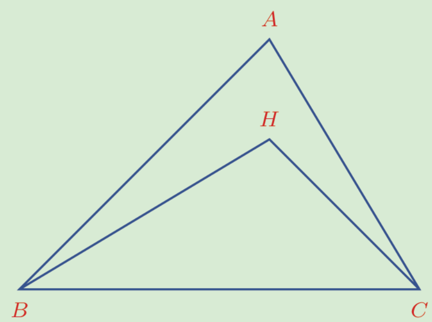
കട്ടികടലാസിലോ, തകിടിലോ വെട്ടിയെടുത്ത ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ദ്രവ്യകേന്ദ്രം, അതിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രം തന്നെയാണ്.

ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ മൂലയിൽനിന്നും എതിർ വശത്തേക്കുള്ള ലംബം വരച്ച് എതിർവശവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രം അടയാളപ്പെടുത്തി ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ ലംബകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. ഈ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരച്ചുനോക്കൂ (Circle through 3 Points ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം). ലംബങ്ങൾ എതിർവശവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളും വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളും ഒരു വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയല്ലേ ? ഈ ഒമ്പത് ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഈ വൃത്തത്തെ Nine Point Circle എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്.

(i) ഈ നടുവര, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മുകൾവശത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നുവെന്നു തെളിയിക്കുക.

(ii) വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രം, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെയും മധ്യമകേന്ദ്രമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(6) ചിത്രത്തിൽ, $ABC$ എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രമാണ് $H$.



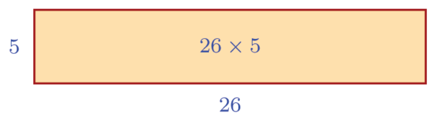

$HBC$ എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബകേന്ദ്രം $A$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

4

# ഗുണനസമവാക്യങ്ങൾ

## തുകകളുടെ ഗുണനം

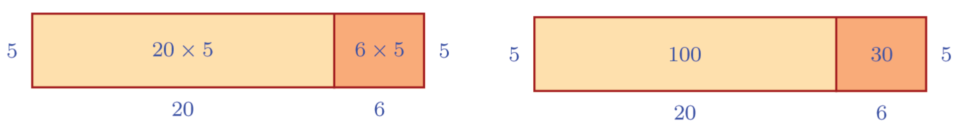
26 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും, 5 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?




നേരിട്ടു ചെയ്യാതെ ഇങ്ങനെ എഴുതിയാലോ ?

$$26 \times 5 = (20 + 6) \times 5$$

ചിത്രത്തെയും ഇതുപോലെ ഭാഗിക്കാം:



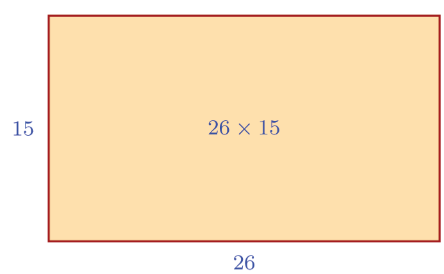

അപ്പോൾ പരപ്പളവ്

$$100 + 30 = 130 \text{ ചസെമീ}$$

ഇവിടെ ചെയ്ത ക്രിയ എന്താണ് ?

$$\begin{aligned} 26 \times 5 &= (20 + 6) \times 5 \\ &= (20 \times 5) + (6 \times 5) \\ &= 100 + 30 \\ &= 130 \end{aligned}$$

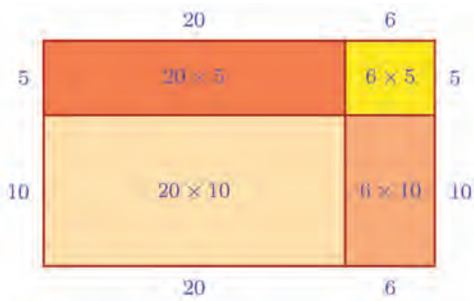
ഇനി 26 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും, 15 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ചതുരം ആയാലോ ?

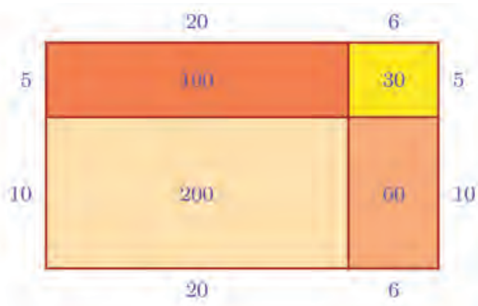


നേരിട്ടു ഗുണിക്കാതെ,

$$26 \times 15 = (20 + 6) \times (10 + 5)$$

എന്നെഴുതി, ചിത്രത്തെയും ഇതുപോലെ ഭാഗിച്ചാൽ കണക്കുകൂട്ടൽ എളുപ്പമാകും:




ഇനി പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാമല്ലോ:

$$200 + 100 + 60 + 30 = 390$$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ഈ സംഖ്യകൾ കിട്ടിയ ക്രിയകൾ എഴുതിയാലോ ?

$$\begin{aligned} 26 \times 15 &= (20 + 6) \times (10 + 5) \\ &= (20 \times 10) + (20 \times 5) + (6 \times 10) + (6 \times 5) \\ &= 200 + 100 + 60 + 30 \\ &= 390 \end{aligned}$$

സാധാരണയായി, സംഖ്യകൾ ഒന്നിനുതാഴെ മറ്റൊന്നെഴുതി ഗുണിക്കുമ്പോഴും ഇതുതന്നെയല്ലേ (വേറൊരു ക്രമത്തിൽ) ചെയ്യുന്നത് ?

$$\begin{array}{r l} 26\ \times & \\ 15 & \\ \hline 130 & \leftarrow 26 \times 5 \ = (6 + 20) \times 5 \ \ = 30 + 100 \\ 260 & \leftarrow 26 \times 10 = (6 + 20) \times 10 = 60 + 200 \\ \hline 390 & \end{array}$$

ഇവിടെ ചെയ്ത ക്രിയകൾ അല്പം കൂടി വിശദമാക്കാം:

20 + 6 എന്ന തുകയെ 10 + 5 എന്ന തുക കൊണ്ടു ഗുണിക്കാൻ, ആദ്യത്തെ തുകയിലെ 20, 6 എന്നീ സംഖ്യകളെ, രണ്ടാമത്തെ തുകയിലെ 10, 5 എന്ന ഓരോ സംഖ്യകൾ കൊണ്ടും ഗുണിച്ച്, അങ്ങനെ കിട്ടുന്ന നാലു ഗുണനഫലങ്ങളും കൂട്ടി.

തുകകളിലെ സംഖ്യകൾ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ തന്നെ ആകണമെന്നില്ല.

ഉദാഹരണമായി

$$6\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{3} = \left(6+\frac{1}{2}\right) \times \left(8+\frac{1}{3}\right)$$
$$= (6 \times 8) + \left(6\times\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\times 8\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)$$
$$= 48 + 2 + 4 + \frac{1}{6}$$
$$= 54\frac{1}{6}$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ,

തുകയെ തുക കൊണ്ടു ഗുണിക്കാൻ, ആദ്യത്തെ തുകയിലെ ഓരോ സംഖ്യയേയും രണ്ടാമത്തെ തുകയിലെ ഓരോ സംഖ്യകൊണ്ടും ഗുണിച്ച്, ഗുണനഫലങ്ങളെല്ലാം കൂട്ടണം.

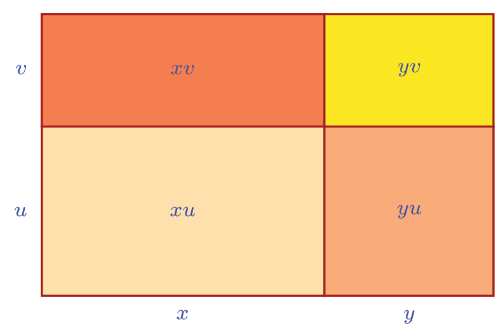
ഇത് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാലോ ?

ആദ്യത്തെ തുക $x + y$ എന്നും, രണ്ടാമത്തെ തുക $u + v$ എന്നും എടുക്കാം. ഇവയുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, $xu$, $xv$, $yu$, $yv$ ഇവയെല്ലാം കൂട്ടണം. അതായത്,

$x$, $y$, $u$, $v$ എന്ന ഏതു നാല് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$(x + y)(u + v) = xu + xv + yu + yv$$

പരപ്പളവുകളുടെ കണക്കായി ഇത് ഇങ്ങനെ കാണാം.




ചില കണക്കുകൂട്ടലുകൾ എളുപ്പമാക്കാൻ മേല്പറഞ്ഞ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, $31 \times 51$ നോക്കുക.

$30 \times 50 = 1500$ എന്നു മനസ്സിൽത്തന്നെ ചെയ്യാമല്ലോ.

ഇപ്പോൾ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച്,

$$31 \times 51 = (30 + 1) \times (50 + 1) = 1500 + 30 + 50 + 1 = 1581$$

എന്നു മനസ്സിൽ കൂട്ടാം.

ഇവിടെ ഉപയോഗിച്ച ബീജഗണിത സമവാക്യം എന്താണ് ?

$$(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$$

അതായത്, രണ്ടു എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം അറിയാമെങ്കിൽ, തൊട്ടടുത്ത എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും തുകയും, പിന്നെ ഒന്നും കൂടി കൂട്ടിയാൽ മതി.

ഉദാഹരണമായി,

$$21 \times 71 = (20 \times 70) + 20 + 70 + 1 = 1400 + 91 = 1491$$

$$81 \times 91 = (80 \times 90) + 80 + 90 + 1 = 7200 + 171 = 7371$$

$$201 \times 401 = (200 \times 400) + 200 + 400 + 1 = 80000 + 601 = 80601$$

ഒന്നു കൂട്ടിയ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം പോലെ, രണ്ടു കൂട്ടിയ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാൻ എളുപ്പവഴിയുണ്ടോ? ആലോചിച്ചുനോക്കൂ.

ചില ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കണക്കാക്കാനും മേല്പറഞ്ഞ പൊതുതത്വം ഉപയോഗിക്കാം:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) = xy + \left(x \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times y\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = xy + \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{4}$$

അപ്പോൾ

$$6\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2} = 48 + \left(\frac{1}{2} \times 14\right) + \frac{1}{4} = 48 + 7 + \frac{1}{4} = 55\frac{1}{4}$$

$$10\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2} = 50 + \left(\frac{1}{2} \times 15\right) + \frac{1}{4} = 50 + 7\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 57\frac{3}{4}$$

എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം.

(1) ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ മനസ്സിൽത്തന്നെ ചെയ്ത് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക:

(i) $71 \times 91$ (ii) $42 \times 62$ (iii) $10\frac{1}{2} \times 6\frac{1}{2}$ (iv) $9.5 \times 3.5$ (v) $10\frac{1}{4} \times 6\frac{1}{4}$

(2) രണ്ടു എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 1400 ഉം, തുക 81 ഉം ആണ്. ഇവ ഓരോന്നിന്റേയും തൊട്ടടുത്ത രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം എന്താണ് ?

(3) രണ്ടു ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 621 ഉം, തുക 50 ഉം ആണ്. ഈ ഓരോ ഒറ്റസംഖ്യയുടേയും തൊട്ടടുത്തുള്ള രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം എന്താണ് ?

## ക്രിയാവിശേഷങ്ങൾ

സംഖ്യാക്രിയകളെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുവായ ചില തത്വങ്ങളാണല്ലോ സർവസമവാക്യങ്ങളായി ബീജഗണിതത്തിൽ എഴുതുന്നത്. ഇവയുപയോഗിച്ച് മറ്റു ചില പൊതുതത്വങ്ങൾ തെളിയിക്കുകയു മാകാം.

ഉദാഹരണമായി,

രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും ഒറ്റസംഖ്യ തന്നെയാണെന്ന് ചില ഒറ്റസംഖ്യാജോടികളെ ടുത്ത് പരിശോധിച്ചാൽ കാണാം. ഇത് ഏതു രണ്ടു ഒറ്റസംഖ്യകൾക്കും ശരിയാണെന്ന് എങ്ങനെ തെളിയിക്കും ?

ഒറ്റസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം പൊതുരൂപം

$$2n + 1, n = 0, 1, 2, 3,...$$

എന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകൾ പൊതുവായി $2m + 1$, $2n + 1$ എന്നെടുക്കാം. ഇവയുടെ ഗുണനഫലം

$$(2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1$$

ഇതും ഒറ്റസംഖ്യ ആണോ ?

അല്പം മാറ്റിയെഴുതിയാലോ ?

$$(2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$$

ഗുണനഫലവും ഒറ്റസംഖ്യ തന്നെയാണെന്ന് ഇപ്പോൾ വ്യക്തമായില്ലേ ?

ഒറ്റസംഖ്യകളെന്നാൽ, രണ്ടുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 മിച്ചം വരുന്ന സംഖ്യകളെന്നും പറയാമല്ലോ.

അപ്പോൾ മൂന്നു കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 മിച്ചം വരുന്ന സംഖ്യകളുടെ പൊതുരൂപം എന്താണ് ?

അവയെല്ലാം മൂന്നിന്റെ ഗുണിതത്തിനോട് 1 കൂട്ടിയവയല്ലേ ?

അങ്ങനെ ആലോചിച്ചാൽ പൊതുരൂപം എഴുതാമല്ലോ.

$$3n + 1, n = 0, 1, 2, 3, ...$$

ഇങ്ങനെയുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകൾ ഗുണിച്ചാലോ ?

$$(3m + 1)(3n + 1) = 9mn + 3m + 3n + 1$$

ഗുണനഫലത്തെയും മൂന്നു കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മിച്ചം ഒന്നുതന്നെയാണോ? അത് അറിയാൻ മുകളിലെ സമവാക്യം ഇങ്ങനെ മാറ്റിയാൽപ്പോരേ ?

$$(3m + 1)(3n + 1) = 3(3mn + m + n) + 1$$

ഇതും മൂന്നിന്റെ ഗുണിതത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയതല്ലേ ?

അതായത്, മൂന്നു കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഒന്നു മിച്ചം വരുന്ന സംഖ്യ.

**മറ്റൊരുതരത്തിലുള്ള കണക്കു നോക്കാം:**

ആദ്യത്തെ നാലു എണ്ണൽസംഖ്യകൾ 1, 2, 3, 4 ഇവയിൽ

അറ്റത്തുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $= 1 \times 4 = 4$

നടുക്കുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $= 2 \times 3 = 6$

2, 3, 4, 5 എടുത്താലോ ?

അറ്റത്തുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $= 2 \times 5 = 10$

നടുക്കുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $= 3 \times 4 = 12$

അടുത്തടുത്ത നാലു എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കുറേ എണ്ണം കൂടി പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ. ഗുണനഫലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എല്ലാറ്റിലും 2 തന്നെയാണോ ?

അടുത്തടുത്ത ഏതു നാലു എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്താലും ഇതു ശരിയാകുമോ ?

അത് തെളിയിക്കാൻ, പൊതുവായി അടുത്തടുത്തുള്ള നാല് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ $x$, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം.

അറ്റത്തുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $= x(x + 3) = x^2 + 3x$

നടുക്കുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $= (x + 1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$

അപ്പോൾ വ്യത്യാസം 2 ആണെന്ന് വ്യക്തമായില്ലേ ?

$x$ ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും ഈ സമവാക്യങ്ങൾ ശരിയാകും. എണ്ണൽസംഖ്യകളാണ് എടുക്കുന്നതെങ്കിൽ, ഈ തത്വം ഇങ്ങനെ പറയാം:

അടുത്തടുത്തുള്ള ഏതു നാലു എണ്ണൽസംഖ്യകളെടുത്താലും, അറ്റത്തുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും, നടുക്കുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം രണ്ട് ആണ്.

(1) ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ കാര്യവും, പല സംഖ്യകളെടുത്ത് പരിശോധിക്കുക. അവയിൽനിന്ന് പൊതുവായ ഒരു തത്വം ഊഹിക്കുക. ഊഹിച്ചത് ശരിയാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

(i) 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 മിച്ചം വരുന്ന ഒരു സംഖ്യയുടെയും, 2 മിച്ചം വരുന്ന ഒരു സംഖ്യയുടെയും, ഗുണനഫലത്തെ 3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള മിച്ചം.

(ii) 4 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 മിച്ചം വരുന്ന ഒരു സംഖ്യയുടെയും, 2 മിച്ചം വരുന്ന ഒരു സംഖ്യയുടെയും, ഗുണനഫലത്തെ 4 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള മിച്ചം.

(iii) അടുത്തടുത്തുള്ള ആറ് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ, അറ്റത്തുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകളുടെയും, നടുക്കുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകളുടെയും ഗുണനഫലം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം.

(2) $36 \times 28$ എന്ന ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു രീതി ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

| | | |
|---|---|---|
| $3 \times 2 = 6$ | $6 \times 100$ | 600 |
| $(3 \times 8) + (6 \times 2) = 36$ | $36 \times 10$ | 360 |
| $6 \times 8$ | | 48 |
| $36 \times 28$ | | 1008 |

(i) മറ്റു ചില രണ്ടക്കസംഖ്യകളിൽ ഈ രീതി പരീക്ഷിക്കുക.

(ii) ഇത് ശരിയാകാനുള്ള കാരണം, ബീജഗണിതരീതിയിൽ വിശദീകരിക്കുക.

(രണ്ടക്കസംഖ്യകളെയെല്ലാം $10m + n$ എന്ന ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ എഴുതാമെന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർക്കുക).

## ക്രിയാകൗതുകങ്ങൾ

സംഖ്യാക്രിയകളിലെ ചില കൗതുകങ്ങൾ വിശദീകരിക്കാനും ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഈ ഗുണനങ്ങൾ നോക്കൂ:

$$12 \times 63 = 756$$
$$21 \times 36 = 756$$

സാധാരണയായി രണ്ടു രണ്ടക്കസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും, അവയുടെ അക്കങ്ങൾ തിരിച്ചിട്ടു കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും വ്യത്യസ്തമാണല്ലോ (പരീക്ഷിച്ചു നോക്കൂ). ഗുണനഫലങ്ങൾ ഒന്നുതന്നെയാകുന്ന വേറെ സംഖ്യകളുണ്ടോ ?

ഇതു നോക്കൂ:

$$32 \times 46 = 1472$$
$$23 \times 64 = 1472$$

ഇത്തരം ജോടികൾ ഇനിയുമുണ്ടോ ?

ഏതു രണ്ടക്ക സംഖ്യയെയും $10m + n$ എന്നെഴുതാമല്ലോ;

ആദ്യത്തെ അക്കം $m$, രണ്ടാമത്തെ അക്കം $n$.

അക്കങ്ങൾ തിരിച്ചെടുത്താലോ ?

ആദ്യത്തെ അക്കം $n$, രണ്ടാമത്തെ അക്കം $m$; സംഖ്യ $10n + m$

നമുക്കു വേണ്ടത്, രണ്ട് രണ്ടക്കസംഖ്യകളാണല്ലോ; അവയെ $10m + n$, $10p + q$ എന്നെടുക്കാം. അക്കങ്ങൾ തിരിച്ചെഴുതിയാൽ $10n + m$, $10q + p$

രണ്ടു ജോടികളുടെയും ഗുണനഫലം ഒന്നുതന്നെയാകുന്ന തരത്തിൽ $m, n, p, q$ എടുക്കാനാണ് നമ്മുടെ ശ്രമം.

ആദ്യത്തെ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം

$$(10m + n)(10p + q) = 100mp + 10mq + 10np + nq$$

അക്കങ്ങൾ തിരിച്ചെഴുതിയ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം

$$(10n + m)(10q + p) = 100nq + 10np + 10mq + mp$$

രണ്ടു ഗുണനഫലങ്ങളും നാലു സംഖ്യകളുടെ തുകയാണ്. അവ ഒത്തുനോക്കൂ. രണ്ട് തുകയിലും $10mq + 10np$ ഉണ്ട്. അപ്പോൾ ആകെ തുകകൾ തുല്യമാകാൻ, മറ്റു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകകൾ തുല്യമായാൽ മതിയല്ലോ. അതായത്,

$$100mp + nq = 100nq + mp$$

എന്താണ് ഇതിന്റെ അർത്ഥം ?

ഒരു സംഖ്യയുടെ നൂറു മടങ്ങും മറ്റൊരു സംഖ്യയും കൂട്ടിയാൽ, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയുടെ നൂറു മടങ്ങും ആദ്യത്തെ സംഖ്യയും കൂട്ടിയത് തന്നെ ആകുമോ ?

അപ്പോൾ $mp$, $nq$ എന്നീ ഗുണനഫലങ്ങൾ ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ ആകണം.

അതായത്

$$mp = nq$$

ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതരീതിയിലും കാണാം. $100mp + nq$, $100nq + mp$ എന്നിങ്ങനെ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ ഒന്നുതന്നെ ആകണമെങ്കിൽ, ഈ തുകകളുടെ വ്യത്യാസം പൂജ്യമാകണ്ടേ ? അതായത്

$$(100mp + nq) - (100nq + mp) = 0$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$99mp - 99nq = 0$$

എന്നു കിട്ടും. അല്പം മാറ്റി എഴുതിയാൽ

$$99(mp - nq) = 0$$

ഒരു സംഖ്യയുടെ 99 മടങ്ങ് പൂജ്യമാകണമെങ്കിൽ, ആ സംഖ്യതന്നെ പൂജ്യം ആയാലല്ലേ പറ്റൂ ? അതായത്

$$mp - nq = 0$$

അഥവാ

$$mp = nq$$

അപ്പോൾ നമ്മൾ അന്വേഷിക്കുന്ന രണ്ടക്ക സംഖ്യാജോടികളിലെല്ലാം, ആദ്യത്തെ അക്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലവും, രണ്ടാമത്തെ അക്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലവും ഒന്നുതന്നെ ആയിരിക്കണം.

ആദ്യം കണ്ട ഉദാഹരണത്തിലെ സംഖ്യകൾ 12, 63

ആദ്യത്തെ അക്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $= 1 \times 6 = 6$

രണ്ടാമത്തെ അക്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $= 2 \times 3 = 6$

രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിലോ ? സംഖ്യകൾ 32, 46

ആദ്യത്തെ അക്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $= 3 \times 4 = 12$

രണ്ടാമത്തെ അക്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $= 2 \times 6 = 12$

ഇതുപോലെ

$$2 \times 9 = 18$$

$$3 \times 6 = 18$$

ആയതിനാൽ, $23 \times 96$ ഉം $32 \times 69$ ഉം ചെയ്താൽ ഒരേ സംഖ്യ കിട്ടും (പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ). മറ്റു ചില ജോടികൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ ?

കലണ്ടറിലെ സംഖ്യകളുടെ തുകകളെക്കുറിച്ചുള്ള ചില രസകരമായ കാര്യങ്ങൾ ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. ഇനി അവയുടെ ഗുണനഫലങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു കണക്കു നോക്കാം.

കലണ്ടറിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു മാസമെടുത്ത്, ഒരു സമചതുരത്തിൽ വരുന്ന നാലു സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക:

| ഞായർ | തിങ്കൾ | ചൊവ്വ | ബുധൻ | വ്യാഴം | വെള്ളി | ശനി |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | |


കോണോടുകോൺ വരുന്ന സംഖ്യകൾ ഗുണിച്ചുനോക്കൂ:

$$14 \times 6 = 84$$

$$13 \times 7 = 91$$

ഇവയുടെ വ്യത്യാസം

$$91 - 84 = 7$$

ഇതുപോലെ സമചതുരത്തിനുള്ളിൽ വരുന്ന മറ്റു നാലു സംഖ്യകൾ എടുത്തു നോക്കൂ.

$$22 \times 30 = 660$$

$$23 \times 29 = 667$$

$$667 - 660 = 7$$

വ്യത്യാസം എപ്പോഴും 7 തന്നെയാകാൻ കാരണമെന്താണ് ?

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചുനോക്കാം:

സമചതുരത്തിലെ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ $x$ എന്നെടുത്താൽ, നാലു സംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

| | |
|---|---|
| $x$ | $x+1$ |
| $x+7$ | $x+8$ |

കോണോടുകോൺ ഗുണനഫലങ്ങൾ $x(x + 8)$ ഉം $(x + 1)(x + 7)$ ഉം ആണല്ലോ.

ഇതിൽ ആദ്യത്തെ ഗുണനഫലം

$$x(x + 8) = x^2 + 8x$$

രണ്ടാമത്തെ ഗുണനഫലം

$$(x + 1)(x + 7) = x^2 + 7x + x + 7 = x^2 + 8x + 7$$

രണ്ടു ഗുണനഫലങ്ങളും നോക്കൂ.

വ്യത്യാസം 7 അല്ലേ ?

ഇതിൽ $x$ ആയി ഏതു സംഖ്യയും എടുക്കാമല്ലോ; അതായത്, കലണ്ടറിന്റെ ഏതുഭാഗത്തും ഇതു ശരിയാണ്.

വേറൊരു കണക്ക്:

ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു ഗുണിതപ്പട്ടിക ഉണ്ടാക്കുക.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

കലണ്ടറിൽ ചെയ്തതുപോലെ ഒരു സമചതുരത്തിനുള്ളിൽ വരുന്ന നാലു സംഖ്യകൾ പട്ടികയുടെ വ്യത്യസ്ത ഭാഗങ്ങളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

ഓരോ സമചതുരത്തിലും കോണോടുകോൺ വരുന്നസംഖ്യകൾ ഗുണിക്കുന്നതിനു പകരം കൂട്ടി നോക്കൂ:

$$12 + 20 = 32 \qquad 35 + 48 = 83$$

$$16 + 15 = 31 \qquad 40 + 42 = 82$$

പട്ടികയുടെ ഏതു ഭാഗത്ത് ഇതുപോലെ സമചതുരമെടുത്താലും തുകകളുടെ വ്യത്യാസം 1 തന്നെ ആകുമോ ?

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, പട്ടികയിൽ ഇങ്ങനെ എടുക്കുന്ന നാലു സംഖ്യകളുടെ പൊതുവായ രൂപം അറിയണം.

പട്ടികയിലെ ആദ്യത്തെ വരി 9 വരെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ; രണ്ടാം വരിയിൽ ഇവയെ 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ ...

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, 1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ $n$ എടുത്താലും $n$-ാം വരിയിലെ സംഖ്യകൾ

$$n \quad 2n \quad 3n \quad 4n \quad 5n \quad 6n \quad 7n \quad 8n \quad 9n$$

അടുത്ത വരിയിലോ ?

ആദ്യത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകളെ ഏതു സംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യകളാണ് ?

ഈ രണ്ടു വരികളും ഒന്നിച്ചു നോക്കിയാലോ?

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $2n$ | $3n$ | $4n$ | $5n$ | $6n$ | $7n$ | $8n$ | $9n$ |
| $n+1$ | $2(n+1)$ | $3(n+1)$ | $4(n+1)$ | $5(n+1)$ | $6(n+1)$ | $7(n+1)$ | $8(n+1)$ | $9(n+1)$ |

ഇനി സമചതുരമായി സംഖ്യകൾ എടുക്കാൻ, ആദ്യത്തെ വരിയിലെ ഏതു സംഖ്യയിൽ നിന്നും തുടങ്ങാം. ഉദാഹരണമായി, ഇങ്ങനെയെല്ലാം ആകാം:

| | |
|---|---|
| $2n$ | $3n$ |
| $2(n+1)$ | $3(n+1)$ |

| | |
|---|---|
| $5n$ | $6n$ |
| $5(n+1)$ | $6(n+1)$ |

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, $n$ നെ $m$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച സംഖ്യയിൽനിന്നാണ് തുടങ്ങുന്നതെങ്കിൽ, സമചതുരത്തിലെ നാലു സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയായിരിക്കും? ഓരോന്നായി എഴുതി നോക്കാം:

| | |
|---|---|
| $mn$ | $(m+1)n$ |
| | |

| | |
|---|---|
| $mn$ | $(m+1)n$ |
| $m(n+1)$ | |

| | |
|---|---|
| $mn$ | $(m+1)n$ |
| $m(n+1)$ | $(m+1)(n+1)$ |

ഗുണനഫലങ്ങളെല്ലാം വിസ്തരിച്ചെഴുതിയാൽ

| | |
|---|---|
| $mn$ | $mn+n$ |
| $mn+m$ | $mn+m+n+1$ |

കോണോടുകോൺ കൂട്ടിയാൽ, ഒരു തുക

$$mn + (mn + m + n + 1) = 2mn + m + n + 1$$

മറ്റേ തുക

$$(mn + n) + (mn + m) = 2mn + n + m$$

ഇങ്ങനെയെടുക്കുന്ന ഏതു സമചതുരത്തിലും തുകകളുടെ വ്യത്യാസം 1 തന്നെ ആകുമെന്നും അത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്നും ഇപ്പോൾ മനസ്സിലായില്ലേ ?

