கணிதம்

பகுதி - 1

வகுப்பு

IX

Mathematics
Std IX
Part - 1
Tamil Medium

கேரள அரசு
பொதுக்கல்வித்துறை

தயாரிப்பு
மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT) கேரளம்

2024

ST-511-1-MATHS (T)-9-VOL-1

தேசிய கீதம்

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
பஞ்சாப சிந்து குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா
உச்சல ஜலதி தரங்கா
தவ சுப நாமே ஜாகே
தவ சுப ஆசிஸ் மாகே
காகே தவ ஜய காதா
ஜன கண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
ஜய ஹே! ஜய ஹே! ஜய ஹே!
ஜய ஜய ஜய ஜய ஹே!

உறுதிமொழி

இந்தியா எனது நாடு. இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன்பிறந்தோர். எனது நாட்டை நான் உயிரினும் மேலாக மதிக்கிறேன், அதன் வளம் வாய்ந்த பல்வகைப் பரம்பரைப் புகழில் நான் பெருமைகொள்கிறேன். அதற்குத்தக நான் என்றும் நடந்துகொள்வேன்.

என் பெற்றோர். ஆசிரியர். மூத்தோர் இவர்களை நான் நன்கு மதிப்பேன். எல்லாருடனும் நான் பண்புடன் பழகுவேன். எனது நாட்டினுடையவும் நாட்டு மக்களிடமும் பக்தியுடன் இருப்பேன் என உறுதி கூறுகிறேன். அவர்களின் நவத்திலும் வளத்திலும்தான் எனது இன்பமும் அடங்கியிருக்கிறது.

கணிதம்

9

Prepared by
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in, e-mail : scertkerala@gmail.com
Typeset and design by : SCERT
First Edition : 2024
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

அன்பார்ந்த மாணவர்களே,

மனிதன் உலகத்தைப் புரிந்துகொள்வதற்கும் அதன் அம்சங்களை அடையாளம் காண்பதற்கும் பல்வேறு பரிமாணங்களும் அவற்றின் தொடர்புகளும் இன்றியமையாததாக இருந்தது. எண்ணல் எண்கள் மற்றும் பின்னங்களை உருவாக்கும் முறைகளையும் அவற்றைப் பயன்படுத்திய செயல்முறைகளின் சிறப்புக்களையும் முந்தைய வகுப்புகளில் கற்றுக்கொண்டோம். எண்களைக் கொண்டோ பின்னங்களைக் கொண்டோ குறிப்பிட முடியாத அளவுகளையும் அவற்றைப் பிரதிநிதித்துவப்படுத்துவதற்கானப் புதிய வழிமுறைகளையும் இங்கே நீங்கள் அறிந்து கொள்ளலாம். மேலும் வடிவியல் வடிவங்கள் பற்றிய பாடங்களும் இந்நூலில் இடம் பெற்றுள்ளன.

இணைகோடுகள், வடிவொத்த முக்கோணங்கள் பற்றியும் அவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பு பற்றியும் இந்நூல் விவாதிக்கிறது. கணக்கீட்டுச் சிந்தனை என்பது கணிதக் கல்விக்கான ஒரு புதிய அணுகுமுறையாகும், இது செயல்முறைகளைப் பற்றிய சிந்தனையை வலியுறுத்துகிறது. பலவிதமான செயல்முறைகளைக் கற்றுக்கொள்வதற்கும், குறிப்பிட்ட சூழல்களுக்கு அவற்றைப் பயன்படுத்துவதற்குப் பதிலாக, அவை எவ்வாறு செயல்படுகின்றன என்பதைப் புரிந்துகொண்டு அவற்றை மிகவும் பயனுள்ளதாக மாற்ற வெவ்வேறு முறைகளைப் பயன்படுத்துவதே கணக்கீட்டு சிந்தனையின் முக்கியநோக்கம். வடிவியலை இயக்க முறையில் பயன்படுத்தப்படும் ஜியோஜிப்ராவின் சாத்தியக் கூறுகளையும் இந்நூல் விவாதிக்கிறது.

அன்புடன்,

முனைவர். ஜெயபிரகாஷ். ஆர்.கெ
இயக்குநர்
எஸ்.ஸி.இ.ஆர்.டி, திருவனந்தபுரம்

Textbook Development Team

Advisor

Dr. E. Krishnan
Head (Rtd.), Department of Mathematics, University College, Thiruvananthapuram

Chairperson

Dr. P. Ramesh Kumar
Head, Department of Mathematics, University of Kerala, Karyavattom, Thiruvananthapuram

Experts

Dr. Anilkumar. C.V.
Head, Department of Mathematics, Indian Institute of Space Science & Technology
Valiyamala, Thiruvananthapuram

Madhu B.
Assistant Professor
Regional Institute of Education, Mysore

A. Sukesh
Assistant Professor,
Government College of Engineering, Kannur

Members

R. Ramanujam
HSST Mathematics,
M.N.K.M. Govt. Higher Secondary School, Pulapatta, Palakkad

Vijayakumaran T.K.
HSST (Rtd),
G.M.R.H.S.S. For Girls,
Pravanadukkam, Kasaragod

C.T. Firoz Babu
HST Mathematics,
Govt. Higher Secondary School,
Pookkottupadam, Malappuram

Unnikrishnan M.V.
HST Mathematics,
GHS, Kuttiyeri P.O, Kuttiyeri, Kannur

Nandakumar C.
HST Mathematics,
Chothavoor Higher Secondary School,
Champad, Kannur

Sreejith Muriyampath
HST Mathematics, GHSS Chorode,
Kurikkilad, Vadakara, Kozhikode

Padmaprasad K.
HST Mathematics, Pandallur HSS,
Kadambode Post, Malappuram

Ubaidulla K.C.
HST Mathematics,
SOHS Areekode, Malappuram

Firoza Moidu
HST Mathematics, Calicut Girls VHSS,
Kundungal, Kallayi, Kozhikode

Priya Raj
HST Mathematics,
MGD Highschool, Puthusserry,
Pathanamthitta

Dhaneshan M.V.
HSST English,
GFHSS Padannakadappuram,
Kasaragod

Geomy N George
China Media, Shornur

Members

Experts

Dr. K. Manickaraj
Associate Professor of Tamil, Govt. College for Women, Thiruvananthapuram.

Dr. Hepsy Rose Mary A
Associate Professor Dept of Tamil, University of Kerala, Thiruvananthapruam.

Members

S.C Edwin Daniel, Rtd. HM, GHS Pambanar, Idukki
R. Selvaraj, Rtd. Principal Diet, Thiruvanathapuram.
Little Linda T R., Rtd. HST Maths, GHS Anakkara, Idukki.
Domanatha Sarath Kame, HST Maths, CPM GHSS Peermade, Idukki
Amirthaselvi S A, HST Maths, PHSS Vandiperiyar, Idukki.
Selvamari S, HST Maths, GHS Vanchivayal, Idukki.

Academic Coordinator

Dr. Sivakumar K.S.
Research Officer, SCERT

மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT)
வித்தியாபவன், பூஜப்புரை, திருவனந்தபுரம், 695 012

உள்ளடக்கம்

1	சமன்பாட்டு ஜோடிகள்	7
2	புதிய எண்கள்	19
3	இணைகோடுகள்	33
4	பெருக்கல் சமன்பாடுகள்	61
5	விகிதமுறா எண் பெருக்கல்	83
6	வடிவொத்த முக்கோணங்கள்	99
7	குறை எண்கள்	119

இந்தப் பாடபுத்தகத்தில் வசதிக்காக, சில அடையாளங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.


கணக்கு செய்து பார்க்கலாம்


ஆராய்ச்சி


ஐ.சி.டி வாய்ப்பு

இந்திய அரசமைப்பு

முகப்புரை

இந்திய மக்களாகிய நாம். இந்திய நாட்டினை இறையாண்மையும் சமநலச்சமுதாயமும் சமயச்சார்பின்மையும் மக்களாட்சிமுறையும் அமைந்ததொரு குடியரசாக நிறுவவும்.

அதன் குடிமக்கள் அனைவரும்

சமுதாய, பொருளியல், அரசியல் நீதி,
எண்ணம், அதன் வெளியீடு, கோட்பாடு,
சமயநம்பிக்கை, வழிபாடு இவற்றில் தன்னுரிமை,

சமுதாயப்படிநிலை, வாய்ப்புநலம் இவற்றில் சமன்மை
ஆகியவற்றை எய்திடச் செய்யவும்.

அவர்கள் அனைவரிடையேயும்
தனிமனிதனின் மாண்பு, நாட்டுமக்களின் ஒற்றுமை,
ஒருமைப்பாடு இவற்றை உறுதிப்படுத்தும்
உடன்பிறப்புரிமையினை வளர்க்கவும்

உள்ளார்ந்த உறுதியுடையராய்,

நம்முடைய அரசமைப்புப் பேரவையில், 1949 நவம்பர் இருபத்தாறாம் நாளாகிய இன்று, ஈங்கிதனால், இந்த அரசமைப்பினை ஏற்று, இயற்றி, நமக்கு நாமே வழங்கிக்கொள்கிறோம்.

1

சமன்பாட்டு ஜோடிகள்

மனக்கணக்கும் இயற்கணிதமும்

முதலில் ஒரு கணக்கு செய்யலாம்:

> ஒரு குடத்தில் 100 கருப்பு, வெள்ளை முத்துக்கள் உள்ளன. அதில் வெள்ளையை விட 10 கருப்பு முத்துக்கள் அதிகமாக உள்ளன. கருப்பு முத்துக்கள் எத்தனை? வெள்ளை முத்துக்கள் எத்தனை?

இதனைப் பலமுறைகளில் சிந்திக்கலாம். அதிகமாக உள்ள 10 கருப்பு முத்துக்களை மாற்றிவைத்தால், குடத்தில் 90 முத்துக்கள் இருக்கும். இதில் கருப்பும் வெள்ளையும் சமம். அதாவது 45 வீதம் உள்ளன. இனி மாற்றிவைத்த கருப்பும் சேர்த்து எடுத்தால் 55கருப்பும் 45 வெள்ளையும் இருக்கும்.

இதனை இயற்கணிதம் பயன்படுத்தியும் செய்யலாம் (எட்டாம் வகுப்பிலுள்ள **சமன்பாடுகள்** என்ற பாடம்). கருப்பு முத்துக்களின் எண்ணிக்கையை x என எடுத்தால், வெள்ளை முத்துக்களின் எண்ணிக்கை x-10. எல்லாம் சேர்த்து 10 ஆனதால்

$$x + (x - 10) = 100$$

இதிலிருந்து x ஐ மட்டும் பிரித்து எடுக்கலாம்:

$$2x - 10 = 100$$

$$2x = 110$$

$$x = 55$$

அவ்வாறு, கருப்பு முத்துக்கள் 55 எனக்கிடைக்கும்; அதிலிருந்து 10 ஐக் கழித்தால், வெள்ளை முத்துக்கள் 45 எனக் கிடைக்கும்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

> ஒரு மேசை மற்றும் நாற்காலியின் விலை 11000 ரூபாய். ஒரு மேசை மற்றும் நான்கு நாற்காலிகளின் மொத்தவிலை 14000 ரூபாய் ஆகும். எனில் ஒவ்வொன்றின் விலை எவ்வளவு?

முதலில் மனக்கணக்காகச் செய்து பார்ப்போம். ஒரு மேசையும் நான்கு நாற்காலிகளும் ஆனபோது விலையில் 3000 ரூபாய் கூடியது. இதற்குக் காரணம் மூன்று நாற்காலிகள் அதிகமாக வாங்குவதால் அல்லவா? அதாவது கூடுதலாக வந்த 3000 ரூபாய் மூன்று நாற்காலிகளின் விலையாகும். அவ்வாறெனில் ஒரு நாற்காலியின் விலை 1000 ரூபாய், மேசையின் விலை 10000 ரூபாய்.

இவ்வாறு சிந்திக்காமல், நாற்காலியின் விலை x ரூபாய் என எடுக்கலாம். மேலும் சிந்தித்தால் மேசையின் விலை $11000 - x$ ரூபாய் எனக் காணலாம். ஒரு மேசையும், நான்கு நாற்காலிகளும் சேர்ந்து, $(11000 - x) + 4x = 11000 + 3x$ ரூபாய் ஆகும். இது 14000 ரூபாய் எனக் கூறப்பட்டுள்ளது, அதாவது

$$11000 + 3x = 14000$$

இதிலிருந்து x ஐக் கணக்கிடலாம்:

$$\begin{aligned} 11000 + 3x &= 14000 \\ 3x &= 3000 \\ x &= 1000 \end{aligned}$$

அவ்வாறு நாற்காலியின் விலை 1000 ரூபாய் என்றும். மேசையின் விலை $11000 - 1000 = 10000$ ரூபாய் என்றும் கிடைக்கிறது.

வேறொரு முறையில் நாற்காலியின் விலை x ரூபாய், மேசையின் விலை y ரூபாய் என எடுக்கலாம். இந்தக் கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ள தகவல்களை இரண்டு சமன்பாடுகளாக எழுதலாம்.

$$\begin{aligned} x + y &= 11000 \\ 4x + y &= 14000 \end{aligned}$$

மேலும் முதல் சமன்பாட்டில் x, y என்ற எண்களுக்கு இடையே கூறப்பட்டுள்ள தொடர்பை இவ்வாறு எழுதலாம்: $y = 11000 - x$

இரண்டாவது சமன்பாட்டில் y க்குப் பதிலாக $11000 - x$ எனப் பயன்படுத்தலாம் :

$$4x + (11000 - x) = 14000$$

அதாவது,

$$11000 + 3x = 14000$$

இது நாற்காலியின் விலையை x என எடுத்துக் கிடைத்த பழைய சமன்பாடு அல்லவா?

இதிலிருந்து முதலில் செய்ததைப் போன்று இரண்டு விலையையும் கணக்கிடலாம்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்;

> இரண்டு எண்களில் பெரியது, சிறியதின் 5 மடங்காகும். பெரியதிலிருந்து சிறியதைக் கழித்தால் 32 கிடைக்குமெனில் எண்கள் எவை?

மனக்கணக்காகச் செய்யலாமா?

பெரிய எண், சிறிய எண்ணின் ஐந்து மடங்கு. அப்போது பெரிய எண்ணிலிருந்து சிறிய எண்ணைக் கழிக்கவும் என்பதை வேறொரு முறையில் கூறலாம் அல்லவா?

சிறிய எண்ணின் ஐந்து மடங்கிலிருந்து அந்த எண்ணைக் கழிக்க வேண்டும். அதாவது எண்ணின் நான்கு மடங்கு.

இவ்வாறு கழித்துக்கிடைத்தது 32 எனக் கூறப்பட்டுள்ளது. அப்போது சிறிய எண்ணின் 4 மடங்கு 32. எனவே எண் 8 ஆகும்.

மேலும் பெரிய எண் 8 இன் 5 மடங்கு, 40 ஆகும்.

இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தினால்?

சிறிய எண்ணை x எனக் கூறலாம். அப்போது பெரிய எண் $5x$

பெரியதில் இருந்து சிறியதைக் கழித்தால் $5x - x = 4x$

கழித்துக் கிடைப்பது 32 ஆனதால் $4x = 32$

இதிலிருந்து $x = 8$ எனக்கிடைக்கும்.

அதாவது, சிறிய எண் 8, பெரிய எண் $5 \times 8 = 40$

சிறிய எண் x, பெரிய எண் y என எடுத்துக் கொண்டால்?

கூறப்பட்டுள்ள தகவல்களை இரண்டு சமன்பாடுகளாக எழுதலாம்.

$$y = 5x$$

$$y - x = 32$$

இரண்டாவது சமன்பாட்டில் y க்குப் பதிலாக $5x$ ஐப் பயன்படுத்தினால் ?

$$5x - x = 32$$

அதாவது,

$$4x = 32$$

இதிலிருந்து $x = 8$ எனவும், தொடர்ந்து $y = 5 \times 8 = 40$ எனவும் கணக்கிடலாம் அல்லவா?

மேலும் ஒரு கணக்கு :

ஒரு பின்ன எண்ணின் தொகுதியுடன் ஒன்று கூட்டி எளிதாக்கிய போது $\frac{1}{2}$ கிடைத்தது. பகுதியுடன் ஒன்று கூட்டி எளிதாக்கியபோது $\frac{1}{3}$ உம் கிடைத்ததெனில் பின்ன எண் எது?

இதனை மனக்கணக்காகச் செய்ய இயலுமா?

தொகுதி அல்லது பகுதியை x என்று எடுத்தாலும் அதிகம் முன்னோக்கிச் செல்ல இயலாது. தொகுதி x உம் பகுதி y உம் எனத் தொடங்கலாம்.

அப்போது பின்ன எண் $\frac{x}{y}$.

மேலும் கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ள தகவல்களைச் சமன்பாடுகளாக்கலாம்:

$$\frac{x+1}{y} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{3}$$

முதல் சமன்பாட்டின் பொருள் என்ன?

$\frac{x+1}{y}$ என்ற பின்ன எண், $\frac{1}{2}$ என்ற பின்ன எண்ணின் வேறொரு வடிவம் ஆகும்.

$\frac{1}{2}$ என்ற பின்ன எண்ணின் பற்பல வடிவங்களில், பகுதி என்பது தொகுதியின் இரண்டு மடங்காக வேண்டும் அல்லவா? அப்போது, பகுதியாகிய 'y' தொகுதியான $x+1$ இன் இரண்டு மடங்காகும். அதாவது,

$$y = 2(x+1)$$

இதைப்போன்று, இரண்டாவது சமன்பாடு $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{3}$ என்பதில் இருந்து,

$$y + 1 = 3x \text{ எனக்கிடைக்கும்.}$$

முதல் சமன்பாடு கூறுவது y என்ற எண்ணும் $2(x+1)$ என்ற எண்ணும் சமம் என்பதாகும். அப்போது இரண்டாவது சமன்பாட்டில் y க்குப் பதிலாக $2(x+1)$ என எழுதலாம்:

$$2(x+1) + 1 = 3x$$

அதாவது,

$$2x + 2 + 1 = 3x$$

$$2x + 3 = 3x$$

இதிலிருந்து $x = 3$ எனக் காணலாம். தொடர்ந்து முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$y = 2 \times (3+1) = 2 \times 4 = 8$ எனவும் காணலாம். அப்போது இந்தக் கணக்கில் பின்ன எண் $\frac{3}{8}$ ஆகும்.

கீழே தரப்பட்டுள்ள கணக்குகள் ஒவ்வொன்றையும் மனக்கணக்காகவோ, ஓர் எழுத்து மட்டும் உள்ள சமன்பாடாக மாற்றியோ, இரண்டு எழுத்துக்கள் உள்ள இரு சமன்பாடுகளாக மாற்றியோ செய்யவும்.

(1) பிரியா 1100 ரூபாய் கொடுத்து பையும் காலணியும் வாங்கினாள். பைக்குக் காலணியைவிட 300 ரூபாய் அதிகமாகுமெனில் பை, காலணியின் விலை எவ்வளவு?

(2) இரண்டு எண்களின் தொகை 26 உம், வித்தியாசம் 4 உம் ஆகுமெனில் எண்கள் எவை?

(3) ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 40 சென்டிமீட்டர், ஒரு பக்கம் மற்ற பக்கத்தைவிட 8 சென்டிமீட்டர் கூடுதலாகும். பக்கங்களின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.

(4) மூன்றரை மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு கம்பியை இரண்டாக வெட்டி, ஒரு துண்டை வளைத்து சதுரமும் மற்ற துண்டை வளைத்து சமபக்க முக்கோணமும் உருவாக்க வேண்டும். இரண்டின் பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளம் இருக்க வேண்டும். எவ்வாறு வெட்டலாம்?

(5) ஒரு வகுப்பில் மாணவர்களைவிட 4 மாணவிகள் அதிகமாக உள்ளனர். 8 மாணவர்கள் மட்டும் வராமல் இருந்த ஒரு நாள், மாணவர்களின் இரு மடங்காக மாணவிகள் இருந்தனர். எனில் வகுப்பில் எத்தனை மாணவ மாணவிகள் உள்ளனர்?

(6) ஒரு பின்ன எண்ணின் தொகுதியுடன் ஒன்று கூட்டி எளிதாக்கியபோது $\frac{1}{3}$ கிடைத்தது; பகுதியுடன் ஒன்று கூட்டி எளிதாக்கியபோது $\frac{1}{4}$ உம் கிடைத்தது. பின்ன எண் எது?

(7) ஒருவர் 100000 ரூபாயை இரண்டு திட்டங்களில் சேமித்தார். வட்டி 7 சதவீதமும், 6 சதவீதமும் ஆகும். ஓர் ஆண்டுக்குப்பின் இரண்டு திட்டங்களில் இருந்தும் மொத்தம் 6750 ரூபாய் வட்டி கிடைத்தது. ஒவ்வொன்றிலும் எத்தனை ரூபாய் சேமித்தார்?

(8) ஒரு வினாடியில் u மீட்டர் என்ற வேகத்தில் தொடங்கி ஒவ்வொரு வினாடியிலும் a மீட்டர்/வினாடி என்ற வீதத்தில் வேகம் அதிகரித்து, நேர் கோட்டின் வழியாகப் பயணிக்கின்ற ஒரு பொருள், t வினாடியில் வேகம் $u + at$ ஆகும். இவ்வாறு பயணிக்கும் ஒரு பொருளின் முதல் வினாடியின் வேகம் 5 மீட்டர்/வினாடியும் ஐந்தாவது வினாடியில் வேகம் 13 மீட்டர்/ வினாடியும் ஆகும். ஒவ்வொரு வினாடியிலும் வேகம் அதிகரிப்பதன் வீதம் என்ன? பயணம் ஆரம்பித்தபோதுள்ள வேகம் என்ன?

இரு சமன்பாடுகள்

இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்;

2 பேனாக்களும் 3 நோட்டுப் புத்தகங்களும் சேர்ந்து 110 ரூபாய். 2 பேனாக்களும் 5 நோட்டுப் புத்தகங்களும் 170 ரூபாய். எனில் ஒரு பேனாவின் விலை என்ன? ஒரு நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை என்ன?

முன்னர் செய்த நாற்காலி – மேசை கணக்கைப் போன்று சிந்தித்துப் பார்க்கவும்: முதலில் கூறிய 110 ரூபாயிலிருந்து, விலை 170 ரூபாயாக அதிகரித்தது, 2 நோட்டுகள் அதிகமாக வாங்கியதால் அல்லவா?

அதாவது, இந்த 60 ரூபாய் 2 நோட்டுப் புத்தகங்களின் விலை ஆகும். அப்போது ஒரு நோட்டுப்புத்தகத்தின் விலை 30 ரூபாய்.

இனி முதலில் கூறியதிலிருந்து 2 பேனாக்களின் விலை கிடைப்பதற்கு, 110 ரூபாயிலிருந்து மூன்று நோட்டுப் புத்தகங்களின் விலையைக் கழித்தால் போதும் அல்லவா?

அதாவது, 110 – 90 = 20 ரூபாய். அப்போது ஒரு பேனாவின் விலை 10 ரூபாய்.

தகவல்களும் தீர்வுகளும்

ஒரு குடத்தில் கருப்பும் வெள்ளையுமாகப் பத்து முத்துக்கள் உள்ளன என்று மட்டும் கூறினால் கருப்பு எத்தனை, வெள்ளை எத்தனை என்று சரியாகக் கூற இயலாது அல்லவா, கருப்பு ஒன்றும் வெள்ளை ஒன்பதும், கருப்பு இரண்டும் வெள்ளை எட்டும் இவ்வாறு பல்வேறு முறைகளில் கூறலாம். வெள்ளையைவிட கருப்பு முத்துக்கள் இரண்டு அதிகம் எனக் கூறினால் மட்டுமே சரியாகக் கூற முடியும். கருப்பு ஆறு, வெள்ளை நான்கு ஆகும். இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்திக் கூறினால், $x + y = 10$ என்ற ஒரு சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வுகளாகக் கிடைக்கும் எண்கள் x, y எனப் பல இருக்கலாம். ஆனால்

$$x + y = 10$$

$$x - y = 2$$

என்ற இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் பொருந்தும் ஒரு ஜோடி எண்களே உள்ளன.

$$x = 6, \quad y = 4$$

மேலும் பேனாவின் விலை x ரூபாய், நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை y ரூபாய் என எடுத்து, கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ளவற்றை இயற்கணித சமன்பாடுகளாக்கித் தீர்வு காண்பது எவ்வாறு எனப்பார்ப்போம்:

2 பேனாக்களும் 3 நோட்டுப் புத்தகங்களும் சேர்த்து விலை 110 ரூபாய்	$2x + 3y = 110$
2 பேனாக்களும் 5 நோட்டுப் புத்தகங்களும் சேர்த்து விலை 170 ரூபாய்	$2x + 5y = 170$
அதிகமான 2 நோட்டுப் புத்தகங்களின் விலை	$(2x + 5y) - (2x + 3y) = 2y$
அதிகமானது 60 ரூபாய்	$170 - 110 = 60$
2 நோட்டுப் புத்தகங்களின் விலை 60 ரூபாய்	$2y = 60$
ஒரு நோட்டுப் புத்தகத்தின் விலை 30 ரூபாய்	$y = 30$
2 பேனாக்களின் விலை, 110 ரூபாயில் இருந்து 90 ரூபாய் கழித்து	$2x = 110 - (3 \times 30) = 20$
ஒரு பேனாவின் விலை 10 ரூபாய்	$x = 10$

சற்று வேறுபட்ட ஒரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

3 பென்சில்களும் 4 பேனாக்களும் சேர்த்து விலை 66 ரூபாய் ஆகும். 6 பென்சில்களும் 3 பேனாக்களும் 72 ரூபாய் ஆகும். எனில் பென்சில் மற்றும் பேனாவின் விலை எவ்வளவு?

முதலில் மனக்கணக்காகச் செய்ய இயலுமா எனப் பார்ப்போம். இங்கு இரண்டாவது விலை அதிகரிக்கக் காரணம், முதல் கணக்கைப் போன்று ஒரு பொருள் மட்டும் அதிகரித்ததால் அல்ல. எனவே இது அவ்வளவு எளிதான செயல் அல்ல.

இரு தகவல்களிலும் பென்சிலோ பேனாவோ ஒரே எண்ணிக்கையில் எனில் முதல் கணக்கு போல் செய்யலாம். அப்படிச் செய்தால்?

விலைகளை இவ்வாறு எழுதி வைக்கலாம்:

பென்சில்	பேனா	விலை
3	4	66
6	3	72

முதலில் கூறியதில் 3 பென்சில்களும் இரண்டாவது கூறியதில் 6 பென்சில்களும் உள்ளன. முதல் தகவலில் 6 பென்சில் என மாற்ற இயலுமா?

6 பென்சில்களும், 8 பேனாக்களும் எனில்?

	பென்சில்	பேனா	விலை
	3	4	66
×2	6	3	72
	6	8	132

மூன்றாவது வரிசையில் இரண்டாவது வரிசையைவிட விலை எவ்வளவு அதிகம்?

எதனால்?

5 பேனாக்களின் விலை மட்டும் 60 ரூபாய் கூடியது அல்லவா?

அப்போது, ஒரு பேனாவின் விலை 12 ரூபாய். இனி முதல் வரிசையில் இருந்து, 3 பென்சில்களின் விலை 66 – 48 = 18 ரூபாய். ஒரு பென்சிலின் விலை 6 ரூபாய் எனக் கணக்கிடலாம்.

இனி இந்தக் கருத்துக்கள் அனைத்தையும் இயற்கணிதத்தில் எழுதிப் பார்க்கலாம். ஒரு பென்சிலின் விலை x ரூபாய் எனவும், ஒரு பேனாவின் விலை y ரூபாய் எனவும் எடுத்தால் மேற்கூறிய கணக்கில் கூறியவற்றைப் பயன்படுத்தி விலைகளைக் கண்டுபிடித்த முறைகளைப் பின்வறுமாறு எழுதலாம்.

3 பென்சில்கள் 4 பேனாக்கள் சேர்ந்து விலை 66 ரூபாய்

$$3x + 4y = 66$$

6 பென்சில்கள் 3 பேனாக்கள் சேர்ந்து விலை 72 ரூபாய்

$$6x + 3y = 72$$

6 பென்சில்கள் 8 பேனாக்கள் சேரந்து விலை 132 ரூபாய்

$$6x + 8y = 2(3x + 4y) = 132$$

அதிகரித்தது 5 பேனாக்களின் விலை

$$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 5y$$

அதிகரித்தது 60 ரூபாய்

$$132 - 72 = 60$$

5 பேனாக்களின் விலை 60 ரூபாய்

$$5y = 60$$

ஒரு பேனாவின் விலை 12 ரூபாய்

$$y = 12$$

3 பென்சில்களின் விலை, 66 ரூபாயில் இருந்து 4 பேனாக்களின் விலையைக் கழித்ததாகும்

$3x = 66 - (4 \times 12) = 18$

ஒரு பென்சிலின் விலை, 6 ரூபாய்

$$x = 6$$

இங்கு, செய்ததையெல்லாம் சுருக்கமாக எழுதலாம். முதலில், கணக்கிலிருந்து கிடைத்த தகவல்களைச் சமன்பாடுகளாக எழுதலாம். அவற்றை 1 - ஆம் சமன்பாடு என்றும் 2 - ஆம் சமன்பாடு என்று கூறலாம்:

$$3x + 4y = 66 \qquad (1)$$

$$6x + 3y = 72 \qquad (2)$$

வித்தியாசமில்லாத தகவல்கள்

ராமு 7 ரூபாய் கொடுத்து ஒரு பென்சிலும் ஒரு பேனாவும் வாங்கினான். அஜு 4 பென்சிலும் 4 பேனாவும் வாங்கினான்; 28 ரூபாய் ஆனது. இந்தத் தகவல்களின் அடிப்படையில் ஒவ்வொன்றினுடையவும் விலையைக் கண்டுபிடிக்க முயற்சித்தனர். பென்சிலின் விலை x என எடுத்து முதலில் கூறியதைப் பயன்படுத்தி $7 - x$ என்றாக்கினார்கள்.

இரண்டாவது கூறியதைப் பயன்படுத்தி

$$4x + 4(7 - x) = 28$$

என எழுதினார்கள். இதை எளிதாக்கிய போது கிடைத்ததோ? $28 = 28$

இங்கு, பென்சிலின் விலை x, பேனாவின் விலை y என எடுத்திருந்தால்

$$x + y = 7$$

$$4x + 4y = 28$$

இரண்டாவது எழுதிய சமன்பாட்டை

$$4(x + y) = 28$$

என்றாக்கினால் மீண்டும்

$$x + y = 7$$

எனக் கிடைக்கும் அல்லவா?

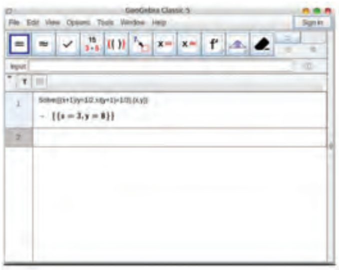
அதாவது, இந்தக் கணக்கை இரண்டு விதமாகக் கூறினாலும் விலைகளுக்கிடையே உள்ள ஒரு தொடர்பை மட்டுமே விளக்குகிறது. இதை மட்டும் பயன்படுத்தி விலைகளை வெவ்வேறாகக் கண்டுபிடிக்கவும் இயலாது.

கணினி இயற்கணிதம்

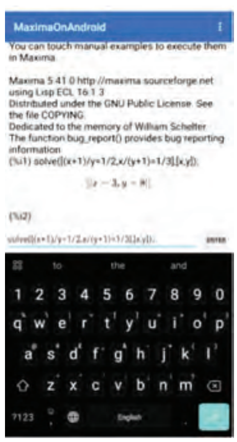
எண்களைப் பயன்படுத்திச் செய்யும் சிக்கலான கணக்கீடுகள் மட்டுமல்ல, இயற்கணித பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காணவும் கணினியைப் பயன்படுத்தலாம். இதற்கென்று உருவாக்கப்பட்ட மென்பொருட்கள் பொதுவாக Computer Algebra System (CAS) அல்லது Symbolic Algebra System என்ற பெயரில் அறியப்படுகின்றன.

SageMath, Maxima என்பவை முக்கியமான சுதந்திர மென்பொருட்கள் ஆகும்.

GeoGebra வுக்கு இயற்கணித செயல்பாடுகளைச் செய்ய இயலும்.



ஆன்ட்ராய்டு கைபேசிகளிலும் GeoGebra வையும் Maxima வையும் பயன்படுத்தலாம்.



ஒரு ஜோடி சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்பதற்கு ஜியோஜிப்ராவில் CAS ஐ பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக $5x + 2y = 20$, $2x + 3y = 19$ என்ற சமன்பாட்டு ஜோடிகளின் தீர்வு காண்பதற்கு

CAS திறந்து (view → CAS)

Solve ({$5x + 2y = 20$, $2x + 3y = 19$}, {x, y})

எனக் கொடுத்தால் போதும்.

$3x + 4y$ என்ற எண் 66 என்று 1 ஆம் சமன்பாடு கூறுகிறது; அப்போது அதன் இரண்டு மடங்கு 132.

$$6x + 8y = 132 \qquad (3)$$

இனி 2 - ஆம் சமன்பாட்டையும், 3 - ஆம் சமன் பாட்டையும் பயன்படுத்தி, இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$(6x + 8y) - (6x + 3y) = 132 - 72$$

இதை எளிதாக்கினால்

$$5y = 60 \text{ எனவும்}$$

அதிலிருந்து $y = 12$ எனவும் கிடைக்கும்.

தொடர்ந்து 1 - ஆம் சமன்பாட்டில் y ஆக 12 ஐ எடுத்தால் x ஐயும் கணக்கிடலாம்.

$$3x + (4 \times 12) = 66$$

$$3x = 66 - 48 = 18$$

$$x = 6$$

இந்தக் கணக்குகளைச் செய்து பார்க்கவும்:

(1) நான்கு பேனாக்களும் மூன்று பென்சில்களும் சேர்ந்து 66 ரூபாயாகும். ஏழு பேனாக்களும், மூன்று பென்சில்களும் சேர்ந்து 111 ரூபாய். ஒரு பேனா, பென்சிலின் விலை எவ்வளவு?

(2) ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 26 சென்டிமீட்டர் ஆகும். இந்த செவ்வகத்தினுடைய நீளத்தின் இரண்டு மடங்கும், அகலத்தின் மூன்று மடங்குமான வேறொரு செவ்வகம் வரைந்தபோது சுற்றளவு 62 சென்டிமீட்டர் ஆனது. எனில் முதல் செவ்வகத்தின் நீளமும் அகலமும் எவ்வளவு?

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

சிறிய பாத்திரத்தில் ஐந்து தடவையும் பெரிய பாத்திரத்தில் இரண்டு தடவையும் தண்ணீர் நிரப்பி ஒரு தொட்டியில் ஊற்றிய போது 20 லிட்டர் ஆனது. சிறிய பாத்திரத்தில் இரண்டு தடவையும் பெரிய பாத்திரத்தில் மூன்று தடவையும் நிரப்பி ஊற்றிய போது, 19 லிட்டர் கிடைத்தது. ஒவ்வொரு பாத்திரத்திலும் எத்தனை லிட்டர் தண்ணீர் நிரப்பலாம்?

சிறிய பாத்திரத்தில் x லிட்டரும் பெரிய பாத்திரத்தில் y லிட்டரும் என எடுத்து மேற்கூறிய கணக்கைச் சமன்பாடுகளாக எழுதலாம்:

$$5x + 2y = 20 \qquad (1)$$

$$2x + 3y = 19 \qquad (2)$$

முதல் கணக்கில் செய்தது போன்று, (1) இல் $2x$ என ஆக வேண்டுமெனில், $\frac{2}{5}$ ஆல் பெருக்க வேண்டும். மாறாக, (2) ல் $5x$ என ஆக வேண்டுமெனில் $\frac{5}{2}$ ஆல் பெருக்க வேண்டும். இவ்வாறு ஏதேனும் ஒரு முறையில் விடையைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

பின்ன எண்களைப் பயன்படுத்தாமல் செய்வதற்கு ஏதாவது வழிமுறை உண்டா? சமன்பாடுகளை எந்த எண்ணாலும் பெருக்கலாம் அல்லவா. 1 - ஆம் சமன்பாட்டை ஓர் எண்ணாலும் 2 - ஆம் சமன்பாட்டை வேறொரு எண்ணாலும் பெருக்கி, இவற்றில் x இன் மடங்குகளை ஒரே எண்ணாக்கினால்?

$$(1) \times 2: \quad 10x + 4y = 40 \qquad (3)$$

$$(2) \times 5: \quad 10x + 15y = 95 \qquad (4)$$

மேலும் (4) இல் இருந்து (3) ஐக் கழித்து

$$11y = 55$$

எனவும், அதிலிருந்து

$y = 5$ எனவும் காணலாம்.

தொடர்ந்து, இதை (1) ல் பயன்படுத்தினால் x உம் கிடைக்கும்:

$$5x + 10 = 20$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

அவ்வாறு சிறிய பாத்திரத்தில் 2 லிட்டரும், பெரிய பாத்திரத்தில் 5 லிட்டரும், தண்ணீரை நிரப்பலாம் எனக் கணக்கிடலாம்.

எண்கள் மட்டும்

பென்சில் பேனா கணக்கு x, y ஐ பயன்படுத்தாமல் எண்களை மட்டும் பயன்படுத்திச் சிந்தித்தீர்களா? ஏனைய கணக்குகளையும் இதைப்போன்று செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, பாத்திரக் கணக்கை இவ்வாறு தொடங்கலாம்.

சிறிய பாத்திரம்	பெரிய பாத்திரம்	தண்ணீர்
5	2	20
2	3	19

தொடர்ந்து வரும் செயல்பாடுகளை இவ்வாறு எழுதலாம்:

	5	2	20	
×2	2	3	19	
	10	4	40	×5
	10	15	95	

இனிக் கடைசி இரண்டு வரிசைகளை மட்டும் எடுத்து இவ்வாறு தொடரலாம்:

−	10	4	40
	10	15	95
÷ 11	0	11	55
	0	1	5

அப்போது பெரிய பாத்திரத்தில் 5 லிட்டர். சிறிய பாத்திரத்தில் 2 லிட்டர் என மனதில் கணக்கிடலாம் அல்லவா. இயற்கணிதம் பயன்படுத்தத் தொடங்குவதற்கு முன் பழங்கால சீனாவின் கணிதவியலாளர்கள் இவ்வாறான கணக்குகளை இதனடிப்படையில் செய்துள்ளனர்.

(1) இரண்டு கிலோகிராம் ஆரஞ்சும் மூன்று கிலோகிராம் ஆப்பிளும் சேர்ந்து 520 ரூபாய். மூன்று கிலோகிராம் ஆரஞ்சும் இரண்டு கிலோகிராம் ஆப்பிளும் சேர்ந்து 480 ரூபாய். ஒரு கிலோகிராம் ஆரஞ்சின் விலை என்ன? ஆப்பிளின் விலை?

(2) 1 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு கம்பியை இரண்டு துண்டுகளாக வெட்டி, ஒரு துண்டை வளைத்து ஒரு சதுரமும் மற்ற துண்டை வளைத்து ஒரு சமபக்க முக்கோணமும் உருவாக்கப்பட்டன. சதுரத்தின் பக்கத்தின் மூன்று மடங்கையும் சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கத்தின் இரண்டு மடங்கையும் கூட்டியபோது 71 சென்டிமீட்டர் கிடைத்ததெனில் கம்பி எவ்வளவு நீளத்தில் வெட்டப்பட்டது?

(3) நான்கு வருடங்களுக்குமுன் ரஹிமின் வயது ராமுவின் வயதின் மூன்று மடங்காக இருந்தது. இரண்டு வருடங்களுக்குப்பின் இது இரண்டு மடங்கானது. தற்போது அவர்களின் வயது என்ன?

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

ஓர் எண்ணின் நான்கு மடங்கையும் வேறொரு எண்ணின் மூன்று மடங்கையும் கூட்டியபோது 43 கிடைத்தது. முதல் எண்ணின் மூன்று மடங்கிலிருந்து இரண்டாவது எண்ணின் இரண்டு மடங்கை கழித்தபோது 11 கிடைத்ததெனில் எண்கள் எவை?

முதல் எண்ணை x எனவும், இரண்டாவது எண்ணை y எனவும் எடுத்து.

கணக்கில் கூறப்பட்ட தகவல்களைச் சமன்பாடுகளாக மாற்றினால்

$$4x + 3y = 43 \qquad (1)$$
$$3x - 2y = 11 \qquad (2)$$

முதலில் செய்தது போல் சமன்பாடு (1) ஐ 3 ஆலும் (2) ஐ 4 ஆலும் பெருக்கி எழுதினால்,

$$(1) \times 3 : \; 12x + 9y = 129 \qquad (3)$$
$$(2) \times 4 : \; 12x - 8y = 44 \qquad (4)$$

இனி (3) லிருந்து (4) ஐ கழித்து,

$$12x + 9y - (12x - 8y) = 129 - 44$$
$$12x + 9y - 12x + 8y = 85$$
$$17y = 85$$
$$y = 5$$

எனவும் கிடைக்கும்.

தொடர்ந்து $y = 5$ என்பதை (1) இல் பயன்படுத்தி x ஐயும் கணக்கிடலாம்.

$$4x + 15 = 43$$
$$4x = 28$$
$$x = 7$$

அவ்வாறு முதல் எண் 7 என்றும் இரண்டாவது எண் 5 என்றும் கிடைக்கும்.

மேலும் ஒரு கணக்கைப் பார்ப்போம்

இரண்டு எண்களின் தொகை 28 உம், வித்தியாசம் 12 உம் ஆகும். எண்கள் எவை?

இதைப் போன்ற வேறொரு கணக்கை முன்னர் செய்தது நினைவில் உள்ளது அல்லவா? பெரிய எண்ணை x எனவும் சிறிய எண்ணை y எனவும் எடுத்து கணக்கில் கூறப்பட்டுள்ள தகவல்களை இரண்டு சமன்பாடுகளாக எழுதிப்பார்ப்போம்.

எண்களின் தொகை $x + y = 28$

வித்தியாசம் $x - y = 12$

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளின் தொகை

$$(x + y) + (x - y) = 28 + 12$$

அதாவது, $2x = 40$

$$x = 20$$

இனி, இவற்றின் வித்தியாசம்

$$(x + y) - (x - y) = 28 - 12$$

$$x + y - x + y = 16$$

அதாவது, $2y = 16$

$$y = 8$$

அப்போது பெரிய எண் 20 உம் சிறிய எண் 8 உம் ஆகும்.

இந்தக் கணக்கிலிருந்து வேறொரு கருத்தையும் புரிந்துகொள்ளலாம்.

இரண்டு எண்களின் தொகையையும் வித்தியாசத்தையும் கூட்டினால் பெரிய எண்ணின் இரண்டு மடங்கு கிடைக்கும்.

$$(x + y) + (x - y) = 2x$$

தொகையிலிருந்து வித்தியாசத்தைக் கழித்தால் சிறிய எண்ணின் இரண்டு மடங்கு கிடைக்கும்.

$$(x + y) - (x - y) = 2y$$

கணக்கும் காரியமும்

10 மீட்டர் சுற்றளவு உள்ள ஒரு செவ்வகம் உருவாக்க வேண்டும். நீளம், அகலத்தைவிட 5.5 மீட்டர் அதிகமாக இருக்க வேண்டும். நீளமும் அகலமும் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்?

அகலத்தை x என எடுத்தால், நீளம் $x + 5.5$ என இருக்க வேண்டும். சுற்றளவு 10 மீட்டராக இருக்க வேண்டும் என்பதால்

$$x + (x + 5.5) = \frac{10}{2} = 5$$

அதாவது,

$$2x + 5.5 = 5$$

அதாவது

$$2x = -0.5$$

இது சரியாகவில்லை அல்லவா? செவ்வகத்தின் அளவுகள் எப்படி குறை எண்கள் ஆகும்?

இதன் பொருள் இந்த விதிமுறைகள் இரண்டும் சரியாகும் விதத்தில் ஒரு செவ்வகம் வரைய இயலாது என்பதாகும். இந்தக் கணக்கில் அகலம் x, நீளம் y என எடுத்திருந்தால் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களிலிருந்து கிடைக்கும் சமன்பாடுகள்,

$$x + y = 5$$

$$y - x = 5.5$$

இவை இரண்டும் சரியாகின்ற மிகை எண்கள் இல்லை என்று விரைவில் புரிந்துகொள்ளலாம் (இரண்டு மிகை எண்களின் தொகை அவற்றின் வித்தியாசத்தை விடச் சிறியதாகுவது இல்லை அல்லவா).

(1) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் சிறிய கோணங்களின் வித்தியாசம் $20°$. அதன் மூன்று கோணங்களையும் கணக்கிடுக.

(2) இரண்டு எண்களில் பெரிய எண்ணைச் சிறிய எண்ணால் வகுத்தபோது ஈவும் மீதியும் 2 எனக் கிடைத்தது. சிறிய எண்ணின் 5 மடங்கைப் பெரிய எண்ணால் வகுத்தபோதும் ஈவும் மீதியும் 2 தான். எண்களைக் கணக்கிடுக.

(3) ஓர் ஈரிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் தொகை 11 ஆகும். இந்த எண்ணின் இலக்கங்களை ஒன்றுக்கொன்று மாற்றினால் கிடைக்கும் எண், முதல் எண்ணை விட 27 அதிகம். எண் எது?

(4) பதினேழு கோப்பைகளும், பதினாறு பதக்கங்களும் சேர்த்து விலை 2180 ரூபாய் ஆகும். பதினாறு கோப்பைகளும் பதினேழு பதக்கங்களும் சேர்த்து 2110 ரூபாய். ஒரு கோப்பையின் விலை எவ்வளவு? ஒரு பதக்கத்தின் விலை எவ்வளவு?

(5) u மீட்டர்/வினாடி என்ற வேகத்தில் தொடங்கி ஒவ்வொரு வினாடியிலும் a மீட்டர்/வினாடி என்ற வீதத்தில் வேகம் அதிகரித்து நேர்கோட்டின் வழியாகப் பயணிக்கின்ற ஒரு பொருள், t வினாடியில் பயணிக்கும் தூரம் $ut + \frac{1}{2}at^2$ ஆகும். இவ்வாறு பயணிக்கும் ஒரு பொருள் 2 வினாடிகளில் 10 மீட்டரும், 4 வினாடிகளில் 28 மீட்டரும் பயணிக்கிறது. பயணத்தின் ஆரம்ப வேகம் என்ன? ஒவ்வொரு வினாடியிலும் வேகம் அதிகரிப்பதன் வீதம் என்ன?

(6) ஓர் ஈரிலக்க எண், அதன் இலக்கங்களின் தொகையின் ஆறு மடங்காகும். இந்த எண்ணின் இலக்கங்களை ஒன்றுக்கொன்று இடம் மாற்றினால் கிடைக்கும் ஈரிலக்க எண் இலக்கங்களின் தொகையின் 4 மடங்கைவிட 9 அதிகமாகும். ஈரிலக்க எண் எது?

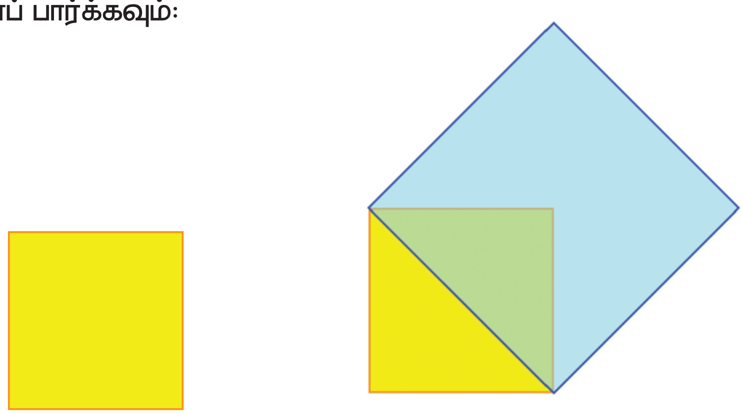
(7) இரண்டு எண்களில், முதல் எண்ணுடன் 11 ஐக் கூட்டியபோது இரண்டாவது எண்ணின் இரு மடங்கும், இரண்டாவது எண்ணுடன் 20 ஐக் கூட்டியபோது முதல் எண்ணின் இரு மடங்கும் கிடைத்ததெனில் எண்கள் எவை?

2

புதிய எண்கள்

நீளங்களும் எண்களும்

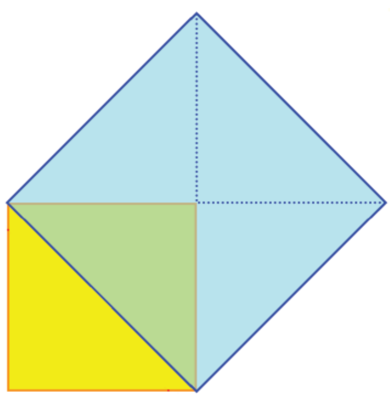
இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்:



ஒரு சதுரமும் அதன் மூலைவிட்டத்தில் வேறொரு சதுரமும்.

பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு, சிறிய சதுரத்தின் பரப்பளவின் எத்தனை மடங்கு?

மூலைவிட்டம் சிறிய சதுரத்தை ஒரே அளவுள்ள இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கிறது அல்லவா. இத்தகைய எத்தனை செங்கோண முக்கோணங்கள் சேர்ந்து பெரிய சதுரம் ஆகிறது?



அப்போது சிறிய சதுரத்தின் பரப்பளவின் இரண்டு மடங்கே பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு.

சிறிய சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 1 மீட்டர் எனில் அதன் பரப்பளவு 1 சதுர மீட்டர், பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவு 2 சதுர மீட்டர், எனில் அதன் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவு?

அது சிறிய சதுரத்தின் மூலைவிட்டம் ஆனதால் 1 மீட்டரைவிட அதிகமாகும்.

இரண்டு பக்கங்கள் 1 மீட்டர் ஆன முக்கோணத்தின் மூன்றாம் பக்கம் ஆனதால் 2 மீட்டரைவிடக் குறைவாகும்.

ஒன்றிற்கும் இரண்டிற்கும் இடையே உள்ள பின்ன எண் ஆகலாம். ஆனால் சதுரத்தின் பரப்பளவு இரண்டு சதுர மீட்டர் ஆனதால், பக்கங்களின் நீளமான இந்த எண்ணின் வர்க்கம் இரண்டாக வேண்டும்.

