ഗണിതം

XI

കേരളസർക്കാർ

പൊതുവിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

തയാറാക്കിയത്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി, കേരളം

2019

ISBN 81-7450-486-9

First Edition
February 2006 Phalguna 1927

Reprinted
October 2006 Kartika 1928
November 2007 Kartika 1929
December 2008 Pausa 1930
December 2009 Agrahayana 1931
January 2011 Pausa 1932
February 2012 Magha 1933
December 2012 Pausa 1934
November 2013 Kartika 1935
December 2014 Pausa 1936
May 2016 Vaishakha 1938
December 2016 Pausa 1938
December 2017 Agrahayana 1939

PD 400T BS

₹

Printed on 80 GSM paper with NCERT watermark

Published at the Publication Division by the Secretary, National Council of Educational Research and Training, Sri Aurobindo Marg, New Delhi 110 016 and printed at Swapna Printing Works (P.) Ltd., Doltala, Doharia. P.O. Ganganagar. District - North. 24 Parganas. Kolkota

OFFICES OF THE PUBLICATION DIVISION, NCERT

NCERT Campus
Sri Aurobindo Marg
New Delhi 110 016 **Phone : 011-26562708**

108, 100 Feet Road
Hosdakere Halli Extension
Banashankari III Stage
Bengaluru 560 085 **Phone : 080-26725740**

Navjivan Trust Building
P.O.Navjivan
Ahmedabad 380 014 **Phone : 079-27541446**

CWC Campus
Opp. Dhankal Bus Stop
Panihati
Kolkata 700 114 **Phone : 033-25530454**

CWC Complex
Maligaon
Guwahati 781 021 **Phone : 0361-2674869**

Publication Team

Head, Publication Division : *M. Siraj Anwar*
Chief Editor : *Shveta Uppal*
Chief Business Manager : *Gautam Ganguly*
Chief Production Officer (In-charge) : *Arun Chitkara*
Editor : *Bijnan Sutar*
Production Assistant : *Mukesh Gaur*

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram - 695 012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in, *e-mail* : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT

ആമുഖം

ഏതു വിജ്ഞാനവും മാതൃഭാഷയിൽ പഠിക്കാനും പ്രകാശനം ചെയ്യാനും സാധിക്കും. അതിനുള്ള അവസരം പഠിതാക്കൾക്ക് ഒരുക്കേണ്ടത്, ഏതൊരു പഠന സമ്പ്രദായത്തിന്റെയും അനിവാര്യതയാണ്. അതിന്റെ തുടക്കമെന്ന നിലയ്ക്കാണ് ഹയർസെക്കന്ററി തലത്തിൽ ഭാഷേതര വിഷയങ്ങളിലെ പാഠപുസ്തകങ്ങൾ മലയാളത്തിൽ പ്രസിദ്ധീകരിക്കുന്നത്.

മാതൃഭാഷയിലൂടെയുള്ള വിദ്യാഭ്യാസം, ജ്ഞാനസമ്പാദനത്തിനുള്ള സുഗമമാർഗം എന്നതിനോടൊപ്പം സാംസ്കാരികത്തനിമയുടെ തിരിച്ചറിയൽ കൂടിയാണ്. അതുകൊണ്ടാണ് വികസിതരാജ്യങ്ങൾ മാതൃഭാഷയെ മുഖ്യബോധന മാധ്യമമായി സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇന്ത്യയിലാകട്ടെ, ദേശീയതലത്തിലുള്ള പ്രധാന പരീക്ഷകളെല്ലാം പ്രാദേശിക ഭാഷകളിൽക്കൂടി നടത്തുന്നതിനുള്ള സംവിധാനവും ഉണ്ടായി വരികയാണ്. ഈയൊരു സാഹചര്യത്തിൽ നമ്മുടെ കുട്ടികളും മാതൃഭാഷയുടെ ശക്തിസൗന്ദര്യങ്ങൾ തിരിച്ചറിഞ്ഞ് വിവിധ വിഷയങ്ങളിൽ ജ്ഞാനനിർമിതിയിൽ ഏർപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്. അതിന് അവരെ സജ്ജരാക്കുകയാണ് ഈ പാഠപുസ്തകങ്ങളുടെ മുഖ്യലക്ഷ്യം.

പരിഭാഷപ്പെടുത്തിയ പുസ്തകങ്ങളിൽ അതത് വിഷയങ്ങളിലെ സാങ്കേതിക പദങ്ങൾ പരമാവധി മലയാളത്തിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. നമ്മുടെ ഭാഷയിൽ ചിരപരിചിതമായ ഇംഗ്ലീഷ് പദങ്ങളെ അതേപടി സ്വീകരിച്ചിട്ടുമുണ്ട്. വിവർത്തനത്തിന് തീർത്തും വഴങ്ങാത്ത പദങ്ങളെ അതേരീതിയിൽ തന്നെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു. മാതൃഭാഷയിൽ പഠിക്കുന്നവർക്ക് ആശയഗ്രഹണം സുഗമമാക്കുന്ന വിധത്തിലാണ് പാഠപുസ്തകരചന നടത്തിയിരിക്കുന്നത്. അതോടൊപ്പം മലയാളഭാഷയുടെ വളർച്ചയ്ക്കും ഈ പ്രവർത്തനം സഹായകമാകുമെന്ന് കരുതുന്നു.

പാഠപുസ്തകവിവർത്തന രംഗത്ത് നമ്മുടെ രാജ്യത്ത് നടന്ന വലിയൊരു കാൽവെപ്പാണ് ഇത്. പ്രഥമ സംരംഭമെന്നനിലയിൽ പല പരിമിതികളും പരിഭാഷയിൽ വന്നിട്ടുണ്ടാകാം. ക്ലാസ്മുറിയിൽ പ്രയോഗത്തിൽ വരുമ്പോഴാണ് അവയെല്ലാം കൂടുതൽ ബോധ്യപ്പെടുക. തുടർന്ന് വരുന്ന ഘട്ടങ്ങളിൽ അവയൊക്കെ പരിഹരിക്കുന്നതിന് എല്ലാ അഭ്യുദയകാംക്ഷികളിൽ നിന്നും വിശിഷ്യ അധ്യാപകർ, വിദ്യാർത്ഥികൾ എന്നിവരിൽ നിന്നും അഭിപ്രായങ്ങളും നിർദേശങ്ങളും പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു.

ഡോ. ജെ. പ്രസാദ്
ഡയറക്ടർ,
എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി. കേരളം

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

NCERT appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P.K. Jain for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P.K. Jain, *Professor*, Department of Mathematics, University of Delhi, Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* and *Head*, DESM, NCERT, New Delhi

Members

Arun Pal Singh, *Sr. Lecturer*, Department of Mathematics, Dayal Singh College, University of Delhi, Delhi

A.K. Rajput, *Reader*, RIE, Bhopal, M.P.

B.S.P. Raju, *Professor*, RIE Mysore, Karnataka

C.R. Pradeep, *Assistant Professor*, Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, Karnataka

D.R. Sharma, *P.G.T.*, JNV-Mungeshpur, Delhi

Ram Avtar, *Professor* (Retd.) and *Consultant*, DESM, NCERT, New Delhi

R.P. Maurya, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

S.S. Khare, *Pro-Vice-Chancellor*, NEHU, Tura Campus, Meghalaya

S.K.S. Gautam, *Professor*, DESM, NCERT, New Delhi

S.K. Kaushik, *Reader*, Department of Mathematics, Kirori Mal College, University of Delhi, Delhi

Sangeeta Arora, *P.G.T.*, Apeejay School Saket, New Delhi-110017

Shailja Tewari, *P.G.T.*, Kendriya Vidyalaya, Barkakana, Hazaribagh, Jharkhand

Vinayak Bujade, *Lecturer*, Vidarbha Buniyadi Junior College, Sakkardara Chowk, Nagpur, Maharashtra

Sunil Bajaj, *Sr. Specialist*, SCERT, Gurgaon, Haryana

Member - Coordinator

V.P. Singh, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

ശില്പശാലയിൽ പങ്കെടുത്തവർ

ശ്രീ. ജി. ഭുവനേന്ദ്രൻ നായർ
പ്രിൻസിപ്പൽ (റിട്ട.), ഹയർ സെക്കന്ററി വിദ്യാഭ്യാസം

ഡോ. എം. ജയകൃഷ്ണൻ
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (റിട്ട.)
ഹയർ സെക്കന്ററി വിദ്യാഭ്യാസം

ശ്രീ. സജീവ്. സി.എസ്
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (ഗണിതം)
ഗവ. ഗേൾസ് എച്ച്.എസ്.എസ്.
മണക്കാട്, തിരുവനന്തപുരം

ശ്രീ. സത്യൻ. ഇം.എം.
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (ഗണിതം)
എ.കെ.ജി മെമ്മോറിയൽ, ഗവ.
എച്ച്.എസ്.എസ്., പിണറായി, കണ്ണൂർ

ശ്രീ. ബിനുമോൻ. ബി.
എൻ.വി.ടി. (ഗണിതം)
ഗവ. വി.എച്ച്.എസ്.എസ്, പട്ടാഴി

ശ്രീ. സാബു. വി
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം)
ഗവ. മോഡൽ എച്ച്.എസ്.എസ്
കുലശേഖരപുരം

ശ്രീ. ആർ. രാമാനുജം
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം)
എം.എൻ.കെ.എം., ഗവ.എച്ച്.എസ്.എസ്.
പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

ശ്രീ. അച്യുതൻ. സി.ജി.
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം), ഗവ.എച്ച്.
എസ്.എസ്, കാരാകുറിശ്ശി, പാലക്കാട്

ശ്രീ. ജയദാസ്. റ്റി
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം),
റ്റി.ആർ.കെ.എച്ച്.എസ്.എസ്,
വാണിയംകുളം, പാലക്കാട്

ശ്രീ. വിനോദ് കുമാർ. എ
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം), പി.കെ.എം.
എം.എച്ച്.എസ്.എസ്, എടരിക്കോട്, മലപ്പുറം

ശ്രീ. സുദീപ്. പി,
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം)
ഡോ.കെ.ബി. മേനോൻ മെമ്മോറിയൽ എച്ച്.
എസ്.എസ്, തൃത്താല, പാലക്കാട്

ശ്രീ. ബിനേഷ്. ബി,
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (ഗണിതം)
ഗവ.എച്ച്.എസ്.എസ്, മീനങ്ങാടി, വയനാട്

ശ്രീ. പ്രമോദ്. എം.കെ,
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (ഗണിതം)
ഗവ. മോയൻ മോഡൽ ഗേൾസ്, എച്ച്.എസ്.
എസ്., പാലക്കാട്

ശ്രീ. വിനോദ്കുമാർ. കെ,
എൻ.വി.ടി. (ഗണിതം),
ഗവ. വൊക്കേഷണൽ എച്ച്.എസ്.എസ്.
കൃഷ്ണപുരം, ആലപ്പുഴ

വിദഗ്ധർ

ഡോ. റ്റി.ജി. ശരച്ചന്ദ്രൻ
ഡെപ്യൂട്ടി ഡയറക്ടർ (റിട്ട.), കോളേജ് വിദ്യാഭ്യാസ വകുപ്പ്

ഡോ. പി. സോമൻ
റിട്ട. പ്രൊഫസർ (മലയാളം), യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം

പ്രൊഫ. പി. ചന്ദ്രശേഖരൻ
യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ് (റിട്ട.), തിരുവനന്തപുരം

ശ്രീ. സി. വേണുഗോപാൽ
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫ. ഐ.എ.എസ്.ഇ, തൃശ്ശൂർ

ശ്രീ. സുമേഷ്. എസ്.എസ്
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫ. സെന്റ് ജോൺസ് കോളേജ്
അഞ്ചൽ, കൊല്ലം

ശ്രീ. സുനിൽ കുമാർ. ആർ
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫ. ബി.ജെ.എം., ഗവ. കോളേജ് ചവറ

അക്കാദമിക് കോ-ഓർഡിനേറ്റർ

ഡോ. കെ. എസ്. ശിവകുമാർ
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

ഉള്ളടക്കം

Y4S5N1

1. ഗണങ്ങൾ 1–36

1.1 ആമുഖം 1
1.2 ഗണങ്ങളും അവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നവിധവും 1
1.3 ശൂന്യഗണവും ഏകാംഗ ഗണവും 3
1.4 തുല്യഗണങ്ങൾ 7
1.5 പരിമിതഗണവും അനന്തഗണവും 8
1.6 ഉപഗണങ്ങൾ 10
1.7 സമസ്തഗണം 14
1.8 വെൻചിത്രങ്ങൾ 16
1.9 ഗണക്രിയകൾ 16
1.10 പൂരകഗണം 23
1.11 സംഗമവും യോഗവും ഉൾപ്പെടുന്ന ചില പ്രായോഗിക ഗണിതപ്രശ്നങ്ങൾ 26

2. ബന്ധങ്ങളും ഏകദങ്ങളും 37–71

2.1 ആമുഖം 37
2.2 ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം 37
2.3 കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലവും കാർട്ടീഷ്യൻ തലവും 40
2.4 ബന്ധങ്ങൾ 43
2.5 ബന്ധങ്ങളും ചിത്രങ്ങളും 46
2.6 ഏകദങ്ങൾ 50

3. ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ 72–136

3.1 ആമുഖം 72
3.2 കോണുകൾ 73
3.3 ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ 78
3.4 രണ്ട് കോണുകളുടെ തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ 96
3.5 ത്രികോണമിതീയ സമവാക്യങ്ങൾ 107
3.6 സൈൻ, കൊസൈൻ സൂത്രവാക്യങ്ങളുടെ തെളിവും ലളിതമായ പ്രായോഗങ്ങളും 119

4. ഗണിതാഗമന തത്ത്വം 137–150

4.1 ആമുഖം 138
4.2 പ്രചോദനം 138
4.3 ഗണിതാഗമന തത്ത്വം 139

5. സമ്മിശ്രസംഖ്യകളും രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങളും 151–180

5.1 ആമുഖം 151

5.2 ന്യൂനരേഖീയസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം 152

5.3 രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ 153

5.4 സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ 154

5.5 *i* യുടെ കൃത്യങ്കം 156

5.6 ആർഗന്റ് തലവും പോളാർ രൂപവും 156

5.7 സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ബീജഗണിതം 165

5.8 സർവസമവാക്യങ്ങൾ 170

5.9 സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം 171

6. രേഖീയ അസമതകൾ 181–201

6.1 ആമുഖം 181

6.2 അസമതകൾ 182

6.3 ഒരുചരമുള്ള രേഖീയ അസമതകളുടെ ബീജഗണിത പരിഹാരവും അവയുടെ ഗ്രാഫുകളും 183

6.4 രണ്ടുചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ അസമതകളുടെ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ചുള്ള പരിഹാരം 189

6.5 രണ്ടുചരങ്ങളുള്ള ഒരു കൂട്ടം രേഖീയ അസമതകളുടെ പരിഹാരം 193

7. ക്രമീകരണവും തെരഞ്ഞെടുക്കലും 202–234

7.1 ആമുഖം 202

7.2 എണ്ണലിന്റെ അടിസ്ഥാനതത്വം 203

7.3 ക്രമീകരണങ്ങൾ 209

7.4 പരിഗണിക്കുന്ന വസ്തുക്കളിൽ ഒരു നിശ്ചിത എണ്ണം 212
ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണം

7.5 വ്യത്യസ്തമല്ലാത്ത വസ്തുക്കളുടെ ക്രമീകരണം 115

7.6 തെരഞ്ഞെടുക്കൽ 222

8. ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം 235–260

8.1 ആമുഖം 235

8.2 ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം 235

8.3 പൊതുപദവും മധ്യപദവും 245

9. ശ്രേണിയും അനുക്രമവും 261–300

9.1 ആമുഖം 261

9.2 ശ്രേണികൾ 261

9.3 അനുക്രമം 264

9.4 സമാന്തര ശ്രേണി 266

9.5 സമഗുണിത ശ്രേണി 272
9.6 സമാന്തരമാധ്യവും സമഗുണിതമാധ്യവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം 281
9.7 അനന്തസമഗുണിത അനുക്രമം 285
9.8 ചില സവിശേഷ അനുക്രമങ്ങളുടെ n പദങ്ങളുടെ തുക 288

10. നേർവരകൾ 301–345

10.1 ആമുഖം 301
10.2 വരയുടെ ചരിവ് 304
10.3 നേർവരകളുടെ വിവിധതരം സമവാക്യങ്ങൾ 313
10.4 വരയുടെ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുരൂപം 323
10.5 ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഒരു വരയിലേക്കുള്ള അകലം 328
10.6 രണ്ട് വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന ഒരു കൂട്ടം വരകളുടെ സമവാക്യം 332
10.7 ആധാരബിന്ദുവിന്റെ മാറ്റം 335

11. വൃത്തസ്തൂപികാ പരിച്ഛേദങ്ങൾ 346–383

11.1 ആമുഖം 346
11.2 വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഛേദകം 347
11.3 വൃത്തം 350
11.4 സമവക്രം 354
11.5 ന്യൂനവക്രം 359
11.6 അധിവക്രം 369

12. ത്രിമാന ജ്യാമിതിക്ക് ഒരു ആമുഖം 384–400

12.1 ആമുഖം 384
12.2 സൂചകതലങ്ങളും സൂചകാക്ഷങ്ങളും 385
12.3 രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 388
12.4 വിഭജനസൂത്രവാക്യം 391

13. സീമകളും അവകലജങ്ങളും 401–447

13.1 ആമുഖം 401
13.2 അവകലജം എന്ന ആശയം 401
13.3 സീമകൾ 406
13.4 ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ സീമകൾ 419
13.5 അവകലജങ്ങൾ 428

14. ഗണിത യുക്തി 448–475

14.1 ആമുഖം 448
14.2 ഗണിത പ്രസ്താവനയും സത്യമൂല്യവും 449
14.3 പഴയ പ്രസ്താവനയിൽ നിന്നും പുതിയ പ്രസ്താവന 451

14.4 സംയോജക പദം 'ഉം/കൂടാതെ' 453
14.5 സംയോജക പദം 'എങ്കിൽ' 459
14.6 ഗണിത പ്രസ്താവനകളുടെ സാധുത പരിശോധിക്കുന്ന രീതികൾ 465
15. സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക് 476–514
15.1 ആമുഖം 476
15.2 വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവുകൾ 478
15.3 പരിധി 478
15.4 മാധ്യ വ്യതിയാനം 478
15.5 വേരിയൻസും മാനകവ്യതിയാനവും 491
15.6 ആവൃത്തിവിതരണത്തിന്റെ വിശകലനം 503
16. സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം 515–547
16.1 ആമുഖം 515
16.2 പ്രവചനാതീതാ പരീക്ഷണം 516
16.3 സംഭവങ്ങൾ 521
16.4 സ്വയം പ്രമാണ സമീപനം 529
അനുബന്ധം: 1 അനന്ത അനുക്രമങ്ങൾ 548–557
A.1.1 ആമുഖം 548
A.1.2 ഏത് കൃത്യങ്കത്തിനും ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം 548
A.1.3 അനന്തസമഗുണിത അനുക്രമം 550
A.1.4 കൃതിഅനുക്രമങ്ങൾ 552
A.1.5 ലോഗരിതമിക അനുക്രമം 556
അനുബന്ധം: 2 ഗണിതവൽകരണം 558–569
A.2.1 ആമുഖം 558
A.2.2 അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ 558
A.2.3 എന്താണ് ഗണിതവത്കരണം? 562
ഉത്തരസൂചിക 570–606
പദാവലി 607–610

X8F1C5

അധ്യായം **1**

ഗണങ്ങൾ (SETS)

❖ *പ്രാചീന പഠനവും ആധുനിക പഠനവും തമ്മിൽ സംഘർഷം നിലനിൽക്കുന്ന ഇക്കാലത്ത് പൈഥഗോറസിൽ തുടങ്ങാത്തതും ഐൻസ്റ്റൈനിൽ അവസാനിക്കാത്തതുമായ – എന്നാൽ അത് ഏറ്റവും പ്രാചീനവും ഏറ്റവും നവീനവുമാണ് – ഒരു പഠനത്തെപ്പറ്റി ചിലതു പറയേണ്ടിവരുന്നു – ജി.എച്ച്. ഹാർഡി* ❖

1.1 ആമുഖം

കഴിഞ്ഞ ക്ലാസുകളിൽ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ, അഭാജ്യസംഖ്യകൾ, ഭിന്നസംഖ്യകൾ തുടങ്ങി സംഖ്യകളെ അവയുടെ പ്രത്യേകതകൾക്കനുസരിച്ച് തരംതിരിച്ച് പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ചില ഗണിതപ്രശ്നങ്ങളിൽ സംഖ്യകൾക്ക് ഇത്തരത്തിൽ കൂടുതൽ വ്യത്യസ്തവും സൂക്ഷ്മവുമായ തരംതിരിവുകൾ ആവശ്യമാണ്. ഇത്തരത്തിൽ തരംതിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെയോ അനുബന്ധ ചിഹ്നങ്ങളുടേയോ കൂട്ടത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് ഗണം എന്ന പദം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ജോർജ് കാന്റർ (1845-1918)

1.2. ഗണങ്ങളും അവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന വിധവും

ഗണങ്ങളുടെ സിദ്ധാന്തം ജർമൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന ജോർജ് കാന്റർ (1845-1918) ആണ് വികസിപ്പിച്ചത്. ത്രികോണമിതീയ അനുക്രമങ്ങളുടെ പ്രശ്നങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടാണ് അദ്ദേഹം ഗണങ്ങളെക്കുറിച്ച് ആദ്യമായി പ്രതിപാദിക്കുന്നത്. ഈ അധ്യായത്തിൽ ഗണങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാന നിർവചനങ്ങളും ക്രിയകളുമാണ് ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. ചില ഗണങ്ങൾ ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

- 6 ന്റെ ഘടകങ്ങളുടെ ഗണം
- 10 ൽ കുറവായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗണം
- പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയിലുള്ള രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണം.

ഒരു ഗണത്തെ എഴുതുന്നതിന് അതിലെ അംഗങ്ങളെ ബ്രാക്കറ്റിനുള്ളിൽ നിരത്തി എഴുതിയാൽ മതി.

ഉദാഹരണം

6 ന്റെ ഘടകങ്ങളുടെ ഗണത്തെ $\{1, 2, 3, 6\}$ എന്നും 10 ൽ കുറവായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെ $\{2, 3, 5, 7\}$ എന്നും എഴുതാം.

ഛേദം, അഞ്ചിൽ താഴെ വരുന്ന സാധാരണ ഭിന്നങ്ങളുടെ ഗണത്തെ

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\}$$ എന്നെഴുതാം.

ഇവിടെ $\frac{2}{4}$ എന്ന ഭിന്നത്തെ ഗണത്തിൽ എഴുതേണ്ടതില്ല കാരണം $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ആണ ല്ലോ. $\frac{1}{2}$ ഗണത്തിലെ അംഗമാണ്. അതായത് ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ എഴുതുമ്പോൾ ആവർത്തിക്കേണ്ടതില്ലെന്ന് സാരം.

വലിയ സംഖ്യകളുടെ ഒരു കൂട്ടം പരിഗണിക്കുക. ഇതിനെ ഇത്തരത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയുമോ? ഏതൊക്കെയാണ് വലിയ സംഖ്യകൾ? ഏതു സംഖ്യയേക്കാൾ വലിയ സംഖ്യകളെയാണ് ഈ ഗണത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്തേണ്ടത്? ആശയ വ്യക്തതയില്ലാത്തതുകൊണ്ട് ഈ ഗണത്തെ പലരും പലവിധത്തിൽ എഴുതാൻ സാധ്യതയുണ്ട്. ആയതിനാൽ ഒരു ഗണത്തെക്കുറിച്ച് പറയുമ്പോൾ ആശയ വ്യക്തത നിർബന്ധമാണ്. അതായത്, ഒരു കൂട്ടം, ഗണമാകണമെങ്കിൽ അത് വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കണം. അതായത്, ആ കൂട്ടത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്നത് എന്തെല്ലാം ഉൾപ്പെടാത്തത് എന്തെല്ലാം എന്ന് വ്യക്തമായി പറയാൻ കഴിയണം.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളെയോ ചിഹ്നങ്ങളെയോ വസ്തുക്കളെയോ ഒരു ഗണം എന്നു പറയാം.

ഇനി "പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയിലുള്ള രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണം" പരിഗണിക്കുക. ഈ ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് വ്യക്തമായ ധാരണയുണ്ടെങ്കിൽ പോലും ബ്രാക്കറ്റിനുള്ളിൽ അംഗങ്ങളെ നിരത്തിയെഴുതാൻ സാധിക്കില്ല. ഇത്തരം സാഹചര്യങ്ങളിൽ ഗണത്തെ കേവല പ്രസ്താവനകളായി പറയുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്.

ഉദാഹരണത്തിന്

$$\{x : x \text{ ഒരു രേഖീയ സംഖ്യ}, 0 < x < 1\}$$

ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ x ആണെങ്കിൽ അവ രേഖീയസംഖ്യകൾ ആയിരിക്കണം, കൂടാതെ പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയിൽ ആയിരിക്കണം. മേൽ സൂചിപ്പിച്ച രണ്ടു കാര്യങ്ങളെയും ഒരു ബ്രാക്കറ്റിനുള്ളിൽ നേരിട്ട് എഴുതി സൂചിപ്പിക്കുന്ന രീതിയെ 'നിബന്ധനാരീതി' (Set builder form) എന്നു പറയുന്നു. ആദ്യം ചെയ്ത പോലെ, ബ്രാക്കറ്റിനുള്ളിൽ അംഗങ്ങളെ നിരത്തിയെഴുതുന്ന രീതിക്ക് "പട്ടികാരീതി" (Roster form/Tabular form) എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു ഗണത്തെപ്പറ്റി പറയേണ്ടി വരുമ്പോഴെല്ലാം വലിയൊരു പ്രസ്താവന പറയേണ്ടിവരുന്നതൊഴിവാക്കാൻ സൗകര്യാർത്ഥം ഗണങ്ങൾക്ക് പേര് നൽകാം. ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ വലിയ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് ഗണങ്ങൾക്ക് പേര് നൽകുക. ഉദാഹരണത്തിന് A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 3, 5, 7}.

$$P = \{x : x \text{ ഒരു രേഖീയ സംഖ്യ}, 0 < x < 1\}$$

$$Q = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\}$$

ഒരു സംഖ്യ, അല്ലെങ്കിൽ ചിഹ്നം, അല്ലെങ്കിൽ വസ്തു ഒരു ഗണത്തിൽ ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ ഗണത്തിലെ 'അംഗം' എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് Q എന്ന ഗണത്തിലെ ഒരു അംഗമാണ് $\frac{1}{2}$. ഇത് എളുപ്പത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് $\frac{1}{2} \in Q$ എന്ന് എഴുതുന്നു. അതായത് അംഗമാണ് എന്നതിന് '$\in$' എന്ന ചിഹ്നവും അംഗമല്ല എന്നതിന് '$\notin$' എന്ന ചിഹ്നവും ഉപയോഗിക്കുന്നു.

മേൽപറഞ്ഞ Q എന്ന ഗണത്തിൽ

$$\frac{1}{3} \in Q,\ 5 \notin Q$$

ഇത്തരത്തിൽ ചിഹ്നങ്ങളുടെ സാധ്യത ഉപയോഗപ്പെടുത്തുമ്പോൾ ഗണങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് ഒരു ഗണിതഭാഷ തന്നെ രൂപീകരിക്കാൻ സാധിക്കും. **R** രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണമായെടുത്താൽ, മുകളിലെ ഉദാഹരണത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള P എന്ന ഗണത്തെ.

$P = \{x : x \in \mathbf{R},\ 0 < x < 1\}$ എന്ന് എഴുതാം.

N എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗണമായെടുത്താൽ ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെ $\{2n, n \in \mathbf{N}\}$ എന്നും ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെ $\{2n - 1, n \in \mathbf{N}\}$ എന്നും എഴുതാം.

1.3 ശൂന്യഗണവും ഏകാംഗ ഗണവും (Null Set and Singleton Set)

ചില ഗണങ്ങൾ എഴുതുമ്പോൾ രസകരമായ ചില വസ്തുതകൾ കാണാൻ കഴിയും.

ഉദാഹരണത്തിന്,

$P = \{x : x \in \mathbf{N},\ 2x - 1 = 0\}$ എന്ന ഗണം പരിഗണിക്കുക. **P** യെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതിയാൽ അതിൽ അംഗങ്ങൾ ഒന്നും തന്നെയില്ല എന്ന് കാണാനാകും. $2x - 1 = 0$ ആയാൽ $x = \frac{1}{2}$ ആണല്ലോ. പക്ഷേ $\frac{1}{2}$ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയല്ല. ഇത്തരത്തിൽ ഒരു അംഗം പോലുമില്ലാത്ത ഗണത്തെയും പലവിധ ഗണിതക്രിയകളിൽ പരിഗണിക്കേണ്ടിവരും. ഇങ്ങനെ ഒരു അംഗം പോലുമില്ലാത്ത ഗണത്തെ നമുക്ക് ശൂന്യഗണം (null set) എന്ന് വിളിക്കാം. ശൂന്യഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് { } എന്ന ചിഹ്നമോ ϕ എന്ന ചിഹ്നമോ ഉപയോഗിക്കുന്നു. അതായത്, **P** = { } അല്ലെങ്കിൽ $P = \phi$ എന്ന് എഴുതാം.

$A = \{x : x \in \mathbf{R}, 2x - 1 = 0\}$ എന്ന ഗണം പരിഗണിക്കുക. $\frac{1}{2}$ എന്ന ഒരു അംഗം മാത്രമുള്ള ഗണമായിരിക്കും കിട്ടുക. അതായത് $A = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ഒരു അംഗം മാത്രമുള്ള ഇത്തരം ഗണത്തെ 'ഏകാംഗ ഗണം' (Singleton set) എന്നു വിളിക്കുന്നു.

ചുരുക്കി പറഞ്ഞാൽ ഗണങ്ങളെ അവയുടെ പ്രത്യേകതകൾക്കനുസരിച്ച് പ്രത്യേകം പേരുകൾ നൽകി വിളിക്കാവുന്നതാണ്.

തുടർന്ന് പരാമർശിക്കാനിടയുള്ള ചില ഗണങ്ങളെ സൗകര്യാർത്ഥം നേരത്തേ പരിചയപ്പെടാം.

N - എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗണം

R - രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണം

Z - പൂർണസംഖ്യകളുടെ ഗണം

Q - ഭിന്നകങ്ങളുടെ ഗണം

$\mathbf{Z}^+$ - പൂർണ അധിസംഖ്യകളുടെ ഗണം

$\mathbf{Q}^+$ - ഭിന്നക അധിസംഖ്യകളുടെ ഗണം

$\mathbf{R}^+$ - രേഖീയ അധിസംഖ്യകളുടെ ഗണം

ഉദാഹരണം : 1

$x^2 + x - 2 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരഗണം പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തെ $(x - 1)(x + 2) = 0$ എന്നെഴുതാം.

അതായത് $x = 1, -2$

പരിഹാരഗണം പട്ടികാരീതിയിൽ $\{-2, 1\}$ എന്നെഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 2

$\{x : x$ ഒരു പൂർണ അധിസംഖ്യ, $x^2 < 40\}$ എന്ന ഗണത്തെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതുക.

പരിഹാരം

1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നിവയാണ് പരിഹാരസംഖ്യകൾ. ഇവയെ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ എന്ന് പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 3

$A = \{1, 4, 9, 16, 25.....\}$ എന്ന ഗണത്തെ നിബന്ധനാരീതിയിൽ എഴുതുക.

പരിഹാരം

A = {x : x ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയുടെ വർഗം} അല്ലെങ്കിൽ

A = $\{x : x = n^2, n \in \mathbf{N}\}$ എന്നെഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 4

$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\right\}$ എന്ന ഗണത്തെ നിബന്ധനാരീതിയിൽ എഴുതുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ ഛേദം അംശത്തെക്കാൾ ഒന്ന് കൂടുതലാണ്. മാത്രമല്ല അംശം 1 ലാണ് തുടങ്ങുന്നത്, 6 ൽ കൂടുന്നുമില്ല. അതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണത്തെ

$$\left\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbf{N}, 1 \le n \le 6\right\}$$ എന്നെഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 5

പട്ടികാരീതിയിലും നിബന്ധനാരീതിയിലുമായി ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളെ ചേരുംപടി ചേർക്കുക.

(i) {P, R, I, N, C, A, L}	(a) { x : x ഒരു പൂർണ അധിസംഖ്യയായ, 18 ന്റെ ഘടകമാണ്}
(ii) { 0 }	(b) { x : x ഒരു പൂർണസംഖ്യ, $x^2 - 9 = 0$}
(iii) {1, 2, 3, 6, 9, 18}	(c) {x : x ഒരു പൂർണസംഖ്യ, $x + 1 = 1$}
(iv) {3, –3}	(d) {x : PRINCIPAL എന്ന വാക്കിലെ ഒരു അക്ഷരമാണ് x}

പരിഹാരം

(i) (d) PRINCIPAL എന്ന വാക്കിലെ ആവർത്തിക്കുന്ന P, I ഒഴിവാക്കിയ അക്ഷരങ്ങളാണ്.