(1) ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ സംഖ്യകൾ എഴുതുക:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

(i) കലണ്ടറിൽ ചെയ്തതുപോലെ നാലു സംഖ്യകളുള്ള ഒരു സമചതുരം അടയാളപ്പെടുത്തി, സംഖ്യകൾ കോണോടുകോൺ ഗുണിച്ച് വ്യത്യാസം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഏതു സമചതുരത്തിലെ നാലു സംഖ്യകളെടുത്താലും ഒരേ വ്യത്യാസമാണോ കിട്ടുന്നത് ?

(ii) ഇത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(2) ഗുണിതപ്പട്ടികയിൽ നാലു സംഖ്യകളുള്ള സമചതുരത്തിനു പകരം, ഒൻപതു സംഖ്യകളുള്ള ഒരു സമചതുരമെടുത്ത്, നാലു മൂലകളിലുമുള്ള സംഖ്യകൾ മാത്രം അടയാളപ്പെടുത്തുക:

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 8 | 10 |
| 9 | 12 | 15 |
| 12 | 16 | 20 |

(i) കോണോടുകോൺ തുകകളുടെ വ്യത്യാസം എന്താണ് ?

(ii) ഇങ്ങനെയുള്ള സമചതുരങ്ങളിലെല്ലാം വ്യത്യാസം 4 തന്നെ കിട്ടുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(iii) പതിനാറ് സംഖ്യകളുടെ സമചതുരമെടുത്താലോ ?

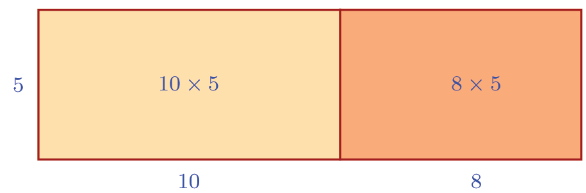
## വ്യത്യാസ ഗുണനം

$18 \times 5$ എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

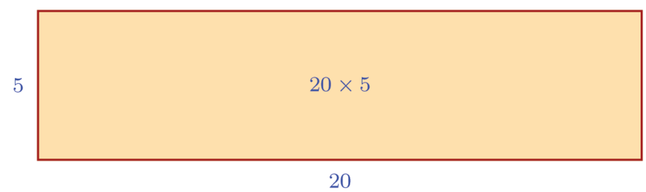
നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ

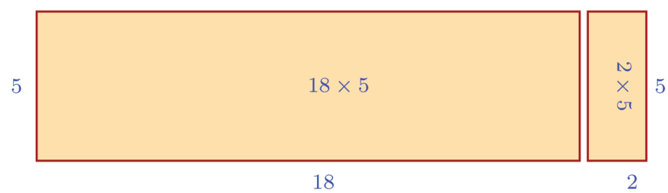
$$18 \times 5 = (10 + 8) \times 5 = (10 \times 5) + (8 \times 5) = 50 + 40 = 90$$

എന്നു കണക്കുകൂട്ടാം.




മറ്റൊരുരീതിയിലും ഇതുകാണാം:



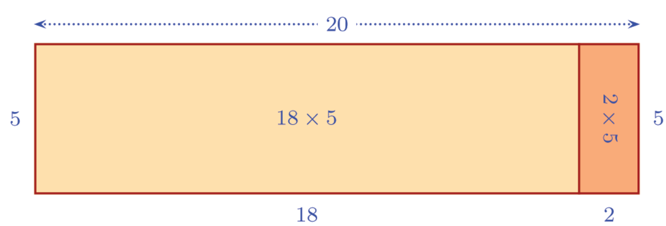




അതായത്,

$$\begin{aligned} 18 \times 5 &= (20 - 2) \times 5 \\ &= (20 \times 5) - (2 \times 5) \\ &= 100 - 10 \\ &= 90 \end{aligned}$$

ഇങ്ങനെയും ആലോചിക്കാം: $18 \times 5$ നോട് $2 \times 5$ കൂട്ടിയാൽ $20 \times 5$ ആകുമല്ലോ.

$$(18 \times 5) + (2 \times 5) = (18 + 2) \times 5 = 20 \times 5$$



അപ്പോൾ

$$18 \times 5 = (20 \times 5) - (2 \times 5)$$

ഇതുപോലെ

$$38 \times 5 = (40 - 2) \times 5 = (40 \times 5) - (2 \times 5) = 200 - 10 = 190$$

എന്നും

$$45 \times 8 = 45 \times (10 - 2) = (45 \times 10) - (45 \times 2) = 450 - 90 = 360$$

എന്നുമെല്ലാം കണക്കാക്കാം.

ഈ രണ്ടു കണക്കുകളിലും ചെയ്തത് എന്താണ്? രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയും മറ്റൊരു സംഖ്യയും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം പിരിച്ചെഴുതി കണക്കാക്കിയതുപോലെ, വ്യത്യാസവും സംഖ്യയും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലവും പിരിച്ചെഴുതി കണക്കാക്കാം.

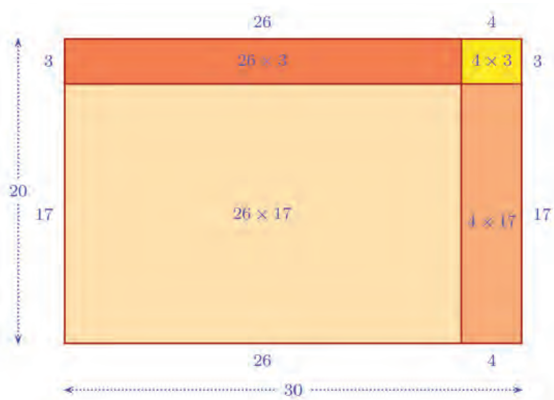
ഇനി രണ്ടു തുകകളുടെ ഗുണനഫലം പിരിച്ചെഴുതി കണക്കാക്കിയതുപോലെ, രണ്ടു വ്യത്യാസങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം കണക്കാക്കാൻ കഴിയുമോ എന്നു നോക്കാം.

ഉദാഹരണമായി,

$$26 \times 17 = (30 - 4) \times (20 - 3)$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിനെ തുകയുടെ കാര്യത്തിലെന്നപോലെ നാലു ഗുണനങ്ങളായി പിരിച്ചെഴുതുന്നതെങ്ങനെ?

ഇതു കാണാൻ വശങ്ങളുടെ നീളം 26 ഉം, 17 ഉം ആയ ചതുരത്തിനെ, വശങ്ങളുടെ നീളം 30 ഉം, 20 ഉം ആയ ചതുരമാക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്ന് ആലോചിക്കുന്നതാണ് എളുപ്പം.




ചിത്രത്തിൽനിന്ന്

$$(26 \times 17) + (26 \times 3) + (4 \times 17) + (4 \times 3) = 30 \times 20$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. ഇതിൽനിന്ന്

$$(26 \times 17) = 30 \times 20 - (26 \times 3) - (4 \times 17) - (4 \times 3)$$

എന്നും കണക്കാക്കാം.

ഇനി, സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുവശത്തുള്ള ഗുണനഫലങ്ങൾ ഓരോന്നായി കണക്കാക്കാം:

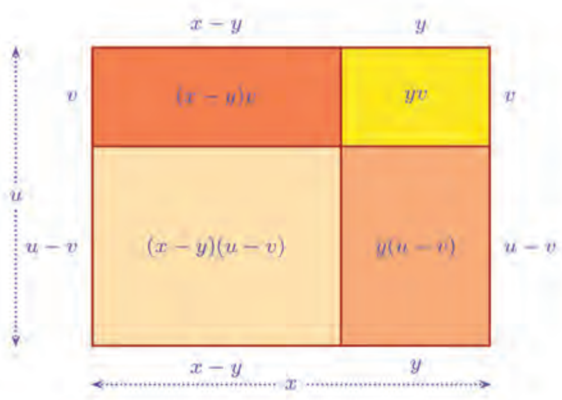
$$\begin{aligned} 30 \times 20 &= 600 \\ 26 \times 3 &= (30-4) \times 3 = 90 - 12 = 78 \\ 4 \times 17 &= 4 \times (20-3) = 80 - 12 = 68 \\ 4 \times 3 &= 12 \end{aligned}$$

അപ്പോൾ

$$\begin{aligned} (26 \times 17) &= 600 - 78 - 68 - 12 \\ &= 600 - (78 + 68 + 12) \\ &= 600 - 158 \\ &= 442 \end{aligned}$$

ഇത്രയധികം കണക്കുകൂട്ടാതെ ഇതു ചെയ്യാൻ കഴിയുമോ എന്നതാണ് അടുത്ത ചിന്ത. അതിന് സംഖ്യകൾ ഇല്ലാതെ ബീജഗണിതരീതിയിൽ ചിന്തിച്ചു നോക്കാം.

$(x - y)(u - v)$ എന്നതിനെ എങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതും എന്നതാണ് പ്രശ്നം. മുകളിലെ കണക്കിൽ ചെയ്തപോലെ, വശങ്ങളുടെ നീളം $x - y$, $u - v$ ആയ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ നീട്ടി, ഈ നീളങ്ങൾ $x$, $u$ ആയ ചതുരമാക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്നു നോക്കാം:




ഇതിൽ നിന്ന്

$$(x - y)(u - v) + y(u - v) + (x - y)v + yv = xu$$

എന്നു കാണാമല്ലോ.

സമവാക്യത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തുള്ള ഗുണനഫലങ്ങളിൽ നടുവിലെ രണ്ടെണ്ണം പിരിച്ചെഴുതിയാൽ

$$(x - y)(u - v) + (yu - yv) + (xv - yv) + yv = xu$$

അതായത്,

$$(x-y)(u-v)+yu-yv+xv=xu$$

ഇതനുസരിച്ച്, $(x-y)\,(u-v)$ യെ $xu$ ആക്കാൻ, $xv$ യും $yu$ യും കൂട്ടി, $yv$ കുറച്ചു (ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് ഇതു കാണാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ ?).

അപ്പോൾ $xu$ നെ തിരിച്ച് $(x-y)(u-v)$ ആക്കാൻ, ആദ്യം കൂട്ടിയ $xv$ യും $yu$ യും കുറയ്ക്കണം; കുറച്ച $yv$ കൂട്ടണം. അതായത്

$$(x-y)\,(u-v)=xu-xv-yu+yv$$

അങ്ങനെ ഗുണനത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു പൊതുതത്വം കൂടിയായി :

> $x > y,\ u > v$ ആയ ഏതു അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും
>
> $(x-y)(u-v)=xu-xv-yu+yv$

ഇതുപയോഗിച്ച് നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ കണക്ക് കുറെക്കൂടി എളുപ്പമാക്കാം:

$$\begin{aligned}26\times 17 &= (30-4)\times(20-3)\\ &= (30\times 20)-(30\times 3)-(4\times 20)+(4\times 3)\\ &= 600-90-80+12\\ &= 612-170\end{aligned}$$

612 ൽ നിന്ന് 170 കുറയ്ക്കാൻ 200 കുറച്ച്, 30 കൂട്ടുകയാണല്ലോ എളുപ്പം

$$26\times 17=612-200+30=442$$

ഇതുപോലെ ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ.

(i) $38\times 49$ (ii) $47\times 99$ (iii) $29\times 46$ (iv) $9\frac{1}{2}\times 19\frac{1}{2}$

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം

രണ്ടു എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം അറിയാമെങ്കിൽ, അവയുടെ തൊട്ടടുത്ത സംഖ്യ കളുടെ ഗുണനഫലം കണക്കാക്കിയത് ഓർമ്മയുണ്ടല്ലോ? തുകകളുടെ ഗുണനത്തിന്റെ ബീജഗണിത സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ചാണ് ഇതു ചെയ്തത്. അതുപോലെ, തൊട്ടു പുറകിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, വ്യത്യാസങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ സമവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി,

$$\begin{aligned} 29 \times 49 &= (30 - 1) \times (50 - 1) \\ &= (30 \times 50) - (30 \times 1) - (50 \times 1) + (1 \times 1) \\ &= 1500 - 30 - 50 + 1 \\ &= 1500 - 80 + 1 \\ &= 1421 \end{aligned}$$

ഇവിടെ ഉപയോഗിച്ച ക്രിയകളെ പൊതുതത്വമായി പറയാം:

$$(x - 1)(y - 1) = xy - x - y + 1$$

ഇത് ഇങ്ങനെ മാറ്റി എഴുതാമല്ലോ:

$$(x - 1)(y - 1) = xy - (x + y) + 1$$

അതായത്, രണ്ടു എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം അറിയാമെങ്കിൽ, തൊട്ടു പുറകിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിൽനിന്ന് തുക കുറച്ച്, ഒന്നും കൂടി കൂട്ടിയാൽ മതി.

മറിച്ച്, രണ്ടു എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ ഓരോന്നിന്റെയും തൊട്ടു മുമ്പിലുള്ള സംഖ്യകളുടെയും, തൊട്ടു പുറകിലുള്ള സംഖ്യകളുടെയും ഗുണനഫലമറിഞ്ഞാൽ, സംഖ്യകളുടെതന്നെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാനും ഈ സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, തൊട്ടു മുമ്പിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 525, തൊട്ടു പുറകിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 437.

സംഖ്യകൾ $x, y$ എന്നെടുത്താൽ

$$(x + 1)(y + 1) = 525$$

$$(x - 1)(y - 1) = 437$$

അതായത്

$$xy + x + y + 1 = 525$$

$$xy - (x + y) + 1 = 437$$

ഈ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളും കൂട്ടിയാൽ

$$2xy + 2 = 962$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$xy = \frac{1}{2}(962 - 2) = 480$$

സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കിട്ടിയല്ലോ.

മുകളിലെ സമവാക്യങ്ങൾ കൂട്ടുന്നതിനു പകരം, ആദ്യത്തേതിൽനിന്ന് രണ്ടാമത്തേത് കുറച്ചാലോ?

$$2(x + y) = 88$$

അപ്പോൾ,

$$x + y = 44$$

അങ്ങനെ സംഖ്യകളുടെ തുകയും കിട്ടി.

ഗുണനഫലവും തുകയും കിട്ടിയാൽ വ്യത്യാസവും കണക്കാക്കാമല്ലോ.

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

എന്ന സമവാക്യം എട്ടാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർക്കുക.

അപ്പോൾ നമ്മുടെ കണക്കിൽ

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &= 44^2 - (4 \times 480)\\ &= (4^2 \times 11^2) - (4^2 \times 120)\\ &= (4^2 \times 121) - (4^2 \times 120)\\ &= 4^2\end{aligned}$$

അതായത്,

$$x - y = 4$$

തുകയും വ്യത്യാസവും അറിഞ്ഞാൽ സംഖ്യകളും കണക്കാക്കാം (**സമവാക്യജോടികൾ** എന്ന പാഠം).

$$x = \frac{1}{2}(44 + 4) = 24$$

$$y = \frac{1}{2}(44 - 4) = 20$$

(1) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 40 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 70 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. നീളവും വീതിയും ഇതിനേക്കാൾ 3 സെന്റിമീറ്റർ കുറവായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും ഒരു മീറ്റർ വീതം കുറച്ചാൽ, പരപ്പളവ് 741 ചതുരശ്ര മീറ്ററാകും; ഒരു മീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയാൽ 861 ചതുരശ്രമീറ്ററും

 (i) ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

 (ii) ചുറ്റളവ് എത്രയാണ് ?

 (iii) നീളവും വീതിയും എത്രയാണ് ?

(3) രണ്ടു സംഖ്യകൾ ഓരോന്നിനോടും ഒന്നു കൂട്ടി ഗുണിച്ചപ്പോൾ 1271 ഉം, ഒന്നു കുറച്ച് ഗുണിച്ചപ്പോൾ 1131 ഉം കിട്ടി.

 (i) സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം എത്രയാണ് ?

 (ii) സംഖ്യകളുടെ തുക എത്രയാണ് ?

 (iii) സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

(4) രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകളിൽ ഓരോന്നിന്റെയും തൊട്ടുമുമ്പിലുള്ള ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 285 ഉം, തൊട്ടുപുറകിലുള്ള ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 165 ഉം ആണ്. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

രണ്ടു തുകകളുടെ ഗുണനഫലത്തെക്കുറിച്ചും, രണ്ടു വ്യത്യാസങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തെക്കുറിച്ചുമുള്ള സർവസമവാക്യങ്ങൾ കണ്ടല്ലോ. തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമോ ?

അതായത്, $(x+y)(u-v)$ എങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതും ?

ബീജഗണിതത്തിൽത്തന്നെ തുടരാം; ആദ്യം ഇങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതാം:

$$(x+y)(u-v) = x(u-v) + y(u-v)$$

ഇനി വലതുവശത്തെ ഓരോ ഗുണനഫലത്തെയും ഓരോന്നായി പിരിച്ചെഴുതാം:

$$x(u-v) = xu - xv$$

$$y(u-v) = yu - yv$$

അപ്പോൾ $(x+y)(u-v) = xu - xv + yu - yv$

> $x, y, u, v$ എന്ന ഏതു നാലു അധിസംഖ്യകളിലും, $u > v$ ആണെങ്കിൽ
>
> $$(x+y)(u-v) = xu - xv + yu - yv$$

ഉദാഹരണമായി $14 \times 59$ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം,

$$\begin{aligned} 14 \times 59 &= (10 + 4) \times (60 - 1) \\ &= 600 - 10 + 240 - 4 \\ &= 590 + 236 \\ &= 826 \end{aligned}$$

ഇതുപോലെ ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ.

(i) $52 \times 19$ (ii) $101 \times 48$ (iii) $97 \times 102$ (iv) $9\frac{3}{4} \times 20\frac{1}{2}$

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും തുകയും ഉപയോഗിച്ച്, ഓരോന്നിനോടും ഒന്നു കൂട്ടിയാലോ, ഒന്നു കുറച്ചാലോ കിട്ടുന്ന ഗുണനഫലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ചത് ഓർമ്മയുണ്ടല്ലോ. ഒരു സംഖ്യയോട് ഒന്നു കൂട്ടുകയും മറ്റേ സംഖ്യയിൽനിന്ന് ഒന്നു കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താലോ ?

8 ഉം 5 ഉം എടുത്ത് പരിശോധിക്കാം.

$$\begin{aligned} 8 \times 5 &= 40 \\ (8 + 1) \times (5 - 1) = 9 \times 4 &= 36 \\ (8 - 1) \times (5 + 1) = 7 \times 6 &= 42 \end{aligned}$$

മറ്റു സംഖ്യകൾ എടുത്തു നോക്കൂ. പൊതുവായി എന്തു പറയാം ?

വലിയ സംഖ്യ ഒന്നു കൂട്ടുകയും, ചെറിയ സംഖ്യ ഒന്നു കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ ഗുണനഫലം കൂടുന്നോ, കുറയുന്നോ ?

മറിച്ചായാലോ ?

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു നോക്കാം. വലിയ സംഖ്യ $x$ എന്നും, ചെറിയ സംഖ്യ $y$ എന്നും എടുക്കാം. വലിയ സംഖ്യ ഒന്നു കൂട്ടി, ചെറിയസംഖ്യ ഒന്നു കുറച്ചാൽ, ഗുണനഫലം

$$(x + 1)(y - 1) = xy - x + y - 1$$

അതായത്, ആദ്യത്തെ ഗുണനഫലത്തിൽനിന്ന് വലിയ സംഖ്യ $x$ കുറച്ചു, ചെറിയ സംഖ്യ $y$ കൂട്ടി; അപ്പോൾത്തന്നെ ഗുണനഫലം കുറഞ്ഞുവല്ലോ. കൂടാതെ ഒരു ഒന്നും കുറച്ചിട്ടുണ്ട്. പുതിയ ഗുണനഫലം കുറഞ്ഞില്ലേ ?

ഇനി മറിച്ചായാലോ ?

$$(x - 1)(y + 1) = xy + x - y - 1$$

കൂട്ടിയത് വലിയ സംഖ്യ $x$; കുറച്ചത് ചെറിയ സംഖ്യ $y$ അങ്ങനെ ഗുണനഫലം കൂടി. പക്ഷേ ഒരു ഒന്നും കൂടി കുറച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ ?

ഇവിടെ പുതിയ ഗുണനഫലം പല തരത്തിലാകാം:

- അടുത്തടുത്ത സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, ഗുണനഫലത്തിൽ മാറ്റമില്ല.
- അടുത്തടുത്തല്ലാത്ത, വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, ഗുണനഫലം കൂടും.

ഇപ്പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങളുടെയെല്ലാം കാരണങ്ങൾ ആലോചിക്കൂ.

(1) രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 713 ഉം, വ്യത്യാസം 8 ഉം ആണ്

(i) വലിയ സംഖ്യയോട് 1 കൂട്ടിയതും, ചെറിയ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ചതും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം എന്താണ് ?

(ii) വലിയ സംഖ്യയിൽനിന്ന് 1 കുറച്ചതും, ചെറിയ സംഖ്യയോട് 1 കൂട്ടിയതും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം എന്താണ് ?

(2) രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ വലുതിനോട് 1 കൂട്ടിയതും, ചെറുതിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ചതും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം, സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തേക്കാൾ 5 കുറവാണ്. വലുതിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ച്, ചെറുതിനോട് 1 കൂട്ടി ഗുണിച്ചാൽ ഗുണനഫലം സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തെക്കാൾ എത്ര കൂടും ?

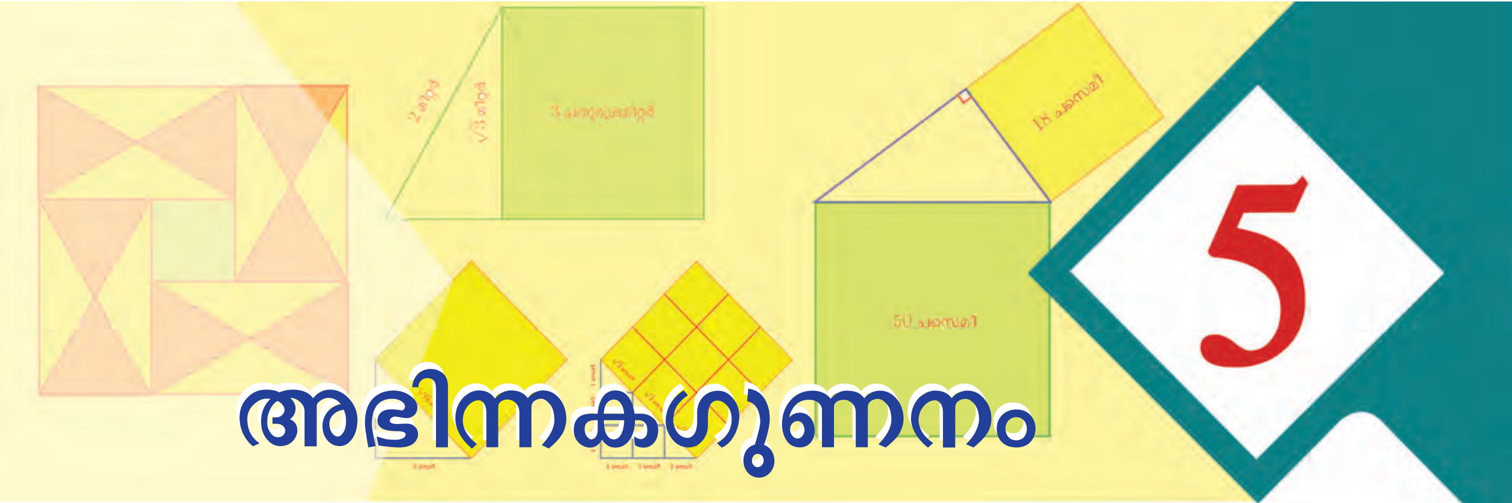
(3) രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ, വലുതിനോട് 1 കൂട്ടിയതും, ചെറുതിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ചതും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം 540; വലുതിൽനിന്ന് 1 കുറച്ചതും, ചെറുതിനോട് 1 കൂട്ടിയതും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം 560

(i) സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം എന്താണ് ?

(ii) സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എന്താണ് ?

(iii) സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

(4) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം 3 മീറ്റർ കൂട്ടുകയും, വീതി 2 മീറ്റർ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ, പരപ്പളവ് 10 ചതുരശ്രമീറ്റർ കുറയും. നീളം 2 മീറ്റർ കുറയ്ക്കുകയും, വീതി 3 മീറ്റർ കൂട്ടുകയും ചെയ്താൽ, പരപ്പളവ് 30 ചതുരശ്രമീറ്റർ കൂടും. ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും കണക്കാക്കുക.



# 5

# അഭിന്നകഗുണനം

ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം, വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാമടങ്ങായി പറയാൻ കഴിയില്ലെന്നു **പുതിയ സംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം ഏകകമായി എടുത്താൽ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം ഒരു ഭിന്നസംഖ്യകൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയില്ല.

ഈ നീളത്തെ $\sqrt{2}$ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ടാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എന്നും കണ്ടു. ഇതുപോലെയുള്ള മറ്റു ചില പുതിയ സംഖ്യകളും പരിചയപ്പെട്ടു (ഇത്തരം മറ്റൊരു സംഖ്യ **വൃത്തങ്ങളുടെ അളവുകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കാണാം).

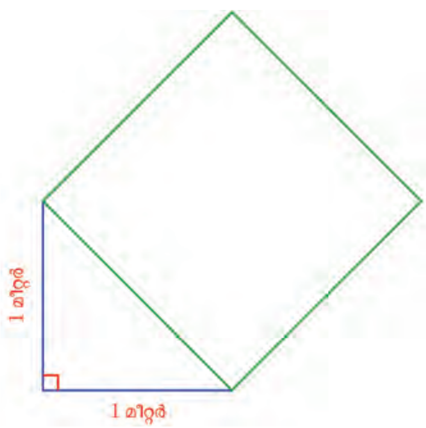
ഇങ്ങനെ ഏതെങ്കിലും ഏകകത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന സംഖ്യകളെയെല്ലാം **അഭിന്നകസംഖ്യകൾ (Irrational numbers)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

അഭിന്നകസംഖ്യകൾ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്ന നീളങ്ങൾ ചേർത്തുവയ്ക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങൾ, അത്തരം സംഖ്യകൾ കൂട്ടുക എന്ന ക്രിയയായി രൂപപ്പെടുന്നതും കണ്ടു.

ഇനി പരപ്പളവുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില സന്ദർഭങ്ങൾ, ഇത്തരം സംഖ്യകളുടെ ഗുണനം എന്ന ക്രിയയിലേക്ക് നയിക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്നു നോക്കാം.

## ഗുണനം

ഈ ചിത്രം പല തവണ കണ്ടതാണല്ലോ; ഇതിലെ സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്?