எந்தப் பின்ன எண்ணின் வர்க்கம் இரண்டு ஆகும்?

ஒன்றரை ஆகுமா?

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

அது கூடுதல் ஆகும்; ஒன்றேகால் ஆனால்?

$$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 1\frac{9}{16}$$

அது குறைந்து போனது.

ஒன்றும் மூன்றிலொன்றும் ஆனால்?

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = 1\frac{7}{9}$$

இதுவும் குறைவுதான், ஆனால் ஒன்றேகாலைவிட மேம்பட்டதாகும்.

இவ்வாறு பல பின்ன எண்களை ஆராய்ந்தாலும், வர்க்கங்கள் 2 உடன் நெருங்கிநெருங்கி வருமே தவிர சரியாக 2 கிடைக்காது. இதனை இயற்கணிதம் பயன்படுத்தியும் நிரூபிக்கலாம். (பாடத்தின் கடைசியில் உள்ள இணைப்பைப் பார்க்கவும்)

அதாவது,

எந்தப் பின்ன எண்ணினுடையவும் வர்க்கம் 2 அல்ல.

அப்போது முன்பு பார்த்த நமது வடிவியல் பிரச்சினை என்னவாயிற்று?

பக்கங்கள் 1 மீட்டர் ஆன சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளம், ஒரு மீட்டரின் பின்ன எண் மடங்கெனில் அந்தப் பின்ன எண்ணின் வர்க்கம் இரண்டாக வேண்டும். (பக்கங்களின் நீளம் பின்ன எண்ணானாலும் பரப்பளவு அதன் வர்க்கம் ஆகும் எனக் கண்டோம் அல்லவா)

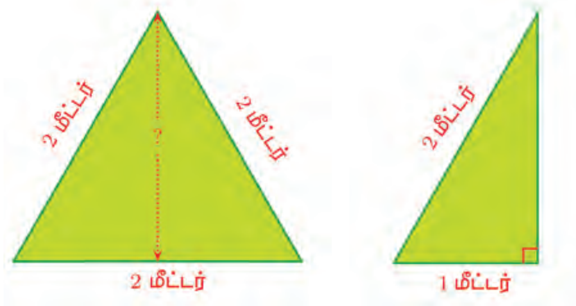
ஆனால் வர்க்கம் 2 ஆகும் பின்ன எண் இல்லை.

அதாவது,

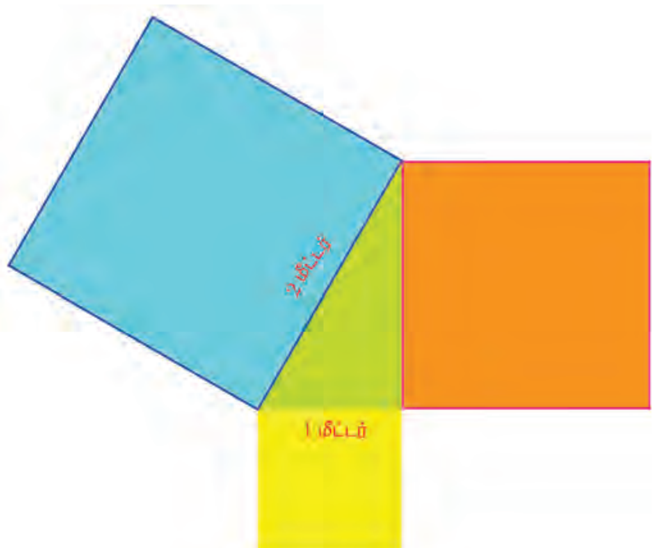
எல்லாப் பக்கங்களின் நீளமும் 1 ஆன சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளம் ஒரு பின்ன எண்ணாகக் கூற இயலாது.

இவ்வாறு எண்ணல் எண்களாகவோ பின்ன எண்களாகவோ கூற இயலாத நீளங்கள் பல உள்ளன. எடுத்துக்காட்டாகப் பக்கங்கள் எல்லாம் 2 மீட்டர் ஆன சமபக்க முக்கோணத்தின் உயரம் எவ்வளவு எனப் பார்ப்போம்:

முக்கோணத்தை உயரம் வழியாக வெட்டி ஒரு பாகம் எடுத்தால் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் கிடைக்குமல்லவா:



இதன் மூன்றாவது பக்கம் கண்டுபிடிக்க பக்கங்களில் எல்லாம் சதுரங்கள் வரைந்து பார்ப்போம்:

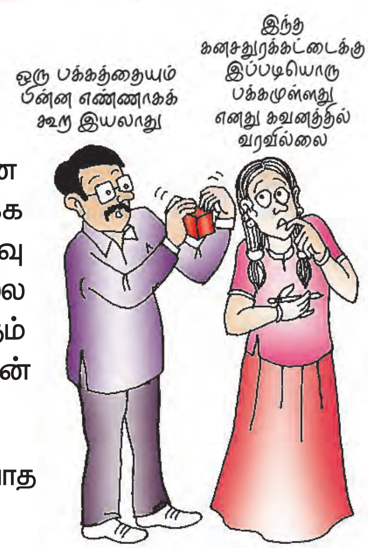


பைதகோரஸ் தேற்றப்படி ஆரஞ்சு நிறச் சதுரத்தின் பரப்பளவு, $4 - 1 = 3$ சதுர மீட்டராகும்.

அப்போது அதன் நீளம் 1 மீட்டரின் பின்ன எண் மடங்கு எனில் அந்தப் பின்ன எண்ணின் வர்க்கம் 3 ஆக வேண்டும்.

எந்தப் பின்ன எண்ணின் வர்க்கமும் 2 இல்லையெனக் கண்டதைப் போன்று எந்தப் பின்ன எண்ணின் வர்க்கமும் 3 அல்ல என்றும் காணலாம். அதாவது, இந்தச் செங்கோண முக்கோணத்தின் உயரம் பின்ன எண்ணாகக் கூற இயலாது.

வேறொரு எடுத்துக்காட்டைப் பார்க்கலாம்: கன அளவு 2 கன சென்டிமீட்டர் உள்ள ஒரு கனசதுரக் கட்டையை உருவாக்க வேண்டும் எனக் கருதவும். இதன் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்? எந்தப் பின்ன எண்ணின் வர்க்கமும் 2 அல்ல என்பதைப் போன்று எந்தப் பின்ன எண்ணின் மூன்று அடுக்கும் 2 அல்ல. ஆகவே இந்தக் கனசதுரக் கட்டையின் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தைப் பின்ன எண்ணாகக் கூற இயலாது.



இவ்வாறு பல சூழல்களிலும் பின்ன எண்ணாகக் கூற முடியாத நீளங்கள் தேவையாக வரும்.

எண்கள் உருவாகுதல்

எதையும் அளந்து எண் ஆக்கவும். இந்த எண்கள் வாயிலாக அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொடர்புகள்மூலம் உலகத்தைப் புரிந்துகொள்ள முயற்சித்தல் என்பதே கணிதத்தின் ஒரு முக்கியப் பணியாகும்.

அளக்கப்படுவதன் பண்பு மாறுவதற்கு ஏற்ப வேறுபட்ட வகைகளில் உள்ள எண்களை உருவாக்க வேண்டிவரும். இயற்கையிலிருந்து நேரடியாகக் கிடைத்ததை மட்டும் உண்டு வாழ்ந்த காலத்தில் மனிதனுக்குத் தன் கூட்டத்தில் உள்ள ஆட்களின் எண்ணிக்கை, கால்நடைகளின் எண்ணிக்கை போன்றவை மட்டுமே தேவைப்பட்டன. அக்காலத்தில் எண்ணல் எண்கள் மட்டுமே போதுமானவையாக இருந்தன.

ஏறக்குறைய கி.மு ஐந்தாயிரத்தில் நதிக்கரையோரங்களில் தங்கியிருந்து பரவலாக வேளாண்மை தொடங்கியபோது, விளை நிலங்களை உறுதிப்படுத்தவும் உறைவிடங்களை உருவாக்கவும் பல்வேறு நீளங்களையும் பரப்புகளையும் அளக்க வேண்டிய தேவைகள் ஏற்பட்டன. இக்காலத்தில் தான் பின்ன எண்கள் என்ற கருத்து உருவாயிற்று. பங்கீட்டின்போது பின்ன எண்கள் தேவைப்படுகிறது அல்லவா. எல்லா அளவுகளையும் பின்ன எண்களால் குறிப்பிட இயலாது என்ற அறிவில் இருந்தே புதிய வகை எண்கள் தேவைப்பட்டன.

பிற்காலத்தில் பௌதீகத் தேவைகளுக்கு மட்டுமன்றி கணிதத்தின் வசதிக்காகவும் புதிய வகை எண்கள் உருவாக்கப்பட்டன. குறை எண்கள், சிக்கல் எண்கள் (Complex Number) போன்றவை இவ்வாறு உருவானவை ஆகும். இவ்வகை எண்களும் இயற்பியல் போன்ற இதர அறிவியல் பிரிவுகளிலும் மிக அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன என்பது மற்றொன்றாகும்.

அளவுகளும் எண்களும்

எண்ணல் எண்ணாகவோ பின்ன எண்ணாகவோ கூற இயலாத நீளங்களைக் குறிப்பிட புதிய எண்கள் உருவாக்க வேண்டும். நாம் மேற்கூறிய முதல் எடுத்துக்காட்டில் பக்கங்களின் நீளம் 1 மீட்டர் ஆன சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளத்தை எவ்வாறு குறிப்பிடலாம்?

இவ்வினாவை இவ்வாறும் கேட்கலாம். பரப்பளவு 2 சதுர மீட்டர் ஆன சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளத்தை எவ்வாறு குறிப்பிடலாம்?

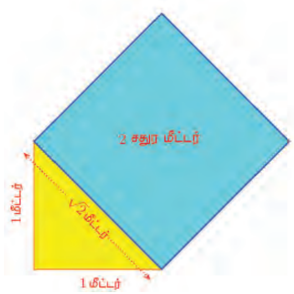
பக்கத்தின் அளவு எண்ணல் எண்ணாகவோ பின்ன எண்ணாகவோ ஆன சதுரமெனில் அதன் நீளம் பரப்பளவின் வர்க்க மூலம் அல்லவா.

எடுத்துக்காட்டாகப் பரப்பளவு 4 சதுர மீட்டர் ஆன சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளம் $\sqrt{4} = 2$ மீட்டர்;

பரப்பளவு $2\frac{1}{4}$ சதுர மீட்டர் எனில், பக்கத்தின் நீளம் $\sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}$ மீட்டர்.

இதைப் போன்று,

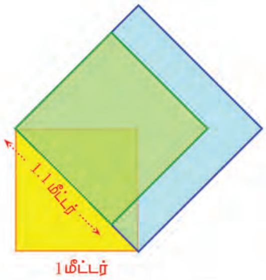
பரப்பளவு 2 சதுர மீட்டரான சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளம் $\sqrt{2}$ மீட்டர் என எழுதலாம்.

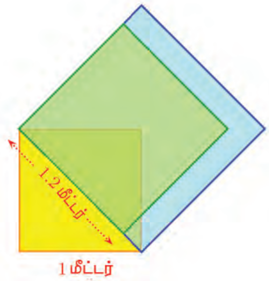


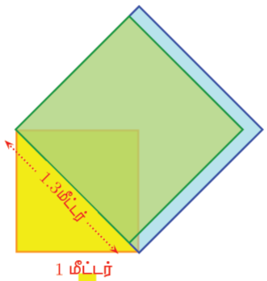
நீளத்தைக் குறிக்க ஒரு குறியீட்டைக் கொடுத்தால் மட்டும் போதாதல்லவா. அதன் அளவைப் புரிந்துகொள்ள தெரிந்த நீளங்களுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க வேண்டுமல்லவா?

அதற்கான வழி, இந்த நீளத்திற்கு அடுத்தடுத்து வருகின்ற பின்ன எண்ணாகக் குறிப்பிட இயலும் நீளங்களைக் கண்டுபிடிப்பதாகும். இத்தகைய நீளங்களை மூலைவிட்டத்திலேயே எடுத்தால் இவற்றைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட சதுரங்கள், மூலைவிட்டத்தைப் பக்கமாகக் கொண்ட சதுரத்திற்கு அருகில் நெருங்குமல்லவா?

இவ்வாறு அடையாளப்படுத்தியதைப் பார்க்கவும்.







எண்களை மட்டுமே கூறினால், இக்கோடுகளின் நீளங்களான பின்ன எண்களின் வர்க்கங்கள் 2 உடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும். கால்குலேட்டரைப் பயன்படுத்தி இந்த வர்க்கங்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$1.1^2 = 1.21$$

$$1.2^2 = 1.44$$

$$1.3^2 = 1.69$$

$$1.4^2 = 1.96$$

$$\mathbf{1.5^2 = 2.25}$$

இங்குக் காண்பது என்ன?

$$1.4^2 < 2 < 1.5^2$$

வர்க்கங்கள் 2 உடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும் பின்ன எண்களைக் கண்டுபிடிக்கும் முறையை மேலும் தெளிவுபடுத்தலாம்.

எண்ணல் எண்களை மட்டும் எடுத்தால்

$$1^2 < 2 < 2^2$$

பத்தில் ஒன்றுகளையும் சேர்த்து எடுத்தால்?

சிதறும் நம்பிக்கை

எல்லா அளவுகளையும் எண்ணல் எண்களால் ஒப்புமைப்படுத்தலாம் என கி.மு. 6 ஆம் நூற்றாண்டில் பைதகோரஸும் அவரின் சீடர்களும் நம்பினர். மேலும் சரியாகக் கூறினால் எந்த இரு அளவுகளையும் எண்ணல் எண்களின் விகிதத்தால் குறிப்பிடலாம் என்பதே இந்த நம்பிக்கை. ஆனால் ஒரு சதுரத்தின் மூலைவிட்டம் பக்கங்கள் இவற்றின் நீளங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதத்தை எண்ணல் எண்களால் எழுத இயலாது. இந்த விகிதத்தை எண்ணல் எண்களால் $a : b$ என எழுத வேண்டுமெனில் மூலைவிட்டத்தின் நீளம் பக்கத்தின் $\frac{a}{b}$ மடங்காக வேண்டும். அவ்வாறெனில் மூலைவிட்டத்தின் வர்க்கம் பக்கத்தின் வர்க்கத்தின் $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ மடங்காக வேண்டும். மூலைவிட்டத்தில் அமையும் சதுரம் பக்கத்தில் அமையும் சதுரத்தின் இரு மடங்கு ஆனதால் $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ என வரவேண்டும். இது வாய்ப்பில்லை எனக் கண்டோம் அல்லவா.

பைதகோரஸின் சீடரான ஹிப்பாசஸ் தான் இதனைக் கண்டுபிடித்தாரெனக் கருதப்படுகிறது.

சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தையும் பக்கத்தையும் போன்று எண்ணல் எண்களின் விகிதத்தைப் பயன்படுத்தி ஒப்பிட்டுப் பார்க்க இயலாத அளவுகளை ஒருமித்து அளக்க இயலாத அளவுகள் (incommensurable magnitudes) எனக் கூறுகிறோம்.

$$\left(1\frac{4}{10}\right)^2 < 2 < \left(1\frac{5}{10}\right)^2$$

நூறில் ஒன்றுகளையும் சேர்த்து எடுத்தால்?

$$1.41^2 = 1.9881$$

$$1.42^2 = 2.0164$$

அப்போது

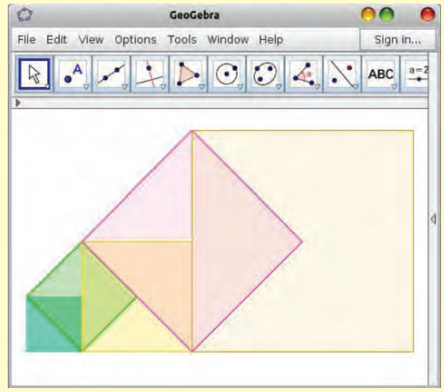
$$1.41^2 < 2 < 1.42^2$$

அதாவது

$$\left(1\frac{41}{100}\right)^2 < 2 < \left(1\frac{42}{100}\right)^2$$

இவ்வாறு தொடர்ந்தால்

$1.4^2 = 1.96$	$1.5^2 = 2.25$
$1.41^2 = 1.9881$	$1.42^2 = 2.0164$
$1.414^2 = 1.999396$	$1.415^2 = 2.002225$
$1.4142^2 = 1.99996164$	$1.4143^2 = 2.00024449$
$1.41421^2 = 1.9999899241$	$1.41422^2 = 2.0000182084$



படத்தில் மிகச்சிறிய சதுரத்தின் பக்க நீளம் 1 செ.மீ ஆகும். மிகப்பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவையும் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தையும் கணக்கிடவும். இவ்வாறான ஒரு படத்தை ஜியோஜிப்ராவில் வரையவும். (Regular polygon கருவியைப் பயன்படுத்தவும்). Area பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு சதுரத்தினுடையவும் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்கவும். இதில் எந்தெந்த சதுரங்களின் பக்கங்களைப் பின்ன எண்களாகக் கூற இயலும்?

இவ்வாறெல்லாம் பார்க்கலாம். அதாவது ஐந்து தசம இடங்கள் வரை (லட்சத்தில் ஒன்றுகள் வரை) எடுத்தால்.

$$1.41421^2 < 2 < 1.41422^2$$

சுருங்கக் கூறின்,

$1\frac{4}{10}$, $1\frac{41}{100}$, $1\frac{414}{1000}$, $1\frac{4142}{10000}$, $1\frac{41421}{100000}$ என்றிவ்வாறு தொடரும் பின்ன எண்களின் வர்க்கங்கள் 2 உடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது.

தசம வடிவங்களைப் பயன்படுத்திக் கூறினால்,

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421 இவ்வாறு தொடரும் பின்ன எண்களின் வர்க்கங்கள் 2 உடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது.

இதை இவ்வாறு சுருக்கி எழுதலாம்.

$$\sqrt{2} = 1.41421...$$

அப்போது $\sqrt{2}$ என்ற எண்ணை ஒரு தசம இடம் மட்டும் எடுத்தால் 1.4, என்றும் இரண்டு தசம இடங்கள்வரை எடுத்தால் 1.41, என்றும் இவ்வாறு கூறிக்கொண்டே போகலாம்.

அடுத்தடுத்து

$$2 - 1.4^2 = 0.04$$

$$2 - 1.41^2 = 0.0119$$

$$2 - 1.414^2 = 0.000604$$

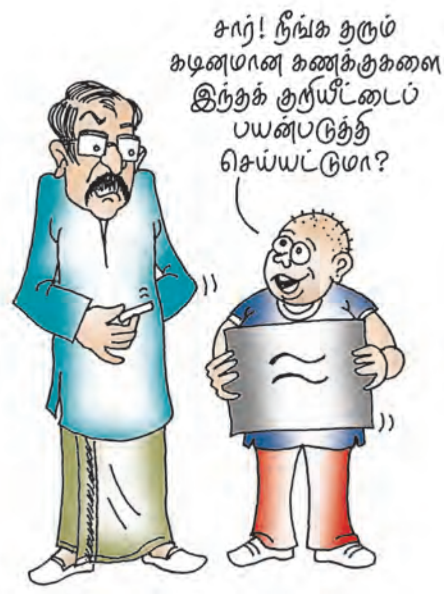
$$2 - 1.4142^2 = 0.00003836$$

$$2 - 1.41421^2 = 0.000100759$$

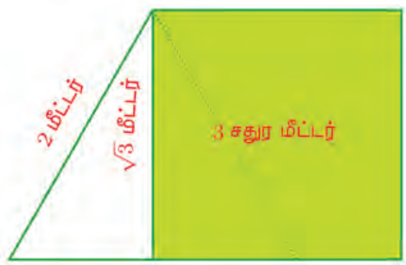
இவற்றை,

$$\sqrt{2} \approx 1.4$$
$$\sqrt{2} \approx 1.41$$

என எழுதலாம். இதில் $\approx$ என்ற அடையாளத்தின் பொருள் தோராயமாகச் சமமானது என்பதாகும்.



இதைப் போன்று, பக்கங்கள் எல்லாம் 2 மீட்டர் ஆன முக்கோணத்தின் உயரத்தைப் பக்கமாக்கி வரையும் சதுரத்தின் பரப்பளவு 3 சதுர மீட்டர் ஆனதால், இந்த உயரத்தை $\sqrt{3}$ என எழுதலாம்.



முன்னர் செய்தது போன்றுள்ள கணக்கீடுகள் மூலம், 1.7, 1.73, 1.732, ... எனத் தொடரும் பின்ன எண்களின் வர்க்கங்கள் 3 உடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது எனவும் காணலாம். இதனைச் சுருக்கி இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$\sqrt{3} = 1.73205...$$

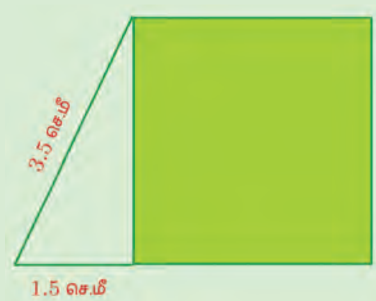
பொதுவாகக் கூறினால்,

x எந்த மிகை எண் ஆனாலும், பரப்பளவு x ஆன சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளம் $\sqrt{x}$.

ஒரு வேளை $\sqrt{x}$ ஓர் எண்ணல் எண்ணோ பின்ன எண்ணோ ஆகலாம். அல்லது வர்க்கம் x உடன் நெருங்கி வரும் தசம வடிவத்தில் உள்ள பின்ன எண்களைக் கணக்கிட்டு, $\sqrt{x}$ - ஐ தசம வடிவத்தில் எழுதலாம்.

(1) எந்த ஒற்றை எண்ணையும் இரு முழுவர்க்கங்களின் வித்தியாசமாக எழுதலாமென எட்டாம் வகுப்பில் பார்த்தோமல்லவா. இதனைப் பயன்படுத்தி, 7 சதுர சென்டிமீட்டர், 11 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுகள் உள்ள சதுரங்கள் வரையவும். அவற்றின் பக்கங்களின் நீளங்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்?

(2) படத்தில் காணும் சதுரத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு? ஒரு பக்கத்தின் நீளம்?



கோடும் வர்க்கமூலமும்

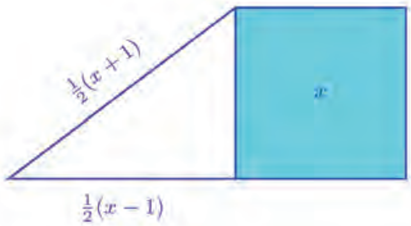
x எந்த எண்ணானாலும்

$$(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$$

ஆகும் அல்லவா (எட்டாம் வகுப்பில் வர்க்கங்களைக் குறித்துள்ள சமன் பாடுகளைக் கண்டோம் அல்லவா) இதை இவ்வாறு மாற்றி எழுதலாம்.

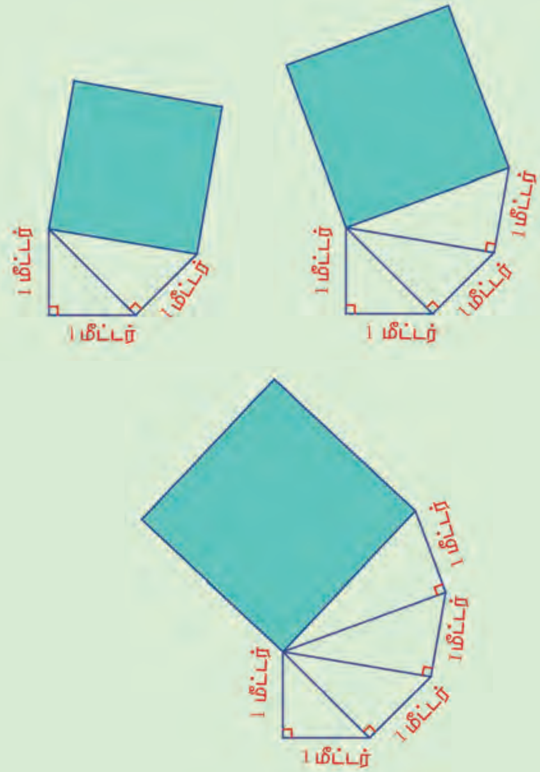
$$x = \left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(x-1)\right)^2$$

இதைப் பயன்படுத்தி பரப்பளவு $x > 1$ ஆன சதுரத்தை வரையலாம்.



$x < 1$ ஆனால் கீழே உள்ள பக்கத்தை $\frac{1}{2}(1-x)$ ஆக எடுக்க வேண்டும்.

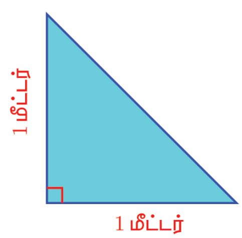
(3) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு படத்திலும் சதுரத்தின் பரப்பளவையும் பக்க நீளத்தையும் கணக்கிடவும்.



(4) $\sqrt{2}$ ஐ விடப் பெரியதும், $\sqrt{3}$ ஐ விடச் சிறியதுமான மூன்று பின்ன எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

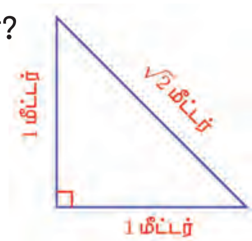
கூட்டலும் கழித்தலும்

செங்குத்துப் பக்கங்களின் நீளம் 1 மீட்டர் ஆன ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?



சுற்றளவு?

இதன் கர்ணத்தின் நீளம் $\sqrt{2}$ மீட்டர் அல்லவா?



அப்போது சுற்றளவு கிடைப்பதற்கு 2 மீட்டரையும் $\sqrt{2}$ மீட்டரையும் கூட்ட வேண்டும். இந்த நீளத்தை $2+\sqrt{2}$ மீட்டர் என எழுத வேண்டும்.

$\sqrt{2}$ என்ற எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்கள் 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142... எனத் தொடரும் அல்லவா,

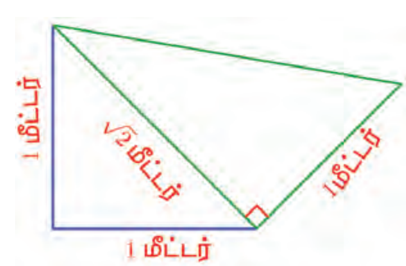
அப்போது $2+\sqrt{2}$ என்ற எண்ணுடன் ஏறக்குறையச் சமமான பின்ன எண்கள் என்பது மேற்கூறிய எண்களுடன் 2 கூட்டியதாகும். அதாவது, 3.4, 3.41, 3.414, 3.4142, ... என்ற பின்ன எண்கள்.

இதை இவ்வாறு எழுதலாம்.

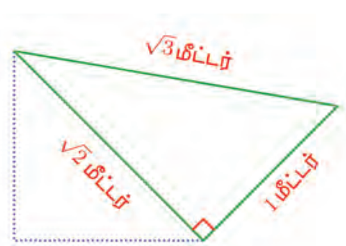
$$2+\sqrt{2} = 3.4142...$$

சென்டிமீட்டர் வரை துல்லியமான அளவு போதும் எனத் தீர்மானித்தால் சுற்றளவு 3.41 மீட்டர் என எடுக்கலாம். இனி மில்லி மீட்டர் வரை துல்லியமாக்க வேண்டுமெனில் 3.414 மீட்டர் என எடுக்க வேண்டும்.

இந்த முக்கோணத்தின் கர்ணத்தை அடிப்பக்கமாகக் கொண்டு படத்தில் காண்பித்துள்ளது போன்று வேறொரு செங்கோண முக்கோணம் உருவாக்கினால்?



இதன் மூன்றாவது பக்கத்தின் நீளம் $\sqrt{3}$ மீட்டர் எனக் கண்டோம் அல்லவா?



தசம வடிவங்கள்

பகுதி 10 - இன் அடுக்குகளான பின்ன எண்கள் முதலில் தசம வடிவத்தில் எழுதப்பட்டுள்ளன,

$$\frac{7}{10} = 0.7, \quad \frac{21}{100} = 0.21$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5, \quad \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0.25$$

தொடர்ந்து அவ்வாறு அல்லாத பின்ன எண்களுக்கு வேறொரு முறையில் தசம வடிவம் உருவாக்கப்பட்டது.

$$\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \ldots$$

என்றிவ்வாறு தொடரும் பின்ன எண்கள் $\frac{1}{3}$ உடன் நெருங்கி நெருங்கி வருவதினால்

$$\frac{1}{3} = 0.333...$$

என எழுதலாம். இதைப்போன்று,

$$\frac{1}{6} = 0.1666...$$

$$\frac{1}{11} = 0.090909...$$

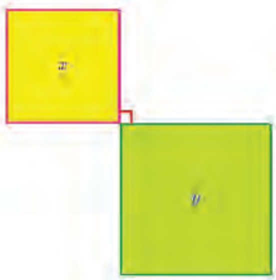
என்றெல்லாம் கணக்கிடலாம்.

$$\sqrt{2} = 1.41421...$$

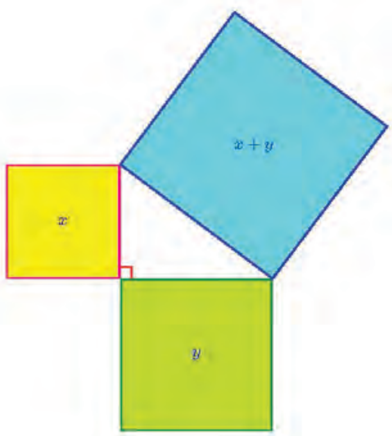
என எழுதுவதும் இது போன்றதாகும். ஆனால் ஒரு வித்தியாசம் உள்ளது $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{11}$ போன்ற பின்ன எண்களின் தசம வடிவங்களில் இலக்கங்கள் மீண்டும் மீண்டும் வருவதைக் காணலாம். ஆனால், $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ போன்ற எண்களின் தசம வடிவங்கள் இது போல் மீண்டும் மீண்டும் வருவதில்லை.

தொகையும் வர்க்கமூலமும்

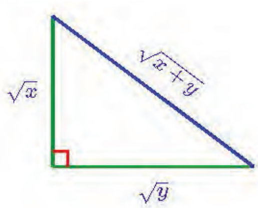
பரப்பளவுகள் x, y ஆன இரண்டு சதுரங்களை இவ்வாறு சேர்த்து வைக்கவும்.



இனி மேலே உள்ள உச்சிகளைச் சேர்த்து வைத்து மேலும் ஒரு சதுரம் வரைவோமா? அதன் பரப்பளவு எவ்வளவு?



நடுவிலுள்ள முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் எவ்வளவு?



இதிலிருந்து என்ன புரிந்துகொள்ளலாம்?

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{x+y}$$

இதன் பரப்பளவு $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ மீட்டர் என எழுதலாம்.

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ என்ற எண்ணுடன் ஏறக்குறையச் சமமான பின்ன எண்கள் கிடைப்பதற்கு இவை ஒவ்வொன்றினோடும் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்களை வரிசையாகக் கூட்ட வேண்டும்.

1.4	1.41	1.414	...	$\rightarrow$	$\sqrt{2}$
1.7	1.73	1.732	...	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$
3.1	3.14	3.146	...	$\rightarrow$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$

இவற்றுடன் 1 கூட்டினால் $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ என்ற எண்ணிற்கு ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்கள் கிடைக்கும்.

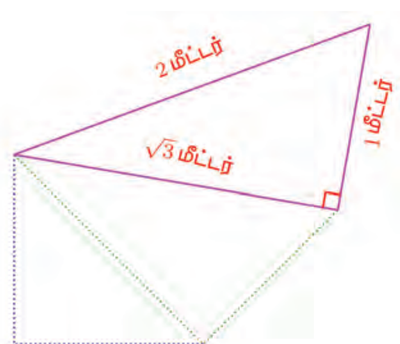
அப்போது புதிய முக்கோணத்தின் சுற்றளவு மில்லிமீட்டர் வரை துல்லியமாக 4.146 மீட்டர் ஆகும்.

இந்த முக்கோணத்தின் சுற்றளவு, முதல் முக்கோணத்தின் சுற்றளவைவிட எவ்வளவு கூடுதலாகும்?

ஏறக்குறைய $4.146 - 3.414 = 0.732$ மீட்டர் எனக் கூறலாம். இல்லை எனில் இவ்வாறு கணக்கிடலாம்:

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})-(2+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{3}-2$$
$$= \sqrt{3}-1 \approx 0.732$$

இனி இந்த முக்கோணத்திற்கு மேலே இதைப்போன்று வேறொரு முக்கோணம் வரைந்தால்? அதன் பக்கங்களின் நீளம் எவ்வளவு?



இதன் சுற்றளவு, இரண்டாவது முக்கோணத்தின் சுற்றளவைவிட எவ்வளவு கூடுதல்?

புதிய முக்கோணத்தின் சுற்றளவு, $2 + 1 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$ மீட்டர். இதற்கு ஏறக்குறையச் சமமான பின்ன எண்களைக் கருத்தில் கொள்ளாமல் சுற்றளவு எவ்வளவு கூடுதல் எனப் பார்ப்போம்.

இரண்டாவது முக்கோணத்தின் சுற்றளவு எவ்வளவு?

அப்போது சுற்றளவின் வித்தியாசம்

$$(3 + \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{2}$$

இதை மூன்று தசம இடங்கள் வரை துல்லியமாக

$$2 - 1.414 = 0.586$$

எனக் கணக்கிடலாம். அதாவது சுற்றளவு ஏறக்குறைய 586 மில்லிமீட்டர், அதாவது 58.6 சென்டிமீட்டர் கூடுதலாகும்.

கழித்தல்

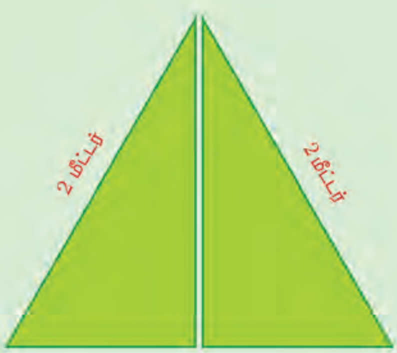
$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ உடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும் பின்ன எண்களைக் கணக்கிட்டதைப் போன்று, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ உடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும் பின்ன எண்களையும் கணக்கிடலாம்.

1.7	1.73	1.732	...	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$
1.4	1.41	1.414	...	$\rightarrow$	$\sqrt{2}$
0.3	0.32	0.318	...	$\rightarrow$	$\sqrt{3} - \sqrt{2}$

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0.318$$

(1) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் $1\frac{1}{2}$ மீட்டரும், மற்றொரு பக்கம் $\frac{1}{2}$ மீட்டரும் ஆகும். அதன் சுற்றளவைச் சென்டிமீட்டர் வரை துல்லியமாகக் கணக்கிடவும்.

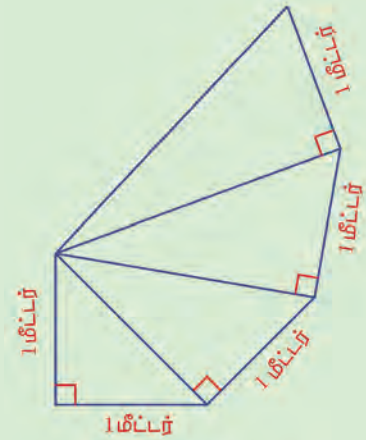
(2) படத்தில் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை ஓர் உச்சி வழியாக வெட்டி இரு சமபாகங்களாகப் பிரித்து காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது.



(i) இவற்றில் ஒன்றின் சுற்றளவு எத்தனை மீட்டர்?

(ii) முழு முக்கோணத்தின் சுற்றளவைவிட எவ்வளவு குறைந்தது?

(3) படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது போன்று தொடர்ச்சியாகச் செங்கோண முக்கோணங்கள் வரையும் முறையை முன்னரே படித்தோம் அல்லவா:



(i) இவ்வாறு வரையப்படும் பத்தாவது முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் எவ்வளவு?

(ii) பத்தாவது முக்கோணத்தின் சுற்றளவு ஒன்பதாவது முக்கோணத்தைவிட எவ்வளவு கூடுதலாகும்?

(4) செங்குத்துப்பக்கங்கள் $\sqrt{2}$ சென்டிமீட்டர், $\sqrt{3}$ சென்டிமீட்டர் ஆன செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் நீளம் என்ன? செங்குத்துப் பக்கங்களின் தொகை கர்ணத்தை விட எவ்வளவு கூடுதலாகும்?

பிற்சேர்க்கை

எந்தப் பின்ன எண்ணினுடையவும் வர்க்கம் 2 அல்ல என நிரூபிப்பது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம்.

அவ்வாறான ஒரு பின்ன எண் இருந்தால், அதன் தொகுதி, பகுதி இவற்றின் சிறப்புத் தன்மைகள் எவை என பார்ப்போம். ஒவ்வொரு பின்ன எண்ணுக்கும் பல வடிவங்கள் இருப்பினும் மிகவும் எளிய ஒரு வடிவம் இருக்கும் அல்லவா – அதாவது தொகுதிக்கும் பகுதிக்கும் பொதுவான காரணிகள் இல்லாத வடிவம். நாம் தேடும் பின்ன எண்ணின் (வர்க்கம் 2 ஆன) இந்த வடிவம் $\frac{x}{y}$ என கருதவும். அப்போது x, y இவை பொதுவான காரணிகள் இல்லாத எண்களாகும்.

இவற்றின் வேறு சிறப்புத் தன்மைகள் யாவை?

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2$$

அதாவது,

$$\frac{x^2}{y^2} = 2$$

இதிலிருந்து

$$x^2 = 2y^2$$

எனக் கிடைக்கும். அப்போது x^2 ஓர் இரட்டை எண்ணாகும் x ஐ பார்ப்போம்.?

எல்லா ஒற்றை எண்களின் வர்க்கங்களும் ஒற்றை எண்களாகும். (இரட்டை எண்களின் வர்க்கங்கள் இரட்டை எண்களும்) அப்போது x^2 இரட்டை எண் ஆனதால் x உம் இரட்டை எண் ஆகும்.

x, y இவற்றிற்குப் பொதுவான காரணிகள் இல்லை; x இரட்டை எண் ஆகும். அதனால் y இரட்டை எண் ஆக வாய்ப்பில்லை (எந்த இரண்டு இரட்டை எண்களுக்கும் 2 ஒரு பொது காரணி அல்லவா) அப்போது y ஒற்றை எண் ஆக வேண்டும்.

அதாவது, நாம் தேடும் பின்ன எண்ணின் தொகுதி இரட்டை எண் பகுதி ஒற்றை எண்.

வேறு ஏதாவது கூற இயலுமா? தேடலைத் தொடர்வோம். x இரட்டை எண் ஆனால், அதை 2 ஆல் வகுத்தாலும் எண்ணல் எண்ணே கிடைக்கும். அதாவது $\frac{x}{2}$ ஓர் எண்ணல் எண்ணாகும் இதை z என எழுதலாம்.

$$\frac{x}{2} = z$$

அதாவது,

$$x = 2z$$

இனி $x^2 = 2y^2$ என முதலில் எழுதியதில் x க்குப் பதிலாக $2z$ ஐ பயன்படுத்தலாம் அல்லவா:

$$(2z)^2 = 2y^2$$

அதாவது,

$$4z^2 = 2y^2$$

இதிலிருந்து

$$y^2 = 2z^2$$

எனக் கிடைக்கும்.

அப்போது y^2 இரட்டை எண் ஆகும். இதிலிருந்து முன்னர் x ஐ கண்டதைப் போல், y உம் இரட்டை எண் எனக் காணலாம் அல்லவா.

அது எவ்வாறு சரியாகும்? y ஒற்றை எண் என்றல்லவா முதலில் பார்த்தோம்.

இங்கு நடந்தது என்ன? மிகவும் எளிய வடிவத்தில் உள்ள ஒரு பின்ன எண்ணின் வர்க்கம் 2 எனில் அதன் பகுதி ஒற்றை எண் என்று முதலில் கண்டோம். மேலும் சிந்தித்தபோது இந்தப் பகுதி இரட்டை எண் எனக் கிடைத்தது. இவை இரண்டிற்கும் ஒரே வேளையில் வாய்ப்பு இல்லை அல்லவா.

இதிலிருந்து எந்த பின்ன எண்ணினுடையவும் வர்க்கம் 2 அல்ல எனப் புரிந்துகொள்ளலாம்.

3

இணைகோடுகள்

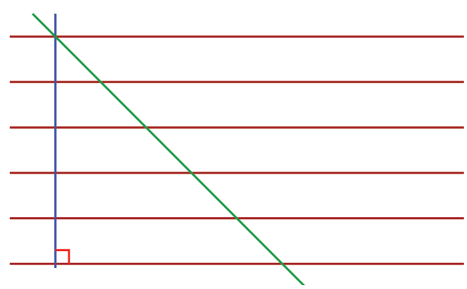
சமபாகம்

இணைகோடுகளைப் பற்றிப் பல கருத்துகளைக் கற்றிருக்கிறோம். அவற்றைப் பயன்படுத்தி, பலவற்றை வரைந்திருக்கிறோம். இணைகோடுகளுக்கு மேலும் பல சிறப்புத் தன்மைகள் உள்ளன.

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும் :

சில இணைகோடுகளும், அவற்றிற்கெல்லாம் செங்குத்தான ஒரு கோடும் இங்கே காணலாம்.

இணைகோடுகள் ஒரே இடைவெளியில் வரையப்பட்டுள்ளன. வேறொரு முறையில் கூறினால் இணைகோடுகள் செங்குத்துக் கோட்டை ஒரே நீளம் உள்ள பாகங்களாக வெட்டுகின்றன.

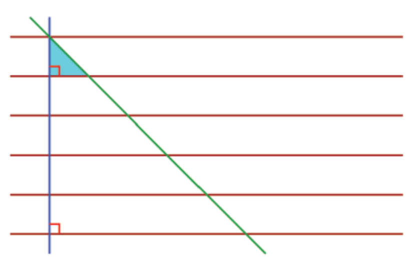


செங்குத்துக்கோட்டிற்குப் பதிலாகச் சற்று சாய்வான கோடு வரைந்தால்?

இந்தக் கோட்டையும் இணைகோடுகள் ஒரே நீளம் உள்ள பாகங்களாக வெட்டுகின்றன எனத் தோன்றுகிறது அல்லவா? அதை எவ்வாறு பரிசோதிக்கலாம்?

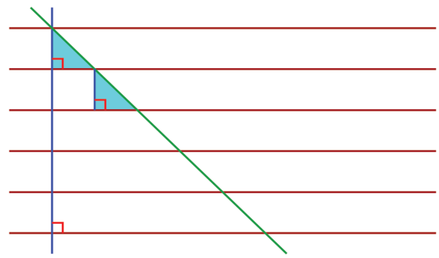
அளந்து பார்ப்போம் ;

அளக்காமல் சிந்தித்துக் கூற முயற்சிப்பதே கணக்கின் தனித்தன்மை. படத்தின் மேல் பாகத்தில் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் காணப்படுகிறதா?



இதன் செங்குத்தான பக்கம் செங்குத்து கோட்டின் ஒரு பாகமாகும். கர்ணம் சாய்வான கோட்டின் ஒரு பாகமும் ஆகும்.

ஒரு சிறிய செங்குத்து கோடு வரைந்தால், இதைப் போன்றொரு முக்கோணம் அதற்குக் கீழேயும் கிடைக்கும்.

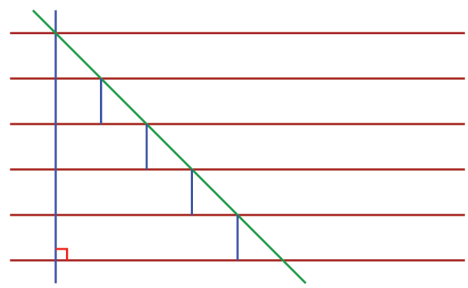


இந்த இரண்டு முக்கோணங்களுடையவும் செங்குத்துப் (நீலம்) பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளமாகும், (ஏன்?) மட்டுமல்ல இந்தச் செங்குத்துகோடுகள் இணையானதால், பச்சைக் கோடு இவற்றுடன் ஒரே சாய்விலும் ஆகும்.

அதாவது இந்த இரண்டு முக்கோணங்களிலும் செங்குத்துப் பக்கங்களும் அவற்றின் இருபக்கங்களிலும் உள்ள கோணங்களும் சமம் ஆகும்.

அப்போது அவற்றின் கர்ணங்களுக்கும் ஒரே நீளம் அல்லவா. அப்போது, சாய்வான கோட்டின் மேலே உள்ள இரண்டு பாகங்களுக்கும் ஒரே நீளமாகும்.

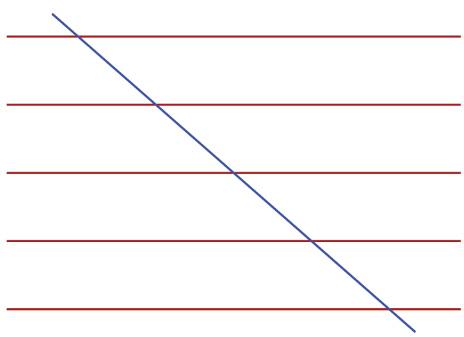
இதைப் போன்று ஏனைய பாகங்களுக்கும் ஒரே நீளமெனக் காணலாம் அல்லவா:



இதை ஒரு பொதுக் கருத்தாகக் கூறலாம்:

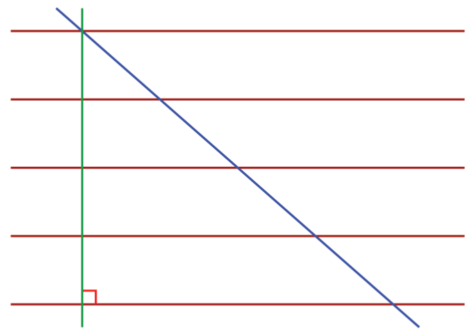
ஒரே தூரத்தில் உள்ள இணைகோடுகள் எந்தக் கோட்டையும் சம நீளமுள்ள பாகங்களாக வெட்டுகிறது.

மாறாகக் கூறினால்? அதாவது சில இணைகோடுகள் ஒரு கோட்டை சம நீளமுள்ள பாகங்களாக வெட்டுகிறது எனக் கருதவும். அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தூரத்தைச் சம தூரம் எனக் கூற இயலுமா?

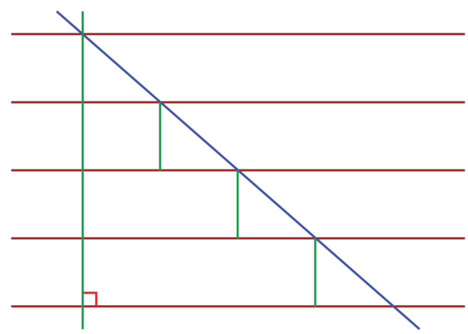


படத்தில் இணைகோடுகள் சாய்வான நீளக் கோட்டைச் சம நீளமுள்ள பாகங்களாக வெட்டுகின்றன.

இணைகோடுகள் சம தூரத்திலா என்பதே வினா அதாவது, கீழே உள்ள படத்தில் பச்சை நிறத்திலான செங்குத்து கோட்டையும் இணைகோடுகள் சம பாகங்களாக வெட்டுகிறதா எனப் பார்ப்போம்.



முதலில் செய்ததைப் போன்று சிறிய செங்குத்துகோடுகள் வரையலாம்.

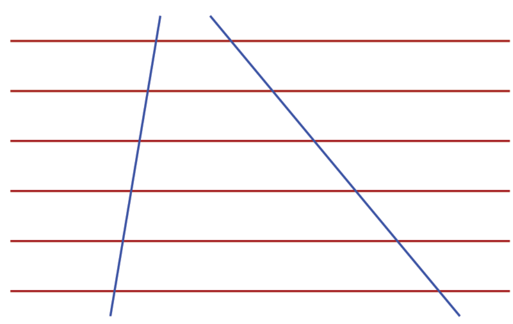


முன்னர் கண்டதைப் போல் இவ்வாறு கிடைக்கும், சிறிய முக்கோணங்களுக்கெல்லாம் ஒரே கோணங்கள் ஆகும். இங்கு அவற்றின் கர்ணங்களுக்கும் ஒரே நீளம் ஆகும். அதனால் அவற்றின் செங்குத்துப் பக்கங்களுக்கும் ஒரே நீளம் ஆகும்.

அதாவது, முதல் இணைகோடுகள் ஒரே தூரத்தில் ஆகும்.

இதை ஒரு பொதுக்கருத்தாகக் கூறலாம்:

ஏதாவது ஒரு கோட்டைச் சம நீளமுள்ள பாகங்களாக வெட்டும் இணைகோடுகள் ஒரே தூரத்தில் ஆகும்.



இந்த இரண்டு கருத்துகளையும் பயன்படுத்தி வேறொரு செயலைக் காணலாம். ஒரு கூட்டம் இணைகோடுகள் ஏதாவது கோட்டைச் சம நீளமுள்ள பாகங்களாக வெட்டுகிறது எனக் கருதவும். இப்போது கண்ட கருத்தின் அடிப்படையில், அவை

ஒரே தூரத்தில் உள்ளன. அப்போது முதலில் கண்ட கருத்தின் அடிப்படையில் அவை வேறு எந்தக் கோட்டையும் வெட்டுவது சம நீளமுள்ள பாகங்களாக ஆகும்.

அதாவது,

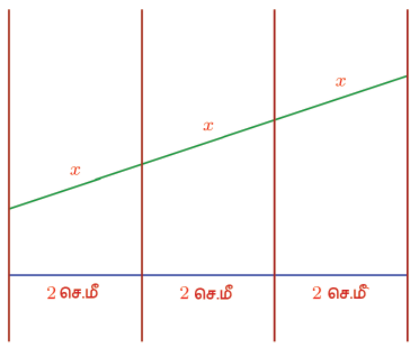
ஒரு கோட்டைச் சம நீளமுள்ள பாகங்களாக வெட்டும் இணைகோடுகள், வேறு எந்தக் கோட்டையும் சம நீளமுள்ள பாகங்களாகவே வெட்டும்.

இதைப் பயன்படுத்தி எந்தக் கோட்டையும் தேவையான சமபாகங்களாக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, 7 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோட்டை மூன்று சமபாகங்களாக்குவது எவ்வாறு எனப் பார்க்கலாம்.

6 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோட்டில் இது எளிதாகும்.