(ii) (c) $x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$

(iii) (a) 18 ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്.

(iv) (b) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3, -3$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 1.1

1. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതെല്ലാമാണ് ഗണങ്ങൾ? സമർഥിക്കുക.

   i. ഒരു വർഷത്തിലെ J എന്ന അക്ഷരത്തിൽ തുടങ്ങുന്ന മാസങ്ങളുടെ കൂട്ടം.

   ii. ഇന്ത്യയിലെ ഏറ്റവും ശ്രേഷ്ഠരായ 10 എഴുത്തുകാരുടെ കൂട്ടം.

   iii. ലോകത്തിലെ ഏറ്റവും കേമൻമാരായ 11 ക്രിക്കറ്റ് ബാറ്റ്സ്മാൻമാരുടെ ടീം.

   iv. നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിലെ മുഴുവൻ ആൺകുട്ടികളുടെ കൂട്ടം.

   v. 100 ൽ കുറവായ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ കൂട്ടം.

   vi. സാഹിത്യകാരൻ മുൻഷി പ്രേംചന്ദിന്റെ നോവലുകളുടെ കൂട്ടം.

   vii. ഇരട്ട പൂർണസംഖ്യകളുടെ കൂട്ടം.

   viii. ഈ പാഠത്തിലെ ചോദ്യങ്ങളുടെ ശേഖരം.

   ix. ലോകത്തിലെ ഏറ്റവും അപകടകാരികളായ മൃഗങ്ങളുടെ കൂട്ടം.

2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. ചുവടെ പറയുന്നവയിൽ $\in$ അല്ലെങ്കിൽ $\notin$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങളിൽ ഉചിതമായത് ചേർത്ത് ശരിയാകും വിധം പൂരിപ്പിക്കുക.

   (i) 5. . .A (ii) 8 . . . A (iii) 0. . .A

   (iv) 4. . . A (v) 2. . .A (vi) 10. . .A

3. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതുക.

   (i) $A = \{x : x$ ഒരു പൂർണസംഖ്യ, $-3 < x < 7\}$

   (ii) $B = \{x : x$ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ, $x < 6\}$

   (iii) $C = \{x : x,$ അക്കങ്ങളുടെ തുക 8 ആകുന്ന ഒരു രണ്ടക്ക എണ്ണൽ സംഖ്യ$\}$

   (iv) $D = \{x : x,$ 60 ന്റെ അഭാജ്യഘടകം$\}$

   (v) E = TRIGONOMETRY എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം.

   (vi) F = BETTER എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം.

4. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളെ നിബന്ധനാരീതിയിൽ എഴുതുക.

   (i) $\{3, 6, 9, 12\}$ (ii) $\{2,4,8,16,32\}$ (iii) $\{5, 25, 125, 625\}$

   (iv) $\{2, 4, 6, \ldots\}$ (v) $\{1,4,9, \ldots,100\}$

5. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതുക.

   (i) $A = \{x : x$ ഒരു ഒറ്റ എണ്ണൽസംഖ്യ$\}$

(ii) B = {x : x ഒരു പൂർണസംഖ്യ, $\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}$}

(iii) C = {x : x ഒരു പൂർണസംഖ്യ, $x^2 \le 4$}

(iv) D = {x : x, "LOYAL" എന്ന വാക്കിലെ ഒരക്ഷരം}

(v) E = {x : x, ഒരു വർഷത്തിലെ 31 ദിവസങ്ങളില്ലാത്ത ഒരു മാസം}

(vi) F = {x : x ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ, k എന്ന അക്ഷരത്തിന് മുൻപു വരുന്ന ഒരു വ്യഞ്ജനാക്ഷരം}.

6. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടികാരീതിയിലുള്ള ഓരോ ഗണത്തെയും അതിന്റെ നിബന്ധനാരീതിയിലെഴുതിയിട്ടുള്ള ഗണത്തോട് ചേരുംപടി ചേർക്കുക.

(i)	{1, 2, 3, 6}	(a)	{x : x, 6 ന്റെ ഒരു അഭാജ്യഘടകം}
(ii)	{2, 3}	(b)	{x : x, 10 നേക്കാൾ കുറവായ ഒരു ഒറ്റ എണ്ണൽ സംഖ്യ}
(iii)	{M,A,T,H,E,I,C,S}	(c)	{x : x, 6 ന്റെ ഘടകമായ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ}
(iv)	{1, 3, 5, 7, 9}	(d)	{x : x, MATHEMATICS എന്ന വാക്കിലെ ഒരക്ഷരം}

1.4 തുല്യഗണങ്ങൾ (Equal Sets)

A = {n : $n \in$ **N** , $n < 3$}

B = {x : $x \in$ **R**, $x^2 - 3x + 2 = 0$} എന്നീ രണ്ടു ഗണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

ഈ രണ്ടു ഗണങ്ങളെയും പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതി നോക്കിയാലോ? രണ്ടു ഗണത്തിലെയും അംഗങ്ങൾ 1, 2 എന്നിവയാണെന്നു കാണാൻ കഴിയും.

അതായത് A = {1, 2}, B = {1, 2}. ഇത്തരത്തിൽ രണ്ട് ഗണങ്ങളിലെ അംഗങ്ങൾ ഒരേപോലെ ആയാൽ അത്തരം ഗണങ്ങളെ തുല്യഗണങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. A യും B യും തുല്യഗണങ്ങളായാൽ A = B എന്നെഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 6

തുല്യഗണങ്ങളായി വരുന്ന ജോടികൾ കണ്ടുപിടിച്ചെഴുതുക.

A = {0}, B = {x : $x > 15$, $x < 5$},

C = {x : $x - 5 = 0$ }, D = {x: $x^2 = 25$},

E = {x : x, $x^2 - 2x - 15 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പൂർണ അധിസംഖ്യാപരിഹാരം}.

പരിഹാരം

$A = \{0\}$, $C = \{5\}$, $E = \{5\}$, $B = \{\ \}$, $D = \{5, -5\}$ എന്നീ ഗണങ്ങൾ പരിശോധിച്ചാൽ C യിലും E യിലുമാണ് അംഗങ്ങൾ തുല്യമായുള്ളത് എന്നു കാണാം.
അതുകൊണ്ട്, $C = E$.

ഉദാഹരണം : 7

ഏതൊക്കെയാണ് തുല്യഗണങ്ങൾ?

(i) X, "ALLOY" എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം.
B, "LOYAL" എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം.

(ii) $A = \{n : n \in \mathbf{Z}, n^2 \leq 4\}$
$B = \{x : x \in \mathbf{R}, x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

പരിഹാരം

(i) $X = \{A, L, O, Y\}$,
$B = \{L, O, Y, A\}$.
$X = B$

(ii) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$B = \{1, 2\}$.
$A \neq B$

1.5 പരിമിതഗണവും അനന്തഗണവും (Finite set and Infinite Set)

ഉദാഹരണം 7 ലെ ഗണം A യിൽ 5 അംഗങ്ങളാണ്. ഇതുപോലെ 100 ന്റെ ഘടകങ്ങളുടെ ഗണം, 50 ൽ കുറവായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗണം ഇവയിലെല്ലാം അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം കൃത്യമായി പറയാൻ കഴിയും. ഇത്തരത്തിൽ ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം കൃത്യമായി പറയാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ അത്തരം ഗണങ്ങളെ പരിമിതഗണം എന്നു പറയുന്നു. കൂടാതെ ശൂന്യഗണവും പരിമിതഗണമാണ്.

മുഴുവൻ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെയും ഗണം പരിഗണിക്കുക. ഈ ഗണത്തിൽ എത്ര അംഗങ്ങളുണ്ട്? അഭാജ്യസംഖ്യകൾ വലിപ്പം കൂടിപ്പോകുന്ന ക്രമത്തിലെഴുതിയാൽ ഗണത്തിലെ ഏറ്റവും അവസാനത്തെ അഭാജ്യസംഖ്യ ഏതാണ്?

$P = \{x : x \in \mathbf{R}, 0 < x < 1\}$ എന്ന ഗണത്തിലെ ആദ്യത്തെ അംഗം ഏതാണ്? ഈ ഗണത്തിൽ എത്ര അംഗങ്ങളുണ്ട്?

ഇത്തരത്തിൽ ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം, എണ്ണിത്തിട്ടപ്പെടുത്താനാകാത്ത വിധം അനന്തമാണെങ്കിൽ അത്തരം ഗണങ്ങളെ അനന്തഗണം എന്നു പറയുന്നു.

മുൻപു പരാമർശിച്ച, **N, Q, R** തുടങ്ങിയവയെല്ലാം അനന്തഗണങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. എല്ലാ അനന്തഗണത്തെയും പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതാൻ സാധിക്കില്ല.

ഉദാഹരണം : 8

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങൾ അനന്തഗണമാണോ പരിമിതഗണമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(i) $\{x : x \in \mathbf{N}, (x - 1)(x - 2) = 0\}$

(ii) $\{x : x \in \mathbf{N}, x^2 = 4\}$

(iii) $\{x : x \in \mathbf{N}, 2x - 1 = 0\}$

(iv) $\{x : x \in \mathbf{N}$, x ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ$\}$

(v) $\{x : x \in \mathbf{N}$, x ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ$\}$

പരിഹാരം

(i) $\{1, 2\}$; പരിമിതഗണം.

(ii) $\{2\}$, പരിമിതഗണം

(iii) ϕ, പരിമിതഗണം

(iv) അഭാജ്യ സംഖ്യാഗണം, അനന്തഗണമാണ്.

(v) ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗണം, അനന്തഗണമാണ്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 1.2

1. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതൊക്കെയാണ് ശൂന്യഗണങ്ങൾ?

   (i) 2 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ എണ്ണം.

   (ii) ഇരട്ട അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗണം.

   (iii) $\{ x : x$, ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ, $x < 5, x > 7\}$

   (iv) $\{ y : y$, രണ്ടു സമാന്തര വരകൾക്ക് പൊതുവായുള്ള ബിന്ദു$\}$

2. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതൊക്കെയാണ് പരിമിതഗണങ്ങൾ? ഏതൊക്കെയാണ് അനന്തഗണങ്ങൾ?

   (i) ഒരു വർഷത്തിലെ മാസങ്ങളുടെ ഗണം

   (ii) $\{1, 2, 3, \ldots\}$

   (iii) $\{1, 2, 3, \ldots 99, 100\}$

   (iv) 100 ൽ കൂടുതലായ പൂർണഅധിസംഖ്യകളുടെ ഗണം

   (v) 99 ൽ കുറവായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗണം

3. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതെല്ലാമാണ് പരിമിതഗണങ്ങൾ? ഏതെല്ലാമാണ് അനന്തഗണങ്ങൾ?

   (i) x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ വരകളുടെ ഗണം

   (ii) ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം

   (iii) 5 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെ ഗണം

   (iv) ഭൂമിയിൽ വസിക്കുന്ന മൃഗങ്ങളുടെ ഗണം

   (v) $(0, 0)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ ഗണം

4. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളിൽ A, B തുല്യമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

   (i) $A = \{ a, b, c, d \}$ $B = \{ d, c, b, a \}$

   (ii) $A = \{ 4, 8, 12, 16 \}$ $B = \{ 8, 4, 16, 18\}$

   (iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $B = \{ x : x$, ഒരു ഇരട്ടഅധിസംഖ്യ, $x \leq 10\}$

   (iv) $A = \{ x : x$, 10 ന്റെ ഗുണിതം$\}$, $B = \{ 10, 15, 20, 25, 30, . . . \}$

5. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങൾ തുല്യമാണോ? കാരണം എഴുതുക.

   (i) $A = \{2, 3\}$, $B = \{x : x^2 + 5x + 6 = 0\}$

   (ii) $A = \{ x :$ FOLLOW എന്ന വാക്കിലെ ഒരു അക്ഷരമാണ് $x\}$

   $B = \{ x :$ WOLF എന്ന വാക്കിലെ ഒരു അക്ഷരമാണ് $x\}$

6. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ നിന്ന് തുല്യഗണങ്ങൾ തിരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

   $A = \{ 2, 4, 8, 12\}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{ 4, 8, 12, 14\}$, $D = \{ 3, 1, 4, 2\}$

   $E = \{-1, 1\}$, $F = \{ 0, a\}$, $G = \{1, -1\}$, $H = \{ 0, 1\}$

1.6. ഉപഗണങ്ങൾ (Subsets)

ഇരട്ടസംഖ്യകൾ എന്നാൽ 2 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന സംഖ്യകൾ ആണല്ലോ. ഇവയിൽ ചിലതിനെ 4 കൊണ്ടും നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം. എന്നാൽ എല്ലാ ഇരട്ടസംഖ്യകളെയും 4 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാൻ സാധിക്കുമോ. അതായത്, 4 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന എല്ലാ സംഖ്യകളെയും 2 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാനാകുമോ?

4 കൊണ്ടു നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന മുഴുവൻ സംഖ്യകളെയും 2 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം. എന്നാൽ 2 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന എല്ലാ സംഖ്യകളെയും 4 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കുക സാധ്യമല്ല.

ഈ വസ്തുതയെ ഗണത്തിന്റെ ഭാഷയിൽ മാറ്റിയെഴുതിയാൽ

$E = \{2n, n \in \mathbf{Z}\}$

$F = \{4n, n \in \mathbf{Z}\}$ ആയാൽ F ലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും E യിലെയും അംഗങ്ങളാണ്. ഇവിടെ F നെ E യുടെ ഉപഗണം (subset) എന്നു വിളിക്കുന്നു. കൂടാതെ **E** യെ **F** ന്റെ അധിഗണം (super set) എന്നും പറയുന്നു.

E യുടെ ഉപഗണമാണ് **F** എന്നത് $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഇനി E യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും **F** ലെയും കൂടി അംഗങ്ങളായിരുന്നെങ്കിൽ $E = F$ ആകുമായിരുന്നു. അതിനാൽ ഉപഗണത്തെ നമുക്ക് ഇങ്ങനെ നിർവചിക്കാം.

ഗണം A, ഗണം B യുടെ ഉപഗണമാകണമെങ്കിൽ ഒന്നുകിൽ A ശൂന്യഗണമായിരിക്കണം അല്ലെങ്കിൽ A യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും B യിലെ അംഗങ്ങൾ ആയിരിക്കണം.

ഈ നിർവചന പ്രകാരം ശൂന്യഗണം എല്ലാ ഗണങ്ങളുടെയും ഉപഗണമായിരിക്കും. കൂടാതെ, ഏതൊരു ഗണവും അതിന്റെ തന്നെ ഉപഗണമായിരിക്കും. ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ $\phi \subset A$, $A \subseteq A$

ഇനി S എന്ന 6 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെ ഗണം പരിഗണിക്കുക. അതായത് $S = \{x: x = 6m, m \in \mathbf{Z}\}$ ആയാൽ S ലുള്ള എല്ലാ അംഗങ്ങളും E യിലും ഉണ്ടെന്നു കാണാൻ കഴിയും. കാരണം 6 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളെല്ലാം 2 ന്റെയും ഗുണിതങ്ങളാണ്. അതായത് $S \subseteq E$ ആണ്. ഇനി S, F പരിഗണിച്ചാലോ? $4 \in F$ ആണ് പക്ഷെ $4 \notin S$. അതുകൊണ്ട് $F \not\subset S$ എന്ന് പറയാം. അതുപോലെ $6 \in S$ ആണ് പക്ഷേ $6 \notin F$. അതായത് $S \not\subset F$.

A = B ആയാൽ A യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും B യിൽ ഉണ്ടെന്നാണല്ലോ, അതായത് $A \subseteq B$ ആണ്. കൂടാതെ B യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും A യിലുമുണ്ട്. അതായത് $B \subseteq A$. രണ്ടു ഗണങ്ങൾ തുല്യമായാൽ അവ പരസ്പരം ഉപഗണങ്ങളായിരിക്കും. തിരിച്ചും ഇത് ശരിയാകില്ലേ? രണ്ട് ഗണങ്ങൾ പരസ്പരം ഉപഗണങ്ങളായിരുന്നാൽ അവ തുല്യമാവുകയില്ലേ?

> രണ്ടു ഗണങ്ങൾ A യും B യും പരസ്പരം ഉപഗണങ്ങളായിരുന്നാൽ അവ തുല്യഗണങ്ങളായിരിക്കും. തിരിച്ചും ഈ പ്രസ്താവന ശരിയാകും.
>
> അതായത്, $A \subseteq B$, $B \subseteq A \Leftrightarrow A - B$ ആയിരിക്കും.

1.6.1 ഉപഗണങ്ങളുടെ ഗണം (Power Set)

$A = \{1, 2, 3\}$ എന്ന ഗണം പരിഗണിക്കുക.

A യുടെ ഒരു ഉപഗണമാണ് $\{1\}$. അതുപോലെ A യുടെ ഏതൊക്കെ ഉപഗണങ്ങൾ എഴുതാൻ കഴിയും?

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \phi$ എന്നിങ്ങനെ 8 ഉപഗണങ്ങൾ A എന്ന ഗണത്തിന് ഉണ്ടാകും. A യിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണവും കൂടും. n അംഗങ്ങളുള്ള A എന്ന ഗണത്തിന് എത്ര ഉപഗണങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും എന്ന് ചിന്തിച്ചു നോക്കൂ.

$n = 0$ ആയാൽ A ഒരു ശൂന്യഗണമായിരിക്കും ശൂന്യഗണത്തിന്റെ ഉപഗണം ശൂന്യഗണം മാത്രമാണല്ലോ, അതായത് $n = 0$ ആയാൽ A ക്ക് ഒരു ഉപഗണം സാധ്യമാണ് $n = 1$ ആയാലോ? ഉദാഹരണത്തിന്, $A = \{a\}$ എന്നു കരുതിയാൽ ഉപഗണങ്ങൾ $\{\ \}, \{a\}$. $n = 1$ ആയാൽ രണ്ട് ഉപഗണങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. A യിൽ b എന്ന ഒരംഗത്തെ കൂടി ചേർത്ത് B എന്ന ഒരു ഗണം പരിഗണിച്ചാൽ $n = 2$ ആകും.

ഇവിടെ B യുടെ ഉപഗണങ്ങൾ എഴുതിനോക്കാതെ എഴുതുന്ന രീതിയെപ്പറ്റി ചിന്തിക്കാം. മുൻപ് A യുടെ ഉപഗണമായ ഗണങ്ങളെല്ലാം ഇപ്പോൾ B യുടെയും ഉപഗണങ്ങൾ ആകുമല്ലോ. അതോടൊപ്പം ആ ഉപഗണങ്ങളിൽ b എന്ന പുതിയ അംഗത്തെ ഉൾപ്പെടുത്തിയാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ ഗണങ്ങളും B യുടെ ഉപഗണങ്ങൾ ആയിരിക്കും.

വിശദമാക്കിയാൽ, B യുടെ ആകെ ഉപഗണങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നത്.

A യുടെ ഉപഗണങ്ങളായ $\{\ \}$, $\{a\}$ എന്നിവയും ഇവയോട് b എന്ന പുതിയ അംഗം ചേർത്താൽ കിട്ടുന്ന $\{b\}$, $\{a, b\}$ എന്നിവയും ചേർന്നതായിരിക്കും അതായത് B യുടെ ഉപഗണങ്ങൾ $\{\ \}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$ എന്നിങ്ങനെ നാലെണ്ണമായിരിക്കും.

B യിൽ 'c' എന്ന പുതിയ അംഗത്തെ ചേർത്ത് 'C' എന്ന ഒരു ഗണം ഉണ്ടാക്കിയാൽ $n = 3$ ആയി.

ഇതേ രീതിയിൽ ചിന്തിച്ചാൽ B യുടെ ഉപഗണങ്ങളുടെ ഇരട്ടി ആയിരിക്കും C യുടെ ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം. അതായത് C യുടെ ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 2 \times 4 = 8 = 2 \times 2^2 = 2^3$ ഇത്തരത്തിൽ പുതുതായി ചേരുന്ന ഓരോ അംഗത്തിനും അനുസരിച്ച് ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം തൊട്ടുമുൻപത്തേതിന്റെ ഇരട്ടി ആയി വർദ്ധിക്കും.

അതായത്, $n = 3$ ആയാൽ ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 2^3$

കുറിപ്പ്

A എന്ന ഗണത്തിൽ n അംഗങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ A യുടെ ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം 2^n ആയിരിക്കും.

A എന്ന ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങളിൽ ഒരെണ്ണം A തന്നെയാണല്ലോ. A യുടെ A ഒഴികെയുള്ള ഉപഗണങ്ങളെ സംഗതോപഗണങ്ങൾ (Proper Subset) എന്നു പറയുന്നു. n അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം 2^n ആയതിനാൽ സംഗതോപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം $2^n - 1$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 9

ϕ, $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 5, 9\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ എന്നീ ഗണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. $\subset$, $\not\subset$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ അനുയോജ്യമാം വിധം ചേർത്ത് പൂരിപ്പിക്കുക.

(i) $\phi \ldots B$ (ii) $A \ldots B$ (iii) $A \ldots C$ (iv) $B \ldots C$

പരിഹാരം

(i) $\phi \subset B$ (ശൂന്യഗണം എല്ലാ ഗണങ്ങളുടെയും ഉപഗണം)

(ii) $A \not\subset B$ $(3 \in A, 3 \notin B)$

(iii) $A \subset C$ (A യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും C യിലുമുണ്ട്)

(iv) $B \subset C$ (B യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും C യിലുമുണ്ട്)

ഉദാഹരണം : 10

A = { a, e, i, o, u}, B = { a, b, c, d} എന്നീ ഗണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. A എന്ന ഗണം B യുടെ ഉപഗണമാണോ? അല്ല (എന്തുകൊണ്ട്?). B എന്ന ഗണം A യുടെ ഉപഗണമാണോ? അല്ല (എന്തുകൊണ്ട്?)

ഉദാഹരണം : 11

A, B, C എന്നിവ മൂന്നു ഗണങ്ങളാണ്. A ∈ B, B ⊂ C ആയാൽ A ⊂ C എന്നത് ശരിയാണോ? അല്ലെങ്കിൽ ഉദാഹരണ സഹിതം വ്യക്തമാക്കുക.

പരിഹാരം

A ⊂ C എന്നത് ശരിയാകില്ല.
A = {1}, B = {{1}, 2}, C = {{1}, 2, 3} എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ A ∈ B ആണ്.
B ⊂ C യും ശരിയാകുന്നുണ്ട്. പക്ഷേ A ⊄ C.

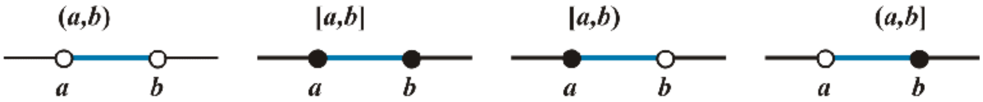
നിർവചനം

ഒരു ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങൾ മുഴുവൻ നിരത്തിയെഴുതുക. ഈ ഉപഗണങ്ങൾ അംഗങ്ങളായി വരുന്ന ഒരു പുതിയ ഗണം പരിഗണിച്ചാൽ ആ ഗണത്തെ ഉപഗണങ്ങളുടെ ഗണം എന്നു വിളിക്കാം. A എന്ന ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണഗണത്തെ P(A) എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.
ഉദാഹരണത്തിന്, A = {1, 2, 3}
ഉപഗണഗണം P(A) = {ϕ, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}} ആയിരിക്കും.
അതായത്, A എന്ന ഗണത്തിൽ n അംഗങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ n[P(A)] = 2^n

1.6.2 R ന്റെ ഉപഗണങ്ങളായി ഇടവേളകൾ (Intervals as subsets of R)

രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണം **R** പരിഗണിക്കുക. നാം കണ്ടു പരിചയിച്ച എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ഗണം **N**, പൂർണസംഖ്യാ ഗണം **Z**, ഭിന്നകങ്ങളുടെ ഗണം **Q** എന്നിവയെല്ലാം **R** ന്റെ ഉപഗണങ്ങൾ ആണ്. A = {x : 0 < x < 1} എന്ന ഗണവും **R** ന്റെ ഉപഗണമാണ്. **R** ന്റെ **N, Q, Z** പോലെയുള്ള ഉപഗണങ്ങളിൽ നിന്ന് A എങ്ങനെയാണ് വ്യത്യസ്തമാകുന്നത്? A യിലെ അംഗങ്ങളെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതാൻ സാധിക്കുമോ? A യിൽ ആദ്യം വരുന്ന സംഖ്യ ഏതാണ്? അടുത്ത സംഖ്യയായി ഏതാണെഴുതേണ്ടത്? A എന്ന ഗണം പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയിലുള്ള മുഴുവൻ രേഖീയ സംഖ്യകളെയും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഗണമാണ്. **R** ന്റെ ഇത്തരം ഉപഗണത്തെ 'തുറന്ന ഇടവേള' എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. ഇതിനെ (0, 1) എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. B = {x : 0 ≤ x ≤ 1} എന്നായാലോ? B യിൽ 0 ത്തിനും 1 നും ഇടയിലുള്ള മുഴുവൻ രേഖീയസംഖ്യകളും 0, 1 കൂടി ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഇത്തരം ഉപഗണത്തെ 'അടഞ്ഞ ഇടവേള' എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ [0, 1] എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ a, b എന്നിവ രണ്ടു രേഖീയ സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ [a, b] = {x : $a \le x \le b$}, (a, b) = {x : $a < x < b$}, [a, b) = {x : $a \le x < b$}

$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ എന്നിങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.



ചിത്രം 1.1

1.7 സമസ്തഗണം (Universal set)

നിർവചനം

ഒരു ഗണിത പ്രശ്നത്തിൽ പരിഗണിക്കേണ്ടിവരുന്ന മുഴുവൻ ഗണങ്ങളുടെയും അധിഗണമായെടുക്കാവുന്ന ഗണമാണ് സമസ്തഗണം.

ഉദാഹരണത്തിന് $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{4, 5\}$

$C = \{5, 6, 7\}$ ആയാൽ

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ എന്ന ഗണത്തെ സമസ്തഗണമായി പരിഗണിക്കാം. ഇങ്ങനെയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും ചെറിയ ഗണം $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ആണെന്ന് ഓർക്കുക. U എന്ന അക്ഷരം ഉപയോഗിച്ചാണ് സമസ്തഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 1.3

1. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചോദ്യങ്ങളിൽ $\subset$, $\not\subset$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പൂരിപ്പിക്കുക.

   (i) $\{2, 3, 4\} \ldots \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (ii) $\{a, b, c\} \ldots \{b, c, d\}$

   (iii) $\{x : x,$ നിങ്ങളുടെ സ്കൂളിലെ XI ക്ലാസിലെ ഒരു കുട്ടി$\} \ldots \{x : x,$ നിങ്ങളുടെ സ്കൂളിലെ ഒരു കുട്ടി$\}$

   (iv) $\{x : x,$ ഒരു തലത്തിലെ വൃത്തം$\} \ldots \{x : x,$ അതേ തലത്തിലെ ഒരു യൂണിറ്റ് ആരമുള്ള വൃത്തം$\}$

   (v) $\{x : x,$ ഒരു തലത്തിലെ ത്രികോണം$\} \ldots \{x : x,$ അതേ തലത്തിലെ ഒരു ചതുരം$\}$

   (vi) $\{x : x,$ ഒരു തലത്തിലെ സമഭുജ ത്രികോണം$\} \ldots \{x : x,$ അതേ തലത്തിലെ ഒരു ത്രികോണം$\}$

   (vii) $\{x : x,$ ഒരു ഇരട്ട എണ്ണൽസംഖ്യ$\} \ldots \{x : x,$ ഒരു പൂർണ സംഖ്യ$\}$

2. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശരിയോ തെറ്റോ എന്ന് എഴുതുക.

   (i) $\{a, b\} \not\subset \{b, c, a\}$

   (ii) $\{a, e\} \subset \{x : x$ ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ ഒരു സ്വരാക്ഷരം$\}$

(iii) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 3, 5\}$

(iv) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$

(v) $\{a\} \in \{a, b, c\}$

(vi) $\{x : x$, 6 ൽ കുറവായ ഒരു ഇരട്ട എണ്ണൽസംഖ്യ$\}$ $\subset$ $\{x : x$, 36 ന്റെ ഘടകമായ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ$\}$

3. $A = \{1, 2, \{3, 4\}, 5\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ തെറ്റായ പ്രസ്താവനകൾ ഏതെല്ലാം? എന്തുകൊണ്ട്?

(i) $\{3, 4\} \subset A$ (ii) $\{3, 4\} \in A$ (iii) $\{\{3, 4\}\} \subset A$
(iv) $1 \in A$ (v) $1 \subset A$ (vi) $\{1, 2, 5\} \subset A$
(vii) $\{1, 2, 5\} \in A$ (viii) $\{1, 2, 3\} \subset A$ (ix) $\phi \in A$
(x) $\phi \subset A$ (xi) $\{\phi\} \subset A$

4. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളുടെ എല്ലാ ഉപഗണങ്ങളും എഴുതുക.

(i) $\{a\}$ (ii) $\{a, b\}$ (iii) $\{1, 2, 3\}$ (iv) ϕ

5. $A = \phi$ ആയാൽ $P(A)$ യിൽ എത്ര അംഗങ്ങളുണ്ടാകും?

6. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയെ ഇടവേള ആയി എഴുതുക.

(i) $\{x : x \in \mathbf{R}, -4 < x \leq 6\}$ (ii) $\{x : x \in \mathbf{R}, -12 < x < -10\}$

(iii) $\{x : x \in \mathbf{R}, 0 \leq x < 7\}$ (iv) $\{x : x \in \mathbf{R}, 3 \leq x \leq 4\}$

7. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഇടവേളകളെ നിബന്ധനാ രീതിയിൽ എഴുതുക.

(i) $(-3, 0)$ (ii) $[6, 12]$ (iii) $(6, 12]$ (iv) $[-23, 5)$

8. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ഗണത്തിനും ഉചിതമായ സമസ്തഗണം എഴുതുക.

i. മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ ഗണം

ii. സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുടെ ഗണം

9. $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളിൽ ഏതാണ് A, B, C എന്നീ ഗണങ്ങളുടെ സമസ്ത ഗണമായി എഴുതാൻ കഴിയുന്ന ഗണം?

(i) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(ii) ϕ

(iii) $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

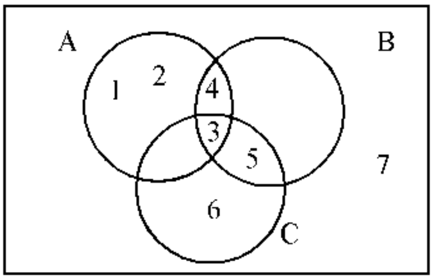
(iv) $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

1.8 വെൻചിത്രങ്ങൾ (Venn Diagrams)

ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന രീതിയാണ് വെൻചിത്രം. (പൊതുവെ സമസ്തഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് ചതുരവും മറ്റു ഗണങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് അടഞ്ഞ വക്രവുമാണ് (ഉദാ: വൃത്തം) ഉദാഹരണത്തിന്

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{3, 4, 5\}$$
$$C = \{3, 5, 6\}$$

ഈ ഗണങ്ങളെ വെൻചിത്രമുപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെ ചിത്രീകരിക്കാം.



ചിത്രം 1.2

ഗണങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ വെൻചിത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

1.9 ഗണക്രിയകൾ (Operation on sets)

$A = \{x : x = 2m, m \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x : x = 3m, m \in \mathbf{N}\}$ ആണെന്നു കുരുതുക. A യിലെ അംഗങ്ങൾ എല്ലാം രണ്ടിന്റെ ഗുണിതങ്ങളും B യിലെ അംഗങ്ങൾ എല്ലാം 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുമാണ്. ഇവയെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതിയാൽ.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

A യിലും B യിലും പൊതുവായി വരുന്ന അംഗങ്ങളേതൊക്കെയാണ്? പൊതുവായ അംഗങ്ങളെ C എന്ന ഗണമായി സൂചിപ്പിച്ചാൽ

$C = \{6, 12, 18, \ldots\ldots\ldots\}$ എന്ന് കിട്ടും.

ഈ ഗണത്തിന്റെ പ്രത്യേകത അവയിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം 6 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളാണ് എന്നതാണ്. അതായത്, $C = \{x : x = 6m, m \in \mathbf{N}\}$

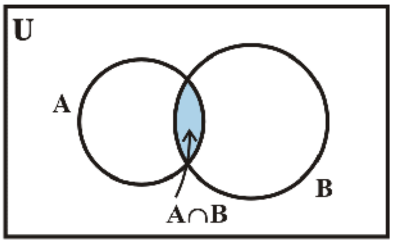
ഇത്തരത്തിൽ രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ പൊതുവായ അംഗങ്ങളെ ഉൾപ്പെടുത്തി പുതിയതായി രൂപീകരിക്കുന്ന ഗണത്തെ ആ ഗണങ്ങളുടെ സംഗമം (intersection) എന്ന് പറയുന്നു.