അതിന്റെ ഓരോ വശത്തിന്റെയും നീളം $\sqrt{2}$ മീറ്ററാണെന്നറിയാം; അപ്പോൾ ചുറ്റളവ് കിട്ടാൻ ഇതിന്റെ നാലു മടങ്ങ് കണക്കാക്കിയാൽ മതി;

അതായത് $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$

മറ്റു സംഖ്യകളിലെന്നപോലെ $\sqrt{2}$ ന്റെ 4 മടങ്ങിനെയും $4\times\sqrt{2}$ എന്നോ $\sqrt{2}\times 4$ എന്നോ എഴുതാം; ഇതു സാധാരണയായി ഗുണനചിഹ്നം ഇല്ലാതെ, $4\sqrt{2}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

$$4\sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$$

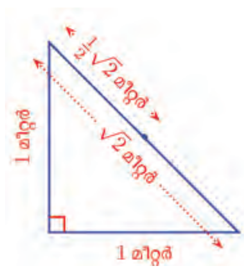
ഈ സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ നാലു മടങ്ങ് എടുക്കണം:

$$4 \times 1.4, \quad 4 \times 1.41, \quad 4 \times 1.414, \ldots$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായെടുത്താൽ,

$$4 \times 1.414 = 5.656 \text{ മീറ്റർ.}$$

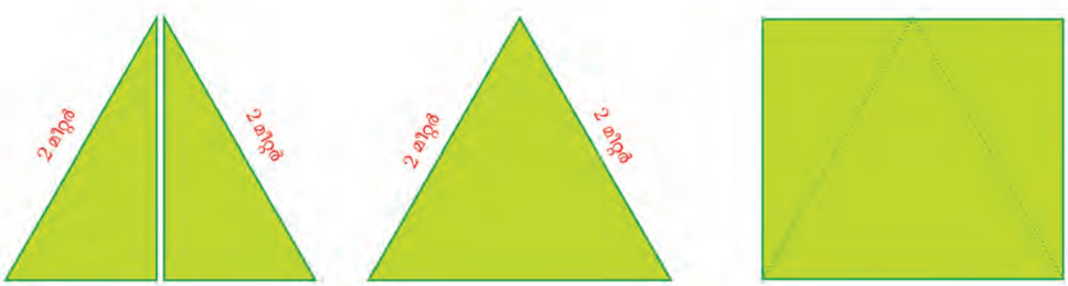
ഇതുപോലെ $\sqrt{2}$ ന്റെ പകുതിയെ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്;



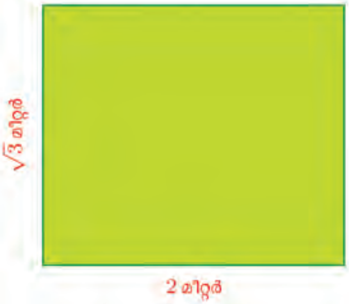

$\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ പകുതി എടുത്താൽ, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടും; അതായത്,

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.7071\ldots$$

ഇനി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക.



ഒരേ പോലെയുള്ള രണ്ടു സമഭുജത്രികോണങ്ങളിൽ ഒന്നിനെ മട്ടത്രികോണങ്ങളായി മുറിച്ച്, മറ്റൊന്നിന്റെ ഇരുവശത്തും മാറ്റിയടുക്കി ഒരു ചതുരമാക്കിയിരിക്കുന്നു.



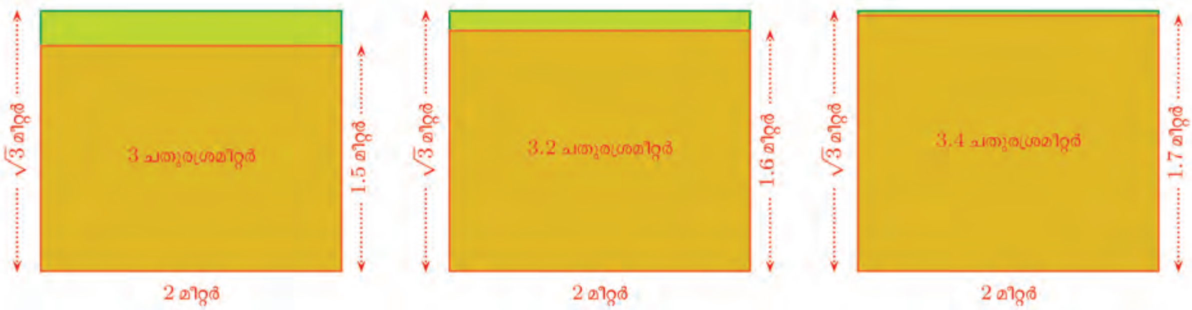

ഈ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

വശങ്ങളുടെ നീളം നമുക്കറിയാം:

വശങ്ങളുടെ നീളം ഭിന്നസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, അവയുടെ ഗുണനഫലമാണ് പരപ്പളവ്.

ഇവിടെയും പരപ്പളവ്, വശങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായ $2\sqrt{3}$ ചതുരശ്രമീറ്ററാണോ?

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 2 മീറ്ററും, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{3}$ ന്റെ അടുത്തടുത്തു വരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളും ആയ ചതുരങ്ങൾ ഇതിനുള്ളിൽ വരച്ചു നോക്കാം:




തുടർന്ന് അകത്തെ ചതുരങ്ങളുടെ ഉയരങ്ങൾ 1.73 മീറ്റർ, 1.732 മീറ്റർ, ... എന്നിങ്ങനെ എടുക്കുമ്പോൾ അവയുടെ പരപ്പളവുകൾ ഈ സംഖ്യകളുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് ചതുരശ്രമീറ്ററാണെന്നു കിട്ടും.

ജ്യാമിതീയമായി നോക്കിയാൽ ഇങ്ങനെ അകത്തു വരയ്ക്കുന്ന ചതുരങ്ങൾ പുറത്തെ ചതുരത്തിന്റെ അടുത്തടുത്തേക്കു നീങ്ങുകയാണല്ലോ. അതിനാൽ അവയുടെ പരപ്പളവുകൾ, പുറത്തെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനോട് അടുത്തടുത്തുവരും.

അതായത്

$$2 \times 1.7, \qquad 2 \times 1.73, \qquad 2 \times 1.732, \ldots$$

എന്നീ സംഖ്യകൾ, പുറത്തെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനോട് അടുത്തടുത്തുവരും.

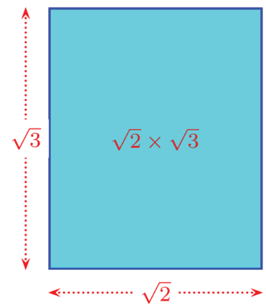
നേരത്തെ പറഞ്ഞതുപോലെ, ഈ സംഖ്യകൾ സമീപിക്കുന്നത് $2\sqrt{3}$ എന്ന സംഖ്യയെ ആണല്ലോ.

അങ്ങനെ വശങ്ങളുടെ നീളം 2 ഉം $\sqrt{3}$ ഉം ആയ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $2\sqrt{3}$ ആണെന്നു കിട്ടി.

ഇനി ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ എന്നായാലോ?

ഈ പരപ്പളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ടാണ്.

ഇതിനെ സംഖ്യാപരമായി വിശദീകരിക്കാൻ, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ എന്നിവയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ക്രമമായി ഗുണിച്ച്, വേണ്ടത്ര ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾ വരെ എടുക്കണം.




$$\begin{array}{llllll} 1.4 & 1.41 & 1.414 & \ldots & \rightarrow & \sqrt{2} \\ 1.7 & 1.73 & 1.732 & \ldots & \rightarrow & \sqrt{3} \\ \hline 2.4 & 2.44 & 2.449 & \ldots & \rightarrow & \sqrt{2} \times \sqrt{3} \end{array}$$

അതായത്

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2.449\ldots$$

ഇവിടെ ന്യായമായും ഒരു സംശയം ഉണ്ടാകാം.

എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയ വർഗമൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമൂലത്തിനു തുല്യമാണ്.

**ദശാംശക്കണക്ക്**

ദശാംശരൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകളെ ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനം വരെ ചുരുക്കിയെഴുതുമ്പോൾ, അടുത്ത സ്ഥാനത്തെ അക്കം 5 അല്ലെങ്കിൽ 5 ൽ കൂടുതലാണെങ്കിൽ, നമുക്കു വേണ്ട സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിനോട് 1 കൂട്ടിയാണ് എടുക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി $1.7 \times 1.4 = 2.38$ ആയതിനാൽ, ഈ ഗുണനഫലത്തെ ഒരു ദശാംശ സ്ഥാനത്തേക്ക് ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് 2.4 എന്നാണ്.

ഉദാഹരണമായി.

$$\sqrt{4} \times \sqrt{25} = 2 \times 5 = 10$$

എന്നു കണക്കാക്കുന്നതുപോലെ,

$$\sqrt{4} \times \sqrt{25} = \sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = 10$$

എന്നും കണക്കാക്കാം.

ഇതുപോലെ $\sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

എന്നും

$$\sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10}$$

എന്നും കണക്കാക്കാം.

എന്നാൽ ഇതുപോലെ $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ആകുമോ ?

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ന്റെ അടുത്തടുത്തു വരുന്ന 2.4, 2.44, 2.449, ... എന്നീ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 6 ന്റെ അടുത്തടുത്തു വരുമോ എന്നു പരിശോധിക്കണം.

$$\begin{aligned} 2.4^2 &= 5.76 \\ 2.44^2 &\approx 5.95 \\ 2.449^2 &\approx 5.998 \end{aligned}$$

ഇവയുടെ വർഗങ്ങൾ 6 ന്റെ അടുത്തടുത്തു വരുന്നതിനാൽ

$$\sqrt{6} = 2.449\ldots$$

നേരത്തെ $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ആയി കിട്ടിയതും ഇതുതന്നെയല്ലേ?

അപ്പോൾ

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

2 നും 3 നും പകരം മറ്റു സംഖ്യകളെടുത്താലും, ഇതുപോലെതന്നെ വർഗമൂലങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമൂലമാണെന്നു കാണാം. അതായത്,

**$x, y$ എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും $\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$**

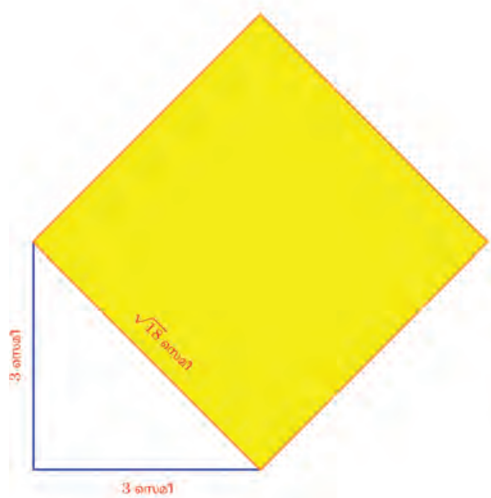
വർഗമൂലങ്ങൾ ലഘൂകരിച്ചെഴുതാൻ ഇതുപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, രണ്ടു ലംബവശങ്ങളും 3 സെന്റിമീറ്ററായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം നോക്കാം.

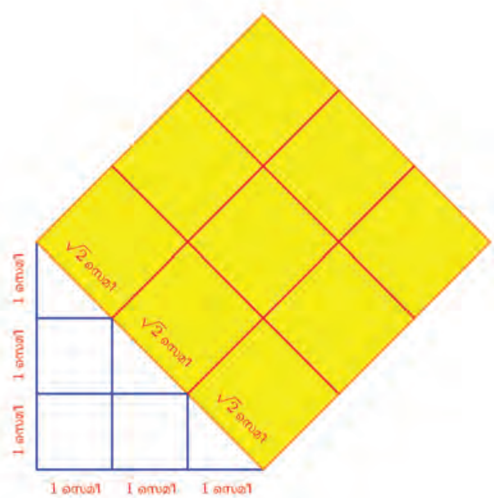
പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, കർണ്ണം വശമായ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $3^2 + 3^2 = 18$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ, അപ്പോൾ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{18}$ സെന്റിമീറ്റർ

ഇനി 18 നെ $9 \times 2$ എന്നെഴുതിയാൽ ഇത് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

ഇക്കാര്യം ജ്യാമിതീയമായും കാണാം:




## ഗുണനവും വർഗമൂലവും

$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ന്റെ അടുത്തടുത്തു വരുന്ന സംഖ്യകൾ 2.4, 2.44, 2.449, ... എന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇവയുടെ വർഗങ്ങൾ 6 ന്റെ അടുത്തടുത്തു വരുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

$$1.4 \times 1.7,\ 1.41 \times 1.73,\ 1.414 \times 1.732, \ldots$$

എന്നീ ഗുണനഫലങ്ങളോട് ഏകദേശം തുല്യമായ സംഖ്യകളായിട്ടാണല്ലോ ഈ സംഖ്യകൾ കിട്ടിയത്. ഇവയുടെ വർഗങ്ങൾ

$$(1.4 \times 1.7)^2,\ (1.41 \times 1.73)^2,\ (1.414 \times 1.732)^2, \ldots$$

ഈ ഗുണനഫലങ്ങളെ, വർഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാമല്ലോ.

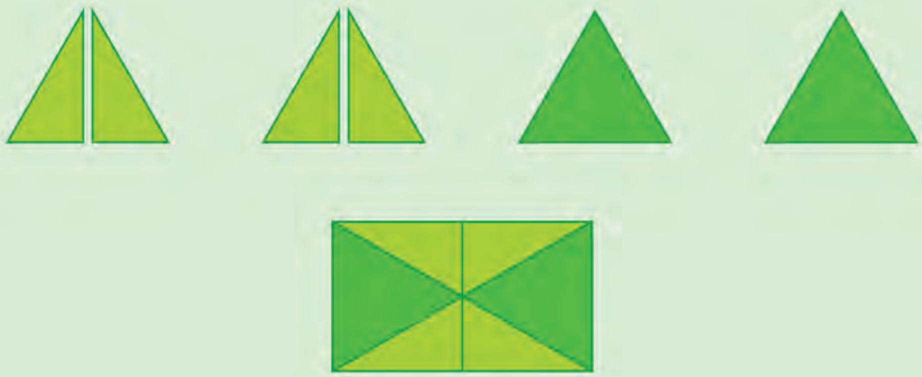
$$(1.4 \times 1.7)^2 = 1.4^2 \times 1.7^2$$

$$(1.41 \times 1.73)^2 = 1.41^2 \times 1.73^2$$

$$(1.414 \times 1.732)^2 = 1.414^2 \times 1.732^2$$

വലതുവശത്തെ ഗുണനഫലങ്ങളിൽ, $1.4^2$, $1.41^2$, $1.414^2$, ... എന്നീ സംഖ്യകൾ 2 ന്റെ അടുത്തടുത്തുവരുന്ന സംഖ്യകളും, $1.7^2$, $1.73^2$, $1.732^2$, ... എന്നീ സംഖ്യകൾ 3 ന്റെ അടുത്തടുത്തു വരുന്ന സംഖ്യകളും. അപ്പോൾ അവയുടെ ഗുണനഫലങ്ങൾ 6 ന്റെ അടുത്തടുത്തുവരുന്നു.

(1) ഒരേ വലുപ്പമുള്ള നാലു സമഭുജത്രികോണങ്ങളിൽ രണ്ടെണ്ണം നെടുകെ മുറിച്ചതും, രണ്ടെണ്ണം മുഴുവനായും ചേർത്തുവച്ച് ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കാം:

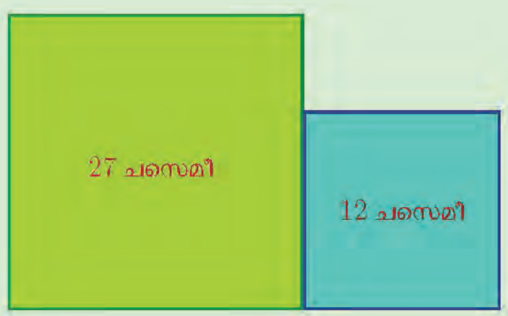


സമഭുജത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും എത്രയാണ് ?

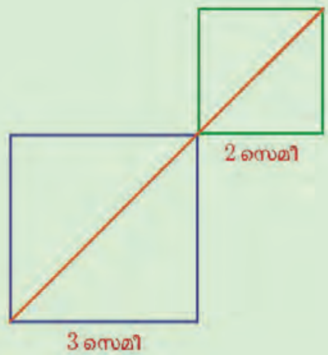
(2) ഒരു സമചതുരവും, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ രണ്ടു മടങ്ങു നീളമുള്ള വശങ്ങളോടുകൂടിയ ഒരു സമഭുജത്രികോണവും ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ മുറിച്ചു മാറ്റിയടുക്കി ഒരു ലംബകമുണ്ടാക്കാം:

സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, ലംബകത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, പരപ്പളവും എത്രയായിരിക്കും ?

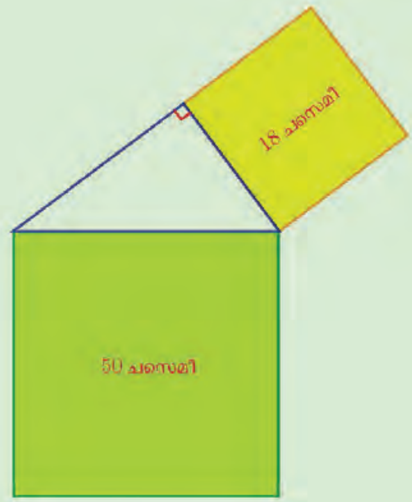
(3) രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ച രൂപമാണ് ചിത്രത്തിൽ. ഈ രൂപത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം, സെന്റിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.



(4) രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ ഒരു മൂലയിൽ ചേർത്തുവച്ച രൂപമാണ് ചിത്രത്തിൽ. ചരിഞ്ഞ വരയുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കുക.




(5) ചിത്രത്തിലെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും കണക്കാക്കുക.




(6) ചുവടെയുള്ള സംഖ്യാജോടികളിൽ ചിലതിന്റെ ഗുണനഫലം എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആണ്. അവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\sqrt{3}, \sqrt{12}$ (ii) $\sqrt{3}, \sqrt{1.2}$ (iii) $\sqrt{5}, \sqrt{8}$

(iv) $\sqrt{0.5}, \sqrt{8}$ (v) $\sqrt{7\frac{1}{2}}, \sqrt{3\frac{1}{3}}$ (vi) $\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{1}{10}}$

## ഹരണം

$2 \times 3 = 6$ എന്ന ഗുണനത്തിനെ $\frac{6}{2} = 3$ എന്നോ, $\frac{6}{3} = 2$ എന്നോ ഹരണമായും എഴുതാമല്ലോ.

ഇതുപോലെ $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ എന്ന ഗുണനത്തെയും ഹരണമായി എഴുതാം.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആയ ഏത് $x, y$ എടുത്താലും $x \times y = z$ എന്ന ഗുണനത്തിനെ $\frac{z}{x} = y$ എന്നും, $\frac{z}{y} = x$ എന്നും ഹരണമായി എഴുതാം.

ഇതുപോലെ,

$x, y$ എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും,

$$\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{z}$$

എന്ന ഗുണനത്തെ ഹരണമായി

$$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}} = \sqrt{y} \qquad \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}$$

എന്നെഴുതാം.

ഇനി $\frac{6}{2} = 3$ ഉം $\frac{6}{3} = 2$ ഉം ആയതിനാൽ

$$\sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}, \qquad \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$$

എന്നും കാണാം. നേരത്തെ കണ്ടതെന്താണ്?

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

ഈ രണ്ടു ജോടി സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്ന്

$$\sqrt{\frac{6}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \qquad \sqrt{\frac{6}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

എന്നെല്ലാം കാണാം

ഇതുപോലെ

$$\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{3 \times \frac{2}{3}} = \sqrt{2}$$

എന്നും തുടർന്ന് ഈ ഗുണനത്തെ ഹരണമായി

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

എന്നും എഴുതാം

$x, y$ എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

ഇനി ഇത്തരം വർഗമൂലങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം. ഉദാഹരണമായി $\sqrt{\frac{1}{2}}$ കണക്കാക്കാൻ ആദ്യം

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

എന്നെഴുതാം. തുടർന്ന് $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഏതെങ്കിലും ദശാംശസംഖ്യകൊണ്ട് ഒന്നിനെ ഹരിച്ച്, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ ദശാംശരൂപം കണക്കാക്കാം:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1.414} = 0.707$$

മറ്റൊരു എളുപ്പവഴിയുണ്ട്; $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ആയതിനാൽ ഇങ്ങനെ കണക്കുകൂട്ടാം:

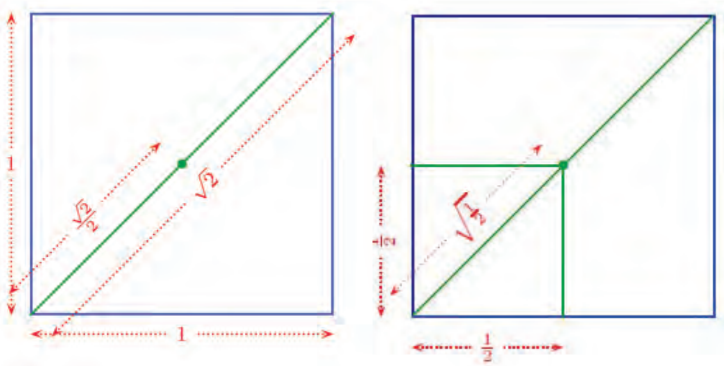
$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ഇനി

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1.414}{2} = 0.707$$

എന്നും എളുപ്പത്തിൽ കാണാമല്ലോ.

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ എന്നത്, ജ്യാമിതീയമായും കാണാം:




ഇതുപോലെ

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

എന്നും കണക്കാക്കാം

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ,

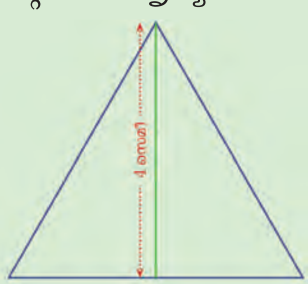
> $x$ ഏത് അധിസംഖ്യയായാലും
>
> $$\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x}{x^2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

(1) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ച്

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണക്കാക്കുക.

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണക്കാക്കുക.

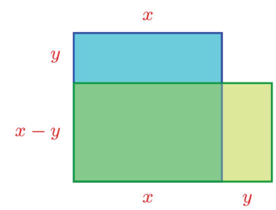
(2) ചിത്രത്തിൽ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.



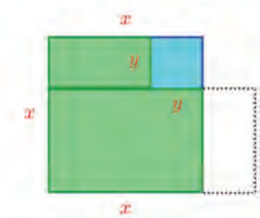

## ഗുണനസമവാക്യം

$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ ജ്യാമിതി ഓർമ്മയുണ്ടോ ?

വശങ്ങളുടെ നീളം $x$ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $y$ കൂട്ടി, മറ്റേ വശം $y$ കുറച്ച്, ഒരു ചതുരം വരച്ചുവെന്നു കരുതുക.




ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $(x+y)(x-y)$. ചതുരത്തിന്റെ വലത്തോട്ട് നീണ്ടു നിൽക്കുന്ന ഭാഗം മുറിച്ചെടുത്ത്, മുകളിൽ വച്ചാലോ ?




ഈ ചിത്രത്തിലെ പച്ചഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $x^2 - y^2$

ഇത് ആദ്യം വരച്ച പച്ചച്ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് തന്നെയല്ലേ ?

നീളങ്ങൾ അഭിന്നകസംഖ്യകൾ ആയാലും പരപ്പളവ് ഗുണനഫലം തന്നെയാണല്ലോ. അപ്പോൾ $x$, $y$ അഭിന്നകസംഖ്യകൾ ആയാലും $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ തന്നെയാണ്.

ഇതുപോലെ മറ്റു സർവസമവാക്യങ്ങളും അഭിന്നകസംഖ്യകൾക്ക് ശരിയാണെന്നു കാണാം.

(3) ചിത്രത്തിലെ ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളെല്ലാം സമഭുജമാണ്. പുറത്തെ സമചതുരത്തിന്റെയും, അകത്തെ സമചതുരത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

(4) $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ എന്നും $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$ എന്നും തെളിയിക്കുക. ഇതുപോലുള്ള മറ്റു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

(5) ചുവടെയുള്ള സംഖ്യാജോടികളിൽ ആദ്യസംഖ്യയെ രണ്ടാം സംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ചിലത് എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ കിട്ടും. അവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\sqrt{72}, \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{27}, \sqrt{3}$ (iii) $\sqrt{125}, \sqrt{50}$

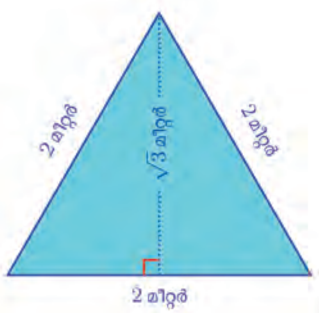
(iv) $\sqrt{10}, \sqrt{2}$ (v) $\sqrt{20}, \sqrt{5}$ (vi) $\sqrt{18}, \sqrt{8}$

## ത്രികോണപ്പരപ്പുകൾ

ഭിന്നസംഖ്യകളായി എഴുതാൻ കഴിയാത്ത ചില നീളങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ് $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകൾ നിർവചിച്ചത്. തുടർന്ന് ചില ചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാനും ഇത്തരം സംഖ്യകൾ ആവശ്യമാണെന്നു കണ്ടു.

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആണെങ്കിൽ, പരപ്പളവും അങ്ങനെതന്നെ ആയിരിക്കും. എന്നാൽ വശങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആയ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ അങ്ങനെയാകണമെന്നില്ല.

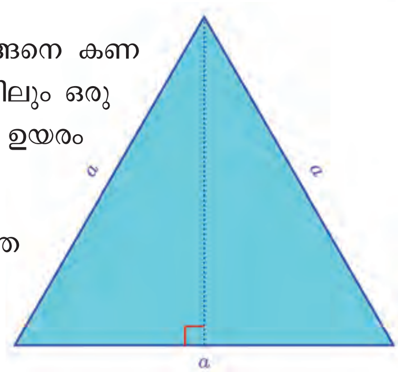
ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളെല്ലാം 2 മീറ്റർ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം $\sqrt{3}$ മീറ്റർ ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ:



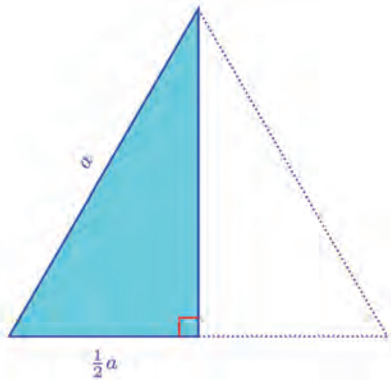

ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

$\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ചതുരശ്രമീറ്റർ

ഇതുപോലെ ഏതു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാമല്ലോ. വശത്തിന്റെ നീളം (സെന്റിമീറ്ററോ, മീറ്ററോ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഏകകം ഉപയോഗിച്ച് അളന്നപ്പോൾ) $a$ എന്നെടുത്താൽ, അതിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?

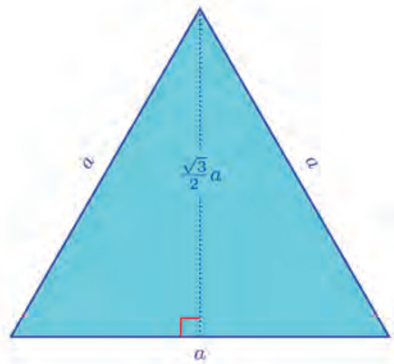



ഇതിനുള്ളിലെ രണ്ടു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണവും താഴത്തെ വശവും എഴുതാമല്ലോ:




അപ്പോൾ  മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ വർഗം

$$a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$$




ഇതിൽ നിന്ന് ഈ വശത്തിന്റെ നീളം

$$\sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

ഇതാണ് സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം.

ഇനി പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാമല്ലോ:

$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

അതായത്,

ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം, വശത്തിന്റെ പകുതിയുടെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങും, പരപ്പളവ്, വശത്തിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗത്തിന്റെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങുമാണ്.

ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളെല്ലാം 8 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം $4\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്റർ; പരപ്പളവ് $16\sqrt{3}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.