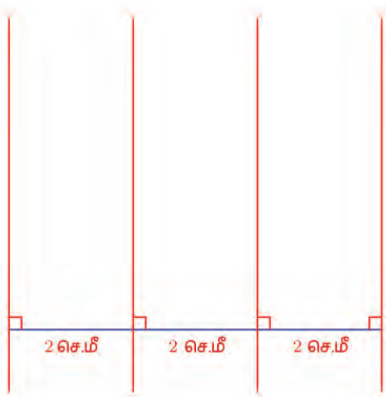
6 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோட்டை மூன்று சமபாகங்களாக்கும் நான்கு இணைகோடுகள் எந்தக் கோட்டையும் மூன்று சமபாகங்களாக்கும் அல்லவா:

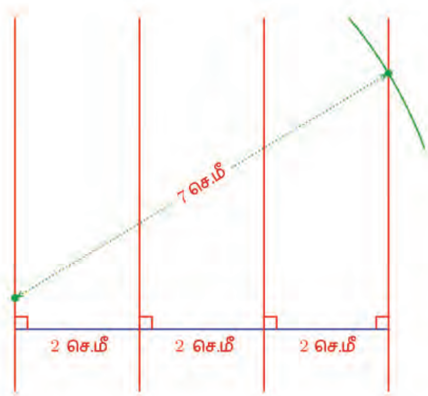


இரண்டாவது கோட்டின் நீளம் 7 சென்டிமீட்டர் ஆனால்?

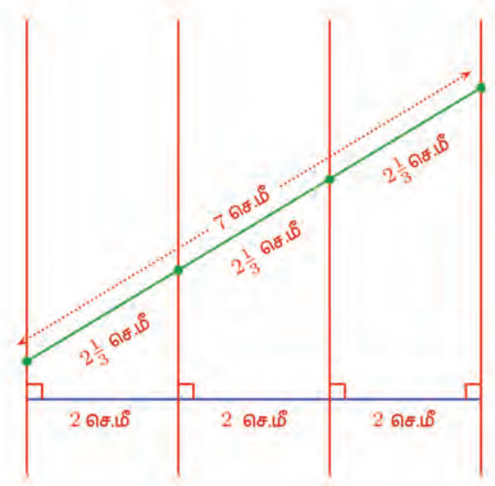
அப்போது நமது பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண்பதற்கான வழிமுறை கிடைத்தது அல்லவா?

6 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் ஒரு கோடு வரைந்து அதில் 2 சென்டிமீட்டர் இடைவெளி விட்டு செங்குத்துக் கோடுகள் வரையவும். முதலாவது செங்குத்துக் கோட்டில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து 7 சென்டிமீட்டர் ஆரம் உள்ள வட்டப்பகுதி வரைந்து இதில் கடைசி செங்குத்துக்கோட்டை வெட்டும் புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும்.

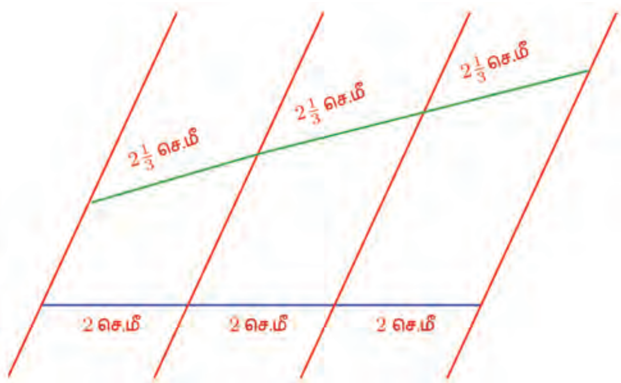




இந்த இரு புள்ளிகளையும் இணைத்தால் 7 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள கோடும் அதன் மூன்று சமபாகங்களும் கிடைக்கும்.



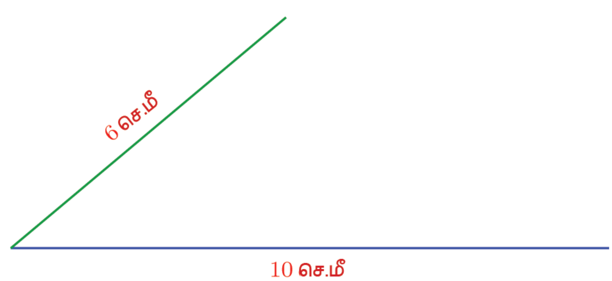
இதில் கீழே உள்ள கோட்டிலிருந்து செங்குத்துக்கோடுகள் வரைய வேண்டுமென்பதில்லை. சாய்வாகவும் வரையலாம் – இணையாக மட்டும் இருக்க வேண்டும்.



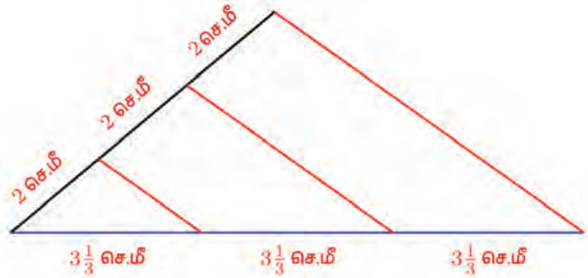
வேறொரு வினா :

10 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் ஒரு கோடு வரைந்து அதை மூன்று சமபாகங்களாக்கவும்.

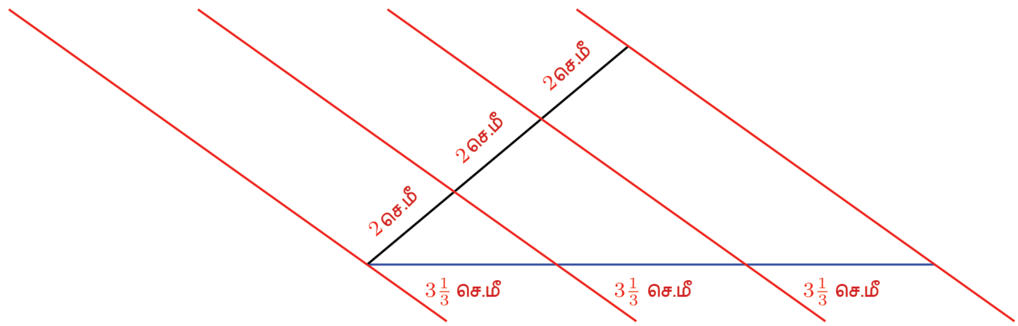
வெட்ட வேண்டிய கோட்டைச் சாய்வாக வரையாமல். கிடைமட்டமாக வரைந்து தொடங்குவதே சிறந்தது. இனி வெட்டுவதற்குப் பயன்படுத்தும் கோட்டை ஒரு முனையிலிருந்து சாய்வாக வரையலாம்.



கோடுகளின் முனைகளை இணைத்து ஒரு கோடு வரையவும். இனிக் கீழே உள்ள கோட்டினை மூன்று சமபாகங்கள் ஆக்குவதற்கு, மேலே உள்ள கோட்டினை மூன்று சமபாகங்களாக்கி அப்புள்ளிகள் வழியாக இணைகோடுகள் வரைந்தால் போதுமே?

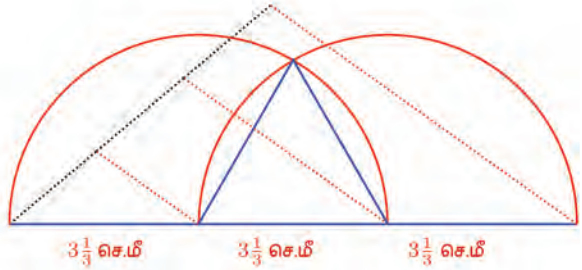


இது புரியவில்லை எனில், இணைகோடுகளைச் சற்று நீட்டியும் நான்காவதாக ஓர் இணை கோட்டை வரைந்தும் பார்க்கவும்:



அவ்வாறு 10 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோட்டை மூன்று சமபாகங்களாக்கினோம்.

இந்த பாகங்களைச் சேர்த்து வைத்து ஒரு முக்கோணம் உருவாக்கினால்?



பக்கங்கள் எல்லாம் ஒரே நீளமானதால் இது ஒரு சமபக்க முக்கோணம் ஆகும். அவற்றை எல்லாம் கூட்டினால் 10 சென்டிமீட்டர். அதாவது, முக்கோணத்தின் சுற்றளவு 10 சென்டிமீட்டர் ஆகும்.

10 சென்டிமீட்டர் கோட்டை மூன்று சமபாகங்களாக்குவதற்குப் பதிலாக நான்கு சமபாகங்களாக்க, இதைப் போன்று எவ்வளவு நீளமுள்ள கோட்டைச் சாய்வாக வரைந்தால் வசதியாக இருக்கும்?

அவ்வாறு பாகங்களாக்கினால், 10 சென்டிமீட்டர் சுற்றளவுள்ள சதுரமும் வரையலாம் அல்லவா.

முயற்சி செய்து பார்க்கவும்.

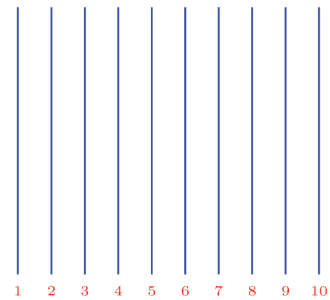
(1) 11 சென்டிமீட்டர் சுற்றளவுள்ள சமபக்க முக்கோணம் வரையவும்.

(2) 15 சென்டி மீட்டர் சுற்றளவுள்ள சதுரம் வரையவும்.

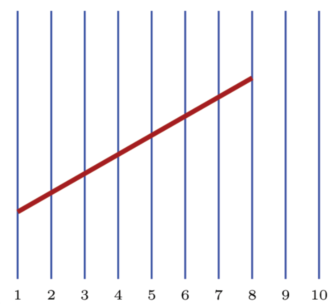
(3) 20 சென்டிமீட்டர் சுற்றளவுள்ள சமபக்க அறுகோணம் வரையவும்.

இணையான சமபாகம்

ஒரு காகிதத்தில் இணைகோடுகளைச் சம இடைவெளியில் வரையவும்.



இனி ஒரு கம்பியை 7 சமபாகங்களாக வெட்ட வேண்டுமெனில், இதில் 8 கோடுகளுக் கிடையில் சரியாக வைத்தால் போதும்.

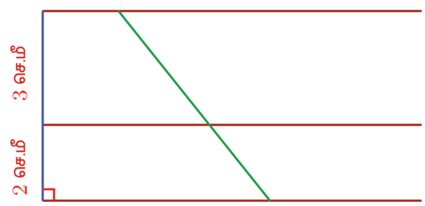


சமமற்ற பாகங்கள்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.

வேறுபட்ட இடைவெளிகளில் மூன்று இணைகோடுகள்.

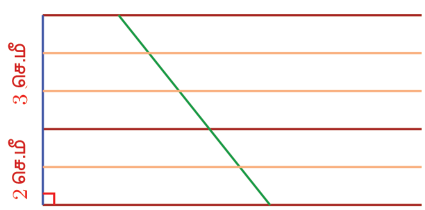
முன்னர் செய்தது போன்று ஒரு சாய்வான கோட்டை வரைந்தால்?



பச்சை கோட்டின் பாகங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டரும் 3 சென்டிமீட்டரும் இல்லை என்று ஒரே பார்வையில் கூறலாம் அல்லவா.

இந்தநீளங்களுக்கு 2 மற்றும் 3 உடன் ஏதாவது தொடர்பு உள்ளனவா?

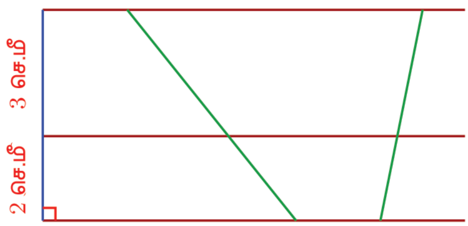
மேலும் மூன்று கோடுகளை இணையாக வரைந்து, ஒரே இடைவெளியில் உள்ள ஆறு கோடுகளாக்கினால்?

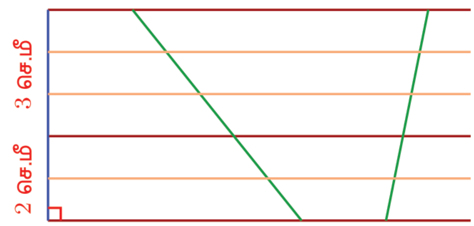


இப்போது சாய்வான கோடு ஐந்து சமபாகங்களானது. இங்கு கீழே உள்ள இரண்டு பாகங்கள் சேர்ந்தது முதலில் கண்ட இரு பாகங்களில் சிறிய பாகம். மேலே உள்ள மூன்று பாகங்கள் சேர்ந்தது, பெரிய பாகம்.

வேறொரு முறையில் கூறினால் சாய்வான கோட்டின் சிறிய பாகமும் பெரிய பாகமும் $2 : 3$ என்ற விகிதத்தில் ஆகும்.

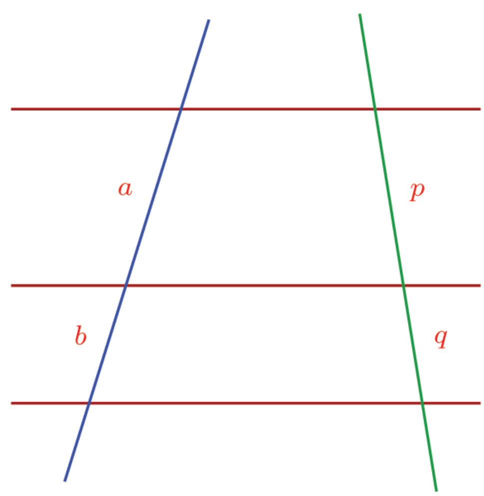
கோட்டைச் சற்று மாற்றி வரைந்து பார்ப்போம்?





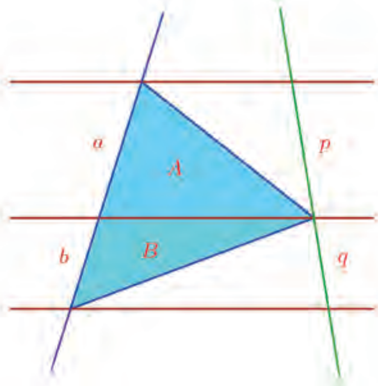
பாகங்களின் நீளங்கள் வேறுபடும் எனினும் சமபாகங்கள் இரண்டு சேர்ந்தது சிறிய பாகமும் மூன்று சேர்ந்தது பெரிய பாகமும் ஆகும் அல்லவா, அதாவது விகிதம் $2 : 3$ ஆகும்.

இதைப் போன்று, ஏதேனும் மூன்று இணைகோடுகள் மற்ற எல்லாக் கோடுகளையும் சம விகிதத்தில் பிரிக்குமா?



கிடைமட்டமாக மூன்று இணைகோடுகள், அவற்றை வெட்டிச் செல்லும் இரு சாய்வான கோடுகள் இடது கோட்டினை இணைகோடுகள் வெட்டும்போது கிடைக்கும் துண்டுகளின் நீளம் a, b எனவும் வலது கோட்டினை இணைகோடுகள் வெட்டும்போது கிடைக்கும் துண்டுகளின் நீளம் p, q எனவும் எடுத்தால் $a : b$ என்ற விகிதமும் $p : q$ என்ற விகிதமும் சமமா என்பதைப் பரிசோதிக்க வேண்டும். அதாவது, $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ ஆகுமா என்பதே கேள்வி.

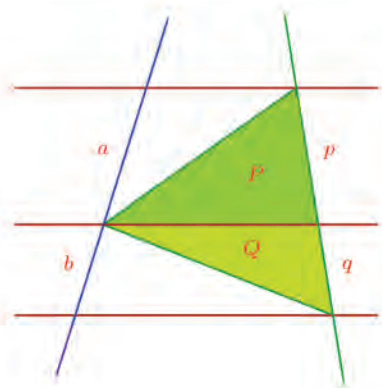
அதைத் தெரிந்துகொள்ள முதலில் நீளங்களின் விகிதத்தைப் பரப்பளவுகளின் விகிதமாக மாற்ற வேண்டும்.



இப்போது கீழேயும் மேலேயும் உள்ள நீல முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் $a : b$ ஆகும் எனக் கண்டோம் அல்லவா. அதாவது இந்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் A, B என எடுத்தால்,

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$$

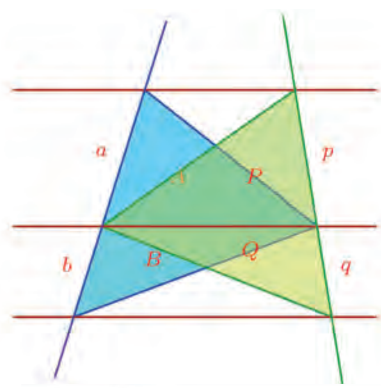
இதைப் போன்று p, q என்ற நீளங்களின் விகிதத்தையும் பரப்பளவுகளின் விகிதமாக்கலாம்:



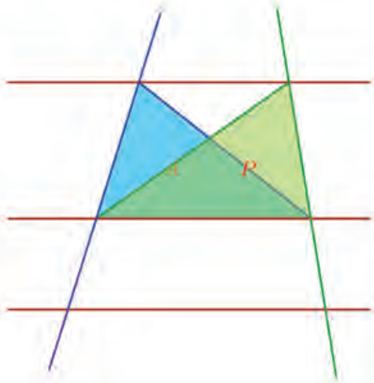
படத்தில் காண்பதைப் போன்று பச்சை முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளை P, Q என எடுத்தால்,

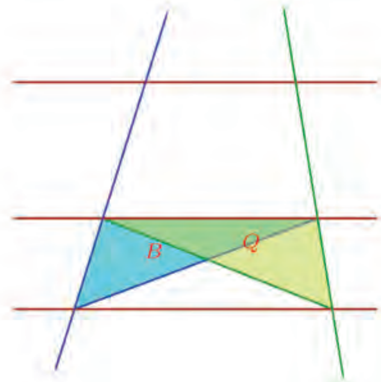
$$\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$$

இனி எல்லா முக்கோணங்களையும் ஒன்றாக வைத்துப் பார்க்கலாம்.:



கீழேயும் மேலேயும் ஒவ்வொரு நீல முக்கோணமும் பச்சை முக்கோணமும் உள்ளன. அவற்றை வெவ்வேறு ஜோடிகளாகப் பார்ப்போம்:





மேலே காட்டப்பட்டுள்ள முக்கோணங்கள் இரண்டிலும் அடிப்பக்கம் ஒரே கோடாகும். அவற்றின் மூன்றாம் உச்சிகள் இந்தப் பக்கத்திற்கு இணையான ஒரு கோட்டிலும் ஆகும். அதனால் அவற்றிற்கு ஒரே பரப்பளவாகும்.

$$A = P$$

நீலம் மற்றும் பச்சை முக்கோணங்களின் அளவுகளும் இதுவேதான்.

$$B = Q$$

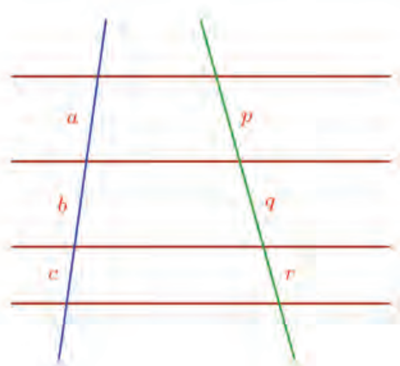
$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ எனவும், $\frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$ எனவும் முன்னரே கண்டோம் அல்லவா. இப்போது இதில் $A = P$ உம் $B = Q$ உம் எனக் கிடைத்தது, அதன்படி

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

அதாவது, இந்த மூன்று இணைகோடுகள் இடது, வலது கோடுகளை வெட்டுவது சம விகிதத்தில் ஆகும்.

கோடுகள் மூன்றிற்குக் கூடுதலானால்?

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



இதில் மிகக் கீழேயுள்ள இணைகோட்டை விட்டுவிட்டு ஏனைய மூன்றை மட்டும் பார்த்தால் இப்போது கண்டதுபோல் $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$ எனக் கிடைக்கும்.

மேலேயுள்ள கோட்டை விட்டுவிட்டு ஏனைய மூன்றை மட்டும் பார்த்தால், $\frac{b}{c}=\frac{q}{r}$ எனக் கிடைக்கும்.

$\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$ எனவும், $\frac{b}{c}=\frac{q}{r}$ எனவும் கிடைத்ததில் இருந்து, $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{p}{q}\times\frac{q}{r}$ எனக் கிடைக்கும் அல்லவா. அதாவது $\frac{a}{c}=\frac{p}{r}$. அப்போது a, b, c என்ற மூன்று நீளங்களில் ஒன்று மற்றதின் எத்தனை பாகமோ மடங்கோ ஆனாலும், p, q, r என்ற நீளங்களிலும் அதே பாகமோ மடங்கோ தான் இருக்கும்.

அப்போது a, b, c என்ற நீளங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதமும் $p. q, r$ என்ற நீளங்களுக்கு இடையேயுள்ள விகிதமும் ஒரே போல் ஆகும்.

இணைகோடுகள் எத்தனை ஆனாலும், இதைப் போன்று தொடரலாம் அல்லவா.

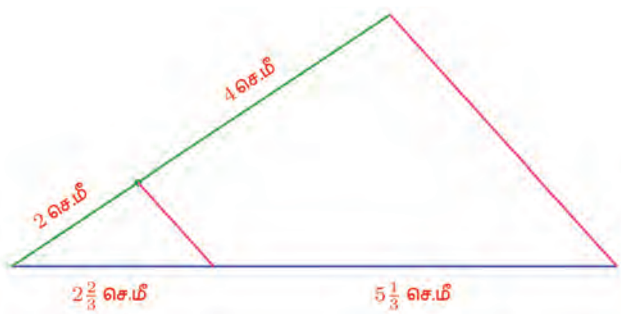
மூன்றோ அதற்குக் கூடுதலோ இணைகோடுகள் எந்த இரு கோடுகளையும் வெட்டுவது சம விகிதத்தில் ஆகும்.

இதைப் பயன்படுத்தி ஒரு கோட்டை எந்த விகிதத்திலும் பிரிக்கலாம் அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக, 8 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோட்டை $1:2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பது எவ்வாறு?

6 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோட்டை இவ்வாறு பிரிப்பது எளிது அல்லவா?

அப்போது, இதற்குமுன் ஒரு கோட்டைச் சமபாகம் செய்ததைப் போல் முதலில் இவ்வாறு வரையவும்.

இனிக் கோடுகளின் ஏனைய முனைகளை இணைத்த கோட்டையும் பச்சை கோட்டைப் பிரிக்கும் புள்ளி வழியாக இணைகோடும் வரைந்தால் போதுமல்லவா:



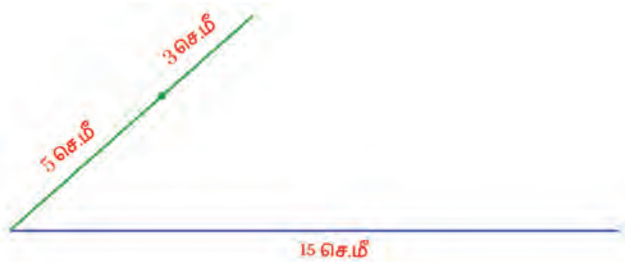
வேறொரு கணக்கு:

சுற்றளவு 30 சென்டிமீட்டரும் பக்கங்களின் விகிதம் 5 : 3 உம் ஆன செவ்வகம் வரையவும்:

சுற்றளவு 30 சென்டிமீட்டர் ஆனதால், நீளத்தையும் அகலத்தையும் கூட்டினால் 15 சென்டிமீட்டர் கிடைக்கும்.

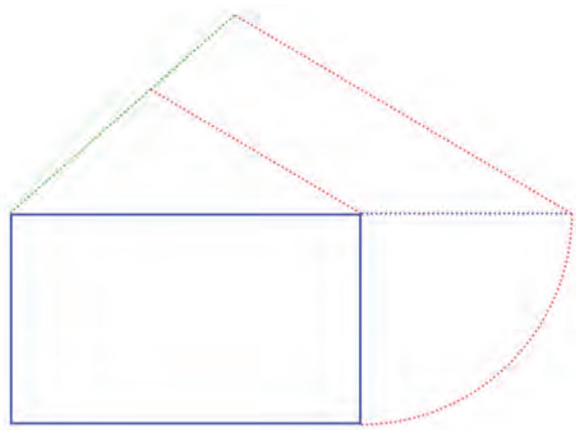
அப்போது 15 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோட்டை 5 : 3 என்ற விகிதத்தில் பிரித்துக்கிடைக்கும் துண்டுகளே அதன் நீளமும் அகலமும் ஆகும்.

இந்தப் பாகங்கள் கிடைக்க இவ்வாறு தொடங்கலாம்:



கோடுகளின் முனைகளை இணைத்த கோடும் இணைகோடும் வரையலாம்:

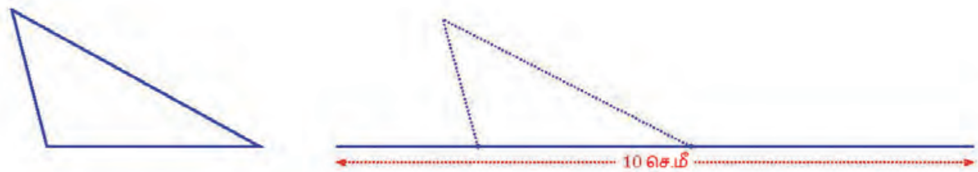
அடிப்பக்க கோட்டின் பாகங்கள் நீளமும் அகலமும் ஆன செவ்வகம்தான் நமக்குத் தேவை.



வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம் :

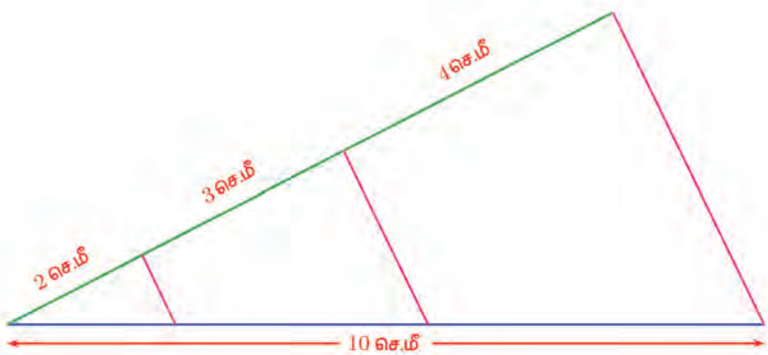
சுற்றளவு 10 சென்டிமீட்டரும் பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் 2 : 3 : 4 உம் ஆன முக்கோணம் வரைய வேண்டும்.

முக்கோணத்தின் பக்கங்களை எல்லாம் நீட்டி வைத்தால் கிடைக்கும் ஒரு கோட்டின் நீளம் 10 சென்டிமீட்டர்:

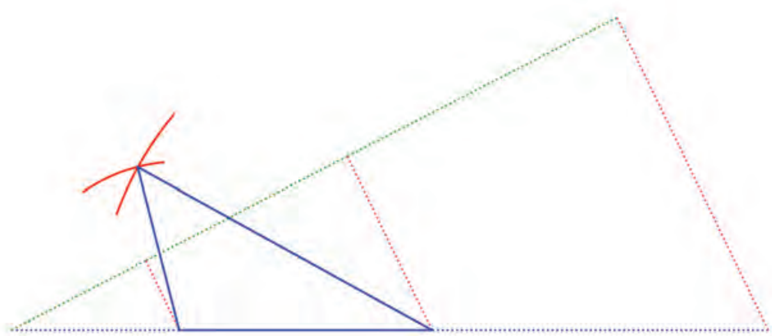


அப்போது முக்கோணம் வரைய முதலில் 10 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் ஒரு கோடு வரைந்து, 2 : 3 : 4 என்ற விகிதத்தில் பிரித்து, இரண்டு பக்கங்களிலும் உள்ள பாகங்களை மடக்கி வைத்தால் போதும் அல்லவா?

இந்த விகிதத்தில் எளிதாகப் பிரிக்க எவ்வளவு நீளமுள்ள கோடு வேண்டும்?



இனி முக்கோணம் வரையலாம் அல்லவா.



(1) சுற்றளவு 15 சென்டிமீட்டரும் அகலமும் நீளமும் 3 : 4 என்ற விகிதத்திலும் உள்ள செவ்வகம் வரைக.

(2) கீழே கூறப்படும் ஒவ்வொரு வகையான முக்கோணம், சுற்றளவு 13 சென்டிமீட்டர் அளவில் வரைக.

(i) சமபக்க முக்கோணம்

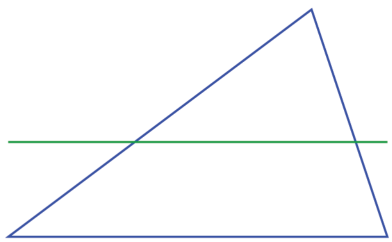
(ii) பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் 3 : 4 : 5

(iii) சமபக்கங்கள் அடிப்பக்கத்தின் ஒன்றரை மடங்கான இரு சமபக்க முக்கோணம்.

(3) எந்தச் சரிவகத்தினுடையவும் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று வெட்டிக்கொள்வது ஒரே விகிதத்தில் ஆகும் எனத் தெளிவுபடுத்தவும்.

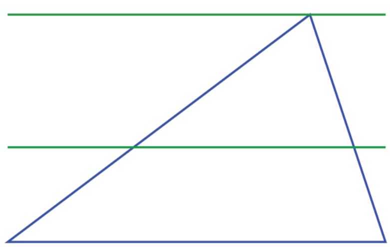
முக்கோணப் பாகம்

ஒரு முக்கோணம் வரைந்து அதன் உள்பகுதியில் ஒரு பக்கத்துக்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைக.



இக்கோடு முக்கோணத்தின் பிற இரு பக்கங்களையும் வெட்டும் பாகங்களுக்கு இடையில் ஏதேனும் தொடர்பு உண்டா?

முக்கோணத்தின் மேல் உச்சி வழியாக ஒரு கோட்டை அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாக வரைந்தால்?

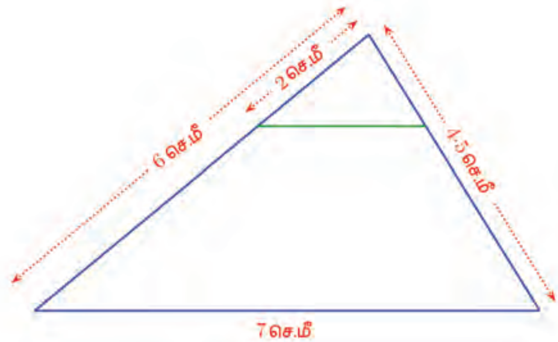


இப்போது மூன்று இணைகோடுகள், முக்கோணத்தின் இடதும் வலதும் பக்கங்களை வெட்டுகின்றன. வெட்டிக் கிடைக்கும் பாகங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் ஒரே போன்று உள்ளது அல்லவா.

இங்குப் பார்த்தது என்ன?

எந்த முக்கோணத்திலும் ஒரு பக்கத்துக்கு இணையாக வரையும் கோடு பிற இரு பக்கங்களையும் சம விகிதத்தில் வெட்டும்.

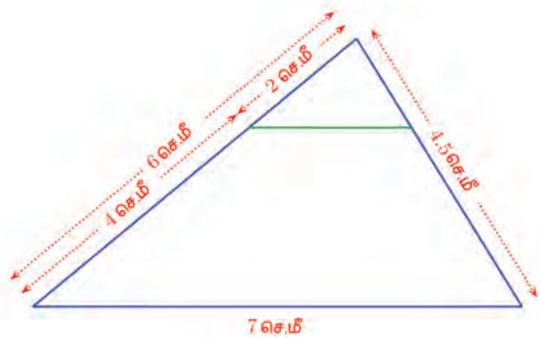
இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்:



படத்தில் நீல முக்கோணத்தின் உள்ளே இருக்கும் பச்சை கோடு, அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாகும்.

இந்தக் கோடு வெட்டும் முக்கோணத்தின் வலது பாகங்களின் நீளத்தைக் கணக்கிடவும். இரண்டு பக்கங்களையும் வெட்டுவது சம விகிதத்தில் அல்லவா?

இடது பக்கத்தை வெட்டுவது, எந்த விகிதத்தில்?



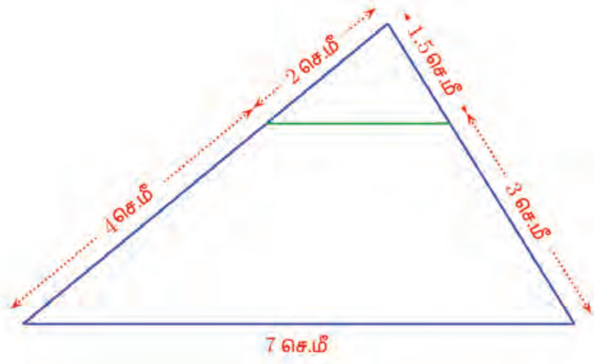
இடது பக்கத்தின் பெரிய பாகம் சிறிய பாகத்தின் இரண்டு மடங்கு; அதாவது, இந்தப் பாகங்களின் விகிதம் 1 : 2

அப்போது வலது பக்கத்தை வெட்டுவதும் 1 : 2 என்ற விகிதத்தில் ஆக வேண்டும் அல்லவா.

Min = 0, Max = 1, Increment = 0.01 ஆகுமாறு ஒரு சிலைடர் 'a' உருவாக்கவும். ஒரு முக்கோணம் ABC வரையவும். Enlarge from Point (Dilate from point) கருவி பயன்படுத்தி C யிலும் தொடர்ந்து A யிலும் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் Scale Factor ஆக a எனக் கொடுக்கவும். AC என்ற கோட்டில் C' என்ற ஒரு புள்ளி கிடைக்கும். AC' இன் நீளம் AC இன் நீளத்தில் 'a' பாகமாக இருக்கும். (a = 0.5 ஆனால். C', AC ன் மையப்புள்ளி ஆகும். a = 0.1 ஆனால் AC', C'C இவற்றின் நீளம் 1:9 என்ற விகிதத்தில் ஆகும். AC', C'C இவற்றின் நீளம் அடையாளப்படுத்தி ஆராய்ந்து பார்க்கவும்) C' என்ற புள்ளி வழியாக AB க்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைந்து இந்தக் கோடு BC ஐ வெட்டும் புள்ளியை D என அடையாளப்படுத்தவும். BD, DC அடையாளப்படுத்தவும். AC' : C'C, BD : DC என்ற விகிதங்களை ஒப்பிடவும்.

$$\text{சிறிய பாகத்தின் நீளம்} = 4.5 \times \frac{1}{3} = 1.5 \text{ சென்டிமீட்டர்}$$

$$\text{பெரிய பாகத்தின் நீளம்} = 4.5 \times \frac{2}{3} = 3 \text{ சென்டிமீட்டர்}$$



இங்கு ஒரு விஷயத்தைக் கவனித்தீர்களா? எல்லாப் பக்கத்திலும் சிறிய பாகம், பக்கத்தின் $\frac{1}{3}$ பாகமும். பெரிய பாகம் அப்பக்கத்தின் $\frac{2}{3}$ பாகமும் ஆகும்.

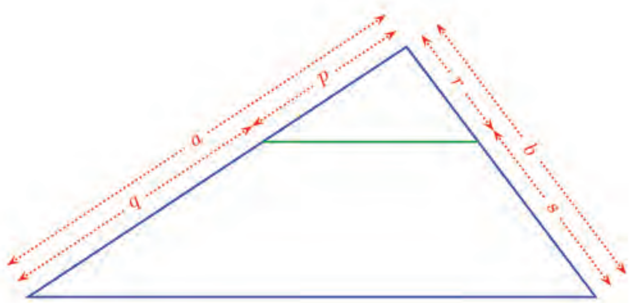
இரண்டு பக்கங்களை வெட்டுவது $3 : 5$ என்ற விகிதத்தில் ஆனால்?

இரண்டு பக்கங்களிலும் சிறிய துண்டு, பக்கத்தின் $\frac{3}{8}$ பாகமும். பெரிய துண்டு பக்கத்தின் $\frac{5}{8}$ பாகமும் ஆகும்.

அப்போது முன்னர் கூறிய கருத்தை இவ்வாறும் கூறலாம்:

எந்த முக்கோணத்திலும் ஒரு பக்கத்துக்கு இணையாக வரையும் கோடு பிற இரு பக்கங்களையும் வெட்டுவது அவற்றின் ஒரே பாகங்களாகவே ஆகும்.

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



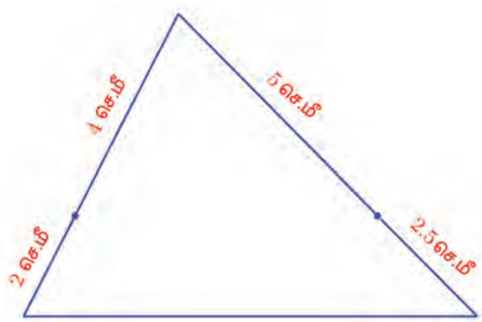
முக்கோணத்தின் உள்ளே இருக்கும் பச்சைக் கோடு அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாகும். பக்கங்களையும் அவற்றின் பாகங்களின் நீளங்களையும் படத்தில் காண்பதைப் போன்று எழுத்துக்களால் குறிப்பிட்டால் இப்போது கண்ட கருத்தின்படி,

$$\frac{p}{a} = \frac{r}{b} \qquad \frac{q}{a} = \frac{s}{b}$$

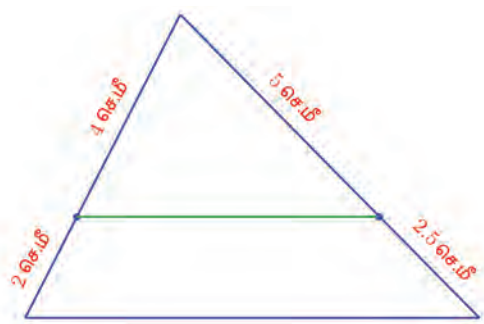
முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாக வரையும் கோடு பிற இரண்டு பக்கங்களையும் ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனக் கண்டோம் அல்லவா. அப்போது ஒரு வினா. இதை மாறாகக் கூறினால் சரியாகுமா?

அதாவது முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களை ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கும் கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாகும் எனக் கூறலாமா?

எடுத்துக்காட்டாகக் கீழே காண்பிக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் முக்கோணத்தின் இடது, வலது பக்கங்களை $1 : 2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகள் இடப்பட்டுள்ளன.

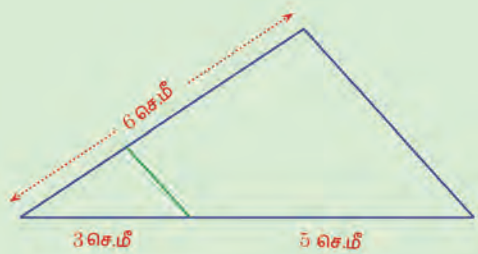


இடது பக்கத்தில் உள்ள புள்ளி வழியாக அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாக வரையும் கோடு வலது பக்கத்தையும் $1 : 2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்க வேண்டும் அல்லவா. அப்போது அந்தக் கோடு வலது பக்கப் புள்ளி வழியாகக் கடந்துசெல்ல வேண்டும். அதாவது அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாக வரையும் கோடு இந்தப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடாகும். எனவே இந்தப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாகும்.



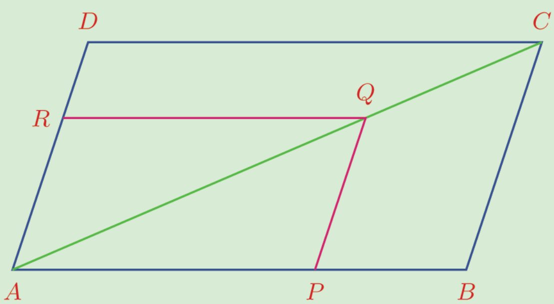
எந்த முக்கோணத்திலும் இரண்டு பக்கங்களை ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கும் கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாகும்.

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள படத்தில் பச்சைக்கோடு நீல முக்கோணத்தின் வலது பக்கத்திற்கு இணையாகும்.



இந்தக் கோடு முக்கோணத்தின் இடது பக்கத்தை வெட்டும் பாகங்களின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.

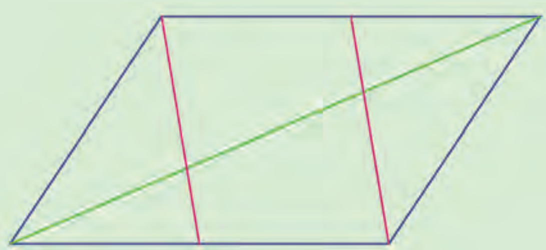
(2) $ABCD$ என்ற இணைகரத்தில் AB இல் உள்ள புள்ளி P வழியாக BC க்கு இணையாக வரையும் கோடு, AC ஐ Q வில் வெட்டுகிறது. Q வழியாக AB க்கு இணையாக வரையும் கோடு, AD ஐ R இல் வெட்டுகிறது.



(i) $\frac{AP}{PB} = \frac{AR}{RD}$ என நிறுவுக.

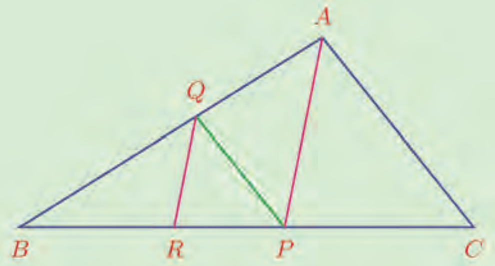
(ii) $\frac{AP}{AB} = \frac{AR}{AD}$ என நிறுவுக.

(3) கீழ்க்காணும் படத்தில் ஓர் இணைகரத்தின் இரு உச்சிகள் இரு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளோடு இணைக்கப்பட்டுள்ளன.



இக்கோடுகள் படத்தில் உள்ள மூலைவிட்டத்தை மூன்று சமபாகங்களாக்குகின்றன என்பதை நிறுவுக.

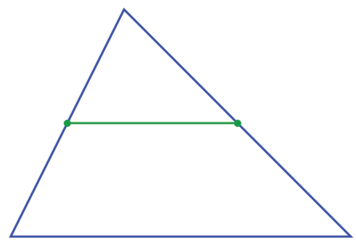
(4) ABC என்ற முக்கோணத்தில், BC இல் P என்ற புள்ளி வழியாக AC க்கு இணையாக வரையும் கோடு, AB ஐ Q வில் சந்திக்கிறது. Q வில் இருந்து AP க்கு இணையாக வரையும் கோடு, BC ஐ R இல் சந்திக்கிறது.



$\frac{BP}{PC} = \frac{BR}{RP}$ என நிறுவுக.

நடுப்பாகம்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.:



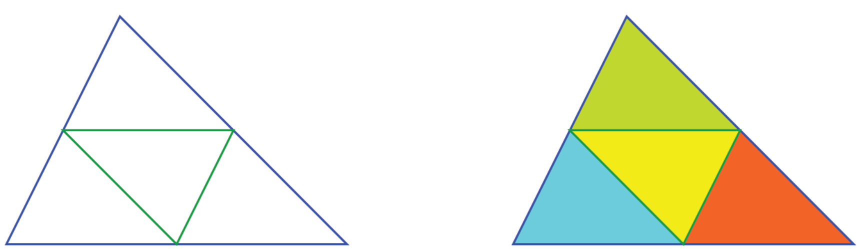
முக்கோணத்தின் உள்ளே இருக்கும் பச்சைக்கோடு இடப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளி வழியே அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாக வரையப்பட்டதாகும்.

இது இடப்பக்கத்தை வெட்டும் பாகங்கள் அந்தப் பக்கத்தின் பாதியானதால், வலது பக்கத்தையும் சமபாகங்களாக்குகிறது. அதாவது வலப்பக்கத்தின் மையப்புள்ளி வழியாகக் கடந்து செல்கிறது. மாறாக ஆனால்? முக்கோணத்தின் இடது, வலது பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு அவ்விரண்டினையும் $1 : 1$ என்ற விகிதத்தில் அல்லவா பிரிக்கிறது? அதனால் அந்தக் கோடு அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாகும்.

இது ஒரு முக்கியமான கருத்து ஆகும்.

எந்த முக்கோணத்திலும் ஒரு பக்கத்துக்கு இணையாக வேறொரு பக்கத்தின் மையப்புள்ளி வழியே வரையும் கோடு மூன்றாவது பக்கத்தை வெட்டுவது அதன் மையப்புள்ளியிலாகும். மாறாக எந்த முக்கோணத்திலும் இரண்டு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து வரையும் கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையுமாகும்.

முக்கோணத்தின் எல்லாப் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளையும் இணைத்தால்?



ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு முக்கோணம் வரைந்து பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளை அடையபடுத்தவும். மையப்புள்ளிகளை இணைக்கவும் முக்கோணம் வரையவும். பெரிய முக்கோணத்தினுடையவும் உள்ளே உள்ள சிறிய முக்கோணத்தினுடையவும் பக்கங்களின் நீளங்களை அடையாளப்படுத்தவும் இவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பு என்ன?

இந்த நான்கு சிறிய முக்கோணங்களைப் பற்றி என்ன கூறலாம்? நடுவில் உள்ள மஞ்சள் முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் எல்லாம் பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு இணையாகும்.

இந்த நான்கு முக்கோணங்களும் சமமாகத் தோன்றுகின்றன அல்லவா? அது சரிதானா எனப் பார்க்கலாம்.

முதலாவதாக நீல முக்கோணத்தையும் மஞ்சள் முக்கோணத்தையும் எடுத்துக்கொள்வோம் நீல முக்கோணத்தின் வலப்பக்கமும், மஞ்சள் முக்கோணத்தின் இடப்பக்கமும் ஒரே கோடாகும்.

நீல முக்கோணத்தின் இப்பக்கத்தின் மேல் உள்ள கோணமும் மஞ்சள் முக்கோணத்தில் இப்பக்கத்தின் கீழ் உள்ள கோணமும் சமமாகும். (ஏன்?) நீல முக்கோணத்தின் கீழ் உள்ள கோணமும் மஞ்சள் முக்கோணத்தின் மேல் உள்ள கோணமும் சமமாகும்.

அப்போது இந்த இரண்டு முக்கோணங்களும் சமம் ஆகும். இதைப் போன்று பச்சை முக்கோணமும், சிவப்பு முக்கோணமும் மஞ்சள் முக்கோணத்திற்குச் சமம் எனக் கொள்ளலாம். அதாவது, இந்த நான்கு முக்கோணங்களும் சமம் ஆகும்.

இதிலிருந்து மற்றொரு கருத்தும் கிடைக்கிறது. இந்த நான்கு முக்கோணங்களுடைய பக்கங்களின் நீளங்கள் சமமானதால், ஒவ்வொரு பக்கமும் பெரிய முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு பக்கத்தின் பாதியாகும். அதாவது,

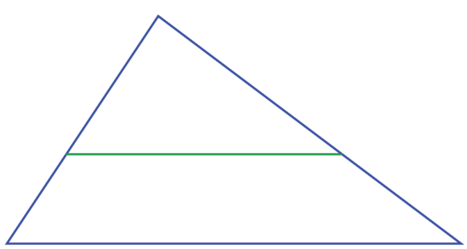
எந்த முக்கோணத்திலும் இரு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் நீளம் மூன்றாவது பக்கத்தின் நீளத்தின் பாதி ஆகும்.

முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து வரையும் கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாகும் எனக் கண்டோம் அல்லவா.

எனவே இந்த இரண்டு கருத்துகளையும் சேர்த்து இவ்வாறு கூறலாம்.

எந்த முக்கோணத்திலும் இரண்டு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையும் அதன் பாதியும் ஆகும்.

இதை வேறொரு முறையில் காணலாம். முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாக வரையும் கோடு முக்கோணத்தின் உள்ளே வேறொரு சிறிய முக்கோணத்தை உருவாக்குகிறது அல்லவா?



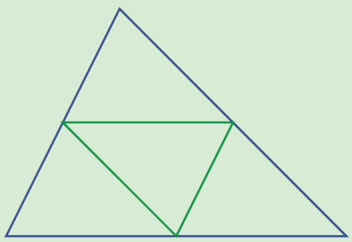
சிறிய முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களில் அமைந்துள்ளது. இந்தச் சிறிய பக்கங்கள் பெரிய பக்கங்களின் ஒரே பாகமாகும் எனவும் கண்டோம்.

இந்தப் பாகங்கள் பாதி எனில் மூன்றாவது பக்கமும் பாதியாகும் என இப்போது புரிந்து கொண்டோம்.

இரண்டு பக்கங்களை வெட்டுவது மூன்றில் ஒன்றாக ஆனால்? சிறிய முக்கோணத்தின் மூன்றாம் பக்கமும், பெரிய முக்கோணத்தின் மூன்றாம் பக்கத்தின் மூன்றில் ஒன்று ஆகுமா?

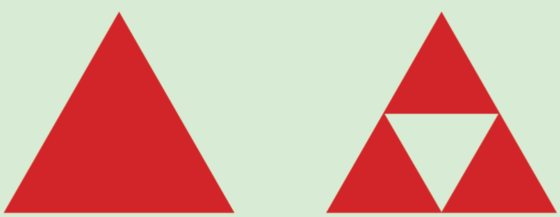
இரண்டு பக்கங்களை வெட்டுவது எந்தப் பாகமாக இருந்தாலும், மூன்றாவது பக்கத்தையும் வெட்டுவது அதே பாகம்தான் என்பதைப் பின்னர் காணலாம்.

(1) படத்தில் ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து வேறொரு முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது.



பெரிய முக்கோணத்தின் சுற்றளவு சிறிய முக்கோணத்தின் சுற்றளவின் எத்தனை மடங்காகும்? பரப்பளவு?

(2) இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்:



முதல் காகிதத்தில் வெட்டி எடுத்த ஒரு முக்கோணம் ஆகும். அதிலிருந்து பக்கங்களின்

கால் கணக்கு

படத்தில் ஒவ்வொரு சிறிய முக்கோணமும் பெரிய முக்கோணத்தின் $\frac{1}{4}$ பாகம் அல்லவா:

கீழே உள்ள மூன்று முக்கோணங்களை மட்டும் எடுத்தால், $\frac{3}{4}$ பாகம், மேல் உள்ள மஞ்சள் முக்கோணம், மீதியுள்ள $\frac{1}{4}$ பாகம், அடுத்த படத்தில்?

நீலமும் சிவப்பும் பச்சையும் சேர்ந்து $3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\right)$ பாகம், மஞ்சள் $\frac{1}{16}$ பாகம், அடுத்த படத்தில்?