(A സംഗമം B ആണ് C)

ഇതിനെ ചിഹ്നമുപയോഗിച്ച് $A \cap B = C$ എന്നെഴുതാം.

$A \cap B = \{x : x \in A$ യും $x \in B$ യും$\}$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണത്തിന്



ചിത്രം 1.3

$$P = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$Q = \{3, 4, 5, 6\}$$
$$P \cap Q = \{3, 4\}$$

പൊതുവായി അംഗങ്ങൾ ഒന്നും തന്നെയില്ലാത്ത ഗണങ്ങളാണെങ്കിലോ? ഉദാഹരണത്തിന്

$$M = \{a, b, c\}$$
$$N = \{d, c\}$$
$$M \cap N = \{\ \}$$

ഇത്തരത്തിൽ രണ്ടു ഗണങ്ങളിൽ പൊതുവായി അംഗങ്ങൾ ഒന്നുമില്ലെങ്കിൽ അത്തരം ഗണങ്ങളെ വിയുക്തഗണങ്ങൾ (disjoint sets) എന്നു പറയുന്നു.

അതായത്,

A യും B യും രണ്ടു വിയുക്തഗണങ്ങളായാൽ $A \cap B = \phi$ ആയിരിക്കും.

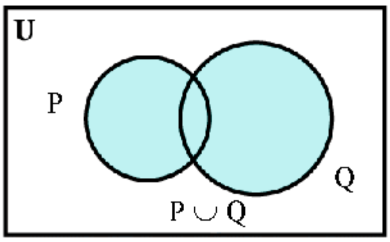
ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ രണ്ടു ഗണങ്ങളിൽ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന മുഴുവൻ അംഗങ്ങളെയും പരിഗണിക്കുന്ന ഗണപ്രശ്നങ്ങൾ കൈകാര്യം ചെയ്യേണ്ടി വരും. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ രണ്ടു ഗണത്തിലെയും മുഴുവൻ അംഗങ്ങളെയും ചേർത്തെഴുതി ഒരു പുതിയ ഗണം രൂപീകരിക്കേണ്ടിവരും.

ഉദാഹരണത്തിന്

$$P = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$Q = \{4, 5, 6, 7\}$$

P യിലെയും Q വിലെയും അംഗങ്ങളെയെല്ലാം ചേർത്ത് പുതിയൊരു ഗണം എഴുതുകയാണെങ്കിൽ അതിനെ P യോഗം Q എന്ന് വിളിക്കുന്നു. '$\cup$' എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ചാണ് രണ്ട് ഗണങ്ങളുടെ യോഗത്തെ (union) സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

$$P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$



ചിത്രം 1.4

4 എന്ന അംഗം P യിലും Q വിലും പൊതുവായുള്ളതായതിനാൽ 4 നെ ഒറ്റത്തവണയേ യോഗത്തിൽ എഴുതേണ്ടതുള്ളൂ.

$$P \cup Q = \{x : x \in P \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x \in Q\}$$

$P \cup Q$ വിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം P യിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണവും Q വിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണവും കൂട്ടിയതിന് തുല്യമാകുമോ?

P യിലും Q വിലും പൊതുവായി അംഗങ്ങളില്ലെങ്കിൽ അവ ചേർത്തെഴുതുന്ന ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം P യിലെയും Q വിലെയും അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ തുകക്ക് തുല്യമാകുമെന്നു വ്യക്തമാണല്ലോ.

മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ

P യും Q വും രണ്ടു വിയുക്ത ഗണങ്ങളും $n(P)$, $n(Q)$, $n(P \cup Q)$ എന്നിവ യഥാക്രമം P യിലെയും Q വിലെയും $P \cup Q$ വിലെയും അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണവുമായാൽ

$$n(P \cup Q) = n(P) + n(Q)$$ ആയിരിക്കും

ഇനി P ക്കും Q വിനും പൊതുവായി അംഗങ്ങളുണ്ടെങ്കിലോ? പൊതുവായുള്ളവ P യിലും Q വിലും ഉണ്ടാകുമല്ലോ. $P \cup Q$ വിൽ ഇവയെ ഒരുതവണ എഴുതിയാൽ മതിയാകും. അതുകൊണ്ടു തന്നെ P, Q ഇവയിലെ അംഗങ്ങളുടെ തുകയെടുത്താൽ ഇവയിൽ പൊതുവായുള്ള അംഗങ്ങളെ രണ്ടുതവണ എണ്ണിയിട്ടുണ്ടാകും. അപ്പോൾ $n(P \cup Q)$ കിട്ടാൻ $n(P)$ യുടെയും $n(Q)$ വിന്റെയും തുകയിൽ നിന്ന് പൊതുവായുള്ളതിന്റെ എണ്ണം കുറക്കേണ്ടി വരും.

P യും Q വും അനന്തഗണങ്ങളല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ഗണങ്ങളായാൽ

$$n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$$

ഉദാഹരണം : 12

$A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{6, 8, 10, 12\}$ ആയാൽ $A \cup B$, $A \cap B$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, A \cap B = \{6, 8\}$$

ഉദാഹരണം : 13

$A = \{a, e, i, o, u\}$ $B = \{a, i, u\}$ എന്നിവ ആയാൽ $A \cup B = A$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$A \cup B = \{a, e, i, o, u\} = A$$ ആയിരിക്കും

അതായത്, $B \subset A$ ആയാൽ $A \cup B = A$ ആയിരിക്കും

ഉദാഹരണം : 14

X = {രാമൻ, ഗീത, അക്ബർ} എന്നത് ഒരു സ്കൂൾ ഹോക്കി ടീമിലുള്ള XI-ാം ക്ലാസ്സിലെ കുട്ടികളുടെ ഗണമാണ്. Y = {ഗീത, ദാവീദ്, അശോകൻ} എന്നിവർ സ്കൂൾ ഫുട്ബോൾ ടീമിൽ ഉള്ള XI-ാം ക്ലാസ്സിലെ ഗണമാണ്. $X \cup Y$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

$X \cup Y$ എന്ന ഗണത്തെ പ്രസ്താവന രൂപത്തിലെഴുതുക.

പരിഹാരം

$X \cup Y$ = {രാമൻ, ഗീത, അക്ബർ, ദാവീദ്, അശോകൻ}

$X \cup Y$ എന്നത് XI-ാം ക്ലാസിൽ പഠിക്കുന്ന, സ്കൂൾ ഫുട്ബോൾ ടീമിലോ ഹോക്കി ടീമിലോ അഥവാ രണ്ടിലുമോ ഉള്ള കുട്ടികളുടെ ഗണമാണ്.

ഉദാഹരണം : 15

ഉദാഹരണം 14 ലെ ഗണങ്ങൾ X, Y എന്നിവ പരിഗണിക്കുക. $X \cap Y$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

രണ്ടിലും പൊതുവായുള്ള അംഗം 'ഗീത' മാത്രമാണ്. അതുകൊണ്ട്

$$X \cap Y = \{ \text{ഗീത} \}$$

ഉദാഹരണം : 16

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{ 2, 3, 5, 7 \}$ ആയാൽ $A \cap B$ കണ്ടുപിടിക്കുക. $A \cap B = B$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$A \cap B = \{ 2, 3, 5, 7 \} = B$$

ഇവിടെ $B \subset A$ ആണ്. $B \subset A$ ആയാൽ $A \cap B = B$ ആയിരിക്കും.

യോഗത്തിന്റെയും സംഗമത്തിന്റെയും ചില പ്രത്യേകതകൾ

(i) $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$, ക്രമ നിയമം (Commutative law)

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, സംയോജന നിയമം (Associative law)

(iii) $A \cup \phi = A$

$A \cap \phi = \phi$ (Identity law, Law of ϕ)

(iv) $A \cup A = A$

$A \cap A = A$ (Idempotent law)

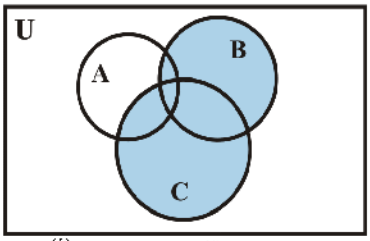
(v) $U \cup A = U$

$U \cap A = A$ (Law of $\cup$)

(vi) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ വിതരണ നിയമം (Distributive property)

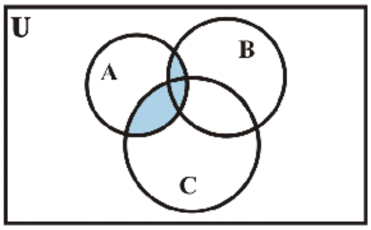
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ഉദാഹരണത്തിന്, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ എന്ന പ്രത്യേകത വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കാം.



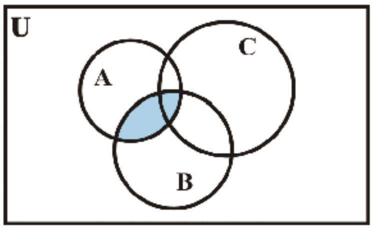
(i) $(B \cup C)$

ചിത്രം 1.5

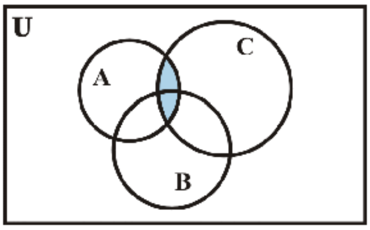


(ii) $A \cap (B \cup C)$

ചിത്രം 1.6

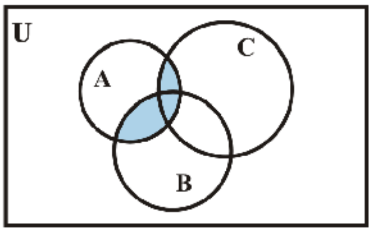


(iii) $(A \cap B)$ ചിത്രം 1.7



(iv) $(A \cap C)$

ചിത്രം 1.8



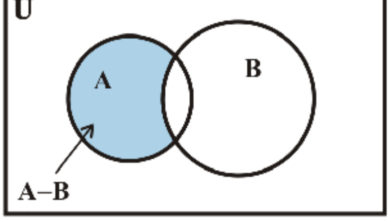
(v) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

ചിത്രം 1.9

രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം (Difference of two sets)

$P = \{x : x = 3m, m \in \mathbf{Z}\}$

$Q = \{x : x = 4m, m \in \mathbf{Z}\}$ എന്നീ രണ്ടു ഗണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. P യിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളും Q വിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം 4 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുമാണല്ലോ? 4 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളല്ലാത്ത 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?



ചിത്രം 1.10

ഇതു കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളിൽ നിന്ന് അതായത് P യിൽ നിന്ന് 4 ന്റെ ഗുണിതങ്ങ

ളായുള്ളവയെ ഒഴിവാക്കേണ്ടി വരും. അതായത് P യിൽ നിന്നും Q വിലെ അംഗങ്ങളെ ഒഴിവാക്കേണ്ടിവരും. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ഗണത്തെ P വ്യത്യാസം Q എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ P – Q എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം.

$$P - Q = \{x : x \in P \text{ യും } x \notin Q \text{ വും}\}$$

ഉദാഹരണം : 17

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {2, 4, 6, 8} എന്നിവ ആയാൽ A – B യും B – A യും കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

A – B = {1, 3, 5}, B – A = {8}

(A – B ≠ B – A എന്നത് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കുക)

ഉദാഹരണം : 18

A = {a, e, i, o, u}, B = {a, i, k, u} എന്നിവ ആയാൽ A – B യും B – A യും കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$$A - B = \{e, o\}$$

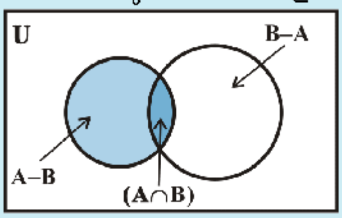
$$B - A = \{k\}$$

A – B യിലെ അംഗങ്ങൾ എഴുതുന്നത് A യിൽ നിന്ന് B യിലുള്ള അംഗങ്ങളെ ഒഴിവാക്കിയാണല്ലോ. അതായത് A യിൽ നിന്നും A യിലും B യിലും പൊതുവായുള്ളവയെ ഒഴിവാക്കണം. അങ്ങനെയെങ്കിൽ A – B യിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം A യുടെ എണ്ണത്തിൽ നിന്ന് A ∩ B യുടെ എണ്ണം കുറച്ചതാകുമല്ലോ.

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

കുറിപ്പ് 1

A – B, A ∩ B, B – A എന്നിവ വിയുക്ത ഗണങ്ങളായിരിക്കും.



ചിത്രം 1.11

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ (1.4)

1. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ജോടി ഗണങ്ങളുടെയും യോഗം കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) X = {1, 3, 5} Y = {1, 2, 3}

   (ii) A = {a, e, i, o, u} B = {a, b, c}

   (iii) A = {x : x, 3 ന്റെ ഗുണിതമായ ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യയാണ്}
   B = {x : x, 6 ൽ കുറവായ എണ്ണൽ സംഖ്യയാണ്}

   (iv) A = {x : x, ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യ, $1 < x \le 6$ }
   B = {x : x, ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യ, $6 < x < 10$ }

   (v) A = {1, 2, 3}, B = ϕ

2. A = { a, b }, B = {a, b, c}. A എന്ന ഗണം B യുടെ ഉപഗണമാണോ? A ∪ B കണ്ടെത്തുക.

3. A ⊂ B ആകുന്ന വിധം രണ്ടു ഗണങ്ങളാണ് A യും B യും എങ്കിൽ A ∪ B എന്ത്?

4. A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5, 6}, C = {5, 6, 7, 8 }, D = { 7, 8, 9, 10 } ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) A ∪ B (ii) A ∪ C (iii) B ∪ C (iv) B ∪ D
   (v) A ∪ B ∪ C (vi) A ∪ B ∪ D (vii) B ∪ C ∪ D

5. ചോദ്യം നമ്പർ 1 ലെ ഓരോ ജോടി ഗണങ്ങളുടെയും സംഗമം കണ്ടുപിടിക്കുക.

6. A = { 3, 5, 7, 9, 11 }, B = {7, 9, 11, 13}, C = {11, 13, 15}, D = {15, 17} ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) A ∩ B (ii) B ∩ C (iii) A ∩ C ∩ D
   (iv) A ∩ C (v) B ∩ D (vi) A ∩ (B ∪ C)
   (vii) A ∩ D (viii) A ∩ (B ∪ D) (ix) (A ∩ B) ∩ (B ∪ C)
   (x) (A ∪ D) ∩ (B ∪ C)

7. A = {x : x, ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ}, B = {x : x ഒരു ഇരട്ട എണ്ണൽസംഖ്യ}
   C = {x : x, ഒരു ഒറ്റ എണ്ണൽസംഖ്യ}, D = {x : x, ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ} ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) A ∩ B (ii) A ∩ C (iii) A ∩ D
   (iv) B ∩ C (v) B ∩ D (vi) C ∩ D

8. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളിൽ ഏതെല്ലാമാണ് വിയുക്ത ഗണങ്ങളായി വരുന്ന ജോടികൾ?

   (i) $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{x : x$ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ, $4 \leq x \leq 6\}$

   (ii) $\{a, e, i, o, u\}$, $\{c, d, e, f\}$

   (iii) $\{x : x$, ഒരു ഇരട്ടപൂർണസംഖ്യ$\}$, $\{x : x$, ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ$\}$

9. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$, $D = \{5, 10, 15, 20\}$ എന്നിവ ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $A - B$	(ii) $A - C$	(iii) $A - D$	(iv) $B - A$
(v) $C - A$	(vi) $D - A$	(vii) $B - C$	(viii) $B - D$
(ix) $C - B$	(x) $D - B$	(xi) $C - D$	(xii) $D - C$

10. $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{f, b, d, g\}$ ആയാൽ

    (i) $X - Y$ (ii) $Y - X$ (iii) $X \cap Y$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

11. **R** രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണവും **Q** ഭിന്നകസംഖ്യകളുടെ ഗണവും ആയാൽ **R – Q** എന്ത്?

12. ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശരിയോ, തെറ്റോ എന്ന് എഴുതുക. കാരണം വ്യക്തമാക്കുക.

    (i) $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{3, 6\}$ എന്നിവ വിയുക്തഗണങ്ങളാണ്.

    (ii) $\{a, e, i, o, u\}$, $\{a, b, c, d\}$ എന്നിവ വിയുക്തഗണങ്ങളാണ്.

    (iii) $\{2, 6, 10, 14\}$, $\{3, 7, 11, 15\}$ എന്നിവ വിയുക്തഗണങ്ങളാണ്.

    (iv) $\{2, 6, 10\}$, $\{3, 7, 11\}$ എന്നിവ വിയുക്തഗണങ്ങളാണ്.

1.10 പൂരകഗണം (Complement of a set)

5 നും 20 നും ഇടയിലുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകൾ പരിഗണിക്കുക. ഈ ഗണത്തിലെ അഭാജ്യസംഖ്യകൾ A എന്ന ഗണമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഭാജ്യസംഖ്യകളെ B എന്നും എടുക്കാം.

$A = \{7, 11, 13, 17, 19\}$, $B = \{6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$

A, B എന്നീ ഗണങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതയെന്താണ്? ഇവ രണ്ടും 5 നും 20 നും ഇടയിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെ രണ്ടു ഗണങ്ങളാക്കുന്നു. അവയിലെ അംഗങ്ങളെ ചേർത്തെഴുതിയാൽ ആദ്യം സൂചിപ്പിച്ച ഗണം ലഭിക്കുന്നു.

5 നും 20 നും ഇടയിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെ U എന്നെടുത്താൽ

$U = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$

$A \cup B = U$

ഇവിടെ B എന്ന ഗണത്തെ A യുടെ പൂരകഗണം എന്ന് പറയുന്നു. (തിരിച്ചും ഇത് ശരിയാണ്)

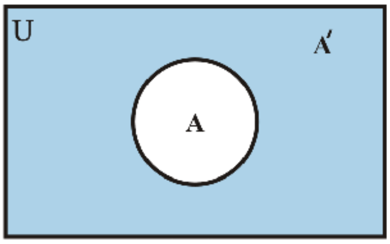
A യുടെ പൂരകഗണത്തെ A' എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാം.

$$A' = B$$

അങ്ങനെയെങ്കിൽ $A' = \{x : x \in U, x \notin A\}$ എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ്.

മറ്റൊരു തരത്തിൽ

$$A' = U - A$$



ചിത്രം 1.12

ഉദാഹരണം : 20

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ആയാൽ A' കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

A എന്ന ഗണത്തിൽ അംഗമാകാത്ത U വിലെ അംഗങ്ങൾ 2, 4, 6, 8, 10 എന്നിവയാണ്.

$$\therefore A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

ഉദാഹരണം : 21

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$ ആയാൽ $A', B', A' \cap B', A \cup B$, എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക. തുടർന്ന് $(A \cup B)' = A' \cap B'$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$A' = \{1, 4, 5, 6\}, B' = \{ 1, 2, 6 \}. A' \cap B' = \{ 1, 6 \}$

$A \cup B = \{ 2, 3, 4, 5 \}, (A \cup B)' = \{ 1, 6 \}$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

പൊതുവെ A, B എന്നീ ഏതു രണ്ടു ഗണങ്ങൾക്കും ഈ പ്രത്യേകത, അതായത് $(A \cup B)' = A' \cap B'$ എന്നത് ശരിയാണെന്നു കാണാം. അതുപോലെ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ എന്നതും ഏതു രണ്ട് ഗണം A, B യ്ക്കും ശരിയാണ്. ഈ പ്രത്യേകതയാണ് ദ് മോർഗൺ നിയമം (De Morgan's law) എന്ന പേരിൽ അറിയപ്പെടുന്നത്.

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

ഇനി A' ഒരു ഗണമായെടുത്ത് ഇതിന്റെ പൂരകഗണം ഏതായിരിക്കും എന്നാലോചിച്ചു നോക്കൂ, $A' \cup A = U$ ആണല്ലോ അപ്പോൾ $(A')' = A$ തന്നെയാകില്ലേ?

അതായത് $(A')' = A$

A, A' എന്നിവ തമ്മിലുള്ള സംഗമം ഉണ്ടാകുമോ?

$A \cap A' = \{\ \}$ ആയിരിക്കും

പൂരകഗണത്തിന്റെ ചില പ്രത്യേകതകൾ

(i) $(A')' = A$

(ii) $A' \cup A = U$

(iii) $\phi' = U$

(iv) $U' = \phi$

(v) $A' \cap A = \{\ \}$

(vi) $\left.\begin{array}{l}(A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B'\end{array}\right\}$ (ദ് മോർഗൺ നിയമങ്ങൾ)

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 1.5

1. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$ ആയാൽ
   (i) A' (ii) B' (iii) $(A \cup C)'$ (iv) $(A \cup B)'$ (v) $(A')'$ (vi) $(B - C)'$എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.
2. $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ആയാൽ ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളുടെ പൂരകഗണങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (i) $A = \{a, b, c\}$ (ii) $B = \{d, e, f, g\}$
   (iii) $C = \{a, c, e, g\}$ (iv) $D = \{f, g, h, a\}$
3. എണ്ണൽസംഖ്യാഗണത്തെ സമസ്തഗണമായി പരിഗണിച്ച് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളുടെ പൂരകഗണങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (i) $\{x : x$, ഒരു ഇരട്ട എണ്ണൽസംഖ്യ$\}$
   (ii) $\{x : x$, ഒരു ഒറ്റ എണ്ണൽസംഖ്യ$\}$
   (iii) $\{x : x$, 3 ന്റെ ഒരു അധിസംഖ്യാ ഗുണിതമാണ്$\}$
   (iv) $\{x : x$, ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ$\}$
   (v) $\{x : x$, 3 കൊണ്ടും 5 കൊണ്ടും നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യ$\}$
   (vi) $\{x : x$, ഒരു പൂർണവർഗം$\}$
   (vii) $\{x : x$, ഒരു പൂർണഘനം$\}$
   (viii) $\{x : x + 5 = 8\}$
   (ix) $\{x : 2x + 5 = 9\}$
   (x) $\{x : x \geq 7\}$
   (xi) $\{x : x \in N$ കൂടാതെ $2x + 1 > 10\}$

4. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ആയാൽ

   (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ എന്നിവ ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് അനുയോജ്യമായ വെൻചിത്രങ്ങൾ വരക്കുക.

   (i) $(A \cup B)'$ (ii) $A' \cap B'$ (iii) $(A \cap B)'$ (iv) $A' \cup B'$

6. U, ഒരു തലത്തിലെ മുഴുവൻ ത്രികോണങ്ങളുടെയും ഗണവും, A ഒരു കോണളവെങ്കിലും $60°$ അല്ലാത്ത ത്രികോണങ്ങളുടെ ഗണവും ആയാൽ A' എഴുതുക.

7. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശരിയാകുന്ന വിധം വിട്ടുപോയ ഭാഗം പൂരിപ്പിക്കുക.

   (i) $A \cup A' = \ldots$ (ii) $\phi' \cap A = \ldots$

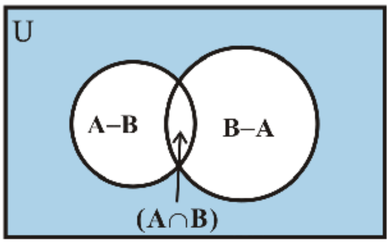
   (iii) $A \cap A' = \ldots$ (iv) $U' \cap A = \ldots$

1.11 സംഗമവും യോഗവും ഉൾപ്പെടുന്ന ചില പ്രായോഗിക ഗണിതപ്രശ്നങ്ങൾ

രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ യോഗം കാണുന്നതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട്

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ആയിരിക്കും എന്നു നാം മനസ്സിലാക്കി. ഇവിടെ A, B എന്നിവയ്ക്കു പുറമെ C എന്നൊരു ഗണം കൂടിയുണ്ടെങ്കിലോ?

$n(A \cup B \cup C)$ കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെയായിരിക്കും? വെൻചിത്രത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ ശ്രമിച്ചു നോക്കാം.



ചിത്രം 1.13

$n(A \cup B \cup C)$ കാണുന്നതിനായി $n(A)$ യും $n(B)$ യും $n(C)$ യും കൂട്ടിയാൽ $n(A\cap B)$, $n(A \cap C)$, $n(B \cap C)$ എന്നിവയെ ആകെ എണ്ണത്തിൽ നിന്ന് ഒഴിവാക്കേണ്ടിവരും. പക്ഷേ ഇങ്ങനെ ഒഴിവാക്കുമ്പോൾ ഓരോതവണയും $(A\cap B\cap C)$ എന്ന ഭാഗം ഇതിൽ നിന്ന് ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്നുണ്ട്. A ക്കും B ക്കും C ക്കും ഒപ്പം 3 തവണ പരിഗണിക്കപ്പെടുകയും $A\cap B, A\cap C, B\cap C$ ഇവക്ക് ഒപ്പം 3 തവണ ഒഴിവാക്കപ്പെടുകയും ചെയ്തിട്ടുണ്ടാവും. അതായത് $(A\cap B\cap C)$ ഇതിൽ പ്രത്യേകം വീണ്ടും പരിഗണിക്കപ്പെടേണ്ടിവരും എന്നു സാരം.

$$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(B\cap C) - n(A\cap C) + n(A\cap B\cap C)$$

ഉദാഹരണം : 22

$X \cup Y$ യിൽ 50 അംഗങ്ങളും X ൽ 28 അംഗങ്ങളും Y ൽ 32 അംഗങ്ങളും ഉണ്ട്. എങ്കിൽ $X \cap Y$ ൽ എത്ര അംഗങ്ങളുണ്ട്?

പരിഹാരം

$$n(X \cup Y) = 50,$$
$$n(X) = 28, \quad n(Y) = 32,$$
$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$$
$$n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y)$$
$$= 28 + 32 - 50 = 10$$

ഉദാഹരണം : 23

ഒരു സ്കൂളിൽ 20 അധ്യാപകർ ഗണിതം അല്ലെങ്കിൽ ഭൗതികശാസ്ത്രം പഠിപ്പിക്കുന്നവരായിട്ടുണ്ട്. ഇവരിൽ 12 പേർ ഗണിതം പഠിപ്പിക്കുന്നു. 4 പേർ ഗണിതവും ഭൗതിക ശാസ്ത്രവും പഠിപ്പിക്കുന്നു. എത്ര അധ്യാപകർ ഭൗതികശാസ്ത്രം പഠിപ്പിക്കുന്നവരായി ഉണ്ട്?

പരിഹാരം

ഗണിതം പഠിപ്പിക്കുന്ന അധ്യാപകരുടെ ഗണം M ഉം ഭൗതികശാസ്ത്രം പഠിപ്പിക്കുന്ന അധ്യാപകരുടെ ഗണം P യും ആയാൽ

$$n(M \cup P) = 20, \; n(M) = 12, \; n(M \cap P) = 4$$

$$n(M \cup P) = n(M) + n(P) - n(M \cap P)$$
$$20 = 12 + n(P) - 4$$
$$n(P) = 12$$

12 അധ്യാപകർ ഭൗതികശാസ്ത്രം പഠിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 24

35 വിദ്യാർത്ഥികളുള്ള ഒരു ക്ലാസ്സിൽ 24 പേർ ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാൻ ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരും 16 പേർ ഫുട്ബോൾ കളിക്കാൻ ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരുമാണ്. ഓരോ കുട്ടിയും ഏതെങ്കിലും ഒരു കളി ഇഷ്ടപ്പെടുന്നു. എത്ര കുട്ടികളാണ് രണ്ടു കളിയും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നത്?

പരിഹാരം

ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാനിഷ്ടപ്പെടുന്ന കുട്ടികളുടെ ഗണം X എന്നും ഫുട്ബോൾ കളിക്കാനിഷ്ടപ്പെടുന്നവരുടെ ഗണം Y എന്നും കരുതുക.

$$n(X) = 24 \quad n(Y) = 16, \; n(X \cup Y) = 35$$
$$n(X \cap Y) = ?$$
$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$$
$$35 = 24 + 16 - n(X \cap Y)$$
$$n(X \cap Y) = 5$$

5 കുട്ടികൾ രണ്ടു കളികളും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരാണ്.

ഉദാഹരണം : 25

ഒരു സ്കൂളിലെ 400 കുട്ടികളിൽ നടത്തിയ ഒരു സർവേയിൽ 100 പേർ ആപ്പിൾ ജ്യൂസ് കുടിക്കുന്നവരാണെന്നും 150 പേർ ഓറഞ്ച് ജ്യൂസ് കുടിക്കുന്നവരാണെന്നും 75 പേർ ഇവ രണ്ടും കുടിക്കുന്നവരാണ്. ആപ്പിൾ ജ്യൂസോ ഓറഞ്ച് ജ്യൂസോ കുടിക്കാത്തവരുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

U ആകെ കുട്ടികളുടെ ഗണവും A ആപ്പിൾ ജ്യൂസ് കുടിക്കുന്നവരുടെ ഗണവും B ഓറഞ്ച് ജ്യൂസ് കുടിക്കുന്നവരുടെ ഗണവും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$$n(\mathrm{U}) = 400,\ n(\mathrm{A}) = 100,\ n(\mathrm{B}) = 150,\ n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 75$$

$$\begin{aligned} n(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) &= n(\mathrm{A}) + n(\mathrm{B}) - n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \\ &= 100 + 150 - 75 \\ &= 175 \end{aligned}$$

ആപ്പിൾ ജ്യൂസ് കുടിക്കാത്തവർ A', ഓറഞ്ച് ജ്യൂസ് കുടിക്കാത്തവർ B' എന്നിവ ആയിരിക്കും.

രണ്ടും കുടിക്കാത്തവരുടെ എണ്ണം $n(\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}')$

$$\begin{aligned} n(\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}') &= n(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})' \\ &= n(\mathrm{U}) - n(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \\ &= 400 - 175 \\ &= 225 \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം : 26

ഒരു പ്രത്യേക ത്വക് രോഗമുള്ള 200 പേരിൽ 120 പേർക്ക് C_1 എന്ന മരുന്നും 50 പേർക്ക് C_2 എന്ന മരുന്നും നൽകി. 30 പേർക്ക് C_1, C_2 എന്നീ രണ്ടു മരുന്നുകളും നൽകി. ചുവടെ പറയുന്നവയുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കുക.

(i) C_1 എന്ന മരുന്ന് ഉപയോഗിക്കുന്നവരും, C_2 ഉപയോഗിക്കാത്തവരും

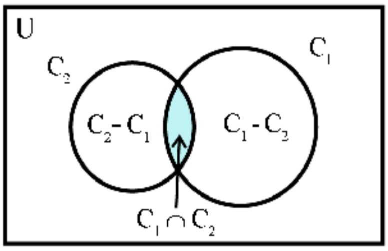
(ii) C_2 ഉപയോഗിക്കുന്നവരും, C_1 ഉപയോഗിക്കാത്തവരും

(iii) C_1 അല്ലെങ്കിൽ C_2 ഉപയോഗിക്കുന്നവർ

പരിഹാരം

ത്വക് രോഗമുള്ളവരുടെ ഗണത്തെ U എന്നെടുത്താൽ $n(\mathrm{U}) = 200$

$$n(\mathrm{C}_1) = 120,\ n(\mathrm{C}_2) = 50,\ n(\mathrm{C}_1 \cap \mathrm{C}_2) = 30$$



ചിത്രം 1.14

(i) C_1 ഉപയോഗിക്കുന്ന, എന്നാൽ C_2 ഉപയോഗിക്കാത്തവരുടെ എണ്ണം

$$n(C_1 - C_2) = n(C_1) - n(C_1 \cap C_2)$$
$$= 120 - 30 = 90$$

(ii) C_2 ഉപയോഗിക്കുന്ന എന്നാൽ C_1 ഉപയോഗിക്കാത്തവരുടെ എണ്ണം

$$n(C_2 - C_1) = n(C_2) - n(C_1 \cap C_2)$$
$$= 50 - 30 = 20$$

(iii) C_1 അല്ലെങ്കിൽ C_2 ഉപയോഗിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം

$$n(C_1 \cup C_2) = n(C_1) + n(C_2) - n(C_1 \cap C_2)$$
$$= 120 + 50 - 30 = 140$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 1.6

1. $n(X) = 17$, $n(Y) = 23$, $n(X \cup Y) = 38$ ആയ രണ്ടു ഗണങ്ങളാണ് X, Y എന്നിവ. $n(X \cap Y)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

2. X ൽ 8 അംഗങ്ങളും Y യിൽ 15 അംഗങ്ങളുമാണുള്ളത്. $X \cup Y$ ൽ 18 അംഗങ്ങളുണ്ട് എങ്കിൽ $X \cap Y$ യിൽ എത്ര അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും?

3. 400 ആൾക്കാരിൽ 250 പേർ ഹിന്ദിയും 200 പേർ ഇംഗ്ലീഷും സംസാരിക്കുന്നവരാണ്. ഹിന്ദിയും ഇംഗ്ലീഷും സംസാരിക്കുന്നവരായി എത്രപേരുണ്ട്?