ഇതുപോലെ സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ഒരു വശം 4 സെന്റിമീറ്ററും, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ 6 സെന്റിമീറ്ററുമായ ത്രികോണം നോക്കുക:

ഇതിലും മുകളിലെ മൂലയിൽനിന്നുള്ള ലംബം, താഴത്തെ വശത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യുമല്ലോ (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠം).

അപ്പോൾ സമഭുജത്രികോണത്തിൽ ചെയ്തപോലെ ഇതിലും ഉയരത്തിന്റെ വർഗം കണക്കാക്കിക്കൂടേ ?

$$\text{ഉയരത്തിന്റെ വർഗം} = 6^2 - 2^2 = 32$$

അപ്പോൾ ഉയരം

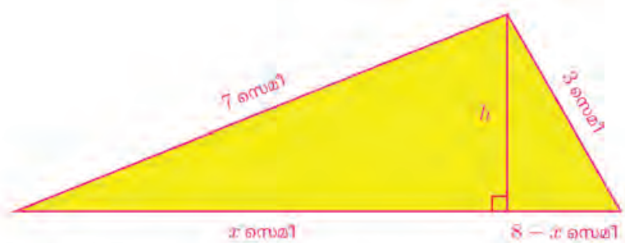
$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \text{ x } 2} = 4\sqrt{2} \text{ സെമീ}$$

ഇനി പരപ്പളവും കണക്കാക്കാം

$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ ചസെമീ}$$

ഇതേ രീതിയിൽ ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാം (അല്പം കൂടി കണക്കുകൂട്ടണം എന്നേയുള്ളൂ). ഉദാഹരണമായി, ഈ ത്രികോണം നോക്കുക:


ആദ്യം ഇതിന്റെ ഉയരം കണ്ടുപിടിക്കണം. ഇത് $h$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നും, ഈ ലംബം താഴത്തെ വശത്തെ മുറിക്കുന്ന ഒരു കഷണത്തിന്റെ നീളം $x$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നും എഴുതിനോക്കാം:




അപ്പോൾ ഇടതുവശത്തെ മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$x^2 + h^2 = 49$$

എന്നും, വലതുവശത്തെ മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$(8 - x)^2 + h^2 = 9$$

എന്നും കിട്ടുമല്ലോ.

ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് രണ്ടാമത്തേത് കുറച്ചാൽ

$$x^2 - (8 - x)^2 = 40$$

എന്നും കിട്ടും.

വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തെ തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമായി എഴുതാമെന്ന് എട്ടാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ:

$$x^2 - (8 - x)^2 = (x + (8 - x))\,(x - (8 - x))$$

$$= 8(2x - 8)$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമവാക്യം

$$8(2x-8) = 40$$

എന്നാകും. ഇതിൽനിന്ന് $2x-8=5$ എന്നും, തുടർന്ന് $x=\frac{1}{2}(5+8)=6\frac{1}{2}$

എന്നും കിട്ടും.

ഇനി വീണ്ടും ഇടത്തെ ത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$h^2 = 7^2 - \left(6\frac{1}{2}\right)^2 = 13\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$= 6\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 6\frac{3}{4}$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ

$$h = \sqrt{6\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

ഇതുപയോഗിച്ച്

$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2}\times 8\times\frac{3}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ ചസെമീ.}$$

ഈ കണക്കുകൂട്ടലുകളിൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം പൊതുവായി $a, b, c$ എന്നെടുത്താൽ, ഉയരം കണ്ടുപിടിക്കാതെ നേരിട്ട് പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാനുള്ള ഒരു ബീജഗണിതവാചകം കിട്ടും. അത് ഇങ്ങനെയാണ്.

വശങ്ങളുടെ നീളം $a, b, c$ ആയ ത്രികോണത്തിൽ

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

എന്നെടുത്താൽ, പരപ്പളവ്

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ആറാം ദശകത്തിൽ ഗ്രീസിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ഹെറോൺ എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനാണ് ഇതു കണ്ടുപിടിച്ചത്. (ഇത് എങ്ങനെ കിട്ടി എന്നറിയാൻ താൽപര്യം ഉണ്ടെങ്കിൽ, പാഠത്തിന്റെ അവസാനമുള്ള അനുബന്ധം നോക്കുക).

ഉദാഹരണമായി, ഇപ്പോൾ ചെയ്ത കണക്കിൽ

$$a=8 \qquad b=7 \qquad c=3$$

എന്നെടുത്താൽ

$$s = \frac{1}{2}(8+7+3) = 9$$

തുടർന്ന്

$$s - a = 1$$

$$s - b = 2$$

$$s - c = 6$$

എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ

$$\text{പരപ്പളവ്} = \sqrt{9 \times 1 \times 2 \times 6} = \sqrt{9 \times 4 \times 3} = 6\sqrt{3}$$

(1) ചില സമഭുജത്രികോണങ്ങളുടെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(i) 10 സെ.മീ. (ii) 5 സെ.മീ. (iii) $\sqrt{3}$ സെ.മീ.

(2) വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(3) ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും കണക്കാക്കുക.

(4) സമാന്തരവശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവും പരപ്പളവും കണക്കാക്കുക.

(5) വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്റർ, 6 സെന്റിമീറ്റർ, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരവും പരപ്പളവും കണക്കാക്കുക.

(6) ചില ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു. ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

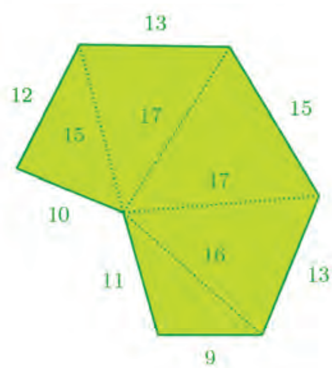
(i) 4 സെന്റിമീറ്റർ, 5 സെന്റിമീറ്റർ, 7 സെന്റിമീറ്റർ

(ii) 4 സെന്റിമീറ്റർ, 13 സെന്റിമീറ്റർ, 15 സെന്റിമീറ്റർ

(iii) 5 സെന്റിമീറ്റർ, 12 സെന്റിമീറ്റർ, 13 സെന്റിമീറ്റർ

## സ്ഥലപ്പരപ്പ്

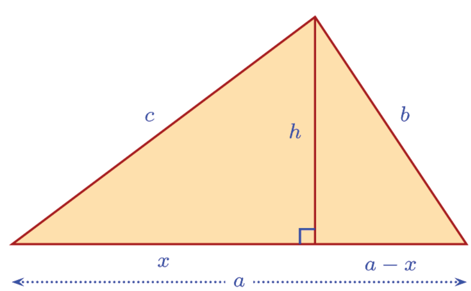
അതിർത്തികളെല്ലാം നേർവരകളായ സ്ഥലങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാനുള്ള ഒരു മാർഗം, ആദ്യം അതിനെ ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിച്ച്, വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ കണക്കാക്കുകയാണ്.




ഇനി ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്, ഹെറോൺ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കി, അവയെല്ലാം കൂട്ടിയാൽ സ്ഥലത്തിന്റെ പരപ്പളവായി.

## അനുബന്ധം

പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഹെറോൺ സൂത്രവാക്യം എങ്ങനെ കിട്ടിയെന്നു നോക്കാം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $a$, $b$, $c$ എന്നെടുക്കാം. നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, ഒരു മൂലയിൽ നിന്ന് എതിർവശത്തിലേക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ നീളം $h$ എന്നും, ഈ ലംബം വശത്തെ മുറിക്കുന്ന ഒരു കഷണത്തിന്റെ നീളം $x$ എന്നും എടുക്കാം.



അപ്പോൾ ഇടത്തെ മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$x^2 + h^2 = c^2$$

എന്നും, വലത്തെ മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$(a - x)^2 + h^2 = b^2$$

എന്നും കിട്ടും. ആദ്യത്തെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യം കുറച്ചാൽ

$$x^2 - (a - x)^2 = c^2 - b^2$$

ഇനി $x^2 - (a - x)^2$ എന്ന വർഗവ്യത്യാസത്തെ, തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമായി എഴുതാം:

$$x^2 - (a - x)^2 = (x + (a - x))\,(x - (a - x)) = a(2x - a)$$

അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിൽ നിന്നു കിട്ടിയ സമവാക്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$a(2x - a) = c^2 - b^2$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$2x - a = \frac{c^2 - b^2}{a}$$

എന്നും, തുടർന്ന്

$$2x = \frac{c^2 - b^2}{a} + a = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{a}$$

എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ

$$x = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}$$

ഇനി ഇടത്തെ മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്നു കിട്ടുന്ന

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c + x)\,(c - x)$$

എന്ന സമവാക്യത്തിൽ $x$ നെ ഇപ്പോൾ കണ്ടതുപോലെ $a, b, c$ ഉപയോഗിച്ച് മാറ്റി എഴുതാമല്ലോ:

$$h^2 = \left(c + \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}\right)\left(c - \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}\right)$$

ഇത് ലഘൂകരിച്ച് ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$$h^2 = \left(\frac{2ac + (c^2 - b^2 + a^2)}{2a}\right)\left(\frac{2ac - (c^2 - b^2 + a^2)}{2a}\right)$$

ആദ്യത്തെ ഭിന്നത്തിന്റെ അംശം ഇങ്ങനെ ലഘൂകരിക്കാം:

$$\begin{aligned} 2ac + (c^2 - b^2 + a^2) &= (a^2 + c^2 + 2ac) - b^2 \\ &= (a + c)^2 - b^2 \end{aligned}$$

$$= ((a + c) + b)\ ((a + c) - b)$$
$$= (a + c + b)\ (a + c - b)$$

രണ്ടാമത്തെ ഭിന്നത്തിന്റെ അംശം ഇങ്ങനെയും:

$$\begin{aligned} 2ac - (c^2 - b^2 + a^2) &= 2ac - c^2 + b^2 - a^2 \\ &= b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac) \\ &= b^2 - (a - c)^2 \\ &= (b + a - c)\ (b - (a - c)) \\ &= (b + a - c)\ (b - a + c) \end{aligned}$$

ഇവ ഉപയോഗിച്ച്, $h^2$ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$h^2 = \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}$$

ഇനി ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനെ $p$ എന്നെഴുതിയാൽ

$$p = a + b + c$$

കൂടാതെ

$$\begin{aligned} p - 2a &= (a + b + c) - 2a = (b + c - a) \\ p - 2b &= (a + b + c) - 2b = (a - b + c) \\ p - 2c &= (a + b + c) - 2c = (a + b - c) \end{aligned}$$

എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ

$$h^2 = \frac{p(p-2b)(p-2c)(p-2a)}{4a^2}$$

അടുത്തതായി, ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയെ $s$ എന്നെടുത്താൽ $p = 2s$ ആകുമല്ലോ അപ്പോൾ

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{2s(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}{4a^2} \\ &= \frac{2s \times 2(s-b) \times 2(s-c) \times 2(s-a)}{4a^2} \\ &= \frac{4s(s-b)(s-c)(s-a)}{a^2} \end{aligned}$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \times a \times \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

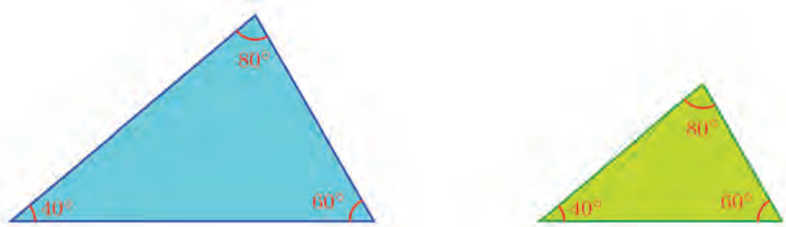
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$


# സദൃശത്രികോണങ്ങൾ

## കോണുകളും വശങ്ങളും

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കു തുല്യമാണെങ്കിൽ, അവയുടെ കോണുകളും തുല്യമാണെന്ന് അറിയാമല്ലോ; മറിച്ച്, കോണുകൾ തുല്യമായാൽ വശങ്ങൾ തുല്യമാകണമെന്നില്ല എന്നും അറിയാം (എട്ടാംക്ലാസിലെ തുല്യത്രികോണങ്ങൾ എന്ന പാഠം). അപ്പോൾ ഒരു ചോദ്യമുണ്ട്. ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ ?

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ വ്യത്യസ്ത വലുപ്പത്തിൽ കട്ടിക്കടലാസിൽ വരച്ച്, വെട്ടിയെടുക്കുക. ഉദാഹരണമായി ഇങ്ങനെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളാകാം:

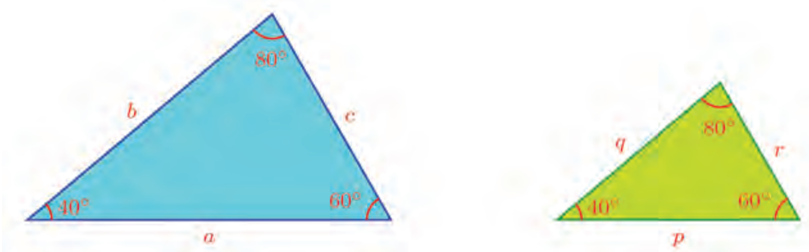



വശങ്ങളുടെ നീളം ഒത്തുനോക്കാൻ, ചെറിയ ത്രികോണമെടുത്ത് വലുതിന്റെ ഉള്ളിൽ വയ്ക്കുക. മേൽ മൂലകൾ ചേർന്നിരിക്കട്ടെ. കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഈ മൂലയിലെ വശങ്ങളും ചേർന്നിരിക്കും.

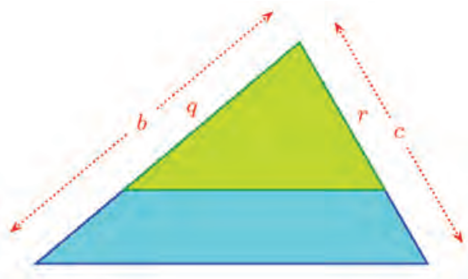

ഇതിൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും താഴത്തെ വശങ്ങൾ, ഇടത്തെ വരയുമായി ഒരേ ചരിവിലാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ വശങ്ങൾ സമാന്തരമാണ്.

അതിനാൽ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളെ ഒരേ ഭാഗങ്ങളായിട്ടാണ് മുറിക്കുന്നത് (സമാന്തരവരകൾ എന്ന പാഠം).

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കിപ്പറയാൻ, ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കാം:



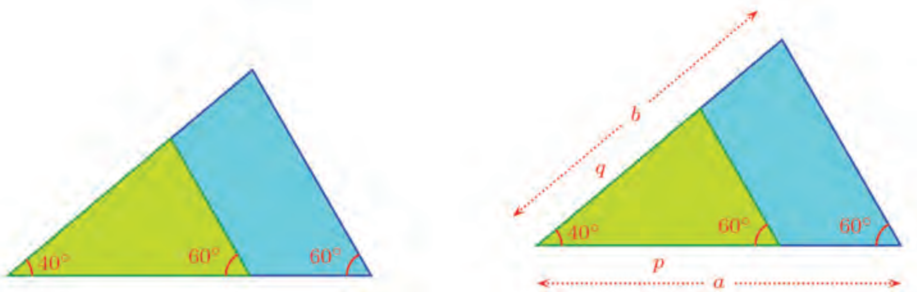

ചേർത്തുവയ്ക്കുമ്പോൾ അളവുകൾ ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം:




അപ്പോൾ നേരത്തെ പറഞ്ഞ (ഒരേ ഭാഗങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത് എന്ന) കാര്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\frac{q}{b} = \frac{r}{c}$$

ത്രികോണങ്ങളുടെ മേൽമൂലകൾ ചേർത്തുവയ്ക്കുന്നതിനു പകരം, ഇടതു മൂലകൾ ചേർത്തുവച്ചാലോ?




ആദ്യം ചെയ്ത രീതിയിൽത്തന്നെ, ഇപ്പോൾ ത്രികോണങ്ങളുടെ വലതുവശങ്ങൾ സമാന്തരമാണെന്നും, അതിനാൽ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കീഴ്-ഇടതു വശങ്ങളെ ഒരേ ഭാഗങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത് എന്നും കാണാമല്ലോ. അതായത്

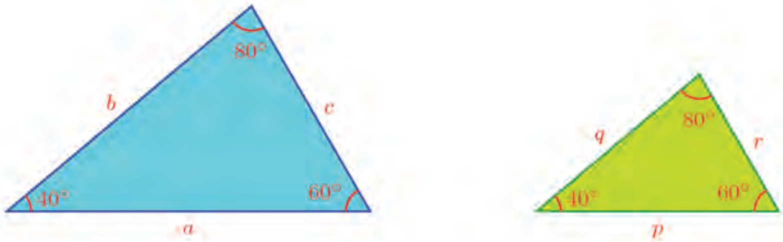
$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b}$$

ഇതും, നേരത്തെ കണ്ട സമവാക്യവും ചേർത്തു വായിച്ചാൽ

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c}$$

ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ അർഥം എന്താണ്?

ആദ്യം, ഇതിലെ അക്ഷരങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എന്തിനെയാണ് എന്നു നോക്കാം:




- 80° കോണുകളുടെ എതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ $a, p$
- 60° കോണുകളുടെ എതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ $b, q$
- 40° കോണുകളുടെ എതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ $c, r$

ഇനി സമവാക്യത്തിലെ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ അർഥം നോക്കാം:

- $\frac{p}{a}$ എന്ന സംഖ്യ, $p$ എന്ന നീളം $a$ എന്ന നീളത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്നു കാണിക്കുന്നു.
- $\frac{q}{b}$ എന്ന സംഖ്യ, $q$ എന്ന നീളം $b$ എന്ന നീളത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്നു കാണിക്കുന്നു.
- $\frac{r}{c}$ എന്ന സംഖ്യ, $r$ എന്ന നീളം $c$ എന്ന നീളത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്നു കാണിക്കുന്നു.

അപ്പോൾ

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c}$$

എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ അർഥം എന്താണ്?

ഈ ഭാഗങ്ങളെല്ലാം ഒന്നുതന്നെയാണ്.

അതായത്, തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ $(p, a)$, $(q, b)$, $(r, c)$ എന്നിങ്ങനെ ജോടികളാക്കിയാൽ, ചെറിയ നീളങ്ങളായ $p$, $q$, $r$ എന്നിവ, വലിയ നീളങ്ങളായ $a$, $b$, $c$ ഇവയുടെ ഒരേ ഭാഗമാണ്.

വലിയ നീളങ്ങളെല്ലാം ചെറിയ നീളങ്ങളുടെ ഒരേ മടങ്ങാണ് എന്നും പറയാം.

കോണുകൾ 80°, 60°, 40° എന്നതിനു പകരം, വേറെ എന്തായാലും ഇപ്പറഞ്ഞതെല്ലാം ശരിയാകുമല്ലോ.

അപ്പോൾ പൊതുവായി ഇങ്ങനെ പറയാം:

**ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ ജോടികളായെടുത്താൽ, ചെറിയ നീളങ്ങളെല്ലാം വലിയ നീളങ്ങളുടെ ഒരേ ഭാഗമാണ് (അഥവാ, വലിയ നീളങ്ങളെല്ലാം ചെറിയ നീളങ്ങളുടെ ഒരേ മടങ്ങാണ്).**

ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഏറ്റവും ചെറിയ കോണിന്റെ എതിർവശം, ഏറ്റവും നീളം കുറഞ്ഞ വശവും, ഏറ്റവും വലിയ കോണിന്റെ എതിർവശം, ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ വശവും ആണല്ലോ. അതായത്, കോണുകളുടെ വലുപ്പക്രമത്തിലാണ് അവയുടെ എതിർവശങ്ങളുടെ നീളവും.

ജിയോജിബ്രയിൽ ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തുക. Min = 0 ആയി ഒരു സ്ലൈഡർ d ഉണ്ടാക്കുക. Segment with Given Length ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് നീളം AB യുടെ d മടങ്ങോ ഭാഗമോ വരത്തക്കവിധം ഒരു വര വരയ്ക്കുക. ഇതിനായി വരയുടെ നീളം d*AB എന്ന് കൊടുത്താൽ മതി. ഇനി ∠D = ∠A, ∠E = ∠B ആകത്തക്കവിധം ത്രികോണം DEF വരയ്ക്കണം. ഇതിനായി Angle with Given Size ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് E, D എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി α (∠A യുടെ അളവ്) എന്ന് നൽകുക. അതേപോലെ D, E എന്നിവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ β എന്ന് clockwise ആയി നൽകുക. DE', ED' എന്നീ വരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F അടയാളപ്പെടുത്തുക. രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടേയും വശങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണോ ? ത്രികോണം ABC യുടെ അളവുകളും സ്ലൈഡറും മാറ്റി നോക്കൂ.

ഇതനുസരിച്ച് ഇപ്പോൾ കണ്ട തത്വം ഇങ്ങനെ ചുരുക്കി പ്പറയാം:

**ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ വലുപ്പക്രമത്തിൽ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.**

ഇത് മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം. രണ്ട് അളവുകളിൽ ഒന്നു മറ്റൊന്നിന്റെ എത്ര മടങ്ങ് (അല്ലെങ്കിൽ ഭാഗം) എന്നതിനെ മാറ്റത്തിന്റെ തോത് (scale factor) എന്നു പറയാറുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയും 4 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയും എടുത്താൽ, വലിയ നീളം ചെറിയ നീളത്തിന്റെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങാണ്; മറിച്ച്, ചെറിയ നീളം വലിയ നീളത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ്. ഇവിടെ, ചെറിയ നീളത്തിൽ നിന്ന് വലിയ നീളത്തിലേക്കുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ തോത് $1\frac{1}{2}$ എന്നും, വലുതിൽ നിന്ന് ചെറുതിലേയ്ക്കുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ തോത് $\frac{2}{3}$ എന്നും പറയാം.

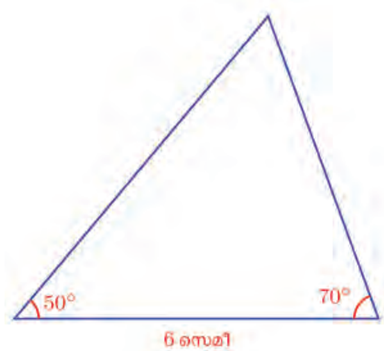
വശങ്ങളുടെ നീളം $a, b, c$ ആയ ത്രികോണത്തിനും, വശങ്ങളുടെ നീളം $p, q, r$ ആയ ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണെങ്കിൽ $p, q, r$ ഇവ $a, b, c$ ഇവയുടെ ഒരേ മടങ്ങോ, ഭാഗമോ ആണെന്നുകണ്ടല്ലോ. ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ അളവുകൾ രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ അളവുകളാകുന്നത് ഒരേ തോതിലാണ്. ഈ മാറ്റത്തിന്റെ തോത് $k$ എന്നെടുത്താൽ, ഈ ബന്ധം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$a = kp, b = kq, c = kr$$

അപ്പോൾ ത്രികോണത്തെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുതത്വം ഇങ്ങനെയും പറയാം:

**ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ, തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാണ്.**

ഇനി ഈ കണക്ക് നോക്കൂ:

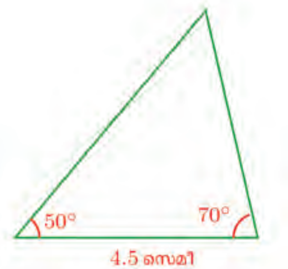



ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാക്കി ചെറിയ ത്രികോണം വരയ്ക്കണം.

താഴത്തെ വശം 4.5 സെന്റിമീറ്ററാക്കിയാൽ മതി. മറ്റു വശങ്ങളോ?

വലിയ ത്രികോണം വരച്ച്, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ അളന്ന് $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാക്കി വരയ്ക്കണോ ?

4.5 സെന്റിമീറ്റർ വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തും ഇതേ കോണുകൾ വരച്ചാൽപ്പോരേ ?



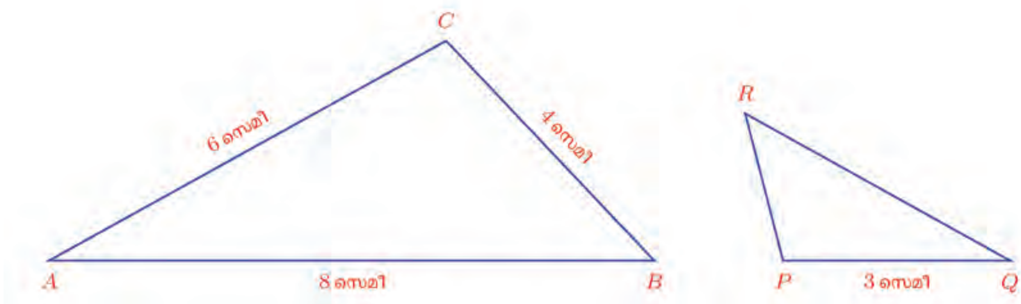

കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഇപ്പോൾ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച് മറ്റു വശങ്ങളും $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാകുമല്ലോ:

## ത്രികോണവിശേഷം

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കോണുകളാണെങ്കിൽ, അവയുടെ വശങ്ങൾ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഇത് മറ്റു ബഹുഭുജങ്ങൾക്കൊന്നും ഇല്ലാത്ത പ്രത്യേകതയാണ്. ഉദാഹരണമായി, ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:

ചതുരത്തിലും സമചതുരത്തിലും കോണുകളെല്ലാം മട്ടമാണ്. രണ്ടിന്റെയും ഇടതുവശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ് (അംശബന്ധം 1 : 1). വലതുവശങ്ങളും ഇതുപോലെ തന്നെ. പക്ഷെ ചതുരത്തിന്റെ മേൽവശത്തിനും സമചതുരത്തിന്റെ മേൽവശത്തിനും ഒരേ നീളമല്ലല്ലോ. കീഴ്‌വശങ്ങളുടെ നീളവും ഒന്നല്ല.

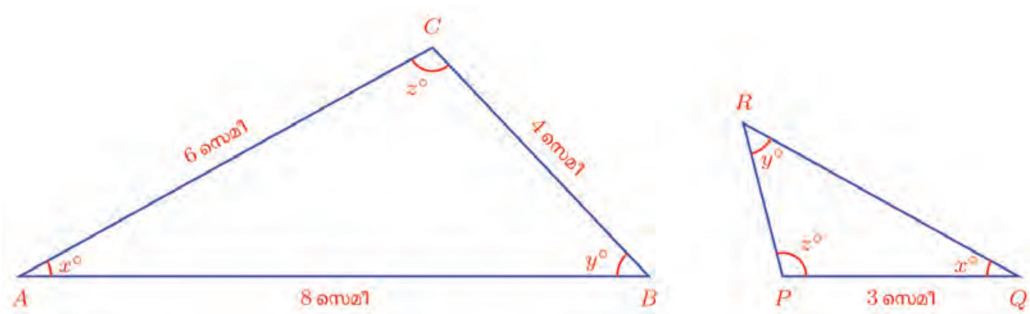
മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:




$$\angle P = \angle C \qquad \angle Q = \angle A \qquad \angle R = \angle B$$

$PQR$ എന്ന ത്രികോണത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

ആദ്യം കോണുകളുടെ അളവുകൾ $x°$, $y°$, $z°$ എന്നെടുത്ത്, ചിത്രത്തിൽ തുല്യമായ കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്താം:



ഇനി, തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ ജോടികൾ എഴുതാം:

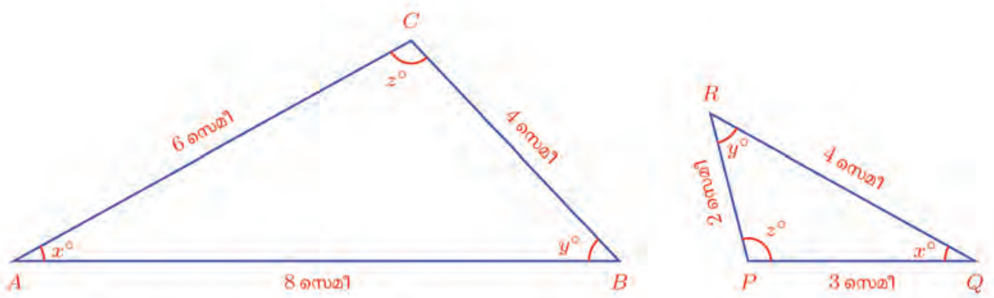
| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $BC$ | $PR$ |
| $y$ | $AC$ | $PQ$ |
| $z$ | $AB$ | $QR$ |

വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെയും നീളം അറിയാമല്ലോ:

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $BC = 4$ | $PR$ |
| $y$ | $AC = 6$ | $PQ = 3$ |
| $z$ | $AB = 8$ | $QR$ |

ഇതിൽ $y^\circ$ കോണിന്റെ എതിർവശങ്ങളിൽ, വലുതിന്റെ പകുതിയാണ് ചെറുത്. അപ്പോൾ മറ്റു കോണുകളുടെയും എതിർവശങ്ങളും ഇങ്ങനെതന്നെ ആകണം:

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $BC = 4$ | $PR = 2$ |
| $y$ | $AC = 6$ | $PQ = 3$ |
| $z$ | $AB = 8$ | $QR = 4$ |




ചിത്രത്തിൽനിന്ന് ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ വലുപ്പച്ചെറുപ്പം തിരിച്ചറിയാൻ കഴിഞ്ഞാൽ, കോണുകളെഴുതാതെയും വശങ്ങൾ കണക്കാക്കാം:

| | ചെറുത് | ഇടത്തരം | വലുത് |
|---|---|---|---|
| $\Delta ABC$ | $BC = 4$ | $AC = 6$ | $AB = 8$ |
| $\Delta PQR$ | $PR$ | $PQ = 3$ | $QR$ |

ഇതിൽനിന്ന് ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ പകുതിയാണെന്നു കാണാം; തുടർന്ന് മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളവും കണക്കാക്കാം.