நீலம், பச்சை, சிவப்பு முக்கோணங்கள் பெரிய முக்கோணத்தை நிறைக்கின்றன அல்லவா.

இந்தக் கருத்தை எண்ணாகக் கூறினால், $\frac{3}{4}$, $3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\right)$, $3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}\right)$ ... என்று தொடரும் எண்கள் 1 உடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது.

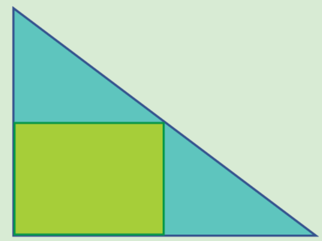
அதாவது, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}$ என்று தொடரும் எண்கள் $\frac{1}{3}$ உடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகிறது.

மையப்புள்ளிகளை இணைத்துக் கிடைக்கும், நடுவில் உள்ள சிறிய முக்கோணத்தை வெட்டி மாற்றியது தான் இரண்டாவது படம். இரண்டாவது படத்திலுள்ள முக்கோணம், மையப்புள்ளிகளை இணைத்துக்கிடைத்த நடுவிலுள்ள சிறிய முக்கோணத்தை வெட்டி எடுத்ததாகும். இதைப் போன்று இதிலுள்ள மூன்று முக்கோணங்களில் இருந்தும் நடுவில் உள்ள முக்கோணங்களை வெட்டி மாற்றியதே மூன்றாவது படம்.

(i) இரண்டாவது படத்தில் காகிதத்தின் பரப்பளவு, முதல் படத்தின் பரப்பளவின் எத்தனை பாகமாகும்?

(ii) மூன்றாவது படத்தில்?

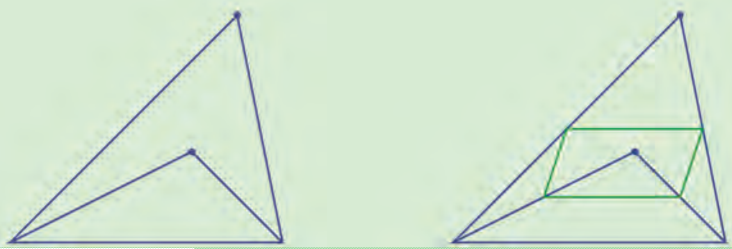
(3) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து ஒரு நாற்கரம் வரையப்பட்டுள்ளது.



(i) இந்த நாற்கரம் செவ்வகம் ஆகும் என நிரூபிக்கவும்.

(ii) செவ்வகத்தின் பரப்பளவு முக்கோணத்தின் பரப்பளவின் எத்தனை பாகமாகும்?

(4) கீழே தரப்பட்டுள்ள முதல் படத்தில் ஒரு கோட்டின் மேலேயுள்ள இரண்டு புள்ளிகளைக் கோட்டின் முனைப் புள்ளிகளுடன் இணைந்து இரண்டு முக்கோணங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன. இரண்டாவது படத்தில் முக்கோணங்களின் இடது வலது பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்து ஒரு நாற்கரமும் வரையப்பட்டுள்ளது.



AB என்ற ஒரு கோடு வரைந்து அதன் மேலே C, D என்ற இரண்டு புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். இந்த புள்ளிகளை A, B என்ற புள்ளிகளுடன் இணைத்து இரண்டு முக்கோணங்கள் வரையவும். இந்த முக்கோணங்களின் இடது, வலது பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தி அவற்றை இணைத்து ஒரு நாற்கரம் உருவாக்கவும். இந்த நாற்கரத்தின் சிறப்புத்தன்மை என்ன? C, D என்ற புள்ளிகளின் இடங்களை மாற்றிப் பார்க்கவும். இந்த நாற்கரத்தைச் சமபக்க இணைகரம், செவ்வகம், சதுரம் ஆக்குவதற்குப் புள்ளிகளின் இடம் எங்கு அமைய வேண்டும்? C, D என்ற புள்ளிகள் AB இன் இரண்டு பக்கங்களில் ஆகும்போது இவையெல்லாம் சரியாகுமா?

(i) இந்த நாற்கரம் ஓர் இணைகரம் என நிரூபிக்கவும்.

(ii) இந்த நாற்கரம் கீழே தரப்பட்டுள்ள வடிவங்களாகமாற்றுவதற்கு, மேலே உள்ள புள்ளிகள் எங்கு அமைய வேண்டும் எனக் காண்க.

(a) சமபக்க இணைகரம் (b) செவ்வகம்

(c) சதுரம்

(iii) கோட்டின் மேலேயும் கோட்டின் கீழேயும் ஒரு புள்ளியை எடுத்தால் இவையெல்லாம் சரியாகுமா?

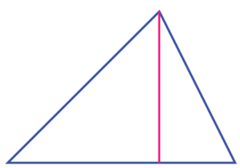
(5) (i) எந்த நாற்கரத்தினுடையவும் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்துக் கிடைக்கும் நாற்கரம் இணைகரமாகும் என நிரூபிக்கவும்.

(ii) உள்ளே இருக்கும் நாற்கரத்தைக் கீழே கூறப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வடிவங்களாக்குவதற்கு, முதல் நாற்கரத்தின் சிறப்புத் தன்மைகளை விளக்கவும்.

(a) சமபக்க இணைகரம் (b) செவ்வகம் (c) சதுரம்

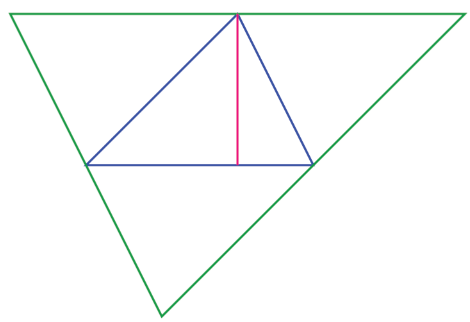
முக்கோணத்தின் மையங்கள்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



முக்கோணத்தின் மேல் உச்சியில் இருந்து அடிப்பக்கத்திற்குச் செங்குத்துகோடு வரையப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறு எந்த உச்சியில் இருந்தும் எதிர் பக்கத்திற்குச் செங்குத்துக்கோடு வரையலாம் அல்லவா. இந்தச் செங்குத்துக்கோடுகள் முக்கோணத்தின் உயரங்கள் (altitudes) எனக் கூறப்படுகின்றன.

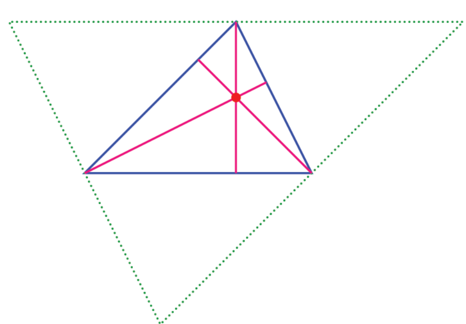
இந்த முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு உச்சியில் இருந்தும் எதிர் பக்கத்திற்கு இணையான கோடு வரைந்தால்?



சிவப்புக் கோடு பெரிய முக்கோணத்தின் மேல் பக்கத்திற்குச் செங்குத்து மட்டுமல்ல, அதன் இரு சமவெட்டியுமாகும்.

அப்போது சிறிய முக்கோணத்தின் ஏனைய உயரங்களையும் வரைந்தால் அவை பெரிய முக்கோணத்தின் பிற இரு பக்கங்களின் செங்குத்து இருசமவெட்டிகள் ஆகும்.

எந்த முக்கோணத்தினுடையவும் மூன்று செங்குத்து இருசமவெட்டிகள் ஒரு புள்ளி வழியே ஒன்றாக வெட்டிச் செல்லும் என கண்டோம் அல்லவா:



ஜியோ ஜிப்ராவில் ஒரு முக்கோணம் வரைந்து அதன் ஒவ்வொரு உச்சியில் இருந்தும் எதிர்ப் பக்கத்திற்குச் செங்குத்துகோடுகள் வரையவும். இவை மூன்றும் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கின்றனவா? இவைச் சந்திக்கின்ற புள்ளி (செங்குத்து மையம்) அடையாளப்படுத்தவும். முக்கோணத்தின் உச்சிகளை இடம் மாற்றிப் பார்க்கவும். செங்குத்து மையம் எப்பொழுதும் முக்கோணத்தின் உள்ளே தானா? ஒரு கோணம் செங்கோணமாகும்போது செங்குத்து மையத்தின் இடத்திற்கு என்ன நிகழ்கிறது? செங்கோணத்தைவிட அதிகமானால்.

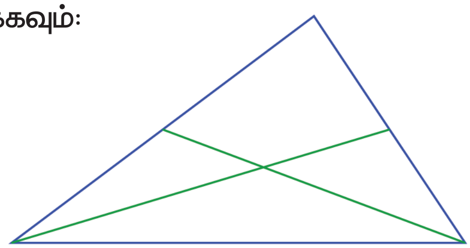
பெரிய முக்கோணத்தின் செங்குத்து இருசம வெட்டிகள் சிறிய முக்கோணத்தின் உயரங்கள் ஆகும். அப்பொழுது இங்கு கண்டது என்ன?

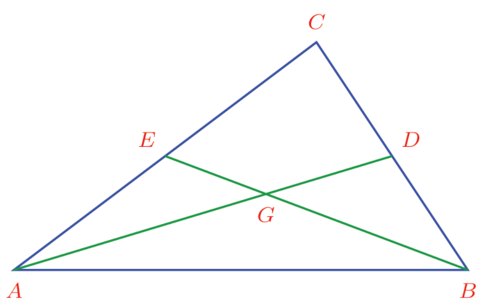
எல்லா முக்கோணத்தினுடையவும் உயரங்கள் ஒரு புள்ளி வழியே கடந்து செல்லும்.

உயரங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் இந்தப் புள்ளியை முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் (orthocentre) எனக் கூறுவர்.

முக்கோணத்தினுள் வரையும் சில சிறப்புத் தன்மையுள்ள கோடுகளே செங்குத்து இருசம வெட்டிகளும், உயரங்களும். இவை போன்ற வேறு கோடுகளே, ஒவ்வொரு உச்சியையும் எதிர்பக்கத்தின் மையப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடுகள் ஆகும். இவற்றுக்கு மையக்கோடுகள் (medians) என்ற பெயர் உள்ளது என முன்னர் கூறினோம் அல்லவா. இவை ஒரே புள்ளி வழியாகக் கடந்து செல்லுமா?

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:





முக்கோணத்தில் இரண்டு மையக்கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன. இவை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளி வழியாக மூன்றாவது மையக்கோடும் கடந்து செல்லுமா எனத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும்.

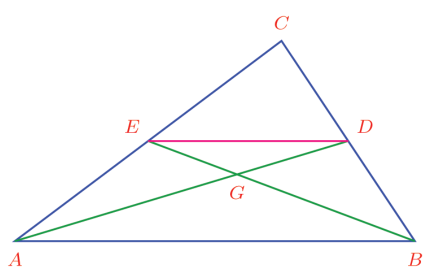
வரைந்து பார்ப்போம், இருப்பினும் எல்லா முக்கோணங்களுக்கும் இது சரியாகும் என்பதற்குத் தெளிவு வேண்டும் அல்லவா? அதற்குப் படத்திலுள்ள புள்ளிகளுக்கெல்லாம் பெயர் கொடுப்போம்:

ஒரு முக்கோணம் வரைந்து பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும்.

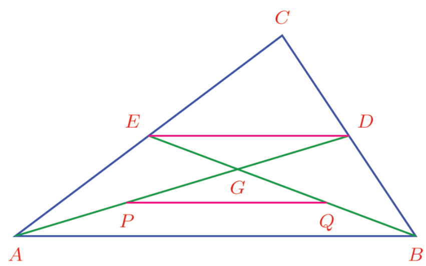
முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு உச்சியில் இருந்தும் எதிர் பக்கத்தின் மையப் புள்ளிக்குக் கோடு வரையவும் (மையக்கோடு). மூன்று மையக்கோடுகளும் ஒரே புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றனவா? அந்தப் புள்ளியை (முக்கோண மையம்) அடையாளப்படுத்தவும். ஒவ்வொரு உச்சியில் இருந்தும் முக்கோண மையத்திற்கு உள்ள தூரத்தையும் அங்கிருந்து எதிர்பக்கத்தின் மையப்புள்ளிக்குள்ள தூரத்தையும் இந்த அகலங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு என்ன? முக்கோணத்தின் உச்சிகளின் இடங்களை மாற்றிப் பார்க்கவும்.

இடது வலது பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு அடிப்பக்கத்திற்கு இணையானதும் அதன் பாதியும் ஆகும்; அதாவது,

$$ED = \frac{1}{2}AB$$



இனி அடிப்பக்கத்தின் மேல் GAB என்ற வேறொரு சிறிய முக்கோணமும் உள்ளது அல்லவா. அதன் இடது, வலது பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்தால்?



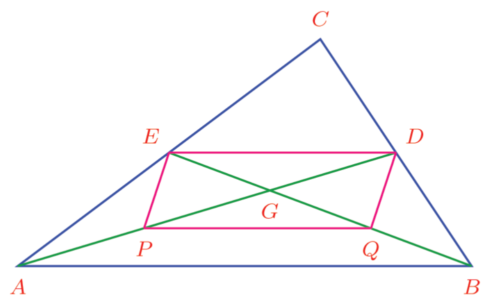
$$PQ = \frac{1}{2}AB$$

அப்போது,

$$PQ = ED$$

$PQDE$ என்ற நாற்கரத்தின், PQ, ED என்ற பக்கங்கள் சமமாகவும் இணையாகவும் இருப்பதனால், இந்த நாற்கரமும் ஓர் இணைகரமாகும். அதனால் அவற்றின் மூலைவிட்டங்களான PD, QE இவை ஒன்றுக்கொன்று சமபாகம் செய்யும்; அதாவது,

$$PG = GD \qquad QG = GE$$



AG இன் மையப்புள்ளி P உம் BGஇன் மையப்புள்ளி Q உம் ஆனதால்

$$AP = PG \qquad BQ = QG$$

அப்போது,

$$AG = AP + PG = 2PG = 2GD$$

எனவும்

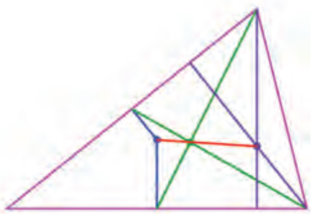
$$BG = BQ + QG = 2QG = 2GE$$

எனவும் கிடைக்கும்.

ஒரு முக்கோணம் வரைந்து அதன் மையம் அடையாளப் படுத்தவும் (Polygon கருவியைப் பயன்படுத்தி முக்கோணம் வரைந்தால் Midpoint or Centre கருவியைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் உள்ளே கிளிக் செய்தால் முக்கோணமையம் கிடைக்கும்) முக்கோண மையத்தையும் முக்கோணத்தின் இரண்டு உச்சிகளையும் இணைத்து ஒரு முக்கோணம் வரையவும். இம்முறையில் மூன்று முக்கோணங்கள் வரையலாம் அல்லவா. இந்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளைக் காண்க. அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? முக்கோணத்தின் உச்சிகளை இடம் மாற்றிப் பார்க்கவும்.

ஆய்லர் கோடு

எந்த முக்கோணத்திலும் சுற்று வட்ட மையம், முக்கோணமையம், செங்கோட்டு மையம் இவை ஒரே கோட்டில் அமையும் எனப் பதினெட்டாம் நூற்றாண்டின் புகழ்பெற்ற கணிதமேதை ஆய்லர் கண்டுபிடித்தார். இந்தக் கோடு ஆய்லர் கோடு (Euler line) என அறியப்படுகிறது.



படத்தில் நீல கோடுகள் இரண்டு பக்கங்களின் செங்குத்து இருசம வெட்டிகள் ஆகும். இவை சந்திக்கும் புள்ளி, சுற்று வட்ட மையம் ஆகும். பச்சைக் கோடுகள், மையக்கோடுகள் அவை வெட்டிச் செல்வது முக்கோண மையம். ஊதா நிறக்கோடுகளான உயரங்கள், அவை வெட்டிச் செல்வது செங்கோட்டு மையம்.

இந்த மூன்று புள்ளிகளின் வழியே கடந்து செல்லும் சிவப்பு கோடு ஆய்லர் கோடாகும்.

எந்த முக்கோணத்தினுடையவும் முக்கோண மையம், சுற்றுவட்ட மையத்தினுடையவும் செங்கோட்டுமையத்தினுடையவும் இடையே அமையும் எனவும் இவற்றை இணைக்கும் கோட்டை $1:2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் எனவும் ஆய்லர் நிரூபித்துள்ளார்.

ஒரு முக்கோணம் வரைந்து அதன் சுற்றுவட்ட மையம், முக்கோணமையம், செங்குத்து மையம் இவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும். இந்த மூன்று புள்ளிகளில் ஏதாவது இரண்டு புள்ளிகளின் வழியே கடந்து செல்லும் கோடு வரையவும் (ஆய்லர் கோடு). இது மூன்றாவது புள்ளி வழியாகவும் கடந்து செல்லுமா? முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் அடையாளப்படுத்தவும். முக்கோணத்தின் உச்சிகளை மாற்றிப்பார்க்கவும். இரண்டு பக்கங்களின் நீளம் சமமாகும்போது ஆய்லர் கோட்டிற்கு என்ன நிகழ்கிறது? மூன்று பக்கங்களின் நீளம் சமமாகும்போது மூன்று புள்ளிகளுக்கும் என்ன நிகழ்கின்றன?

அதாவது, G என்ற புள்ளி AD, BE என்ற கோடுகளை $2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. இனி A, B இவற்றை எதிர் பக்கத்தின் மையப்புள்ளிகளுடன் இணைப்பதற்குப் பதிலாக B, C என்ற உச்சிகளை எதிர் பக்கத்தின் மையப்புள்ளிகளுடன் இணைத்தால்?

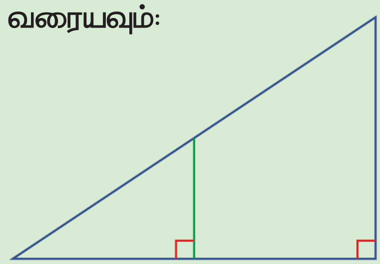
அவை வெட்டிச் செல்லும் புள்ளி BE ஐ $2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும். அதாவது வெட்டிச் செல்லும் புள்ளி G ஆகும்.

இப்போது பார்த்தவற்றை எவ்வாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

எந்த முக்கோணத்தினுடையவும் மையக் கோடுகள் ஒரே புள்ளி வழியாகவே கடந்து செல்லும். ஒவ்வொரு உச்சியில் இருந்தும் இந்தப் புள்ளிக்குள்ள தூரம், எதிர் பக்கத்தின் மையப்புள்ளியில் இருந்துள்ள தூரத்தின் இரு மடங்காகும். அதாவது, இந்தப் புள்ளி எல்லா மையக்கோடுகளையும் $2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்

முக்கோணத்தின் மையக்கோடுகள் எல்லாம் கடந்து செல்லும் இந்தப் புள்ளியை முக்கோண மையம் (centroid) எனக் கூறுகிறோம்.

(1) ஒரு செங்கோண முக்கோணம் வரைந்து கர்ணத்தின் மையப் புள்ளியிலிருந்து அடிப்பக்கத்திற்குச் செங்குத்துகோடு வரையவும்:



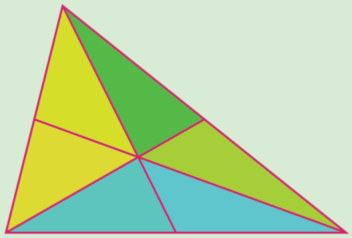
(i) இந்தச் செங்குத்துக்கோடு பெரிய முக்கோணத்தின் செங்குத்துக் கோட்டின் பாதியாகும் என நிறுவுக.

(ii) பெரிய முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் மையப்புள்ளியிலிருந்து மூன்று உச்சி களுக்கும் உள்ள தூரம் சமமாகும் எனத் தெளிவுப்படுத்துக.

(iii) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம், கர்ணத்தின் மையப் புள்ளியாகும் என நிறுவுக.

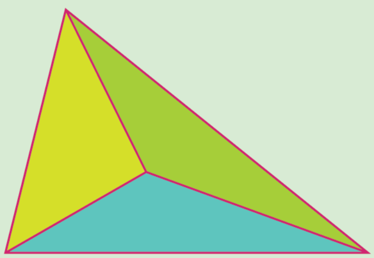
(2) எந்தச் சமபக்க முக்கோணத்தினுடையவும் சுற்றுவட்ட மையம், செங்கோட்டுமையம், முக்கோண மையம் இவை அனைத்தும் ஒரே புள்ளியாகும் என நிரூபிக்க.

(3) படத்தில் உள்ள முக்கோணத்தை மையக்கோடுகள் ஆறு சிறிய முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கின்றன.



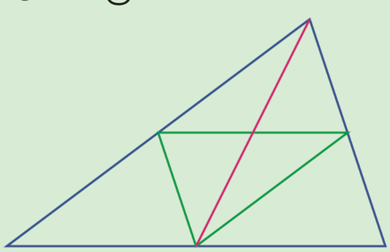
இந்த ஆறு முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே பரப்பளவாகும் என நிரூபிக்கவும்.

(4) படத்தில் உள்ள முக்கோணத்தில் முக்கோணமையமும் மூன்று உச்சிகளும் இணைந்து முக்கோணத்தை மூன்று சிறிய முக்கோணங்ளாகப் பிரிக்கிறது.



இம் மூன்று முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே பரப்பளவாகும் என நிரூபிக்கவும்.

(5) படத்தில் உள்ள நீல முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைத்துச் சிறிய பச்சை முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது. சிவப்புக் கோடு பெரிய முக்கோணத்தின் ஒரு மையக்கோடாகும்.



சமநிலை

இயற்பியலில் கணக்கீடுகள் பெரும்பாலும் ஒரு பொருளின் முழுநிறையும் ஒரு புள்ளியில் குவிந்துள்ளது என்று கருதப்படுகிறது. இந்தப் புள்ளியை நிறை மையம் (center of mass) எனக் கூறுவர். இது நடைமுறையில் உணரப்படுவது இந்தப் புள்ளியில் மட்டும் தாங்கி நின்று அதை விழாமல் இருக்க நிறுத்தலாம் என்பதன் மூலமாகும்.

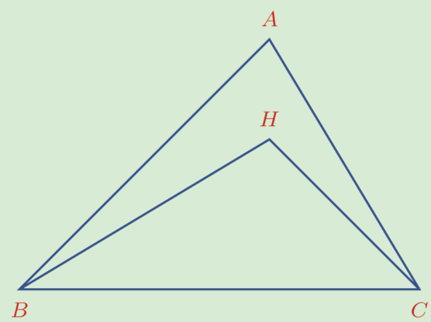
அட்டை அல்லது தகடில் வெட்டியெடுத்த ஒரு முக்கோணத்தின் நிறை மையம் அதன் முக்கோண மையமே ஆகும்.

ஒரு முக்கோணம் வரைந்து பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும்.
முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு உச்சியிருந்தும் எதிர்பக்கத்திற்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைந்து எதிர்பக்கத்தைத் தொடும் புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். முக்கோணத்தின் செங்குத்துமையத்தை அடையாளப்படுத்தி முக்கோணத்தின் உச்சிகளைச் செங்குத்து மையத்துடன் இணைக்கவும். இந்தக் கோடுகளின் மையப்புள்ளிகளைக் கண்டு பிடிக்கவும். இந்த மூன்று புள்ளிகளின் வழியே கடந்து செல்லும் ஒருவட்டம் வரைந்து பார்க்கவும் (Circle through 3 Points). செங்குத்துகள் எதிர்பக்கத்தை வெட்டும் புள்ளிகளும் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளும் ஒரு வட்டத்தில் அல்லவா? இந்த ஒன்பது புள்ளிகளின் வழியாகக் கடந்து செல்லும் இதே வட்டத்தை Nine Point Circle என அழைப்பர்.

(i) இந்த மையக்கோடு, சிறிய முக்கோணத்தின் மேல் பக்கத்தைச் சமபாகம் செய்யும் என நிரூபிக்கவும்.

(ii) பெரிய முக்கோணத்தின் முக்கோணமையம் சிறிய முக்கோணத்தினுடையவும் முக்கோண மையம் என நிரூபிக்கவும்.

(6) படத்தில், ABC என்ற முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையம் H.



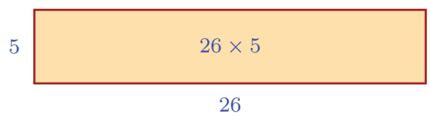
HBC என்ற முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையம் A ஆகும் என நிரூபிக்கவும்.

4

பெருக்கல் சமன்பாடுகள்

தொகைகளின் பெருக்கல்

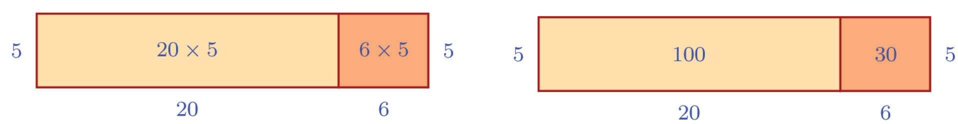
26 சென்டிமீட்டர் நீளமும், 5 சென்டிமீட்டர் அகலமும் உள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பளவு என்ன?



நேரடியாகச் செய்யாமல் இவ்வாறு எழுதினால்?

$$26 \times 5 = (20 + 6) \times 5$$

படத்தையும் இதுபோல் பிரிக்கலாம்:

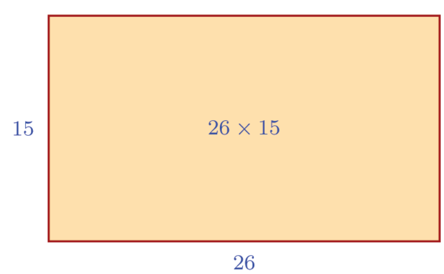


அப்போது பரப்பளவு

$$100 + 30 = 130 \text{ சதுர சென்டிமீட்டர்}$$

இங்குச் செய்த செயல் என்ன?

$$\begin{aligned} 26 \times 5 &= (20 + 6) \times 5 \\ &= (20 \times 5) + (6 \times 5) \\ &= 100 + 30 \\ &= 130 \end{aligned}$$

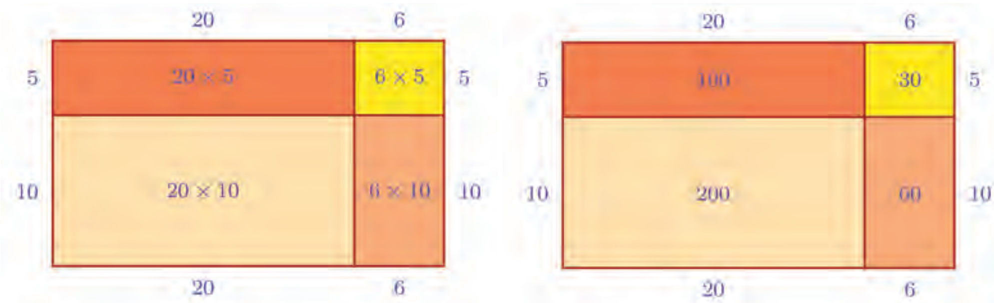


இனி 26 சென்டிமீட்டர் நீளமும், 15 சென்டிமீட்டர் அகலமும் உள்ள செவ்வகம் ஆனால்?

நேரடியாகப் பெருக்காமல்,

$$26 \times 15 = (20 + 6) \times (10 + 5)$$

என எழுதிப் படத்தையும் இதுபோல் பிரித்தால் கணக்கீடு செய்வது எளிதாகும்:



இனிப் பரப்பளவு கணக்கிடலாம் அல்லவா:

$$200 + 100 + 60 + 30 = 390 \text{ சதுர சென்டிமீட்டர்}$$

இந்த எண்கள் கிடைத்தச் செயல்முறையை எழுதினால்?

$$\begin{aligned} 26 \times 15 &= (20 + 6) \times (10 + 5) \\ &= (20 \times 10) + (20 \times 5) + (6 \times 10) + (6 \times 5) \\ &= 200 + 100 + 60 + 30 \\ &= 390 \end{aligned}$$

சாதாரணமாக, எண்களை ஒன்றின் கீழ் ஒன்றாக எழுதிப் பெருக்கும்போதும் இதல்லவா (வேறொரு முறையில்) செய்யப்படுகிறது?

$$\begin{array}{rl} 26 \times & \\ 15 & \\ \hline 130 \leftarrow & 26 \times 5 \;\; = (6 + 20) \times 5 \;\; = 30 + 100 \\ 260 \leftarrow & 26 \times 10 = (6 + 20) \times 10 = 60 + 200 \\ \hline 390 & \end{array}$$

இங்குச் செய்த செயல்முறைகளை மேலும் விரிவாக விளக்கலாம்.

20 + 6 என்ற தொகையை 10 + 5 என்ற தொகையால் பெருக்க, முதல் தொகையிலுள்ள 20, 6 என்ற எண்களை இரண்டாவது தொகையிலுள்ள 10, 5 என்ற ஒவ்வொரு எண்களாலும் பெருக்கி, அவ்வாறு கிடைக்கின்ற நான்கு பெருக்கல் பலன்களும் கூட்டப்படுகின்றன.

தொகைகளில் உள்ள எண்கள் எண்ணல் எண்கள் ஆக வேண்டுமென்பதில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக.

$$
\begin{aligned}
6\tfrac{1}{2} \times 8\tfrac{1}{3} &= \left(6+\tfrac{1}{2}\right) \times \left(8+\tfrac{1}{3}\right) \\
&= (6 \times 8) + \left(6 \times \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times 8\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3}\right) \\
&= 48 + 2 + 4 + \tfrac{1}{6} \\
&= 54\tfrac{1}{6}
\end{aligned}
$$

பொதுவாகக் கூறினால்,

தொகையைத் தொகையால் பெருக்க, முதல் தொகையில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணையும் இரண்டாவது தொகையில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணாலும் பெருக்கி பெருக்கல் பலன்களை எல்லாம் கூட்ட வேண்டும்.

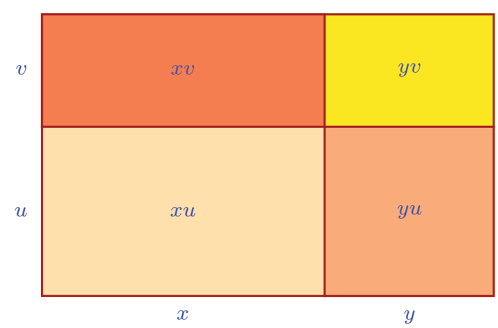
இதை இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி கூறினால்?

முதல் தொகையை $x + y$ என்றும் இரண்டாவது தொகையை $u + v$ என்றும் எடுக்கலாம். இவற்றின் பெருக்கல் பலன் கண்டுபிடிக்க, xu, xv, yu, yv இவை எல்லாம் கூட்ட வேண்டும். அதாவது,

x, y, u, v என எந்த நான்கு மிகை எண்களை எடுத்தாலும்

$$(x + y)(u + v) = xu + xv + yu + yv$$

பரப்பளவுகளின் கணக்காக இதை இவ்வாறு காணலாம்.



சில கணக்கீடுகளை எளிதாக்க மேற்கூறிய கருத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, 31×51 பார்க்கவும்..

$30 \times 50 = 1500$ என மனக்கணக்காகச் செய்யலாம் அல்லவா.

இப்போது பார்த்த கருத்துப்படி.

$$31 \times 51 = (30 + 1) \times (50 + 1) = 1500 + 30 + 50 + 1 = 1581$$

என்று மனக்கணக்காகக் கூட்டலாம்.

இங்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட இயற்கணித சமன்பாடு எது?

$$(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$$

அதாவது, இரண்டு எண்ணல் எண்களின் பெருக்கல் பலன் தெரியும் எனில், அவற்றை அடுத்துவரும் எண்ணல் எண்களின் பெருக்கல் பலன் கணக்கிட முன்பு எடுத்த எண்களின் பெருக்கல் பலன், தொகை, ஒன்று இவற்றைக் கூட்டினால் போதும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$21 \times 71 = (20 \times 70) + 20 + 70 + 1 = 1400 + 91 = 1491$$

$$81 \times 91 = (80 \times 90) + 80 + 90 + 1 = 7200 + 171 = 7371$$

$$201 \times 401 = (200 \times 400) + 200 + 400 + 1 = 80000 + 601 = 80601$$

ஒன்று கூட்டிய எண்ணல் எண்களின் பெருக்கல் பலன்போல, இரண்டு கூட்டிய எண்களின் பெருக்கல் பலன் கண்டுபிடிக்க எளிய வழி உண்டா? சிந்தித்துப் பாருங்கள்.

சில பின்ன எண்களின் பெருக்கல் பலன் கணக்கிடவும் மேற்கூறிய கருத்தைப் பயன்படுத்தலாம்:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) = xy + \left(x \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times y\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = xy + \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{4}$$

அப்போது,

$$6\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2} = 48 + \left(\frac{1}{2} \times 14\right) + \frac{1}{4} = 48 + 7\frac{1}{4} = 55\frac{1}{4}$$

$$10\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2} = 50 + \left(\frac{1}{2} \times 15\right) + \frac{1}{4} = 50 + 7\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 57\frac{3}{4}$$

என்றிவ்வாறு கணக்கிடலாம்.

(1) கீழ்த் தரப்பட்டுள்ள கணக்குகளை மனக்கணக்காகச் செய்து விடை கண்டுபிடிக்கவும்:

(i) 71×91 (ii) 42×62 (iii) $10\frac{1}{2} \times 6\frac{1}{2}$ (iv) 9.5×3.5 (v) $10\frac{1}{4} \times 6\frac{1}{4}$

(2) இரண்டு எண்ணல் எண்களின் பெருக்கல் பலன் 1400 உம் தொகை 81 உம் ஆகும். இவை ஒவ்வொன்றினுடையவும் அடுத்து வரும் இரண்டு எண்ணல் எண்களின் பெருக்கல் பலன் என்ன?

(3) இரண்டு ஒற்றை எண்களின் பெருக்கல் பலன் 621 உம் தொகை 50 உம் ஆகும். இந்த ஒவ்வொரு ஒற்றை எண்களினுடையவும் அடுத்து வரும் இரண்டு ஒற்றை எண்களின் பெருக்கல் பலன் என்ன?

செயல் சிறப்புகள்

இயற்கணிதத்தில் முற்றொருமைகளாக எழுதுவது எண் செயல்களைப் பற்றிய பொதுவான கருத்துகள் அல்லவா. இவற்றைப் பயன்படுத்தி வேறு சில பொதுக்கருத்துகளை நிறுவவும் செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

இரண்டு ஒற்றை எண்களின் பெருக்கல் பலனும் ஒற்றை எண் எனச் சில ஒற்றை எண் ஜோடிகளை எடுத்துப் பரிசோதனை செய்தால் காண இயலும். இது எந்த இரு ஒற்றை எண்களுக்கும் சரியாகும் என எவ்வாறு நிறுவலாம்?

ஒற்றை எண்களின் பொதுவடிவம்

$$2n + 1, n = 0, 1, 2, 3,...$$

என ஏழாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறோம் அல்லவா. அப்படியானால் பொதுவாக இரண்டு ஒற்றை எண்களை $2m + 1, 2n + 1$ என எடுக்கலாம். இவற்றின் பெருக்கல் பலன்.

$$(2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1$$

இதுவும் ஒற்றை எண் தானா?

சற்று மாற்றி எழுதினால்?

$$(2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$$

பெருக்கல் பலனும் ஒற்றை எண் என இப்போது தெளிவானது அல்லவா?

ஒற்றை எண்கள் என்பது, இரண்டால் வகுத்தால் மீதி 1 வருகின்ற எண்கள் என்றும் கூறலாம் அல்லவா.

அப்படியானால் மூன்றால் வகுத்தால் மீதி 1 வருகின்ற எண்களின் பொதுவடிவம் என்ன?

அவை எல்லாம் மூன்றின் மடங்குடன் 1 கூட்டியது அல்லவா?

அவ்வாறு சிந்தித்தால் பொது வடிவம் எழுதலாம் அல்லவா?

$$3n + 1, n = 0, 1, 2, 3, ...$$

இவ்வாறான இரண்டு எண்களைப் பெருக்கினால்?

$$(3m + 1)(3n + 1) = 9mn + 3m + 3n + 1$$

பெருக்கல் பலனை மூன்றால் வகுத்தால் மீதி ஒன்று தானா? அதைத் தெரிந்துகொள்வதற்கு முன்பு கூறிய சமன்பாட்டை இவ்வாறு மாற்றினால் போதுமா?

$$(3m + 1)(3n + 1) = 3(3mn + m + n) + 1$$

இதுவும் மூன்றின் மடங்குடன் ஒன்று கூட்டியது அல்லவா?

அதாவது மூன்றால் வகுத்தால் மீதி ஒன்று வருகின்ற எண்.

வேறொரு வகை கணக்கைப் பார்ப்போம்:

முதல் நான்கு எண்ணல் எண்கள் 1, 2, 3, 4 இவற்றின்

முதல், இறுதியிலுள்ள எண்களின் பெருக்கல் பலன் = $1 \times 4 = 4$

நடுவில் உள்ள எண்களின் பெருக்கல் பலன் = $2 \times 3 = 6$

2, 3, 4, 5 எடுத்தால்?

முதல், இறுதியிலுள்ள எண்களின் பெருக்கல் பலன் = $2 \times 5 = 10$

நடுவில் உள்ள எண்களின் பெருக்கல் பலன் = $3 \times 4 = 12$

மேலும் சில அடுத்துள்ள நான்கு எண்ணல் எண்களைப் பரிசோதித்துப் பார்க்கவும். பெருக்கல் பலன்களுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் எல்லாவற்றிலும் 2 தானா?

தொடர்ச்சியான எந்த நான்கு எண்ணல் எண்கள் எடுத்தாலும் இது சரியாகுமா?

அதை நிறுவப் பொதுவாகத் தொடர்ச்சியான நான்கு எண்ணல் எண்களான, x, $x+1$, $x+2$, $x+3$ என்று எடுத்தால்,

முதல், இறுதியிலுள்ள எண்களின் பெருக்கல் பலன் = $x(x+3) = x^2 + 3x$

நடுவில் உள்ள எண்களின் பெருக்கல் பலன் = $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$

இப்போது வித்தியாசம் 2 எனத் தெளிவானதல்லவா?

x ஆக எந்த எண்ணை எடுத்தாலும் இந்தச் சமன்பாடுகள் சரியாகும் எண்ணல் எண்களை எடுக்கிறோம் என்றால், இந்தக் கருத்தை இவ்வாறு கூறலாம்:

தொடர்ச்சியான எந்த நான்கு எண்ணல் எண்களை எடுத்தாலும் முதல், இறுதியிலுள்ள எண்களின் பெருக்கல் பலனுக்கும் நடுவில் உள்ள இரு எண்களின் பெருக்கல் பலனுக்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம் இரண்டு ஆகும்.

(1) கீழே கூறப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கூற்றையும், பல எண்கள் எடுத்துப் பரிசோதனை செய்து பார்க்கவும். அவற்றிலிருந்து பொதுவான ஒரு கருத்தை ஊகிக்கவும். ஊகித்தது சரியென்று இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி நிறுவுக.

(i) 3 ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 வருகின்ற ஓர் எண்ணினுடையவும் மீதி 2 வருகின்ற ஓர் எண்ணினுடையவும், பெருக்கல் பலனை 3 ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி?

(ii) 4 ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 வருகின்ற ஓர் எண்ணினுடையவும், மீதி 2 வருகின்ற ஓர் எண்ணினுடையவும் பெருக்கல் பலனை 4 ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் மீதி?

(iii) தொடர்ச்சியான ஆறு எண்ணல் எண்களில், முதல், இறுதியில் உள்ள இரண்டு எண்களின் பெருக்கல் பலனுக்கும் நடுவில் உள்ள இரண்டு எண்களின் பெருக்கல் பலனுக்கும் உள்ள வித்தியாசம்?

(2) 36×28 என்ற பெருக்கல் பலனைக் கண்டுபிடிப்பதற்கான ஒரு முறை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$3 \times 2 = 6$	6×100	600
$(3 \times 8) + (6 \times 2) = 36$	36×10	360
6×8		48
36×28		1008

(i) வேறு சில ஈரிலக்க எண்களில் இந்த முறையைப் பரிசோதனை செய்யவும்.

(ii) இது சரியாவதற்கான காரணத்தை இயற்கணித முறையில் விளக்கவும்.

(ஈரிலக்க எண்களையெல்லாம் $10m + n$ என்ற இயற்கணித வடிவத்தில் எழுதலாம் என்று ஏழாம் வகுப்பில் கற்றதை நினைவு கூறலாம்)

செயல் வினோதங்கள்

எண் செயல்களில் சில வினோதங்களை விளக்கவும் இயற்கணிதம் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாகப் பின்வரும் பெருக்கல்களைப் பார்க்கவும்:

$$12 \times 63 = 756$$
$$21 \times 36 = 756$$

சாதாரணமாக இரண்டு ஈரிலக்க எண்களின் பெருக்கல் பலனும் அவற்றின் இலக்கங்களை முறையே மாற்றி எழுதினால் கிடைக்கும் எண்களின் பெருக்கல் பலனும் வேறுபட்டவை அல்லவா (பரிசோதனை செய்து பார்க்கவும்) பெருக்கல் பலன்கள் சமம் ஆகின்ற வேறு எண்கள் உண்டா?

இதைப் பார்க்கவும்:

$$32 \times 46 = 1472$$
$$23 \times 64 = 1472$$

இத்தகைய ஜோடிகள் வேறு உண்டா?

எந்த ஈரிலக்க எண்ணையும் $10m + n$ என எழுதலாம் அல்லவா;

முதல் இலக்கம் m, இரண்டாவது இலக்கம் n.

இலக்கங்களை முறையே மாற்றி எழுதினால்?

முதல் இலக்கம் n, இரண்டாவது இலக்கம் m; எண் $10n + m$

நமக்குத் தேவை, இரண்டு ஈரிலக்க எண்கள் அல்லவா, அவற்றை $10m + n$, $10p + q$ என எடுக்கலாம். இலக்கங்களை முறையே மாற்றி எழுதினால் $10n + m$, $10q + p$

இரண்டு ஜோடிகளின் பெருக்கல் பலன்களும் ஒரே எண்ணாகும் விதத்தில் m, n, p, q என்று எடுப்பதே நமது முயற்சி.

முதல் எண்களின் பெருக்கல் பலன்

$$(10m + n)(10p + q) = 100mp + 10mq + 10np + nq$$

இலக்கங்களை முறையே மாற்றி எழுதிய எண்களின் பெருக்கல் பலன்

$$(10n + m)(10q + p) = 100nq + 10np + 10mq + mp$$

இரண்டு பெருக்கல் பலன்களும் நான்கு எண்களின் தொகையாகும். அவற்றை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும். இரண்டு தொகைகளிலும் $10mq + 10np$ உண்டு. அப்படியானால் மொத்த தொகைகள் சமமாக மற்ற இரண்டு எண்களின் தொகைகளைச் சமமாக்கினால் போதுமல்லவா. அதாவது.

$$100mp + nq = 100nq + mp$$

இதன் பொருள் என்ன?

ஓர் எண்ணின் நூறு மடங்கும் வேறொரு எண்ணும் கூட்டினால், இரண்டாவது எண்ணின் நூறுமடங்கும் முதல் எண்ணும் கூட்டிய தொகை ஆகுமா?

அப்படியானால் mp, nq ஆகிய பெருக்கல் பலன்கள் ஒரே எண் ஆக வேண்டும்.

அதாவது,

$$mp = nq$$

இதை இயற்கணிதத்திலும் காணலாம். $100mp + nq$, $100nq + mp$ என இவ்வாறு கூட்டிக் கிடைக்கும் எண்கள் ஒரே எண்ணாக வேண்டுமெனில், இந்த தொகைகளின் வித்தியாசம் பூஜ்யம் ஆக வேண்டுமல்லவா? அதாவது,

$$(100mp + nq) - (100nq + mp) = 0$$

இதிலிருந்து

$$99mp - 99nq = 0$$

எனக் கிடைக்கும். சிறிது மாற்றி எழுதினால்

$$99(mp - nq) = 0$$

ஓர் எண்ணின் 99 மடங்கு பூஜ்யமாக வேண்டுமெனில், அந்த எண்ணே பூஜ்யம் ஆக வேண்டுமல்லவா? அதாவது,

$$mp - nq = 0$$

எனில்,

$$mp = nq$$

அப்படியானால் நாம் தேடுகின்ற ஈரிலக்க எண் ஜோடிகளில் எல்லாம் முதல் இலக்கங்களின் பெருக்கல் பலனும் இரண்டாவது இலக்கங்களின் பெருக்கல் பலனும் ஒன்றாகவே இருக்கும்.

முதலில் பார்த்த எடுத்துக்காட்டிலுள்ள எண்கள் 12, 63

முதல் இலக்கங்களின் பெருக்கல் பலன் $= 1 \times 6 = 6$

இரண்டாவது இலக்கங்களின் பெருக்கல் பலன் $= 2 \times 3 = 6$

இரண்டாவது எடுத்துக்காட்டில்? எண்கள் 32, 46

முதல் இலக்கங்களின் பெருக்கல் பலன் $= 3 \times 4 = 12$

இரண்டாவது இலக்கங்களின் பெருக்கல் பலன் $= 2 \times 6 = 12$

இதைப் போன்று

$$2 \times 9 = 18$$

$$3 \times 6 = 18$$

எனவே, 23×96 உம் 32×69 உம் கணக்கிட்டால் ஒரே எண் கிடைக்கும். (பரிசோதனை செய்து பார்க்கவும்)

வேறு சில ஜோடிகள் கண்டுபிடிக்கலாமா?

நாள்காட்டியில் உள்ள எண்களின் தொகைகளைப் பற்றி சில இரசனையான கருத்துக்களை ஏழாம் வகுப்பில் பார்த்தோமல்லவா. இனி அவற்றின் பெருக்கல் பலன்களைப் பற்றிய ஒரு கணக்கைப் பார்ப்போம்.

நாள்காட்டியில் ஏதேனும் ஒரு மாதத்தை எடுத்து, ஒரு சதுரத்தில் வருகின்ற நான்கு எண்களை அடையாளப்படுத்தவும்.

ஞாயிறு	திங்கள்	செவ்வாய்	புதன்	வியாழன்	வெள்ளி	சனி
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

எதிர் மூலைகளில் வருகின்ற எண்களைப் பெருக்கிப் பார்க்கவும்:

$$14 \times 6 = 84$$

$$13 \times 7 = 91$$

இவற்றின் வித்தியாசம்

$$91 - 84 = 7$$

இதுபோலச் சதுரத்திற்குள் வருகின்ற வேறு நான்கு எண்களை எடுத்துப் பார்க்கவும்.

$$22 \times 30 = 660$$

$$23 \times 29 = 667$$

$$667 - 660 = 7$$

வித்தியாசம் எப்போதும் 7 ஆகக் காரணம் என்ன?

இதனை இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்திப் பார்க்கலாம்.

சதுரத்தில் உள்ள முதல் எண் x என எடுத்தால், நான்கு எண்களை இவ்வாறு எழுதலாம்:

x	$x+1$
$x+7$	$x+8$

எதிர் மூலைகளில் வரும் எண்களின் பெருக்கல் பலன் $x(x + 8)$ உம் $(x + 1)(x + 7)$ உம் அல்லவா?

இதில் முதல் பெருக்கல் பலன்

$$x(x + 8) = x^2 + 8x$$

இரண்டாவது பெருக்கல் பலன்

$$(x + 1)(x + 7) = x^2 + 7x + x + 7 = x^2 + 8x + 7$$

இரண்டு பெருக்கல் பலன்களையும் பாருங்கள்.

வித்தியாசம் 7 அல்லவா?

இதில் x ஆக எந்த எண்ணையும் எடுக்கலாம் அல்லவா, அதாவது, நாள்காட்டியின் எந்தப் பகுதியிலும் இது சரியாகும்.

மற்றொரு கணக்கு

கீழே காண்பதுபோல ஒரு பெருக்கல் அட்டவணை உருவாக்கவும்.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

நாள்காட்டியில் செய்ததுபோல ஒரு சதுரத்தினுள் வருகின்ற நான்கு எண்களை அட்டவணையின் வெவ்வேறு பகுதிகளில் அடையாளப்படுத்தவும்.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

ஒவ்வொரு சதுரத்திலும் எதிர் மூலைகளில் வருகின்ற எண்களைப் பெருக்குவதற்குப் பதிலாகக் கூட்டிப் பார்க்கவும்:

$12 + 20 = 32$ $\qquad$ $35 + 48 = 83$

$16 + 15 = 31$ $\qquad$ $40 + 42 = 82$

அட்டவணையின் எந்தப் பகுதியில் இதுபோலச் சதுரம் எடுத்தாலும் தொகைகளின் வித்தியாசம் 1 ஆகவே இருக்குமா?

இதைப் பரிசோதனை செய்ய, அட்டவணையில் இவ்வாறு எடுக்கும் நான்கு எண்களின் பொதுவான வடிவம் தெரிந்திருக்க வேண்டும்.

அட்டவணையின் முதல் வரிசையில் 9 வரையுள்ள எண்ணல் எண்கள், இவற்றை 2 ஆல் பெருக்கி கிடைக்கும் எண்களே இரண்டாவது வரிசை.

பொதுவாகக் கூறினால், 1 முதல் 9 வரையுள்ள எந்த எண்ணல் எண் n எடுத்தாலும் n ஆவது வரிசையில் எண்கள்.

$$n \quad 2n \quad 3n \quad 4n \quad 5n \quad 6n \quad 7n \quad 8n \quad 9n$$

அடுத்த வரிசையில்?

அந்த வரிசையிலுள்ள எண்கள், முதல் வரிசையிலுள்ள எண்களை எந்த எண்ணால் பெருக்கியதாகும்?