4. ഗണം S ൽ 21 അംഗങ്ങളും ഗണം T യിൽ 32 അംഗങ്ങളും ഉണ്ട്. $S \cap T$ യിൽ 11 അംഗങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ $S \cup T$ യിൽ എത്ര അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടാകും?

5. ഗണം X ൽ 40 അംഗങ്ങളും $X \cup Y$ യിൽ 60 അംഗങ്ങളും ഗണം $X \cap Y$ യിൽ 10 അംഗങ്ങളുമുണ്ട്. എങ്കിൽ ഗണം Y യിൽ എത്ര അംഗങ്ങളുണ്ടായിരിക്കും?

6. 70 പേരുടെ ഒരു സംഘത്തിൽ 37 പേർക്ക് കാപ്പി കുടിക്കാനാണിഷ്ടം. 52 പേർ ചായ കുടിക്കാനിഷ്ടപ്പെടുന്നു. എല്ലാവരും ചായ, കാപ്പി ഇതിലേതെങ്കിലും ഒന്നെങ്കിലും കുടിക്കാൻ ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരാണ്. എങ്കിൽ കാപ്പിയും ചായയും കുടിക്കാനിഷ്ടപ്പെടുന്നവരുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കുക.

7. 65 പേരുള്ള ഒരു സംഘത്തിൽ 40 പേർക്ക് ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാനിഷ്ടമാണ്. 10 പേർക്ക് ക്രിക്കറ്റും ടെന്നിസും കളിക്കാൻ ഇഷ്ടമാണ്. (i) ടെന്നിസ് മാത്രം കളിക്കാനിഷ്ടപ്പെടുന്നവരുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക. (ii) ടെന്നിസ് കളിക്കാനിഷ്ടപ്പെടുന്നവരുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. ഒരു സമിതിയിൽ 50 പേർ ഫ്രഞ്ച് സംസാരിക്കുന്നവരും 20 പേർ സ്പാനിഷ് സംസാരിക്കുന്നവരുമാണ്. 10 പേർ രണ്ടു ഭാഷയും സംസാരിക്കുന്നവരാണ്. എത്രപേർ കുറഞ്ഞത് ഒരു ഭാഷയെങ്കിലും സംസാരിക്കുന്നവരുണ്ട്?

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 27

'CATARACT' എന്ന വാക്കും 'TRACT' എന്ന വാക്കും എഴുതാനാവശ്യമായ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം തുല്യ ഗണങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

CATARACT എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം

$$X = \{C, A, T, R\}$$

TRACT എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ഗണം

$$Y = \{T, R, A, C\}$$

X, Y എന്നീ ഗണങ്ങളിൽ ഒരേ അംഗങ്ങൾ ആയതിനാൽ $X = Y$ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 28

$\{-1, 0, 1\}$ എന്ന ഗണത്തിന്റെ എല്ലാ ഉപഗണങ്ങളും എഴുതുക.

പരിഹാരം

$$\phi, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}$$

ഉദാഹരണം : 29

$A \cup B = A \cap B$ ആയാൽ $A = B$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$a \in A \Rightarrow a \in A \cup B$

$\Rightarrow a \in A \cap B$ ($A \cup B = A \cap B$ ആയതുകൊണ്ട്)

$\Rightarrow a \in A, a \in B$

$\Rightarrow a \in B$

$A \subset B$

$b \in B \Rightarrow b \in A \cup B$

$\Rightarrow b \in A \cap B$ $(A \cup B = A \cap B)$

$\Rightarrow b \in A$

അതായത് $B \subset A$

$A \subset B$, $B \subset A$ സാധ്യമാകണമെങ്കിൽ $A = B$ ആയിരിക്കണം.

ഉദാഹരണം : 30

A, B എന്നിവ രണ്ടു ഗണങ്ങളായാൽ $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$P(A \cap B)$ യിൽ ഗണം X ഉണ്ടെന്നിരിക്കട്ടെ.

$$X \in P(A \cap B) \Rightarrow X \subset A \cap B$$
$$\Rightarrow X \subset A, X \subset B$$
$$\Rightarrow X \in P(A), X \in P(B) \Rightarrow X \in P(A) \cap P(B)$$
$$P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B) \text{ ----------(1)}$$

$Y \in P(A) \cap P(B)$ എന്നു കരുതുക

$$Y \in P(A) \cap P(B) \Rightarrow Y \in P(A), Y \in P(B)$$
$$\Rightarrow Y \subset A, Y \subset B$$
$$\Rightarrow Y \subset A \cap B$$
$$\Rightarrow Y \in P(A \cap B)$$

അതായത്, $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$ ---------- (2)

(1), (2) എന്നിവയിൽ നിന്നും $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 31

ഒരു വാണിജ്യ ഗവേഷണസംഘം 1000 ഉപഭോക്താക്കളിൽ നടത്തിയ സർവേയിൽ 720 പേർക്ക് ഉൽപന്നം A ഇഷ്ടമാണെന്നും 450 പേർക്ക് ഉൽപന്നം B ഇഷ്ടമാണെന്നും മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിഞ്ഞു. രണ്ട് ഉൽപന്നങ്ങളും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരായി ചുരുങ്ങിയത് എത്രപേരുണ്ടാകും?

പരിഹാരം

ആകെ ഉപഭോക്താക്കളുടെ (സർവെ നടത്താൻ തിരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ടവർ) ഗണം U എന്നെടുത്താൽ

$$n(U) = 1000, n(A) = 720, n(B) = 450$$
$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B) \leq 1000$$
$$720 + 450 - n(A \cap B) \leq 1000$$
$$n(A \cap B) \geq 170$$

രണ്ടു ഉല്പന്നങ്ങളും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവർ ചുരുങ്ങിയത് 170 പേരുണ്ടാകും.

ഉദാഹരണം : 32

500 കാർ ഉടമകളിൽ നടത്തിയ സർവെയിൽ നിന്നും 400 പേർക്ക് A എന്ന കാർ ഉള്ളതെന്നും 200 പേർക്ക് B എന്ന കാറാണുള്ളതെന്നും മനസ്സിലാക്കി. 50 പേർക്ക് രണ്ടു കാറുകളും സ്വന്തമായുണ്ട്. ഈ വിവരം ശരിയാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?

പരിഹാരം

ആകെ കാർ ഉടമകളുടെ ഗണം U ആയാൽ $n(U) = 500$, $n(A) = 400$, $n(B) = 200$, $n(A \cap B) = 50$

$$
\begin{aligned}
n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\
&= 400 + 200 - 50 \\
&= 550
\end{aligned}
$$

$n(U) = 500$ ആയതിനാൽ $n(A \cup B)$ പരമാവധി 500 ആയിരിക്കണം.

അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന വിവരം വസ്തുതാവിരുദ്ധമാണ്.

ഉദാഹരണം : 33

ഒരു കോളേജിലെ 58 വിദ്യാർത്ഥികളിൽ 38 പേർക്ക് ഫുട്ബോളിനും 15 പേർക്ക് ബാസ്കറ്റ് ബോളിനും 20 പേർക്ക് ക്രിക്കറ്റിന് എന്നിങ്ങനെ മെഡലുകൾ വിതരണം ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. മൂന്നു ഇനത്തിലും മെഡൽ കിട്ടിയവരുടെ എണ്ണം 3 ആണ്. എത്ര പേർക്കാണ് കൃത്യം 2 ഇനങ്ങളിൽ മെഡൽ കിട്ടിയിട്ടുള്ളത്?

പരിഹാരം

F, B, C എന്നിവ യഥാക്രമം ഫുട്ബോൾ, ബാസ്കറ്റ് ബോൾ, ക്രിക്കറ്റ് എന്നിവയിൽ മെഡലുകൾ ലഭിച്ചവരുടെ ഗണം ആയാൽ

$$n(F) = 38,\ n(B) = 15,\ n(C) = 20$$

$$n(F \cup B \cup C) = 58, \quad n(F \cap B \cap C) = 3$$

$$n(F \cup B \cup C) = n(F) + n(B) + n(C) - n(F \cap B) - n(F \cap C) - n(B \cap C) + n(F \cap B \cap C)$$

വിലകൾ നല്കി ലഘൂകരിച്ചാൽ

$$n(F \cap B) + n(F \cap C) + n(B \cap C) = 18$$

വെൻ ചിത്രത്തിൽ d മൂന്ന് ഇനത്തിലും മെഡൽ ലഭിച്ചവരെയും a, b, c എന്നിവ ഏതെങ്കിലും 2 ഇനത്തിൽ മെഡൽ ലഭിച്ചവരെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു എന്നത് വ്യക്തമാണല്ലോ. വെൻ ചിത്രത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ ചിന്തിച്ചാൽ

$$
\begin{aligned}
a + d + b + d + c + d &= 18 \\
a + b + c + 3d &= 18 \\
a + b + c + 9 &= 18 \\
a + b + c &= 9
\end{aligned}
$$

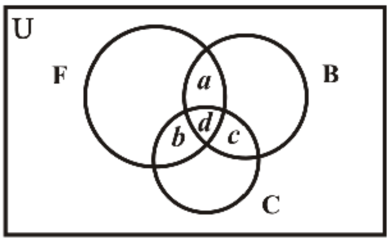


Fig 1.15

ഏതെങ്കിലും രണ്ടിനത്തിൽ മാത്രം മെഡൽ ലഭിച്ചവരുടെ എണ്ണം = 9

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗണങ്ങളിൽ ഏതെല്ലാം ഗണങ്ങളുടെ ഉപഗണങ്ങളാകുന്നുവെന്ന് എഴുതുക.

   $A = \{ x : x \in \mathbf{R}, x^2 - 8x + 12 = 0 \}$ $\quad$ $B = \{ 2, 4, 6 \}$
   $C = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$ $\quad$ $D = \{ 6 \}$

2. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളിൽ ശരിയേത്, തെറ്റേത് എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക. ശരിയായവ തെളിയിക്കുക. തെറ്റാണെങ്കിൽ ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ വ്യക്തമാക്കുക.

   (i) $x \in A, A \in B$, ആയാൽ $x \in B$
   (ii) $A \subset B, B \in C$, ആയാൽ $A \in C$
   (iii) $A \subset B, B \subset C$, ആയാൽ $A \subset C$
   (iv) $A \not\subset B, B \not\subset C$, ആയാൽ $A \not\subset C$
   (v) $x \in A, A \not\subset B$, ആയാൽ $x \in B$
   (vi) $A \subset B, x \notin B$, ആയാൽ $x \notin A$

3. A, B, C എന്നിവ, $A \cup B = A \cup C, A \cap B = A \cap C$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾ പാലിക്കുന്ന മൂന്ന് ഗണങ്ങളാണെങ്കിൽ $B = C$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

4. ചുവടെ പറയുന്ന നാലു പ്രസ്താവനകൾ സമാനമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

   (i) $A \subset B$(ii) $A - B = \phi$ $\quad$ (iii) $A \cup B = B$ $\quad$ (iv) $A \cap B = A$

5. $A \subset B$ ആയാൽ $C - B \subset C - A$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. (C ഏതു ഗണവുമാകാം)

6. $P(A) = P(B)$ ആയാൽ $A = B$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

7. A, B എന്നിവ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ഗണങ്ങളായാൽ $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ ശരിയാകുമോ? കാരണം എഴുതുക.

8. A, B എന്നീ ഗണങ്ങൾക്ക്

   $A = (A \cap B) \cup (A - B)$, $A \cup (B - A) = (A \cup B)$ എന്നീ പ്രത്യേകതകൾ തെളിയിക്കുക.

9. ഗണങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതകൾ ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

   (i) $A \cup (A \cap B) = A$ $\quad$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$.

10. $A \cap B = A \cap C$ ആയതുകൊണ്ട് $B = C$ ആകണമെന്നില്ല. തെളിയിക്കുക.

11. A, B എന്നിവ രണ്ടു ഗണങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. X എന്ന ഗണത്തിന്

    $A \cap X = B \cap X = \phi$, $\quad$ $A \cup X = B \cup X$ എന്നിവ ആയാൽ $A = B$ എന്നു തെളിയിക്കുക. (തെളിയിക്കുന്നതിന്, $A = A \cap (A \cup X)$, $B = B \cap (B \cup X)$, വിതരണ നിയമം എന്നിവ ഉപയോഗപ്പെടുത്താം)

12. $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$ എന്നിവ ശൂന്യഗണങ്ങളല്ലാത്തതും, $A \cap B \cap C$ ശൂന്യഗണമാകാവുന്നതും ആയ മൂന്ന് ഗണങ്ങൾ A, B, C എഴുതുക.

13. ഒരു സ്കൂളിലെ 600 പേരിൽ നടത്തിയ സർവ്വേയിൽ 150 പേർ ചായ ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരാണെന്നും 225 പേർ കാപ്പി ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരാണെന്നും മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിഞ്ഞു. 100 പേർ ചായയും കാപ്പിയും ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരായുണ്ട്. എങ്കിൽ ചായയോ കാപ്പിയോ ഇഷ്ടപ്പെടാത്തവരുടെ എണ്ണമെത്ര?

14. ഒരു സംഘം കുട്ടികളിൽ 100 പേർക്ക് ഹിന്ദി അറിയാം, 50 പേർക്ക് ഇംഗ്ലീഷും 25 പേർക്ക് രണ്ടു ഭാഷയും അറിയാം. ഓരോ കുട്ടിയും ഒരു ഭാഷയെങ്കിലും അറിയാവുന്നവരാണ്, എങ്കിൽ ആ സംഘത്തിൽ ആകെ എത്ര കുട്ടികളുണ്ട്?

15. 60 ആൾക്കാരിൽ നടത്തിയ ഒരു സർവ്വേയിൽ 25 പേർ H എന്ന പത്രം വായിക്കുന്നവരും 26 പേർ T എന്ന പത്രം വായിക്കുന്നവരും 26 പേർ I എന്ന പത്രം വായിക്കുന്നവരുമാണ്. 9 പേർ H, I വായിക്കും, 11 പേർ H, T യും വായിക്കും 8 പേർ T, I യും വായിക്കും 3 പേർ മൂന്ന് പത്രവും വായിക്കും. എങ്കിൽ

    i. ഒരു പത്രമെങ്കിലും വായിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണമെത്ര?

    ii. ഒരു പത്രം മാത്രം വായിക്കുന്നവരുടെ എണ്ണമെത്ര?

16. ഒരു സർവെയിൽ 21 പേർക്ക് A എന്ന ഉൽപന്നവും, 26 പേർക്ക് B യും 29 പേർക്ക് C യും ഇഷ്ടം എന്നും മനസ്സിലാക്കാനായി. 14 പേർക്ക് A യും B യും ഇഷ്ടമാണ്. 12 പേർക്ക് C യും A യും ഇഷ്ടമാണ്. 14 പേർക്ക് B യും C യും ഇഷ്ടമാണ്. 8 പേർക്ക് മൂന്ന് ഉൽപന്നങ്ങളും ഒരുപോലെ ഇഷ്ടമാണ്. എങ്കിൽ ഉൽപന്നം C മാത്രം ഇഷ്ടപ്പെടുന്നവരുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

സംഗ്രഹം

ഗണങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ചില ആശയങ്ങളും ക്രിയകളും ഈ അധ്യായത്തിൽ പരാമർശിക്കുന്നു. അവയുടെ ചുരുക്കം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

- വ്യക്തമായി നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളെയോ ചിഹ്നങ്ങളെയോ ഗണമായി പരിഗണിക്കാം.
- അംഗങ്ങൾ ഒന്നും ഇല്ലാത്ത ഗണത്തെ ശൂന്യഗണം എന്ന് പറയുന്നു.
- ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെ കൃത്യമായി എണ്ണിത്തിട്ടപ്പെടുത്താൻ കഴിയുമെങ്കിൽ ആ ഗണത്തെ പരിമിതഗണം എന്ന് പറയാം.
- അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം എണ്ണിത്തിട്ടപ്പെടുത്താൻ കഴിയില്ലെങ്കിൽ ആ ഗണത്തെ അനന്തഗണം എന്നും പറയാം.
- രണ്ടു ഗണങ്ങൾ A യിലും B യിലും ഒരേ അംഗങ്ങളായാൽ ആ ഗണങ്ങൾ തുല്യഗണങ്ങൾ ആയിരിക്കും.

- A എന്ന ഗണം B യുടെ ഉപഗണമാകണമെങ്കിൽ ഒന്നുകിൽ A ഒരു ശൂന്യ ഗണമായിരിക്കണം അല്ലെങ്കിൽ A യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും B യിൽ ഉണ്ടായിരിക്കണം. ഇടവേളകൾ **R** ന്റെ ഉപഗണമായിരിക്കും.
- A എന്ന ഗണത്തിന്റെ എല്ലാ ഉപഗണങ്ങളുടെയും ഗണത്തെ ഉപ ഗണങ്ങളുടെ ഗണം എന്ന് പറയുന്നു. A യുടെ ഉപഗണ ഗണത്തെ P(A) എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.
- A, B എന്നീ ഗണത്തിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളെയും ചേർത്ത് എഴുതുന്ന ഗണത്തെ A യോഗം B എന്ന് പറയാം.
- A, B എന്നീ ഗണത്തിലെ പൊതുവായ അംഗങ്ങളെ ചേർത്ത് എഴുതുന്ന ഗണത്തെ A സംഗമം B എന്ന് പറയാം.
- A, B എന്നീ ഗണത്തിലെ A യിൽ നിന്നും B യിലെ അംഗങ്ങളെ ഒഴുവാക്കിയ ഗണത്തെ A വ്യത്യാസം B എന്ന് പറയാം.
- സമസ്തഗണം U ൽ നിന്നും A എന്ന ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെ ഒഴിവാക്കി കിട്ടുന്ന ഗണത്തെ A യുടെ പൂരകഗണം എന്ന് പറയുന്നു.
- ഏതു രണ്ടു ഗണങ്ങൾ A, B ക്കും, $(A \cup B)' = A' \cap B'$; $(A \cap B)' = A' \cup B'$ എന്നിവ ശരിയാണ്.
- A, B എന്നീ പരിമിതഗണങ്ങളിൽ $A \cap B = \phi$, ആയാൽ
  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.
  $A \cap B \neq \phi$, ആയാൽ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ജർമൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ജോർജ് കാന്റർ (1845 - 1918) ആണ് ആധുനിക ഗണസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പ്രധാന ഉപജ്ഞാതാവായി അറിയപ്പെടുന്നത്. ഗണസിദ്ധാന്തത്തെപ്പറ്റിയുള്ള അദ്ദേഹത്തിന്റെ പ്രബന്ധങ്ങൾ 1874 നും 1897 നും ഇടയ്ക്കാണ് പുറത്തു വന്നത്. $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots$ തുടങ്ങിയ രീതിയിലുള്ള ത്രികോണമിതീയ അനുക്രമങ്ങളെപ്പറ്റിയുള്ള പഠനത്തിനിടെയാണ് അദ്ദേഹം ഗണസിദ്ധാന്തത്തെപ്പറ്റി പഠിക്കാനിടയായത്. രേഖീയ സംഖ്യാഗണവും പൂർണസംഖ്യാഗണവും തമ്മിൽ ഒന്നിനൊന്നുപൊരുത്തം സ്ഥാപിക്കാൻ കഴിയില്ലെന്ന് അദ്ദേഹം 1874-ൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ച പ്രബന്ധത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. അമൂർത്തഗണങ്ങളുടെ വിവിധ പ്രത്യേകതകളെപ്പറ്റി 1879 മുതൽ നിരവധി പ്രബന്ധങ്ങൾ അദ്ദേഹം പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു.

കാന്ററിന്റെ ആശയങ്ങൾ നന്നായി ഉൾക്കൊണ്ട പ്രസിദ്ധ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്നു റിച്ചാർഡ് ഡെഡെകിൻഡ് (1831 - 1916). എന്നാൽ അനന്തഗണങ്ങളെ പരിമിതഗണങ്ങളെപ്പോലെ തന്നെ പരിഗണിച്ചതിന് ക്രോണക്കർ (1810 - 1893) അദ്ദേഹത്തെ കുറ്റപ്പെടുത്തി. തുടർന്ന്, നൂറ്റാണ്ടിന്റെ അവസാനത്തോടെ മറ്റൊരു ജർമൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന ഗോട്‌ലോബ് ഫ്രെഗെ ഗണ സിദ്ധാന്തത്തെ യുക്തിനിയമങ്ങളായി അവതരിപ്പിച്ചു. എല്ലാ ഗണങ്ങളും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഗണത്തിന്റെ അസ്ഥിത്വം എന്ന സങ്കല്പം ഒരു വൈരുധ്യത്തിലേക്കു നയിക്കുമെന്ന് 1902-ൽ തെളിയിച്ചത് പ്രസിദ്ധ ആംഗല തത്വശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന ബെർട്രൻസ് റസൽ (1872 - 1970) ആണ്. ഇത് പ്രസിദ്ധമായ 'റസൽ വിരോധാഭാസ'ത്തിനു വഴിയൊരുക്കി. 'Naïve Set Theory' എന്ന തന്റെ ഗ്രന്ഥത്തിൽ ഇതേപ്പറ്റി പോൾ ആർ ഹാൽമോസ് എഴുതുന്നത് 'ശൂന്യത്തിൽ സർവവുമുണ്ട്' എന്നാണ്. റസൽ വിരോധാഭാസം എന്ന ഒരെണ്ണം മാത്രമല്ല ഗണസിദ്ധാന്തത്തിൽ ഉള്ളത്. തുടർന്ന് പല ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരും യുക്തിചിന്തകരും ഇത്തരം നിരവധി വിരോധാഭാസങ്ങൾ അവതരിപ്പിച്ചു. ഇവയുടെയെല്ലാം അനന്തരഫലമായി എൺസ്റ്റ് സെർമെലോ 1908-ൽ ഗണസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ആദ്യ സ്വയംപ്രമാണ രൂപം അവതരിപ്പിച്ചു. 1925-ൽ ജോൺ വോൺ നൊയ്മൻ 'സറിര സ്വയംപ്രമാണം' അവതരിപ്പിച്ചു. പിന്നീട് 1937-ൽ പോൾ ബ്രെർണെയ്സ് കുറേക്കൂടി തൃപ്തികരമായ ഒരു സ്വയംപ്രമാണത്തിന്‌രൂപം നൽകി. ഇവയുടെ പരിഷ്കരണം 1940--ലെ തന്റെ പ്രബന്ധത്തിൽ കുർട് ഗൊയ്ഡൽ അവതരിപ്പിച്ചു. ഇത് വോൺ നൊയ്മൻ - ബെർണെയ്സ് (VNB) അല്ലെങ്കിൽ ഗൊയ്ഡൽ ബെർണെയ്സ് (GB) ഗണസിദ്ധാന്തം എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

ഈ വിഷമതകൾ നിലനിൽക്കെത്തന്നെ കാന്റർ ഗണസിദ്ധാന്തമാണ് ഇന്നും ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നത്. ഗണിതത്തിലെ പല പ്രധാന ആശയങ്ങളും ഫലങ്ങളും ഗണസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ഭാഷയിലാണ് ഇപ്പോൾ അവതരിപ്പിക്കുന്നത്.

B3H2R3

അധ്യായം **2**

ബന്ധങ്ങളും ഏകദങ്ങളും (RELATIONS AND FUNCTIONS)

❖ *ഏതൊരു ഭൗതിക ഗവേഷണത്തിന്റെയും ഒഴിവാക്കാനാകാത്ത ഉപകരണമാണ് ഗണിതം – ബെർതലോട്* ❖

2.1 ആമുഖം

ജി.ഡബ്ല്യൂ. ലെബ്നിസ് (1646–1716)

അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള പരസ്പരബന്ധം പല സന്ദർഭങ്ങളിലും ചർച്ച ചെയ്യേണ്ടതുണ്ട്. മുകളിലേക്കെറിയുന്ന ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരവും സഞ്ചരിക്കാനെടുത്ത സമയവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളവും പരപ്പളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്നിങ്ങനെയെല്ലാം. അതുപോലെതന്നെ, പൊതുവായി ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, ഒരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങൾക്ക് മറ്റൊരു ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുമായുള്ള ബന്ധം തുടങ്ങിയവയെല്ലാം പലപ്പോഴും ചർച്ചചെയ്യപ്പെടുന്നു. ചില പ്രത്യേക തരം ബന്ധങ്ങളാണ് ഏകദങ്ങൾ. അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ സൂക്ഷ്മമായ വിശകലനം തുടർന്നു വരുന്ന അധ്യായങ്ങളിലും ഉയർന്ന ക്ലാസുകളിലും പഠിക്കുന്നുണ്ട്. മറ്റു പല വിഷയങ്ങളിലും ഇതിന്റെ പ്രയോഗവും ധാരാളമുണ്ട്. ഇവിടെ 'ഗണം' എന്ന ആശയത്തിലൂന്നിയാണ് 'ബന്ധങ്ങളും', 'ഏകദങ്ങളും' നിർവചിക്കുന്നതും അവയുടെ പ്രയോഗസാധ്യതകൾ വിശദമാക്കുന്നതും.

2.2. ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം (Cartesian Product of Sets)

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന പ്രശ്നം പരിഗണിക്കുക.

രണ്ടു പെട്ടികളിൽ, ഒന്നാമത്തേതിൽ 1, 3, 5 എന്നീ സംഖ്യകളിൽ ഓരോന്നുവീതം എഴുതിയ മൂന്ന് കടലാസുകളും, രണ്ടാമത്തേതിൽ 2, 4 എന്നീ സംഖ്യകളിൽ ഓരോന്നുവീതം എഴുതിയ രണ്ട് കടലാസുകളുമുണ്ട്. ഒന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്ന് ഒരു കടലാസും രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഒരു കടലാസും എടുത്ത് ഒരു ജോടി സംഖ്യകളുണ്ടാക്കുന്നു. എങ്കിൽ ഏതെല്ലാം ജോടികളാണ് എഴുതാൻ കഴിയുക?

(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4) എന്നിവയാണ് സാധ്യമായ ജോടികൾ എന്നു കാണാം. (ഒന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്നെടുക്കുന്ന സംഖ്യ ഒന്നാമതും രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്നെടുക്കുന്ന സംഖ്യ രണ്ടാമതും വരുന്ന ജോടികൾ മാത്രമാണ് പരിഗണിക്കുന്നത്).

ഈ ചോദ്യത്തെ അൽപം വ്യത്യസ്തമായി ഇങ്ങനെ പറയാം.

A= {1, 3, 5}, B= {2, 4}

A എന്ന ഗണത്തിലെ ഒരു അംഗം ആദ്യവും B യിലെ ഒരു അംഗം രണ്ടാമതും വരത്തക്കവിധം ഏതെല്ലാം സംഖ്യാജോടികൾ എഴുതാം? ഇങ്ങനെ എഴുതാൻ കഴിയുന്ന എല്ലാ സംഖ്യാജോടികളുടേയും ഗണത്തിനെ A, B എന്നീ ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം (Cartesian product) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഈ ഗണത്തെ $A \times B$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

അതായത്

$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$

A, B ഇവ ഏത് രണ്ട് ഗണങ്ങളായാലും അവയുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം ഇങ്ങനെ നിർവചിക്കാവുന്നതാണ്.

നിർവചനം: 1

A, B എന്നിവ ശൂന്യമല്ലാത്ത രണ്ട് ഗണങ്ങളായാൽ

$A \times B = \{ (x,y) : x \in A, y \in B \}$

$A \times B$ യിലെ അംഗങ്ങളെ ക്രമജോടികൾ എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്.

കുറിപ്പ്:

ഇത്തരം കണക്കുകളിൽ ആകെയുള്ള ക്രമജോടികളുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കുന്ന രീതിയും പത്താം തരത്തിലെ സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം എന്ന അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്തിട്ടുള്ളതാണ്. ഇതിനെ പൊതുവായി ഇങ്ങനെ പറയാം.

(i) A എന്ന ഗണത്തിൽ p എണ്ണം അംഗങ്ങളും B യിൽ q എണ്ണം അംഗങ്ങളുമായാൽ $A \times B$ എന്ന ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം pq ആയിരിക്കും.
ചുരുക്കി പറഞ്ഞാൽ
$n(A) = p, n(B) = q$ ആയാൽ $n(A \times B) = p \times q$ ആണ്.

(ii) A, B ഇവ ശൂന്യമല്ലാത്ത രണ്ട് ഗണങ്ങളും, ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലുമൊന്ന് അനന്തഗണവും ആയാൽ $A \times B$ യും അനന്തഗണമായിരിക്കും.

(iii) A, B, C ഇവ മൂന്ന് ഗണങ്ങളായാൽ $A \times B \times C$ യും നിർവചിക്കാം.
$A \times B \times C = \{ (a, b, c): a \in A, b \in B, c \in C \}$

ഈ ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെ ക്രമത്രയങ്ങൾ (ordered triplets) എന്നു വിളിക്കാം.

ഉദാഹരണം: 1

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$, $C = \{4,5,6\}$ ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $A \times (B \cap C)$ (ii) $(A \times B) \cap (A \times C)$

(iii) $A \times (B \cup C)$ (iv) $(A \times B) \cup (A \times C)$

പരിഹാരം

i) $(B \cap C) = \{4\}$, $A \times (B \cap C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

ii) $(A \times B) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$

$(A \times C) = \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$.

iii) $(B \cup C) = \{3, 4, 5, 6\}$,

$A \times (B \cup C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$.

iv) $A \times B$, $A \times C$ ഇവ മുകളിൽ കണ്ടതാണല്ലോ. ഇതുപയോഗിച്ച്

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$.

ഉദാഹരണം: 2

$P = \{1, 2\}$ ആയാൽ $P \times P \times P$ കണ്ടുപിടിക്കുക

പരിഹാരം

$P \times P = \{(1, 1) (1, 2), (2, 1), (2, 2)$

$P \times P \times P = \{ (1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}$.

ഉദാഹരണം: 3

$A \times B = \{(p, q), (p, r), (m, q), (m, r)\}$ ആയാൽ A, B എന്നീ ഗണങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

A എന്നത് ഓരോ ക്രമജോടിയിലേയും ഒന്നാമത്തെ അംഗങ്ങളുടെ ഗണവും B രണ്ടാമത്തെ അംഗങ്ങളുടെ ഗണവുമാണ്.

$A = \{p, m\}$, $B = \{q, r\}$ ആയിരിക്കും.

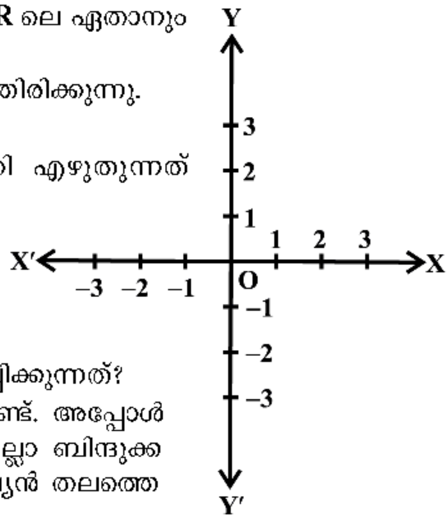
2.3 കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലവും കാർട്ടീഷ്യൻ തലവും

R എന്നത് രേഖീയസംഖ്യാഗണമായാൽ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ലെ ഏതാനും ചില അംഗങ്ങൾ എഴുതിനോക്കൂ.

ഏതാനും ഉദാഹരണങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

$(1,2), (3,3), (-1,1), (0,0), (-5,3), (\sqrt{2},4), \ldots$

ഈ രീതിയിൽ സംഖ്യകളെ ജോടികളാക്കി എഴുതുന്നത് പത്താം ക്ലാസിലെ 'സൂചക സംഖ്യകൾ' എന്ന അധ്യായത്തിലും കണ്ടിട്ടുള്ളതാണ്. ഇങ്ങനെ എഴുതുന്ന ഓരോ സംഖ്യാ ജോടിയും കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിലെ ഓരോ ബിന്ദുവിനെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. എങ്കിൽ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ എന്ന ഗണം എന്തിനെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്?



ചിത്രം 2.1

ഈ ഗണത്തിൽ എല്ലാ സംഖ്യാജോടികളുമുണ്ട്. അപ്പോൾ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ എന്നത് കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളേയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതായത് കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തെ തന്നെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കൂ

$A = \{-1, -2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ ഇവ രണ്ടും രേഖീയ സംഖ്യാഗണത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങളാണല്ലോ.

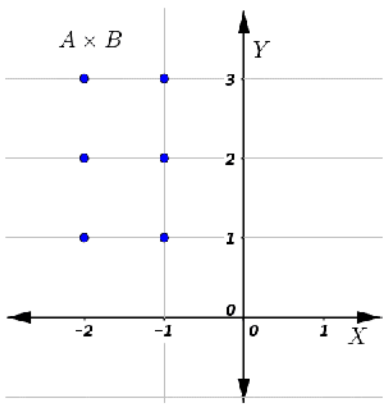
അതിനാൽ

$$A \times B = \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3)\}$$

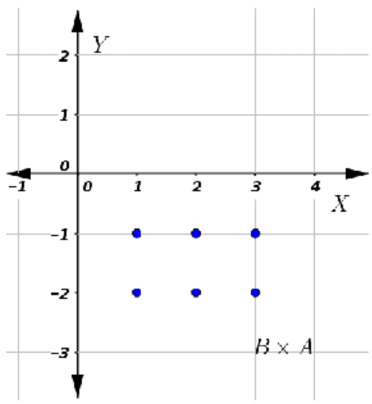
$$B \times A = \{(1, -1), (1, -2), (2, -1), (2, -2), (3, -1), (3, -2)\}$$

ഇവ രണ്ടും $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ന്റെ ഉപഗണങ്ങളാവും.