(1) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം 8 സെ.മീ. ഉം അതിലെ രണ്ട് കോണുകൾ $60^\circ$ യും $70^\circ$ യും ആണ്. കോണുകൾ മാറാതെ വശങ്ങൾ ഇതിന്റെ ഒന്നരമടങ്ങായ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(2) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മട്ടമൂലയിൽനിന്ന് കർണ്ണത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബം, കർണ്ണത്തിനെ 2 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.

(i) ലംബം മുറിച്ചുണ്ടാകുന്ന രണ്ടു ചെറിയ മട്ടത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.


(ii) ലംബത്തിന്റെ ഉയരം $h$ എന്നെടുത്താൽ $\frac{h}{2} = \frac{3}{h}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(iii) വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

(iv) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മട്ടമൂലയിൽ നിന്നു കർണ്ണത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ നീളം $h$ എന്നും, അത് കർണ്ണത്തെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ നീളം $a$, $b$ എന്നുമെടുത്താൽ $h^2 = ab$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

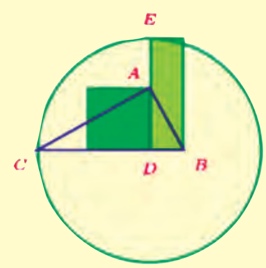
(3) വിലങ്ങനെയുള്ള ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തും ഒരേ വലുപ്പമുള്ള കോണുകൾ മുകളിലും താഴെയുമായി വരച്ച്, ചരിഞ്ഞ വരകളിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്നു.

(i) വിലങ്ങനെയുള്ള (നീല) വരയുടെ ഭാഗങ്ങളും, ചരിഞ്ഞ (ചുവന്ന) വരയുടെ ഭാഗങ്ങളും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

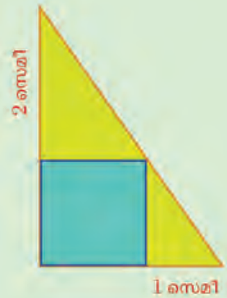
(ii) വിലങ്ങനെയുള്ള വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള ചരിഞ്ഞ (പച്ച) വരകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും ഇതുതന്നെയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(iii) ഇതുപയോഗിച്ച്, 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ എങ്ങനെ ഭാഗിക്കും ?

ചിത്രത്തിലേതുപോലെ ABC എന്ന മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കുക. മട്ടമൂലയിൽ നിന്നും കർണ്ണത്തിലേക്ക് ഒരു ലംബം വരച്ച്, കർണ്ണവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. D കേന്ദ്രമായി, C യിൽ ക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, വൃത്തവും ലംബവും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. AD ഒരു വശമായിവരുന്ന സമചതുരവും, BD, DE ഇവ വശങ്ങളായി വരുന്ന ചതുരവും നിർമ്മിക്കുക. സമചതുരത്തിന്റെയും ചതുരത്തിന്റെയും പരപ്പളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ തുല്യമല്ലേ? മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റിനോക്കൂ.



(4) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിലെ മട്ടമൂലയും, മൂന്നു വശങ്ങളിലെയും ഓരോ ബിന്ദുക്കളും മൂലകളായി ഒരു സമചതുരം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

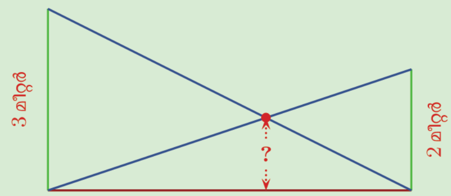



(i) സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

(ii) വശങ്ങളുടെ നീളം 3, 4, 5 സെന്റിമീറ്ററായ മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ് ?

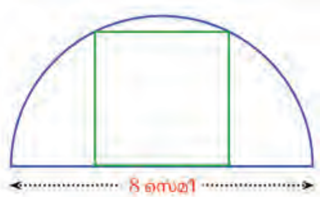
(5) ചിത്രത്തിലെ വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.


(6) 3 മീറ്ററും 2 മീറ്ററും ഉയരമുള്ള രണ്ടു കമ്പുകൾ കുത്തനെ നിലത്തു നാട്ടി, ഓരോ കമ്പിന്റെയും മുകളറ്റത്തുനിന്ന് മറ്റെ കമ്പിന്റെ ചുവട്ടിലേക്ക് കയർ വലിച്ചു കെട്ടിയിരിക്കുന്നു:



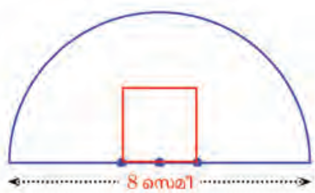

## അർധവൃത്തവും സമചതുരവും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

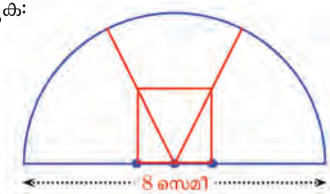



അർധവൃത്തത്തിനുള്ളിൽ ഇങ്ങനെ ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

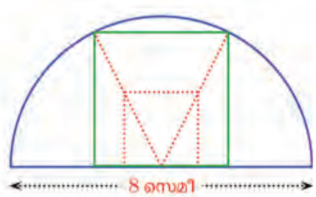
ആദ്യം അർധവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിൽ, കേന്ദ്രത്തിനു ഇരുവശത്തും ഒരേ അകലത്തിൽ രണ്ടു കുത്തുകളിടുക, വ്യാസത്തിന്റെ ഈ ഭാഗത്തിൽ ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക:




ഈ സമചതുരത്തിന്റെ മൂലകൾ, കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ നീട്ടി അർധവൃത്തത്തിൽ മുട്ടിക്കുക:




വരകൾ വൃത്തത്തെ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുക; ഈ ബിന്ദുക്കളിൽനിന്ന് വ്യാസത്തിലേക്ക് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.




ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്നത് സമചതുരം തന്നെയാണെന്ന് തെളിയിക്കാമോ ?

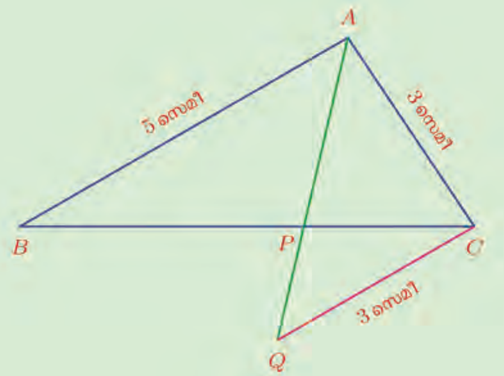
(i) കയറുകൾ പരസ്പരം മുറിച്ചുകടക്കുന്നത്, നിലത്തുനിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലാണ്?

(ii) കമ്പുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയായാലും ഈ ഉയരം മാറുന്നില്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.

(iii) കമ്പുകളുടെ നീളം $a$, $b$ എന്നും, കയറുകൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന സ്ഥാനത്തിന്റെ ഉയരം $h$ എന്നുമെടുത്ത്, $a$, $b$, $h$ ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

വിലങ്ങനെ ഒരു വര വരച്ച് അതിൽ C, D എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി ആദ്യത്തെ വരയ്ക്ക് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. C യിലൂടെയുള്ള ലംബത്തിൽ E എന്ന ഒരു ബിന്ദുവും D യിലൂടെയുള്ള ലംബത്തിൽ F എന്ന ബിന്ദുവും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ED, FC എന്നീ വരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു G അടയാളപ്പെടുത്തുക. C, D ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം മാറ്റിനോക്കൂ. G ൽ Right Click ചെയ്ത് Trace on നൽകുക. C, D ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് G സഞ്ചരിക്കുന്ന പാത ഏതാണ്?

(7) ചിത്രത്തിൽ $ABC$ എന്ന ത്രികോണത്തിലെ $\angle A$ യുടെ സമഭാജിയാണ് $AP$:




ത്രികോണം ABC വരച്ച് ∠C യുടെ സമഭാജി വരയ്ക്കുക. ഈ വര AB യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. AC, BC എന്നീ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും AD, BD എന്നീ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും താരതമ്യം ചെയ്യുക. Input Box ൽ AC/BC എന്ന് നൽകിയാൽ $\frac{AC}{BC}$ ലഭിക്കും. ഇതുപോലെ $\frac{AD}{BD}$ കണ്ടുപിടിക്കാം.

(i) $ABP$ എന്ന ത്രികോണത്തിനും, $CPQ$ എന്ന ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(ii) $\frac{BP}{PC}$ കണക്കാക്കുക.

(iii) ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജി എതിർവശത്തെ മുറിക്കുന്നത്, കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിലാണ് എന്നു തെളിയിക്കുക.

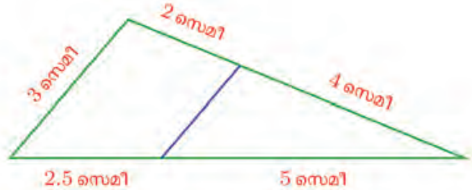
## വശങ്ങളും കോണുകളും

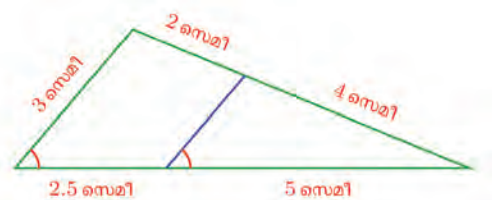
രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കോണുകളാണെങ്കിൽ, അവയുടെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യമുണ്ട്. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ ചെറുതാക്കുകയോ വലുതാക്കുകയോ ചെയ്താൽ കോണുകൾ മാറാതിരിക്കുമോ?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം ഒന്നര മടങ്ങാണ് വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണോ?

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ വലിയ ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി, ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കാം:

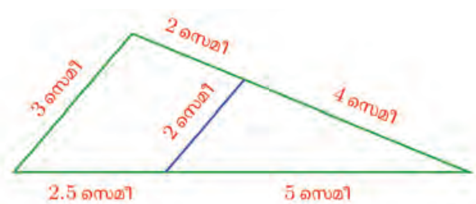



ഈ വര, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തെയും വലതുവശത്തെയും (1 : 2 എന്ന) ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽത്തന്നെയാണല്ലോ ഭാഗിക്കുന്നത്. അതിനാൽ ഈ വര ഇടതുവശത്തിനു സമാന്തരമാണ് (**സമാന്തര വരകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണഭാഗം**); അതുകൊണ്ട് ഇവ രണ്ടും താഴത്തെ വശവുമായി ഒരേ ചരിവിലാണ്.

അപ്പോൾ വലിയ ത്രികോണവും അതിനുള്ളിലെ കൊച്ചു ത്രികോണവും മാത്രം നോക്കിയാൽ (പുറത്തുള്ള ചെറിയ ത്രികോണം തൽക്കാലം നോക്കണ്ട) അവ രണ്ടിനും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു കാണാം.

നേരത്തെ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച്, ഈ രണ്ടു ത്രികോണത്തിലേയും വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നത്. ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ താഴത്തെ വശം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ്; രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വലതുവശങ്ങളും അങ്ങനെതന്നെ. മൂന്നു വശങ്ങളും മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലായതിനാൽ, ഇടതു വശങ്ങളും ഇതുപോലെ ആയിരിക്കണം. അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കാമല്ലോ:




ഇനി വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പുറത്ത് മാറ്റി നിർത്തിയിരുന്ന ചെറുത്രികോണത്തെ വീണ്ടും നോക്കാം:

അകത്തും പുറത്തുമുള്ള ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്. അതിനാൽ അവയ്ക്ക് ഒരേ കോണുകളാണ് (എട്ടാം ക്ലാസിലെ തുല്യത്രികോണങ്ങൾ എന്ന പാഠം).

വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ അതിനുള്ളിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ തന്നെയാണെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ.

അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി ?

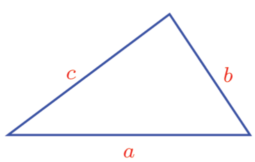
ആദ്യം വരച്ച ചെറിയ ത്രികോണത്തിനും വലിയ ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണ്.

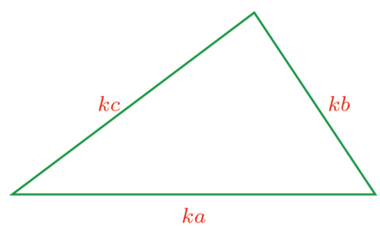
ഈ ഉദാഹരണത്തിലെ വശങ്ങളുടെ നീളവും മാറ്റത്തിന്റെ തോതുമെല്ലാം മാറ്റിയാലും ഇതേ വാദങ്ങൾകൊണ്ടുതന്നെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു സമർഥിക്കാമല്ലോ.

കൂടുതൽ കൃത്യത വേണമെന്നു തോന്നുന്നവർക്ക്, ഇതുതന്നെ പൊതുവായി അല്പം ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചു ചെയ്യാം.

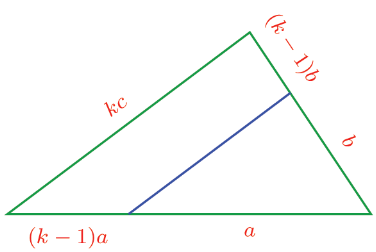
ഒരു ത്രികോണവും, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം ഒരേ തോതിൽ മാറ്റിയ മറ്റൊരു ത്രികോണവുമെടുക്കുക. അതായത്, ഒരു ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളങ്ങളെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് മറ്റേ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ.

അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ $a, b, c$ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ $ka, kb, kc$ എന്നുമെടുക്കാം.

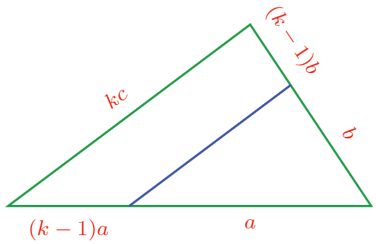



ഉദാഹരണത്തിൽ ചെയ്തപോലെ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം, വലിയ ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി, ആ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കാം:

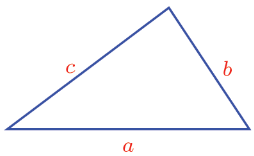


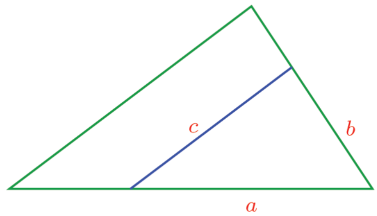

ഈ വര വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തെയും വലതുവശത്തെയും $(k - 1) : 1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്; അതിനാൽ ഈ വര, ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതു വശത്തിനു സമാന്തരമാണ്. അപ്പോൾ വലിയ ത്രികോണത്തിനും, അതിനുള്ളിലെ കൊച്ചു ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു കാണാം. കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഇവ




രണ്ടിന്റെയും വശങ്ങളുടെ മാറ്റവും ഒരേ തോതിലാണ്. വലിയ ത്രികോണത്തിലെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ $\frac{1}{k}$ ഭാഗമാണ് അതിനുള്ളിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം. വലതുവശങ്ങളും ഇതുപോലെതന്നെ. അപ്പോൾ ഇടതുവശങ്ങളും ഇങ്ങനെ തന്നെയാകണം.

ഇനി ഉദാഹരണത്തിലെപ്പോലെ, പുറത്തും അകത്തുമുള്ള ചെറുത്രികോണങ്ങൾ നോക്കാം:

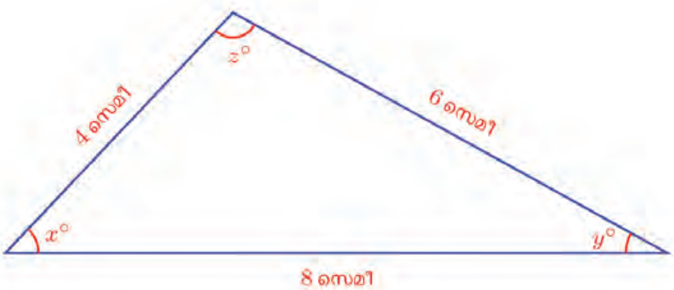


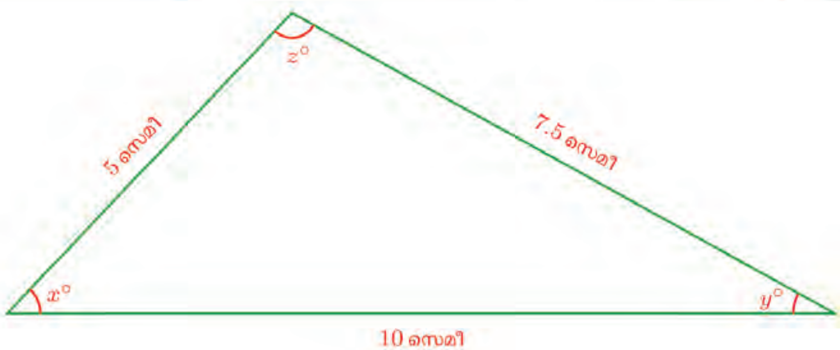

ഈ രണ്ടു ചെറുത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമായതിനാൽ, കോണുകളും തുല്യമാണ്. അകത്തെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളും, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളും തുല്യമാണെന്നു നേരത്തെ കണ്ടു. അപ്പോൾ പുറത്തെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിനും, വലിയ ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണ്.

**രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളത്തിന്റെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണെങ്കിൽ, അവയ്ക്ക് ഒരേ കോണുകളാണ്.**

അപ്പോൾ കോണുകൾ മാറാതെ ഒരു ത്രികോണം ചെറുതോ വലുതോ ആക്കി മാറ്റാൻ, കോണുകൾ അളക്കണമെന്നില്ല; വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ മാറ്റിയാൽ മതി.





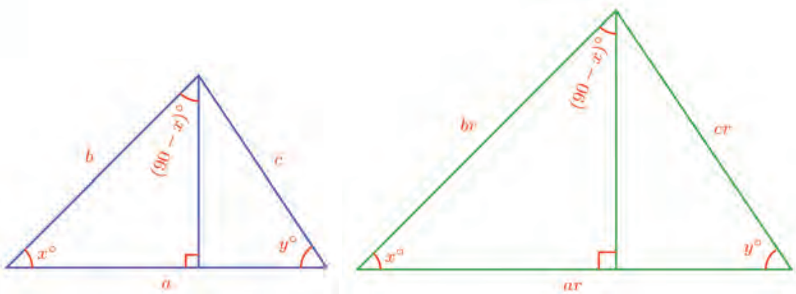


ഇതുപയോഗിച്ചുള്ള ഒരു കണക്കു നോക്കാം. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം ഒരേ തോതിൽ വലുതാക്കുകയോ ചെറുതാക്കുകയോ ചെയ്താൽ, ചുറ്റളവുകളും അതേ തോതിലാണ് മാറുന്നതെന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല (ചെയ്തുനോക്കൂ!).

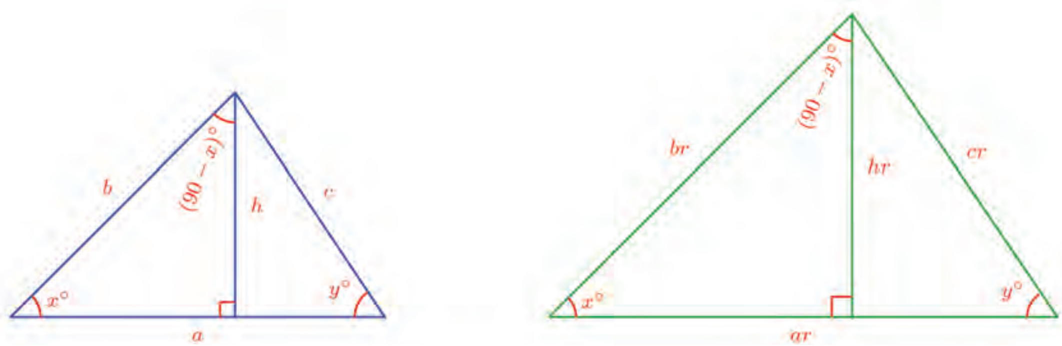
പരപ്പളവുകൾ മാറുന്നത് എങ്ങനെയാണ് ? അതറിയാൻ, ഇങ്ങനെയുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചു നോക്കാം. ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, രണ്ടിനും ഒരേ കോണുകളാണ്. പരപ്പളവ് ഒത്തുനോക്കാൻ, ഒരേ കോണുള്ള ഒരു മൂലയിൽനിന്നുള്ള ലംബങ്ങളും വരയ്ക്കാം:

ത്രികോണം ABC വരയ്ക്കുക. (വശങ്ങൾ $a$, $b$, $c$ എന്ന പേരിലാവാം). Min = 0 ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ $k$ നിർമ്മിക്കുക. $ka$ നീളത്തിൽ ഒരു വര DE വരച്ച് അഗ്രബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കിക്കൊണ്ട് ആരം $kb$, $kc$ ആകത്തക്കവിധം വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണം DEF വരയ്ക്കുക. രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവ തുല്യമല്ലേ ? സ്ലൈഡറിന്റെ വിലയും ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളും മാറ്റി നോക്കൂ.

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും ചുറ്റളവും പരപ്പളവും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ചുറ്റളവ് മാറുന്ന തോത് എന്താണ് ? പരപ്പളവ് മാറുന്ന തോതോ ?



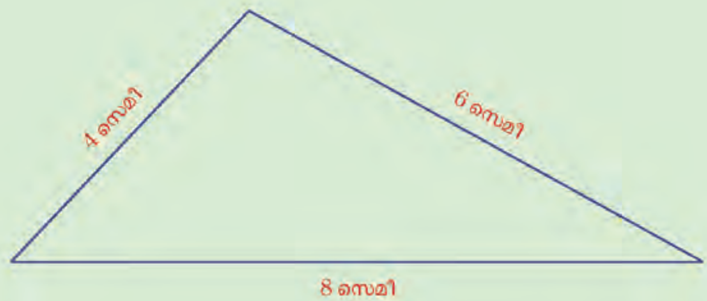

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും ഇടതു ഭാഗത്തുള്ള മട്ടത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം നോക്കുക: രണ്ടിലും കോണുകൾ $x°$, $90°$, $(90 - x)°$ തന്നെയാണ്; ഒരേ കോണുകളായതിനാൽ, വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണ്. നീലമട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം $b$ യും, പച്ചമട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം $br$ ഉം ആണ്. അപ്പോൾ നീലത്രികോണത്തിലെ ലംബം $h$ എന്നെടുത്താൽ പച്ചത്രികോണത്തിലെ ലംബം $hr$ ആണ്.



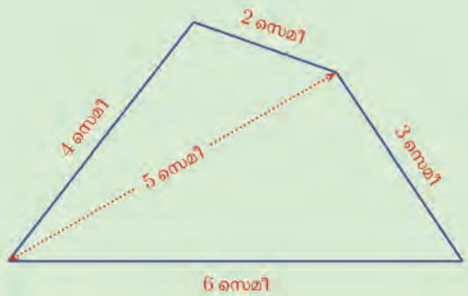

ഇനി മുഴുവൻ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാമല്ലോ: നീലത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $\frac{1}{2}ah$ ; പച്ചത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $\frac{1}{2}ahr^2$

അപ്പോൾ പരപ്പളവ് മാറുന്ന തോത്, വശങ്ങൾ മാറുന്ന തോതിന്റെ വർഗമാണ്.

(1) ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ അതേ കോണുകളും, വശങ്ങളുടെ നീളം $1\frac{1}{4}$ മടങ്ങുമായ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.




(2) ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ചിത്രം ചുവടെയുണ്ട്.




(i) ഇതേ കോണുകളും, വശങ്ങളുടെ നീളമെല്ലാം $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങുമായ ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക.

(ii) കോണുകൾ വ്യത്യസ്തവും, വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം ഇതിലെ വശങ്ങളുടെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങുമായ ഒരു ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക.

(3) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 6 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശത്തിന്റെയും നാല് മടങ്ങ് വശമായിട്ടുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ? ഓരോ വശവും പകുതിയാണെങ്കിലോ ?

## മൂന്നാംവഴി

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശവും അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തെ കോണുകളും അറിയാമെങ്കിൽ കോണുകൾ മാറാതെ, വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ ചെറുതോ വലുതോ ആക്കി, മാറ്റിവരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് ആദ്യഭാഗത്ത് കണ്ടു. അറിയാവുന്ന വശം വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റിവരച്ച്, അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തും അതേ കോണുകൾ വരച്ചാൽ മതി; മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളും അതേ തോതിൽ മാറിക്കൊള്ളും.

മൂന്നു വശങ്ങളുമാണ് അറിയാവുന്നതെങ്കിൽ ഇത്തരത്തിൽ മാറ്റിവരയ്ക്കുന്ന രീതി രണ്ടാം ഭാഗത്തിലും കണ്ടു: എല്ലാ വശങ്ങളും വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റി വരച്ചാൽ മതി; കോണുകൾ ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റേതുതന്നെയായിരിക്കും.

ഇനി മാറ്റേണ്ട ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളും, അവ ചേരുന്ന കോണുമാണ് അറിയാവുന്നതെങ്കിലോ? ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം നോക്കുക:


കോണുകൾ മാറാതെ ഇതിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാക്കണം.

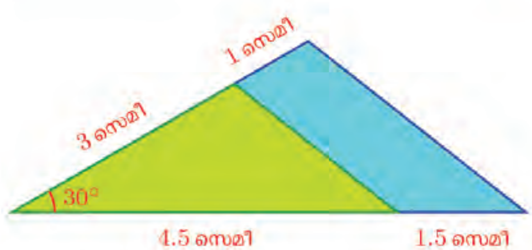
വശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും, 4 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും $\frac{3}{4}$ ഭാഗവും അവ ചേരുന്ന കോൺ 30° യുമായി ത്രികോണം വരയ്ക്കാം:



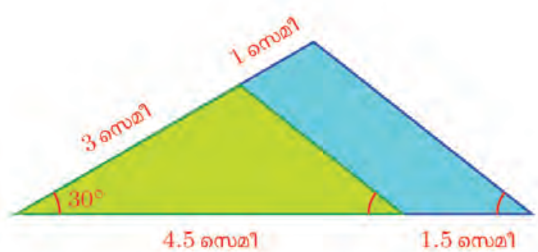
പക്ഷേ ഈ ത്രികോണത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു കോണുകൾ ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റേതു തന്നെയാണെന്നോ, മൂന്നാം വശവും ആദ്യത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാം വശത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാണെന്നോ അറിയില്ലല്ലോ.