இந்த இரண்டு வரிசைகளையும் ஒன்றாகப் பார்த்தால்?

$$
\begin{array}{ccccccccc}
n & 2n & 3n & 4n & 5n & 6n & 7n & 8n & 9n \\
n+1 & 2(n+1) & 3(n+1) & 4(n+1) & 5(n+1) & 6(n+1) & 7(n+1) & 8(n+1) & 9(n+1)
\end{array}
$$

இனி சதுரமாக எண்கள் எடுக்க, முதல் வரிசையின் எந்த எண்ணில் இருந்தும் தொடங்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக இவ்வாறெல்லாம் ஆகலாம்:

$2n$	$3n$
$2(n+1)$	$3(n+1)$

$5n$	$6n$
$5(n+1)$	$6(n+1)$

பொதுவாகக் கூறினால், n ஐ m ஆல் பெருக்கின எண்ணிலிருந்து தொடங்குகிறோம். எனில், சதுரத்தில் உள்ள நான்கு எண்கள் எவை? ஒவ்வொன்றாக எழுதிப் பார்ப்போம்:

mn	$(m+1)n$

mn	$(m+1)n$
$m(n+1)$	

mn	$(m+1)n$
$m(n+1)$	$(m+1)(n+1)$

பெருக்கல் பலன்களை எல்லாம் விவரித்தெழுதினால்

mn	$mn+n$
$mn+m$	$mn+m+n+1$

எதிர் மூலைகளில் உள்ள எண்களைக் கூட்டினால், ஒரு தொகை

$$mn + (mn + m + n + 1) = 2mn + m + n + 1$$

மற்ற தொகை

$$(mn + n) + (mn + m) = 2mn + n + m$$

இவ்வாறு எடுக்கின்ற எந்தச் சதுரத்திலும் தொகைகளின் வித்தியாசம் 1 தான் ஆகுமென்றும் அதற்கான காரணம் என்ன என்றும் இப்போது புரிந்ததல்லவா?

(1) கீழே தந்திருப்பதுபோல எண்கள் எழுதவும்:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

(i) நாள்காட்டியில் செய்ததுபோல நான்கு எண்களுள்ள ஒரு சதுரத்தை அடையாளப்படுத்தி எதிர் மூலைகளில் உள்ள எண்களைப் பெருக்கி வித்தியாசம் கண்டுபிடிக்கவும். எந்தச் சதுரத்தின் எண்களை எடுத்தாலும் ஒரே வித்தியாசம்தான் கிடைக்குமா?

(ii) இது ஏன் என்று இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி விளக்கவும்.

(2) பெருக்கல் அட்டவணையில் நான்கு எண்கள் உள்ள சதுரத்திற்குப் பதில், ஒன்பது எண்களுள்ள சதுரம் எடுத்து, நான்கு மூலைகளிலும் உள்ள எண்களை மட்டும் அடையாளப்படுத்தவும்:

6	8	10
9	12	15
12	16	20

(i) எதிர் மூலைகளில் உள்ள எண்களின் தொகை என்ன?

(ii) இவ்வாறு உள்ள சதுரங்களில் எல்லாம் வித்தியாசம் 4 தான் கிடைக்கிறது. அதன் காரணத்தை இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி விளக்கவும்.

(iii) பதினாறு எண்கள் உள்ள சதுரம் எடுத்தால்?

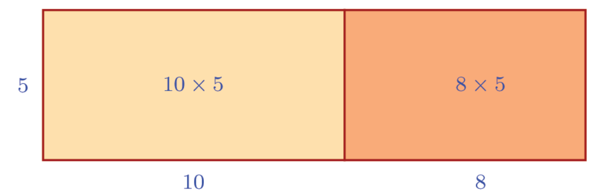
வித்தியாசத்தின் பெருக்கல்

18×5 ஐ எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

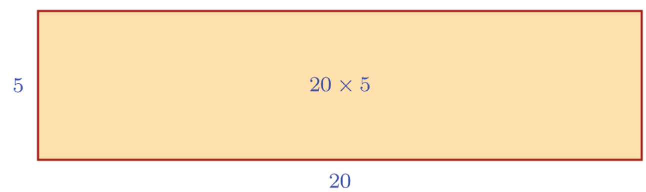
முன்பு செய்ததுபோல

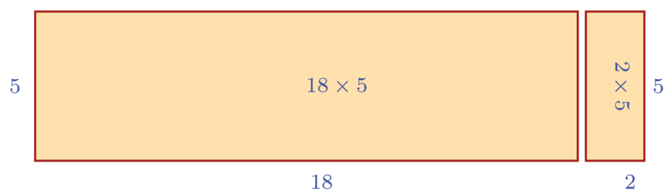
$$18 \times 5 = (10 + 8) \times 5 = (10 \times 5) + (8 \times 5) = 50 + 40 = 90$$

எனக் கணக்கீடு செய்யலாம்.



வேறொரு முறையிலும் இதைக் கண்டுபிடிக்கலாம்:



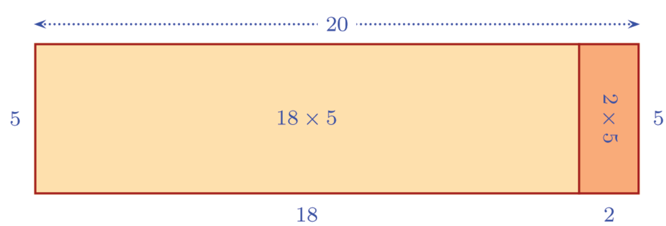


அதாவது,

$$\begin{aligned} 18 \times 5 &= (20 - 2) \times 5 \\ &= (20 \times 5) - (2 \times 5) \\ &= 100 - 10 \\ &= 90 \end{aligned}$$

இவ்வாறு சிந்திக்கலாம்: 18×5 உடன் 2×5 ஐக் கூட்டினால் 20×5 ஆகுமல்லவா.

$$(18 \times 5) + (2 \times 5) = (18 + 2) \times 5 = 20 \times 5$$



அப்படியானால்

$$18 \times 5 = (20 \times 5) - (2 \times 5)$$

இதுபோல்

$$38 \times 5 = (40 - 2) \times 5 = (40 \times 5) - (2 \times 5) = 200 - 10 = 190$$

என்றும்

$$45 \times 8 = 45 \times (10 - 2) = (45 \times 10) - (45 \times 2) = 450 - 90 = 360$$

என்றும் கணக்கிடலாம்.

இந்த இரண்டு கணக்குகளிலும் செய்தது என்ன? இரண்டு எண்களின் தொகைக்கும் வேறொரு எண்ணிற்கும் உள்ள பெருக்கல் பலன்களை விரித்தெழுதி கணக்கீடு செய்ததுபோல, வித்தியாசத்திற்கும் எண்ணிற்கும் உள்ள பெருக்கல் பலனையும் விரித்தெழுதி கணக்கிடலாம்.

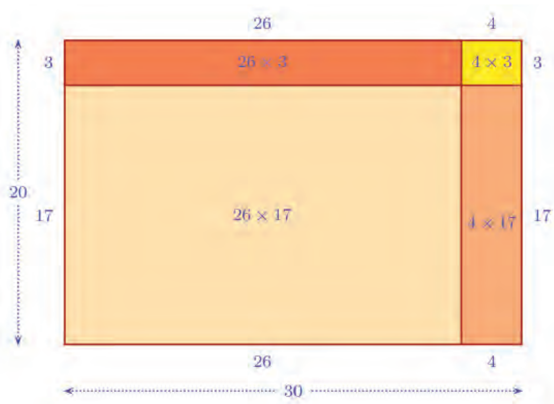
இனி இரண்டு தொகைகளின் பெருக்கல் பலனை விரித்தெழுதி கணக்கீடு செய்தது போல, இரண்டு வித்தியாசங்களின் பெருக்கல் பலனைக் கணக்கீடு செய்ய இயலுமா என்று பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$26 \times 17 = (30 - 4) \times (20 - 3)$$

என எழுதலாம். இதைத் தொகையின் செயலில் செய்ததுபோல நான்கு பெருக்கல்களாக விரித்தெழுதுவது எவ்வாறு?

இதைக் கண்டுபிடிக்க பக்கங்களின் நீளம் 26 உம் 17 உம் ஆன செவ்வகத்தைப் பக்கங்களின் நீளம் 30 உம், 20 உம் ஆன செவ்வகமாக மாற்றுவது எவ்வாறு எனச் சிந்திப்பதே எளிது.



படத்திலிருந்து

$$(26 \times 17) + (26 \times 3) + (4 \times 17) + (4 \times 3) = 30 \times 20$$

எனக் காணலாம் அல்லவா. இதிலிருந்து

$$(26 \times 17) = 30 \times 20 - (26 \times 3) - (4 \times 17) - (4 \times 3)$$

என்றும் கணக்கிடலாம்.

இனி சமன்பாட்டின் வலது பக்கத்தில் உள்ள பெருக்கல் பலன்களை ஒவ்வொன்றாகக் கணக்கிடலாம்:

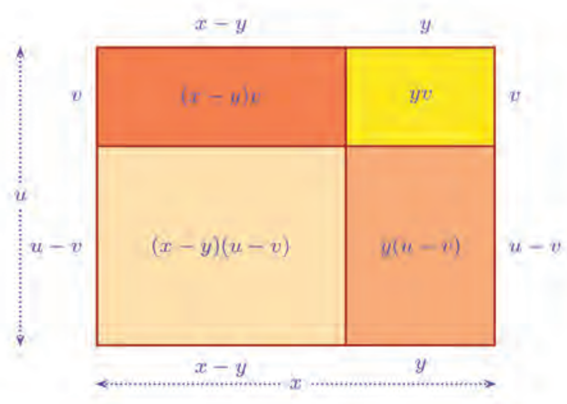
$$\begin{aligned} 30 \times 20 &= 600 \\ 26 \times 3 &= (30 - 4) \times 3 = 90 - 12 = 78 \\ 4 \times 17 &= 4 \times (20 - 3) = 80 - 12 = 68 \\ 4 \times 3 &= 12 \end{aligned}$$

அப்படியானால்

$$\begin{aligned} (26 \times 17) &= 600 - 78 - 68 - 12 \\ &= 600 - (78 + 68 + 12) \\ &= 600 - 158 \\ &= 442 \end{aligned}$$

இவ்வளவு அதிகம் கணக்கீடுகள் செய்யாமல் இதைச் செய்ய இயலுமா? என்பதுதான் அடுத்த சிந்தனை. அதற்கு எண்கள் இல்லாமல் இயற்கணித முறையில் சிந்தித்துப் பார்க்கலாம்.

$(x-y)(u-v)$ என்பதை எவ்வாறு விரித்தெழுதலாம் என்பதைப் பார்ப்போம். மேற்கூறிய கணக்கில் செய்தது போல பக்கங்களின் நீளம் $x-y$, $u-v$ ஆன செவ்வகங்களின் பக்கங்களை நீட்டி, இந்த நீளங்கள் x, u ஆகும் செவ்வகம் ஆக்குவது எவ்வாறு என்று பார்ப்போம்:



இதிலிருந்து

$$(x - y)(u - v) + y(u - v) + (x - y)v + yv = xu$$

எனக் காணலாம் அல்லவா?

சமன்பாட்டின் இடது பக்கத்திலுள்ள பெருக்கல் பலன்களில் நடுவிலுள்ள இரண்டினை விரித்தெழுதினால்

$$(x - y)(u - v) + (yu - yv) + (xv - yv) + yv = xu$$

அதாவது,

$$(x-y)(u-v)+yu-yv+xv=xu$$

இதிலிருந்து, $(x-y)\ (u-v)$ ஐ xu ஆக்க, xv உம் yu உம் கூட்டி, yv ஐக் கழிக்க வேண்டும். அதாவது (படத்திலிருந்து இதனைக்காண முடிகிறதா?).

xu ஐ மீண்டும் $(x-y)(u-v)$ ஆக மாற்றுவதற்கு முதலில் கூட்டிய xv உம் yu உம் கழித்து, கழித்த yv ஐ கூட்ட வேண்டும். அதாவது

$$(x-y)\ (u-v)=xu-xv-yu+yv$$

அவ்வாறு பெருக்கலைப் பற்றிய ஒரு பொதுக் கருத்து கிடைத்தது :

> $x>y,\ u>v$ ஆன எந்த மிகை எண்களை எடுத்தாலும்
>
> $(x-y)(u-v)=xu-xv-yu+yv$

இதைப் பயன்படுத்தி நமது முதல் கணக்கை மேலும் எளிதாக்கலாம்:

$$\begin{aligned}26\times 17 &= (30-4)\times(20-3)\\ &= (30\times 20)-(30\times 3)-(4\times 20)+(4\times 3)\\ &= 600-90-80+12\\ &= 612-170\end{aligned}$$

612 லிருந்து 170 ஐக் கழிக்க, 200 கழித்து, 30 ஐக் கூட்டுவது அல்லவா எளிது

$$26\times 17=612-200+30=442$$

இதுபோலக் கீழே தரப்பட்டுள்ள கணக்குகளைச் செய்து பார்க்கவும்.

(i) 38×49 (ii) 47×99 (iii) 29×46 (iv) $9\frac{1}{2}\times 19\frac{1}{2}$

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்

இரண்டு எண்களின் பெருக்கல் பலன் தெரியுமெனில், அவற்றின் தொட்டு அடுத்த எண்களின் பெருக்கல் பலனைக் கணக்கீடு செய்தது நினைவில் இருக்கிறது அல்லவா? தொகைகளின் பெருக்கல் பலனை இயற்கணித சமன்பாடு பயன்படுத்தியே செய்தோம். அதேபோல் தொட்டு பின்னால் உள்ள எண்களின் பெருக்கல்பலனைக் கண்டுபிடிக்க, வித்தியாசங்களின் பெருக்கல் பலனின் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\begin{aligned} 29 \times 49 &= (30-1)\times(50-1) \\ &= (30\times 50)-(30\times 1)-(50\times 1)+(1\times 1) \\ &= 1500-30-50+1 \\ &= 1500-80+1 \\ &= 1421 \end{aligned}$$

இங்குப் பயன்படுத்திய செயல்களைப் பொதுக்கருத்துகளாகக் கூறலாம்:

$$(x-1)(y-1) = xy - x - y + 1$$

இதைப் பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம் அல்லவா:

$$(x-1)(y-1) = xy - (x+y) + 1$$

அதாவது, இரண்டு எண்ணல் எண்களின் பெருக்கல் பலன் தெரியுமெனில் தொட்டு பின்னால் உள்ள எண்களின் பெருக்கல் பலனைக் கணக்கிட, முதல் எண்களின் பெருக்கல் பலனிலிருந்து தொகையைக் கழித்து, 1 ஐக் கூட்டினால் போதும்.

மாறாக, இரண்டு எண்ணல் எண்களில், ஒவ்வொன்றினுடையவும் முன்னேயுள்ள எண்களுடையவும் அதன் பின்னால் உள்ள எண்களுடையவும் பெருக்கல் பலன் தெரியுமெனில் அந்த எண்களின் பெருக்கல் பலனைக் கண்டுபிடிக்கவும் இந்தச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக ஒவ்வொன்றினுடையவும் தொட்டு முன்னேயுள்ள எண்களின் பெருக்கல் பலன் 525, அதன் தொட்டு பின்னால் உள்ள எண்களின் பெருக்கல் பலன் 437.

எண்களை x, y என எடுத்தால்.

$$(x+1)(y+1) = 525$$

$$(x-1)(y-1) = 437$$

அதாவது,

$$\begin{aligned} xy + x + y + 1 &= 525 \\ xy - (x+y) + 1 &= 437 \end{aligned}$$

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளையும் கூட்டினால்

$$2xy + 2 = 962$$

இதிலிருந்து

$$xy = \frac{1}{2}(962 - 2) = 480$$

எண்களின் பெருக்கல் பலன் கிடைத்தது அல்லவா.

இனி எண்களைக் காணலாம்.

மேலே உள்ள சமன்பாடுகளைக் கூட்டுவதற்குப் பதிலாக, முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து இரண்டாவது சமன்பாட்டைக் கழித்தால்?

$$2(x + y) = 88$$

அப்படியானால்,

$$x + y = 44$$

இவ்வாறு எண்களின் தொகையும் கிடைத்தது.

பெருக்கல் பலனும் தொகையும் கிடைத்தால் வித்தியாசம் கணக்கிடலாம் அல்லவா.

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

என்ற சமன்பாட்டை எட்டாம் வகுப்பில் கற்றதை நினைவுகூறவும்.

அப்படியானால் நமது கணக்கில்

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &= 44^2 - (4 \times 480)\\ &= (4^2 \times 11^2) - (4^2 \times 120)\\ &= (4^2 \times 121) - (4^2 \times 120)\\ &= 4^2\end{aligned}$$

அதாவது,

$$x - y = 4$$

தொகையும் வித்தியாசமும் தெரிந்தால் எண்கள் கணக்கிடலாம். (சமன்பாட்டு ஜோடிகள் என்ற பாடம்)

$$x = \frac{1}{2}(44 + 4) = 24$$

$$y = \frac{1}{2}(44 - 4) = 20$$

(1) ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 40 சென்டிமீட்டர், மற்றும் பரப்பளவு 70 சதுர சென்டிமீட்டர் ஆகும். நீளமும் அகலமும் இதைவிட 3 சென்டிமீட்டர் குறைவான செவ்வகத்தின் பரப்பளவு கண்டுபிடிக்கவும்.

(2) ஒரு செவ்வகத்தின் நீளத்தையும் அகலத்தையும் ஒரு மீட்டர் வீதம் குறைத்தால் பரப்பளவு 741 சதுரமீட்டரும்; 1 மீட்டர் வீதம் கூட்டினால் 861 சதுரமீட்டரும் ஆகும்.

(i) செவ்வகத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

(ii) சுற்றளவு எவ்வளவு?

(iii) நீளமும் அகலமும் எவ்வளவு?

(3) இரண்டு எண்களில் ஒவ்வொன்றினுடனும் ஒன்று கூட்டி பெருக்கிய போது 1271 உம் ஒன்று கழித்துப் பெருக்கிய போது 1131உம் கிடைத்தது.

(i) எண்களின் பெருக்கல் பலன் எவ்வளவு?

(ii) எண்களின் தொகை எவ்வளவு?

(iii) எண்கள் எவை?

(4) இரண்டு ஒற்றை எண்களில் ஒவ்வொன்றிற்கும் தொட்டு முன்னால் உள்ள ஒற்றை எண்களின் பெருக்கல் பலன் 285 உம், தொட்டு பின்னால் உள்ள ஒற்றை எண்களின் பெருக்கல் பலன் 165 உம் ஆகும். எனில் எண்கள் எவை?

இரண்டு தொகைகளின் பெருக்கல் பலனைப் பற்றியும், இரண்டு வித்தியாசங்களின் பெருக்கல் பலனைப் பற்றியும் உள்ள முற்றொருமைகளைப் பார்த்தோம் அல்லவா. தொகையினுடையவும் வித்தியாசத்தினுடையவும் பெருக்கல் பலன்?

அதாவது, $(x + y)(u - v)$ ஐ எவ்வாறு விரித்தெழுதலாம்?

இயற்கணிதத்திலேயே தொடர்ந்து செய்யலாம்: முதலில் இவ்வாறு விரித்தெழுதலாம்:

$$(x + y)(u - v) = x(u - v) + y(u - v)$$

இனி வலது பக்கத்திலுள்ள ஒவ்வொரு பெருக்கல் பலனையும் ஒவ்வொன்றாக விரித்தெழுதலாம்:

$$x(u - v) = xu - xv$$

$$y(u - v) = yu - yv$$

அப்போது $(x + y)(u - v) = xu - xv + yu - yv$

x, y, u, v என்ற எந்த நான்கு மிகை எண்களிலும், $u > v$ எனில்

$$(x + y)(u - v) = xu - xv + yu - yv$$

எடுத்துக்காட்டாக 14×59 ஐ இவ்வாறு கணக்கிடலாம்.

$$\begin{aligned} 14 \times 59 &= (10 + 4) \times (60 - 1) \\ &= 600 - 10 + 240 - 4 \\ &= 590 + 236 \\ &= 826 \end{aligned}$$

இதுபோல இந்தக் கணக்குகளைச் செய்து பார்க்கவும்.

(i) 52×19 (ii) 101×48 (iii) 97×102 (iv) $9\frac{3}{4} \times 20\frac{1}{2}$

இரண்டு எண்களின் பெருக்கல் பலனையும் தொகையையும் பயன்படுத்தி, ஒவ்வொன்றோடும் ஒன்று கூட்டினாலும் அல்லது கழித்தாலும் கிடைக்கும் பெருக்கல் பலன்களைக் கண்டுபிடித்தது நினைவு இருக்கிறதல்லவா. ஓர் எண்ணுடன் ஒன்று கூட்டவும் மற்ற எண்ணிலிருந்து ஒன்று கழிக்கவும் செய்தால்?

8 ஐயும் 5 ஐயும் எடுத்து பரிசோதனை செய்யலாம்.

$$\begin{aligned} 8 \times 5 &= 40 \\ (8 + 1) \times (5 - 1) = 9 \times 4 &= 36 \\ (8 - 1) \times (5 + 1) = 7 \times 6 &= 42 \end{aligned}$$

வேறு எண்களையும் எடுத்துப் பார்க்கவும். பொதுவாக என்ன கூறலாம்?

பெரிய எண்ணுடன் ஒன்று கூட்டவும் சிறிய எண்ணிலிருந்து ஒன்று கழிக்கவும் செய்தால் பெருக்கல் பலன் கூடுமா? குறையுமா?

மாறாக ஆனால்?

இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி பார்க்கலாம். பெரிய எண்ணை x என்றும், சிறிய எண்ணை y என்றும் எடுக்கலாம். பெரிய எண்ணுடன் ஒன்று கூட்டி சிறிய எண்ணிலிருந்து கழித்தால் பெருக்கல் பலன்?

$$(x + 1)(y - 1) = xy - x + y - 1$$

அதாவது, முதல் பெருக்கல் பலனில் இருந்து பெரிய எண் x ஐக் கழித்து, சிறிய எண் y ஐக் கூட்டினோம்; அப்போதே பெருக்கல் பலன் குறைந்ததல்லவா. மேலும் அதிலிருந்து ஒன்றைக் கழித்தோம். புதிய பெருக்கல் பலனும் குறைந்ததல்லவா?

இச்செயலை மாற்றிச் செய்தால்

$$(x - 1)(y + 1) = xy + x - y - 1$$

கூட்டியது பெரிய எண் x; கழித்தது சிறிய எண் y அவ்வாறு பெருக்கல் பலன் கூடியது. ஆனால் அதிலிருந்து மேலும் 1 கழிக்கப்பட்டுள்ளதல்லவா?

இங்கு புதிய பெருக்கல் பலன் பல முறைகளில் ஆகலாம்:

- அடுத்தடுத்துள்ள எண்களானால் பெருக்கல் பலனில் மாற்றமில்லை.
- அடுத்தடுத்தல்லாத வேறுபட்ட எண்களானால் பெருக்கல் பலன் கூடும்.

மேற்கூறிய செயல்களுக்கெல்லாம் காரணங்களைச் சிந்திக்கலாம்.

(1) இரண்டு எண்களின் பெருக்கல் பலன் 713 உம் வித்தியாசம் 8 உம் ஆகும்.

(i) பெரிய எண்ணுடன் 1 ஐக் கூட்டியதற்கும் சிறிய எண்ணிலிருந்து 1 ஐக் கழித்ததற்கும் இடையே உள்ள பெருக்கல் பலன் என்ன?

(ii) பெரிய எண்ணிலிருந்து 1 ஐக் கழித்ததற்கும் சிறிய எண்ணுடன் 1 ஐக் கூட்டியதற்கும் இடையே உள்ள பெருக்கல் பலன் என்ன?

(2) இரண்டு எண்களில் பெரிய எண்ணுடன் 1 ஐ கூட்டியதற்கும், சிறிய எண்ணிலிருந்து 1 ஐ கழித்ததற்கும் இடையே உள்ள பெருக்கல் பலன், எண்களின் பெருக்கல் பலனைவிட 5 குறைவு ஆகும். பெரியதிலிருந்து, 1 ஐக் கழித்து, சிறியதுடன் 1 ஐக் கூட்டிப் பெருக்கினால் பெருக்கல் பலன் எவ்வளவு கூடும்?

(3) இரண்டு எண்களில் பெரிய எண்ணுடன் 1 ஐக் கூட்டிய எண்ணிற்கும் சிறிய எண்ணிலிருந்து 1 ஐக் கழித்ததற்கும் இடையே உள்ள பெருக்கல் பலன் 540; பெரியதிலிருந்து 1 ஐக் கழித்ததற்கும், சிறிய எண்ணுடன் 1 ஐக் கூட்டியதற்கும் இடையே உள்ள பெருக்கல் பலன் 560.

(i) எண்களின் பெருக்கல் பலன் என்ன?

(ii) எண்களுக்கிடையேயுள்ள வித்தியாசம் என்ன?

(iii) எண்கள் எவை?

(4) ஒரு செவ்வகத்தின் நீளத்தை 3 மீட்டர் கூட்டவும், அகலத்தை 2 மீட்டர் குறைக்கவும் செய்தால், பரப்பளவு 10 சதுர மீட்டர் குறையும். நீளம் 2 மீட்டர் குறைக்கவும் அகலம் 3 மீட்டர் கூட்டவும் செய்தால் பரப்பளவு 30 சதுர மீட்டர் அதிகரிக்கும் எனில் செவ்வகத்தின் நீளத்தையும் அகலத்தையும் கணக்கிடவும்.

5

விகிதமுறா எண் பெருக்கல்

ஒரு சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளம், பக்கத்தின் நீளத்தின் பின்ன எண் மடங்காக எழுத இயலாது எனப் பார்த்தோம் அல்லவா. வேறொரு முறையில் கூறினால் சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளத்தை அலகாக எடுத்தால் மூலைவிட்டத்தின் நீளத்தை எந்தவொரு பின்ன எண்ணாலும் எழுத இயலாது.

இந்த நீளத்தை $\sqrt{2}$ என்ற அடையாளத்தால் குறிப்பிடுவதாகப் பார்த்தோம். இது போன்ற வேறு சில புதிய எண்களையும் பார்த்தோம் (இத்தகைய வேறொரு எண், **வட்டங்களின் அளவுகள்** என்ற பாடத்தில் காணலாம்).

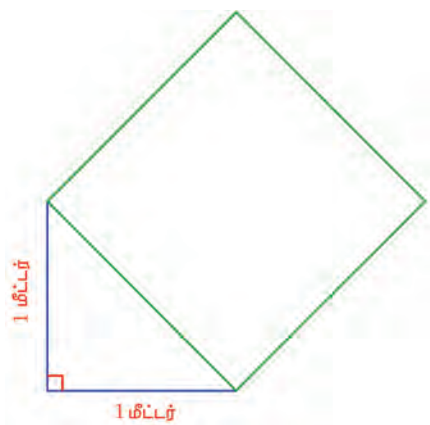
இவ்வாறு ஏதேனும் அலகின் அடிப்படையில் பின்ன எண்களாகக் கூற இயலாத நீளங்களைக் குறிப்பிட பயன்படுத்தும் எண்களையெல்லாம் விகிதமுறா எண்கள் எனக் கூறலாம்.

விகிதமுறா எண்களால் குறிப்பிடும் நீளங்கள் சேர்த்து வைக்கும் சூழல்கள், அத்தகைய எண்களைக் கூட்டுதல் என்ற செயலாக மாறுவதையும் பார்த்தோம்.

இனிப் பரப்பளவுகள் பயன்படுத்தும் சில சூழல்கள், இத்தகைய எண்களின் பெருக்கல் என்ற செயலுக்குக் கொண்டு செல்வது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம்.

பெருக்கல்

இந்தப் படத்தை பல தடவை பார்த்திருக்கிறோம் அல்லவா. இதில் சதுரத்தின் சுற்றளவு எத்தனை மீட்டர்?



அதன் ஒவ்வொரு பக்கத்தினுடையவும் நீளம் $\sqrt{2}$ மீட்டர் எனத் தெரியும். அப்படியானால் சுற்றளவு கிடைக்க அதன் நான்கு மடங்கை கணக்கிட்டால் போதும்.

அதாவது $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$

பிற எண்களைப் போல $\sqrt{2}$ இன் 4 மடங்கையும் $4\times\sqrt{2}$ என அல்லது $\sqrt{2}\times 4$ என எழுதலாம். இதைப் பொதுவாகப் பெருக்கல் அடையாளம் இல்லாமல், $4\sqrt{2}$ என எழுதுவோம்.

$$4\sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$$

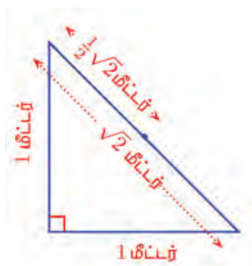
இந்த எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான எண்கள் கண்டுபிடிக்க $\sqrt{2}$ என்ற எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்களின் நான்கு மடங்கு எடுக்க வேண்டும்:

$$4 \times 1.4, \quad 4 \times 1.41, \quad 4 \times 1.414, \ldots$$

அப்போது நமது சதுரத்தின் சுற்றளவு, மில்லிமீட்டர் வரை சரியாக எடுத்தால்,

$$4 \times 1.414 = 5.656 \text{ மீட்டர்.}$$

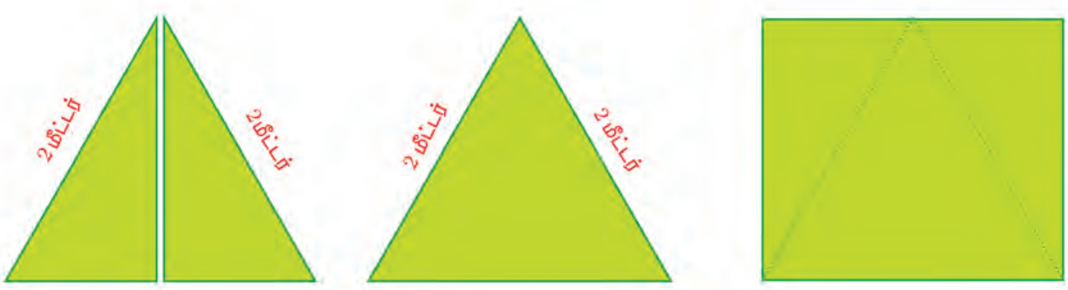
இதுபோல $\sqrt{2}$ இன் பாதியை $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ என எழுதுகிறோம்;



$\sqrt{2}$ என்ற எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்களின் பாதி எடுத்தால், $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ என்ற எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்கள் கிடைக்கும்; அதாவது,

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.7071\ldots$$

இனி இந்தப் படங்களைப் பார்ப்போம்.



ஒன்று போலுள்ள இரண்டு சமபக்க முக்கோணங்களில் ஒன்றைச் செங்கோண முக்கோணங்களாக வெட்டி மற்ற முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களிலும் வைத்து ஒரு செவ்வகமாக மாற்றப்பட்டுள்ளது.

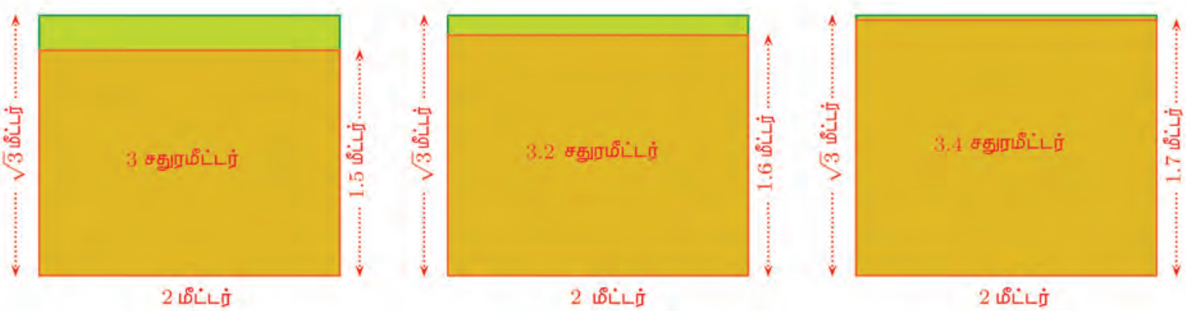
இந்தச் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு என்ன?

பக்கங்களின் நீளம் நமக்குத் தெரியும்:

பக்கங்களின் நீளங்கள் பின்ன எண்கள் எனில், அவற்றின் பெருக்கல் பலனே பரப்பளவு ஆகும்.

இங்கும் பரப்பளவு, பக்கங்களின் பெருக்கல் பலனான $2\sqrt{3}$ சதுர மீட்டரா?

இதனைப் பரிசோதனை செய்ய, ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 2 மீட்டரும், மற்ற பக்கத்தின் நீளம் $\sqrt{3}$ இன் அடுத்தடுத்து வருகின்ற பின்ன எண்களுமான செவ்வகங்களை இதற்குள் வரைந்து பார்க்கவும்:



தொடர்ந்து உள்ளே இருக்கும் செவ்வகங்களின் உயரங்கள் 1.73 மீட்டர், 1.732 மீட்டர், ... என எடுக்கும்போது அவற்றின் பரப்பளவு இந்த எண்களின் இரண்டு மடங்கு சதுர மீட்டர் எனக் கிடைக்கும்.

வடிவியலாகப் பார்க்கும்போது இவ்வாறு உள்ளே வரைகின்ற செவ்வகங்கள் வெளியேயுள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பளவுடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும்.

அதாவது,

$$2 \times 1.7, \qquad 2 \times 1.73, \qquad 2 \times 1.732, \ldots$$

என்னும் எண்கள் வெளியேயுள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பளவுடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும்.

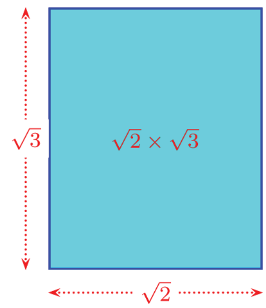
முன்பு கூறியதுபோல, இந்த எண்கள் நெருங்குவது $2\sqrt{3}$ என்ற எண்ணை அல்லவா.

அவ்வாறு பக்கங்களின் நீளங்கள் 2 உம் $\sqrt{3}$ உம் ஆன செவ்வகத்தின் பரப்பளவு, $2\sqrt{3}$ எனக் கிடைத்தது.

இனி செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ஆனால்?

இந்தப் பரப்பளவைக் குறிப்பிடுவது $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ என்ற அடையாளத்தால் ஆகும்.

இதை எண் முறையில் விளக்க, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ என்பவற்றுடன் ஏறத்தாழ சமமான பின்ன எண்களை வரிசையாகப் பெருக்கி தேவையான தசம இடங்கள் வரை எடுக்க வேண்டும்.



$$\begin{array}{cccccc} 1.4 & 1.41 & 1.414 & \ldots & \rightarrow & \sqrt{2} \\ 1.7 & 1.73 & 1.732 & \ldots & \rightarrow & \sqrt{3} \\ \hline 2.4 & 2.44 & 2.449 & \ldots & \rightarrow & \sqrt{2} \times \sqrt{3} \end{array}$$

அதாவது,

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2.449\ldots$$

இங்கு ஒரு சந்தேகம் ஏற்படும்.

எண்ணல் எண்ணோ அல்லது பின்ன எண்ணோ ஆன வர்க்க மூலங்களின் பெருக்கல் பலன், பெருக்கல் பலனின் வர்க்க மூலத்திற்குச் சமமாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\sqrt{4} \times \sqrt{25} = 2 \times 5 = 10$$

என்று கணக்கிடுவதுபோல,

$$\sqrt{4} \times \sqrt{25} = \sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = 10$$

எனவும் கணக்கீடு செய்யலாம்.

இதுபோல $$\sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

என்றும்

$$\sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10}$$

என்றும் கணக்கிடலாம்.

தசம கணக்கு

தசம வடிவத்தில் உள்ள எண்களை ஒரு குறிப்பிட்ட இடம்வரை சுருக்கி எழுதும் போது அடுத்த இடத்தில் உள்ள இலக்கம் 5 அல்லது அதிகமெனில் நமக்கு வேண்டிய இடத்தில் உள்ள இலக்கத்துடன் 1 கூட்டி எடுக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக $1.7 \times 1.4 = 2.38$ ஆனபடியினால் இந்த பெருக்கல் பலனை ஒரு தசம இடத்திற்குச் சுருக்கி எழுதுவது 2.4 என்றாகும்.

அப்படியானால் இதுபோல $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ஆகுமா?

இதைப் பரிசோதனை செய்ய, $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ க்கு நெருங்கி நெருங்கி வருகின்ற 2.4, 2.44, 2.449, ... என்ற பின்ன எண்களின் வர்க்கங்கள் 6 ஐ நெருங்கி நெருங்கி வருமா என்று பரிசோதனை செய்ய வேண்டும்.

$$\begin{aligned} 2.4^2 &= 5.76 \\ 2.44^2 &\approx 5.95 \\ 2.449^2 &\approx 5.998 \end{aligned}$$

இவற்றின் வர்க்கங்கள் 6 ஐ நெருங்கி நெருங்கி வருவதால்,

$$\sqrt{6} = 2.449\ldots$$

முன்பு $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ஆக கிடைத்ததும் இது அல்லவா?

அப்படியானால்,

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

2 ற்கும் 3 ற்கும் பதிலாக மற்ற எண்ணல் எண்கள் எடுத்தாலும், இதைப் போன்று வர்க்க மூலங்களின் பெருக்கல் பலனே பெருக்கற் பலனின் வர்க்க மூலம் என்று பார்க்கலாம். அதாவது,

> x, y என்ற எந்த இரண்டு மிகை எண்கள் எடுத்தாலும் $\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

வர்க்க மூலங்களை எளிதாக்க இதைப் பயன் படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக, இரண்டு செங்கோணப் பக்கங்களும் 3 சென்டிமீட்டர் ஆன செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் நீளத்தைப் பார்ப்போம்.

பைதகோரஸ் தேற்றப்படி கர்ணம் பக்கமான சதுரத்தின் பரப்பளவு $3^2 + 3^2 = 18$ சதுர சென்டிமீட்டர், அப்படியானால் கர்ணத்தின் நீளம் $\sqrt{18}$ சென்டிமீட்டர்.

இனி 18 ஐ 9×2 என எழுதினால் இதை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

இதை வடிவியல் முறையில் பார்க்கலாம்:

பெருக்கலும் வர்க்கமூலமும்

$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ க்கு அடுத்தடுத்து வருகின்ற எண்கள் 2.4, 2.44, 2.449, ... எனப் பார்த்தோமல்லவா? இவற்றின் வர்க்கங்கள் 6 ஐ நெருங்கி வருவது ஏன்?

$$1.4 \times 1.7,\ 1.41 \times 1.73,\ 1.414 \times 1.732,\ \ldots$$

என்ற பெருக்கல் பலனுடன் ஏறக்குறைய சமமான எண்களாக அல்லவா இந்த எண்கள் கிடைத்தன. இவற்றின் வர்க்கங்கள்

$$(1.4 \times 1.7)^2,\ (1.41 \times 1.73)^2,\ (1.414 \times 1.732)^2,\ \ldots$$

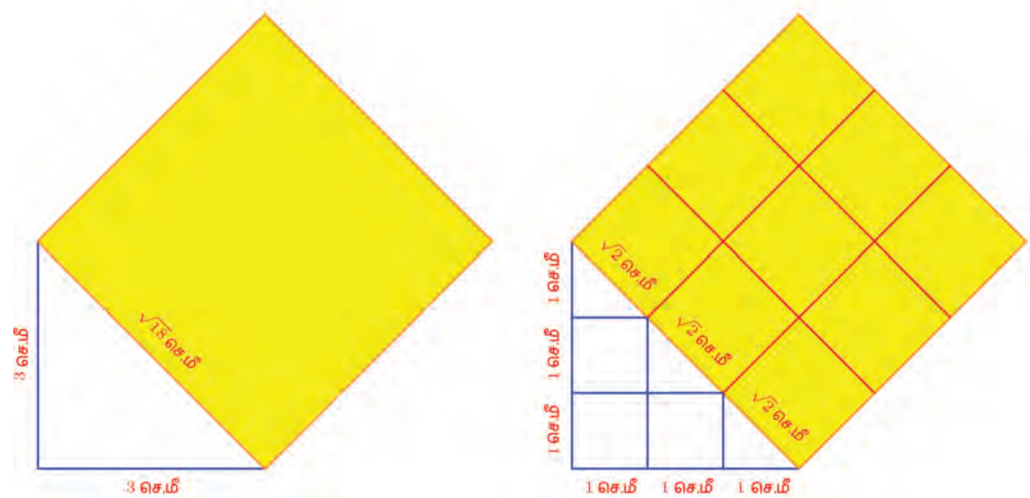
இந்தப் பெருக்கல் பலன்களை வர்க்கங்களின் பெருக்கல் பலனாக எழுதலாம் அல்லவா.

$$(1.4 \times 1.7)^2 = 1.4^2 \times 1.7^2$$

$$(1.41 \times 1.73)^2 = 1.41^2 \times 1.73^2$$

$$(1.414 \times 1.732)^2 = 1.414^2 \times 1.732^2$$

வலதுபக்க பெருக்கல் பலன்களில், 1.4^2, 1.41^2, 1.414^2, ... என்ற எண்கள் 2 ஐ நெருங்கி நெருங்கி வருகின்ற எண்களும், 1.7^2, 1.73^2, 1.732^2, ... என்ற எண்கள் 3 ஐ நெருங்கி வருகின்ற எண்களும் ஆகும். அப்போது அவற்றின் பெருக்கல் பலன்கள் 6 ஐ நெருங்கி நெருங்கி வருகின்றன.



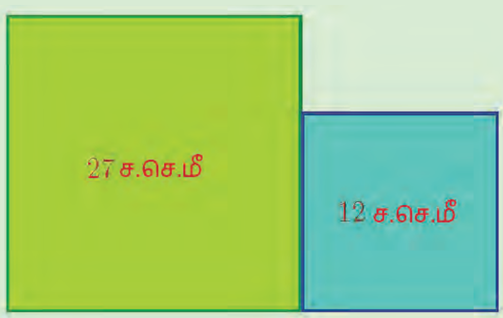
(1) ஒரே அளவுள்ள நான்கு சமபக்க முக்கோணங்களில் இரண்டை நடுப்பகுதி வழி வெட்டியும் இரண்டை முழுவதுமாகச் சேர்த்து வைத்தும் ஒரு செவ்வகம் உருவாக்கலாம்:

சமபக்க முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டர் எனில், செவ்வகத்தின் சுற்றளவும் பரப்பளவும் எவ்வளவு?

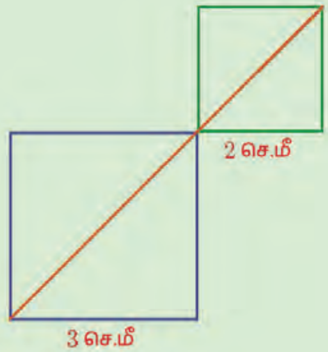
(2) ஒரு சதுரமும், அதன் பக்கங்களின் நீளங்களின் இரண்டு மடங்கு நீளமுள்ள பக்கங்களுடைய சமபக்க முக்கோணமும் கீழே காண்பதுபோல வெட்டி அடுக்கி ஒரு சரிவகம் உருவாக்கலாம்:

சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டர் என எடுத்தால், சரிவகத்தின் சுற்றளவும் பரப்பளவும் எவ்வளவு?

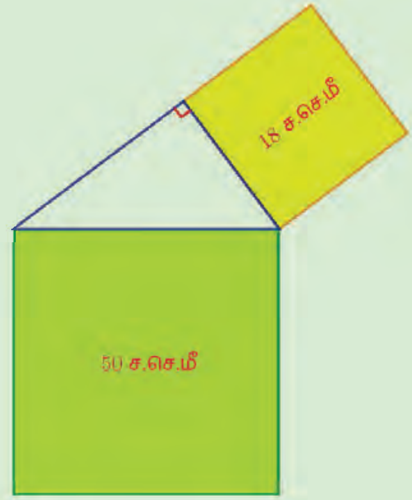
(3) இரண்டு சதுரங்கள் சேர்த்து வைத்த வடிவம் படத்தில் தரப்பட்டுள்ளது. இந்த வடிவத்தின் அடிப்பக்கத்தின் நீளம், சென்டிமீட்டர் வரை துல்லியமாகக் கணக்கிடவும்.



(4) இரண்டு சதுரங்கள் ஓர் உச்சியில் சேர்த்து வைத்த வடிவம் படத்தில் தரப்பட்டுள்ளது. சாய்வான கோட்டின் நீளம் கண்டுபிடிக்கவும்.



(5) படத்தில் காணப்படும் செங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்றாவது பக்கத்தின் நீளத்தையும் சுற்றளவையும் கணக்கிடவும்.



(6) கீழே தரப்பட்டுள்ள எண் ஜோடிகளில் சிலவற்றின் பெருக்கல் பலன் எண்ணல் எண் அல்லது பின்ன எண் ஆகும். அவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(i) $\sqrt{3}, \sqrt{12}$ (ii) $\sqrt{3}, \sqrt{1.2}$ (iii) $\sqrt{5}, \sqrt{8}$

(iv) $\sqrt{0.5}, \sqrt{8}$ (v) $\sqrt{7\frac{1}{2}}, \sqrt{3\frac{1}{3}}$ (vi) $\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{1}{10}}$

வகுத்தல்

$2 \times 3 = 6$ என்ற பெருக்கலை $\frac{6}{2} = 3$ என அல்லது $\frac{6}{3} = 2$ என வகுத்தலாக எழுதலாம் அல்லவா. இதேபோன்று $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ என்ற பெருக்கலையும் வகுத்தலாக எழுதலாம்.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

பொதுவாகக் கூறினால், எண்ணல் எண்களோ அல்லது பின்ன எண்களோ ஆன எந்த x, y ஐ எடுத்தாலும் $x \times y = z$ என்ற பெருக்கலை $\frac{z}{x} = y$ என்றும், $\frac{z}{y} = x$ என்றும் வகுத்தலாக எழுதலாம். இதுபோல,

x, y என்ற எந்த இரண்டு மிகை எண்கள் எடுத்தாலும்

$$\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{z}$$

என்ற பெருக்கலை வகுத்தலாக

$$\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}} = \sqrt{y} \qquad \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}$$

என எழுதலாம்.

இனி $\frac{6}{2}=3$ உம் $\frac{6}{3}=2$ உம் ஆனபடியால்

$$\sqrt{\frac{6}{2}}=\sqrt{3}\,, \qquad \sqrt{\frac{6}{3}}=\sqrt{2}$$

என்றும் காணலாம். முன்பு பார்த்தது என்ன?

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

இந்த இரண்டு ஜோடி சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\sqrt{\frac{6}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \qquad \sqrt{\frac{6}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

என்றெல்லாம் காணலாம்.

இதுபோல

$$\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{3\times\frac{2}{3}}=\sqrt{2}$$

என்றும் தொடர்ந்து இந்தப் பெருக்கலை வகுத்தலாக,

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

என்றும் எழுதலாம்.

x, y என்ற எந்த இரண்டு மிகை எண்களை எடுத்தாலும்

$$\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

இனி இத்தகைய வர்க்க மூலங்களைக் கணக்கீடு செய்வது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம். எடுத்துக்காட்டாக $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ஐக் கணக்கிட முதலில்

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

என எழுதலாம். தொடர்ந்து $\sqrt{2}$ என்ற எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான ஏதேனும் தசம எண்ணால் ஒன்றை வகுத்து, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ என்ற எண்ணுடன் ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்ணின் தசம வடிவத்தைக் கணக்கிடலாம்:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\approx\frac{1}{1.414}=0.707$$

வேறொரு எளிய முறையில்; $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ ஆனபடியால் இவ்வாறு கணக்கீடு செய்யலாம்:

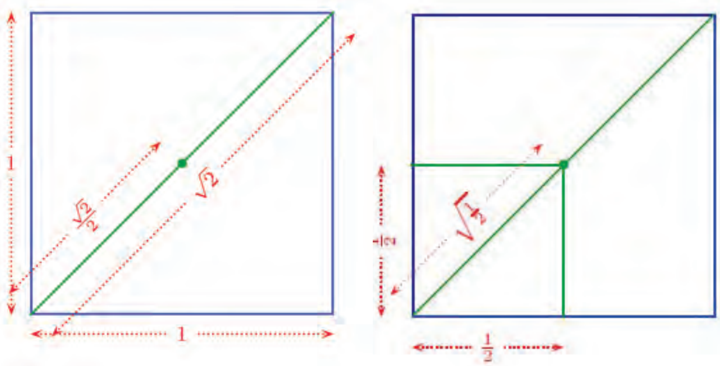
$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

இனி

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx\frac{1.414}{2}=0.707$$

எனவும் எளிதாகக் கணக்கிடலாம்.

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ என்பதை வடிவியல் முறையிலும் காணலாம்:



இதுபோல

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

என்றும் கணக்கிடலாம்

பொதுவாகக் கூறினால்,

x எந்த மிகை எண் ஆனாலும்

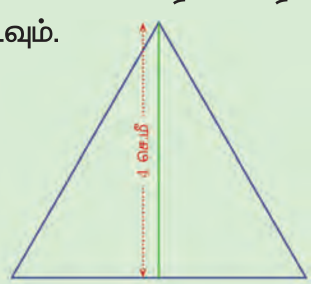
$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x}{x^2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

(1) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ என நிறுவுக. இதைப் பயன்படுத்தி

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ இரண்டு தசம இடம் வரை கணக்கிடவும்.

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ இரண்டு தசம இடம் வரை கணக்கிடவும்.

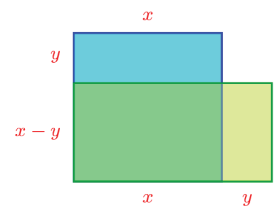
(2) படத்தில் சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளத்தை மில்லிமீட்டர் வரை துல்லியமாகக் கணக்கிடவும்.



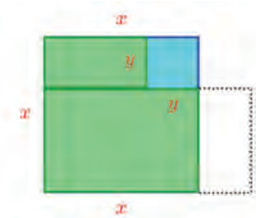
பெருக்கல் சமன்பாடு

$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ என்ற சமன்பாட்டின் வடிவியல் நினைவு இருக்கிறதல்லவா?

பக்கங்களின் நீளம் x ஆன சதுரத்தின் ஒரு பக்கம் y கூட்டி மற்ற பக்கம் y குறைத்து, ஒரு செவ்வகம் வரைந்ததாகக் கருதுவோம்.



செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $(x+y)(x-y)$. செவ்வகத்தின் வலது பக்கமாக நீண்டு இருக்கும் பகுதியை வெட்டியெடுத்து மேலே வைத்தால்?



இந்தப் படத்தில் பச்சைநிற பாகத்தின் பரப்பளவு x^2-y^2

இது முதலில் வரைந்த பச்சைச் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு அல்லவா?