ഈ രണ്ടു ഗണങ്ങളിലേയും ബിന്ദുക്കളെ കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കാം.



(a)



(b)

ചിത്രം 2.2

$A \times B$, $B \times A$ ഇവ രണ്ടും വ്യത്യസ്ത ഗണങ്ങളാണെന്ന് ഇതിൽ നിന്നും വ്യക്തമാണ്.

$(-1, 2), (2, -1)$ ഇവ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. അതിനാൽ $(-1, 2), (2, -1)$ എന്നീ ക്രമജോടികൾ തുല്യമല്ല എന്ന് പറയാം.

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ

$(a, b) = (p, q)$ ആവണമെങ്കിൽ $a = p$. $b = q$ ആകണം.

ഉദാഹരണം: 4

$P = \{a, b, c\}$; $Q = \{r\}$ ആയാൽ $P \times Q$, $Q \times P$ എന്നീ ഗണങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. $P \times Q$, $Q \times P$ ഇവ തുല്യമാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?

പരിഹാരം

$$P \times Q = \{(a, r), (b, r), (c, r)\}$$

$$Q \times P = \{(r, a), (r, b), (r, c)\}$$

നിർവചന പ്രകാരം, (a, r), (r, a) എന്നീ ക്രമജോടികൾ തുല്യമല്ല. ആയതിനാൽ $P \times Q$, $Q \times P$ എന്നിവ തുല്യമല്ല.

ഉദാഹരണം: 5

$(x + 1, y - 2) = (3, 1)$ ആയാൽ x, y എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$(x + 1, y - 2) = (3, 1)$ ആയതിനാൽ

$$x + 1 = 3$$

$$y - 2 = 1$$

ഇതിൽ നിന്നും

$$x = 2, y = 3$$

ഉദാഹരണം: 6

$A = [0 , 2]$ ആയാൽ

i) $A \times A$ എന്ന ഗണത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ഭാഗം കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

ii) $A \times \mathbf{R}$, $\mathbf{R} \times A$ ഇവ കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

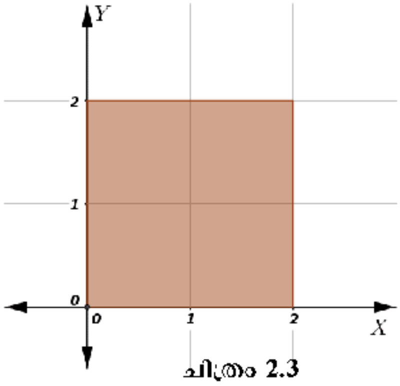
പരിഹാരം

i) A= [0, 2] എന്നത് പൂജ്യത്തിനും രണ്ടിനും ഇടയിലുള്ള എല്ലാ സംഖ്യകളുടേയും (0, 2 ഇവ ഉൾപ്പെടെ) ഗണമാണല്ലോ. അതായത്

$A = \{x: 0 \le x \le 2, x \in \mathbf{R}\}$

അതിനാൽ $A \times A = \{(x, y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2, x, y \in \mathbf{R}\}$

ഈ ബിന്ദുക്കളെല്ലാം കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കാം.



ചിത്രം 2.3

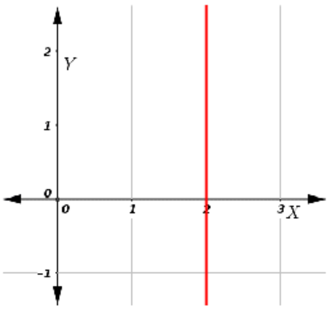
നിറം കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഭാഗം A × A യെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$\{(x, y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2 \; x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ എന്ന ഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ $0 \le x \le 2 \wedge 0 \le y \le 2$ എന്ന input command നൽകിയാൽ മതി.

ii) $A \times \mathbf{R} = \{(x, y) : x \in A, y \in \mathbf{R}\}$

ഈ ബിന്ദുക്കളെല്ലാം കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ

നിറം കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഭാഗം $A \times \mathbf{R}$ എന്ന ഗണത്തെസൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇതുപോലെ $\mathbf{R} \times A$ എന്ന ഗണവും കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കൂ.



ചിത്രം 2.4

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 2.1

1. $\left(\frac{x}{3}+1, y-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ആയാൽ x , y എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

2. A മൂന്ന് അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു ഗണമാണ്, $B = \{3, 4, 5\}$ ആയാൽ $(A \times B)$ യിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കുക.

3. $G = \{7, 8\}$, $H = \{5, 4, 2\}$ ആയാൽ $G \times H$, $H \times G$ ഇവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

4. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ഓരോന്നും ശരിയോ തെറ്റോ എന്ന് പറയുക. തെറ്റായിട്ടുള്ള പ്രസ്താവനകൾ തിരുത്തി ശരിയാക്കി എഴുതുക.

   (i) $P = \{m, n\}$, $Q = \{n, m\}$, ആയാൽ $P \times Q = \{(m, n),(n, m)\}$.

(ii) A , B ഇവ ശൂന്യഗണങ്ങളല്ലെങ്കിൽ $A \times B$ എന്നത് (x, y), $x \in A$, $y \in B$ എന്ന രീതിയിലുള്ള ക്രമജോടികളുടെ ഗണമായിരിക്കും.

(iii) $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, ആയാൽ $A \times (B \cap \phi) = \phi$.

5. $A = \{-1, 1\}$ ആയാൽ $A \times A \times A$ കാണുക.

6. $A \times B = \{(a, x), (a , y), (b, x), (b, y)\}$ ആയാൽ A , B എന്നീ ഗണങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{5, 6\}$, $D = \{5, 6, 7, 8\}$ ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(ii) $A \times C$ എന്നത് $B \times D$ യുടെ ഒരു ഉപഗണമാണ്.

8. $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ ആയാൽ $A \times B$ എഴുതുക. $A \times B$ എന്ന ഗണത്തിന് എത്ര ഉപഗണങ്ങളുണ്ട്? $A \times B$ യുടെ എല്ലാം ഉപഗണങ്ങളും എഴുതുക.

9. $n(A) = 3$, $n(B) = 2$ ആകുന്ന രണ്ട് ഗണങ്ങളാണ് A, B. $(x, 1)$, $(y, 2)$, $(z, 1)$ എന്നിവ $A \times B$ യിലെ അംഗങ്ങളായാൽ A, B ഇവ കണ്ടുപിടിക്കുക. (x, y, z വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകളാണ്)

10. $A \times A$ എന്ന കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലത്തിൽ 9 അംഗങ്ങളുണ്ട്. $(-1,0)$, $(0,1)$ എന്നിവ അതിലെ അംഗങ്ങളായാൽ A എന്ന ഗണം കണ്ടുപിടിക്കുക. $A \times A$ യിലെ മറ്റ് അംഗങ്ങൾ ഏതെല്ലാം?

2.4 ബന്ധങ്ങൾ (Relations)

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5,6,7\}$ എന്നീ ഗണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

$A \times B$ എന്ന ഗണത്തിന്റെ ഒരു ഉപഗണം എഴുതിയിരിക്കുന്നത് നോക്കൂ

$R = \{(1,2),(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6)\}$ ഈ ഗണത്തിലെ ഓരോ ക്രമജോടിയിലേയും ആദ്യത്തെ സംഖ്യയും രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

ഇവയിലെല്ലാം രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയുടെ ഘടകമാണ് ആദ്യത്തെ സംഖ്യ. R എന്ന ഗണത്തെ നിബന്ധനാരീതിയിൽ ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$R = \{ (x,y) : x \in A, y \in B,$ y യുടെ ഒരു ഘടകമാണ് $x\}$

ഇനി മറ്റൊരു ഗണം നോക്കൂ

$S = \{ (x,y) : x \in A, y \in B, y - 2x\}$

ഓരോ ജോടിയിലും ആദ്യത്തെ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ എന്നതാണ് ഇവിടെ അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം. ഈ ഗണത്തെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതി നോക്കു. ഇതും $A \times B$ യുടെ ഒരു ഉപഗണമാണ്.

ഇങ്ങനെ, ആദ്യത്തേയും രണ്ടാമത്തേയും സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ഏത് ബന്ധവും അനുസരിക്കുന്ന ക്രമജോടികളുടെ ഗണം $A \times B$ യുടെ ഉപഗണമായിരിക്കും. അതിനാൽ $A \times B$ യുടെ ഉപഗണങ്ങളെ A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കുള്ള ബന്ധങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

നിർവചനം: 2

A,B എന്നിവ ശൂന്യഗണങ്ങളല്ലാത്ത രണ്ട് ഗണങ്ങളും, R എന്നത് $A \times B$ യുടെ ഒരു ഉപഗണവുമായാൽ R നെ A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കുള്ള ഒരു ബന്ധം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

മുകളിൽ ചർച്ച ചെയ്ത ഉദാഹരണത്തിലെ A എന്ന ഗണത്തിൽനിന്ന് B യിലേക്കുള്ള മറ്റൊരു ബന്ധം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

$R = \{(x,y): y = 3x\}$

ഈ ബന്ധം പട്ടികാരീതിയിലെഴുതിയാൽ

$R= \{(1,3), (2,6)\}$

ഈ ബന്ധമനുസരിച്ച് A എന്ന ഗണത്തിലെ 1 ന്റെ പ്രതിബിംബമാണ് B എന്ന ഗണത്തിലെ 3 എന്ന് പറയാം. അതുപോലെ 2 ന്റെ പ്രതിബിംബമാണ് 6.

നിർവചനം: 3

A എന്ന ഗണത്തിൽ നിന്നും B എന്ന ഗണത്തിലേക്കുള്ള ഒരു ബന്ധത്തിലെ അംഗമായ ഓരോ ക്രമജോടിയിലേയും രണ്ടാമത്തെ അംഗത്തിനെ ആദ്യത്തെ അംഗത്തിന്റെ പ്രതിബിംബം (image) എന്നു വിളിക്കുന്നു.

മുകളിലെ ഉദാഹരണത്തിലെ A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കുള്ള മറ്റ് ചില ബന്ധങ്ങൾ കൂടി എഴുതിനോക്കൂ. ഇത്തരം എത്ര ബന്ധങ്ങൾ സാധ്യമാണ്?

A യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങൾക്കും പ്രതിബിംബങ്ങൾ ഉണ്ടാകണമെന്നില്ലല്ലോ. A യിലുള്ള ഏതൊക്കെ അംഗങ്ങൾക്കാണോ പ്രതിബിംബമുള്ളത്, ആ അംഗങ്ങളുടെ ഗണത്തിനെ ബന്ധത്തിന്റെ മണ്ഡലം (domain) എന്ന് വിളിക്കുന്നു. മുകളിലെ ഉദാഹരണത്തിൽ R ന്റെ മണ്ഡലം $\{1, 2\}$. A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കുള്ള ഏത് ബന്ധത്തിന്റേയും മണ്ഡലം A യുടെ ഉപഗണമായിരിക്കും. A യിലെ അംഗങ്ങളുടെ പ്രതിബിംബങ്ങൾ B യിലെ അംഗങ്ങളായിരിക്കുമല്ലോ. ഈ പ്രതിബിംബങ്ങളുടെ ഗണത്തിനെ ബന്ധത്തിന്റെ രംഗം (range) എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. ഇത് B യുടെ ഉപഗണമായിരിക്കും.

മുകളിൽ ചർച്ച ചെയ്ത ഉദാഹരണത്തിലെ R ന്റെ രംഗം $\{3, 6\}$ ആണ്.

ഒരു ബന്ധത്തിന്റെ മണ്ഡലം രംഗം എന്നിവ മറ്റൊരു രീതിയിലും നിർവചിക്കാം.

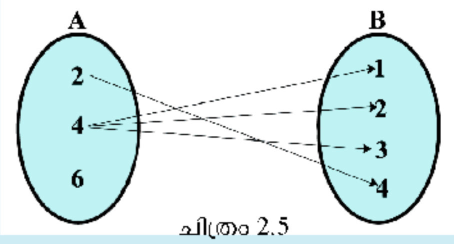
നിർവചനം: 4

A എന്ന ഗണത്തിൽ നിന്നും B എന്ന ഗണത്തിലേക്കുള്ള ഒരു ബന്ധമാണ് R എങ്കിൽ, R ലെ ക്രമജോടികളിലെ ഒന്നാമത്തെ അംഗങ്ങളുടെ ഗണത്തെ R ന്റെ മണ്ഡലം എന്നും രണ്ടാമത്തെ അംഗങ്ങളുടെ ഗണത്തെ R ന്റെ രംഗം എന്നും വിളിക്കുന്നു.

B എന്ന ഗണത്തെ ബന്ധത്തിന്റെ സഹമണ്ഡലം എന്നാണ് പറയുന്നത്. ബന്ധത്തിന്റെ മണ്ഡലം A യുടെ ഉപഗണവും രംഗം B യുടെ ഉപഗണമായിരിക്കും.

കുറിപ്പ്

ഒരു ബന്ധത്തെ പട്ടികാരീതിയിലും നിബന്ധനാ രീതിയിലും എഴുതാമെന്ന് കണ്ടല്ലോ. ഒരു ഗണത്തിൽ നിന്നും മറ്റൊരു ഗണത്തിലേക്കുള്ള ബന്ധത്തെ ചിത്രീകരിക്കാനുപയോഗിക്കുന്ന മറ്റൊരു രീതിയാണ് ആരോഡയഗ്രം (arrow diagram)



ചിത്രം 2.5

A= {2, 4, 6}, B = {1, 2, 3, 4} ആയാൽ A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്കുള്ള R എന്ന ഒരു ബന്ധത്തിന്റെ ആരോഡയഗ്രം നോക്കൂ.

ഈ ബന്ധത്തെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതിയാൽ
R = {(2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)} എന്നു കിട്ടും. ഈ ബന്ധത്തിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും എഴുതിനോക്കൂ.

ഉദാഹരണം: 7

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. A യിൽ നിന്നും A യിലേക്കുതന്നെയുള്ള ഒരു ബന്ധം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

R = { $(x, y) : y = x + 1$}

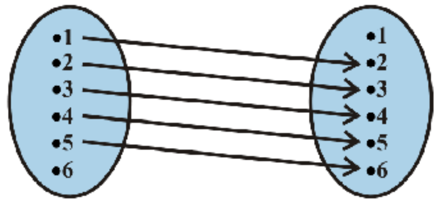
i) ഈ ബന്ധത്തിന്റെ ആരോഡയഗ്രം വരയ്ക്കുക.

ii) R എന്ന ബന്ധത്തിന്റെ മണ്ഡലം, സഹമണ്ഡലം, രംഗം എന്നിവ എഴുതുക.

പരിഹാരം

i) ബന്ധത്തിന്റെ നിർവചനമനുസരിച്ച്
R = { (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)}

ഇതിന്റെ ആരോഡയഗ്രം ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

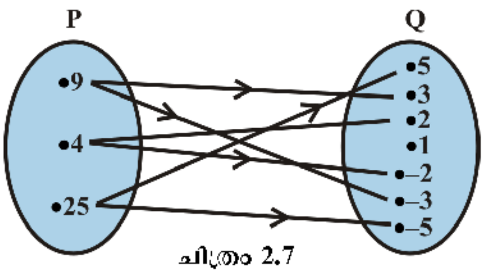


ചിത്രം 2.6

മണ്ഡലം = {1, 2, 3, 4, 5}
രംഗം = {2, 3, 4, 5, 6}
സഹമണ്ഡലം = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ഉദാഹരണം: 8

P എന്ന ഗണത്തിൽ നിന്ന് Q എന്ന ഗണത്തിലേക്കുള്ള ഒരു ബന്ധമാണ് ചുവടെ ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. ഈ ബന്ധം പട്ടികാരീതിയിലും നിബന്ധനാ രീതിയിലും എഴുതുക. ഈ ബന്ധത്തിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും എഴുതുക.



ചിത്രം 2.7

പരിഹാരം

പട്ടികാരീതി $R = \{(9, 3), (9, -3), (4, 2), (4, -2), (25, 5), (25, -5)\}$

നിബന്ധനാരീതി $R = \{(x, y)$: y യുടെ വർഗമാണ് x , $x \in P, y \in Q\}$

മണ്ഡലം = $\{4, 9, 25\}$

രംഗം = $\{-5, -3, -2, 2, 3, 5\}$

> **കുറിപ്പ്**
>
> A എന്ന ഗണത്തിൽ നിന്നും B എന്ന ഗണത്തിലേക്കുള്ള ആകെ ബന്ധങ്ങളുടെ എണ്ണവും A × B യുടെ ഉപഗണങ്ങളുടെ എണ്ണവും തുല്യമാണ്. $n(A) = p$, $n(B) = q$ ആയാൽ $n(A \times B) = pq$ ആയിരിക്കും. അതിനാൽ A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കുള്ള ബന്ധങ്ങളുടെ എണ്ണം 2^{pq} ആണ്.

ഉദാഹരണം: 9

$A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ എന്നായാൽ A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്ക് എത്ര ബന്ധങ്ങൾ ഉണ്ട്?

പരിഹാരം

$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

$n(A \times B) = 4$, A × B യുടെ ഉപഗണങ്ങൾ 2^4 ആണ്. അതായത് A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്ക് 2^4 ബന്ധങ്ങൾ ഉണ്ട്.

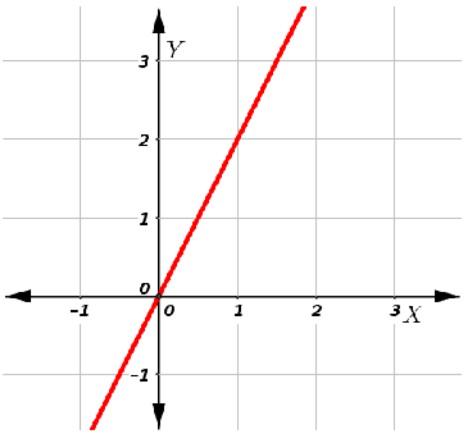
2.5 ബന്ധങ്ങളും ചിത്രങ്ങളും

രേഖീയസംഖ്യാഗണത്തിൽ നിന്നും അതിലേക്കു തന്നെയുള്ള ഒരു ബന്ധം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് നോക്കൂ.

$R = \{ (x,y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, y = 2x\}$

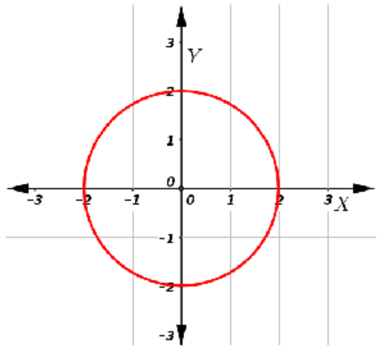
രേഖീയസംഖ്യാഗണത്തിലെ ഏത് ബന്ധവും **R** × **R** ന്റെ ഉപഗണമാണ്. **R** × **R** എന്നത് കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. എങ്കിൽ **R** × **R** ന്റെ ഉപഗണമായ R എന്ന ബന്ധം എന്തിനെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്? ഈ ബന്ധത്തിലെ ക്രമജോടികൾ സൂചകസംഖ്യകളായി വരുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കാം.

R എന്ന ബന്ധത്തിലെ എല്ലാ ക്രമജോടികളും ബിന്ദുക്കളായി അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഒരു വര



ചിത്രം 2.8

ലഭിക്കും. (ഈ വരയുടെ സമവാക്യം എന്താണെന്ന് പത്താം തരത്തിലെ ജ്യാമിതിയും ബീജഗണിതവും എന്ന അധ്യായത്തിൽ പഠിച്ചത് ഓർമയില്ലേ?) ഈ ചിത്രത്തെ R എന്ന ബന്ധത്തിന്റെ ചിത്രം എന്ന് വിളിക്കാം.



ചിത്രം 2.9

മറ്റൊരു ചിത്രം നോക്കൂ (ചിത്രം 2.9)

O കേന്ദ്രമായി രണ്ട് യൂണിറ്റ് ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തമാണ് ചിത്രത്തിൽ. കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിലെ ഏതാനും ബിന്ദുക്കൾ ചേർത്താണല്ലോ ഈ വൃത്തം രൂപപ്പെട്ടിട്ടുള്ളത്. അതുകൊണ്ട് ഇതിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകളുടെ ഗണം $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ന്റെ ഒരു ഉപഗണമാണ്. അതിനാൽ രേഖീയസംഖ്യാഗണത്തിലെ ഒരു ബന്ധമാണ്. ഈ ബന്ധത്തെ നിബന്ധനാരീതിയിൽ എങ്ങനെ എഴുതാം?

$x^2 + y^2 = 4$ എന്നതാണല്ലോ ഈ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം (പത്താംതരത്തിലെ ജ്യാമിതിയും ബീജഗണിതവും എന്ന പാഠം കാണുക).

ഈ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളാണ് (x, y) എങ്കിൽ $x^2 + y^2 = 4$ ആകും എന്നതാണ് ഇതിനർത്ഥം. മറിച്ച്, ഈ ബന്ധം അനുസരിക്കുന്ന എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും ഈ വൃത്തത്തിൽ ഉണ്ടാകുകയും ചെയ്യും. മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ

$x^2 + y^2 = 4$ എന്ന ബന്ധം അനുസരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ഗണമാണ് ഈ വൃത്തം. അതിനാൽ

$\mathrm{R} = \{ (x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 4\}$ എന്ന ബന്ധത്തിന്റെ ചിത്രമാണ് മുകളിലെ വൃത്തം എന്ന് പറയാം.

ജിയോജിബ്രയുടെ ഇൻപുട്ട് ബാറിൽ $x^2 + y^2 = 4$ എന്ന് കൊടുത്താൽ $x^2 + y^2 = 4$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ചിത്രം ലഭിയ്ക്കും. $x^2 + y^2 \leq 4$ എന്ന് നൽകിനോക്കൂ. അതുപോലെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബന്ധങ്ങളുടെ ചിത്രങ്ങളും ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് വരച്ചുനോക്കൂ.

$$\mathrm{R} = \left\{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$$

$$\mathrm{R} = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, y < 2x\}$$

$$\mathrm{R} = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, 2x + 3y \geq 6\}$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 2.2

1. A = {1, 2, 3, ... 14}. A യിൽ നിന്നും അതിലേക്കുതന്നെയുള്ള ഒരു ബന്ധം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

   $\{(x, y):\ 3x - y = 0,\ x,\ y \in A\}$

   ഈ ബന്ധത്തിന്റെ മണ്ഡലം, സഹമണ്ഡലം, രംഗം എന്നിവ എഴുതുക.

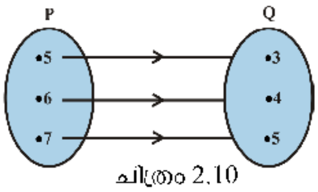
2. എണ്ണൽസംഖ്യാഗണത്തിലെ ഒരു ബന്ധത്തിന്റെ നിർവചനമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

   $R = \{(x, y) : y = x + 5,\ x$ എന്നത് 4 ൽ കുറവായ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ; $x, y \in \mathbf{N}\}$

   ഈ ബന്ധം പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതുക. ഇതിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും എഴുതുക.

3. A = {1, 2, 3, 5}, B = {4, 6, 9}. A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്കുള്ള ഒരു ബന്ധമാണ് R = {(x, y): x, y ഇവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ഒരു ഒറ്റസംഖ്യയാണ്; $x \in$ A, $y \in$ B} എന്നത്. ഈ ബന്ധം പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതുക.

4. P എന്ന ഗണത്തിൽനിന്നും Q എന്ന ഗണത്തിലേക്കുള്ള ഒരു ബന്ധം ചിത്രത്തിൽ നല്കിയിരിക്കുന്നു. ഈ ബന്ധം നിബന്ധനാരീതിയിലും പട്ടികാരീതിയിലും എഴുതുക. ഇതിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും എന്താണ്?



ചിത്രം 2.10

5. A = {1, 2, 3, 4, 6}. A യിലുള്ള ഒരു ബന്ധം R നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് R = {(a, b): a, b ∈A, a കൊണ്ട് b യെ പൂർണമായും ഹരിക്കാൻ കഴിയും} എന്നാണ്.

   i) R നെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതുക.

   ii) R ന്റെ മണ്ഡലം എഴുതുക.

   iii) R ന്റെ രംഗം എഴുതുക.

6. $R = \{(x, x + 5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$ എന്ന ബന്ധത്തിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും എഴുതുക.

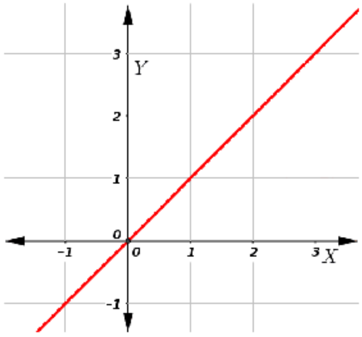
7. R = {(x, x^3) : x, 10 ൽ താഴെയുള്ള ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ} എന്ന ബന്ധത്തിനെ പട്ടികാരീതിയിൽ എഴുതുക.

8. A = {x, y, z} , B = {1, 2} ആയാൽ A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കുള്ള ബന്ധങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

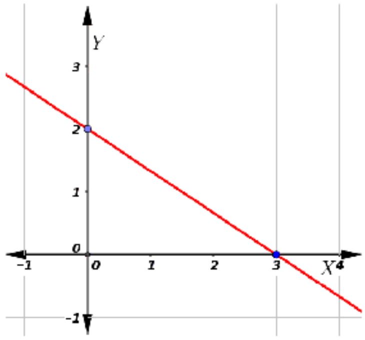
9. പൂർണസംഖ്യാഗണമായ **Z** ൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു ബന്ധമാണ് R. R = $\{(a,b): a,\ b \in \mathbf{Z}, a - b$ ഒരു പൂർണസംഖ്യ$\}$.ഈ ബന്ധത്തിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

10. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഓരോ ബന്ധത്തിന്റെയും മണ്ഡലവും രംഗവും എഴുതുക.

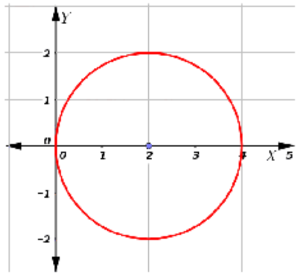
(i)



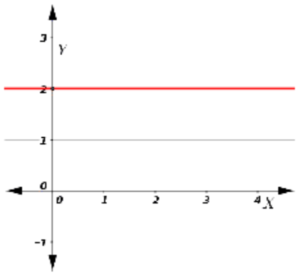
(ii)



(iii)



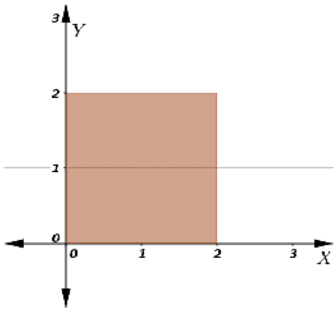
(iv)



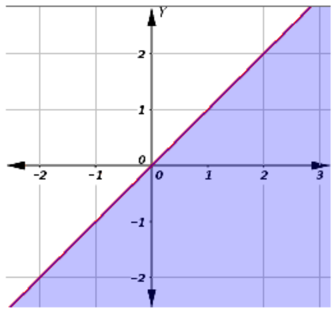
ചിത്രം 2.11

11. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങളിൽ നിറം കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഭാഗം സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബന്ധമേതാണ്? ഓരോ ബന്ധത്തിന്റേയും മണ്ഡലവും രംഗവും എഴുതുക.

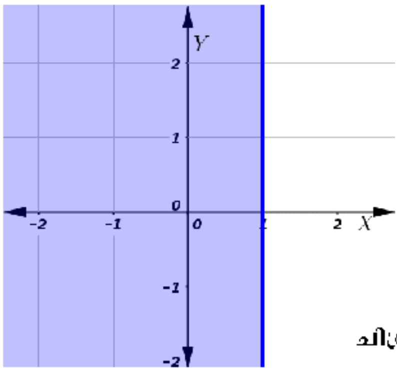
(i)



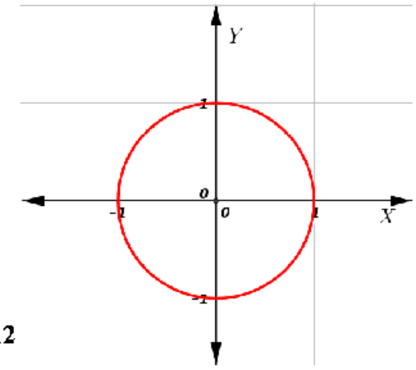
(ii)



(iii)



(iv)



ചിത്രം 2.12

മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബന്ധങ്ങളുടെ ചിത്രങ്ങൾ ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് വരയ്ക്കുക.

12. രേഖീയസംഖ്യാഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ചില ബന്ധങ്ങളാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. ഇവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

i) $R = \{(x, y) : \mathbf{x} \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, x + y = 4\}$

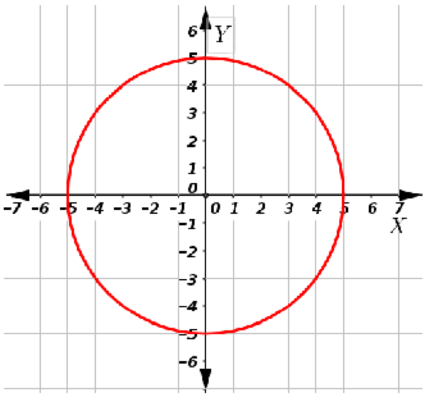
ii) $R = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 9\}$

iii) $R = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, y = \sqrt{9 - x^2}\}$

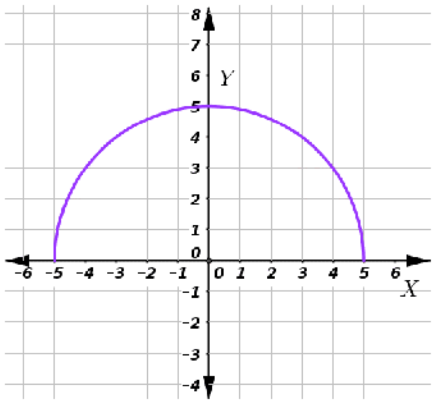
2.6 ഏകദങ്ങൾ (Functions)

രേഖീയസംഖ്യാഗണത്തിലെ ചില ബന്ധങ്ങളും അവയുടെ ചിത്രങ്ങളും ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

1. $R = \{(x, y) : x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R},\ x^2 + y^2 = 25\}$ 2. $R = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, y = \sqrt{25 - x^2}\}$

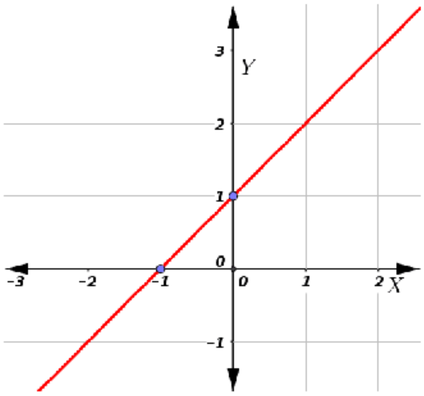


ചിത്രം 2.13



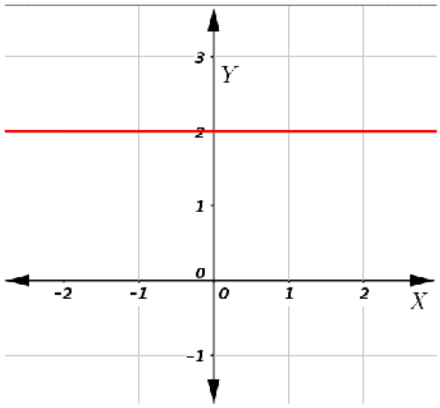
ചിത്രം 2.14

3. $\mathbf{R} = \{(x, y) : x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R},\ y = 2x + 1\}$



ചിത്രം 2.15

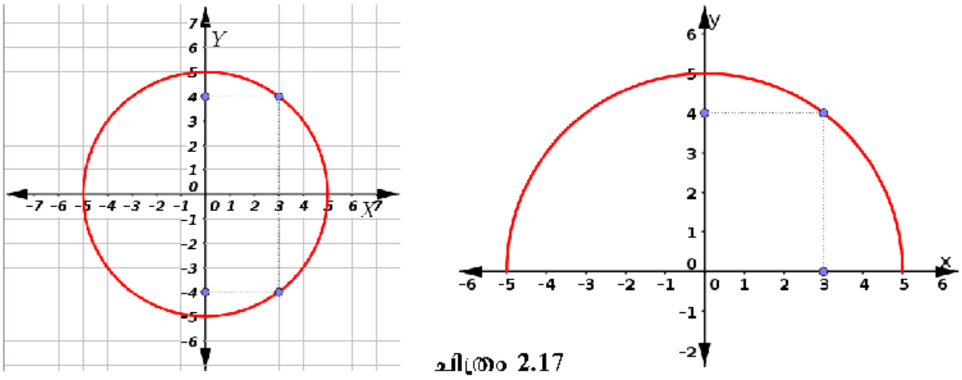
4. $\mathbf{R} = \{(x, y) : x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R},\ y = 2\}$



ചിത്രം 2.16

ഈ ബന്ധങ്ങളുടെ മണ്ഡലം എന്താണ്?