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, പാഠത്തിന്റെ ആദ്യഭാഗത്തു ചെയ്തതുപോലെ, ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ കട്ടിക്കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത്, ഇടതുമൂലകൾ ചേർത്തുവയ്ക്കുക. കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഈ മൂലയിലെ വശങ്ങളും ചേർന്നിരിക്കും:






ഇപ്പോൾ പച്ചത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശം, നീല ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തെയും താഴത്തെ വശത്തെയും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്. അതിനാൽ ഈ വര, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശത്തിനു സമാന്തരമാണ്; അതുകൊണ്ട് രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വലതു വശങ്ങൾ താഴത്തെ വശവുമായി ഒരേ ചരിവിലാണ്.

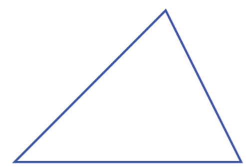


അങ്ങനെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നു കാണാം. അപ്പോൾ ഇവയുടെ വശങ്ങൾ മൂന്നും മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാകണമല്ലോ. അങ്ങനെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു വശവും, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗം തന്നെയാണെന്നു കാണാം.

ഇതിൽ അളവുകളും തോതുമെല്ലാം മാറിയാലും, ഇതേ രീതിയിൽത്തന്നെ മേല്പറഞ്ഞ നിഗമനത്തിലെത്താമല്ലോ.

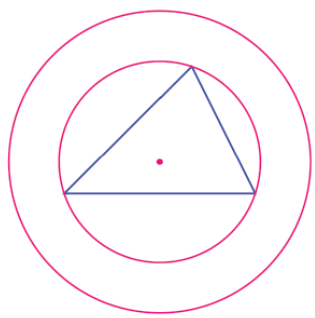
രണ്ടു വശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലും, അവയുടെ ഇടയിലെ കോണുകൾ തുല്യവും ആയ ത്രികോണങ്ങളിൽ മൂന്നാം വശങ്ങളിലെ മാറ്റവും ഇതേ തോതിലാണ്. മറ്റു രണ്ടു കോണുകളും തുല്യവുമാണ്.

ഈ തത്വമുപയോഗിച്ച്, വശങ്ങളോ കോണുകളോ അളക്കാതെതന്നെ ഒരു ത്രികോണത്തിനെ വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റി വരയ്ക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക:



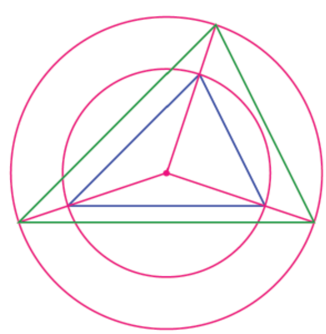
ഇതിന്റെ വശങ്ങളെയെല്ലാം ഒന്നര മടങ്ങാക്കി വലുതാക്കണം.

അതിന് ആദ്യം ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തവും, അതേ കേന്ദ്രമായി, ഒന്നര മടങ്ങ് ആരമുള്ള മറ്റൊരു വൃത്തവും വരയ്ക്കുക:

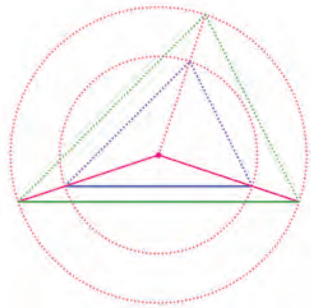


ഇനി വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രം ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ നീട്ടി വരച്ച്, വലിയ വൃത്തത്തിൽ മുട്ടിക്കുക. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ത്രികോണം വരയ്ക്കുക:

വലിയ (പച്ച) ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ചെറിയ (നീല) ത്രികോണത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങാണെന്നു കാണാൻ, ഈ ത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം നോക്കുക:

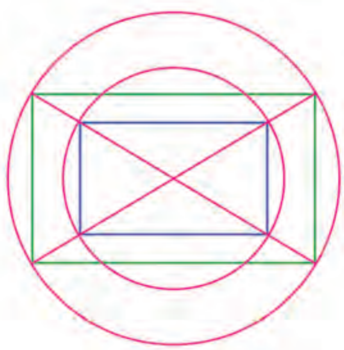


ഇതിലെ വലിയ ത്രികോണത്തിലെ ഇടതും വലതും വശങ്ങൾ,ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ ഒന്നര മടങ്ങാണല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട് ?). ഇവയുടെ ഇടയിലെ കോൺ രണ്ടു ത്രികോണത്തിലും ഒന്നുതന്നെയാണ്. അപ്പോൾ താഴത്തെ വശങ്ങളും ഇതേ തോതിലാണ്.



അതായത്, ആദ്യത്തെ നീല ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങാണ്, അവസാനം വരച്ച പച്ചത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം. ഈ ത്രികോണത്തിലെ മറ്റു വശങ്ങളുടെ തോതും ഒന്നര മടങ്ങാണെന്നു കാണാമല്ലോ.

ഇതുപോലെതന്നെ ഏതു ചതുരത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ വലുതാക്കുകയോ ചെറുതാക്കുകയോ ചെയ്യാം.



Min = 0 ആയ ഒരു സ്ലൈഡർ '$a$' നിർമ്മിക്കുക. ത്രികോണം ABC വരച്ച് അതിന്റെ പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം D കണ്ടുപിടിക്കുക (Circle through 3 Points ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് പരിവൃത്തം വരച്ച ശേഷം Midpoint or Centre ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി). D കേന്ദ്രമായി പരിവൃത്ത ആരത്തിന്റെ $a$ മടങ്ങ് ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക (ആരമായി $a$*AD എന്ന് നൽകിയാൽ മതി). D യിൽ തുടങ്ങി ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരകൾ വരയ്ക്കുക (Ray ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം). ഈ വരകൾ പുതിയ വൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി അവ മൂലകളായി വരുന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവും ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടെത്തുക.

എല്ലാ ചതുർഭുജങ്ങളിലും ഈ രീതി പ്രയോഗിക്കാൻ കഴിയില്ല. ഉദാഹരണമായി, ചതുരമല്ലാത്ത ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടി വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ലല്ലോ.

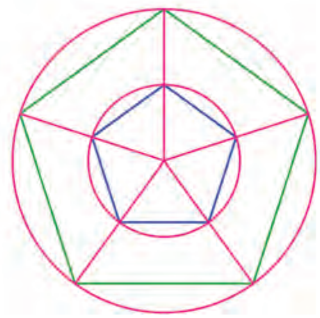
### മട്ടത്രികോണം

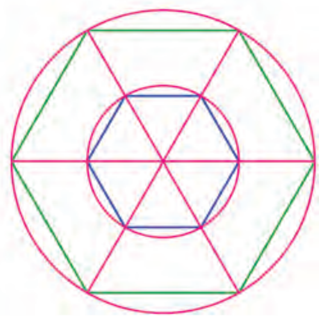
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം, മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളത്തിനു തുല്യമായതു കൊണ്ട്, ത്രികോണങ്ങൾ തുല്യമാകണമെന്നില്ല. മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളും തുല്യമാകണം; അല്ലെങ്കിൽ ഈ വശങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണുകൾ തുല്യമാകണം.

പക്ഷേ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ നിശ്ചയിച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ, പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് മൂന്നാമത്തെ വശവും നിശ്ചയിക്കപ്പെടും; ത്രികോണങ്ങൾ തുല്യവുമാകും

ഇതുപോലെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ, രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലായതുകൊണ്ടു മാത്രം അവ സദൃശമാണെന്നു പറയാൻ കഴിയില്ല. മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളുടെ മാറ്റവും ഇതേ തോതിൽ ആകണം; അല്ലെങ്കിൽ ഈ വശങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണുകൾ തുല്യമാകണം. എന്നാൽ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ, രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിൽ ആയാൽത്തന്നെ ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാണ്.

എന്നാൽ സമബഹുഭുജങ്ങളെയെല്ലാം ഒരേ തോതിൽ മാറ്റി വരയ്ക്കാൻ ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാം:





ഇതുവരെപ്പറഞ്ഞ തത്വങ്ങളെല്ലാം ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിപ്പറയാം.

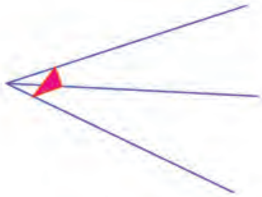
രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ തമ്മിൽ ചുവടെപ്പറയുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ബന്ധമുണ്ടെങ്കിൽ, മറ്റു രണ്ടു ബന്ധങ്ങളും ഉണ്ടാകും.

- ഒരേ കോണുകളാകുക.
- വശങ്ങളിലെയെല്ലാം മാറ്റം ഒരേ തോതിലാകുക.
- രണ്ടു വശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാകുകയും, അവയുടെയിടയിൽ ഒരേ കോൺ ആയിരിക്കുകയും ചെയ്യുക.

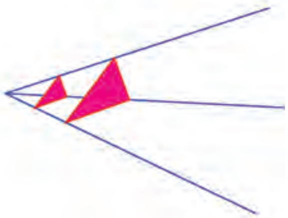
ഇതിലേതെങ്കിലും തരത്തിൽ ബന്ധപ്പെടുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശം (similar) ആണെന്നാണ് പറയുന്നത്.

## പ്രക്ഷേപണം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം, പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ച്, നീട്ടി വരയ്ക്കുക:

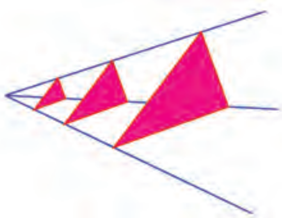


ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തിന് സമാന്തരമായി, അല്പം വലത്തേക്കു മാറി, ഒരു വര വരയ്ക്കുക. ഇത് മുകളിലെ നീല വരയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശത്തിന് സമാന്തരമായി മറ്റൊരു വര വരയ്ക്കുക. ഈ വര നടുവിലെ നീല വരയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി മൂന്നാമതൊരു വര വരയ്ക്കുക. ഇപ്പോൾ മറ്റൊരു ത്രികോണമായി.



രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണ് (എന്തുകൊണ്ട് ?) അതിനാൽ അവയുടെ വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിലാണ് വലുതായിരിക്കുന്നത്.

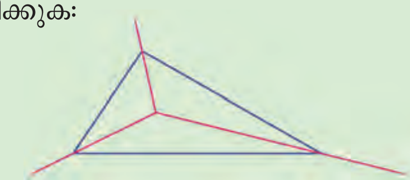
ഇങ്ങനെ എത്ര ത്രികോണങ്ങൾ വേണമെങ്കിലും വരയ്ക്കാമല്ലോ.

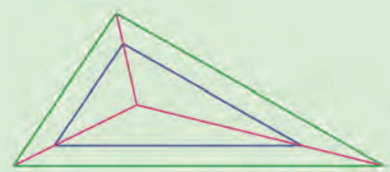


(1) രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ ലംബവശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണെങ്കിൽ, അവയുടെ കർണ്ണങ്ങളിലെ മാറ്റവും ഇതേ തോതിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു വശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണെങ്കിൽ, മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളിലെ മാറ്റവും ഇതേ തോതിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) ഒരു ത്രികോണം വരച്ച്, അതിനുള്ളിൽ ഒരു കുത്തിടുക. ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ ഈ കുത്തുമായി യോജിപ്പിച്ചു വരയ്ക്കുക. ഈ വരകളോരോന്നും അവയുടെ പകുതി കൂടി പുറത്തേക്ക് നീട്ടി, അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുക:

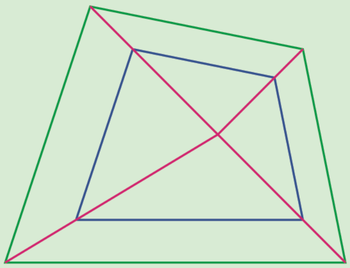




ഇങ്ങനെ കിട്ടിയ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം, ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ ഒന്നര മടങ്ങാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഒരു ത്രികോണം ABC വരച്ച് അതിനുപുറത്ത് ഒരു ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. D യിൽ നിന്ന് ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വരകൾ വരയ്ക്കുക (Ray ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം). DA എന്ന വരയിൽ ഒരു ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. E യിലൂടെ AB യ്ക്ക് സമാന്തരമായി ഒരു വര വരച്ച് ഈ വര DB യെ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F അടയാളപ്പെടുത്തുക. അതുപോലെ, E യിലൂടെ AC യ്ക്ക് സമാന്തരം വരച്ച് DC യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു G യും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണം EFG വരയ്ക്കുക. ABC, EFG എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കൂ. അവ തുല്യമല്ലേ ? E യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കൂ. EFG യുടെ വലിപ്പം മാറുന്നില്ലേ. അതിന്റെ വശങ്ങളും ABC യുടെ സമാന വശങ്ങളും ഒരേ തോതിലാണോ മാറുന്നത് ?

(4) ഒരു ചതുർഭുജത്തിനകത്തെ ഒരു ബിന്ദുവും ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ, ഒരേ തോതിൽ പുറത്തേക്കു നീട്ടുന്നു; ഈ വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച് മറ്റൊരു ചതുർഭുജമുണ്ടാക്കുന്നു.



(i) വലിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങൾ, ചെറിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളെ ഒരേ തോതിൽ വലുതാക്കിയതാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(ii) രണ്ടു ചതുർഭുജങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

സദൃശത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ Enlarge from Point ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം. Min = 0 വരത്തക്കവിധം സ്ലൈഡർ '$a$' ഉണ്ടാക്കുക. ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന് അകത്തോ പുറത്തോ ആയി ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Enlarge from Point Tool (Dilate from point) ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിലും തുടർന്ന് ബിന്ദുവിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ Scale Factor ആയി '$a$' എന്ന് നൽകുക. ത്രികോണത്തിന് സദൃശമായി മറ്റൊരു ത്രികോണം കിട്ടും. '$a$' യും ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനവും മാറ്റി നോക്കൂ. ത്രികോണത്തിനുപകരം ഏതുരൂപത്തിന്റെയും സദൃശരൂപങ്ങൾ ഇതുപോലെ നിർമ്മിക്കാം.

**ഗവേഷണം**

സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ ഉയരം, നടുവരകൾ, കോൺസമഭാജികൾ എന്നിവ മാറുന്നത് വശങ്ങളുടെ അതേ തോതിലാണോ എന്ന് കണ്ടെത്തുക.

7

# ന്യൂനസംഖ്യകൾ

## അളവുകളും സംഖ്യകളും

പൂജ്യത്തിനേക്കാൾ താഴെയുള്ള താപനിലകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതി എട്ടാം ക്ലാസിൽ കണ്ടില്ലേ ? വെള്ളമുറഞ്ഞ് മഞ്ഞായി കട്ടപിടിക്കുന്ന താപനിലയെ ആണ് $0°C$, അഥവാ പൂജ്യം ഡിഗ്രി സെൽഷ്യസ്, എന്നെടുത്തിരിക്കുന്നത്. അതിലും തണുപ്പേറിയ അവസ്ഥയെ കുറിക്കാൻ $-1°C$, $-20.5°C$ എന്നെല്ലാം ഉപയോഗിക്കേണ്ടി വരുന്നു.

ചില കളികളിൽ പോയിന്റ് സൂചിപ്പിക്കാനും, ചില പരീക്ഷകളിൽ മാർക്കിടാനുമെല്ലാം ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതും കണ്ടു. ഇവയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ, ചില കണക്കുകൂട്ടലുകൾ നടത്തുന്നതിന്റെ പൊതുതത്വങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കി.

ഉദാഹരണമായി,

$3°C$ ആയിരുന്ന താപനിലയിൽ നിന്ന് വീണ്ടും $7°C$ കുറഞ്ഞാൽ താപനില എത്രയാകും ?

എന്ന ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരമായി

$$3 - 7 = -4$$

എന്ന ക്രിയയും, ഇതുപോലെയുള്ള മറ്റു സന്ദർഭങ്ങളിലൂടെ, ചെറിയ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് വലിയ സംഖ്യ കുറയ്ക്കുമ്പോൾ ന്യൂനസംഖ്യ കിട്ടുന്നതിന്റെ പൊതുതത്വവും കണ്ടു.

ഈ രീതിയിൽ പല സന്ദർഭങ്ങളിൽ ആവശ്യമായി വരുന്ന ക്രിയകളുടെ പൊതുരൂപങ്ങളായി മൂന്നു തത്വങ്ങളാണ് കണ്ടത്:

$x, y$ എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

(i) $x < y$ ആണെങ്കിൽ $x - y = -(y - x)$

(ii) $-x + y = y - x$

(iii) $-x - y = -(x + y)$

ഇവ ഉപയോഗിച്ച്, ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന കണക്കുകൾ ചെയ്യാമല്ലോ ?

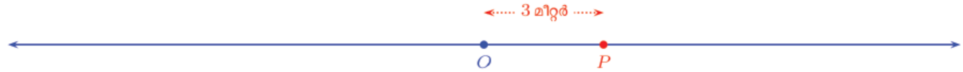
(i) $6 - 8$ (ii) $-6 + 8$ (iii) $-6 - 8$

(iv) $2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}$ (v) $-2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$ (vi) $-2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}$

ഇനി ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന മറ്റൊരു സന്ദർഭം നോക്കാം:

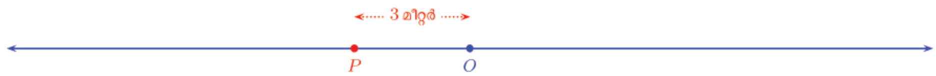
## സ്ഥാനവും സംഖ്യയും

ഒരു നേർവരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദു സങ്കല്പിക്കുക. ഇതിന്റെ സ്ഥാനം സൂചിപ്പിക്കാൻ, ഈ ബിന്ദു ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് എത്ര അകലെയാണെന്ന് (ഏതെങ്കിലും ഏകകം ഉപയോഗിച്ച്) പറയാം.




നിശ്ചിത ബിന്ദുവിനെ $O$ എന്നും, ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ $P$ എന്നും എടുത്ത്, $O$ യുടെ വലതുവശത്ത് 3 മീറ്റർ അകലെയായി $P$ വരുന്നതാണ് ചിത്രത്തിൽ.

$O$ യുടെ ഇടതുവശത്ത്, 3 മീറ്റർ അകലെയായും $P$ വരാമല്ലോ:

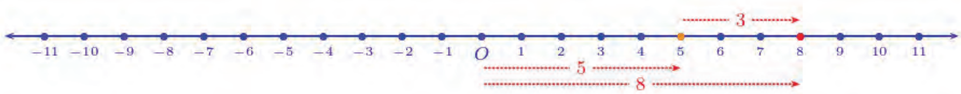



അപ്പോൾ $P$ യുടെ സ്ഥാനം കൃത്യമാക്കാൻ, $O$ യിൽനിന്നുള്ള അകലം മാത്രം പറഞ്ഞാൽപ്പോരാ, എതു വശത്താണ് എന്നും കൂടി പറയണം.

ഇതൊഴിവാക്കാൻ ഒരു മാർഗം, ഇടത്തോട്ടുള്ള സംഖ്യകളെ ന്യൂനസംഖ്യകളായി പറയുക എന്നതാണ്. അളക്കുന്ന ഏകകം (മീറ്ററോ, സെന്റിമീറ്ററോ എന്തായാലും) തീരുമാനിച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ, വരയിലെ $O$ അല്ലാത്ത എല്ലാ സ്ഥാനങ്ങളെയും അധിസംഖ്യകളും ന്യൂനസംഖ്യകളും ഉപയോഗിച്ചു പറയാം:

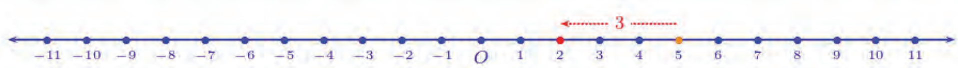

$O$ യുടെ സ്ഥാനം 0 കൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കാം.

ഇനി ഈ വരയിൽ 5 എന്ന സ്ഥാനത്തുനിന്ന് ഒരു ബിന്ദു 8 എന്ന സ്ഥാനത്തേയ്ക്ക് മാറി എന്നു കരുതുക. സ്ഥാനത്തിലുണ്ടായ മാറ്റം $8 - 5 = 3$ എന്നു പറയാം:



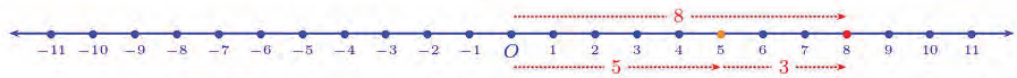

മറിച്ച്, 5 എന്ന സ്ഥാനത്തു നിന്ന് 3 സ്ഥാനം മാറി എന്നു പറഞ്ഞാൽ, ഇപ്പോഴത്തെ സ്ഥാനം 8 തന്നെയാണെന്ന് പറയാൻ പറ്റുമോ ?

മാറ്റം വലത്തോട്ടാണെങ്കിൽ ശരി; ഇടത്തോട്ടായാലോ ?

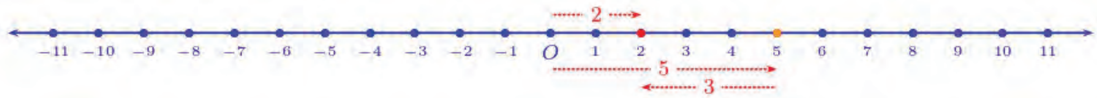



അപ്പോൾ, സ്ഥാനമാറ്റം എത്രയാണെന്ന് അറിഞ്ഞതുകൊണ്ടു മാത്രം ഇപ്പോഴത്തെ സ്ഥാനം നിശ്ചയിക്കാനാവില്ല; വലത്തോട്ടോ ഇടത്തോട്ടോ എന്നു കൂടി പറയണം.

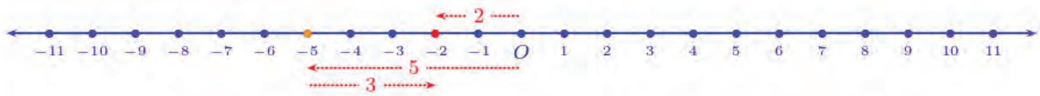
അതായത് 5 എന്ന ആദ്യ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് വലത്തോട്ട് 3 സ്ഥാനം മാറി എന്നു പറഞ്ഞാൽ അവസാനമെത്തിയ സ്ഥാനം 8;




സ്ഥാനമാറ്റം ഇടത്തോട്ടാണെങ്കിൽ 2:




അപ്പോൾ −5 എന്ന സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 3 സ്ഥാനം വലത്തോട്ട് മാറിയാലോ ?




ആദ്യസ്ഥാനവും, ദിശയോടൊപ്പം സ്ഥാനമാറ്റവും അറിഞ്ഞാൽ അവസാനസ്ഥാനം കണക്കാക്കാനുള്ള പൊതുവായ ഒരു മാർഗം ഉണ്ടാക്കാനായി, വ്യത്യസ്ത സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഇവ എങ്ങനെയാണെന്ന് ഒരു പട്ടികയായി എഴുതാം:

ആദ്യം വലത്തോട്ടുള്ള സ്ഥാനമാറ്റം നോക്കാം:

| ആദ്യസ്ഥാനം | സ്ഥാനമാറ്റം | അവസാനസ്ഥാനം |
|---|---|---|
| 5 | 3 വലത്തേയ്ക്ക് | 8 |
| 3 | 5 വലത്തേയ്ക്ക് | 8 |
| −5 | 3 വലത്തേയ്ക്ക് | −2 |
| −3 | 5 വലത്തേയ്ക്ക് | |

ചിത്രം വരച്ച് (അല്ലെങ്കിൽ മനസ്സിൽ സങ്കല്പിച്ച്) പട്ടികയിലെ അവസാന സംഖ്യയും എഴുതാമല്ലോ.

പട്ടികയിലെ സ്ഥാനമാറ്റങ്ങളിൽ സംഖ്യകൾ മാത്രമാക്കിയാലോ ?

| ആദ്യസ്ഥാനം | സ്ഥാനമാറ്റം | അവസാനസ്ഥാനം |
|---|---|---|
| 5 | 3 | 8 |
| 3 | 5 | 8 |
| −5 | 3 | −2 |
| −3 | 5 | 2 |

ഇനി പട്ടികയിലെ സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം എന്ന് അന്വേഷിക്കാം.

ആദ്യത്തെ രണ്ടു വരികളിൽ, ഒന്നാമത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയതാണ് അവസാനത്തെ സംഖ്യ എന്ന് ഒറ്റ നോട്ടത്തിൽ കാണാം.

അടുത്ത വരിയിലോ ?

$$-5 + 3 = 3 - 5 = -2$$

എന്നു നേരത്തെതന്നെ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

അവസാനത്തെ വരിയിലോ ?

$$-3 + 5 = 5 - 3 = 2$$

എന്നും നേരത്തെതന്നെ കണ്ടിട്ടുണ്ട്.

അപ്പോൾ പട്ടികയിലെ ഓരോ വരിയിലും, ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയാണ് അവസാന സംഖ്യ.

| ആദ്യസ്ഥാനം | സ്ഥാനമാറ്റം | അവസാനസ്ഥാനം |
|---|---|---|
| 5 | 3 | $8 = 5 + 3$ |
| 3 | 5 | $8 = 3 + 5$ |
| $-5$ | 3 | $-2 = -5 + 3$ |
| $-3$ | 5 | $2 = -3 + 5$ |

ഇനി ഇടത്തോട്ടുള്ള സ്ഥാനമാറ്റം നോക്കാം:

| ആദ്യസ്ഥാനം | സ്ഥാനമാറ്റം | അവസാനസ്ഥാനം |
|---|---|---|
| 5 | 3 ഇടത്തേയ്ക്ക് | 2 |
| 3 | 5 ഇടത്തേയ്ക്ക് | $-2$ |
| $-5$ | 3 ഇടത്തേയ്ക്ക് | $-8$ |
| $-3$ | 5 ഇടത്തേയ്ക്ക് | $-8$ |

സ്ഥാനങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ, ഇടത്തും വലത്തും തിരിച്ചറിയാൻ, ഇടത്തോട്ടുള്ള സ്ഥാനമാറ്റങ്ങളെ ന്യൂനസംഖ്യയായി എഴുതാം:

| ആദ്യസ്ഥാനം | സ്ഥാനമാറ്റം | അവസാനസ്ഥാനം |
|---|---|---|
| 5 | $-3$ | 2 |
| 3 | $-5$ | $-2$ |
| $-5$ | $-3$ | $-8$ |
| $-3$ | $-5$ | $-8$ |

ആദ്യത്തെ പട്ടികയിലെപ്പോലെ ഇതിലും, ഓരോ വരിയിലും ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയാണോ അവസാന സംഖ്യ ?

ആദ്യത്തെ വരിയിൽ ഇതു പരിശോധിക്കാൻ $5 + (-3)$ എന്ന തുക കണക്കാക്കണം. ഇത്തരമൊരു തുക ഇതുവരെ കണ്ടിട്ടില്ലല്ലോ.

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം. അധിസംഖ്യകളിലെല്ലാം കൂട്ടുന്നതിന്റെ ക്രമം മാറ്റിയാലും തുക മാറില്ല ല്ലോ. ഉദാഹരണമായി

$$5 + 3 = 3 + 5 \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \qquad \sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

അപ്പോൾ, ഇവിടെയും

$$5 + (-3) = -3 + 5$$

എന്നെടുക്കാം. ഇതിൽ

$$-3 + 5 = 5 - 3 = 2$$

എന്നു നേരത്തെ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

അങ്ങനെ,

$$5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

എന്ന് നിർവചിക്കാം. അപ്പോൾ ഒന്നാമത്തെ വരിയിലും, ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയായി അവസാനസംഖ്യ കിട്ടും.