நீளங்கள் விகிதமுறா எண்கள் ஆனாலும் பரப்பளவு பெருக்கல் பலன் அல்லவா. அப்படியானால் x, y விகிதமுறா எண்கள் ஆனாலும் $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ ஆகும்.

இதுபோலப்பிற முற்றொருமைகளும் விகிதமுறா எண்களுக்குச் சரியாகும் எனப் பார்க்கலாம்.

(3) படத்தில் சிவப்பு முக்கோணங்கள் எல்லாம் சமபக்க முக்கோணங்கள் ஆகும். வெளியேயுள்ள சதுரத்தினுடையவும் உள்ளேயுள்ள சதுரத்தினுடையவும் பக்கங்களின் விகிதம் என்ன?

(4) $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ என்றும் $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$ என்றும் நிறுவுக. இது போன்ற வேறு எண்கள் கண்டுபிடிக்கலாமா?

(5) கீழே தரப்பட்டுள்ள எண் ஜோடிகளில் முதல் எண்ணை இரண்டாம் எண்ணால் வகுத்தால் சில எண்ணல் எண்ணாகவோ, பின்ன எண்ணாகவோ கிடைக்கும். அவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

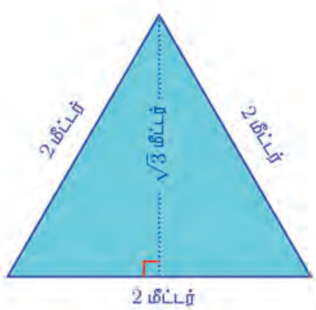
(i) $\sqrt{72}, \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{27}, \sqrt{3}$ (iii) $\sqrt{125}, \sqrt{50}$

(iv) $\sqrt{10}, \sqrt{2}$ (v) $\sqrt{20}, \sqrt{5}$ (vi) $\sqrt{18}, \sqrt{8}$

முக்கோண பரப்பளவுகள்

பின்ன எண்களாக எழுத இயலாத சில நீளங்களைக் குறிப்பிடுவதற்காக $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ போன்ற எண்கள் பயன்படுத்தப்பட்டன. அதைத் தொடர்ந்து சில செவ்வகங்களின் பரப்பளவினைக் குறிப்பிடவும். இத்தகைய எண்கள் தேவையெனக் கண்டோம்.

ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் எண்ணல் எண்கள் அல்லது பின்ன எண்கள் எனில் பரப்பளவும் அவ்வாறே இருக்கும். ஆனால் பக்கங்கள் எல்லாம் எண்ணல் எண்கள் அல்லது பின்ன எண்கள் ஆன முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் அவ்வாறு ஆக வேண்டுமென்பதில்லை.



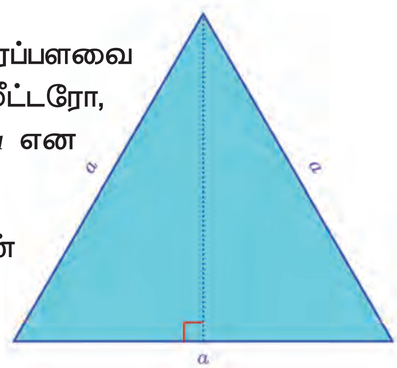
எடுத்துக்காட்டாகப் பக்கங்கள் எல்லாம் 2 மீட்டர் ஆன முக்கோணத்தின் உயரம் $\sqrt{3}$ எனப் பார்த்தோமல்லவா:

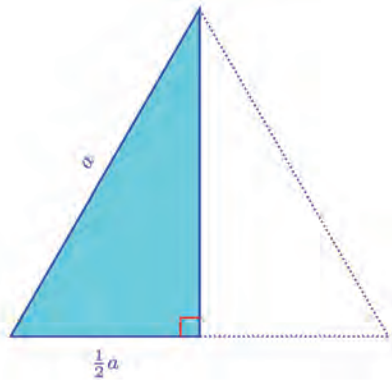
இதன் பரப்பளவு எவ்வளவு?

$\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ சதுர மீட்டர்.

இதைப்போன்று எந்த சமபக்க முக்கோணத்தினுடையவும் பரப்பளவை இவ்வாறு கணக்கிடலாம் அல்லவா. பக்கத்தின் நீளம் (சென்டிமீட்டரோ, மீட்டரோ ஏதேனும் ஓர் அலகு பயன்படுத்தி அளந்தபோது) a என எடுத்தால், அதன் உயரம் எவ்வளவு?

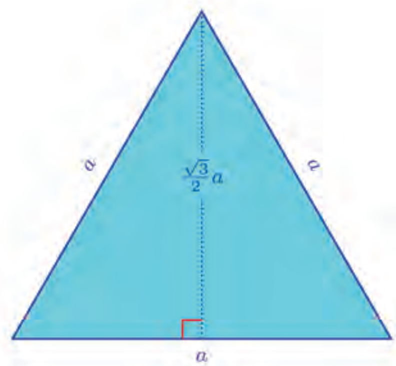
இதற்கு உள்ளேயுள்ள இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களின் கர்ணத்தையும் அடிப்பக்கத்தையும் எழுதலாம் அல்லவா?





அப்படியானால் மூன்றாவது பக்கத்தின் வர்க்கம்

$$a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$$



இதிலிருந்து இந்தப் பக்கத்தின் நீளம்

$$\sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

இதுவே சமபக்க முக்கோணத்தின் உயரம்

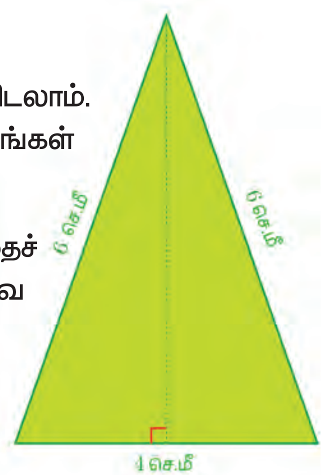
இனிப் பரப்பளவைக் கணக்கிடலாம் அல்லவா:

$$\text{பரப்பளவு} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

அதாவது,

ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உயரம், பக்கத்தின் பாதியின் $\sqrt{3}$ மடங்கும், பரப்பளவு பக்கத்தின் பாதியின் வர்க்கத்தின் $\sqrt{3}$ மடங்குமாகும்.

எடுத்துக்காட்டாகப் பக்கங்கள் எல்லாம் 8 சென்டிமீட்டர் ஆன முக்கோணத்தின் உயரம் $4\sqrt{3}$ சென்டிமீட்டர், பரப்பளவு $16\sqrt{3}$ சதுர சென்டிமீட்டர்.



இதுபோல இருசமபக்க முக்கோணங்களின் பரப்பளவைக் கணக்கிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு பக்கம் 4 சென்டிமீட்டரும் மற்ற இரண்டு பக்கங்கள் 6 சென்டிமீட்டரும் ஆன முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்.

இதிலும் மேல் உச்சியிலிருந்துள்ள செங்குத்துக்கோடு அடிப்பக்கத்தைச் சமபாகமாகப் பிரிக்கும் அல்லவா. (எட்டாம் வகுப்பில் சர்வ சமமுக்கோணங்கள் என்ற பாடம்.)

அப்படியானால் சமபக்க முக்கோணத்தில் செய்ததுபோல இதிலும் உயரத்தின் வர்க்கம் கணக்கிட்டால் போதாதா?

$$\text{உயரத்தின் வர்க்கம்} = 6^2 - 2^2 = 32$$

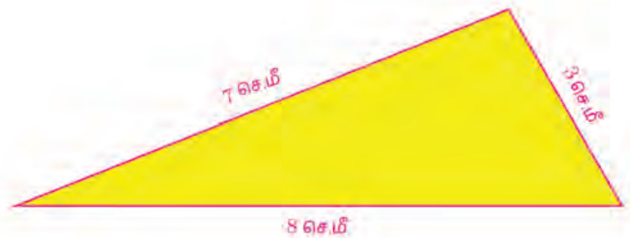
அப்படியானால் உயரம்

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \text{ x } 2} = 4\sqrt{2} \text{ சென்டிமீட்டர்}$$

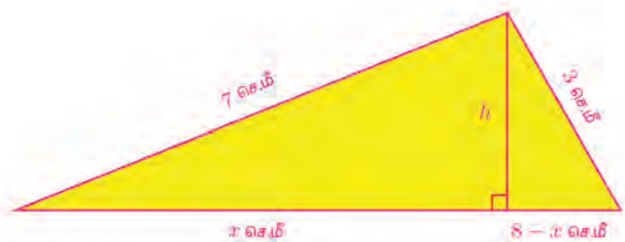
இனி பரப்பளவும் கணக்கிடலாம்

$$\text{பரப்பளவு} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ சதுர சென்டிமீட்டர்}$$

இந்த முறையில் எந்த முக்கோணத்தினுடையவும் பரப்பளவு கணக்கிடலாம் (சற்று அதிகம் கணக்கீடுகள் செய்ய வேண்டும்) எடுத்துக்காட்டாக இந்த முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்:



முதலில் இதன் உயரம் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். இதை h சென்டிமீட்டர் என்றும் இந்த செங்குத்துக் கோடு அடிப்பக்கத்தை வெட்டும் ஒரு துண்டின் நீளம் x சென்டிமீட்டர் என்றும் எழுதிப் பார்ப்போம்:



அப்போது இடது பக்க முக்கோணத்திலிருந்து

$$x^2 + h^2 = 49$$

என்றும் வலதுபக்க முக்கோணத்திலிருந்து

$$(8-x)^2 + h^2 = 9$$

என்றும் கிடைக்குமல்லவா.

முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து இரண்டாவது சமன்பாட்டைக் கழித்தால்

$$x^2 - (8-x)^2 = 40$$

என்றும் கிடைக்கும்.

வர்க்கங்களின் வித்தியாசத்தைத் தொகையினுடையவும் வித்தியாசத்தினுடையவும் பெருக்கல் பலனாக எழுதலாம் என எட்டாம் வகுப்பில் பார்த்திருக்கிறோம் அல்லவா.

$$x^2 - (8-x)^2 = (x + (8-x))\,(x - (8-x))$$

$$= 8(2x - 8)$$

அப்போது நமது சமன்பாடு

$$8(2x-8) = 40$$

என்பதாகும், இதிலிருந்து $2x-8=5$ என்றும், அதைத் தொடர்ந்து $x=\frac{1}{2}(5+8)=6\frac{1}{2}$

என்றும் கிடைக்கும்.

இனி மீண்டும் இடது முக்கோணத்திலிருந்து

$$h^2 = 7^2-\left(6\frac{1}{2}\right)^2 = 13\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$= 6\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 6\frac{3}{4}$$

என்று காணலாம். அப்போது

$$h = \sqrt{6\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

இதனைப் பயன்படுத்தி

பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\times 8\times\frac{3}{2}\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ சதுர சென்டிமீட்டர் ஆகும்.

இந்தக் கணக்கீடுகளில் பக்கங்களின் நீளங்கள் பொதுவாக a, b, c என எடுத்தால், உயரம் கண்டுபிடிக்காமல் நேரடியாகப் பரப்பளவு கணக்கீடு செய்வதற்கான ஓர் இயற்கணித வாக்கியம் கிடைக்கும். அது,

பக்கங்களின் நீளம் a, b, c ஆன முக்கோணத்தில்

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

என எடுத்தால், பரப்பளவு

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ என்பதாகும்.

ஆறாம் நூற்றாண்டில் கிரீஸில் வாழ்ந்த ஹெரோன் என்ற கணித மேதை இதைக் கண்டுபிடித்தார். (இது எவ்வாறு கிடைத்தது என அறிய விருப்பம் உண்டெனில், பாடத்தின் இறுதியில் உள்ள பிற்சேர்க்கையைப் பார்க்கவும்).

எடுத்துக்காட்டாக, இப்போது செய்த கணக்கில்

$$a=8 \qquad b=7 \qquad c=3$$

என எடுத்தால்

$$s=\frac{1}{2}(8+7+3)=9$$

தொடர்ந்து

$$s-a=1$$

$$s-b=2$$

$$s-c=6$$

என்றும் காணலாம். அப்படியானால்,

$$\text{பரப்பளவு} = \sqrt{9\times1\times2\times6} = \sqrt{9\times4\times3} = 6\sqrt{3}$$

(1) சில சமபக்க முக்கோணங்களின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. பரப்பளவு காண்க.

(i) 10 செ.மீ. (ii) 5 செ.மீ (iii) $\sqrt{3}$ செ.மீ

(2) பக்கங்களின் நீளம் 6 சென்டிமீட்டர் ஆன ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.

(3) உயரம் 12 சென்டிமீட்டர் உள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் சுற்றளவையும் பரப்பளவையும் கணக்கிடவும்.

(4) ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் இணையான பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் 6 சென்டி மீட்டர் ஆகும். அதன் சுற்றளவையும் பரப்பளவையும் கணக்கிடவும்.

(5) பக்கங்களின் நீளங்கள் 8 சென்டிமீட்டர், 6 சென்டிமீட்டர், 6 சென்டிமீட்டருள்ள முக்கோணத்தின் உயரத்தையும் பரப்பளவையும்ம் கணக்கிடவும்.

(6) சில முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் நீளங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றினுடையவும் பரப்பளவு கணக்கிடவும்.

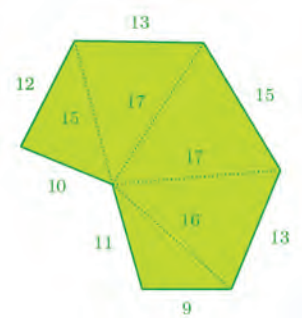
(i) 4 சென்டிமீட்டர், 5 சென்டிமீட்டர், 7 சென்டிமீட்டர்

(ii) 4 சென்டிமீட்டர், 13 சென்டிமீட்டர், 15 சென்டிமீட்டர்

(iii) 5 சென்டிமீட்டர், 12 சென்டிமீட்டர், 13 சென்டிமீட்டர்

இடப்பரப்பு

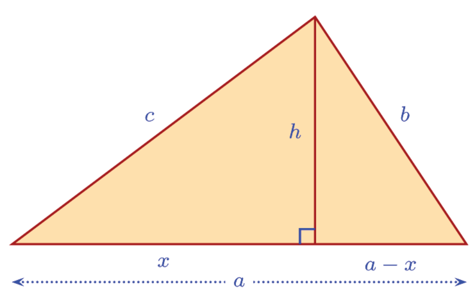
எல்லைகள் எல்லாம் நேர்கோடுகளாக இடங்களின் பரப்பளவு கணக்கிடுவதற்கான ஒருமுறை உள்ளது. முதலில் அதை முக்கோணங்களாகப் பிரித்து, பக்கங்களின் நீளங்கள் கணக்கிடுவதாகும்.



இனி ஒவ்வொரு முக்கோணத்தினுடையவும் பரப்பளவு ஹெரோன் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிட்டு அவற்றையெல்லாம் கூட்டினால் இடத்தின் பரப்பளவு கிடைக்கும்.

பிற்சேர்க்கை

பரப்பளவு கண்டுபிடிப்பதற்கான ஹெரோன் சமன்பாடு எவ்வாறு கிடைத்தது எனப்பார்ப்போம். முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் a, b, c என எடுக்கலாம். முன்பு செய்ததுபோல, ஓர் உச்சியில் இருந்து எதிர்பக்கத்திற்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம் h என்றும் இந்தச்



செங்குத்துக்கோடு பக்கத்தை வெட்டும் ஒரு துண்டின் நீளம் x என்றும் எடுக்கலாம்.

அப்படியானால் இடது செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து

$$x^2 + h^2 = c^2$$

என்றும், வலது செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து

$$(a - x)^2 + h^2 = b^2$$

என்றும் கிடைக்கும். முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து இரண்டாவது சமன்பாட்டைக் கழித்தால்

$$x^2 - (a - x)^2 = c^2 - b^2$$

இனி $x^2 - (a - x)^2$ என்ற வர்க்க வித்தியாசத்தை, தொகையினுடையவும் வித்தியாசத்தினுடையவும் பெருக்கல் பலனாக எழுதலாம்:

$$x^2 - (a - x)^2 = (x + (a - x))\ (x - (a - x)) = a(2x - a)$$

அப்படியானால் முக்கோணத்திலிருந்து கிடைத்த சமன்பாட்டை இவ்வாறு எழுதலாம்

$$a(2x - a) = c^2 - b^2$$

இதிலிருந்து

$$2x - a = \frac{c^2 - b^2}{a}$$

என்றும் தொடர்ந்து

$$2x = \frac{c^2 - b^2}{a} + a = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{a}$$

என்றும் காணலாம். அப்படியானால்

$$x = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}$$

இனி இடது செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து கிடைக்கின்ற

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c + x)\ (c - x)$$

என்ற சமன்பாட்டில் x ஐ இப்போது பார்த்தது போல a, b, c பயன்படுத்தி மாற்றி எழுதலாம்:

$$h^2 = \left(c + \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}\right)\left(c - \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}\right)$$

இதை எளிதாக்கிப் பின்வருமாறு மாற்றலாம்:

$$h^2 = \left(\frac{2ac + (c^2 - b^2 + a^2)}{2a}\right)\left(\frac{2ac - (c^2 - b^2 + a^2)}{2a}\right)$$

முதல் பின்னத்தின் தொகுதியை இவ்வாறு எளிதாக்கலாம்:

$$\begin{aligned} 2ac + (c^2 - b^2 + a^2) &= (a^2 + c^2 + 2ac) - b^2 \\ &= (a + c)^2 - b^2 \end{aligned}$$

$$= ((a + c) + b)\,((a + c) - b)$$
$$= (a + c + b)\,(a + c - b)$$

இரண்டாவது பின்னத்தின் தொகுதி பின்வருமாறு:

$$2ac - (c^2 - b^2 + a^2) = 2ac - c^2 + b^2 - a^2$$
$$= b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac)$$
$$= b^2 - (a - c)^2$$
$$= (b + a - c)\,(b - (a - c))$$
$$= (b + a - c)\,(b - a + c)$$

இவற்றைப் பயன்படுத்தி, h^2 ஐ இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$h^2 = \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}$$

இனி முக்கோணத்தின் சுற்றளவை p என எழுதினால்,

$$p = a + b + c$$

மேலும்

$$p - 2a = (a + b + c) - 2a = (b + c - a)$$
$$p - 2b = (a + b + c) - 2b = (a - b + c)$$
$$p - 2c = (a + b + c) - 2c = (a + b - c)$$

என்றும் காணலாம். அப்படியானால்

$$h^2 = \frac{p(p-2b)(p-2c)(p-2a)}{4a^2}$$

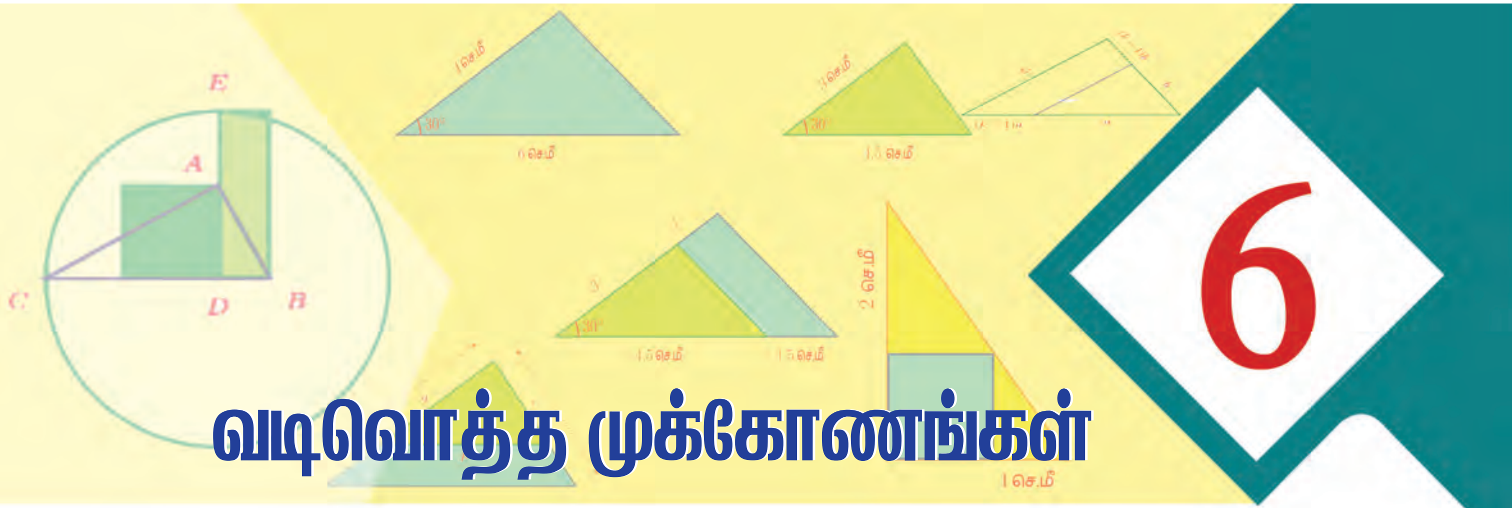
அடுத்ததாகச் சுற்றளவின் பாதியை s என எடுத்தால் $p = 2s$ ஆகுமல்லவா. அப்போது

$$h^2 = \frac{2s(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}{4a^2}$$
$$= \frac{2s \times 2(s-b) \times 2(s-c) \times 2(s-a)}{4a^2}$$
$$= \frac{4s(s-b)(s-c) \times (s-a)}{a^2}$$

இதிலிருந்து

$$h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

$$\text{பரப்பளவு} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \times a \times \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

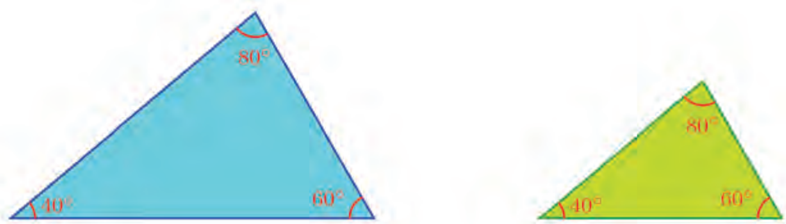


6 வடிவொத்த முக்கோணங்கள்

கோணங்களும் பக்கங்களும்

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் எல்லாம் வேறொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்குச் சமம் எனில் அவற்றின் கோணங்களும் சமம் என்று தெரியும் அல்லவா. மாறாகக் கோணங்கள் சமமானால் பக்கங்கள் சமமாக வேண்டும் என்பதில்லை என்பதும் தெரியும் (8 ஆம் வகுப்பு சர்வ சமமுக்கோணங்கள் என்ற பாடம்). அப்படியானால் ஒரு வினா ஒரே கோணங்கள் உள்ள இரண்டு முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் நீளங்களுக்கு இடையே ஏதேனும் தொடர்பு உண்டா?

இதைப் பரிசோதனை செய்ய ஒரே கோணங்கள் உள்ள இரண்டு முக்கோணங்கள் வெவ்வேறு அளவுகளில் கட்டியான காகிதத்தில் வரைந்து வெட்டி எடுக்கவும். எடுத்துக்காட்டாகக் கீழ்க் காண்பது போல இரண்டு முக்கோணங்களை உருவாக்கலாம்.

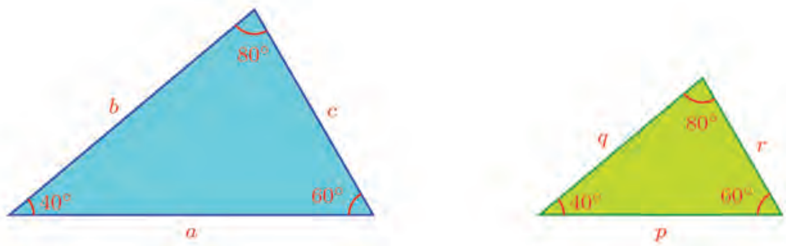


பக்கங்களின் நீளங்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க, சிறிய முக்கோணத்தை எடுத்து பெரிய முக்கோணத்தின் உள்ளே வைக்கவும். மேல் உச்சிகள் சேர்ந்து இருக்கட்டும். கோணங்கள் சமம் ஆனபடியால் இந்த உச்சியில் உள்ள பக்கங்களும் சேர்ந்து இருக்கும்.

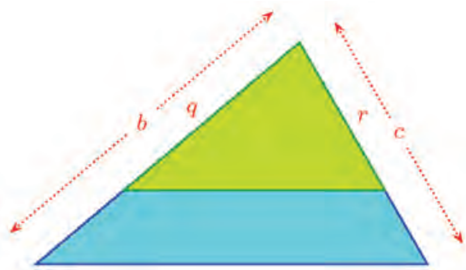
இதில் இரண்டு முக்கோணங்களுடையவும். அடிப் பக்கங்கள் இடது பக்க கோட்டுடன் ஒரே சாய்வில் அல்லவா இருக்கிறது. அப்படியானால் இந்தப்பக்கங்கள் இணையாகும்.

எனவே சிறிய முக்கோணத்தின் அடிப் பக்கம், பெரிய முக்கோணத்தின் இடது வலது பக்கங்களை ஒரே பாகத்தில் பிரிக்கின்றது (இணைகோடுகள் என்ற பாடம்)

இதைச் சுருக்கமாகக் கூறினால் முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் நீளங்களை எழுத்துக்களால் குறிப்பிடலாம்.



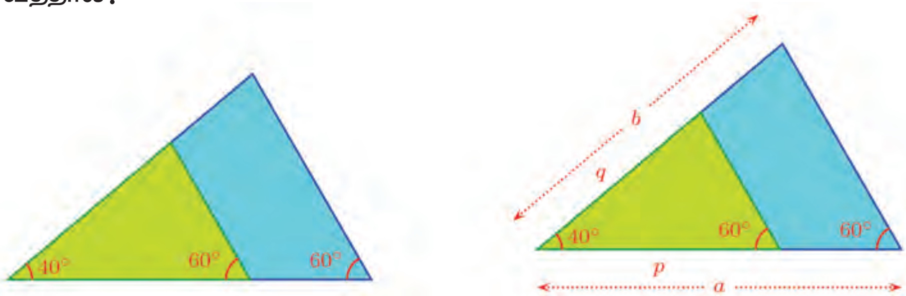
சேர்த்து வைக்கும் போது அளவுகளைக் கீழ்வருமாறு அடையாளப்படுத்தலாம்



அப்போது முன்பு கூறியதைக் (ஒரே பாகங்களாக வெட்டுகிறது) கீழ்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{q}{b} = \frac{r}{c}$$

முக்கோணங்களின் மேல் உச்சிகளைச் சேர்த்து வைப்பதற்குப் பதிலாக இடது உச்சிகளைச் சேர்த்துவைத்தால்?



முன்பு செய்த முறையிலேயே, இப்போது முக்கோணத்தின் வலது பக்கங்கள் இணை என்றும் அதனால் சிறிய முக்கோணத்தின் வலது பக்கம் பெரிய முக்கோணத்தின் கீழ் இடது பக்கங்களை ஒரே பாகத்தில் வெட்டுகிறது என்றும் காணலாம். அதாவது

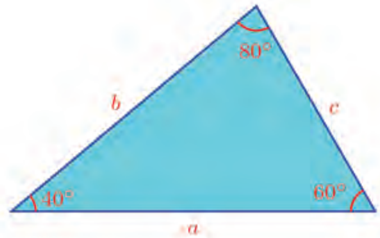
$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b}$$

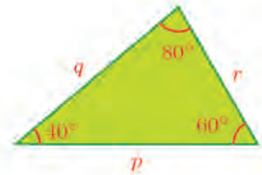
இதையும் முன்பு பார்த்த சமன்பாடையும் ஒப்பிட்டு பார்த்தால்

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c}$$

இந்தச் சமன்பாட்டின் பொருள் என்ன?

முதலில் இதிலுள்ள எழுத்துகள் எதைக் குறிக்கின்றன எனப் பார்க்கலாம்.





- 80° கோணங்களின் எதிரே உள்ள பக்கங்களின் நீளங்கள் a, p
- 60° கோணங்களின் எதிரே உள்ள பக்கங்களின் நீளங்கள் b, q
- 40° கோணங்களின் எதிரே உள்ள பக்கங்களின் நீளங்கள் c, r

இனிச் சமன்பாட்டிலுள்ள பின்ன எண்களின் பொருளைப் பார்க்கலாம்:

- $\frac{p}{a}$ என்ற எண், p என்ற நீளம் a என்ற நீளத்தின் எத்தனை பாகம் என்று காட்டுகிறது.
- $\frac{q}{b}$ என்ற எண், q என்ற நீளம் b என்ற நீளத்தின் எத்தனை பாகம் என்று காட்டுகிறது.
- $\frac{r}{c}$ என்ற எண், r என்ற நீளம் c என்ற நீளத்தின் எத்தனை பாகம் என்று காட்டுகிறது.

அப்போது

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c}$$

என்ற சமன்பாட்டின் பொருள் என்ன?

இந்தப்பாகங்கள் எல்லாம் சமம் ஆகும்.

அதாவது, சமமான கோணங்களுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்களின் நீளங்களை $(p, a), (q, b), (r, c)$ என ஜோடிகளாக்கினால், சிறிய நீளங்களான p, q, r என்பவைப் பெரிய நீளங்களான a, b, c இவற்றின் ஒரே பாகமாகும்.

பெரிய நீளங்கள் எல்லாம் சிறிய நீளங்களின் ஒரே மடங்கு என்றும் கூறலாம்.

இதில் கோணங்கள் 80°, 60°, 40° என்பதற்குப் பதிலாக வேறு எவையானாலும், இங்கே கூறியவை எல்லாம் சரியாகும் அல்லவா.

அப்போது பொதுவாக இவ்வாறு கூறலாம்.

ஒரே கோணங்கள் உள்ள இரண்டு முக்கோணங்களின் சமமான கோணங்களுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்களை ஜோடிகளாக எடுத்தால் சிறிய நீளங்கள் எல்லாம் பெரிய நீளங்களின் ஒரே பாகமாகும். (அதாவது பெரிய நீளங்கள் எல்லாம் சிறிய நீளங்களின் ஒரே மடங்கு ஆகும்)

எல்லா முக்கோணத்திலும் மிகச்சிறிய கோணத்தின் எதிர்ப்பக்கம், முக்கோணத்தின் மிக நீளம் குறைந்த பக்கம்; மிகப்பெரிய கோணத்தின் எதிர்ப்பக்கம், முக்கோணத்தின் மிக நீளம் கூடிய பக்கமும் அல்லவா? அதாவது கோணங்களின் உருவளவின் அடிப்படையில் அவற்றிற்கு எதிரே உள்ள பக்கங்களின் நீளங்கள் அமையும்.

ஜியோஜிப்ராவில் ABC என்ற முக்கோணம் வரையவும். முக்கோணத்தின் எல்லாக் கோணங்களையும் அடையாளப்படுத்தவும். Min = 0 ஆக ஒரு சிலைடர் d உருவாக்கவும். Segment with Given Length கருவியைப் பயன்படுத்தி நீளம் AB இன் d மடங்கோ அல்லது பாகமோ வரும்படியாக ஒரு கோடு வரையவும். இதற்காகக் கோட்டின் நீளம் d*AB என்று கொடுத்தால் போதும். இனி ∠D = ∠A, ∠E = ∠B ஆகும்படி முக்கோணம் DEF வரையவும் இதற்காக Angle with Given Size கருவியைப் பயன்படுத்தி E, D என்னும் புள்ளிகளை வரிசையாகக் கிளிக் செய்யும் போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் கோணத்தின் அளவாக α (∠A இன் அளவு) என்று கொடுக்கவும். அதேபோல் D, E என்பவற்றில் வரிசையாகக் கிளிக் செய்யும் போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் β என்று clockwise ஆகக் கொடுக்கவும். DE', ED' என்னும் கோடுகள் வரைந்து அவை வெட்டும் புள்ளியில் F ஐ அடையாளப்படுத்தவும். இரண்டு முக்கோணங்களினுடையவும் பக்கங்களை அடையாளப்படுத்தவும். இவை ஒரே விகிதத்திலா? முக்கோணம் ABC இன் அளவுகளையும் சிலைடரையும் மாற்றிப் பார்க்கவும்.

இதை இவ்வாறு சுருக்கிக் கூறலாம்.

ஒரே கோணங்கள் உள்ள முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் அளவின் அடிப்படையில் ஒரே விகிதத்திலாகும்.

வேறொரு முறையிலும் இதைக் கூறலாம். இரண்டு அளவுகளில் ஒன்று மற்றதன் எத்தனை மடங்கு (அல்லது பாகம்) என்பதை மாற்றத்தின் வீதம் (scale factor) என்று கூறுவது உண்டு. எடுத்துக்காட்டாக 6 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோட்டையும் 4 சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கோட்டையும் எடுத்தால், பெரிய நீளம் சிறிய நீளத்தின் $1\frac{1}{2}$ மடங்காகும். மாறாகச் சிறிய நீளம் பெரிய நீளத்தின் $\frac{2}{3}$ பாகம் ஆகும். இங்குச் சிறிய நீளத்தில் இருந்து பெரிய நீளத்துக்குள்ள மாற்றத்தின் வீதம் $1\frac{1}{2}$ என்றும், பெரிய நீளத்திலிருந்து சிறிய நீளத்தின் மாற்றத்தின் வீதம் $\frac{2}{3}$ என்றும் கூறலாம்.

பக்கங்களின் நீளங்கள் a, b, c ஆன முக்கோணத்திற்கும் பக்கங்களின் நீளங்கள் p, q, r ஆன முக்கோணத்திற்கும் ஒரே கோணங்கள் எனில் p, q, r என்பவை a, b, c என்பவற்றின் ஒரே மடங்கு அல்லது பாகம் என்று பார்த்தோமல்லவா. இப்போது கூறியதன் அடிப்படையில், முதல் முக்கோணத்தின் அளவுகள் இரண்டாவது முக்கோணத்தின் அளவுகள் ஆவது ஒரே வீதத்தில் ஆகும். இந்த மாற்றத்தின் வீதம் k என எடுத்தால், இந்தத் தொடர்பை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$a = kp, b = kq, c = kr$$

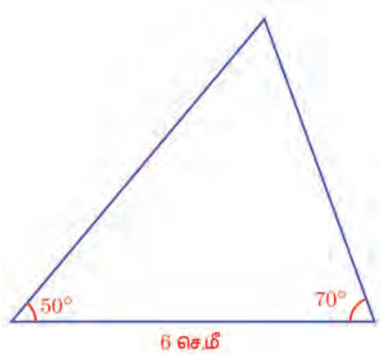
அப்போது முக்கோணத்தைப் பற்றிய பொதுக் கருத்தை இவ்வாறு கூறலாம்.

ஒரே கோணங்கள் உள்ள முக்கோணங்களில், சமமான கோணங்களுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்களின் நீளம் மாறுவது ஒரே வீதத்தில் ஆகும்.

இனிக் கீழே வரும் கணக்கைப் பார்க்கவும்.

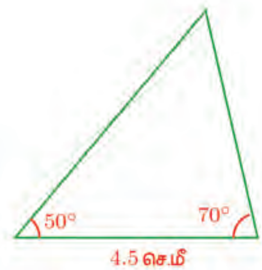
இந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களை எல்லாம் $\frac{3}{4}$ பாகமாக்கிச் சிறிய முக்கோணம் வரைய வேண்டும்.

அடிப்பக்கம் 4.5 சென்டிமீட்டர் ஆக மாற்றினால் போதும். மற்ற பக்கங்கள்?



பெரிய முக்கோணம் வரைந்து, மற்ற இரண்டு பக்கங்களை அளந்து $\frac{3}{4}$ பாகமாக்கி வரைந்தால்?

4.5 சென்டிமீட்டர் கோட்டின் இரு முனைகளிலும் இதே கோணங்கள் வரைந்தால் போதாதா?



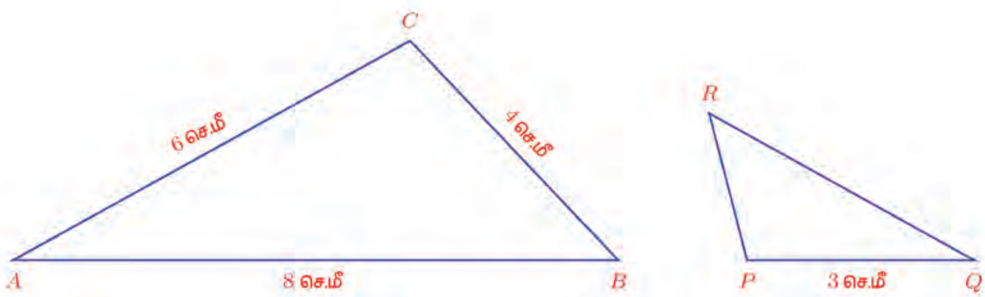
கோணங்கள் சமமானால் இப்போது பார்த்த கருத்தின் அடிப்படையில் மற்ற பக்கங்களும் $\frac{3}{4}$ பாகம் அல்லவா.

வேறொரு கணக்கைப் பார்க்கலாம்:

முக்கோணத்தின் சிறப்பு

இரண்டு முக்கோணங்களுக்கு ஒரே போல் கோணங்கள் உள்ளது எனில், அவற்றின் பக்கங்களும் ஒரே விகிதத்தில் ஆகும். இது வேறு எந்த பலகோணத்திற்கும் இல்லாத சிறப்பாகும். எடுத்துக்காட்டாக இந்தப்படங்களைப் பார்க்கவும்.

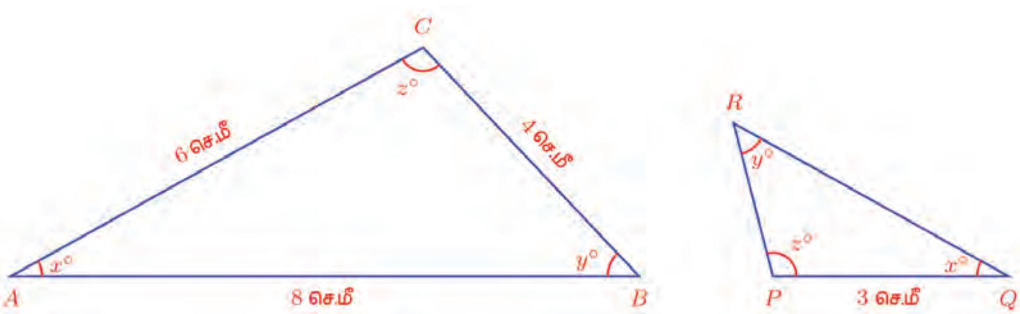
செவ்வகத்திலும் சதுரத்திலும் கோணங்கள் எல்லாம் செங்கோணங்கள் ஆகும். இரண்டினுடையவும் இடது பக்க நீளங்கள் சமம் ஆகும். (விகிதம் $1 : 1$). வலது பக்கங்களும் இதே போன்றாகும் இருப்பினும் செவ்வகம் மற்றும் சதுரத்தின் மேல் பக்கங்களின் நீளங்களும் அடிப்பக்கங்களின் நீளங்களும் ஒரே போல் அல்ல.



$$\angle P = \angle C \qquad \angle Q = \angle A \qquad \angle R = \angle B$$

PQR முக்கோணத்தின் மற்ற இரண்டுபக்கங்களின் நீளம் கண்டுபிடிப்பது எவ்வாறு?

முதலில் கோணங்களின் அளவுகள் $x°$, $y°$, $z°$ என எடுத்து. படத்தில் சமமான கோணங்களை அடையாளப்படுத்தலாம்.



இனி சமமான கோணங்களின் எதிரேயுள்ள பக்கங்களின் ஜோடிகளை எழுதலாம்.

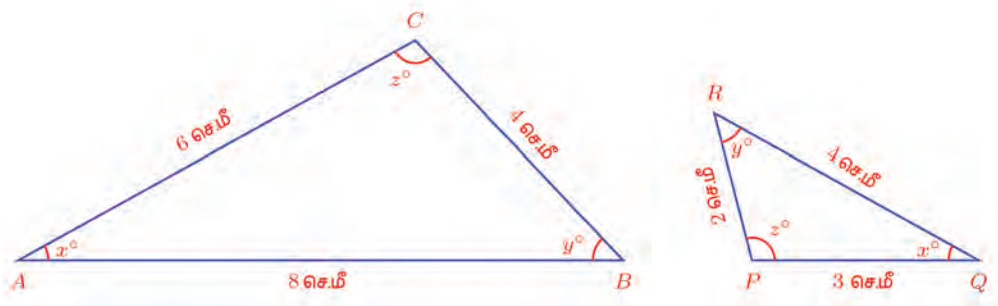
x	BC	PR
y	AC	PQ
z	AB	QR

பெரிய முக்கோணத்தின் எல்லாப் பக்கங்களின் நீளங்களும், சிறய முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளமும் தெரியும் அல்லவா.

x	$BC = 4$	PR
y	$AC = 6$	$PQ = 3$
z	$AB = 8$	QR

இதில் y° கோணத்தின் எதிர்ப் பக்கங்களில், பெரியதன் பாதியே சிறியது. அப்போது பிற கோணங்களின் எதிர்ப்பக்கங்கள் இவ்வாறுதான் ஆக வேண்டும்.

x	$BC = 4$	$PR = 2$
y	$AC = 6$	$PQ = 3$
z	$AB = 8$	$QR = 4$



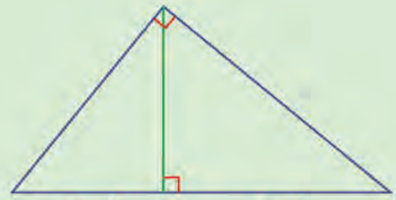
படத்திலிருந்து சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் அளவுகளில் பெரியது சிறியதைப் புரிந்துகொள்ள முடிந்தால், கோணங்கள் எழுதாமல் பக்கங்களைக் கணக்கிடலாம்.

	சிறியது	நடுத்தரம்	பெரியது
ΔABC	$BC = 4$	$AC = 6$	$AB = 8$
ΔPQR	PR	$PQ = 3$	QR

இதிலிருந்து சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் பாதியென்று காணலாம். தொடர்ந்து மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்களையும் கணக்கிடலாம்.

(1) ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் 8 சென்டிமீட்டரும் அதில் இரண்டு கோணங்கள் 60° யும் 70° யும் ஆகும். கோணங்கள் மாறாமல் பக்கங்கள், இதன் ஒன்றரை மடங்கு உள்ள முக்கோணம் வரையவும்.

(2) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்கோண உச்சியிலிருந்து கர்ணத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு கர்ணத்தை 2 சென்டிமீட்டர் 3 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது.



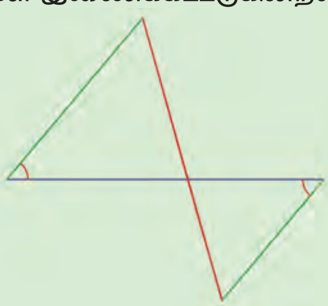
(i) செங்குத்துக்கோடு வெட்டி உருவாக்கும் இரு சிறிய செங்கோணங்களுக்கும் ஒரே கோணங்கள் என நிறுவவும்.

(ii) செங்குத்துக்கோட்டின் உயரம் h என எடுத்தால் $\frac{h}{2} = \frac{3}{h}$ என நிறுவவும்.

(iii) பெரிய செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்களைக் கணக்கிடுக.

(iv) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்கோண உச்சியிலிருந்து கர்ணத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் h என்றும். அது கர்ணத்தை வெட்டும் பாகங்களின் நீளங்கள் a, b என்றும் எடுத்தால் $h^2 = ab$ என நிறுவவும்.

(3) கிடைமட்டமாக உள்ள ஒரு கோட்டின் இரு முனைகளிலும் ஒரே அளவு உள்ள கோணங்களை மேலும் கீழும் வரைந்து சாய்ந்த கோடுகளில் உள்ள இரு புள்ளிகள் இணைக்கப்படுகின்றன.

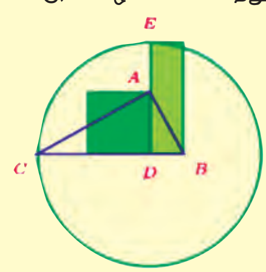


(i) கிடைமட்டமான (நீல) கோட்டின் பாகங்களும் சாய்ந்த (சிவப்பு) கோட்டின் பாகங்களும் ஒரே விகிதத்தில் ஆகும் என நிறுவுக.

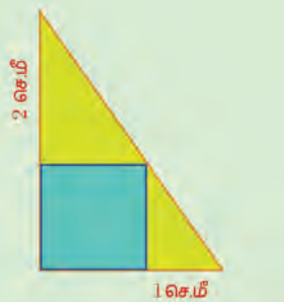
(ii) கிடைமட்டமான கோட்டின் இரு முனைகளிலும் உள்ள சாய்ந்த (பச்சை) கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள விகிதமும் இதுவே என நிறுவுக.

(iii) இதைப் பயன்படுத்தி, 6 சென்டிமீட்டர் நீளம் உள்ள கோட்டை $3:4$ என்ற விகிதத்தில் எவ்வாறும் பிரிக்கும் என விளக்குக.

ABC என்ற செங்கோண முக்கோணம் வரையவும் செங்கோண உச்சியிலிருந்து கர்ணத்தை நோக்கி ஒரு செங்குத்துக்கோடு வரைந்து, கர்ணத்தை வெட்டுகின்ற புள்ளியை D என அடையாளப் படுத்தவும் D யை மையமாகக் கொண்டு, C வழியாகக் கடந்து செல்கின்ற ஒரு வட்டம் வரைந்து வட்டமும் செங்குத்துக் கோடும் சந்திக்கின்ற புள்ளியை E என அடையாளப் படுத்தவும் AD ஒரு பக்கமாக வருகின்ற சதுரமும், BD, DE என்பன பக்கங்களாக வருகின்ற செவ்வகத்தையும் உருவாக்கவும் சதுரத்தினுடையவும் செவ்வகத்தினுடையவும் பரப்பளவுகளை அடையாளப்படுத்தவும். இவை சமம் அல்லவா? செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகளை மாற்றிப் பார்க்கவும்.



(4) கீழே தரப்பட்டுள்ள படத்தில் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்கோண உச்சியையும், மூன்று பக்கங்களின் ஒவ்வொரு புள்ளியையும் உச்சிகளாகக் கொண்டு ஒரு சதுரம் வரையப்பட்டுள்ளது?

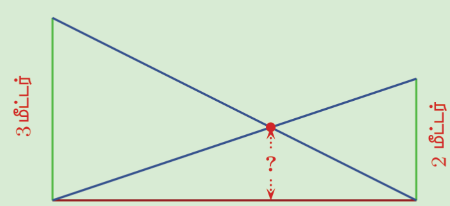


(i) சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தைக் கணக்கிடவும்.

(ii) பக்கங்களின் நீளம் 3, 4, 5 சென்டிமீட்டர் ஆன செங்கோண முக்கோணத்தில் இவ்வாறு வரைகின்ற சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் எத்தனை சென்டிமீட்டர்?

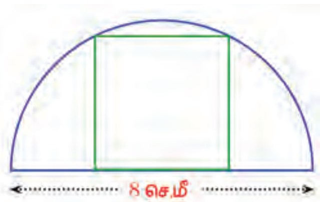
(5) படத்தில் பெரிய செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.

(6) 3 மீட்டர், 2 மீட்டர் உயரம் உள்ள இரு கம்புகள் தரையில் செங்குத்தாக நாட்டப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு கம்பின் மேல் உச்சியிலிருந்து அடுத்தக் கம்பின் அடிப்பக்கத்திற்குக் கயிறு இழுத்துக் கட்டப்பட்டுள்ளது.



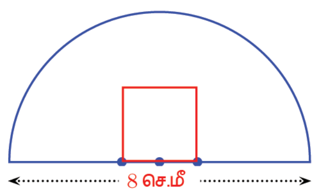
அரைவட்டமும் சதுரமும்

இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.

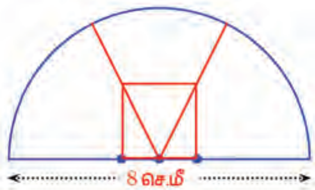


அரைவட்டத்தினுள் இவ்வாறு ஒரு சதுரம் வரைவது எவ்வாறு?

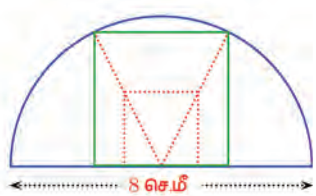
முதலில் அரைவட்டத்தின் விட்டத்தில் மையத்தின் இரு பக்கமும் ஒரே தூரத்தில் இரண்டு புள்ளிகள் வைக்கவும். விட்டத்தின் இந்தப் பகுதியில் ஒரு சதுரம் வரையவும்.



இந்தச் சதுரத்தின் உச்சிகளை, மையத்துடன் இணைக்கும் கோடுகளை நீட்டி அரைவட்டத்தில் வெட்டச் செய்யவும்.



கோடுகள் வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளை இணைக்கவும். இந்த புள்ளிகளிலிருந்து விட்டத்திற்குச் செங்குத்துக்கோடுகள் வரையவும்.



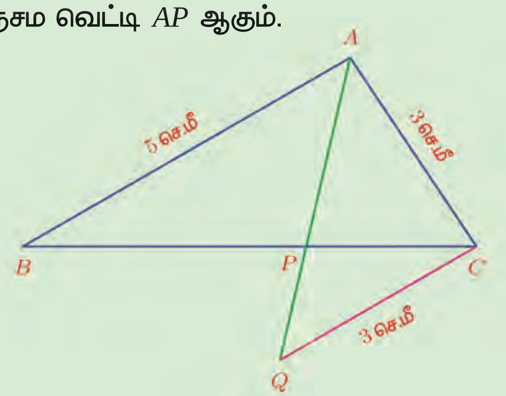
இவ்வாறு கிடைப்பது சதுரம் என நிறுவுக.

(i) கயிறுகள் ஒன்றுக்கொன்று சந்திப்பது தரையிலிருந்து எவ்வளவு உயரத்தில்?

(ii) கம்புகளின் இடையில் உள்ள தூரம் எவ்வளவு இருந்தாலும் இந்த உயரம் மாறுவதில்லை என நிறுவுக.

(iii) கம்புகளின் நீளங்கள் a, b என்றும் கயிறுகள் சந்திக்கும் இடத்தின் உயரம் h என்றும் எடுத்து a, b, h என்பவற்றின் இடையே உள்ள தொடர்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(7) படத்தில் ABC என்ற முக்கோணத்தில் $\angle A$ யின் இருசம வெட்டி AP ஆகும்.