ഒന്നാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിലെ ബന്ധത്തിന്റെ മണ്ഡലം $[-5, 5]$ ആണെന്നു കാണാമല്ലോ. രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിലും മണ്ഡലം ഇതുതന്നെ. ഈ രണ്ട് ബന്ധങ്ങളും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എന്താണ്? ആദ്യത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ 3 ന്റെ പ്രതിബിംബം ഏതാണ്? രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിലോ?



ചിത്രം 2.17

ആദ്യത്തെ ബന്ധം അനുസരിച്ച് 3 ന് രണ്ട് പ്രതിബിംബങ്ങൾ ഉണ്ട്, 4, −4 എന്നിവ. എന്നാൽ രണ്ടാമത്തെ ബന്ധം അനുസരിച്ച് 3 ന് ഒരു പ്രതിബിംബം 4 മാത്രമേ ഉള്ളൂ. ആദ്യത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ −5 നും 5 നും ഇടയിലുള്ള എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും രണ്ട് പ്രതിബിംബങ്ങളുണ്ട്. എന്നാൽ രണ്ടാമത്തെ ബന്ധത്തിൽ അതിന്റെ മണ്ഡലത്തിലുള്ള എല്ലാ അംഗങ്ങൾക്കും ഓരോ പ്രതിബിംബം മാത്രമേ ഉള്ളൂ. മൂന്നാമത്തെയും നാലാമത്തേയും ബന്ധങ്ങൾ നോക്കൂ. ഈ രണ്ട് ബന്ധങ്ങളുടേയും മണ്ഡലം രേഖീയസംഖ്യാഗണമാണ്. അതായത് ഈ ബന്ധങ്ങൾ അനുസരിച്ച് രേഖീയസംഖ്യാഗണത്തിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങൾക്കും പ്രതിബിംബങ്ങളുണ്ട്. മാത്ര

മല്ല, ഒരംഗത്തിനുപോലും ഒന്നിലധികം പ്രതിബിംബങ്ങളില്ല. ഇത്തരം ബന്ധങ്ങളെ ഏകദങ്ങൾ എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്.

നിർവചനം: 5

A എന്ന ഗണത്തിൽ നിന്നും B എന്ന ഗണത്തിലേക്കുള്ള ഒരു ബന്ധത്തിൽ A യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങൾക്കും B യിൽ പ്രതിബിംബം ഉണ്ടാകുകയും ഒന്നിലധികം പ്രതി ബിംബങ്ങൾ ഇല്ലാതിരിക്കുകയും ചെയ്താൽ ആ ബന്ധത്തെ A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കുള്ള ഒരു ഏകദം (function) എന്ന് വിളിക്കാം.

ഏകദങ്ങളെ സാധാരണയായി f, g തുടങ്ങിയ അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ടാണ് സൂചിപ്പി ക്കുന്നത്. A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്കുള്ള ഒരു ഏകദമാണ് f എങ്കിൽ

ഇതിനെ $f : A \to B$ എന്നെഴുതാം.

ഈ ഏകദം അനുസരിച്ച് A യിലുള്ള x എന്ന അംഗത്തിന്റെ പ്രതിബിംബമാണ് y എങ്കിൽ $f(x) = y$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

x ന്റെ പ്രതിബിംബമാണ് y എങ്കിൽ y യുടെ വിലോമ പ്രതിബിംബമാണ് *(pre image)* x എന്ന് പറയാം.

ഉദാഹരണം: 10

$R = \{(x, y) : y = 2x, \ x, \ y \in N\}$ എന്നത് എണ്ണൽസംഖ്യാഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിട്ടു ള്ള ഒരു ബന്ധമാണ്. ഈ ബന്ധത്തിന്റെ മണ്ഡലം, സഹമണ്ഡലം, രംഗം എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക ഇത് ഒരു ഏകദമാണോ?

പരിഹാരം

ഈ ബന്ധത്തിന്റെ മണ്ഡലവും സഹമണ്ഡലവും എണ്ണൽസംഖ്യാഗണമായ N ആണ്. രംഗം ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ ഗണവും. ഈ ബന്ധമനുസരിച്ച് ഓരോ എണ്ണൽ സംഖ്യയ്ക്കും കൃത്യം ഒരു പ്രതിബിംബം മാത്രം ഉള്ളതിനാൽ ഇത് ഒരു ഏകദ മാണ്.

ഉദാഹരണം: 11

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ബന്ധവും പരിശോധിച്ച് ഏകദമാണോ എന്ന് എഴുതുക.

(i) $R = \{(2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$,

(ii) $R = \{(2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$

(iii) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7)\}$

പരിഹാരം

i) $\{2, 3, 4\}$ എന്ന ഈ ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങൾക്കെല്ലാം ഓരോ പ്രതിബിംബം മാത്രമാണുള്ളത്. അതിനാൽ A യിൽ നിന്നും എണ്ണൽസംഖ്യാഗണത്തിലേക്കു ള്ള ഒരു ഏകദമായി ഈ ബന്ധത്തെ കണക്കാക്കാം.

ii) 2, 3 എന്നീ അംഗങ്ങൾക്ക് ഒന്നിലധികം പ്രതിബിംബങ്ങൾ ഉള്ളതിനാൽ ഈ ബന്ധം ഒരു ഏകദമല്ല.

iii) {1, 2, 3, 4, 5, 6} എന്ന ഗണത്തിൽ നിന്നും എണ്ണൽ സംഖ്യാഗണത്തിലേക്കുള്ള ഒരു ഏകദമായി ഈ ബന്ധത്തെ കണക്കാക്കാം.

നിർവചനം: 6

രേഖീയസംഖ്യാഗണമോ അതിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഉപഗണമോ രംഗമായി വരുന്ന ഒരു ഏകദത്തെ രേഖീയ മൂല്യ ഏകദം (Real valued function) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഒരു ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും രേഖീയസംഖ്യാഗണത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങളായാൽ ആ ഏകദത്തെ രേഖീയ ഏകദം (Real function) എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം: 12

$f(x) = 2x + 1$ എന്നത് എണ്ണൽസംഖ്യാഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു ഏകദമാണ്. ഈ നിർവചനം ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = \ldots$	$f(2) = \ldots$	$f(3) = \ldots$	$f(4) = \ldots$	$f(5) = \ldots$	$f(6) = \ldots$	$f(7) = \ldots$

പരിഹാരം

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = 3$	$f(2) = 5$	$f(3) = 7$	$f(4) = 9$	$f(5) = 11$	$f(6) = 13$	$f(7) = 15$

ഒരു ഏക്കദത്തെ ഏതാനും ക്രമജോടികളുടെ കൂട്ടം എന്നതിനുപരി മറ്റു പല തലങ്ങളിൽ പരിഗണിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഏതാനും ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം. $f(x) = 2x$ എന്നത് രേഖീയസംഖ്യാഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു ഏകദമാണ്. ഇതിനെ $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x$ എന്നെഴുതാം.

അതായത്, ഒരു സംഖ്യയുടെ പ്രതിബിംബം ആ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് എന്നതാണ്. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ ഒരു സംഖ്യയെ രണ്ടു മടങ്ങാക്കുക എന്നതാണ് ഈ ഏകദം ചെയ്യുന്നത്.

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ എന്നത്, സമാനത്വരണത്തോടെ നേർവരയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരവും (s) സഞ്ചരിക്കാനെടുത്ത സമയവും (t) തമ്മിലുള്ള ബന്ധമാണല്ലോ. ഇതൊരു ഏകദമാണ്. ഇത്തരം അനേകം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഏകദം എന്ന ആശയം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നുണ്ട്.

രേഖീയഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

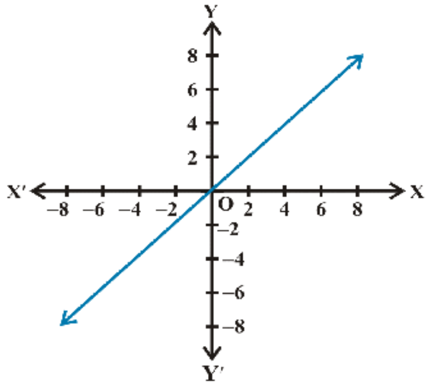
f എന്നത് ഒരു രേഖീയഏകദമായാൽ $(x, f(x))$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ ലഭിക്കുന്ന ചിത്രമാണ് അതിന്റെ ഗ്രാഫ്. ഏതാനും രേഖീയഏകദങ്ങളും അവയുടെ ഗ്രാഫും ഇനി പരിചയപ്പെടാം.

ഏകദങ്ങളും അവയുടെ ഗ്രാഫും (Functions and their Graphs)

i) ***അനന്യഏകദം (Identity function)***

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$ നെ അനന്യ ഏകദമെന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. ഒരു സംഖ്യയുടെ പ്രതിബിംബം അതേ സംഖ്യതന്നെയാണ് എന്നുള്ളതാണ് ഈ ഏകദത്തിന്റെ പ്രത്യേകത. ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും **R** ആണ്. ഇതിന്റെ ഗ്രാഫ് $y = x$ എന്ന വരയാണ്.

(പത്താം തരത്തിലെ ജ്യാമിതിയും ബീജഗണിതവും എന്ന പാഠഭാഗം ഓർക്കുക)



$f(x) = x$

ചിത്രം 2.18

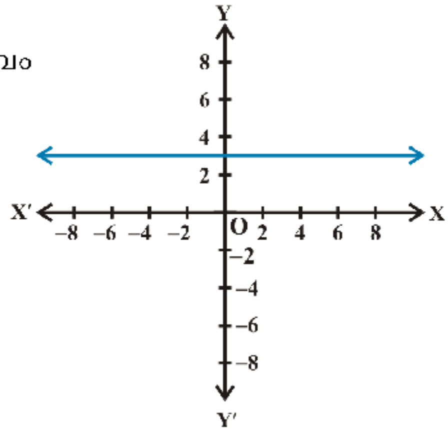
ii) ***സംഖ്യാഏകദം (Constant function)***

ഉദാഹരണം നോക്കൂ $f : R \to R, f(x) = 3$.

എല്ലാ സംഖ്യകളുടേയും പ്രതിബിംബം 3 ആണെന്നാണല്ലോ ഇതിനർത്ഥം.

ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും എന്താണ്?

ഇത്തരം ഏകദങ്ങളെയാണ് സംഖ്യാഏകദങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നത്.



$f(x) = 3$

ചിത്രം 2.19

പൊതുവായി $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = c$, (c ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ) എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഏകദങ്ങളാണ് സംഖ്യാഏകദങ്ങൾ.

ഈ ഏകദത്തിന്റെ

മണ്ഡലം $= \mathbf{R}$

രംഗം $= \{c\}$

ഇത്തരം ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ വരകളായിരിക്കും.

iii) *ബഹുപദ ഏകദങ്ങൾ (Polynomial function)*

$x^2 + 2x + 1$, x^3, $x^5 + \sqrt{2}\,x + 3$ ഇവയെല്ലാം ബഹുപദങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ ല്ലോ.

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = x^5 + \sqrt{2}\,x + 3$$

എന്നിങ്ങളെയുള്ള ഏകദങ്ങളെ ബഹുപദഏകദങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കാം. പൊതു വായി പറഞ്ഞാൽ, ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിലുള്ള ഏകദമാണ് ബഹു പദഏകദം.

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, n എന്നത് ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യയോ പൂജ്യമോ ആകാം. $f(x) = \sqrt{2} + 2x$, എന്നത് ഒരു ബഹുപദ ഏകദ മാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?

എല്ലാ ബഹുപദ ഏകദങ്ങളുടേയും മണ്ഡലം രേഖീയ സംഖ്യാഗണമാണെന്ന് കാണാ മല്ലോ. രംഗമോ?

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം.

ഉദാഹരണം: 13

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $y = f(x) = x^2$ പരിഗണിക്കുക. ഈ ഏകദത്തിന്റെ നിർവചനം ഉപയോ ഗിച്ച് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കൂ. ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡ ലവും രംഗവും എഴുതുക. ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$									

പരിഹാരം

ഓരോ രേഖീയസംഖ്യയേയും അതിന്റെ വർഗമാക്കുക എന്നതാണ് ഈ ഏകദം ചെയ്യുന്നത്. ഈ ആശയം ഉപയോഗിച്ച് പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കാം.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

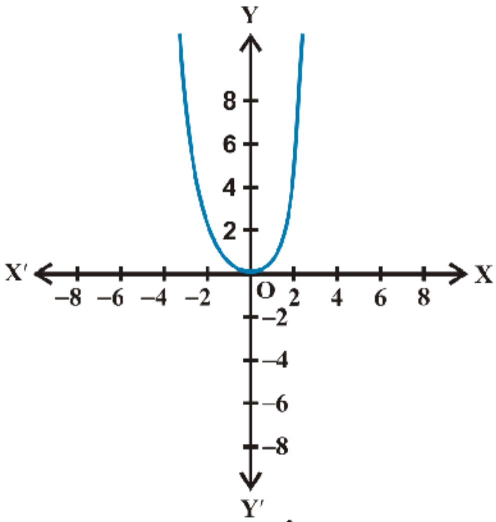
ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം = **R**

രേഖീയസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ ഗണമാണ് ഈ ഏകദത്തിന്റെ രംഗം. അതിനാൽ രംഗത്തിൽ ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉണ്ടാവില്ല. y എന്നത് പൂജ്യമോ അധിസംഖ്യയോ ആയതിനാൽ

$x - \sqrt{y}$ എന്നെടുക്കാം.

അപ്പോൾ $f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$

അതായത് ഈ ഏകദത്തിന്റെ രംഗത്തിൽ എല്ലാ അധിസംഖ്യകളും പൂജ്യവും ഉൾപ്പെടുന്നു.
അതിനാൽ രംഗം = $[0, \infty)$
ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.



$f(x) = x^2$ **ചിത്രം 2.20**

ബന്ധങ്ങളുടെ ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നപോലെ ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകളും വരയ്ക്കാൻ കഴിയും. ഉദാഹരണമായി $f(x) = x^2$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുന്നതിന് input bar ൽ x ^ 2 എന്ന് നൽകിയാൽ മതി. ഏകദത്തിന് നമ്മൾ ഉദ്ദേശിക്കുന്ന പേരു തന്നെ വരണമെന്നുണ്ടെങ്കിൽ input ൽ ആ പേരുകൂടി നൽകണം $f - x$ ^ 2 എന്നിങ്ങനെ നല്കാം.

കൂടുതൽ പ്രവർത്തനങ്ങൾ

i) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 1$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും എഴുതുക. ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. $g(x) = x^2$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫും f ന്റെ ഗ്രാഫും തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം?

a) $f(x) = x^2 + 1,\ f(x) = x^2 + 2, f(x) = x^2 - 1\ , f(x) = x^2 - 3$ തുടങ്ങിയ ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്താൽ വരച്ചു നോക്കൂ.

b) 'a' എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് $f(x) = x^2 + a$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ഗ്രാഫിന് എന്ത് മാറ്റമാണ് വരുന്നത് എന്ന് നിരീക്ഷിക്കുക.

മുകളിൽ ചർച്ചചെയ്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ നിർവചനവും അവയുടെ ഗ്രാഫ്, രംഗം ഇവയൊക്കെ തമ്മിലുള്ള ബന്ധവും കണ്ടെത്തുക.

ii) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}\ ,\ f(x) = (x + 1)^2$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇതിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. $g(x) = x^2$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുക.

a) $x^2\ , (x + 1)^2\ , (x + 2)^2\ , (x - 1)^2\ , (x - 2)^2$ തുടങ്ങിയ ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ വരയ്ക്കുക.

b) 'a' എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് $(x + a)^2$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. ഏകദത്തിന്റെ നിർവചനം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ഗ്രാഫിന് എന്തു മാറ്റമാണ് വരുന്നത് എന്നു നിരീക്ഷിക്കുക.

iii) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f(x) = -x^2$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും എഴുതുക. ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $g(x) = x^2$ ന്റെ ഗ്രാഫുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുക.

'a' എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് ax^2 എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. 'a' മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ഗ്രാഫിനു വരുന്ന മാറ്റം നിരീക്ഷിക്കുക. ഈ ഏകദങ്ങളുടെ മണ്ഡലം രംഗം എന്നിവയെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

ഉദാഹരണം: 14

$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, f(x) = x^3$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം, രംഗം എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക. ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

പരിഹാരം

ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയുടേയും മൂന്നാംകൃതി കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. അതിനാൽ ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം $\mathbf{R}$ ആണ്. ഈ ഏകദത്തിന്റെ നിർവചനമനുസരിച്ച് ഏതാനും സംഖ്യകളുടെ പ്രതിബിംബം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 8,\ f(3) = 27$

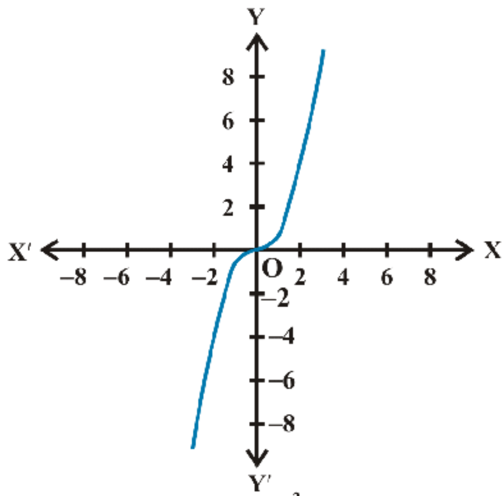
$f(\ 1) =\ 1,\ f(\ 2) =\ 8,\ f(\ 3) =\ 27, \ldots\ldots$

ഈ ഏകദത്തിന്റെ രംഗത്തിൽ ന്യൂനസംഖ്യകളും പൂജ്യവും അധിസംഖ്യകളും ഉണ്ടെന്ന് കണ്ടല്ലോ.

y എന്നത് ഏതു രേഖീയസംഖ്യ ആയാലും $x - \sqrt[3]{y}$ എന്നത് ഒരു രേഖീയസംഖ്യ ആയിരിക്കും.

$f(x) = x^3 = \left(\sqrt[3]{y}\right)^3 = y$

അതായത് എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യകളും ഈ ഏകദത്തിന്റെ രംഗത്തിലുണ്ട്. അതിനാൽ രംഗം $= \mathbf{R}$ ആണ്. ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.



$f(x) = x^3$

ചിത്രം 2.21

> n എന്ന പേരിൽ ഒരു integer slider നിർമിക്കുക. x^n എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക. സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറ്റിനോക്കൂ. ഗ്രാഫിന് വരുന്ന മാറ്റങ്ങൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

ഭിന്നക ഏകദങ്ങൾ (Rational functions)

$f(x), g(x)$ ഇവ ബഹുപദ ഏകദങ്ങളായാൽ $\dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഏകദങ്ങളാണ് ഭിന്നക ഏകദങ്ങൾ. ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം.

ഉദാഹരണം: 15

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. ഒരു സംഖ്യയുടെ വ്യുൽക്രമം കാണുക എന്നതാണ് ഈ ഏകദം ചെയ്യുന്നത്. അതിനാൽ ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം പൂജ്യം ഒഴികെയുള്ള രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണമാണ്. ഇതിനെ $\mathbf{R}-\{0\}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. ഈ ഏകദത്തിന്റെ രംഗം എന്താണ്?

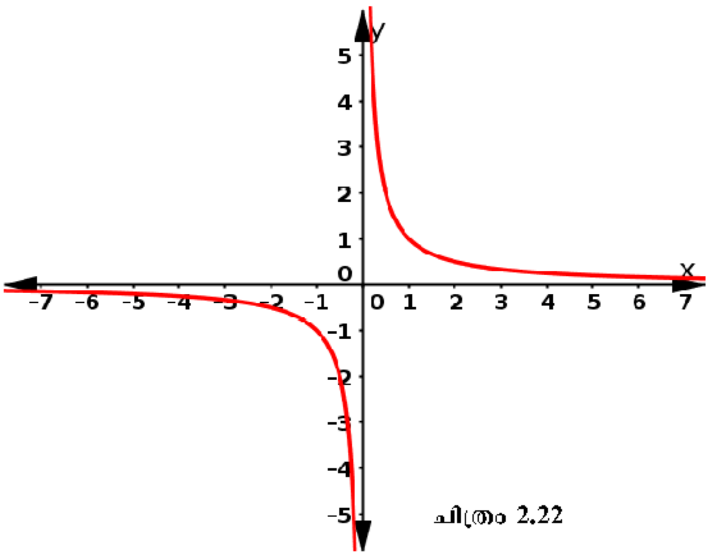
x ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും $\dfrac{1}{x}$ എന്നത് പൂജ്യമാവില്ലല്ലോ. അതിനാൽ രംഗത്തിൽ പൂജ്യം വരില്ല. മറ്റെല്ലാ സംഖ്യകളും വരുമോ?

പൊതുവായി ആലോചിക്കാം. y എന്നത് പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സംഖ്യയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. y എന്നത് $x-\dfrac{1}{y}$ എന്ന രേഖീയസംഖ്യയുടെ വ്യുൽക്രമമാണല്ലോ. അതായത്

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)}=y$$

അതിനാൽ, പൂജ്യമല്ലാത്ത എല്ലാ സംഖ്യകളും ഈ ഏകദത്തിന്റെ രംഗത്തിൽ ഉണ്ടാവും.
രംഗം = $\mathbf{R}-\{0\}$

ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്താൽ വരച്ചുനോക്കൂ. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു ചിത്രം ലഭിക്കും.



ചിത്രം 2.22

ഉദാഹരണം: 16

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇതിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

പരിഹാരം

ചോദ്യത്തിൽ ഛേദം $x - 2$ ആയതിനാൽ $x = 2$ ആകുകയില്ല (എന്തുകൊണ്ട്?). 2 ഒഴികെയുള്ള ഏതു സംഖ്യയ്ക്കും ഒരു പ്രതിബിംബം ലഭിയ്ക്കും. അതിനാൽ ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം $\mathbf{R} - \{2\}$ ആണ്.

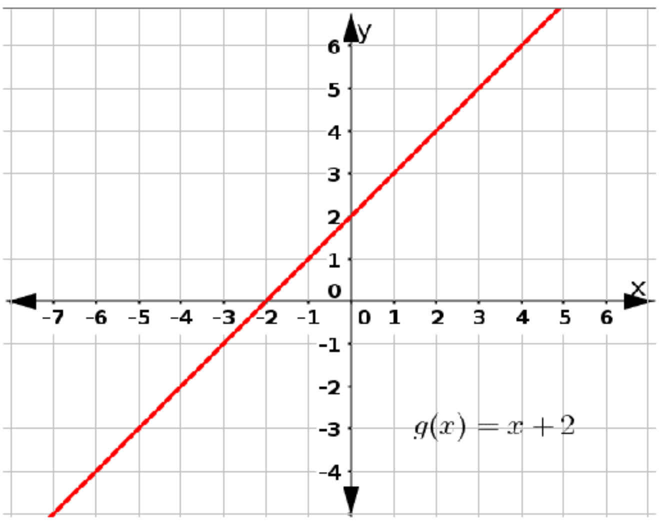
$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)\,(x+2)}{(x-2)}$$

$x - 2$ എന്നത് പൂജ്യമല്ല

അതായത് $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2\ ,\ x \neq 2$

$g(x) = x + 2$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ചുനോക്കൂ.

x എന്നത് 2 അല്ലാത്തപ്പോഴൊക്കെ f എന്ന ഏകദവും g എന്ന ഏകദവും തുല്യമാണല്ലോ. അതിനാൽ g യുടെ ഗ്രാഫിൽ നിന്നും (2, 4) എന്ന ബിന്ദു ഒഴിവാക്കിയാൽ f ന്റെ ഗ്രാഫ് ലഭിക്കും.



ചിത്രം 2.23

g യുടെ രംഗം $\mathbf{R}$ ആണ്. അതിനാൽ f ന്റെ രംഗം $\mathbf{R} - \{4\}$.

f ന്റെ ഗ്രാഫ് ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക. ഈ ഗ്രാഫും $g(x) = x + 2$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം തിരിച്ചറിയാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ? 'a' എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് $(a, f(a))$ എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. a മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ഈ ബിന്ദു f ന്റെ ഗ്രാഫിലൂടെ മാറുന്നത് കാണാം. $a - 2$ ആകുമ്പോൾ ഈ ബിന്ദു അപ്രത്യക്ഷമാകും.

കേവലവില ഏകദം (Modulus function)

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം, രംഗം എന്നിവ കാണുക. ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

x ഒരു അധിസംഖ്യയോ പൂജ്യമോ ആയാൽ x, $|x|$ ഇവ തുല്യമാണല്ലോ.

x ഒരു ന്യൂനസംഖ്യ ആയാൽ $|x| = -x$ എന്നും കാണാം.

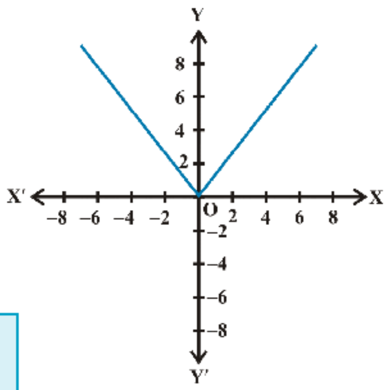
അതിനാൽ ഈ ഏകദത്തെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ മാറ്റി എഴുതാം.

$$f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം = **R**

രംഗം = $[0, \infty)$

കേവലവില ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.



$f(x) = |x|$

ചിത്രം 2.24

abs (x) എന്ന input നൽകി കേവലവില ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാവുന്നതാണ്.

സിഗ്നം ഏകദം (Signum function)

$f(x) = \dfrac{|x|}{x}, x \neq 0$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. ഈ ഏകദം എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യകൾക്കും നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളതിനാൽ മണ്ഡലം = R ആണ്, രംഗമോ?

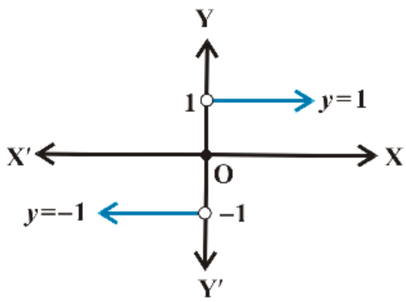
x ഒരു അധിസംഖ്യ ആയാൽ $|x| = x$

അപ്പോൾ $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$

ഒരു ന്യൂനസംഖ്യ ആയാൽ $|x| = -x$

അപ്പോൾ $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$

ഈ ഏകദത്തിനെ ഇങ്ങനെ മാറ്റി എഴുതാം



ചിത്രം 2.25

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

ഇതിൽ നിന്നും ഏകദത്തിന്റെ രംഗം = {-1,0,1} എന്നു കാണാമല്ലോ.
ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് നിരിക്ഷിക്കുക.

വൻപൂർണസംഖ്യാഏകദം (Greatest Integer Function)

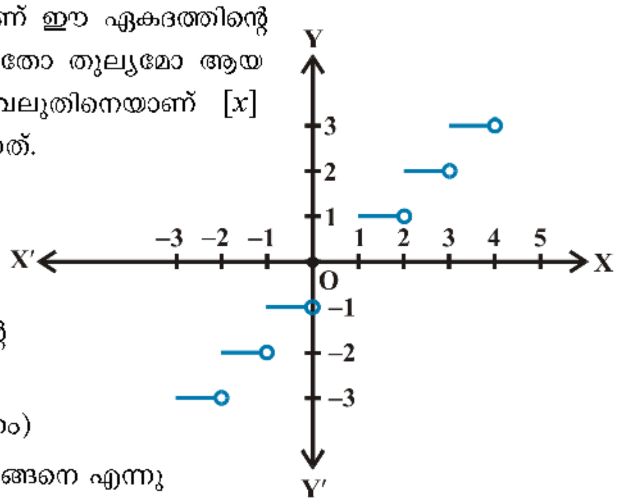
f: **R**→**R** , $f(x) = [x]$ എന്നതാണ് ഈ ഏകദത്തിന്റെ നിർവചനം. x നേക്കാൾ ചെറുതോ തുല്യമോ ആയ പൂർണസംഖ്യകളിൽ ഏറ്റവും വലുതിനെയാണ് $[x]$ എന്നതുകൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി

$f(3) = 3, f(3.1) = 3, f(2.9) = 2$,
$f(-2) = -2, f(-4.6) = -5$, ...
എന്നിങ്ങനെ. ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം = **R**

രംഗം = **Z** (പൂർണസംഖ്യാഗണം)

ഇതിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്നു നോക്കാം.



$f(x) = [x]$
ചിത്രം 2.26

$-1 \le x < 0$ ആയാൽ $[x] = -1$

$0 \le x < 1$ ആയാൽ $[x] = 0$

$1 \le x < 2$ ആയാൽ $[x] = 1$

$2 \le x < 3$ ആയാൽ $[x] = 2$ എന്നിങ്ങനെയാണല്ലോ. ഇതുപയോഗിച്ച് ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാം.

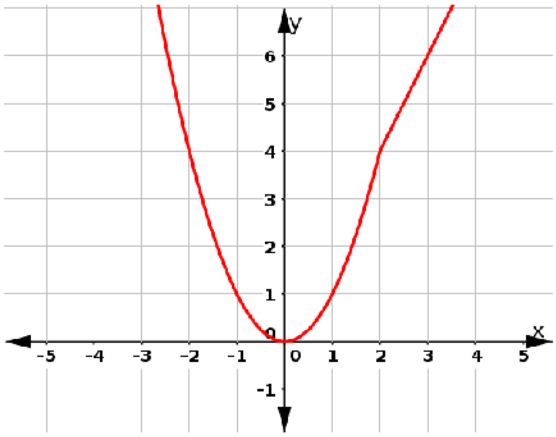
> floor (x) എന്ന input ഉപയോഗിച്ച് $f(x) = [x]$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാം. Ceiling (x) എന്ന് input നൽകിയാൽ കിട്ടുന്ന ഗ്രാഫ് നോക്കൂ. ഈ ഏകദത്തിന്റെ നിർവചനമെന്താവും?

മറ്റു ചില ഉദാഹരണങ്ങൾകൂടി നോക്കാം.

ഉദാഹരണം: 17

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$$



ചിത്രം 2.27

ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ചുനോക്കു.
2 വരെ x^2 എന്നും 2 നു ശേഷം $2x$ എന്നുമാണല്ലോ നിർവചനം അതിനാൽ 2 വരെ x^2 എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫും 2 നു ശേഷം $2x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫും ചേർന്നതാണ് f ന്റെ ഗ്രാഫ്. ഇത് ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഇത്തരം ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ വരയ്ക്കുമ്പോൾ input ൽ നൽകേണ്ട നിർദ്ദേശം എന്താണെന്ന് നോക്കാം. ആദ്യത്തെ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ലഭിക്കാൻ $f = if\left[x \le 2, x\hat{}2, 2x\right]$ എന്ന് നൽകിയാൽ മതി. ഇതുപോലെ രണ്ടാമത്തെ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫും വരച്ചുനോക്കു.

ഉദാഹരണം: 18

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 2 \\ 2x+1, & x > 2 \end{cases}$$

എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ചുനോക്കു. ഇതിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

രേഖീയഏകദങ്ങളുടെ ബീജഗണിതം (Algebra of Real Functions)

$h(x) = x^2 + x^3$ എന്ന ഏകദവും $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ എന്നീ ഏകദങ്ങളും പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ $h(x) = f(x) + g(x)$ ആണല്ലോ.

അതിനാൽ f, g എന്നീ ഏകദങ്ങളുടെ പല ഗുണവിശേഷങ്ങളും h എന്ന ഏകദത്തിന് ഉണ്ടാവും. തുടർന്നു വരുന്ന ക്ലാസുകളിൽ കൂടുതൽ വിശദമായി ഇക്കാര്യങ്ങൾ പഠിക്കുന്നുണ്ട്. h എന്ന ഏകദത്തെ $f + g$ എന്നും എഴുതാം. ഇതുപോലെ $f - g$, fg, $\frac{f}{g}$ തുടങ്ങിയ ഏകദങ്ങളും നിർവചിക്കാൻ കഴിയും.

i) രേഖീയഏകദങ്ങളുടെ സങ്കലനം

$f: X \to \mathbf{R}$, $g: X \to \mathbf{R}$ ($X \subset \mathbf{R}$) എന്നിവ രണ്ട് രേഖീയ ഏകദങ്ങളായാൽ $f + g: X \to R$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ നിർവചനം.