ഇതുപോലെ,

$$3 + (-5) = -5 + 3 = 3 - 5 = -2$$

എന്നെടുത്താൽ, പട്ടികയിലെ അടുത്ത വരിയിലും ഈ ബന്ധം ശരിയാകും:

| ആദ്യസ്ഥാനം | സ്ഥാനമാറ്റം | അവസാനസ്ഥാനം |
|---|---|---|
| 5 | –3 | $2 = 5 + (-3)$ |
| 3 | –5 | $-2 = 3 + (-5)$ |
| –5 | –3 | –8 |
| –3 | –5 | –8 |

മിച്ചമുള്ള രണ്ടു വരികളിലോ ?

അവയിലും ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ അർഥം പറയണം. തൊട്ടുമുമ്പുള്ള വരികളിൽ, ന്യൂനസംഖ്യ കൂട്ടുന്നത്, വ്യത്യാസമായി എഴുതിയാണല്ലോ.

$$5 + (-3) \;=\; 5 - 3 = 2$$

$$3 + (-5) \;=\; 3 - 5 = -2$$

അടുത്ത വരികളിലും

$$(-5) + (-3) = -5 - 3$$

$$(-3) + (-5) = -3 - 5$$

എന്നാക്കിയാലോ ?

ഇവയിലെ അവസാനമെഴുതിയ വ്യത്യാസങ്ങൾ നേരത്തെ ചെയ്തിട്ടുമുണ്ട്.

$$-5 - 3 = -(5 + 3) = -8$$

$$-3 - 5 = -(3 + 5) = -8$$

അങ്ങനെ

$$(-5) + (-3) = -5 - 3 = -8$$

$$(-3) + (-5) = -3 - 5 = -8$$

എന്നെടുത്താൽ, പട്ടികയിലെ അവസാനത്തെ രണ്ടു വരികളിലും മുമ്പുള്ള വരികളിലെ ബന്ധം ശരിയാവുകയും ചെയ്യും;

| ആദ്യസ്ഥാനം | സ്ഥാനമാറ്റം | അവസാനസ്ഥാനം |
|---|---|---|
| 5 | –3 | 2 = 5 + (–3) |
| 3 | –5 | –2 = 3 + (–5) |
| –5 | –3 | –8 = –5 + (–3) |
| –3 | –5 | –8 = –3 + (–5) |

ഇനി വലതു പട്ടികയും ഇടതു പട്ടികയും ചേർത്തെഴുതി നോക്കാം:

| ആദ്യസ്ഥാനം $x$ | സ്ഥാനമാറ്റം $y$ | അവസാനസ്ഥാനം $x + y$ |
|---|---|---|
| 5 | 3 | 8 = 5 + 3 |
| 3 | 5 | 8 = 3 + 5 |
| –5 | 3 | –2 = (–5) + 3 |
| –3 | 5 | 2 = (–3) + 5 |
| 5 | –3 | 2 = 5 + (–3) |
| 3 | –5 | –2 = 3 + (–5) |
| –5 | –3 | –8 = (–5) + (–3) |
| –3 | –5 | –8 = (–3) + (–5) |

സ്ഥാനങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയ വരയിൽ, ആദ്യസ്ഥാനവും സ്ഥാനമാറ്റവും വേറെ സംഖ്യകളാക്കിയ ഒരു പട്ടികയാണ് ചുവടെ:

| ആദ്യസ്ഥാനം | സ്ഥാനമാറ്റം | അവസാനസ്ഥാനം |
|---|---|---|
| 7 | 3 വലത്തേയ്ക്ക് | |
| 3 | 7 വലത്തേയ്ക്ക് | |
| –7 | 3 വലത്തേയ്ക്ക് | |
| –3 | 7 വലത്തേയ്ക്ക് | |
| 7 | 3 ഇടത്തേയ്ക്ക് | |
| 3 | 7 ഇടത്തേയ്ക്ക് | |
| –7 | 3 ഇടത്തേയ്ക്ക് | |
| –3 | 7 ഇടത്തേയ്ക്ക് | |

ചിത്രം വരച്ച് അവസാനസ്ഥാനങ്ങൾ കണക്കാക്കി പട്ടികയിൽ എഴുതുക. പിന്നീട് സ്ഥാനമാറ്റങ്ങളെയും അധിസംഖ്യകളും ന്യൂനസംഖ്യകളും മാത്രമായി മാറ്റി എഴുതുക. പട്ടികയിലെ എല്ലാ വരികളിലും ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക തന്നെയാണോ അവസാനസംഖ്യ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

പട്ടികയിലെ എല്ലാ വരികളിലും, അവസാനസംഖ്യ ആദ്യത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും സംഖ്യകളുടെ തുക ആകാനായി, പുതിയ ചില ക്രിയകൾക്ക് അർഥം കൊടുത്തല്ലോ ?

$$3 + (-5) = 3 - 5 = -2$$

$$5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

$$(-5) + (-3) = -5 - 3 = -8$$

$$(-3) + (-5) = -3 - 5 = -8$$

ഇതിലെല്ലാം ഇടതുവശത്ത് പൊതുവായി കാണുന്നത്, ഒരു ന്യൂനസംഖ്യ കൂട്ടുന്നു എന്നതാണ്. വലതുഭാഗത്ത് ഇവയുടെ നിർവചനമായി പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത് ഈ കൂട്ടലുകളെ മറ്റൊരു തരത്തിൽ കുറയ്ക്കലായി മാറ്റിയതാണ്.

കുറേക്കൂടി കൃത്യമായി പറയാൻ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം:

$x$ ഏതു സംഖ്യയായാലും, $y$ ഏതു അധിസംഖ്യയായാലും

$$x + (-y) = x - y$$

ഇതനുസരിച്ച് സ്ഥാനക്കണക്കിൽ, സ്ഥാനങ്ങളും സ്ഥാനമാറ്റവും ഏതു സംഖ്യകളായാലും, ആദ്യസ്ഥാനത്തോട് സ്ഥാനമാറ്റം കൂട്ടിയാൽ അവസാനസ്ഥാനം കിട്ടും.

അതായത് ആദ്യസ്ഥാനം $x$, സ്ഥാനമാറ്റം $y$ അവസാന സ്ഥാനം $z$ എന്നെടുത്താൽ, ഇവ ഏതു സംഖ്യകളായാലും അവസാന സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിക്കാൻ

$$z = x + y$$

എന്ന ഒറ്റ സമവാക്യം മതിയാകും.

## ഒരു കാര്യം പല വാക്യം

ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാതെ സ്ഥാനങ്ങളുടെയും സ്ഥാനമാറ്റത്തിന്റെയും കണക്ക് ബീജഗണിതത്തിൽ എഴുതാൻ ശ്രമിച്ചാലോ ? ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് $O$ യിൽനിന്നുള്ള അകലങ്ങൾ $x, z$ അവ തമ്മിലുള്ള അകലം $y$, എന്നെല്ലാമെടുക്കാം. ഇവയെല്ലാം അധിസംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറയുന്നതിനാൽ, അവയുടെ കൂടെ ഇടതോ വലതോ എന്നുകൂടി പറയേണ്ടി വരും.

$x, y$ ഒരേ ദിശയിലായാൽ
$z = x + y$, അതേ ദിശയിൽ

$x, y$ വിപരീത ദിശകളിലായൽ,

$x > y$ ആണെങ്കിൽ

$z = x - y$, $x$ ന്റെ ദിശയിൽ

$x < y$ ആണെങ്കിൽ

$z = y - x$, $y$ യുടെ ദിശയിൽ എന്നെല്ലാം പറയണം

ഇവിടെ $x, y, z$ ഇവ അധിസംഖ്യകളോ, ന്യൂനസംഖ്യകളോ ആകാം എന്നതുകൊണ്ടാണ്, അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഒറ്റ സമവാക്യത്തിൽ ഒതുക്കാൻ കഴിഞ്ഞത്.

ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാതെ, അധിസംഖ്യകളും ഇടതു വലതു വിശേഷണങ്ങളുമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നതെങ്കിൽ, അവസാനസ്ഥാനം പൊതുവായി ബീജഗണിതത്തിൽ എങ്ങനെ പറയാമെന്ന് ആലോചിച്ചു നോക്കൂ.

(1) ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക:

| $x$ | $y$ | $x + y$ |
|---|---|---|
| 6 | −10 | |
| −6 | 10 | |
| −6 | −10 | |
| −6 | 6 | |
| 6 | −6 | |

(2) ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ കണക്കിലും, പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന തരത്തിലുള്ള രണ്ടു ജോടി $x, y$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $x$ അധിസംഖ്യ, $y$ ന്യൂനസംഖ്യ, $x + y = 1$

(ii) $x$ ന്യൂനസംഖ്യ, $y$ അധിസംഖ്യ, $x + y = 1$

(iii) $x$ അധിസംഖ്യ, $y$ ന്യൂനസംഖ്യ, $x + y = -1$

(iv) $x$ ന്യൂനസംഖ്യ, $y$ അധിസംഖ്യ, $x + y = -1$

(3) ചുവടെയുള്ള പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക.

| $x$ | $y$ | $z$ | $(x+y)+z$ | $x+(y+z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | −5 | | |
| 2 | −4 | 5 | | |
| −2 | 4 | −5 | | |
| 2 | −4 | −5 | | |
| −2 | 4 | 5 | | |
| −2 | −4 | 5 | | |
| −2 | −4 | −5 | | |

## സ്ഥാനമാറ്റം

സ്ഥാനക്കണക്കുതന്നെ മറ്റൊരു തരത്തിലാകാം: 4 എന്ന സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 7 എന്ന സ്ഥാനത്തെത്താൻ, എത്ര സ്ഥാനം മാറണം ?

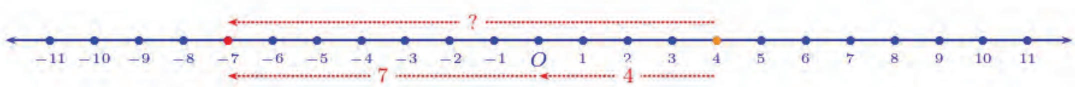
3 സ്ഥാനം എന്നു മാത്രം പറഞ്ഞാൽപ്പോരല്ലോ; മാറുന്നത് ഇടത്തോട്ടാണെങ്കിൽ 1 ൽ അല്ലേ എത്തുക ? അപ്പോൾ 4 ൽ നിന്ന് 7 ൽ എത്താൻ 3 സ്ഥാനം വലത്തോട്ട് എന്നു തന്നെ പറയണം.

7 ൽ നിന്ന് 4 ൽ എത്താനോ ?

അതിനും 3 സ്ഥാനംതന്നെ മാറണം, പക്ഷേ ഇടത്തോട്ട്.

4 ൽ നിന്ന് −7 ൽ എത്താനോ ?

ചിത്രം വരച്ചു നോക്കാം:




നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ പല സ്ഥാനങ്ങളും ഇടതും വലതുമായി എടുത്ത്, സ്ഥാനമാറ്റങ്ങൾ കണക്കാക്കി ഒരു പട്ടികയുണ്ടാക്കാം. ആദ്യം സൗകര്യത്തിനായി സ്ഥാനമാറ്റങ്ങൾ ഇടതു-വലത് വിശേഷണങ്ങൾ ചേർത്ത് എഴുതാം:

### വ്യത്യസ്ത വ്യത്യാസം

17 ൽ നിന്ന് 9 കുറയ്ക്കാനുള്ള ഒരു എളുപ്പവഴി, 10 ൽ നിന്ന് 9 കുറച്ച് 7 കൂട്ടുന്നതാണ്.

$$\begin{aligned} 17-9 &= (10+7)-9 \\ &= (10-9)+7 \\ &= 1+7=8 \end{aligned}$$

ന്യൂനസംഖ്യകളുടെ ക്രിയ ഉപയോഗിച്ച്, ഇങ്ങനെയും ചെയ്യാം:

$$\begin{aligned} 17-9 &= (10+7)-9 \\ &= 10+(7-9) \\ &= 10+(-2) \\ &= 10-2=8 \end{aligned}$$

ഇതുപോലെ,

$$\begin{aligned} 57-29 &= (50-20)+(7-9) \\ &= 30+(-2) \\ &= 30-2=28 \end{aligned}$$

എന്നും കണക്കാക്കാമല്ലോ.


| ആദ്യസ്ഥാനം | എത്തേണ്ട സ്ഥാനം | സ്ഥാനമാറ്റം |
|---|---|---|
| 4 | 7 | 3 വലത്തോട്ട് |
| 7 | 4 | 3 ഇടത്തോട്ട് |
| 4 | −7 | 11 ഇടത്തോട്ട് |
| −7 | 4 | |
| −4 | 7 | |
| 7 | −4 | |
| −4 | −7 | |
| −7 | −4 | |

ഇനി സ്ഥാനമാറ്റങ്ങളേയും സംഖ്യകൾ മാത്രമായെഴുതാം; ഇടത്തോട്ടു ള്ളവ ന്യൂനസംഖ്യകൾ

| ആദ്യസ്ഥാനം | എത്തേണ്ട സ്ഥാനം | സ്ഥാനമാറ്റം |
|---|---|---|
| 4 | 7 | 3 |
| 7 | 4 | −3 |
| 4 | −7 | −11 |
| −7 | 4 | 11 |
| −4 | 7 | 11 |
| 7 | −4 | −11 |
| −4 | −7 | −3 |
| −7 | −4 | 3 |

ഇനി ഈ പട്ടികയിലും ഓരോ വരിയിലെയും മൂന്നു സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധമെന്ന് ആലോചിക്കാം.

ആദ്യത്തെ വരിയിൽ, സ്ഥാനമാറ്റം കണക്കാക്കിയതുതന്നെ $7 - 4 = 3$ എന്നാണല്ലോ.

രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാൻ പറ്റുമോ ?

$$4 - 7 = -3$$

അപ്പോൾ ഇവിടെയും, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയിൽ നിന്നു ആദ്യത്തെ സംഖ്യ കുറച്ചാൽ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ കിട്ടുന്നുണ്ട്.

അടുത്ത വരിയിലോ?

$$-7 - 4 = -(7 + 4) = -11$$

എന്നു നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ ഇതിലും ഈ കണക്കുകൂട്ടൽ ശരിയാകും.

നാലാമത്തെ വരിയിൽ ഇതു ശരിയാകുമോ എന്നു നോക്കണമെങ്കിൽ, ആദ്യം $4-(-7)$ എന്ന ക്രിയയ്ക്ക് അർഥം കൊടുക്കണം.

അത് ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം. അധിസംഖ്യകൾ കുറയ്ക്കുന്നതിനെ പല രീതിയിൽ വ്യാഖ്യാനിക്കാം. $10-6$ കണക്കാക്കുക എന്ന ചോദ്യത്തെ, 6 നെ 10 ആക്കാൻ എത്ര കൂട്ടണം എന്ന പ്രശ്നമായി കാണാം. അങ്ങനെ $6+4=10$ എന്നതിൽ നിന്ന് $10-6=4$ എന്നു കിട്ടും.

ഇതുപോലെ $4-(-7)$ എന്നതിനെ $-7$ നെ 4 ആക്കാൻ എത്ര കൂട്ടണം എന്ന പ്രശ്നമായി കാണാം. അത് രണ്ടു ഘട്ടമായി കണക്കാക്കാം. $-7$ നോട് 7 കൂട്ടിയാൽ 0 ആകും. 4 ആകാൻ ഇനിയും 4 കൂട്ടണം. ആകെ കൂട്ടേണ്ടത് $7+4=11$ ഈ വ്യാഖ്യാനമനുസരിച്ച്

$$4-(-7)=7+4=11$$

എന്നെടുക്കാം. ഇത്

$$4-(-7)=4+7=11$$

എന്നെഴുതുന്നതാണ് ഓർക്കാനെളുപ്പം.

അപ്പോൾ നാലാമത്തെ വരിയിലും, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയിൽ നിന്നു ആദ്യത്തെ സംഖ്യ കുറച്ചാൽ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ കിട്ടും.

ഇതേ രീതിയിൽത്തന്നെ ആലോചിച്ചാൽ

$$7-(-4)=7+4=11$$

എന്നു കാണാം.

അങ്ങനെ പട്ടികയിലെ അഞ്ചാമത്തെ വരിയും ശരിയായി.

$$-4-7=-(4+7)=-11$$

എന്നു നേരത്തേ കണ്ടതനുസരിച്ച്, ആറാമത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകൾ തമ്മിലും ഇതേ ബന്ധമാണ്.

ഇതുവരെ കണ്ടത് പട്ടികയിൽ എഴുതി വയ്ക്കാം;

| ആദ്യസ്ഥാനം | എത്തേണ്ട സ്ഥാനം | സ്ഥാനമാറ്റം |
|---|---|---|
| 4 | 7 | $3=7-4$ |
| 7 | 4 | $-3=4-7$ |
| 4 | $-7$ | $-11=-7-4$ |
| $-7$ | 4 | $11=4-(-7)$ |
| $-4$ | 7 | $11=7-(-4)$ |
| 7 | $-4$ | $-11=-4-7$ |
| $-4$ | $-7$ | $-3$ |
| $-7$ | $-4$ | 3 |

അടുത്ത വരിയിലും ഇതു തുടരാൻ (−7) − (−4) എന്ന ക്രിയയ്ക്ക് അർഥം കൊടുക്കണം. അതിന് ഈ കണക്കിൽത്തന്നെ

$$7 - (-4) = 7 + 4$$

എന്ന അർഥം കൊടുത്തത് ഓർക്കുക. അതുപോലെ

$$(-7) - (-4) = -7 + 4$$

എന്നെടുക്കാം

ഇതിലെ −7 + 4 എന്നത് നേരത്തെ ചെയ്തതാണല്ലോ

$$-7 + 4 = 4 - 7 = -3$$

അങ്ങനെ

$$(-7) - (-4) = -7 + 4 = -3$$

എന്നു കിട്ടുകയും, പട്ടികയിലെ ഏഴാം വരിയും ശരിയാവുകയും ചെയ്യും

അവസാന വരിയിൽ ഇതുപോലെ തന്നെ

$$(-4) - (-7) = -4 + 7 = 3$$

എന്ന് എടുക്കുന്നതോടെ എല്ലാം ശരിയാകും.

| ആദ്യസ്ഥാനം $x$ | എത്തേണ്ട സ്ഥാനം $y$ | സ്ഥാനമാറ്റം $y - x$ |
|---|---|---|
| 4 | 7 | 3 = 7 − 4 |
| 7 | 4 | −3 = 4 − 7 |
| 4 | −7 | −11 = − 7 − 4 |
| −7 | 4 | 11 = 4 − (−7) |
| −4 | 7 | 11 = 7 − (− 4) |
| 7 | −4 | −11 = − 4 − 7 |
| −4 | −7 | −3 = (−7) − (−4) |
| −7 | −4 | 3 = −4 − (−7) |

ഇതു ശരിയാകാനായി, ചില പുതിയ കുറയ്ക്കലുകൾ നിർവചിച്ചല്ലോ.

$$4 - (-7) = 4 + 7 = 11$$

$$7 - (-4) = 7 + 4 = 11$$

എന്നും

$$(-7) - (-4) = -7 + 4 = -3$$

$$(-4) - (-7) = -4 + 7 = 3$$

എന്നും അർഥം കൊടുത്തു.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ ന്യൂനം കുറയ്ക്കുന്നതിനെ, ന്യൂനമില്ലാതെ കൂട്ടലാക്കി. ബീജഗണിതത്തിൽ ഇത് ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$x$ ഏതു സംഖ്യയും, $y$ ഏത് അധിസംഖ്യയും ആയാലും

$$x - (-y) = x + y$$

ഈ നിർവചനത്തിൽ $x = 0, y = 3$ എന്നെടുത്താലോ ?

$$0 - (-3) = 0 + 3 = 3$$

$0 - 3 = -3$ ആണല്ലോ. ഇതുപോലെ, $0 - (-3)$ നെയും $-(-3)$ എന്നു മാത്രം എഴുതിയാലോ?

അപ്പോൾ

$$-(-3) = 0 - (-3) = 0 + 3 = 3$$

ഒരു അധിസംഖ്യയുടെ ന്യൂനത്തിന്റെ ന്യൂനം എന്നതിന്റെ അർഥം, അതേ സംഖ്യ തന്നെ എന്നൊരു പുതിയ നിർവചനമാണിത്.

$x$ ഏതു അധിസംഖ്യയായാലും

$$-(-x) = 0 - (-x) = 0 + x = x$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, പാഠത്തിന്റെ തുടക്കത്തിലുള്ള സമവാക്യങ്ങളിൽ ആദ്യത്തേത് അല്പം കൂടി വിപുലമാക്കാം. ഇതാണ് ആ സമവാക്യം:

$x, y$ എന്ന ഏതു അധിസംഖ്യകളിലും $x < y$ ആണെങ്കിൽ $x - y = -(y - x)$

ഇതിൽ $x > y$ ആയാലോ ?

ഉദാഹരണമായി, $x = 10, y = 3$ എന്നെടുത്തുനോക്കാം.

$$x - y = 10 - 3 = 7$$

$$y - x = 3 - 10 = -7$$

$$-(y - x) = -(-7) = 7$$

ഇതിലും $x - y = -(y - x)$ തന്നെയാണല്ലോ.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഈ സമവാക്യത്തിൽ $x < y$ ആണെങ്കിൽ, $y - x$ അധിസംഖ്യയും $x - y$ അതിന്റെ ന്യൂനവുമാകും.

$x > y$ ആണെങ്കിൽ, $y - x$ ന്യൂനസംഖ്യയും, $x - y$ അതിന്റെ ന്യൂനവുമാകും.

### ന്യൂനം എന്നാൽ

പൂജ്യത്തിനേക്കാൾ കുറവായ സംഖ്യകൾ ആവശ്യമായി വരുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിലൂടെയാണ് ന്യൂനസംഖ്യകൾ എന്ന ആശയം അവതരിപ്പിച്ചത്. പിന്നീട്, വിപരീത ദിശകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഇവ ഉപയോഗിക്കാം എന്നു കണ്ടു. അതിനു സഹായകമായി, കൂട്ടലിനും കുറയ്ക്കലിനും ചില പുതിയ നിർവചനങ്ങളും ഉണ്ടാക്കി.

ഇതിന്റെ തുടർച്ചയായി ന്യൂനത്തിന്റെ ന്യൂനം എന്ന നിർവചനത്തിൽ ന്യൂനമെടുക്കുക എന്നത് ഒരു പുതിയ ക്രിയയും കൂടി ആകുന്നു.

അധിസംഖ്യയുടെ ന്യൂനത്തിന്റെ ന്യൂനം ആ സംഖ്യതന്നെ എന്നു നിർവചിച്ചതുകൊണ്ട്, രണ്ടാമത്തെ സന്ദർഭത്തിലും സമവാക്യം ശരിയാകും.

അപ്പോൾ ഈ സമവാക്യത്തിലെ നിബന്ധന ഒഴിവാക്കി, ഇങ്ങനെ പരിഷ്കരിക്കാം:

> $x, y$ ഏതു സംഖ്യകളായാലും
>
> $$x - y = -(y - x)$$

(1) $x, y, z$ ഇവ പല അധിസംഖ്യകളായും ന്യൂനസംഖ്യകളായും എടുത്ത്, $x - (y - z)$ ഉം $(x - y) + z$ ഉം കണക്കാക്കുക. രണ്ടും ഒരേ സംഖ്യയാണോ ?

(2) ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ കണക്കിലും, പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന തരത്തിലുള്ള രണ്ടു ജോടി $x, y$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $x$ അധിസംഖ്യ, $y$ ന്യൂനസംഖ്യ, $x - y = 1$

(ii) $x$ ന്യൂനസംഖ്യ, $y$ അധിസംഖ്യ, $x - y = -1$

(3)(i) $a, b, c, d$ ഇവ അടുത്തടുത്തുള്ള നാലു എണ്ണൽ സംഖ്യകളോ, അല്ലെങ്കിൽ അവയുടെ ന്യൂനങ്ങളോ ആയി എടുത്ത്, $a - b - c + d$ കണക്കാക്കുക.

(ii) സംഖ്യകൾ ഏതായാലും ഇതു പൂജ്യമാകുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(iii) $a - b - c + d$ എന്നതിനു പകരം $a + b - c - d$ ആയാലോ ?

(iv) $a - b + c - d$ ആയാലോ ?


## സമയവും വേഗവും

ഒരു വരയിലെ സ്ഥാനങ്ങളും സ്ഥാനമാറ്റവും വ്യത്യസ്ത ദിശകളിലായാലും അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ, ന്യൂനസംഖ്യകളും കൂടി ഉപയോഗിച്ച്, പൊതുവായ ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കുന്നത് കണ്ടല്ലോ.

സ്ഥാനമാറ്റം ഉണ്ടാകണമെങ്കിൽ, ചലിക്കണം; ചലനത്തെ സംഖ്യകളിലൂടെ വിശദമാക്കണമെങ്കിൽ, സഞ്ചരിച്ച ദൂരം മാത്രമല്ല, സമയവും കണക്കിലെടുക്കണം.

5 സെക്കന്റുകൊണ്ട് 50 മീറ്റർ സഞ്ചരിച്ചു എന്നു പറഞ്ഞാൽ, വേഗത്തെക്കുറിച്ചും ഒരു ധാരണ ഉണ്ടാകും. ഇടയ്ക്ക് വേഗം കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യാതെ ഒരേ വേഗത്തിലാണ് സഞ്ചാരമെങ്കിൽ വേഗം ഒരു സെക്കന്റിൽ 10 മീറ്റർ എന്നു പറയാം. ഇതേ വേഗത്തിൽ തുടർന്നാൽ 10 സെക്കന്റു കൊണ്ട് 100 മീറ്റർ സഞ്ചരിക്കാം എന്നും കണക്കുകൂട്ടാം (100 മീറ്റർ ഓട്ടത്തിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ സമയം, 9.58 സെക്കന്റ് ആണെന്നതും ഓർക്കാം).

ഒരു വരയിലൂടെ എങ്ങോട്ടും ഒരേ വേഗത്തിൽ ചലിക്കാവുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ വേഗവും സഞ്ചരിച്ച

സമയവും അറിഞ്ഞാൽ എത്ര ദൂരം സഞ്ചരിച്ചു എന്നു കണക്കാക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഒരു സെക്കന്റിൽ 10 മീറ്റർ (എഴുതുന്നത് 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്) എന്ന വേഗ ത്തിൽ ചലിക്കുന്ന ബിന്ദു, 4 സെക്കൻറ്റു കൊണ്ട്, $10 \times 4 = 40$ മീറ്റർ സഞ്ചരിച്ചു എന്നു കണക്കാക്കാം. പക്ഷേ ഏതു ദിശയിൽ എന്നറിയാതെ അവസാന സ്ഥാനം നിശ്ചയിക്കാൻ പറ്റില്ലല്ലോ.

നേരത്തെ ചെയ്തപോലെ, $O$ എന്ന നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വലത്തോട്ടോ ഇടത്തോട്ടോ ഒരു വരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദു സങ്കല്പിക്കാം. പതിവുപോലെ വലത്തോട്ടുള്ള സ്ഥാനങ്ങൾ അധിസംഖ്യകളായും, ഇടത്തോട്ടുള്ളവ ന്യൂനസംഖ്യകളായും, $O$ യിൽ നി ന്നുള്ള ദൂരമനുസരിച്ച് അടയാളപ്പെടുത്താം. സഞ്ചാരം തുടങ്ങുന്നത് $O$ യിൽ നിന്നാണെന്നും സങ്കല്പിക്കാം. ദൂരമളക്കാൻ മീറ്ററും, വേഗമളക്കാൻ, ഒരു സെക്കന്റിൽ എത്ര സഞ്ചരിച്ചു എന്ന നിരക്കും (മീറ്റർ/സെക്കന്റ്), സമയമളക്കാൻ സെക്കന്റും എന്നു നിശ്ചയിക്കാം.