(i) ABP என்ற முக்கோணத்திற்கும் CPQ என்ற முக்கோணத்திற்கும் ஒரே கோணங்கள் என்று நிறுவுக.

(ii) $\frac{BP}{PC}$ கணக்கிடவும்.

(iii) எந்த முக்கோணத்திலும் கோணத்தின் இருசமவெட்டி எதிர்பக்கத்தை வெட்டுவது, கோணம் உட்படுகின்ற பக்கங்களின் விகிதத்திலாகும் என நிறுவுக.

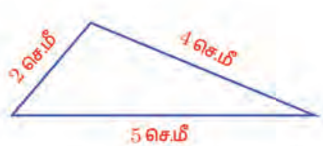
கிடைமட்டமாக ஒரு கோடு வரைந்து அதில் C, D என்ற இரண்டு புள்ளிகள் அடையாளப்படுத்தவும். இந்தப் புள்ளிகள் வழியாகக் கோட்டிற்குச் செங்குத்து கோடுகள் வரையவும். C வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துக்கோட்டில் E என்ற புள்ளியும், D வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துக்கோட்டில் F என்ற புள்ளியும் அடையாளப்படுத்தவும். ED, FC என்ற கோடுகள் வரைந்து அவை ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியில் G ஐ அடையாளப்படுத்தவும். C, D இவற்றிற்கு இடையே, உள்ள தூரத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும் G இல் Right Click செய்து Trace on அளிக்கவும். C, D க்கு இடையே உள்ள தூரம் மாறுவதற்கு ஏற்ப G பயணிக்கும் பாதை எது?

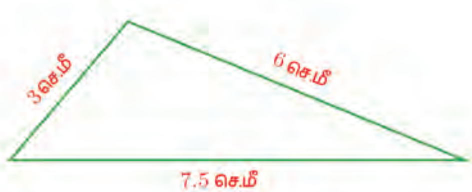
முக்கோணம் ABC வரைந்து ∠C இன் இரு சமவெட்டி வரைக. இந்தக் கோடு AB ஐ சந்திக்கும் புள்ளியை D என அடையாளப்படுத்தவும். AC, BC என்ற பக்கங்களின் நீளங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதமும் AD, BD என்ற பக்கங்களின் நீளங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதத்தையும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும். Input Box இல் AC/BC என அளித்தால் $\frac{AC}{BC}$ கிடைக்கும். இதேப் போன்று $\frac{AD}{BD}$ ஐயும் காணலாம்.

பக்கங்களும் கோணங்களும்

இரு முக்கோணங்களுக்கு ஒரே கோணங்கள் எனில், அவற்றின் பக்கங்களின் நீளம் ஒரே வீதத்தில் மாறுகிறது எனப் பார்த்தோம். மாறாக ஒரு வினா. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் ஒரே வீதத்தில் சிறியதாகவோ பெரியதாகவோ செய்தால் கோணங்கள் மாறாமல் இருக்குமா?

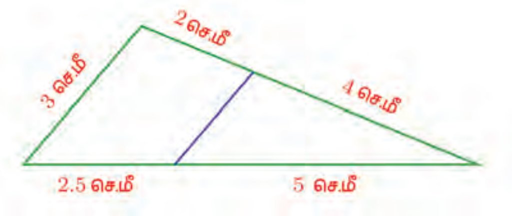
இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்:



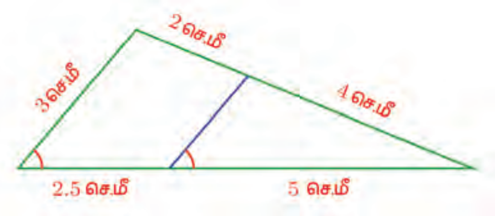


சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் ஒன்றரை மடங்கே பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்கள். இரு முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே கோணங்களா?

இதைப் பரிசோதனை செய்வதற்குச் சிறிய முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்களைப் பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களில் அடையாளப்படுத்தி, இந்தப் புள்ளிகளை இணைக்கலாம்.

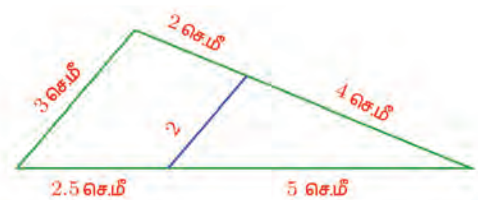


இந்தக்கோடு பெரிய முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தையும் வலது பக்கத்தையும் ($1 : 2$ என்ற) ஒரே விகிதத்தில் அல்லவா பிரிக்கிறது. எனவே இந்தக்கோடு இடது பக்கத்திற்கு இணையாகும் (இணைகோடுகள் என்ற பாடத்தில் முக்கோண பாகம்) எனவே இவை இரண்டும் அடிப்பக்கத்துடன் ஒரே சாய்வில் ஆகும்.



அப்போது பெரிய முக்கோணத்தையும் அதன் உள்ளே உள்ள சிறிய முக்கோணத்தையும் மட்டும் பார்த்தால் (வெளியே உள்ள சிறிய முக்கோணத்தைத் தற்போது பார்க்க வேண்டாம்) இவை இரண்டிற்கும் ஒரே கோணங்கள் என்று காணலாம்.

முன்பு பார்த்ததன் அடிப்படையில் இந்த இரண்டு முக்கோணங்களிலும் பக்கங்களின் நீளம் ஒரே வீதத்தில் மாறுகிறது. சிறிய முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் பெரிய முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தின் $\frac{2}{3}$ பாகம் ஆகும். இரண்டு முக்கோணங்களிலும் வலது பக்கங்களும் அவ்வாறுதான் அமையும். மூன்று பக்கங்களும் மாறுவது ஒரே வீதத்தில் ஆன படியால் இடது பக்கங்களும் இது போல் இருக்க வேண்டும். அப்போது சிறிய முக்கோணத்தின் மூன்றாம் பக்கத்தின் நீளத்தைக் கணக்கிடலாம் அல்லவா:



இனிப் பெரிய முக்கோணத்திற்கு வெளியே வைத்திருக்கும் சிறிய முக்கோணத்தைப் பார்ப்போம்.

உள்ளேயும் வெளியேயும் உள்ள முக்கோணங்களின் பக்கங்களுக்கு ஒரே நீளம் ஆகும். எனவே அவற்றிற்கு ஒரே கோணங்கள் ஆகும். (எட்டாம் வகுப்பில் சர்வ சம முக்கோணங்கள் என்ற பாடம்)

பெரிய முக்கோணத்தின் கோணங்கள் அதன் உள்ளே உள்ள சிறிய முக்கோணத்தின் கோணங்கள் தான் என்று பார்த்தோம். அல்லவா.

அப்போது கிடைத்தது என்ன?

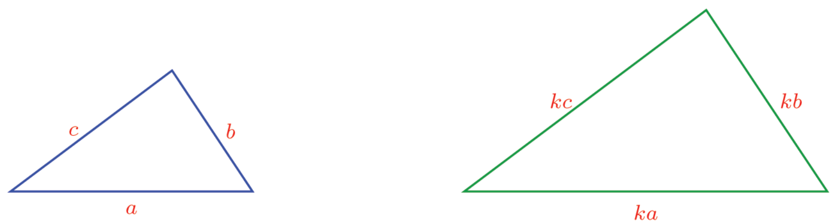
முதலில் வரைந்த சிறிய முக்கோணத்திற்கும் பெரிய முக்கோணத்திற்கும் கோணங்கள் ஒரே அளவில் இருக்கும்.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் பக்கங்களின் நீளங்களையும் மாற்றத்தின் வீதத்தையும் மாற்றினாலும் இதே கருத்தை வைத்தே இரண்டு முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே கோணங்கள் என்று நிறுவலாம் அல்லவா.

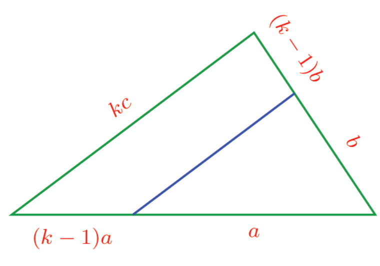
மிகச் சரியாக அமைய வேண்டும் என்று கருதுகிறவர்களுக்கு இதையே பொதுவாக இயற்கணிதம் பயன்படுத்திச் செய்யலாம்.

ஒரு முக்கோணத்தையும், அதன் பக்கங்களின் நீளங்களை எல்லாம் ஒரே வீதத்தில் மாற்றிய வேறொரு முக்கோணத்தையும் எடுக்கவும். அதாவது ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களை எல்லாம் ஒரே எண்ணால் பெருக்கியதே மற்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் ஆகும்.

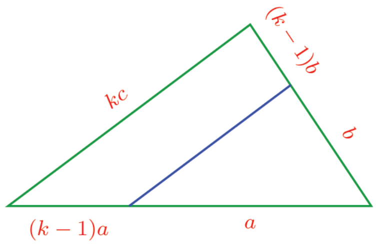
அப்போது சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் a, b, c பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் ka, kb, kc என்றும் எடுக்கலாம்.



எடுத்துக்காட்டில் செய்தது போல சிறிய முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் நீளத்தைப் பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களில் அடையாளப்படுத்தி அந்தப் புள்ளிகளை இணைக்கவும்.

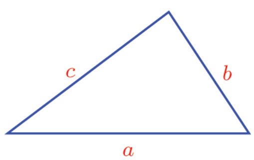


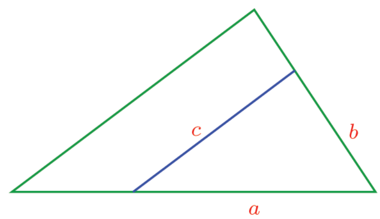
இந்தக்கோடு பெரிய முக்கோணங்களின் அடிப்பக்கத்தையும் வலது பக்கத்தையும் $(k-1):1$ என்ற விகிதத்திலேயே பிரிக்கிறது. எனவே இந்தக்கோடு முக்கோணத்தின் இடது பக்கத்திற்கு இணையாகும். அப்போது பெரிய முக்கோணத்திற்கும் அதற்கு உள்ளே உள்ள சிறிய முக்கோணத்திற்கும் ஒரே கோணங்கள் என்று காணலாம். கோணங்கள் சமமான படியால்



இவை இரண்டினுடையவும் பக்கங்களின் மாற்றமும் ஒரே வீதத்தில் ஆகும். பெரிய முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தின் $\frac{1}{k}$ பாகமே அதற்கு உள்ளே உள்ள சிறிய முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம். வலது பக்கங்களும் இது போன்றுதான். அப்போது இடது பக்கங்களும் இவ்வாறே ஆக வேண்டும்.

இனி எடுத்துக்காட்டுகளில் பார்த்தது போல வெளியேயும் உள்ளேயும் உள்ள சிறிய முக்கோணங்களைப் பார்க்கலாம்.

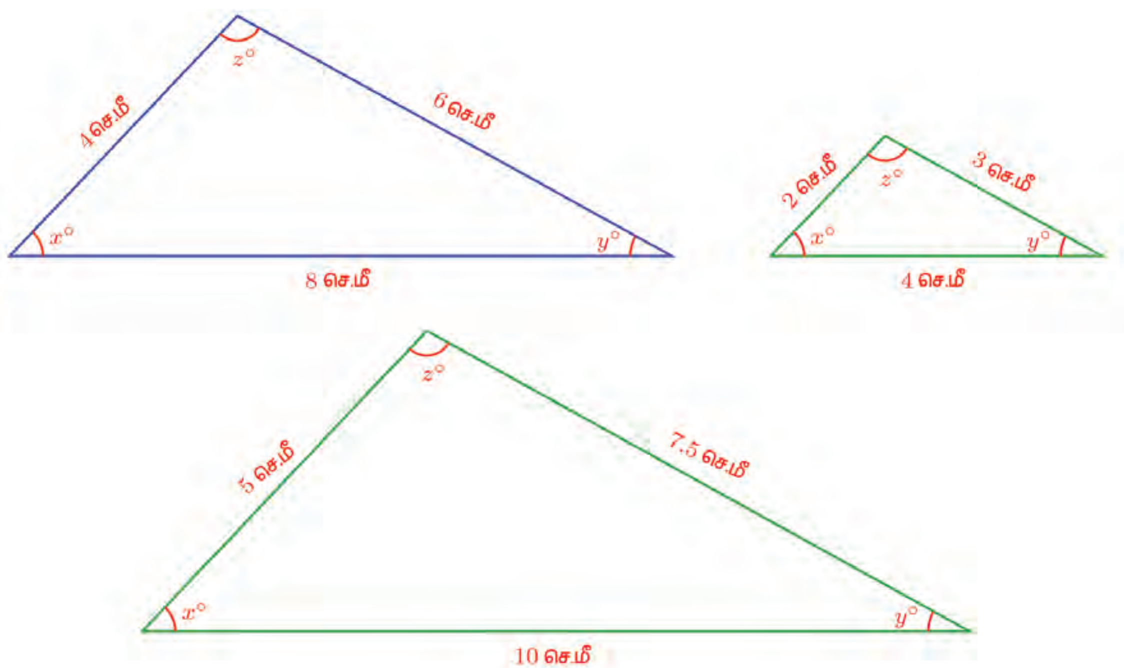




இந்த இரண்டு சிறிய முக்கோணங்களினுடையவும் பக்கங்களின் நீளம் சமம் ஆனபடியால் கோணங்களும் சமமாகும். உள்ளே உள்ள சிறிய முக்கோணத்தின் கோணங்களும் பெரிய முக்கோணத்தின் கோணங்களும் சமம் என்று முன்பு பார்த்தோம். அப்போது சிறிய. முக்கோணத்திற்கும் பெரிய முக்கோணத்திற்கும் ஒரே கோணங்கள் ஆகும்.

இரண்டு முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் நீளங்களின் மாற்றம் ஒரே வீதத்தில் எனில் அவற்றிற்கு ஒரே கோணங்கள் ஆகும்.

அப்போது கோணங்கள் மாறாமல் ஒரு கோணத்தைச் சிறியதாகவோ அல்லது பெரியதாகவோ மாற்றுவதற்குக் கோணங்களை அளக்க வேண்டும் என்றில்லை. பக்கங்களை அளவுகளின் ஒரே வீதத்தில் மாற்றினால் போதும்.

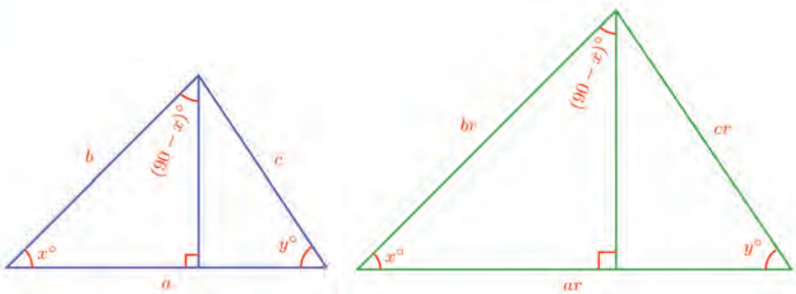


இதைப் பயன்படுத்தியுள்ள ஒரு கணக்கைப் பார்ப்போம். ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்துப் பக்கங்களையும் ஒரே வீதத்தில் பெரியதாக ஆக்கவோ அல்லது சிறியதாக ஆக்கவோ செய்தால் சுற்றளவுகளும் அதே அளவு வீதத்தில் மாறுகின்றன என்றும் கண்டுபிடிப்பது கடினமல்ல. (செய்து பார்க்கவும்)

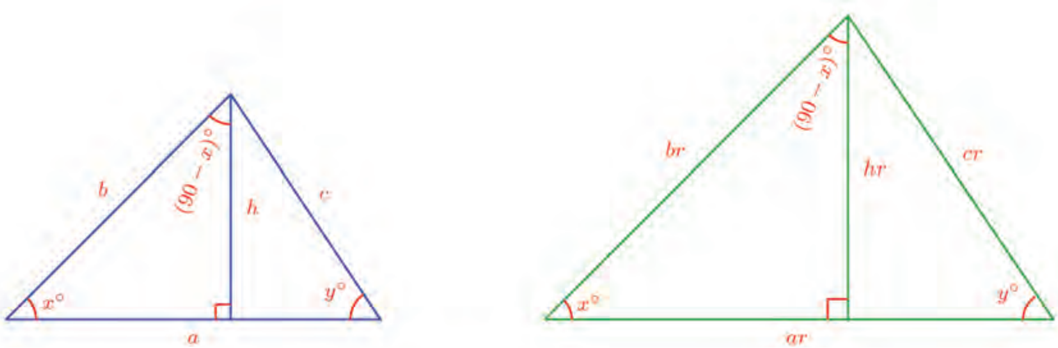
பரப்பளவுகள் மாறுவது எவ்வாறு? அதைத் தெரிந்துகொள்ள, இத்தகைய இரு முக்கோணங்களை வரைந்து பார்ப்போம். இப்போது கூறியபடி இரண்டிற்கும் ஒரே கோணங்களாகும். பரப்பளவை ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதற்கு ஒரே கோணம் உள்ள உச்சிகளிலிருந்து செங்குத்துக் கோடுகளும் வரையலாம்.

முக்கோணம் ABC வரையவும் (பக்கங்களுக்கு a, b, c என்று பெயரிடலாம்). Min = 0 ஆகும்படி ஒரு சிலைடர் k உருவாக்கவும். ka நீளத்தில் ஒரு கோடு DE வரைந்து முனைப்புள்ளிகளை மையங்களாக்கி ஆரம் kb, kc ஆகும் படி வட்டங்கள் வரையவும். அவை வெட்டும் புள்ளியில் F ஐ அடையாளபடுத்தவும். முக்கோணம் DEF வரையவும். இரண்டு முக்கோணங்களுடையவும் கோணங்களை அடையாளப் படுத்தவும். அவை சமம் அல்லவா? சிலைடரின் மதிப்பையும் முதல் முக்கோணத்தின் உச்சிகளையும் மாற்றிப் பார்க்கவும்.

இரண்டு முக்கோணங்களுடையவும் சுற்றளவுகளையும் பரப்பளவுகளையும் அடையாளப் படுத்தவும். சுற்றளவு மாறும் வீதம் என்ன? பரப்பளவு மாறும் வீதம் என்ன?



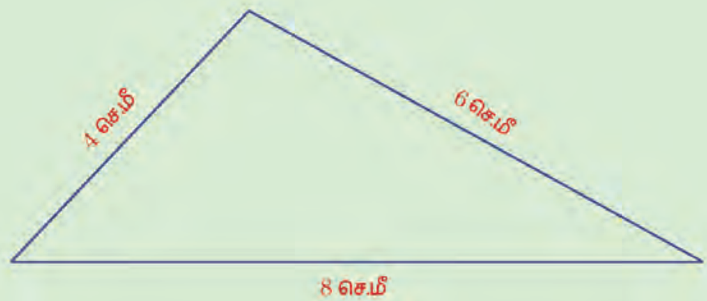
இரு முக்கோணங்களிலும் இடப்பக்கம் உள்ள செங்கோண முக்கோணங்களை மட்டும் பார்க்கவும். இரண்டிலும் கோணங்கள் $x°, 90°, (90 - x)°$ ஆகும். ஒரே கோணங்கள் என்பதால் பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே அளவு வீதத்தில் ஆகும். நீல செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் b உம் பச்சைச் செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் br உம் ஆகும். அப்போது நீல முக்கோணத்தின் செங்குத்துக்கோட்டை h என எடுத்தால் பச்சை முக்கோணத்தின் செங்குத்துக்கோடு hr ஆகும்.



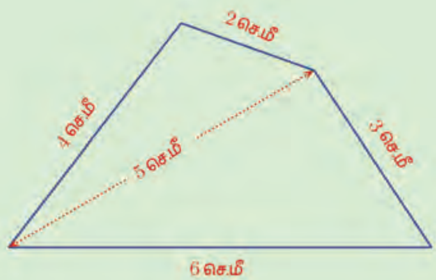
இனி முழு முக்கோணங்கள் இரண்டிலும் பரப்பளவைக் கணக்கிடலாம் அல்லவா. நீல முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}ah$; பச்சை முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}ahr^2$

எனவே பரப்பளவு மாறுகின்ற வீதம், பக்கங்கள் மாறுகின்ற வீதத்தின் வர்க்கம் ஆகும்.

(1) கீழே வரையப்பட்டுள்ள முக்கோணத்தின் அதே கோணங்களும் பக்கங்களின் நீளம் $1\frac{1}{4}$ மடங்கும் ஆன முக்கோணம் வரையவும்.



(2) ஒரு நாற்கரத்தின் படத்தைப் பார்க்கவும்.



(i) இதே கோணங்களும். பக்கங்களின் நீளமும் $1\frac{1}{2}$ மடங்கு உள்ள நாற்கரம் வரையவும்.

(ii) கோணங்கள் வித்தியாசமானதும் பக்கங்களின் நீளம் இப்படத்தில் சுட்டியுள்ள பக்கங்களின் $1\frac{1}{2}$ மடங்குமான ஒரு நாற்கரம் வரையவும்.

(3) ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 6 சதுர செண்டிமீட்டர். இந்த முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு பக்கத்தினுடையவும் நான்கு மடங்கு பக்கம் உள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு? ஒவ்வொரு பக்கமும் அதன் பாதி எனில்?

மூன்றாம் வழிமுறை

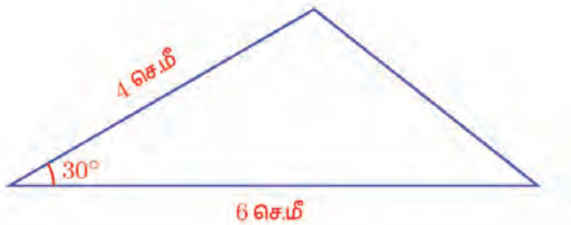
முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கமும் அதன் இரு முனைகளில் உள்ள கோணங்களும் தெரியும் எனில் கோணங்கள் மாறாமல். பக்கங்களை ஒரே வீதத்தில் சிறியதாகவோ அல்லது பெரியதாகவோ மாற்றி வரைவது எவ்வாறு என்று முதல் பாகத்தில் பார்த்தோம். தெரிந்த பக்கத்தை வேண்டிய வீதத்தில் மாற்றி வரைந்து அதன் இரு முனைகளிலும் அதே கோணங்கள் வரைந்தால் போதும்; பிற இரு பக்கங்களும் அதே வீதத்தில் மாறும்.

மூன்று பக்கங்களும் தெரியும் எனில் இவ்வாறு மாற்றி வரையும் வழிமுறையை இரண்டாம் பாகத்திலும் பார்த்தோம். எல்லாப் பக்கங்களும் தேவையான வீதத்தில் மாற்றி வரைந்தால் போதும். கோணங்கள் முதல் முக்கோணத்தின் கோணங்களே ஆகும்.

இனி மாற்ற வேண்டிய முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களும், அவை இணையும் கோணமும் தெரியும் எனில்? எடுத்துக்காட்டாக, இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.

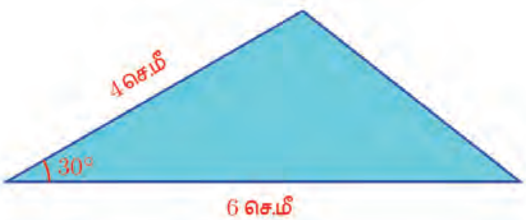
கோணங்கள் மாறாமல் இதன் பக்கங்களை எல்லாம் $\frac{3}{4}$ பாகமாக மாற்ற வேண்டும்.

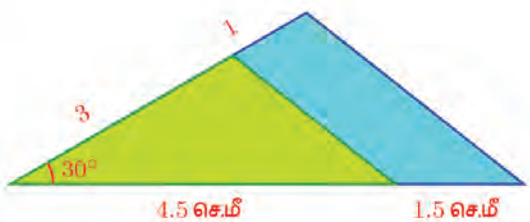
பக்கங்களின் நீளம் 6 சென்டிமீட்டர், 4 சென்டிமீட்டர் என்பவற்றின் $\frac{3}{4}$ பாகம். அவை இணைகின்ற கோணம் 30° என முக்கோணம் வரையலாம்.



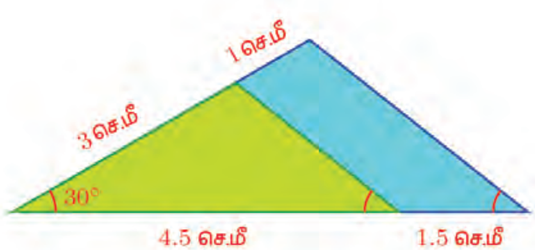
ஆனால் இந்த முக்கோணத்தின் மற்ற இரண்டு கோணங்கள் முதல் முக்கோணத்தின் கோணங்கள் தானா என்றும் மூன்றாம் பக்கம் முதல் முக்கோணத்தின் மூன்றாம் பக்கத்தின் $\frac{3}{4}$ பாகம் என்று தெரியாது அல்லவா.

இதைப் பரிசோதிக்க, பாடத்தின் முதல் பாகத்தில் செய்தது போல இந்த இரண்டு முக்கோணங்களையும் கட்டியான காகிதத்தில் வெட்டி எடுத்து இடது உச்சிகளைச் சேர்த்து வைக்கவும். கோணங்கள் சமமானபடியால் இந்த உச்சியில் உள்ள பக்கங்களும் சேர்ந்து இருக்கும்.





இப்போது பச்சை முக்கோணத்தின் வலதுபக்கம், நீல முக்கோணத்தின் இடதுபக்கத்தையும், அடிப்பக்கத்தையும் ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. அதனால் இந்தக்கோடு பெரிய முக்கோணத்தின் வலது பக்கத்திற்கு இணையாகும். எனவே இரண்டு முக்கோணங்களினுடையவும் வலதுபக்கங்கள் அடிப்பக்கத்துடன் ஒரே சாய்வில் இருக்கும்.

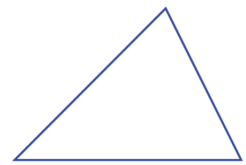


அவ்வாறு இரண்டு முக்கோணங்களுடையவும் கோணங்கள் சமம் என்று காணலாம். அப்போது இவற்றின் பக்கங்கள் மூன்றும் மாறுவது ஒரே வீதத்தில் ஆகும். அவ்வாறு சிறிய முக்கோணத்தின் வலதுபக்கம் பெரிய முக்கோணத்தின் வலதுபக்கத்தின் $\frac{3}{4}$ பாகமே என்று காணலாம்.

இதில் அளவுகளும் வீதமும் மாறினாலும் இதே முறையிலேயே மேற்கூறிய முடிவையும் அடையலாம் அல்லவா.

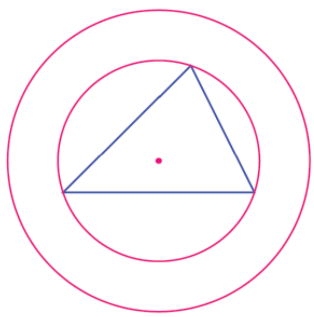
இரு பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே வீதத்திலும் அவற்றிற்கிடையிலுள்ள கோணங்கள் சமமான முக்கோணங்களில் மூன்றாவது பக்கங்களின் மாற்றமும் அதே வீதத்தில் ஆகும். மற்ற இரண்டு கோணங்களும் சமமாகும்.

இந்தக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்திப் பக்கங்களோ கோணங்களோ அளக்காமலே ஒரு முக்கோணத்தை வேண்டிய வீதத்தில் மாற்றி வரையலாம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு முக்கோணம் வரையவும்.



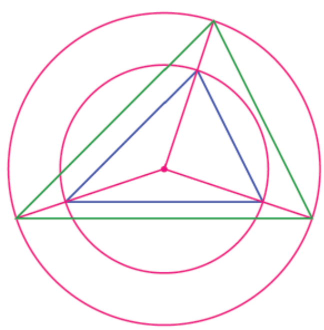
இதன் பக்கங்களையெல்லாம் ஒன்றரை மடங்கு பெரிதாக்க வேண்டும்.

அதற்கு முதலில் முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டமும் அதே மையமாகக் கொண்ட ஒன்றரை மடங்கு ஆரமுள்ள வேறொரு வட்டமும் வரையவும்.

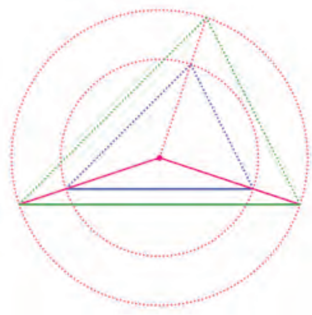


இனிவட்டங்களின் மையத்தை முக்கோணத்தின் உச்சிகளுடன் இணைக்கும் கோடுகளை நீட்டி வரைந்து பெரிய வட்டத்தில் வெட்டச் செய்யவும் இவ்வாறு கிடைக்கின்ற புள்ளிகளை இணைத்து முக்கோணம் வரையவும்.

பெரிய (பச்சை) முக்கோணத்தின் பக்கங்களைச் சிறிய (நீலம்) முக்கோணத்தின் ஒன்றரை மடங்கு எனக்காண, இந்த முக்கோணங்களை மட்டும் பார்க்கவும்.

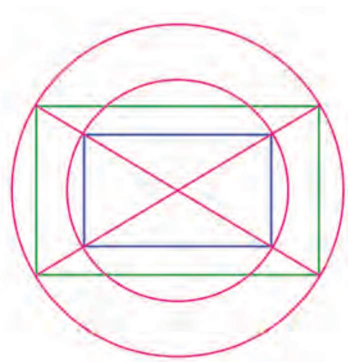


இதில் பெரிய முக்கோணத்தின் இடது, வலது பக்கங்கள், சிறிய முக்கோணத்தின் இடது, வலது பக்கங்களின் ஒன்றரை மடங்கல்லவா (ஏன்?) இவற்றிற்கிடையிலுள்ள கோணம் இரண்டு முக்கோணங்களிலும் ஒன்றே ஆகும். அப்படியானால் கீழ்ப் பக்கங்களும் ஒரே வீதத்தில் ஆகும்.



அதாவது, முதல் நீல முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தின் ஒன்றரை மடங்கு தான் கடைசியில் வரைந்த பச்சை முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம். இந்த முக்கோணத்தின் மற்ற பக்கங்களின் வீதமும் ஒன்றரை மடங்கு என்று காணலாம் அல்லவா.

இதுபோலவே எந்த செவ்வகத்தினுடையவும் பக்கங்கள் ஒரே வீதத்தில் பெரிதாகவோ அல்லது சிறியதாகவோ செய்யலாம்.



Min = 0 ஆன ஒரு சிலைடர் 'a' உருவாக்கவும். முக்கோணம் ABC வரைந்து அதன் சுற்றுவட்டமையம் D யைக் கண்டுபிடிக்கவும் (Circle through 3 Points கருவியைப் பயன்படுத்தி சுற்றுவட்டம் வரைந்த பின் Midpoint or Centre கருவியைப் பயன்படுத்தி வட்டத்தில் கிளிக் செய்தால் போதும்). D ஐ மையமாகச் சுற்றவட்ட ஆரத்தின் a மடங்கு ஆரத்தில் ஒரு வட்டம் வரையவும். (ஆரமாக a*AD எனக் கொடுத்தால் போதும்). D இல் தொடங்கி முக்கோணத்தின் உச்சிகள் வழி கடந்து செல்லும் கோடுகள் வரையவும் (Ray கருவியைப் பயன்படுத்தவும்). இந்தக் கோடுகள் புதிய வட்டத்துடன் வெட்டும் புள்ளிகளை அடையாளப் படுத்தி, அவை உச்சிகளாக வருகின்ற முக்கோணம் வரையவும். இதன் பக்கங்களின் நீளம் முதல் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம் இவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

எல்லா நாற்கரங்களிலும் இந்த முறையை பயன்படுத்த இயலாது. எடுத்துக்காட்டாகச் செவ்வகம் அல்லாத ஓர் இணைகரத்தின் நான்கு உச்சிகள் வழி வட்டம் வரைய இயலாதல்லவா?

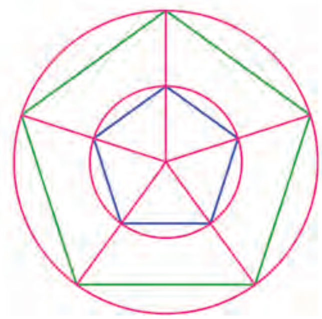
செங்கோண முக்கோணம்

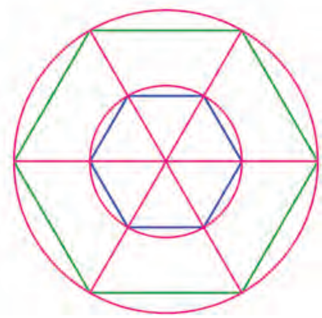
இரண்டு முக்கோணங்களின் இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்கள், மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் நீளங்களுக்குச் சமம் எனில், முக்கோணங்கள் சமமாக வேண்டுமென்பதில்லை. மூன்றாவது பக்கங்களும் சமமாக வேண்டும். அல்லது இந்த பக்கங்களுக்கிடையில் கோணங்கள் சமமாக வேண்டும்.

ஆனால் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களைத் தீர்மானித்தால், பைதகோரஸ் தேற்றப்படி, மூன்றாவது பக்கமும் தீர்மானிக்கப்படும். முக்கோணங்கள் சமமும் ஆகும்.

இதுபோல இரண்டு முக்கோணங்களில், இரண்டு பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே வீதத்தில் ஆனபடியால் மட்டும் அவை வடிவொத்தவை ஆகும் என்று கூற இயலாது. மூன்றாவது பக்கங்களின் மாற்றமும் இதே வீதத்தில் ஆக வேண்டும். அல்லது இந்த பக்கங்களுக்கிடையிலுள்ள கோணங்கள் சமமாக வேண்டும். ஆனால் இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களில், இரண்டு பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே வீதத்தில் ஆனாலும் முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை ஆகும்.

ஆனால் சமபக்க பலகோணங்களையெல்லாம் ஒரே வீதத்தில் மாற்றி வரைய இந்த முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.





இதுவரை கூறிய கருத்துகளையெல்லாம் இவ்வாறு சுருக்கிக் கூறலாம்.

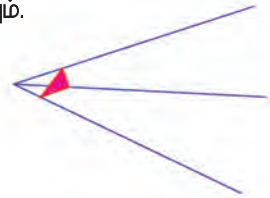
இரண்டு முக்கோணங்களுக்கிடையில் கீழே கூறப்பட்டுள்ள ஏதேனும் ஒரு தொடர்பு உண்டு எனில், மற்ற இரண்டு தொடர்புகளும் உருவாகும்.

- ஒரே கோணங்கள் ஆகும்.
- பக்கங்களின் எல்லாம் மாற்றம் ஒரே வீதத்தில் ஆகும்.
- இரண்டு பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே வீதத்தில் ஆகவும், அவற்றிற்கிடையில் ஒரே கோணமாக இருக்கவும் செய்யவும்.

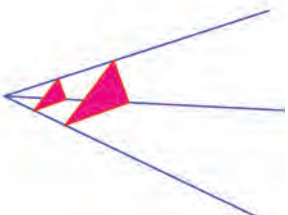
இதில் ஏதேனும் வகை தொடர்புடைய முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை (similar) எனப்படும்.

பக்கங்களின் விகிதமாற்றம்

ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் எல்லாம், வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியின் இணைத்து நீட்டி வரையவும்.

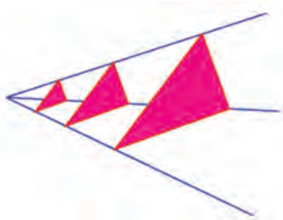


முக்கோணத்தின் இடது பக்கத்திற்கு இணையாகச் சற்று வலது பக்கமாக மாற்றி ஒரு கோடு வரையவும், இது மேலே உள்ள நீலக் கோட்டுடன் வெட்டும் புள்ளிவழியாக முக்கோணத்தின் வலது பக்கத்திற்கு இணையாக வேறோரு கோடு வரையவும். இந்தக்கோடு நடுவிலுள்ள நீலக்கோட்டை வெட்டும் புள்ளி வழியாக முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாக மூன்றாவது ஒரு கோடு வரையவும். இப்போது வேறொரு முக்கோணம் ஆனது.



இரண்டு முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே கோணங்கள் (ஏன்?) அதனால் அவற்றின் பக்கங்கள் ஒரே வீதத்தில் பெரிதாக மாறியுள்ளது.

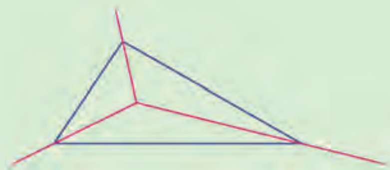
இவ்வாறு எத்தனை முக்கோணங்களும் வரையலாம் அல்லவா.

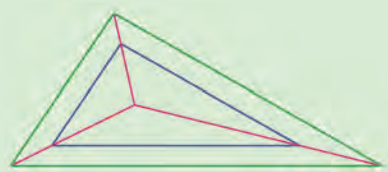


(1) இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களின் செங்கோண பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே வீதத்தில் எனில் கர்ணங்களின் மாற்றமும் இதே வீதத்தில் ஆகும் என நிறுவுக.

(2) இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களில் ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே வீதத்தில் எனில், மூன்றாவது பக்கத்தின் மாற்றமும் அதே வீதத்தில் என நிறுவுக.

(3) ஒரு முக்கோணம் வரைந்து, அதற்கு உள்ளே ஒரு புள்ளி வைக்கவும். முக்கோணத்தின் உச்சிகளை இந்தப் புள்ளியுடன் இணைத்து வரையவும். இந்தக் கோடுகள் ஒவ்வொன்றினுடையவும் பாதி நீளத்தை வெளியேநீட்டி முனைகளை இணைக்கவும்.

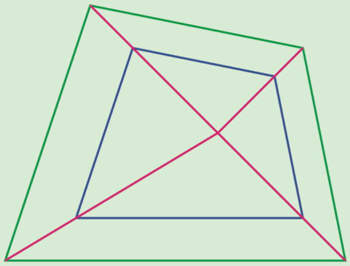




இவ்வாறு கிடைத்தப் பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் எல்லாம், முதல் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் ஒன்றரை மடங்கு என நிறுவுக.

ஒரு முக்கோணம் ABC வரைந்து அதற்கு வெளியே ஒரு புள்ளி D யை அடையாளப்படுத்தவும் D இல் இருந்து முக்கோணத்தின் உச்சிகளின் வழியாகக் கடந்து போகும் கோடுகள் வரையவும். (Ray கருவியைப் பயன்படுத்தலாம்). DA என்ற கோட்டில் ஒரு புள்ளி E யை அடையாளப்படுத்தவும். E வழியாக AB க்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைந்து இந்தக்கோடு DB ஐ வெட்டும் புள்ளி F ஐ அடையாளப்படுத்தவும் அதுபோல E வழியாக AC க்கு இணைகோடு வரைந்து DC யுடன் வெட்டும் புள்ளி G யையும் அடையாளப்படுத்தவும். முக்கோணம் EFG வரையவும். ABC, EFG என்னும் முக்கோணங்களின் கோணங்களை அடையளப்படுத்திப் பார்க்கவும். அவை சமம் அல்லவா? E இன் இடத்தை மாற்றி பார்க்கவும். EFG இன் அளவு மாறவில்லை. அதன் பக்கங்களும் ABC இன் ஒத்த பக்கங்களும் ஒரே வீதத்தில் தான் மாறுகிறதா?

(4) ஒரு நாற்கரத்தின் உள்ளே ஒரு புள்ளியும் நாற்கரத்தின் உச்சிகளை இணைக்கும் கோடுகளும் ஒரே வீதத்தில் வெளியே நீட்டப்படுகின்றன. இந்தக் கோடுகளின் முனைகளை இணைத்து வேறொரு நாற்கரம் உருவாக்கப்படுகிறது.



(i) பெரிய நாற்கரத்தின் பக்கங்கள், சிறிய நாற்கரத்தின் பக்கங்களை ஒரே வீதத்தில் பெரியதாக்கப்பட்டவை என நிறுவவும்.

(ii) இரு நாற்கரங்களுக்கும் ஒரே கோணங்கள் என நிறுவுக.

வடிவொத்த முக்கோணங்கள் வரைய ஜியோஜிப்ராவில் Enlarge from Point tool பயன்படுத்தலாம். Min = 0 வரும்படி சிலைடர் 'a' உருவாக்கவும். ஒரு முக்கோணம் வரைந்து அதன் உள்ளேயோ அல்லது வெளியேயோ ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். Enlarge from Point (Dilate from point) கருவியைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்திலும் தொடர்ந்து புள்ளியிலும் கிளிக் செய்யும் போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் Scale Factor ஆக 'a' என்று அளிக்கவும். முக்கோணத்தின் வடிவொத்த வேறொரு முக்கோணம் கிடைக்கும். 'a' யும் புள்ளியின் இடத்தையும் மாற்றிப் பார்க்கவும். முக்கோணத்திற்குப் பதில் எந்த வடிவத்தினுடையவும் வடிவொப்புமைகளை இதைப் போன்று செய்யலாம்.

ஆய்வு

வடிவொத்த முக்கோணங்களின் உயரம், நடுக்கோடுகள், கோணம் இருசமவெட்டிகள் என்பவை மாறுவது பக்கங்களின் அதே வீதத்திலா என்று கண்டுபிடிக்கவும்.

7

குறை எண்கள்

அளவுகளும் எண்களும்

பூஜ்யத்தைவிடக் கீழே உள்ள வெப்பநிலைகளைக் குறிப்பிட குறைஎண்கள் பயன்படுத்தும் முறையை எட்டாம் வகுப்பில் பார்த்தோம் அல்லவா? நீர் உறைந்து பனியாகிக் கட்டியாகும் வெப்பநிலையைத்தான் $0°C$, அதாவது பூஜ்யம் டிகிரி செல்சியஸ் எனக் கூறுகிறோம். அதைவிட மிகக் குளிர்ந்த நிலையைக் குறிக்க $-1°C$, $-20.5°C$ என்றெல்லாம் பயன்படுத்துகிறோம்.

சில விளையாட்டுகளில் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும், சில தேர்வுகளில் மதிப்பெண்களை அளிப்பதற்கும் குறைஎண்கள் பயன்படுத்துவதைப் பார்த்திருக்கிறோம். இவற்றின் அடிப்படையில், சில கணக்கீடுகள் செய்வதற்குப் பொதுக்கருத்துகள் உருவாக்கப்பட்டன.

எடுத்துக்காட்டாக,

$3°C$ ஆக இருந்த வெப்பநிலையிலிருந்து மீண்டும் $7°C$ குறைந்தால் வெப்பநிலை எவ்வளவு ஆகும்?

என்ற வினாவின் விடையாக

$$3 - 7 = -4$$

என்ற செயலும், இது போன்ற வேறுசூழல்கள் வழி சிறிய எண்ணிலிருந்து பெரிய எண்ணைக் கழிக்கும்போது குறைஎண் கிடைப்பதன் பொதுக்கருத்தைப் பார்த்தோம்.

இந்த முறையில் பல சூழல்களில் தேவைப்படுகின்ற செயல்களின் பொது வடிவங்களாக மூன்று கருத்துகளைப் பார்த்தோம்:

x, y என்ற எந்த இரண்டு மிகை எண்களை எடுத்தாலும்

(i) $x < y$ எனில் $x - y = -(y - x)$

(ii) $-x + y = y - x$

(iii) $-x - y = -(x + y)$

இவற்றைப் பயன்படுத்திக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்குகளைச் செய்யலாமா?

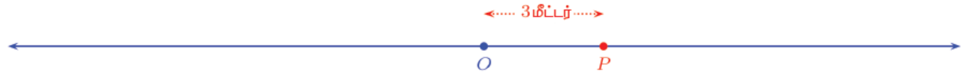
(i) $6 - 8$ (ii) $-6 + 8$ (iii) $-6 - 8$

(iv) $2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}$ (v) $-2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$ (vi) $-2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}$

இனி குறை எண்களைப் பயன்படுத்தும் வேறொரு சூழலைப் பார்ப்போம்:

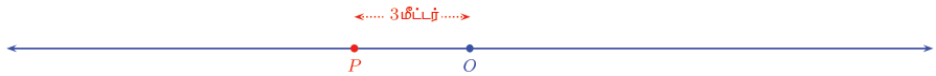
இடமும் எண்ணும்

ஒரு நேர்கோடு வழியாக நகரும் ஒரு புள்ளியை எடுத்துக்கொள்க. இதன் இடத்தைக் குறிப்பிட இந்தப் புள்ளி ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது என்பதைக் (ஏதேனும் அலகை பயன்படுத்தி) கூற முடியும்.



இந்தப் படத்தில் குறிப்பிட்ட புள்ளியை O என்றும், நகரும் புள்ளியை P என்றும் எடுத்து, O வின் வலது பக்கத்தில் 3 மீட்டர் தூரத்தில் P வருவதுதான் காட்டப்பட்டுள்ளது.

O வின் இடது பக்கத்தில், 3 மீட்டர் தூரத்தில் P வரலாம் அல்லவா:

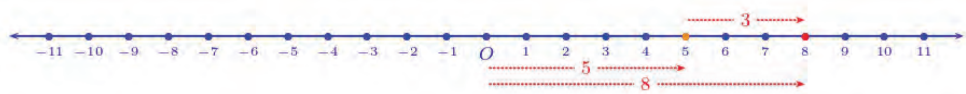


அப்டியானால் P இன் இடத்தைச் சரியாகக்கூற, O விலிருந்துள்ள தூரத்தை மட்டும் கூறினால் போதாது. எந்தப் பக்கத்தில் உள்ளது என்பதையும் கூறவேண்டும்.

இதைத் தவிர்க்க ஒரு வழி உள்ளது. இடது பக்கத்தில் உள்ள எண்களைக் குறை எண்களாகக் கூறினால்போதும். அளக்கின்ற அலகை (மீட்டரோ, சென்டிமீட்டரோ) தீர்மானித்தால், கோட்டில் O அல்லாத எல்லா இடங்களையும் மிகை எண்களையும் குறை எண்களையும் பயன்படுத்திக் கூறலாம்:

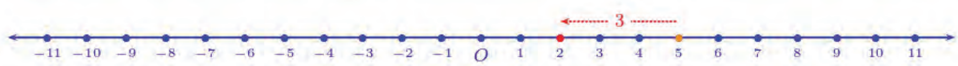
O வின் இடம் 0 என்றும் குறிப்பிடலாம்.

இனி இந்த கோட்டில் 5 என்ற இடத்திலிருந்து ஒரு புள்ளியை 8 என்ற இடத்திற்கு மாற்றியதாகக் கருதவும். இடத்தில் உண்டான மாற்றம் $8 - 5 = 3$ என்று கூறலாம்:



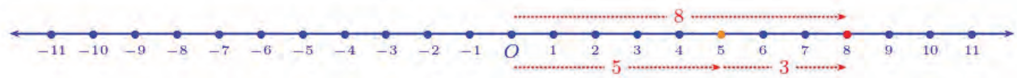
மாறாக, 5 என்ற இடத்திலிருந்து 3 இன் இடத்தை மாற்றினோம் எனக் கூறினால், தற்போதைய இடம் 8 தான் என்று கூற இயலுமா?

மாற்றம் வலது பக்கம் எனில் சரி; இடது பக்கம் ஆனால்?

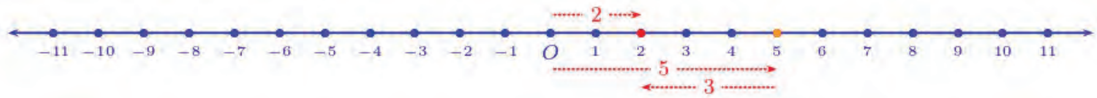


அப்படியானால் இடமாற்றம் எத்தனை என்று அறிந்துகொண்டால் மட்டும் தற்போதைய இடத்தைக் குறிக்க இயலாது; வலது பக்கமா அல்லது இடது பக்கமா என்பதையும் கூற வேண்டும்.

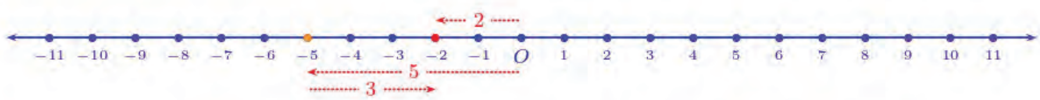
அதாவது 5 என்ற முதல் இடத்திலிருந்து வலது பக்கமாக 3 இடம் மாற்றினோம் எனக் கூறினால் இறுதியில் அடைந்த இடம் 8 ஆகும்.



இட மாற்றம் இடது பக்கம் எனில் 2:



அப்படியானால் −5 என்ற இடத்திலிருந்து 3 இடம் வலது பக்கமாக மாற்றினால்?



முதல் இடமும், திசையுடன் கூடிய இட மாற்றமும் தெரிந்தால் இறுதி இடம், கணக்கிடுவதற்கானப் பொதுவான ஒரு முறையை உருவாக்குவதற்கு, வேறுபட்ட சூழல்களில் இவற்றை எவ்வாறு அட்டவணையாக எழுதலாம்?

முதலில் வலது பக்கமுள்ள இடமாற்றத்தைப் பார்ப்போம்:

முதல் இடம்	இடமாற்றம்	இறுதி இடம்
5	3 வலது பக்கம்	8
3	5 வலது பக்கம்	8
−5	3 வலது பக்கம்	−2
−3	5 வலது பக்கம்	

படம் வரைந்து (அல்லது மனதில் கருதுக) அட்டவணையில் கடைசி எண் எழுதலாம் அல்லவா.

அட்டவணையில் இடமாற்றங்களில் எண்களை மட்டும் எழுதினால்?

முதல் இடம்	இடமாற்றம்	இறுதி இடம்
5	3	8
3	5	8
−5	3	−2
−3	5	2

இனி அட்டவணையில் உள்ள எண்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு என்ன என்று ஆராய்வோம்.

முதல் இரண்டு வரிசைகளில் முதல் மற்றும் இரண்டாவது எண்களைக் கூட்டியதே இறுதி எண் என ஒரே பார்வையில் கூறலாம்.

அடுத்த வரிசையில்?

$$-5 + 3 = 3 - 5 = -2$$

என முன்பு பார்த்திருக்கிறோம் அல்லவா.

கடைசி வரிசையில்?

$$-3 + 5 = 5 - 3 = 2$$

என்றும் முன்பு பார்த்திருக்கிறோம்.

அப்படியானால் அட்டவணையில் காட்டியிருப்பது போன்று ஒவ்வொரு வரிசையிலும் முதல் இரண்டு எண்களின் தொகையே கடைசி எண்.