$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in X$ എന്നാണ്.

ii) രേഖീയഏകദങ്ങളുടെ വ്യവകലനം

$f: X \to \mathbf{R}$, $g: X \to \mathbf{R}$, ($X \subset \mathbf{R}$) എന്നിവ രണ്ട് രേഖീയഏകദങ്ങളായാൽ $f - g : X \to \mathbf{R}$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ നിർവചനം

$(f - g)(x) = f(x) - g(x),\ x \in X$ എന്നാണ്.

iii) രേഖീയസംഖ്യകൊണ്ടുള്ള ഗുണനം

$f: X \to \mathbf{R}$ എന്നത് ഒരു രേഖീയഏകദവും α എന്നത് ഒരു രേഖീയ സംഖ്യയുമായാൽ $\alpha f: X \to \mathbf{R}$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ നിർവചനം

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),\ x \in X.$ എന്നാണ്

iv) രണ്ട് രേഖീയഏകദങ്ങളുടെ ഗുണനം

$f: X \to \mathbf{R}$, $g: X \to \mathbf{R}$ എന്നിവ രണ്ട് രേഖീയഏകദങ്ങളായാൽ $fg : X \to \mathbf{R}$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ നിർവചനം

$(fg)(x) = f(x)\, g(x),\ x \in X$ എന്നാണ്.

v) രേഖീയഏകദങ്ങളുടെ ഹരണം

$f: X \to \mathbf{R}$, $g: X \to \mathbf{R}$ എന്നിവ രണ്ട് രേഖീയ ഏകദങ്ങളായാൽ $\frac{f}{g}$ എന്ന ഏകദം ഇങ്ങനെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$\frac{f}{g}: X \to \mathbf{R},\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\quad g(x) \neq 0,\ x \in X$$

ഉദാഹരണം: 19

$f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 1$ ആയാൽ $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(fg)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, എന്നിവ കാണുക.

പരിഹാരം

$(f + g)(x) = x^2 + 2x + 1, \quad (f - g)(x) = x^2 - 2x - 1$

$(fg)(x) = x^2(2x + 1) = 2x^3 + x^2$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$$

ഉദാഹരണം: 20

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x$ എന്നിവ ന്യൂനസംഖ്യകളല്ലാത്ത രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഏകദങ്ങളാണ്. $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(fg)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$. എന്നിവ കാണുക.

പരിഹാരം

$(f + g)(x) = \sqrt{x} + x, \quad (f - g)(x) - \sqrt{x} - x,$

$$(fg)(x) = \sqrt{x}(x) = x^{\frac{3}{2}}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{\frac{1}{2}}, x \neq 0$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 2.3

1. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബന്ധങ്ങളിൽ ഏകദങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്? എന്തുകൊണ്ട്? ഏകദങ്ങളായിട്ടുള്ളവയുടെ മണ്ഡലവും രംഗവും എഴുതുക.

   (i) $\{(2,1), (5,1), (8,1), (11,1), (14,1), (17,1)\}$

   (ii) $\{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (12,6), (14,7)\}$

   (iii) $\{(1,3), (1,5), (2,5)\}$.

2. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രേഖീയഏകദങ്ങളുടെ മണ്ഡലവും രംഗവും എഴുതുക.

   (i) $f(x) = -|x|$ (ii) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

3. f എന്ന ഏകദത്തിന്റെ നിർവചനം $f(x) = 2x - 5$ എന്നാണ്. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) $f(0)$, (ii) $f(7)$, (iii) $f(-3)$.

4. താപത്തിന്റെ അളവ് ഡിഗ്രി സെൽഷ്യസിൽ (C) നിന്നും ഡിഗ്രി ഫാരൻഹീറ്റി ലേക്കു (t) മാറ്റുന്ന ഏകദം t നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

$t(\mathrm{C}) = \frac{9\mathrm{C}}{5} + 32$. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $t(0)$ (ii) $t(28)$

(iii) $t(-10)$ (iv) $t(\mathrm{C}) = 212$ ആയാൽ C യുടെ വില.

5. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ രംഗം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $f(x) = 2 - 3x,\ x \in \mathbf{R},\ x > 0.$

(ii) $f(x) = x^2 + 2,\ x$ ഒരു രേഖീയസംഖ്യ

(iii) $f(x) = x,\ x$ ഒരു രേഖീയസംഖ്യ

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം: 21

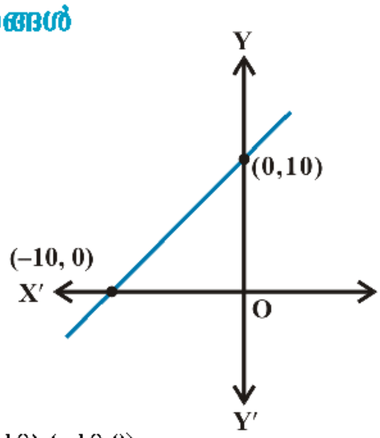
$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 10$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

പരിഹാരം

$y = x + 10$ എന്നത് ഒരു വരയുടെ സമവാക്യമാണല്ലോ. അതിനാൽ ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് $y = x + 10$ എന്ന വരയാണ്. അനുയോജ്യമായ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ എടുത്ത് ഈ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാം.

$x = 0$ ആയാൽ $y = 10$

$y = 0$ ആയാൽ $x = -10$ അതിനാൽ ഈ വര $(0,10)$ $(-10,0)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽകൂടി കടന്നുപോകും.



ചിത്രം 2.28

കുറിപ്പ്

m, c ഇവ സറിരസംഖ്യകളായാൽ $f(x) = mx + c$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് ഒരു വര ആയിരിക്കും. അതിനാൽ ഇത്തരം ഏകദങ്ങളെ രേഖീയ ഏകദങ്ങൾ (linear functions) എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണം: 22

ഭിന്നകസംഖ്യകളുടെ ഗണമായ Q വിൽ നിന്ന് അതിലേക്കുതന്നെയുള്ള ഒരു ബന്ധമാണ് $\mathrm{R} = \{(a,b): a - b \in \mathbf{Z},\ a,b \in \mathbf{Q}\}$

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ തെളിയിക്കുക.

(i) $a \in \mathbf{Q}$ ആയാൽ $(a, a) \in \mathrm{R}$ ആയിരിക്കും

(ii) $(a, b) \in R$ ആയാൽ $(b, a) \in R$ ആയിരിക്കും

(iii) $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ ആയാൽ $(a, c) \in R$ ആയിരിക്കും

പരിഹാരം

i) $a - a = 0 \in \mathbf{Z}$,ആയതിനാൽ $(a, a) \in R$.

ii) $(a, b) \in R$ ആയതിനാൽ $a - b \in \mathbf{Z}$. അപ്പോൾ $b - a \in \mathbf{Z}$ ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് $(b, a) \in R$

iii) $(a, b), (b, c)$ ഇവ R ലെ അംഗങ്ങളായതിനാൽ $a - b$. $b - c$ ഇവ പൂർണസംഖ്യകളായിരിക്കും. $a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbf{Z}$ ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് $(a, c) \in R$

ഉദാഹരണം: 23

$f = \{(1, 1), (2, 3), (0, -1), (-1, -3)\}$ Z ൽ ഉള്ള ഒരു രേഖീയഏകദമാണ്. $f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

f ഒരു രേഖീയ ഏകദമായതിനാൽ $f(x) = mx + c$.

$(1, 1) \in f$ ആയതിനാൽ $f(1) = 1$

അതായത് $m + c = 1$

$(0, -1) \in f$ ആയതിനാൽ $f(0) = -1$

അതായത് $m \times 0 + c = -1$

$\therefore c = -1, m = 2$

അതിനാൽ $f(x) = 2x - 1$

ഉദാഹരണം: 24

$f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 4}$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$ ആയതിനാൽ $x = 4$, $x = 1$ എന്നീ വിലകൾക്ക് ഛേദം പൂജ്യമാകും. ഈ വിലകളൊഴികെ ബാക്കി എല്ലാ വിലകൾക്കും ഒരു പ്രതിബിംബം കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയും. അതിനാൽ മണ്ഡലം $\mathbf{R} - \{1, 4\}$.

ഉദാഹരണം: 25

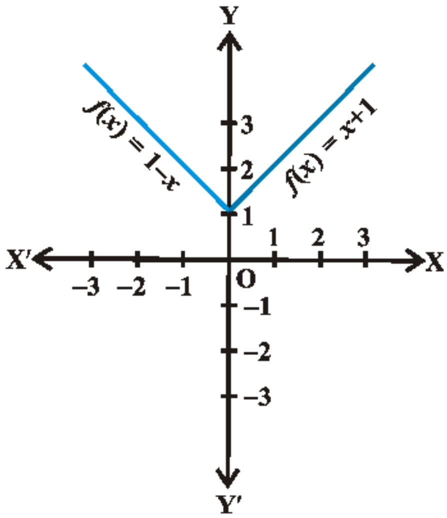
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0 \\ 1 & , x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

പരിഹാരം

$x < 0$ ആകുമ്പോൾ $y = 1 - x$ എന്ന വരയും $x > 0$ ആകുമ്പോൾ $y = x + 1$ എന്ന വരയും $(0,1)$ എന്ന ബിന്ദുവും ചേർന്നതാണ് ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്.

$f(-1) = 2$, $f(-2) = 3$ അതിനാൽ $x < 0$ ആകുമ്പോൾ ഗ്രാഫ് $(-1, 2)$, $(-2, 3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്നു. $f(1) = 2$, $f(2) = 3$. അതിനാൽ $x > 0$ ആകുമ്പോൾ ഗ്രാഫ് $(1, 2)$, $(2, 3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്നു.



ചിത്രം 2.29

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 3 \\ 3x, & 3 \le x \le 10 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 3x, & 2 \le x \le 10 \end{cases}$ എന്നീ ബന്ധങ്ങളിൽ f ഒരു ഏകദമാണെന്നും g ഒരു ഏകദമല്ലെന്നും തെളിയിക്കുക.

f, g എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫ് ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് വരയ്ക്കുക. f ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാൻ $f = if\,(0 \le x \le 3, x \wedge 2, 3 \le x \le 10, 3x)$ എന്ന് input നൽകിയാൽ മതി. ഇതുപോലെ g ന്റെ ഗ്രാഫും വരയ്ക്കാം.

2. $f(x) = x^2$ ആയാൽ $\dfrac{f(1.1) - f(1)}{(1.1 - 1)}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

3. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 12}$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം എഴുതുക.

ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക. മണ്ഡലത്തിൽ ഇല്ലാത്ത ബിന്ദുക്കളിൽ ഗ്രാഫിന് എന്തു സംഭവിക്കുന്നു എന്ന് നിരീക്ഷിക്കുക.

4. f എന്ന ഏകദം നിർവഹിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = \sqrt{(x-1)}$ എന്നായാൽ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

5. f എന്ന ഏകദം നിർവഹിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = |x - 1|$ എന്നായാൽ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

6. $f = \left\{\left(x, \frac{x^2}{1+x^2}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$, $\mathbf{R}$ ൽ നിന്ന് $\mathbf{R}$ ലേക്കുള്ള ഒരു ഏകദമാണ്. ഇതിന്റെ രംഗം കണ്ടുപിടിക്കുക.

> ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് വരച്ചു നോക്കുക.

7. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x - 3$ ആയാൽ $f + g$, $f - g$, $\frac{f}{g}$ കാണുക.

8. പൂർണസംഖ്യാഗണമായ $\mathbf{Z}$ ൽ നിന്നും അതിലേക്കുതന്നെയുള്ള ഒരു ഏകദത്തിന്റെ നിർവചനം $f(x) = ax + b$ എന്നാണ്. a, b ഇവ പൂർണസംഖ്യകളാണ്. $(1, 1), (2, 3), (0, -1), (-1, -3)$ എന്നിവ f ലെ അംഗങ്ങളായാൽ a, b എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

9. $\mathrm{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbf{N}, a = b^2\}$, $\mathbf{N}$ ൽ നിന്നും $\mathbf{N}$ ലേക്കുള്ള ഒരു ബന്ധമാണ്. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഉത്തരം സാധൂകരിക്കുക.

   (i) $a \in \mathbf{N}$ ആയാൽ $(a, a) \in \mathrm{R}$ ആയിരിക്കും

   (ii) $(a, b) \in \mathrm{R}$ ആയാൽ $(b, a) \in \mathrm{R}$ ആയിരിക്കും

   (iii) $(a, b) \in \mathrm{R}$, $(b, c) \in \mathrm{R}$, ആയാൽ $(a, c) \in \mathrm{R}$ ആയിരിക്കും

10. $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathrm{B} = \{1, 5, 9, 11, 15, 16\}$, $f = \{(1, 5), (2, 9), (3, 1), (4, 5), (2, 11)\}$ ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം സാധൂകരിക്കുക.

   i) A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കുള്ള ഒരു ബന്ധമാണ് f.

   ii) A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കുള്ള ഒരു ഏകദമാണ് f.

11. $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ന്റെ ഒരു ഉപഗണമായ f ന്റെ നിർവചനം ഇങ്ങനെയാണ്

   $f = \{(ab, a + b) : a, b \in \mathbf{Z}\}$

   f എന്നത് $\mathbf{Z}$ നിന്നും $\mathbf{Z}$ ലേക്കുള്ള ഒരു ഏകദമാണോ? എന്തുകൊണ്ട്?

12. $A = \{9, 10, 11, 12, 13\}$, $f: A \to \mathbf{N}$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ നിർവചനം ഇങ്ങനെയാണ്, $f(n) = n$ ന്റെ ഏറ്റവും വലിയ അഭാജ്യ ഘടകം. f ന്റെ രംഗം കണ്ടുപിടിക്കുക.

സംഗ്രഹം

ഈ അധ്യായത്തിൽ ബന്ധങ്ങളെയും ഏകദങ്ങളെയും കുറിച്ചാണ് പഠിച്ചത്. അതിന്റെ പ്രധാനപ്പെട്ട സവിശേഷതകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

- **ക്രമജോടികൾ** ഒരു ജോടി അംഗങ്ങളെ പ്രത്യേക ക്രമത്തിൽ തരംതിരിച്ചിരിക്കുന്നു.
- **കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം :** A, B എന്നീ ഗണങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണിതം $A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$

  കൂടാതെ, $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R}\}$

  അതുപോലെ, $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z): x, y, z \in \mathbf{R}\}$
- $(a, b) = (x, y)$, ആയാൽ $a = x$, $b = y$ ആണ്.
- $n(A) = p$, $n(B) = q$ ആയാൽ $n(A \times B) = pq$.
- $A \times \phi = \phi$ ആണ്.
- പൊതുവായി $A \times B \neq B \times A$.
- **ബന്ധങ്ങൾ :** ഗണം A യിൽ നിന്നും ഗണം B യിലേക്കുള്ള ഒരു ബന്ധം R, കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണിതം $A \times B$ യുടെ ഒരു ഉപഗണമായിരിക്കും. ഇത് $A \times B$ യിലുള്ള ഒരു ക്രമജോടിയിലെ ഒന്നാമത്തെ അംഗത്തെയും രണ്ടാമത്തെ അംഗത്തെയും തമ്മിൽ ചേർക്കുന്ന ഒരു ബന്ധത്തിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്നതാണ്.
- **പ്രതിബിംബം :** $(x, y) \in R$ ആണെങ്കിൽ y യെ x ന്റെ R ലെ പ്രതിബിംബം എന്നു പറയാം.
- **മണ്ഡലം :** R എന്ന ബന്ധത്തിലെ ക്രമജോടികളിലെ ഒന്നാം അംഗങ്ങളുടെ ഗണത്തെ R ന്റെ മണ്ഡലം എന്നു പറയുന്നു.
- **രംഗം :** R എന്ന ബന്ധത്തിലെ ക്രമജോടികളിലെ രണ്ടാം അംഗങ്ങളുടെ ഗണത്തെ R ന്റെ രംഗം എന്നു പറയുന്നു.
- **ഏകദം :** ഗണം A യിൽ നിന്നും ഗണം B യിലേക്കുള്ള ഒരു ബന്ധത്തിൽ A യിലെ ഓരോ അംഗത്തിനും B യിൽ ഒരു പ്രതിബിംബം മാത്രം ഉണ്ടാകുകയാണെങ്കിൽ ആ ബന്ധത്തെ ഏകദം എന്നു പറയുന്നു.

  ഇതിനെ $f: A \to B$, $f(x) = y$ എന്നു എഴുതുന്നു.

- ഗണം A യെ f ന്റെ മണ്ഡലം എന്നും ഗണം B യെ സഹമണ്ഡലം എന്നും പറയുന്നു.
- ഒരു ഏകദത്തിന്റെ രംഗം പ്രതിബിംബങ്ങളുടെ ഗണമാണ്.
- ഒരു രേഖീയഏകദത്തിന് രേഖീയസംഖ്യയുടെ ഗണമോ അതിന്റെ ഉപഗണമോ മണ്ഡലമായും രംഗമായും വരും.
- ഏകദങ്ങളുടെ ബീജഗണിതം

  ഏകദങ്ങൾ $f : \mathrm{X} \to \mathbf{R}$, $g : \mathrm{X} \to \mathbf{R}$, ആയാൽ

$$(f + g)\,(x) = f\,(x) + g(x),\ x \in \mathrm{X}$$
$$(f - g)\,(x) = f\,(x) - g(x),\ x \in \mathrm{X}$$
$$(f.g)\,(x) = f\,(x)\,.g\,(x),\ x \in \mathrm{X}$$
$$(kf)\,(x) = k\,f\,(x),\ x \in \mathrm{X},\ k \in \mathbf{R}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ x \in \mathrm{X},\ g(x) \neq 0$$

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ഏകദം എന്ന വാക്ക് ആദ്യമായി ഉപയോഗിച്ചത് ലാറ്റിൻ കൈയെഴുത്ത് കൃതിയായ ലബ്നിറ്റ്സിന്റെ "മെതോഡസ് റ്റാൻജന്റിയം ഇൻവേഴ്സാ സ്യൂ ഡീ ഫംഗ്ഷനിബസ്" (1646 - 1716) ലാണ്. 1698 ജൂലൈ 5-ന് ജോഹൻ ബെർണോളി ലെബനിറ്റ്സിനെഴുതിയ കത്തിലാണ് ഏകദം എന്നവാക്ക് പ്രയോഗിച്ചത്. ആ വാക്ക് ഗണിത ആശയത്തിൽ സ്വീകരിച്ച് കൊണ്ട് ലബ്നിറ്റ്സ് മറുപടി എഴുതി. 1779-ൽ ഇംഗ്ലണ്ടിലെ ചേമ്പേഴ്സ് സൈക്ലോപീഡിയയിൽ ഏകദം എന്ന വാക്ക് ചേർക്കുകയും അത് ബീജഗണിതത്തിലും വിശ്ലേഷണ ഗണിതത്തിലും പ്രയോഗത്തിൽ കൊണ്ടുവരികയും ചെയ്തു.

E2M9X2

അധ്യായം 3

ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ
(TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

❖ *ഒരു ഗണിതജ്ഞന് ഒരു പ്രശ്നം എങ്ങനെ പരിഹരിക്കാമെന്നറിയാം, എന്നാൽ പരിഹരിക്കാനാവില്ല - മിൽനെ* ❖

3.1 ആമുഖം

ആര്യഭട്ട
(476-550)

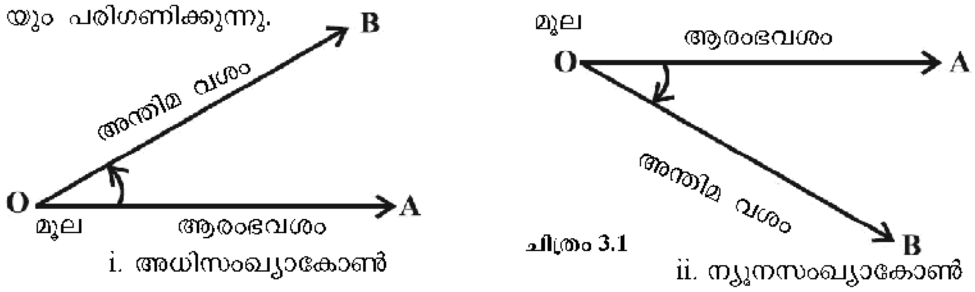
ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ അളവും, വശങ്ങളുടെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനമാണ് ത്രികോണമിതി. ചരിവിന്റെയും, വിരിവിന്റെയും, തിരിവിന്റെയുമെല്ലാം അളവായിട്ടാണ് കോണളവുകൾ ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് എന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ട്. ചരിത്രത്തിൽ ചരിവിന്റെ അളവുകൾ ആദ്യം വരുന്നത് ഭൂമിയിലെ പലതരം നിർമാണങ്ങളിലാണ്. തിരിവിന്റെ അളവുകൾ ആകാശ ഗോളങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിലും.

ഭൂമിയിലെ ആവശ്യങ്ങൾക്കു വേണ്ടിയാണ് ആദ്യകാല വാനശാസ്ത്രപഠനങ്ങൾ നടന്നത്. കൃഷിക്കു കാലാവസ്ഥയുമായും കാലാവസ്ഥക്കു സൂര്യനു ചുറ്റുമുള്ള ഭൂമിയുടെ ഭ്രമണവുമായും ബന്ധമുണ്ട്. അതുകൊണ്ട് ഭൂമിയിൽ ഭക്ഷ്യവസ്തുക്കളുടെ ഉൽപാദനത്തെക്കുറിച്ചു പഠിക്കണമെങ്കിൽ ഗ്രഹങ്ങളുടെയും നക്ഷത്രങ്ങളുടെയുമെല്ലാം സ്ഥാനം നിശ്ചയിക്കാനറിയണം. പ്രാചീന കാർഷിക സംസ്കാരങ്ങളിലെല്ലാം വാനശാസ്ത്രം ഒരു പ്രധാന പഠനവിഷയമാണ്. അതിനൊക്കെ ഗണിതവും, വിശേഷാൽ ത്രികോണമിതിയും അത്യാവശ്യമാണ്.

മുൻ ക്ലാസുകളിൽ ഒരു ത്രികോണവും അതിന്റെ കോണുകളും വശങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ പരിചയപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഒരു പ്രത്യേക ന്യൂനകോണിനെ ആസ്പദമാക്കി അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിൽ പല രീതികളിൽ ഹരിച്ച് sin, cos, tan എന്നീ അളവുകൾ നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇവ ഉപയോഗിച്ച് അകലം, ഉയരം, ചരിവിന്റെ അളവ് എന്നിവ കണക്കാക്കുവാനും മനസിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിൽ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വേറെയും അംശബന്ധങ്ങൾ ഉണ്ട്. അവയ്ക്കും ത്രികോണമിതിയിൽ പേരുകളുണ്ട്. ഒരു കോണിന്റെ sin, cos എന്നിവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾക്ക് യഥാക്രമം cosecant, secant എന്നിങ്ങനെയാണ് പേരുകൾ. അതുപോലെ tan വ്യുൽക്രമത്തിന് cotangent എന്നും പറയുന്നു. ഇവയെ ചുരുക്കത്തിൽ യഥാക്രമം cosec, sec, cot എന്നിങ്ങനെയാണ് എഴുതുന്നത്. ഇത്തരത്തിലുള്ള പുതിയ ആശയങ്ങളും, ത്രികോണമിതി അംശബന്ധത്തിൽ നിന്നും ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങൾ എന്ന ആശയത്തിലേക്കുള്ള പരിണാമം എന്നിവയാണ് ഇവിടെ പരാമർശിക്കുന്നത്.

3.2 കോണുകൾ (Angles)

ഒരു രശ്മി (Ray) അതിന്റെ നിശ്ചിതസ്ഥലത്തു നിന്നും എത്ര കറങ്ങി എന്നതിന്റെ അളവാണ് കോൺ. ഈ കറക്കത്തിന്റെ ദിശ അപ്രദക്ഷിണമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ കോണളവ് അധിസംഖ്യയായും കറക്കം പ്രദക്ഷിണമാണെങ്കിൽ ന്യൂനസംഖ്യയായും പരിഗണിക്കുന്നു.



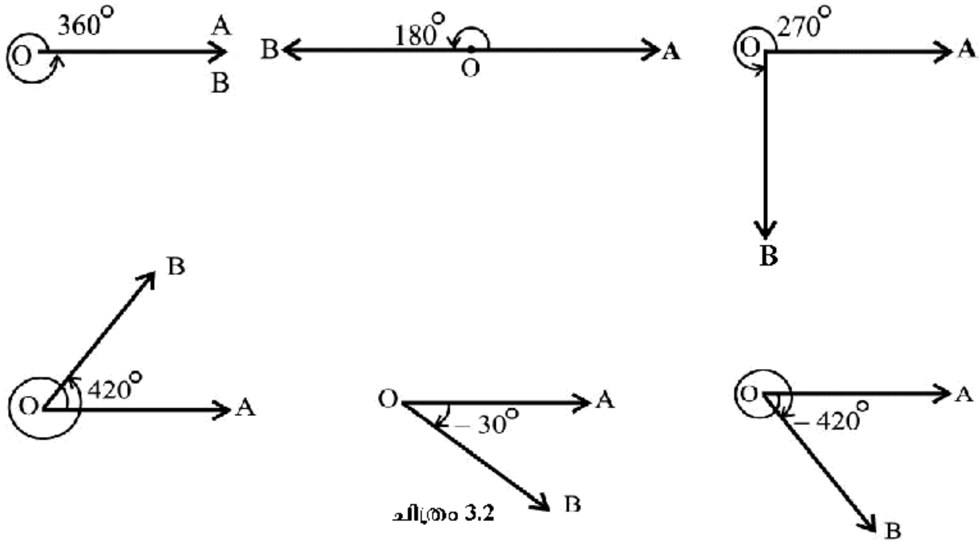
ചിത്രം 3.1

ഇനി കോണളക്കുവാനുള്ള രണ്ട് വ്യത്യസ്ത യൂണിറ്റുകൾ പരിചയപ്പെടാം.

3.2.1 ഡിഗ്രിഅളവ് (Degree Measure)

ഒരു രശ്മി അതിന്റെ നിശ്ചിതസ്ഥലത്തു നിന്നും കറങ്ങി വീണ്ടും ആരംഭിച്ച സ്ഥലത്തെത്തുകയാണെങ്കിൽ ഒരു ഭ്രമണം പൂർത്തിയാക്കി എന്നു പറയാം. ഇങ്ങനെ ഒരു ഭ്രമണത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോണളവിനെ മൂല ആധാരമാക്കി, 360 തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഒരു ഭാഗത്തെ ഒരു ഡിഗ്രി എന്ന് പറയുന്നു. ഒരു ഡിഗ്രിയെ 60 മിനിറ്റായും ഒരു മിനിറ്റിനെ വീണ്ടും 60 സെക്കന്റായും വിഭജിച്ചിട്ടുണ്ട്.

അതായത്; $1° = 60'$, $1' = 60''$



ചിത്രം 3.2

ചിത്രം 3.2 ൽ 360°, 180°, 270°, 420°, – 30°, – 420° എന്നീ അളവുകൾ വരുന്ന കോണുകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.

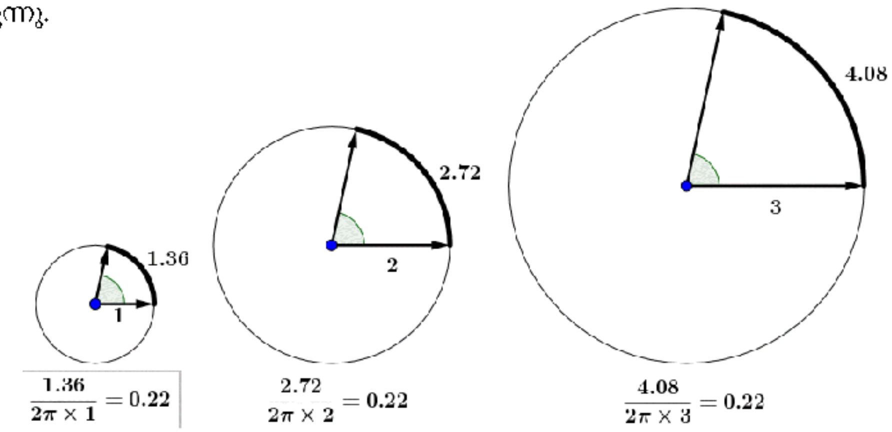
3.2.2 റേഡിയൻ അളവ് (Radian Measure)

ചിത്രം 3.3

ഒരു ക്ലോക്കിലെ മിനിറ്റ് സൂചി ഒരു മണിക്കൂറുകൊണ്ട് ഒരു ഭ്രമണം പൂർത്തിയാക്കുന്നു എന്ന് നമുക്കറിയാം. അപ്പോൾ ഈ സൂചിയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും ഒരു മണിക്കൂറു കൊണ്ട് ഓരോ വൃത്തം ഉണ്ടാക്കുന്നു.

ഇവിടെ 10 മിനിറ്റ് കൊണ്ട് ഈ ബിന്ദുക്കൾ അതാതു വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗമാണ് കറങ്ങുന്നത്. 30 മിനിട്ടാണ് സൂചി കറങ്ങിയതെങ്കിൽ ഈ ബിന്ദുക്കൾ കറങ്ങിയത് അതാത് വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗമാണ്. ഈ ആശയം മറ്റൊരുരീതിയിൽ മനസ്സിലാക്കാം.

ചിത്രത്തിൽ വ്യത്യസ്ത ആരമുള്ള വൃത്തങ്ങളിൽ ഒരേ അളവുള്ള കോൺ വരച്ചിരിക്കുന്നു.



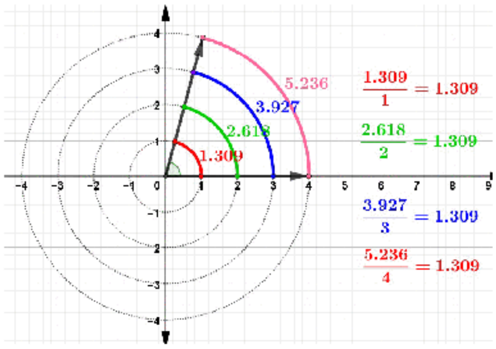
ചിത്രം 3.4

ഇവിടെ ചാപത്തിന്റെ നീളം വ്യത്യാസമാണെങ്കിലും അവ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ ഭാഗമായി കണക്കാക്കിയാൽ തുല്യമാണ്. അതായത് ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കോണളവിനകത്തുള്ള ചാപത്തിന്റെ നീളം അതാതു വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവിന്റെ ഒരേ ഭാഗമാണ്. ഒരു വൃത്തത്തിലെ നിശ്ചിത കോണളവിന് '$\frac{\text{ചാപത്തിന്റെ നീളം}}{\text{വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്}}$' ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായിരിക്കും.

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നും അതിലെ ഒരു കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ചാപത്തിന്റെ നീളം l എന്നും പരിഗണിക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക.

$$\frac{l}{2\pi r} = \text{ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ}$$

ഇവിടെ വ്യത്യസ്ത വൃത്തങ്ങൾ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ ചാപവും (l) ആരവും (r) മാത്രമാണ് മാറുന്നത്.



ചിത്രം 3.5

അതായത് $\frac{l}{r}$ = ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ എന്ന് ചുരുക്കത്തിൽ എഴുതാം.

പ്രാചീന ഗ്രീസിലെയും ഭാരതത്തിലെയും ചില കണക്കുകൂട്ടലുകളിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന ഈ ആശയം ഇത്തരത്തിൽ അവതരിപ്പിക്കപ്പെട്ടത് പത്തൊമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ്. ഇതിനെ കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ് എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഒരു യൂണിറ്റ് ആരമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ ആരത്തിന് തുല്യമായ ചാപം ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ അളവ് ഒരു റേഡിയൻ.

കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ് $= \frac{l}{r}$

ചുരുക്കി പറഞ്ഞാൽ കോണിനുള്ളിലെ ചാപം വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ് ഡിഗ്രി അളവ്. ഈ ചാപം ആരത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ് കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ്.

θ റേഡിയൻ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $\theta = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r\theta$ എന്ന് കാണാവുന്നതാണ്.

a, b എന്ന number slider റുകൾ നിർമ്മിക്കാം. a : Min : 1, Max : 5, increment : 1; b : Min : 0, Max : 2pi. Circle with Center and Radius എന്ന tool ഉപയോഗിച്ച് ആധാരബിന്ദു (A) കേന്ദ്രമായി വരുന്ന യൂണിറ്റ് ആരമുള്ള വൃത്തം വരക്കാം. Intersect tool ഉപയോഗിച്ച് x അക്ഷത്തിന്റെയും വൃത്തത്തിന്റെയും സംഗമബിന്ദുക്കൾ കാണാം (B, C). Angle with given size എന്ന tool ഉപയോഗിച്ച് ബിന്ദു C, ബിന്ദു B എന്നിവയിൽ click ചെയ്ത് കോൺ b കൊടുത്ത് C′ എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്താം. A, C, C′ എന്നീ ബിന്ദു ഉപയോഗിച്ച് Circlular Arc tool കൊണ്ട് ഒരു ചാപം നിർമ്മിക്കാം. ഇപ്പോൾ Algebra view ൽ, conic ൽ ചാപത്തിന്റെ നീളം (d) കാണാൻ കഴിയും. ഇതിന്റെ object properties എടുത്ത് നിറം, ഘനം മാറ്റുന്നത് നന്നാവും. ഒരു നിശ്ചിത കോണളവിന് വൃത്തത്തിലെ ചാപത്തിന്റെ നീളവും ആരത്തിന്റെ നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $\left(\frac{d}{r}\right)$ കണ്ടെത്തുക. ആരം വർധിപ്പിച്ച് ഈ അംശബന്ധത്തിന്റെ സ്വഭാവം മനസ്സിലാക്കാം.