അപ്പോൾ $O$ യിൽ നിന്ന് പുറപ്പെട്ട് 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ, വലത്തോട്ട് 3സെക്കന്റ് സഞ്ചരിച്ചാൽ $10 \times 3 = 30$ എന്ന സ്ഥാനത്ത് എത്തും. സഞ്ചാരം ഇട ത്തോട്ടാണെങ്കിലോ ?

$$-(10 \times 3) = -30 \text{ എന്ന സ്ഥാനത്തും.}$$

അപ്പോൾ സ്ഥാനം കണക്കാക്കാൻ, സഞ്ചാരം വല ത്തോട്ടാണെങ്കിൽ, വേഗത്തെ സമയം കൊണ്ടു ഗു ണിച്ചാൽ മതി; ഇടത്തോട്ടാണെങ്കിൽ, ഗുണനഫല ത്തെ ന്യൂനമാക്കുകയും വേണം. ബീജഗണിതത്തിൽ പറയാൻ, വേഗം $v$, സമയം $t$, സ്ഥാനം $s$ എന്നെടു ത്താൽ

### വേഗക്കണക്ക്

ജമൈക്കയിലെ ഉസൈൻ ബോൾട്ട്, 2009 ൽ ബെർളിൻ നഗരത്തിൽ നടന്ന കായിക മേളയിൽ 9.58 സെക്കന്റ് കൊണ്ട് 100 മീറ്റർ ഓടിയ താണ്, ഇതുവരെ രേഖപ്പെടുത്തിയതിലെ ഏറ്റവും കൂടിയ വേഗം.


ഇതിൽ എപ്പോഴും ഒരേ വേഗത്തിലല്ല അദ്ദേഹം ഓടിയത്. ഓരോ 20 മീറ്ററും ഓടാനെടുത്ത സമയം രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

| ദൂരം മീറ്റർ | സമയം സെക്കന്റ് |
|---|---|
| 0 – 20 | 2.89 |
| 20 – 40 | 1.75 |
| 40 – 60 | 1.67 |
| 60 – 80 | 1.61 |
| 80 – 100 | 1.66 |

$$\text{സഞ്ചാരം വലത്തോട്ടാണെങ്കിൽ } s = vt$$

$$\text{സഞ്ചാരം ഇടത്തോട്ടാണെങ്കിൽ } s = -(vt)$$

എന്നു പറയണം

ഇവ ചേർത്ത് ഒറ്റ സമവാക്യമാകാൻ ഇടത്തോട്ടുള്ള സഞ്ചാരങ്ങളുടെ അളവ് ന്യൂനസംഖ്യകളാക്കി യാലോ ?

ഉദാഹരണമായി, സഞ്ചാരം 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ വലത്തോട്ടാണെങ്കിൽ $v = 10$ എന്നും, ഇടത്തോട്ടാണെങ്കിൽ $v = -10$ എന്നും പറയാം.

അപ്പോൾ മറ്റൊരു പ്രശ്നം വരും: $O$ യിൽനിന്നു തുടങ്ങി, 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ ഇട ത്തോട്ട് 3 സെക്കന്റ് സഞ്ചരിച്ചാൽ എത്തുന്ന സ്ഥാനം ഗുണനഫലമായി പറയാൻ, $(-10) \times 3$ എന്ന തിന്റെ അർഥം പറയേണ്ടി വരും.

ഈ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം.

അധിസംഖ്യകളിൽ ഗുണനമെന്നത് മടങ്ങ് കണക്കാക്കലാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി

$$10 \times 3 = 10 \text{ ന്റെ } 3 \text{ മടങ്ങ്} = 10 + 10 + 10 = 30$$

ഇതുപോലെ $(-10) \times 3$ നെയും മടങ്ങായി എടുത്താലോ ?

$$(-10) \times 3 = -10 \text{ ന്റെ } 3 \text{ മടങ്ങ്} = (-10) + (-10) + (-10) = -30$$

ന്യൂനസംഖ്യയെ അധിസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്ന ഈ രീതി, എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കു മാത്രമല്ല, എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും ബാധകമായ നിർവചനമാക്കാം.

അപ്പോൾ സഞ്ചാരം ഏതു ദിശയിലായാലും, വേഗം $v$, സമയം $t$, എത്തുന്ന സ്ഥാനം $s$ എന്നെടുത്ത്, ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം $s = vt$ എന്നു പറയാം.

ഇനി ഈ കണക്കിന്റെ സന്ദർഭം അല്പം മാറ്റാം. വരയിലൂടെ 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന ഒരേ വേഗ ത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ $O$ യിൽ എത്തുന്നതു മുതലാണ് നോക്കിത്തുടങ്ങുന്നതെന്നു കരുതുക.

സഞ്ചാരം ഇടത്തുനിന്ന് വലത്തോട്ടാണെങ്കിൽ, നോക്കിത്തുടങ്ങി 2 സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ സ്ഥാനം 20 ലാണ്.

2 സെക്കന്റ് മുമ്പോ ?

$O$ യിൽ എത്താൻ ഇനിയും 2 സെക്കന്റ് വേണമല്ലോ. അപ്പോൾ $O$ യുടെ ഇടത്ത് 20 മീറ്റർ അകലെ. അതായത് $-20$ എന്ന സ്ഥാനത്ത്.

വലത്തുനിന്ന് ഇടത്തേക്കാണ് സഞ്ചാരമെങ്കിലോ ?

സഞ്ചാരത്തിന്റെ ദിശയും, സമയം മുമ്പോ പിമ്പോ എന്നതും മാറ്റി സ്ഥാനങ്ങൾ കണക്കാക്കി പട്ടിക യാക്കാം. ചിത്രം വരച്ചോ, സങ്കല്പിച്ചോ സ്ഥാനം എഴുതാനുള്ള സൗകര്യത്തിനായി, വേഗങ്ങളെയും സ്ഥാനങ്ങളെയും, വലത് ഇടത് എന്നുതന്നെ ആദ്യം എഴുതാം.

| വേഗം | സമയം | എത്തുന്ന സ്ഥാനം |
|---|---|---|
| 10 വലത്തോട്ട് | 2 സെക്കന്റിനു ശേഷം | 20 വലത്ത് |
| 10 ഇടത്തോട്ട് | 2 സെക്കന്റിനു ശേഷം | 20 ഇടത്ത് |
| 10 വലത്തോട്ട് | 2 സെക്കന്റിനു മുമ്പ് | 20 ഇടത്ത് |
| 10 ഇടത്തോട്ട് | 2 സെക്കന്റിനു മുമ്പ് | 20 വലത്ത് |

ഇനി സ്ഥാനവും വേഗവും, അധിസംഖ്യയായും ന്യൂനസംഖ്യയായും എഴുതാം:

| വേഗം | സമയം | എത്തുന്ന സ്ഥാനം |
|---|---|---|
| 10 | 2 സെക്കന്റിനു ശേഷം | 20 |
| –10 | 2 സെക്കന്റിനു ശേഷം | –20 |
| 10 | 2 സെക്കന്റിനു മുമ്പ് | –20 |
| –10 | 2 സെക്കന്റിനു മുമ്പ് | 20 |

സമയത്തിന്റെ കാര്യത്തിലും ശേഷം, മുമ്പ് എന്നീ വിശേഷണങ്ങൾ ഒഴിവാക്കാൻ, നോക്കിയതിനു ശേഷമുള്ള സമയത്തെ അധിസംഖ്യയായും, മുമ്പുള്ള സമയത്തെ ന്യൂനസംഖ്യയായും എഴുതിയാലോ ?

| വേഗം | സമയം | എത്തുന്ന സ്ഥാനം |
|---|---|---|
| 10 | 2 | 20 |
| –10 | 2 | –20 |
| 10 | –2 | –20 |
| –10 | –2 | 20 |

ഇതിലെ ഒന്നാമത്തെ വരിയിൽ, ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമാണ് അവസാനത്തെ സംഖ്യ.

രണ്ടാമത്തെ വരിയിലും, ഇപ്പോൾ നിർവചിച്ചതനുസരിച്ച്, $(-10) \times 2 = -20$ തന്നെ.

മൂന്നാമത്തെ വരിയിലോ ?

$10 \times (-2)$ എന്ന ക്രിയയ്ക്ക് എന്താണ് അർഥം ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം. അധിസംഖ്യകളിലെല്ലാം ഗുണിക്കുന്നതിന്റെ ക്രമം മാറ്റിയാലും ഗുണനഫലം മാറില്ലല്ലോ. ഉദാഹരണമായി,

$$5 \times 3 = 3 \times 5 \qquad \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \qquad \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$$

അപ്പോൾ, ഇവിടെയും

$10 \times (-2) = (-2) \times 10$ എന്നെടുക്കാം.

ഇതിൽ

$$(-2) \times 10 = -20$$

എന്നു കണ്ടു കഴിഞ്ഞല്ലോ. അങ്ങനെ,

$$10 \times (-2) = (-2) \times 10 = -20$$

എന്നു നിർവചിച്ചാൽ. പട്ടികയിലെ മൂന്നാം വരിയിലും, സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, ആദ്യത്തെ രണ്ടു വരികളിലേതുതന്നെ ആകും.

അവസാന വരിയിലോ ?

$(-10) \times (-2)$ എന്നതിന് എന്ത് അർഥം കൊടുക്കും ?

ഇത് 20 എന്നെടുത്താലേ, പട്ടികയിലെ എല്ലാ വരികളിലും ഒരേ ബന്ധം ആവുകയുള്ളൂ.

ഇങ്ങനെയെടുക്കാനുള്ള കാരണം, കണക്കിന്റെ മാത്രം രീതിയിൽ പറയാം.

രണ്ടു അധിസംഖ്യകളുടെ തുകയെ ഒരു അധിസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിക്കാൻ, ഓരോന്നിനെയും ഗുണിച്ചു കൂട്ടിയാൽ മതിയല്ലോ. ഉദാഹരണമായി,

$$(15 + 10) \times 2 = (15 \times 2) + (10 \times 2)$$

ബീജഗണിതത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ $x, y, z$ ഏത് അധിസംഖ്യകളായാലും

$$(x + y)z = xz + yz$$

ഈ തത്വം ന്യൂനസംഖ്യകൾക്കും ശരിയാകാൻ എന്തു ചെയ്യണമെന്നു നോക്കാം. ഉദാഹരണമായി $x = 15, y = -10, z = -2$ എന്നെടുത്ത്, $(x + y)z$ ഉം $xz + yz$ ഉം വെവ്വേറെ ചെയ്തുനോക്കാം.

$$(x + y)z = (15 + (-10)) \times (-2) = 5 \times (-2) = -10$$

$$xz + yz = (15 \times (-2)) + ((-10) \times (-2)) = -30 + ((-10) \times (-2))$$

രണ്ടാമത്തെ ഗുണനഫലവും, ആദ്യത്തെ ഗുണനഫലവും തുല്യമാകാൻ, $(-10) \times (-2)$ എന്തു സംഖ്യ ആകണം ?

ആദ്യത്തെ ഗുണനഫലം $-10$; രണ്ടാമത്തെ ഗുണനഫലം, $-30$ നോട് ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടിയത്. $-30$ നെ $-10$ ആക്കാൻ എന്തു കൂട്ടണം ?

അപ്പോൾ $(x + y)z = xz + yz$ എന്ന സമവാക്യം $x = 15, y = -10, z = -2$ എന്നീ സംഖ്യകൾക്ക് ശരിയാകണമെങ്കിൽ, $(-10) \times (-2) = 20$ എന്നെടുക്കണം.

ഇങ്ങനെയെടുത്താൽ പട്ടികയിലെ എല്ലാ വരിയിലും, ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫല മായി അവസാനസംഖ്യ കിട്ടുകയും ചെയ്യും.

| വേഗം $v$ | സമയം $t$ | എത്തുന്ന സ്ഥാനം $vt$ |
|---|---|---|
| 10 | 2 | $20 = 10 \times 2$ |
| −10 | 2 | $-20 = (-10) \times 2$ |
| 10 | −2 | $-20 = 10 \times (-2)$ |
| −10 | −2 | $20 = (-10) \times (-2)$ |

അതായത്, വേഗം $v$, സമയം $t$ സ്ഥാനം $s$ ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എല്ലാ സന്ദർഭങ്ങളിലും

$$s = vt$$

എന്ന ഒറ്റ സമവാക്യത്തിൽ പറയാം.

ഇതിനായി ഉപയോഗിച്ച പുതിയ നിർവചനങ്ങൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$x$, $y$ ഏത് അധിസംഖ്യകളായാലും

$$(-x)y = x(-y) = -(xy)$$

$$(-x)\,(-y) = xy$$

(1) $x$, $y$, $z$ ആയി പല അധിസംഖ്യകളും ന്യൂനസംഖ്യകളും എടുത്ത്, $(x+y)\,z$ ഉം $xz + yz$ ഉം കണക്കാക്കുക. എല്ലാറ്റിലും $(x + y)\,z = x\,z + yz$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്നുണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(2) $(x+y)(u+v) = xu + xv + yu + yv$ എന്ന സമവാക്യം, $x$, $y$, $u$, $v$ ഇവയ്ക്കു പകരം $-x$, $-y$, $-u$, $-v$ എടുത്താലും ശരിയാകുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

## ആന്ദോളനം

$(-1) \times (-1)$ എന്താണ് ? ന്യൂനസംഖ്യകളുടെ ഗുണനനിയമമനുസരിച്ച് ഇത് 1 ആണല്ലോ. $(-1) \times (-1) \times (-1)$ ആയാലോ ?

ആദ്യത്തെ രണ്ട് $-1$ ഗുണിക്കുമ്പോൾ 1; വീണ്ടും ഒരു $-1$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ $-1$. ഇക്കാര്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$(-1)^2 = 1$$

$$(-1)^3 = -1$$

ഇങ്ങനെ കുറേക്കൂടി കൃതികൾ കണക്കാക്കി നോക്കൂ. പൊതുവേ എന്തു പറയാം ?

കൃത്യങ്കം ഒറ്റസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ, കൃതി, $-1$; ഇരട്ടസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ 1.

ഇതിന്റെ പൊതുവായ ബീജഗണിതരൂപം

$n$ ഏതു എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും

$$(-1)^{2n-1} = -1$$

$$(-1)^{2n} = 1$$

$n$ ആയി പല എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്ത്, $1 + (-1)^n$ കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

$\frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$ ആയാലോ ?

(3) ചുവടെയുള്ള സമവാക്യങ്ങളിലെല്ലാം $x$ ആയി പറഞ്ഞിട്ടുള്ള സംഖ്യകൾ എടുക്കുമ്പോൾ, $y$ ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $y = x^2, x = -1$ (ii) $y = x^2 + 3x + 2, x = -1$ (iii) $y = x^2 + 3x + 2, x = -2$

(iv) $y = (x + 1)(x + 2), x = -1$ (v) $y = (x + 1)(x + 2), x = -2$

(4) $y = x^2 + 4x + 4$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ $x$ ആയി പല അധിസംഖ്യകളും, ന്യൂനസംഖ്യകളും എടുത്ത് $y$ കണക്കാക്കുക. എന്തുകൊണ്ടാണ് $x$ എന്തായാലും $y$ അധിസംഖ്യയോ പൂജ്യമോ തന്നെ ആകുന്നത് ?

(5) എണ്ണൽസംഖ്യകൾ, അവയുടെ ന്യൂനങ്ങൾ, പൂജ്യം ഇവയെ എല്ലാം പൊതുവായി പൂർണ്ണ സംഖ്യകൾ എന്നു പറയാം.

(i) $x^2 + y^2 = 25$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്ന എത്ര ജോടി പൂർണ്ണസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാം ?

(ii) $x^2 - y^2 = 25$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്ന എത്ര ജോടി പൂർണ്ണസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാം ?

(6) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ ആണല്ലോ.

$(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5)$ എത്രയാണ് ?

(7) $(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) + [(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5)]$ എത്രയാണ് ?

## ന്യൂനഹരണം

അധിസംഖ്യകളിലെല്ലാം ഹരണത്തിന് അർഥം കൊടുക്കുന്നത്, ഗുണനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, $6 \div 2$ എന്നതിന്റെ അർത്ഥം, 2 നെ ഗുണിച്ച് 6 ആക്കുന്ന സംഖ്യ.

$2 \times 3 = 6$ ആയതിനാൽ

$$6 \div 2 = 3$$

എന്നെഴുതുന്നു.

$3 \times 2$ ഉം 6 തന്നെ ആയതിനാൽ

$$6 \div 3 = 2$$

എന്നും കാണാം.

ഇതനുസരിച്ച് $(-6) \div 2$ എന്താണ് ?

$2 \times (-3) = -6$ ആയതിനാൽ

$$-6 \div 2 = (-3)$$

എന്നെഴുതാം.

മാത്രമല്ല, $(-3) \times 2 = -6$ ആയതിനാൽ

$$-6 \div (-3) = 2$$

എന്നും എഴുതാം.

ഇതുപോലെ $(-3) \times (-4) = 12$ ആയതിനാൽ

$$12 \div (-3) = -4$$

എന്നും

$$12 \div (-4) = -3$$

എന്നും എഴുതാം.

ഇതേ രീതിയിൽ മറ്റു ഹരണഫലങ്ങളും കണക്കാക്കാം

ബീജഗണിതത്തിൽ പൊതുവേ $x \div y$ എന്നതിനെ $\frac{x}{y}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്. അപ്പോൾ ന്യൂനസംഖ്യകളുടെ ഹരണം പൊതുവേ ഇങ്ങനെ പറയാം.

$x, y$ ഏത് അധിസംഖ്യകളായാലും

$$\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$$

## സമവാക്യസമന്വയം

നിലത്തുനിന്ന് മുകളിലേക്കെറിയുന്ന ഒരു വസ്തു, കുറേ മുകളിലേക്കുയർന്നതിനുശേഷം താഴോട്ട് വീഴും. ഇതിനൊരു കണക്കുണ്ട്.

നേരെ മുകളിലേക്ക് എറിയുകയാണെങ്കിൽ, ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കുറയും; അങ്ങനെ കുറഞ്ഞു കുറഞ്ഞ്, വേഗമേ ഇല്ലാതാകുമ്പോൾ താഴോട്ടു വീഴാൻ തുടങ്ങും. ഈ വീഴ്ചയിൽ ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കൂടിക്കൊണ്ടിരിക്കും. 49 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിലാണ് മേലോട്ടെറിഞ്ഞതെന്നു കരുതുക. എറിഞ്ഞ് 5 സെക്കന്റാകുമ്പോൾ വേഗം $49 - (5 \times 9.8) = 0$. അപ്പോൾ 5 സെക്കന്റ് കഴിഞ്ഞാൽ യാത്ര കൂടുന്ന വേഗത്തോടെ താഴോട്ടാണ്. നേരത്തെ പറഞ്ഞതുപോലെ, 7 സെക്കന്റ് ആകുമ്പോൾ, വേഗം $0 + (2 \times 9.8) = 19.6$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്

അപ്പോൾ ഈ യാത്രയുടെ ബീജഗണിതം പറയാൻ രണ്ടു സമവാക്യം വേണ്ടി വരും:

$$v = 49 - 9.8t, \quad t < 5 \text{ ആണെങ്കിൽ}$$

$$v = 9.8t - 49, \quad t > 5 \text{ ആണെങ്കിൽ}$$

മേലോട്ടുള്ള വേഗം അധിസംഖ്യയായും, താഴോട്ടുള്ള വേഗം ന്യൂനസംഖ്യയായും എടുത്താൽ ഒരു സമവാക്യം മതിയാകും

$$v = 49 - 9.8t$$

(1) $y = \frac{1}{x}$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ, $x$ ആയി $2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ എന്നീ സംഖ്യകളെടുത്താൽ $y$ ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(2) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ, $x = -2$ എന്നെടുക്കുമ്പോഴും, $x = -\frac{1}{2}$ എന്നെടുക്കുമ്പോഴും $y$ ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(3) $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ, $x, y$ ആയി ചുവടെപ്പറയുന്ന സംഖ്യകളെടുക്കുമ്പോൾ $z$ ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(i) $x = 10, y = -5$ (ii) $x = -10, y = 5$ (iii) $x = -10, y = -5$

# കുറിപ്പുകൾ

# കുറിപ്പുകൾ

# ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ഭാഗം IV ക

## മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ

**51 ക. മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ - താഴെപ്പറയുന്നവ ഭാരതത്തിലെ ഓരോ പൗരന്റെയും കർത്തവ്യം ആയിരിക്കുന്നതാണ് :**

(ക) ഭരണഘടനയെ അനുസരിക്കുകയും അതിന്റെ ആദർശങ്ങളെയും സ്ഥാപനങ്ങളെയും ദേശീയപതാകയെയും ദേശീയഗാനത്തെയും ആദരിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഖ) സ്വാതന്ത്ര്യത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള നമ്മുടെ ദേശീയസമരത്തിന് പ്രചോദനം നൽകിയ മഹനീയാദർശങ്ങളെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയും പിൻതുടരുകയും ചെയ്യുക;

(ഗ) ഭാരതത്തിന്റെ പരമാധികാരവും ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും നിലനിർത്തുകയും സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഘ) രാജ്യത്തെ കാത്തുസൂക്ഷിക്കുകയും ദേശീയസേവനം അനുഷ്ഠിക്കുവാൻ ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ അനുഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ങ) മതപരവും ഭാഷാപരവും പ്രാദേശികവും വിഭാഗീയവുമായ വൈവിധ്യങ്ങൾക്കതീതമായി ഭാരതത്തിലെ എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കുമിടയിൽ, സൗഹാർദവും പൊതുവായ സാഹോദര്യമനോഭാവവും പുലർത്തുക, സ്ത്രീകളുടെ അന്തസ്സിന് കുറവു വരുത്തുന്ന ആചാരങ്ങൾ പരിത്യജിക്കുക;

(ച) നമ്മുടെ സമ്മിശ്രസംസ്കാരത്തിന്റെ സമ്പന്നമായ പാരമ്പര്യത്തെ വിലമതിക്കുകയും നിലനിറുത്തുകയും ചെയ്യുക;

(ഛ) വനങ്ങളും തടാകങ്ങളും നദികളും വന്യജീവികളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രകൃത്യാ ഉള്ള പരിസ്ഥിതി സംരക്ഷിക്കുകയും അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തുകയും, ജീവികളോട് കാരുണ്യം കാണിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ജ) ശാസ്ത്രീയമായ കാഴ്ചപ്പാടും മാനവികതയും, അന്വേഷണത്തിനും പരിഷ്കരണത്തിനും ഉള്ള മനോഭാവവും വികസിപ്പിക്കുക;

(ഝ) പൊതുസ്വത്ത് പരിരക്ഷിക്കുകയും ശപഥം ചെയ്ത് അക്രമം ഉപേക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഞ) രാഷ്ട്രം യത്നത്തിന്റെയും ലക്ഷ്യപ്രാപ്തിയുടെയും ഉന്നതതലങ്ങളിലേക്ക് നിരന്തരം ഉയരത്തക്കവണ്ണം വ്യക്തിപരവും കൂട്ടായതുമായ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും ഉൽക്കൃഷ്ടതയ്ക്കുവേണ്ടി അധ്വാനിക്കുക;

(ട) ആറിനും പതിനാലിനും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള തന്റെ കുട്ടിക്കോ തന്റെ സംരക്ഷണയിലുള്ള കുട്ടികൾക്കോ, അതതു സംഗതി പോലെ, മാതാപിതാക്കളോ രക്ഷാകർത്താവോ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനുള്ള അവസരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുക.

# കുട്ടികളുടെ അവകാശങ്ങൾ

പ്രിയമുള്ള കുട്ടികളേ,

നിങ്ങൾക്കുള്ള അവകാശങ്ങളെന്തെല്ലാമെന്ന് അറിയേണ്ടതില്ലേ? അവകാശങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള അറിവ് നിങ്ങളുടെ പങ്കാളിത്തം, സംരക്ഷണം, സാമൂഹികനീതി എന്നിവ ഉറപ്പാക്കാൻ പ്രേരണയും പ്രചോദനവും നൽകും. നിങ്ങളുടെ അവകാശങ്ങൾ സംരക്ഷിക്കാൻ ഇപ്പോൾ ഒരു കമ്മീഷൻ പ്രവർത്തിക്കുന്നുണ്ട്. കേരള സംസ്ഥാന ബാലാവകാശസംരക്ഷണ കമ്മീഷൻ എന്നാണ് അതിന്റെ പേര്. എന്തെല്ലാമാണ് നിങ്ങൾക്കുള്ള അവകാശങ്ങൾ എന്നു നോക്കാം.

- സംസാരത്തിനും ആശയപ്രകടനത്തിനുമുള്ള സ്വാതന്ത്ര്യം
- ജീവന്റെയും വ്യക്തിസ്വാതന്ത്ര്യത്തിന്റെയും സംരക്ഷണം
- അതിജീവനത്തിനും പൂർണ്ണവികാസത്തിനുമുള്ള അവകാശം
- ജാതി-മത-വർഗ-വർണ്ണ ചിന്തകൾക്കതീതമായി ബഹുമാനിക്കപ്പെടാനും അംഗീകരിക്കപ്പെടാനുമുള്ള അവകാശം
- മാനസികവും ശാരീരികവും ലൈംഗികവുമായ പീഡനങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള സംരക്ഷണത്തിനും പരിചരണത്തിനുമുള്ള അവകാശം
- പങ്കാളിത്തത്തിനുള്ള അവകാശം
- ബാലവേലയിൽനിന്നും ആപൽക്കരമായ ജോലികളിൽനിന്നുമുള്ള മോചനം
- ശൈശവവിവാഹത്തിൽനിന്നുള്ള സംരക്ഷണം
- സ്വന്തം സംസ്കാരം അറിയുന്നതിനും അതനുസരിച്ച് ജീവിക്കുന്നതിനുമുള്ള സ്വാതന്ത്ര്യം
- അവഗണനകളിൽനിന്നുള്ള സംരക്ഷണം
- സൗജന്യവും നിർബന്ധിതവുമായ വിദ്യാഭ്യാസ അവകാശം
- കളിക്കാനും പഠിക്കാനുമുള്ള അവകാശം
- സ്നേഹവും സുരക്ഷയും നൽകുന്ന കുടുംബവും സമൂഹവും ലഭ്യമാകാനുള്ള അവകാശം

## നിങ്ങളുടെ ചില ഉത്തരവാദിത്വങ്ങൾ

- സ്കൂൾ, പൊതുസംവിധാനങ്ങൾ എന്നിവ നശിപ്പിക്കാതെ സംരക്ഷിക്കുക.
- സ്കൂളിലും പഠനപ്രവർത്തനങ്ങളിലും കൃത്യനിഷ്ഠ പാലിക്കുക.
- സ്കൂൾ അധികാരികളെയും അധ്യാപകരെയും മാതാപിതാക്കളെയും സഹപാഠികളെയും ബഹുമാനിക്കുകയും അംഗീകരിക്കുകയും ചെയ്യുക.
- ജാതി-മത-വർഗ-വർണ്ണ ചിന്തകൾക്കതീതമായി മറ്റുള്ളവരെ ബഹുമാനിക്കാനും അംഗീകരിക്കാനും സന്നദ്ധരാവുക.

*ബന്ധപ്പെടേണ്ട വിലാസം:*

**കേരള സംസ്ഥാന ബാലാവകാശസംരക്ഷണ കമ്മീഷൻ**

ശ്രീ ഗണേഷ്, റ്റി.സി. 14/2036, വാൻറോസ് ജംങ്ഷൻ,
കേരള യൂണിവേഴ്സിറ്റി പി.ഒ, തിരുവനന്തപുരം – 34
ഫോൺ 0471 – 2326603
ഇ- മെയിൽ childrights.cpcr@kerala.gov.in, rte.cpcr@kerala.gov.in
വെബ്സൈറ്റ് : www.kescpcr.kerala.gov.in

ചൈൽഡ് ഹെൽപ്പ് ലൈൻ - 1098, ക്രൈം സ്റ്റോപ്പർ - 1090, നിർഭയ – 1800 425 1400
കേരള പൊലീസ് ഹെൽപ്പ് ലൈൻ - 0471 – 3243000/44000/45000

*online **R.T.E Monitoring : www.nireekshana.org.in***