முதல் இடம்	இடமாற்றம்	இறுதி இடம்
5	3	8 = 5 + 3
3	5	8 = 3 + 5
–5	3	–2 = –5 + 3
–3	5	2 = –3 + 5

இனி இடது பக்கமுள்ள இடமாற்றத்தைப் பார்ப்போம்.:

முதல் இடம்	இடமாற்றம்	இறுதி இடம்
5	3 இடது பக்கம்	2
3	5 இடது பக்கம்	–2
–5	3 இடது பக்கம்	–8
–3	5 இடது பக்கம்	–8

இடங்களின் இடமாற்றத்தில் செய்தது போல இடது பக்கத்தையும் வலது பக்கத்தையும் புரிந்துகொள்ள இடது பக்கம் உள்ள இடமாற்றங்களைக் குறை எண்களாக எழுதலாம்:

முதல் இடம்	இடமாற்றம்	இறுதி இடம்
5	–3	2
3	–5	–2
–5	–3	–8
–3	–5	–8

முதல் அட்டவணையில் உள்ளது போல இங்கும் ஒவ்வொரு வரிசையிலும் முதல் இரண்டு எண்களின் தொகைதான் கடைசி எண்ணா?

முதல் வரிசையில் இதைப் பரிசோதனை செய்ய $5 + (-3)$ என்ற தொகையைக் கணக்கிட வேண்டும். இத்தகைய ஒரு தொகையை இதுவரை நாம் பார்க்கவில்லை அல்லவா.

இவ்வாறு சிந்திக்கலாம். மிகை எண்களிலெல்லாம் கூட்டுவதன் வரிசையை மாற்றினாலும் தொகை மாறுவதில்லை அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக.

$$5 + 3 = 3 + 5 \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \qquad \sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

அப்படியானால் இங்கும்

$$5 + (-3) = -3 + 5$$

என எடுக்கலாம் இதில்

$$-3 + 5 = 5 - 3 = 2$$

என முன்பு பார்த்திருக்கிறோம் அல்லவா.

அவ்வாறு,

$$5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

எனக் குறிப்பிடலாம். அப்படியானால் முதல் வரிசையிலும் முதல் இரண்டு எண்களின் தொகையாகக் கடைசி எண் கிடைக்கும்.

இதுபோல,

$$3 + (-5) = -5 + 3 = 3 - 5 = -2$$

என எடுத்தால், அட்டவணையில் அடுத்த வரிசையிலும் இந்தத் தொடர்பு சரியாகும்:

முதல் இடம்	இடமாற்றம்	இறுதி இடம்
5	–3	$2 = 5 + (-3)$
3	–5	$-2 = 3 + (-5)$
–5	–3	–8
–3	–5	–8

மீதியுள்ள இரண்டு வரிசைகளில்?

அவற்றிலும் முதல் இரண்டு எண்களின் தொகையின் பொருளைக் கூறவேண்டும். தொட்டு முன்புள்ள வரிசைகளில், குறை எண்ணைக் கூட்டுவது, வித்தியாசமாக எழுதி அல்லவா.

$$5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

$$3 + (-5) = 3 - 5 = -2$$

அடுத்த வரிசைகளிலும்

$$(-5) + (-3) = -5 - 3$$

$$(-3) + (-5) = -3 - 5$$

என எழுதினால்?

இவற்றில் கடைசியாக எழுதிய வித்தியாசங்களை முன்பு செய்திருக்கிறோம்.

$$-5 - 3 = -(5 + 3) = -8$$

$$-3 - 5 = -(3 + 5) = -8$$

அவ்வாறு

$$(-5) + (-3) = -5 - 3 = -8$$

$$(-3) + (-5) = -3 - 5 = -8$$

என எடுத்தால் அட்டவணையில் உள்ள கடைசி இரண்டு வரிசைகளிலும் முன்பு உள்ள வரிசைகளின் தொடர்பு சரியாகும்.

முதல் இடம்	இடமாற்றம்	இறுதி இடம்
5	–3	2 = 5 + (–3)
3	–5	–2 = 3 + (–5)
–5	–3	–8 = –5 + (–3)
–3	–5	–8 = –3 + (–5)

இனி வலது அட்டவணையையும் இடது அட்டவணையையும் சேர்த்து எழுதிப் பார்க்கலாம்:

முதல் இடம் x	இடமாற்றம் y	இறுதி இடம் $x + y$
5	3	8 = 5 + 3
3	5	8 = 3 + 5
–5	3	–2 = (–5) + 3
–3	5	2 = (–3) + 5
5	–3	2 = 5 + (–3)
3	–5	–2 = 3 + (–5)
–5	–3	–8 = (–5) + (–3)
–3	–5	–8 = (–3) + (–5)

இடங்களை அடையாளப்படுத்திய கோட்டில் முதல் இடத்தையும் இடமாற்றத்தையும் வேறு எண்களாக்கிய ஓர் அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

முதல் இடம்	இடமாற்றம்	இறுதி இடம்
7	3 இடது பக்கம்	
3	7 இடது பக்கம்	
–7	3 இடது பக்கம்	
–3	7 இடது பக்கம்	
7	3 இடது பக்கம்	
3	7 இடது பக்கம்	
–7	3 இடது பக்கம்	
–3	7 இடது பக்கம்	

படம் வரைந்து கடைசி இடங்களைக் கணக்கிட்டு அட்டவணையில் எழுதுக. பின்னர் இடமாற்றங்களையும் மிகை எண்களுமாகவும் குறை எண்களுமாகவும் மாற்றி எழுதுக. அட்டவணையில் எல்லா வரிசைகளிலும் முதல் இரண்டு எண்களின் தொகை தான் கடைசி எண்ணா என்று பரிசோதனைச் செய்யவும்.

அட்டவணையில் எல்லா வரிசைகளிலும், கடைசி எண் முதல் மற்றும் இரண்டாவது எண்களின் தொகை கிடைப்பதற்காகப் புதிய சில செயல்களுக்கு விளக்கம் கொடுத்தோமல்லவா?

$$3 + (-5) = 3 - 5 = -2$$

$$5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

$$(-5) + (-3) = -5 - 3 = -8$$

$$(-3) + (-5) = -3 - 5 = -8$$

இவற்றில் எல்லாம் இடது பக்கத்தில் பொதுவாகக் காண்பது, ஒரு குறைஎண் கூட்டப்படுகிறது என்பதுதான், வலது பக்கத்தில் இவற்றின் வரையறையாகக் கூறப்பட்டுள்ளது, இந்தக் கூட்டல்களை வேறொரு முறையில் கழித்தலாக மாற்றியதாகும்.

சற்றுகூட துல்லியமாகக் கூற இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தலாம்:

x எந்த எண் ஆனாலும், y எந்த மிகை எண் ஆனாலும்

$$x + (-y) = x - y$$

இதற்கேற்ப எந்த எண்களானாலும், இடக்கணக்கில் இடங்களும் இடமாற்றமும் காண்பதற்கு முதல் இடத்துடன் இட மாற்றத்தைக் கூட்டினால் கடைசி இடம் கிடைக்கும்.

அதாவது முதல் இடம் x, இடமாற்றம் y கடைசி இடம் z என எடுத்தால், இவை எந்த எண்களானாலும் கடைசி இடத்தைக் கண்டுபிடிக்க

$$z = x + y$$

என்ற ஒரே சமன்பாடு போதும்.

ஒரு காரியம் பல வாக்கியம்

குறை எண்களைப் பயன்படுத்தாமல் இடங்களுடையவும் இடமாற்றத்தினுடையவும் கணக்கு இயற்கணிதத்தில் எழுத முயன்றால்? முதல், கடைசி இடங்களுக்கும் O வில் இருந்துள்ள இடங்களுக்கும் உள்ள தூரங்கள் x, z அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தூரம் y, என்றெல்லாம் எடுக்கலாம். இவற்றையெல்லாம் மிகை எண்கள் மட்டுமாகக் கூறுவதால் அவற்றுடன் இடதுபக்கமா அல்லது வலதுபக்கமா என்பதையும் சேர்த்துக் கூற வேண்டும். x, y ஒரே திசையில் ஆனால் $z = x + y$, அதே திசையில்

x, y எதிர் திசைகளில் ஆனால்,

$x > y$ எனில்

$z = x - y$, x இன் திசையில்

$x < y$ எனில்

$z = y - x$, y இன் திசையில் என்றெல்லாம் கூறவேண்டும்.

இங்கு x, y, z இவை மிகை எண்களோ, குறை எண்களோ ஆகலாம் அதனால் தான் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பை ஒரே சமன்பாட்டில் எழுத முடிந்தது.

குறை எண்களைப் பயன்படுத்தாமல் மிகை எண்களும் இடது, வலது பக்க இயல்புகளைப் பயன்படுத்தலாம் எனில் கடைசி இடத்தைப் பொதுவாக இயற்கணிதத்தில் எவ்வாறு கூறலாம் எனச் சிந்தித்துப் பார்க்கவும்.

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையை நிரப்பவும்:

x	y	$x + y$
6	−10	
−6	10	
−6	−10	
−6	6	
6	−6	

(2) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கணக்கிலும் கூறப்பட்டுள்ள முறையில் உள்ள இரண்டு ஜோடி x, y ஐக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(i) x மிகை எண், y குறை எண், $x + y = 1$

(ii) x குறை எண், y மிகை எண், $x + y = 1$

(iii) x மிகை எண், y குறை எண், $x + y = -1$

(iv) x குறை எண், y மிகை எண், $x + y = -1$

(3) கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையை நிரப்புக.

x	y	z	$(x + y) + z$	$x + (y + z)$
2	4	−5		
2	−4	5		
−2	4	−5		
2	−4	−5		
−2	4	5		
−2	−4	5		
−2	−4	−5		

இடமாற்றம்

இடக்கணக்கை வேறொரு முறையில் பார்க்கலாம்: 4 என்ற இடத்திலிருந்து 7 என்ற இடத்தை அடைய எத்தனை இடம் மாற வேண்டும்.

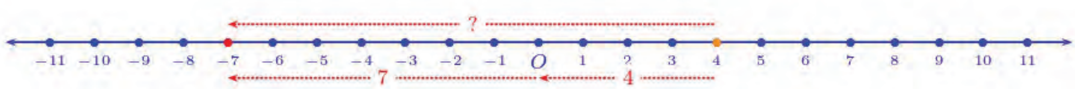
3 இடம் என்று மட்டும் கூறினால் போதாதல்லவா, மாறுவது இடது பக்கமெனில் 1 ஐ அடைய வேண்டும்? அப்போது 4 இலிருந்து 7 ற்கு சென்றடைய 3 இடம் வலது பக்கம் என்றுதான் கூற வேண்டும்.

7 இல் இருந்து 4 ஐ சென்றடைய?

அதற்கும் 3 இடங்களே மாற வேண்டும். ஆனால் இடது பக்கம்.

4 இல் இருந்து −7 ஐ சென்றடைய?

படம் வரைந்து பார்க்கலாம்:



முன்பு செய்ததுபோல பல இடங்களையும் இடது பக்கமாகவும் வலது பக்கமாகவும் எடுத்து இடமாற்றங்களைக் கணக்கிட்டு ஓர் அட்டவணை உருவாக்கலாம். முதலில் வசதிக்காக இடமாற்றங்களை இடது வலது இயல்புகளைச் சேர்த்து எழுதலாம்:

வேறுபட்ட வித்தியாசம்

17 இல் இருந்து 9 ஐக் கழிப்பதற்கான ஓர் எளிய வழி, 10 லிருந்து 9 ஐக் கழித்து 7 ஐக் கூட்டுவது ஆகும்,

$$\begin{aligned} 17 - 9 &= (10 + 7) - 9 \\ &= (10 - 9) + 7 \\ &= 1 + 7 = 8 \end{aligned}$$

குறை எண்களின் செயலைப் பயன் படுத்தி இவ்வாறும் செய்யலாம்:

$$\begin{aligned} 17 - 9 &= (10 + 7) - 9 \\ &= 10 + (7 - 9) \\ &= 10 + (-2) \\ &= 10 - 2 = 8 \end{aligned}$$

இதுபோல,

$$\begin{aligned} 57 - 29 &= (50 - 20) + (7 - 9) \\ &= 30 + (-2) \\ &= 30 - 2 = 28 \end{aligned}$$

என்றும் கணக்கிடலாம் அல்லவா.

முதல் இடம்	அடைய வேண்டிய இடம்	இடமாற்றம்
4	7	3 வலது பக்கம்
7	4	3 இடது பக்கம்
4	-7	11 இடது பக்கம்
-7	4	
-4	7	
7	-4	
-4	-7	
-7	-4	

இனி இடமாற்றங்களையும் எண்கள் மட்டும் பயன்படுத்தி எழுதலாம். இடது பக்கமாக உள்ளவை குறை எண்கள்.

முதல் இடம்	அடைய வேண்டிய இடம்	இடமாற்றம்
4	7	3
7	4	-3
4	-7	-11
-7	4	11
-4	7	11
7	-4	-11
-4	-7	-3
-7	-4	3

இனி இந்த அட்டவணையிலும் ஒவ்வொரு வரிசையிலும் உள்ள மூன்று எண்களுக்கிடையிலுள்ள தொடர்பு என்ன என்று சிந்திக்கலாம்.

முதல் வரிசையில், இடமாற்றத்தை $7 - 4 = 3$ என்று கணக்கிட்டோமல்லவா?

இரண்டாவது வரிசையில் இவ்வாறு கணக்கிட இயலுமா?

$$4 - 7 = -3$$

அப்படியானால் இங்கும், இரண்டாவது எண்ணில் இருந்து முதல் எண்ணைக் கழித்தால் மூன்றாவது எண் கிடைக்கிறது.

அடுத்த வரிசையில்?

$$-7 - 4 = -(7 + 4) = -11$$

என்று முன்பு பார்த்தோமல்லவா. அப்படியானால் இந்தக் கணக்கீடுகளும் சரியானவையே.

நான்காவது வரிசையிலும் இது சரியாகுமா என்று பார்க்க வேண்டுமெனில் முதலில் $4-(-7)$ என்ற செயலுக்குப் பொருள் கொடுக்க வேண்டும்.

அதை இவ்வாறு சிந்திக்கலாம். மிகை எண்களைக் கழிப்பதைப் பல முறைகளில் விளக்கலாம். $10-6$ ஐக் கணக்கிடவும் என்ற வினாவில், 6 ஐ 10 ஆக்க எவ்வளவு கூட்ட வேண்டும் என்ற வினாவைப் பார்ப்போம். அவ்வாறு $6+4=10$ என்பதிலிருந்து $10-6=4$ எனக் கிடைக்கும்.

இதுபோல $4-(-7)$ என்பதை -7 ஐ 4 ஆக்க எவ்வளவு கூட்ட வேண்டும் என்பதைக் கண்டுபிடித்தால் போதும். அதை இரண்டு நிலைகளில் கணக்கிடலாம். -7 உடன் 7 ஐக் கூட்டினால் 0 ஆகும். 4 ஆக்க இனியும் 4 கூட்ட வேண்டும். மொத்தம் கூட்ட வேண்டியது $7+4=11$ இந்த விளக்கத்தைப் பொறுத்து

$$4-(-7)=7+4=11$$

என எடுக்கலாம். இது

$$4-(-7)=4+7=11$$

என்று எழுதுவதை நினைவில் வைக்க எளிது..

அப்படியானால் நான்காவது வரிசையிலும், இரண்டாவது எண்ணிலிருந்து முதல் எண்ணைக் கழித்தால் மூன்றாவது எண் கிடைக்கும்.

இதே முறையிலேயே சிந்தித்தால்

$$7-(-4)=7+4=11$$

எனக் காணலாம்.

அவ்வாறு அட்டவணையில் ஐந்தாவது வரிசையும் சரியானது.

$$-4-7=-(4+7)=-11$$

என முன்பு பார்த்தபடி, ஆறாவது வரிசையிலும் எண்களுக்கிடையிலும் இதே தொடர்பைத்தான், இதுவரை பார்த்தோம். அவற்றை அட்டவணையில் எழுதவும்.

முதல் இடம்	அடைய வேண்டிய இடம்	இடமாற்றம்
4	7	$3=7-4$
7	4	$-3=4-7$
4	-7	$-11=-7-4$
-7	4	$11=4-(-7)$
-4	7	$11=7-(-4)$
7	-4	$-11=-4-7$
-4	-7	-3
-7	-4	3

அடுத்த வரிசையிலும் இது தொடர $(-7)-(-4)$ என்ற செயலுக்குப் பொருள் கொடுக்க வேண்டும். அதற்காக இந்த கணக்கிலேயே

$$7-(-4)=7+4$$

என்று பொருள் கொடுத்ததை நினைவுகூரவும். இதுபோல

$$(-7)-(-4)=-7+4$$

என எடுக்கலாம்.

இதில் $-7+4$ என்பது முன்பு செய்தது அல்லவா.

$$-7+4=4-7=-3$$

அவ்வாறு

$$(-7)-(-4)=-7+4=-3$$

என்று கிடைப்பதுடன் அட்டவணையில் ஏழாவது வரிசையும் சரியாகும்.

கடைசி வரிசையிலும் இதுபோலவே,

$$(-4)-(-7)=-4+7=3$$

என எடுப்பதுடன் எல்லாம் சரியாகும்.

முதல் இடம் x	அடைய வேண்டிய இடம் y	இடமாற்றம் $y-x$
4	7	$3=7-4$
7	4	$-3=4-7$
4	-7	$-11=-7-4$
-7	4	$11=4-(-7)$
-4	7	$11=7-(-4)$
7	-4	$-11=-4-7$
-4	-7	$-3=(-7)-(-4)$
-7	-4	$3=-4-(-7)$

இது சரியாவதற்குச் சில புதிய கழித்தல்களைச் செய்யலாம்.

$$4-(-7)=4+7=11$$

$$7-(-4)=7+4=11$$

என்றும்

$$(-7)-(-4)=-7+4=-3$$

$$(-4)-(-7)=-4+7=3$$

என்றும் பொருள் கொடுக்கப்பட்டது.

பொதுவாகக் கூறினால் குறை எண்ணைக் கழிப்பது, குறை இல்லாத கூட்டலாக மாற்றப்பட்டது. இயற்கணிதத்தில் இவ்வாறு எழுதலாம்:

x எந்த எண்ணும், y எந்த மிகை எண்ணும் ஆனாலும்

$$x - (-y) = x + y$$

இந்த வரையறையில் $x = 0, y = 3$ என எடுத்தால்?

$$0 - (-3) = 0 + 3 = 3$$

$0 - 3 = -3$ அல்லவா, இதுபோல $0 - (-3)$ ஐயும் $-(-3)$ என்று மட்டும் எழுதினால்?

அப்படியானால்

$$-(-3) = 0 - (-3) = 0 + 3 = 3$$

ஒரு மிகை எண்ணின் குறையின் குறை என்பதன் பொருள், அதே எண் என்றொரு புதிய வரையறைதான் இது.

x எந்த ஒரு மிகை எண் ஆனாலும்

$$-(-x) = 0 - (-x) = 0 + x = x$$

இதைப் பயன்படுத்தி பாடத்தின் ஆரம்பத்திலுள்ள சமன்பாடுகளில் முதலாவது உள்ளதை மேலும் விளக்கமாகக் கூறலாம். இது தான் அந்தச் சமன்பாடு:

x, y என்ற எந்த மிகை எண்களிலும் $x < y$ எனில் $x - y = -(y - x)$

இதில் $x > y$ ஆனால்?

எடுத்துக்காட்டாக, $x = 10, y = 3$ என எடுத்துப் பார்ப்போம்..

$$x - y = 10 - 3 = 7$$

$$y - x = 3 - 10 = -7$$

$$-(y - x) = -(-7) = 7$$

இதில் $x - y = -(y - x)$ அல்லவா?

பொதுவாகக் கூறினால் இந்தச் சமன்பாட்டில் $x < y$ ஆனால், $y - x$ மிகை எண்ணும் $x - y$ அதன் குறையும் ஆகும்.

$x > y$ ஆனால் $y - x$ குறையும், $x - y$ அதன் குறையும் ஆகும்.

குறை என்றால்

பூஜ்யத்தைவிட குறைவான எண்கள் தேவைப்படும் சூழல்களில் குறை எண்கள் என்ற கருத்து கூறப்பட்டது. பின்னர் எதிர்த் திசைகளைக் குறிப்பிட இவற்றைப் பயன்படுத்தலாம் என்றும் கண்டோம். அதற்கு உதவியாகக் கூட்டலிலும் கழித்தலிலும் சில புதிய வரையறைகள் உருவாக்கப்பட்டன.

இதன் தொடர்ச்சியாகக் குறையின் குறை என்ற வரையறையில் குறை எடுக்கவும் என்பது ஒரு புதிய செயலும் ஆகின்றது.

மிகை எண்ணின் குறையின் குறை அதே எண் என்று வரையறை உருவாக்கியதால் இரண்டாவது சூழலிலும் சமன்பாடு சரியாகும்.

அப்படியானால் இந்தச் சமன்பாட்டில் நிபந்தனையைத் தவிர்த்து இவ்வாறு மேம்படுத்தலாம்:

x, y எந்த எண்களானாலும்

$$x - y = -(y - x)$$

(1) x, y, z இவற்றைப் பல மிகை எண்களாகவும் குறை எண்களாகவும் எடுத்து, $x - (y - z)$ ஐயும் $(x - y) + z$ ஐயும் கணக்கிடவும். இரண்டும் ஒரே எண்தானா?

(2) கீழே கூறப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு கணக்கிலும், கூறப்பட்டுள்ள முறையிலுள்ள இரண்டு ஜோடி x, y யைக் கண்டுபிடிக்கவும்,

(i) x மிகை எண், y குறை எண், $x - y = 1$

(ii) x குறை எண், y மிகை எண், $x - y = -1$

(3)(i) a, b, c, d இவற்றை தொடர்ச்சியான நான்கு எண்ணல் எண்களாகவோ அல்லது அவற்றின் குறை.எண்களாகவோ எடுத்து $a - b - c + d$ யைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(ii) எண்கள் எதுவானாலும் இது பூஜ்யம் ஆவது ஏன் என்று இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி விளக்கவும்..

(iii) $a - b - c + d$ என்பதற்குப் பதில் $a + b - c - d$ ஆனால்?

(iv) $a - b + c - d$ ஆனால்?

நேரமும் வேகமும்

ஒரு கோட்டிலுள்ள இடங்களும் இடமாற்றமும் வேறுபட்ட திசைகளிலானாலும் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளைக் குறை எண்களைப் பயன்படுத்திப் பொதுவான இயற்கணித சமன்பாடுகளாக்குவதைப் பார்த்தோமல்லவா.

இடமாற்றம் ஏற்பட வேண்டுமெனில் இயக்கம் தேவை. இயக்கத்தை எண்கள் பயன்படுத்தி விளக்க வேண்டுமெனில், பயணித்த தூரத்தை மட்டுமல்ல நேரத்தையும் கணக்கில்கொள்ள வேண்டும்.

5 வினாடிகளில் 50 மீட்டர் பயணித்தது என்று கூறினால், வேகத்தைப் பற்றியும் ஒரு கருத்து உருவாகும். இடையில் வேகத்தை அதிகரிக்கவோ அல்லது குறைக்கவோ செய்யாமல் ஒரே வேகத்தில் பயணித்தால் வேகம் ஒரு வினாடியில் 10 மீட்டர் எனக் கூறலாம். இதே வேகத்தில் தொடர்ந்தால் 10 வினாடிகளில் 100 மீட்டர் பயணிக்கலாம் என்றும் கணக்கிடலாம். (100 மீட்டர் ஓட்டத்தில் மிகக்குறைந்த நேரம், 9.58 வினாடிகள் என்பதை நினைவில்கொள்ளலாம்).

ஒரு கோடு வழியாக எந்த திசையிலும் ஒரே வேகத்தில் நகர்த்தக்கூடிய ஒரு புள்ளியின் வேகமும்

பயணித்த நேரமும் தெரிந்தால் எவ்வளவு தூரம் பயணித்தது எனக் கணக்கிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு வினாடியில் 10 மீட்டர் (எழுதுவது 10 மீட்டர்/வினாடி) என்ற வேகத்தில் நகரும் புள்ளி, 4 வினாடிகளில், $10 \times 4 = 40$ மீட்டர் பயணித்தது என்று கணக்கிடலாம். ஆனால் எந்தத் திசையில் எனத் தெரியாமல் கடைசி இடத்தைத் திட்டப்படுத்த இயலாது.

முன்பு செய்ததுபோல, O என்ற குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து வலது பக்கமாகவோ அல்லது இடது பக்கமாகவோ ஒரு கோடு வழியாகப் பயணிக்கும் புள்ளியைக் கருதுவோம். வழக்கப்படி வலது பக்கம் உள்ள இடங்கள் மிகை எண்களாகவும் இடது பக்கமாக உள்ள இடங்கள் குறை எண்களாகவும், O வில் இருந்துள்ள தூரத்திற்கேற்ப அடையாளப்படுத்தலாம். பயணம் தொடங்குவது O வில் இருந்து என்று கருதுவோம். தூரத்தை அளக்க மீட்டரும், வேகத்தை அளக்க, ஒரு வினாடியில் எவ்வளவு தூரம் பயணித்தது என்ற வீதமும் (மீட்டர்/வினாடி) நேரத்தை அளக்க வினாடியையும் பயன்படுத்தலாம்.

அப்படியானால் O வில் இருந்து புறப்பட்டு 10 மீட்டர்/வினாடி என்ற வேகத்தில், வலது பக்கமாக 3 வினாடிகள் பயணித்தால் $10 \times 3 = 30$ என்ற இடத்தை அடையும். பயணம் இடது பக்கம் எனில்?

$-(10 \times 3) = -30$ என்ற இடத்திலும்.

அப்படியானால் இடம் கணக்கிடப் பயணம் வலது பக்கமெனில் வேகத்தை நேரத்தால் பெருக்கினால் போதும், இடது பக்கமெனில், பெருக்கல் பலனைக் குறையாக்கவும் வேண்டும். இயற்கணிதத்தில் கூற வேகம் v, நேரம் t, இடம் s என எடுத்தால்

பயணம் வலது பக்கமெனில் $s = vt$

பயணம் இடது பக்கமெனில் $s = -(vt)$

எனக் கூறலாம்

வேகக் கணக்கு

ஜமைக்காவைச் சேர்ந்த உசைன் போல்ட், 2009 இல் பெர்லின் நகரத்தில் நடந்த விளையாட்டுப் போட்டியில் 9.58 வினாடிகளில் 100 மீட்டர் ஓடியவர் ஆவார். இதுவரை குறிக்கப்பட்டவற்றில் மிக அதிவேகம் இதுவேயாகும்.

இப்போட்டியில் அவர் ஒரே வேகத்தில் ஓடவில்லை. ஒவ்வொரு 20 மீட்டரும் ஓட எடுத்த நேரம்

தூரம் மீட்டர்	நேரம் வினாடி
0 – 20	2.89
20 – 40	1.75
40 – 60	1.67
60 – 80	1.61
80 – 100	1.66

இவற்றைச் சேர்த்து ஒரே சமன்பாடாகமாற்ற இடது பக்கமாக உள்ள பயணங்களின் அளவைக் குறை எண்களாக்கினால்?

எடுத்துக்காட்டாகப் பயணம் 10 மீட்டர்/வினாடி என்ற வேகத்தில் வலது பக்கமெனில் $v = 10$ என்றும் இடது பக்கமெனில் $v = -10$ என்றும் கூறலாம்.

அப்போது வேறொரு பிரச்சினை வரும்: O வில் இருந்து தொடங்கி, 10 மீட்டர்/வினாடி என்ற வேகத்தில் இடது பக்கமாக 3 வினாடிகள் பயணித்தால் அடைகின்ற இடத்தைப் பெருக்கல் பலனாகக் கூற, $(-10) \times 3$ என்பதன் பொருள் கூற வேண்டும்.

இந்தப் பிரச்சினையை இவ்வாறு சிந்திக்கலாம்.

மிகை எண்களின் பெருக்கல் பலன் என்பது மடங்கு கணக்கிடுவது அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக

$$10 \times 3 = 10 \text{ இன் } 3 \text{ மடங்கு} = 10 + 10 + 10 = 30$$

இதுபோல $(-10) \times 3$ ஐயும் மடங்காக எடுத்தால்?

$$(-10) \times 3 = -10 \text{ இன் } 3 \text{ மடங்கு} = (-10) + (-10) + (-10) = -30$$

குறை எண்ணை மிகை எண்ணால் பெருக்கும் இம்முறை, எண்ணல் எண்களுக்கு மட்டுமல்ல எல்லா எண்களுக்கும் பொருந்தும் வரையறையாகும்.

அப்படியானால் இயக்கம் எந்த திசையிலானாலும், வேகம் v, நேரம் t, அடையும் இடம் s என எடுத்து இவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பு $s = vt$ எனக் கூறலாம்.

இனி இந்தக் கணக்கின் சூழலைச் சற்று மாற்றலாம். நேர் கோட்டின் வழியாக 10 மீட்டர்/வினாடி என்ற ஒரே வேகத்தில் இயங்கும் புள்ளி O வில் வந்தடைவது முதல் பார்க்கத் தொடங்குவதாகக் கருதலாம்.

இயக்கம் இடது பக்கத்திலிருந்து வலது பக்கமெனில் பார்க்கத் தொடங்கிய 2 வினாடிகளுக்குப் பின் இடம் 20 இல் ஆகும்.

2 வினாடிகள் முன்பு?

O வை அடைய இன்னும் 2 வினாடிகள் வேண்டும் அல்லவா. அப்படியானால் O வின் இடது பக்கம் 20 மீட்டர் தூரத்தில் அதாவது -20 என்ற இடத்தில்.

வலது பக்கத்திலிருந்து இடது பக்கத்திற்கு இயக்கமெனில்?

இயக்கத்தின் திசையும், நேரம் முன்னரா அல்லது பின்னரா என்பதையும் மாற்றி இடங்களைக் கணக்கிட்டு அட்டவணைப்படுத்தலாம். படம் வரைந்தோ கற்பனை செய்தோ இடம் எழுதுவதற்கான வசதிக்காக வேகத்தையும் இடங்களையும் வலது இடது என்று முதலில் எழுதலாம்.

வேகம்	நேரம்	அடையும் இடம்
10 வலது பக்கம்	2 வினாடிகளுக்குப் பின்	20 வலது
10 இடது பக்கம்	2 வினாடிகளுக்குப் பின்	20 இடது
10 வலது பக்கம்	2 வினாடிகளுக்கு முன்	20 இடது
10 இடது பக்கம்	2 வினாடிகளுக்கு முன்	20 வலது

இனி இடத்தையும் வேகத்தையும் மிகை எண்ணாகவும் குறை எண்ணாகவும் எழுதலாம்:

வேகம்	நேரம்	அடையும் இடம்
10	2 வினாடிக்கு பின்	20
–10	2 வினாடிக்கு பின்	–20
10	2 வினாடிக்கு முன்	–20
–10	2 வினாடிக்கு முன்	20

நேரத்திலும் பின், முன் என்பதைத் தவிர்க்கப் பார்த்ததற்குப் பின்புள்ள நேரத்தை மிகை எண்ணாகவும் முன்புள்ள நேரத்தை குறை எண்ணாகவும் எழுதினால்?

வேகம்	நேரம்	அடையும் இடம்
10	2	20
–10	2	–20
10	–2	–20
–10	–2	20

இதில் முதல் வரிசையில் முதல் இரண்டு எண்களின் பெருக்கல் பலனே கடைசி எண்

இரண்டாவது வரிசையிலும் இப்போது வரையறுக்கப்பட்டபடி, $(-10) \times 2 = -20$ தான்.

மூன்றாவது வரிசையில்?

$10 \times (-2)$ என்ற செயலுக்கு என்ன பொருள்?

இவ்வாறு சிந்திக்கலாம். எல்லா மிகை எண்களிலும் பெருக்கலின் வரிசையை மாற்றினாலும் பெருக்கல் பலன் மாறுவதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக,

$$5 \times 3 = 3 \times 5 \qquad \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \qquad \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$$

அப்படியானால் இங்கும்

$10 \times (-2) = (-2) \times 10$ என எடுக்கலாம்.

இதில்

$$(-2) \times 10 = -20$$

எனப் பார்த்தோம் அல்லவா. அவ்வாறு,

$$10 \times (-2) = (-2) \times 10 = -20$$

என்று வரையறை செய்தால் அட்டவணையின் மூன்றாம் வரிசையிலும் எண்களுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு, முதல் இரண்டு வரிசைகளில் உள்ளதே ஆகும்.

கடைசி வரிசையில்?

$(-10) \times (-2)$ என்பதற்கு என்ன பொருள் கொடுக்கலாம்?

இதை 20 என எடுத்தால் அட்டவணையின் எல்லா வரிசைகளிலும் ஒரே தொடர்பு ஆகும்.

இவ்வாறு எடுப்பதற்கான காரணத்தைக் கணித முறையில் கூறலாம்.

இரண்டு மிகை எண்களின் தொகையை ஒரு மிகை எண்ணால் பெருக்க ஒவ்வொன்றையும் பெருக்கிக் கூட்டினால் போதுமல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக,

$$(15 + 10) \times 2 = (15 \times 2) + (10 \times 2)$$

இயற்கணிதத்தில் கூறினால் x, y, z எந்த மிகை எண்களானாலும்

$$(x + y)z = xz + yz$$

இந்தக் கருத்து குறை எண்களுக்கும் சரியாக வேண்டுமெனில் என்ன செய்ய வேண்டும் என்று பார்ப்போம். எடுத்துக்காட்டாக $x = 15$, $y = -10$, $z = -2$ என எடுத்து, $(x + y)z$ ஐயும் $xz + yz$ ஐயும் தனித்தனியாகச் செய்து பார்ப்போம்.

$$(x + y)z = (15 + (-10)) \times (-2) = 5 \times (-2) = -10$$

$$xz + yz = (15 \times (-2)) + ((-10) \times (-2)) = -30 + ((-10) \times (-2))$$

இரண்டாவது பெருக்கல் பலனும் முதல் பெருக்கல் பலனும் சமமாவதற்கு, $(-10) \times (-2)$ எந்த எண்ணாக வேண்டும்?

முதல் பெருக்கல் பலன் -10; இரண்டாவது பெருக்கல் பலன் -30 உடன் ஓர் எண் கூட்டியதாகும். -30 ஐ -10 ஆக மாற்ற எந்த எண்ணைக் கூட்ட வேண்டும்?

அப்படியானால் $(x + y)z = xz + yz$ என்ற சமன்பாடு $x = 15$, $y = -10$, $z = -2$ என்ற எண்களுக்குச் சரியாக வேண்டுமெனில், $(-10) \times (-2) = 20$ என எடுக்க வேண்டும்.

இவ்வாறு எடுத்தால் அட்டவணையின் எல்லா வரிசைகளிலும் முதல் இரண்டு எண்களின் பெருக்கல் பலனாகக் கடைசி எண் கிடைக்கும்.

வேகம் v	நேரம் t	அடையும் இடம் vt
10	2	$20 = 10 \times 2$
-10	2	$-20 = (-10) \times 2$
10	-2	$-20 = 10 \times (-2)$
-10	-2	$20 = (-10) \times (-2)$

அதாவது, வேகம் v, நேரம் t, இடம் s இவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பு எல்லாச் சூழல்களிலும்

$$s = vt$$

என ஒரே சமன்பாட்டில் கூறலாம்.

இதற்காகப் பயன்படுத்திய புதிய வரையறைகளை இவ்வாறு எழுதலாம்:

x, y எந்த மிகை எண்களானாலும்

$$(-x)y = x(-y) = -(xy)$$

$$(-x)\,(-y) = xy$$

(1) x, y, z ஆகப் பல மிகை எண்களும் குறை எண்களும் எடுத்து, $(x+y)\,z$ ஐயும் $xz + yz$ ஐயும் கணக்கிடுக. எல்லாவற்றிலும் $(x + y)\,z = x\,z + yz$ என்ற சமன்பாடு சரியாகுமா எனப் பரிசோதனை செய்யவும்.

(2) $(x+y)(u+v) = xu + xv + yu + yv$ என்ற சமன்பாட்டில், x, y, u, v இவற்றிற்குப் பதில் $-x, -y, -u, -v$ எடுத்தாலும் சரியாகும் என நிறுவுக.

ஊசலாட்டம்

$(-1) \times (-1)$ என்ன? குறை எண்களின் பெருக்கல் விதிப்படி இது 1 அல்லவா. $(-1) \times (-1) \times (-1)$ ஆனால்?

முதல் இரண்டு -1 ஐப் பெருக்கும்போது 1; மீண்டும் ஒரு -1 ஆல் பெருக்கும்போது -1. இதனை இவ்வாறு எழுதலாம்:

$$(-1)^2 = 1$$

$$(-1)^3 = -1$$

இவ்வாறு மேலும் சில அடுக்குகளைக் கணக்கிட்டுப் பார்க்கவும். பொதுவாக என்ன கூறலாம்?

அடுக்குகள் ஒற்றை எண் எனில் அதன் மதிப்பு -1 ஆகும். அடுக்குகள் இரட்டை எண் எனில் அதன் மதிப்பு 1 ஆகும்.

இதன் பொதுவான இயற்கணித வடிவம்

n எந்த எண்ணல் எண் ஆனாலும்

$$(-1)^{2n-1} = -1$$

$$(-1)^{2n} = 1$$

n ஆகப் பல எண்ணல் எண்கள் எடுத்து, $1 + (-1)^n$ கணக்கிட்டுப் பார்க்கவும்

$\frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$ ஆனால்?

(3) கீழே தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளிலெல்லாம் x ஆக கூறப்பட்டுள்ள எண்கள் எடுக்கும்போது, y ஆகக் கிடைக்கும் எண்ணைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(i) $y = x^2$, $x = -1$ (ii) $y = x^2 + 3x + 2, x = -1$ (iii) $y = x^2 + 3x + 2, x = -2$

(iv) $y = (x + 1)(x + 2), x = -1$ (v) $y = (x + 1)(x + 2), x = -2$

(4) $y = x^2 + 4x + 4$ என்ற சமன்பாட்டில் x ஆகப் பல மிகை எண்களையும், குறை எண்களையும் எடுத்து y ஐக் கணக்கிடவும். x எந்த எண் ஆனாலும் y மிகை எண் அல்லது பூஜ்யம் ஆவது ஏன்?

(5) எண்ணல் எண்கள் அவற்றின் குறைகள் பூஜ்யம் இவற்றை எல்லாம் பொதுவாக முழு எண்கள் என்று கூறலாம்.

(i) $x^2 + y^2 = 25$ என்ற சமன்பாட்டைச் சமன் செய்யும் எத்தனை ஜோடி முழுஎண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

(ii) $x^2 - y^2 = 25$ என்ற சமன்பாட்டைச் சமன் செய்யும் எத்தனை ஜோடி முழு எண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம்?

(6) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ அல்லவா.

$(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5)$ என்ன?

(7) $[(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)] + [(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5)]$ என்ன?

குறை வகுத்தல்

மிகை எண்களில் எல்லாம் வகுத்தலுக்குப் பொருள் கொடுப்பது, பெருக்கலின் அடிப்படையில் அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக, $6 \div 2$ என்பதன் பொருள் ஓர் எண்ணுடன் 2 ஐப் பெருக்கி 6 ஆக்குகிற எண்

$2 \times 3 = 6$ ஆனபடியால்

$$6 \div 2 = 3$$

என எழுதலாம்,

3×2 உம் 6 ஆனபடியால்

$$6 \div 3 = 2$$

என்றும் காணலாம்.

இதற்கேற்ப $(-6) \div 2$ என்ன?

$2 \times (-3) = -6$ என எழுதலாம்.

$$-6 \div 2 = (-3)$$

என்றும் எழுதலாம்.

இதுபோல, $(-3) \times 2 = -6$ ஆனபடியால்

$$-6 \div (-3) = 2$$

என்றும் எழுதலாம்.

இதுபோல $(-3) \times (-4) = 12$ ஆனபடியால்

$$12 \div (-3) = -4$$

என்றும்

$$12 \div (-4) = -3$$

என்றும் எழுதலாம்.

இதே முறையில் மற்ற வகுத்தல் பலன்களையும் காணலாம்.

இயற்கணிதத்தில் பொதுவாக $x \div y$ என்பதை $\frac{x}{y}$ என்றுதான் எழுதுவோம். அப்படியானால் குறை எண்களின் வகுத்தலைப் பொதுவாக இவ்வாறு கூறலாம்.

x, y எந்த மிகை எண்கள் ஆனாலும்

$$\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$$

சமன்பாட்டு சமநிலை

பூமியிலிருந்து மேல்நோக்கி எறிகின்ற ஒரு பொருள் சற்று மேல் நோக்கிச் சென்ற பின் கீழ் நோக்கி வரும். இதற்கு ஒரு கணக்கு உண்டு.

நேரே மேல்நோக்கி எறிந்தால் ஒவ்வொரு வினாடியும் 9.8 மீட்டர்/வினாடி என்ற வீதத்தில் வேகம் குறையும், அவ்வாறு குறைந்து குறைந்து வேகமே இல்லாமல் ஆகும் போது கீழ்நோக்கி விழத் தொடங்கும். இந்த வீழ்ச்சியில் ஒவ்வொரு வினாடியிலும் 9.8 மீட்டர்/வினாடி என்ற வீதத்தில் வேகம் கூடிக்கொண்டிருக்கும். 49 மீட்டர்/வினாடி என்ற வேகத்தில் மேல் நோக்கி எறிந்ததாகக் கருதவும். எறிந்து 5 வினாடிகள் ஆகும் போது $49 - (5 \times 9.8) = 0$. அப்படியானால் 5 வினாடிகள் கழியும் போது பயணம் அதிகரிக்கும் வேகத்துடன் கீழ்நோக்கி ஆகும். முன்பு கூறியது போல, 7 வினாடிகள் ஆகும்போது, வேகம் $0 + (2 \times 9.8) = 19.6$ மீட்டர்/வினாடி

அப்படியானால் இந்தப் பயணத்தின் இயற்கணிதம் கூற இரண்டு சமன்பாடுகள் வேண்டி வரும்:

$v = 49 - 9.8t, \quad t < 5$ ஆனால்

$v = 9.8t - 49, \quad t > 5$ ஆனால்

மேல் நோக்கியுள்ள வேகம் மிகை எண்ணாகவும், கீழ் நோக்கியுள்ள வேகம் குறை எண்ணாகவும் எடுத்தால் ஒரு சமன்பாடு போதுமானதாகும்.

$$v = 49 - 9.8t$$

(1) $y = \frac{1}{x}$ என்ற சமன்பாட்டில், x ஆக $2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ என்னும் எண்களை எடுத்தால் y ஆகக் கிடைக்கும் எண்களைக் கணக்கிடவும்.

(2) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ என்ற சமன்பாட்டில், $x = -2$ என எடுக்கும்போதும், $x = -\frac{1}{2}$ என எடுக்கும்போதும் y ஆகக் கிடைக்கும் எண்களைக் கணக்கிடவும்.

(3) $z=\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$ என்ற சமன்பாட்டில், x, y ஆகக் கீழே கூறப்பட்டுள்ள எண்களை எடுத்தால் z ஆகக் கிடைக்கும் எண்களைக் கணக்கிடவும்.

(i) $x = 10, y = -5$ (ii) $x = -10, y = 5$ (iii) $x = -10, y = -5$

குறிப்புகள்

குறிப்புகள்

இந்திய அரசியலமைப்புச் சட்டம்

பாகம் 4 அ

இந்தியக் குடிமக்களின் அடிப்படைக் கடமைகள்

51 அ பிரிவுக்கூறு

(அ) இந்திய அரசியலமைப்புச் சட்டத்துக்கு இணங்கி ஒழுகுதலும், அதன் உயரிய நோக்கங்களையும் நிறுவனங்களையும் மற்றும் தேசியக் கொடியையும் தேசிய கீதத்தையும் மதித்தலும்;

(ஆ) நம் நாட்டின் விடுதலைப் போராட்டத்திற்கு எழுச்சியூட்டிய உயர்ந்த எண்ணங்களை நெஞ்சில் நிறுத்திப் பின்பற்றுதல்;

(இ) இந்தியாவின் இறையாண்மையையும் ஒற்றுமையையும் நேர்மையையும் நிலைநிறுத்திக் காப்பாற்றுதல்;

(ஈ) இந்திய அரசு வேண்டும்போது நாட்டைப் பாதுகாக்கவும் நாட்டுக்காகத் தொண்டு புரியவும் தயாராயிருத்தல்;

(உ) சமயம், மொழி, வட்டாரம், இன வேற்றுமைகள் வரம்பு மீறுகிற நிலையில் அதற்கு எதிராக எல்லா இந்திய மக்களிடையேயும் நல்லிணக்கத்தையும், பொதுவான உடன்பிறப்பு உணர்வையும் வளர்த்தல்; பெண்மையின் மதிப்புக்கு இழிவு ஏற்படுத்தும் செயல்களை விட்டொழித்தல்;

(ஊ) நமது கலவைப் பண்பாட்டின் உயர்ந்த மரபை மதித்துப் பேணுதல்;

(எ) காடுகள், ஏரிகள், ஆறுகள், வனவிலங்குகள் உள்ளிட்ட இயற்கையான சுற்றுப்புறச் சூழலைப் பாதுகாத்து மேம்படுத்தலும், வாழும் உயிர்கள் மீது இரக்கம் கொள்ளுதலும்;

(ஏ) அறிவியல் சார்ந்த மனப்பாங்கு, மனிதநேயம், விசாரித்து அறியும் உள்ளறிவுத்திறம், சீர்திருத்தத்திறம் ஆகியவற்றை வளர்த்தல்.

(ஐ) பொது உடைமைகளைப் பாதுகாத்தலும் வன்முறையை விட்டொழித்தலும்;

(ஒ) பெரும் முயற்சிகள் சாதனைகளின் உயர்ந்த படிகளை நோக்கி இடைவிடாமல் முன்னேறத்தக்க வகையில் தனிமனித கூட்டு நடவடிக்கையின் எல்லாப் பரப்புகளிலும் முதன்மை நிலை எய்த முயலுதல்;

(ஓ) ஆறு வயதிற்கும் பதிநான்கு வயதிற்கும் இடைப்பட்ட பருவமுள்ள தன் குழந்தைக்கு, அதன் பெற்றோர் அல்லது பாதுகாவலர் கல்விக்கான வாய்ப்புகளை ஏற்படுத்திக் கொடுத்தல்;

ஆகிய இவையனைத்தும் ஒவ்வொரு இந்தியக் குடிமகனின் அடிப்படைக் கடமைகளாகும்.

குழந்தைகளின் உரிமைகள்

அன்பார்ந்த குழந்தைகளே,

உங்கள் உரிமைகள் எவையென்று தெரியவேண்டாமா? உங்கள் உரிமைகளைப் பாதுகாக்கத் தற்போது ஓர் ஆணையம் செயல்பட்டு வருகிறது. அதன் பெயர் கேரள மாநிலப் பாலர் உரிமைப் பாதுகாப்பு ஆணையம் என்பதாகும். உரிமைகள் பற்றிய அறிவு, உங்கள் பங்கேற்பு, பாதுகாப்பு, சமூகநீதி போன்றவற்றை உறுதிப்படுத்த ஆக்கமும் ஊக்கமும் அளிக்கிறது இவ்வாணையம். உங்கள் உரிமைகள் எவையென்று பார்ப்போம்.

- பேசுவதற்கும்கருத்து வெளியீட்டிற்குமான சுதந்திரம்.
- தனிநபர் சுதந்திரம் மற்றும் உயிர் பாதுகாப்பு உரிமை.
- வாழ்வதற்கும் வளர்வதற்குமான உரிமை.
- ஜாதி-மத-இன-நிற சிந்தனைகளுக்கு அப்பாற்பட்டு மதிப்பதற்கும் அங்கீகரிப் பதற்குமான உரிமை.
- உடல், உள, பால் பலாத்காரங்களிலிருந்து பாதுகாத்துக்கொள்வதற்கும் பராமரிப்பதற் குமான உரிமை.
- பங்கேற்பிற்கான உரிமை.
- குழந்தைத் தொழில் மற்றும் ஆபத்தான தொழில்களிலிருந்து விடுதலை.
- குழந்தைத்திருமணத்திலிருந்து பாதுகாப்பு.
- தமது பண்பாட்டை அறிந்து அதற்கேற்ப வாழ் வதற்கான உரிமை.
- புறக்கணிப்புகளிலிருந்து பாதுகாப்பு.
- இலவச - கட்டாயக் கல்விக்கான உரிமை.
- விளையாடுவதற்கும் கற்பதற்குமான உரிமை.
- அன்பும் பாதுகாப்பும் நிறைந்த குடும்பத்தையும் சமூகத்தையும் பெறுவதற்கான உரிமை

சில கடமைகள்

- பள்ளிக்கூடம், பொதுஇடங்கள் ஆகியவற்றை அழியாமல் பாதுகாக்க வேண்டும்.
- பள்ளிக்கூடத்திலும் கற்றல் செயல்பாடு களிலும் ஒழுக்கத்தைக் கடைபிடிக்க வேண்டும்.
- பள்ளிக்கூட அதிகாரிகள், ஆசிரியர், பெற்றோர், உடன் பயில்வோரை மதிக்கவும் அங்கீகரிக் கவும் வேண்டும்.
- ஜாதி-மத-இன-நிறச் சிந்தனைகளுக்கு அப்பாற் பட்டு எல்லோரையும் மதித்து அங்கீகரிப்பதற் கான மன நிலையை அடையவேண்டும்

தொடர்புகொள்ள வேண்டிய முகவரி:

கேரளமாநிலக் குழந்தைகள் உரிமைப் பாதுகாப்பு மையம்
சமூக நீதித்துறை இயக்ககம், அனெக்ஸ் பில்டிங்,
பூஜப்புரை, திருவனந்தபுரம் - 12, தொலைபேசி எண் : 0471 - 2326603
இ-மெயில் : childrights.cpcr@kerala.gov.in, rte.cpcr@kerala.gov.in
www.kescpcr.kerala.gov.in

சைல்டு ஹெல்ப் லைன்-1098, கிரைம் ஸ்டோப்பர்-1090, நிர்பயா-1800 425 1400
கேரள போலீஸ் ஹெல்ப் லைன் - 0471-324300/44000/45000

*Online **R. T. E Monitoring : www.nireekshana.org.in***