3.2.3 ഡിഗ്രിയും റേഡിയനും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

മേൽ വിശദീകരിച്ചതു പ്രകാരം

$$\Rightarrow \text{കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവ്} = \frac{l}{2\pi r}\times 360 = \frac{360}{2\pi}\times\frac{l}{r}$$

$$= \frac{360}{2\pi}\times\theta \text{ റേഡിയൻ}$$

$$= \frac{180}{\pi}\times\theta \text{ റേഡിയൻ}$$

$$1\text{റേഡിയൻ} = \frac{180^\circ}{\pi}\times\ 57^\circ\ 16' \quad (\text{ഏകദേശം})$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0.01746\ (\text{ഏകദേശം})$$

പൊതുവായ ചില കോണുകളുടെ ഡിഗ്രി അളവും അവയുടെ റേഡിയൻ അളവും ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഡിഗ്രി	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
റേഡിയൻ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

സാധാരണരീതിയിൽ കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവിനെ θ° എന്നും റേഡിയൻ അളവിനെ θ എന്നും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$$\text{റേഡിയൻ അളവ്} = \frac{\text{ഡിഗ്രി അളവ്}}{180^\circ}\times\pi$$

$$\text{ഡിഗ്രി അളവ്} = \frac{\text{റേഡിയൻ അളവ്}}{\pi}\times 180^\circ$$

ഉദാഹരണം: 1

$40^\circ\ 20'$ ഡിഗ്രി അളവിനെ റേഡിയൻ അളവിലേക്ക് മാറ്റി എഴുതുക.

പരിഹാരം

$$40^\circ\ 20' = 40\ \frac{1}{3}^\circ = \frac{\pi}{180}\times\frac{121}{3}\text{ റേഡിയൻ} = \frac{121\pi}{540}\text{ റേഡിയൻ}$$

ഉദാഹരണം: 2

6 റേഡിയൻ അളവിനെ ഡിഗ്രി അളവിലേക്ക് മാറ്റി എഴുതുക.

പരിഹാരം

π റേഡിയൻ $= 180°$.

6 റേഡിയൻ $= \dfrac{6}{\pi} \times 180° \approx \dfrac{1080 \times 7}{22}$ ഡിഗ്രി $\left[\pi = \dfrac{22}{7}\right]$

$= 343\dfrac{7}{11}$ ഡിഗ്രി $= 343° + \dfrac{7 \times 60}{11}$ മിനിട്ട്

[$1° = 60'$ ആയതിനാൽ]

$= 343° + 38' + \dfrac{2}{11}$ മിനിട്ട് [$1' = 60''$]

$= 343° + 38' + 10.9'' = 343° 38' 11''$

6 റേഡിയൻ $\approx 343°\ 38'\ 11''$ (ഏകദേശം)

ഉദാഹരണം: 3

ഒരു വൃത്തത്തിലെ 37.4 സെ.മീ. നീളമുള്ള ചാപം 60° കേന്ദ്രകോൺ ഉണ്ടാക്കുന്നു എങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം കാണുക.

പരിഹാരം

$l = 37.4$ സെ.മീ., $\theta = 60° = \dfrac{60°}{180} \times \pi$ റേഡിയൻ $= \dfrac{\pi}{3}$

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം, $r = \dfrac{l}{\theta}$, ആയതിനാൽ

$$r = \frac{37.4 \times 3}{\pi} = \frac{37.4 \times 3 \times 7}{22} = 35.7 \text{ സെ.മീ.}$$

ഉദാഹരണം: 4

ഒരു വാച്ചിലെ മിനിറ്റ് സൂചിക്ക് 1.5 സെ.മീ. നീളമുണ്ട്. 40 മിനിറ്റ് കഴിയുമ്പോൾ സൂചിയുടെ അറ്റം സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം എത്ര?

പരിഹാരം

$$l = r\,\theta = 1.5 \times \frac{4\pi}{3} \text{ സെ.മീ.} = 2\pi \text{ സെ.മീ.} = 2 \times 3.14 \text{ സെ.മീ.} = 6.28 \text{ സെ.മീ.}$$

ഉദാഹരണം: 5

2 വ്യത്യസ്ത വൃത്തങ്ങളിലേ ഒരേ നീളമുള്ള ചാപം കേന്ദ്രത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ യഥാക്രമം 65°, 110° ആണെങ്കിൽ അവയുടെ ആരങ്ങളുടെ അനുപാതം കാണുക.

പരിഹാരം

$$\theta_1 = 65^\circ = \frac{65}{180} \times \pi = \frac{13\pi}{36}$$

$$\theta_2 = 110^\circ = \frac{110}{180} \times \pi = \frac{22\pi}{36} \text{ റേഡിയൻ}$$

$$l = r_1\theta_1 = r_2\theta_2,$$

$$\frac{13\pi}{36} \times r_1 = \frac{22\pi}{36} \times r_2, \text{ i.e., } \frac{r_1}{r_2} = \frac{22}{13}$$

$$r_1 : r_2 = 22 : 13.$$

പരിശീലനപ്രശ്നം : 3.1

1. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഡിഗ്രി അളവുകൾക്ക് സമാനമായ റേഡിയൻ അളവുകൾ കാണുക.

   (i) 25° (ii) $-47^\circ 30'$ (iii) 240° (iv) 520°

2. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന റേഡിയൻ അളവുകൾക്ക് സമാനമായ ഡിഗ്രി അളവുകൾ കാണുക.

   (i) $\frac{11}{16}$ (ii) -4 (iii) $\frac{5\pi}{3}$ (iv) $\frac{7\pi}{6}$

3. ഒരു ചക്രം ഒരു മിനിട്ടിൽ 360 തവണ കറങ്ങുന്നു എന്ന് കരുതുക. എങ്കിൽ ഒരു സെക്കൻഡിൽ എത്ര റേഡിയൻ തിരിയുന്നു എന്ന് കാണുക.
4. 100 സെന്റീമീറ്റർ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലെ 22 സെന്റീമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ കണക്കാക്കുക.
5. 40 സെന്റീമീറ്റർ വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ 20 സെന്റീമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ഞാണുണ്ട്. ഈ ഞാണുണ്ടാക്കുന്ന ചെറിയ ചാപത്തിന്റെ നീളം കാണുക.
6. രണ്ട് വ്യത്യസ്ത വൃത്തങ്ങളിൽ ഒരേ നീളമുള്ള ചാപങ്ങൾ യഥാക്രമം 60°, 75° കേന്ദ്രകോണുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നുവെങ്കിൽ അവയുടെ ആരങ്ങളുടെ അനുപാതം കാണുക.
7. 75 സെന്റീമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു പെൻഡുലത്തിന്റെ അറ്റം (i) 10സെ.മീ, (ii) 15സെ.മീ, (iii) 21 സെ.മീ ദൂരം സഞ്ചരിക്കുന്നു എങ്കിൽ അതിന് സമാനമായ കേന്ദ്രകോണുകളുടെ അളവ് റേഡിയനിൽ കാണുക.

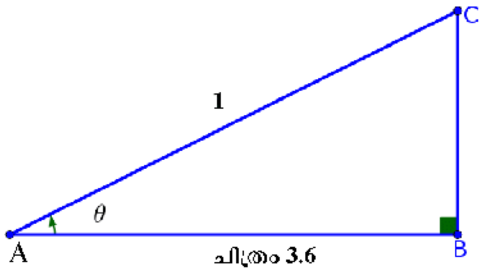
3.3 ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ (Trigonometric functions)

മുൻ ക്ലാസുകളിൽ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധമായിട്ടാണ് കണക്കാക്കിയിരുന്നത്. ഇങ്ങനെ പറയുമ്പോൾ

കോണളവ് $90°$ ക്ക് അപ്പുറത്തേക്ക് വരുമ്പോൾ ഈ അളവുകൾ പ്രസക്തിയില്ലാത്ത തായി അനുഭവപ്പെടും. ഇവിടെ ഒരു ബൃഹത്ത്കോണിന് എങ്ങനെയാണ് ത്രികോ ണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ നിർവചിക്കുന്നത്, അവയെ ഒരു രേഖീയ ഏകദങ്ങളായി നിർവചിക്കുന്നത് എങ്ങനെ, ഇവയുടെ ഗ്രാഫുകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ എന്നിവ വിശ ദീകരിക്കുന്നു.

3.3.1 sine, cosine ഏകദങ്ങൾ

ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിലെ ഒരു കോൺ അടിസ്ഥാനമാക്കി sine, cosine എന്നീ ത്രികോണമിതീയ അംശബന്ധത്തെക്കു റിച്ച് പത്താം ക്ലാസിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്.

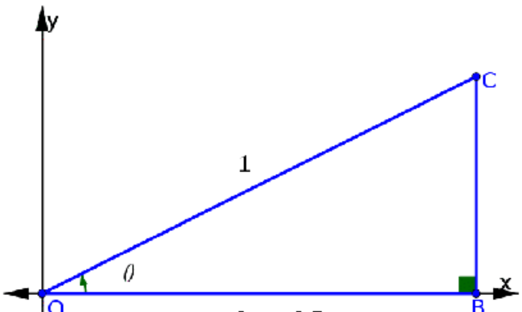


ചിത്രം 3.6

അതായത്; ΔABC ൽ

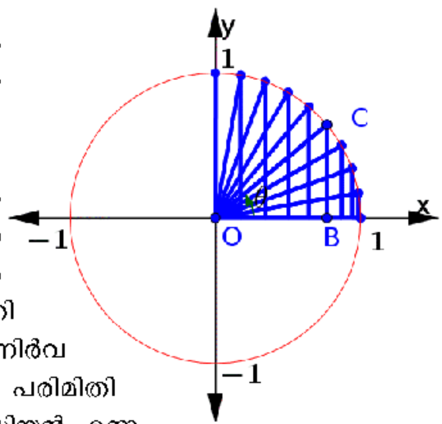
$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{1} = BC$$

$$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{1} = AB$$

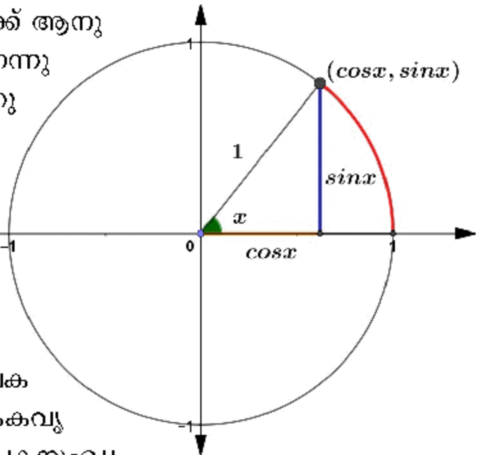


ചിത്രം 3.7

ഈ ത്രികോണത്തെ ചിത്രത്തിൽ കാണു ന്നതുപോലെ സൂചകാക്ഷത്തിലേക്ക് മാറ്റി വരക്കാം. ഇവിടെ OB = a, BC = b യും ആയാൽ C എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ (a, b) ആണ്. ഇവിടെ θ എന്ന കോണളവ് പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$ എന്നു ലഭിക്കും. എങ്കിൽ C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(\cos\theta, \sin\theta)$ ആയി മാറും. OC യുടെ നീളം ഒരു യൂണിറ്റായി നിലനിർത്തുകയും കോണ ളവ് (θ) വർധിപ്പിക്കുകയും ചെയ്താൽ C എന്ന ബിന്ദു ഒരു ഏകകവൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവായി കാണാം. θ യുടെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും വർധിച്ച് $90°$ എത്തുന്നതുവരെ ഈ രീതിയിൽ C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്താം പക്ഷെ $90°$ ക്ക് മുകളിലേക്ക് വരുമ്പോൾ മട്ടത്രി കോണം ഇല്ലാതാകുകയും അംശബന്ധങ്ങൾ നിർവ ചിക്കാൻ കഴിയാതെ വരുകയും ചെയ്യും. ഈ പരിമിതി മറികടക്കാൻ മുൻപ് പഠിച്ച കോണളവിന്റെ റേഡിയൻ എന്ന



ചിത്രം 3.8



ചിത്രം 3.9

ആശയം ഉപയോഗപ്പെടുത്താം. ഇവിടെ θ ക്ക് ആനുപാതികമായ ചാപത്തിന്റെ നീളം x ആണെന്നു കരുതുക. കൂടാതെ ഏകക വൃത്തമായതു കൊണ്ട് θ ക്ക് തുല്യമായ കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ് x ആകും. അങ്ങനെയെങ്കിൽ C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ ($\cos x$, $\sin x$) സൂചകസംഖ്യയായി മാറും. ഇങ്ങനെ വരുമ്പോൾ x ന്റെ വില $\frac{\pi}{2}$ ന് മുകളിലേക്ക് വരുമ്പോഴും C ക്ക് ($\cos x$, $\sin x$) എന്ന സൂചകസംഖ്യ ലഭിക്കുന്നു. അതായത് ഈ ഏകകവൃത്തത്തിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിന്റെയും സൂചകസംഖ്യ ($\cos x$, $\sin x$) ആണ്. ഇനി ചാപം അളക്കുന്നത് x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയിൽ നിന്നും പ്രദക്ഷിണമായിയാണെങ്കിൽ കോണിന്റെ വില ന്യൂനസംഖ്യയാകുകയും ഏകകവൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യ ($\cos(-x)$, $\sin(-x)$) ആയി മാറുകയും ചെയ്യും.

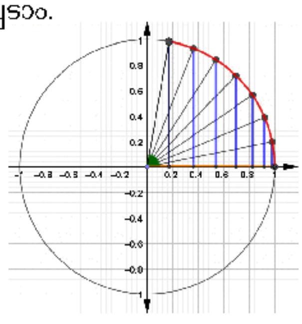
ഇങ്ങനെ $\sin x$, $\cos x$ ഇവ കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ x എന്ന സംഖ്യ 2π യെക്കാൾ വലുതോ -2π യെകാൾ ചെറുതോ ആണെങ്കിൽ വൃത്തം മുഴുവൻ ചുറ്റി എന്ന് കരുതണം. അതായത് $x \pm 2\pi$, $x \pm 4\pi$....... എന്നിവ വൃത്തത്തിലെ ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള ബിന്ദുവിനെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. അതായത് $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$,....... അങ്ങനെ വൃത്തത്തിലെ x നീളമുള്ള ചാപത്തിന്റെ അറ്റത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യ ($\cos x$, $\sin x$) എന്ന് കാണാം. അങ്ങനെയെങ്കിൽ x ന്റെ ഓരോ രേഖീയ സംഖ്യാവിലകൾക്കും സമാനമായ sine, cosine ലഭിക്കുന്നതിനാൽ ഇവയെ രേഖീയ ഏകദമായി പരിഗണിക്കാൻ കഴിയും.

$f(x) = \sin x;\ f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$g(x) = \cos x;\ g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

ഇനി $\sin x$, $\cos x$ ന്റെ വിലകളുടെ സ്വഭാവം പരിചയപ്പെടാം.

ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശം



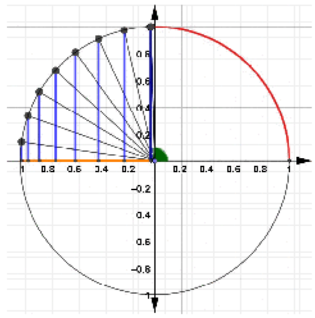
ചിത്രം 3.10

$\sin x$ ന്റെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും വർധിച്ച് $x = \frac{\pi}{2}$ ആകുമ്പോൾ 1 ൽ എത്തുന്നു.

$\cos x$ ന്റെ വില 1 ൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് $x = \frac{\pi}{2}$ ആകുമ്പോൾ പൂജ്യമാകുന്നു.

രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശം

$\sin x$ ന്റെ വില 1 ൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് $x = \pi$ ആകുമ്പോൾ പൂജ്യമാകുന്നു.
$\cos x$ ന്റെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് $x = \pi$ ആകുമ്പോൾ -1 ൽ എത്തുന്നു.

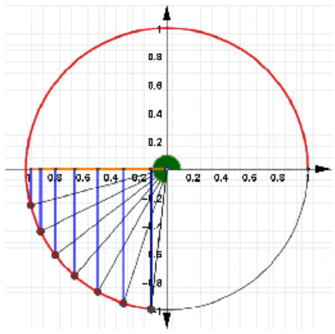


ചിത്രം 3.11

മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശം

$\sin x$ ന്റെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് $x = \frac{3\pi}{2}$ ആകുമ്പോൾ -1 ൽ എത്തുന്നു.

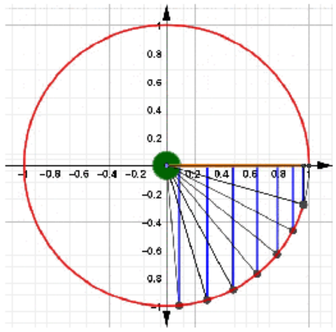
$\cos x$ ന്റെ വില -1 ൽ നിന്നും വർധിച്ച് $x = \frac{3\pi}{2}$ ആകുമ്പോൾ പൂജ്യത്തിൽ എത്തുന്നു.



ചിത്രം 3.12

നാലാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശം

$\sin x$ ന്റെ വില -1 ൽ നിന്നും വർധിച്ച് $x = 2\pi$ ആകുമ്പോൾ പൂജ്യത്തിൽ എത്തുന്നു.
$\cos x$ ന്റെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും വർധിച്ച് $x = 2\pi$ ആകുമ്പോൾ 1 ൽ എത്തുന്നു.



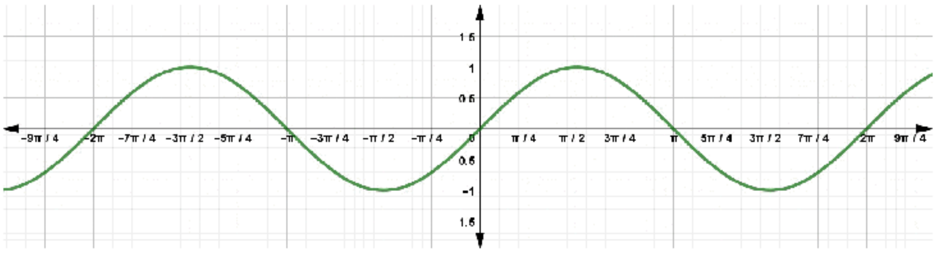
ചിത്രം 3.13

a [Min : 0, Max : 2pi, increment : $pi/20$] എന്ന number slider നിർമ്മിക്കുക. Circle with center and radius എന്ന tool ഉപയോഗിച്ച് ആധാരബിന്ദു (A) കേന്ദ്രമായി വരുന്ന ഒരു യൂണിറ്റ് ആരമുള്ള വൃത്തം വരക്കാം. Intersect tool ഉപയോഗിച്ച് x അക്ഷത്തിന്റെയും വൃത്തത്തിന്റെയും സംഗമബിന്ദുക്കൾ (B, C) കാണാം. Angle with given size എന്ന tool

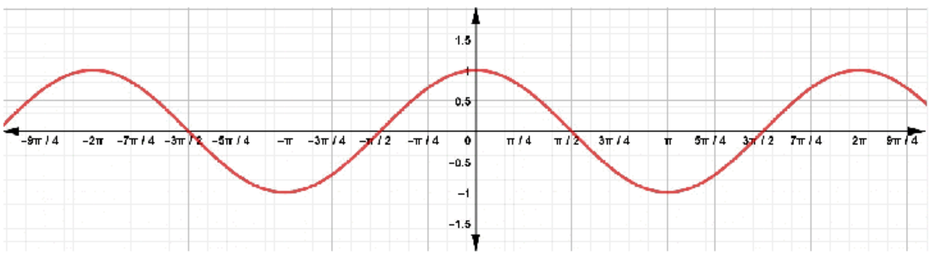
ഉപയോഗിച്ച് ബിന്ദു C, ബിന്ദു B എന്നിവയിൽ click ചെയ്ത് കോൺ α കൊടുത്ത് C' എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്താം. Perpendicular line എന്ന tool ഉപയോഗിച്ച് x അക്ഷത്തിന് ലംബമായി C' ലൂടെയുള്ള വര നിർമ്മിക്കാം. Intersect tool ഉപയോഗിച്ച് x അക്ഷത്തിന്റെയും ലംബവരയുടെയും സംഗമബിന്ദു (D) അടയാളപ്പെടുത്തിയതിനുശേഷം ലംബവര Hide ചെയ്യാം Polygon tool ഉപയോഗിച്ച് A, D, C', A ൽ click ചെയ്ത് ഒരു ത്രികോണം നിർമ്മിക്കാം. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബനീളം sin നും പാദനീളം cos മാണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കും A, C' എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്കും trace കൊടുക്കാം. ഇനി സ്ലൈഡറിന് Animation കൊടുത്താൽ sine, cosine എന്നീ ഏകദങ്ങളുടെ ഓരോ ചതുർത്ഥാംശത്തിലെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം.

ഇവിടെ $\sin x$, $\cos x$ ന്റെ വിലകൾ -1 നും 1 നും ഇടക്കാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. അതായത് $\sin x$, $\cos x$ ന്റെ രംഗം $[-1, 1]$ ആണ്. അങ്ങനെയെങ്കിൽ ഈ ഏകദങ്ങളെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ പുനർനിർണയിക്കാം.

$\sin : R \rightarrow [-1, 1]$, $\sin x$ ന്റെ ഗ്രാഫ്



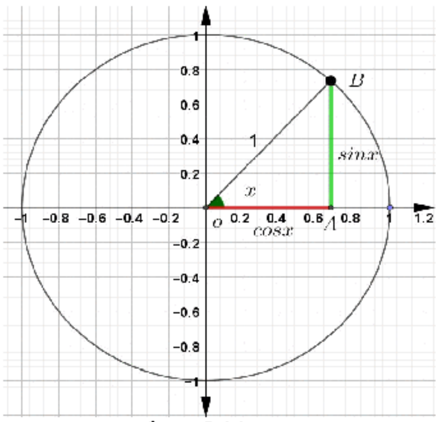
$\cos : R \rightarrow [-1, 1]$, $\cos x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് **ചിത്രം 3.14**



ചിത്രം 3.15

sine, cosine ഏകദങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതകൾ

- ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം പരിശോധിക്കാം.



ചിത്രം 3.16

ΔOAB എന്ന മട്ടത്രികകോണത്തിൽ പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ ചുവടെ ചേർത്തിരക്കുന്ന സർവസമവാക്യങ്ങൾ നിർവചിക്കാം.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

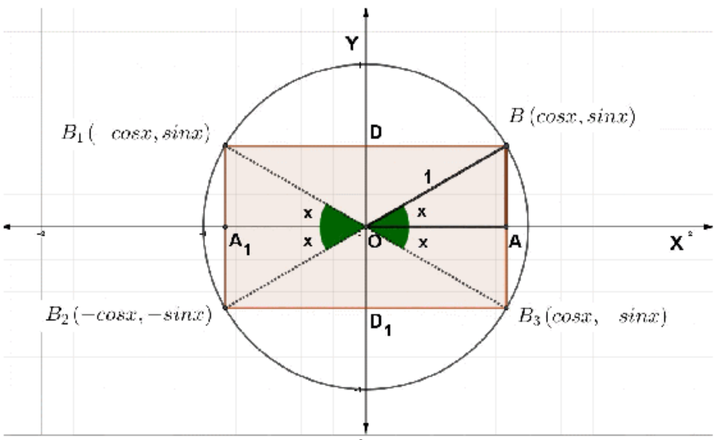
- x അക്ഷത്തിൽനിന്നും 'x' കോണളവിലുള്ള വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവായി B പരിഗണിക്കാം.

ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലെ B എന്ന ബിന്ദു $(\cos x, \sin x)$ ആണ്. സമാന ബിന്ദുക്കളായ, B_1, B_2, B_3 എന്നിവ $B_1(-\cos x, \sin x)$, $B_2(-\cos x, -\sin x)$, $B_3(\cos x, -\sin x)$ എന്നിങ്ങനെ എടുക്കാൻ കഴിയും. ΔAOB, ΔA_1OB_1, ΔA_1OB_2, ΔAOB_3 എന്നീ മട്ടത്രികോണങ്ങൾ സർവസമത്രികോണങ്ങളായതു കൊണ്ട് ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ആശയങ്ങൾ വ്യക്തമാണ്.

$\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$

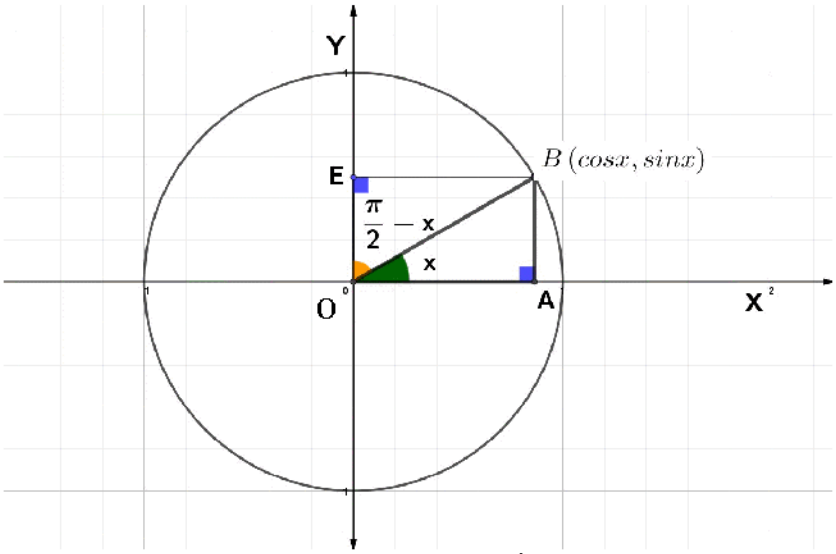
$\sin(\pi - x) = \sin x$; $\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\cos(\pi + x) = -\cos x$



ചിത്രം 3.17

- ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം പരിഗണിക്കാം.



ചിത്രം 3.18

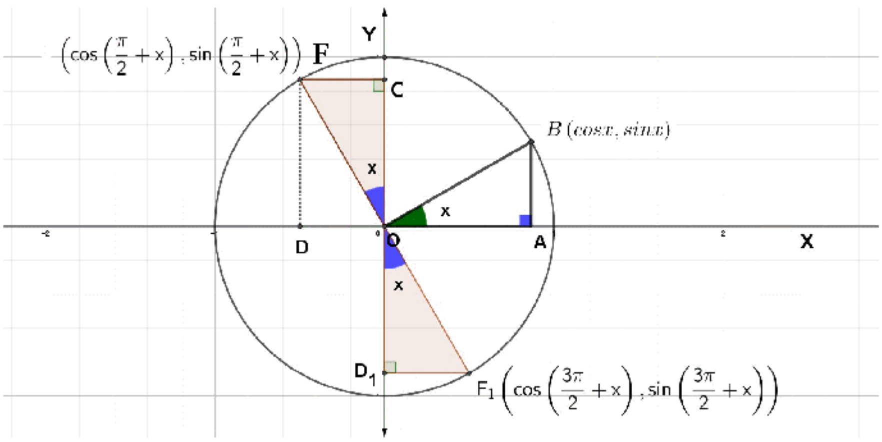
ഇവിടെ; AB = OE; OA = EB

അതായത്; sin$x$ = OE; cos$x$ = EB

മട്ടത്രികോണം ΔOEB എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{EB}{1}=EB=\cos x\ ;\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{OE}{1}=OE=\sin x$$

- ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം പരിഗണിക്കാം.



ചിത്രം 3.19

ചിത്രത്തിൽ രണ്ട് മട്ടത്രികോണങ്ങളുണ്ട്

ഇതിൽ $\angle AOB = \angle COF; OB = OF; \angle C = \angle A = \frac{\pi}{2}$

അതു കൊണ്ട് ΔOAB, ΔOCF സർവസമത്രികോണങ്ങളാണ്.

എങ്കിൽ AB = CF = OD; OA = OC = DF

മുൻ വിശദീകരണ പ്രകാരം

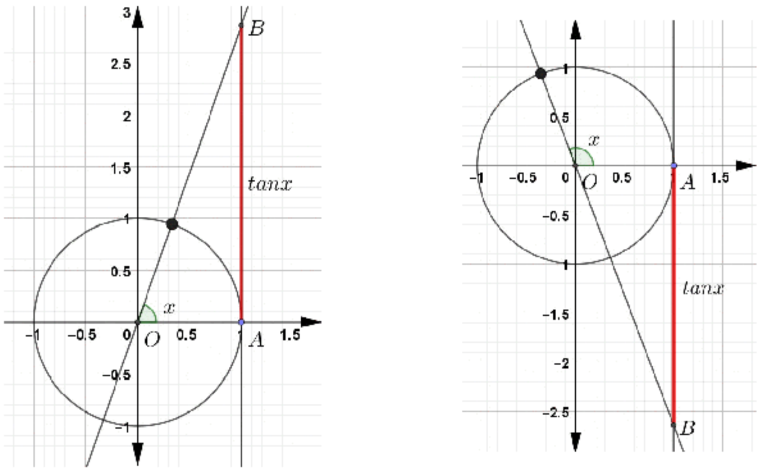
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = DF = OA = \cos x \; ; \; \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -OD = -AB = -\sin x$$

ഇതുപോലെ ചിത്രത്തിലെ ΔOAB, ΔOD_1F_1 എന്നീ മട്ടത്രികോണങ്ങൾ സർവസമ ത്രികോണങ്ങളാണ് എങ്കിൽ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\cos x$; $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \sin x$

3.3.2 tangent, secant ഏകദങ്ങൾ

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ എന്ന നിർവചനം മുൻ ക്ലാസുകളിൽ മനസിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. $\sin x$, $\cos x$ എന്നീ ഏകദങ്ങൾ നിർവചിച്ചതുപോലെ $\tan x$ സും നിർവചിക്കാൻ കഴിയും. പക്ഷെ x ന്റെ എല്ലാ വിലകൾക്കും $\tan x$ ന് വില ലഭിക്കുന്നില്ല. അതായത് $\cos x$ പൂജ്യമാകുന്ന x വിലകൾക്ക് (പൂജ്യം കൊണ്ടുള്ള ഹരണം നിർവചിച്ചിട്ടില്ലാത്തതു കൊണ്ട്) $\tan x$ നിർവചിച്ചിട്ടില്ല. x ന്റെ വില $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, ... എന്നിങ്ങനെ യുള്ള $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒറ്റ സംഖ്യാഗുണിതമാണെങ്കിൽ, $\cos x = 0$ ആകും. അതുകൊണ്ട് ഇത്തരം സംഖ്യകൾ ഒഴിച്ചുള്ള രേഖീയസംഖ്യകൾക്കാണ് $\tan x$ എന്ന ഏകദം നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത്. അതായത് $\tan x$ ന്റെ മണ്ഡലം $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z\right\}$ ആണ്.

ഇനി $\tan x$ ന്റെ വിലകളുടെ സ്വഭാവം മനസ്സിലാക്കുവാൻ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം ഉപയോഗിക്കാം.

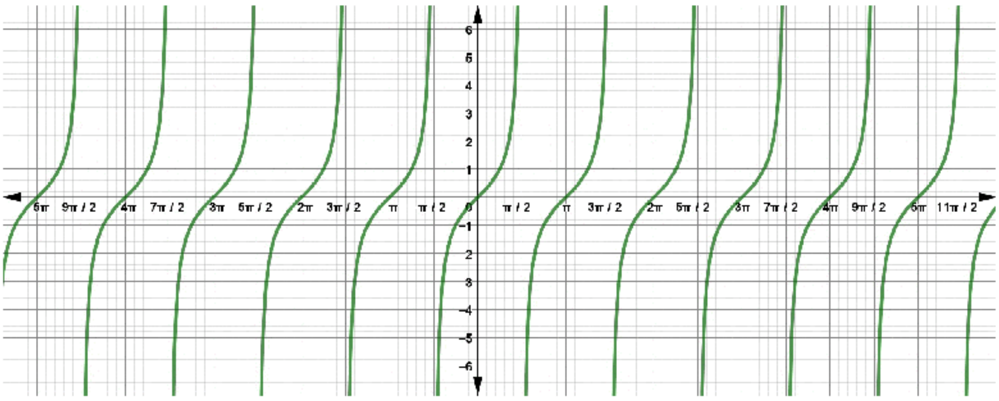


ചിത്രം 3.20

ചിത്രത്തിൽ ΔOAB ഒരു മട്ടത്രികോണമായതുകൊണ്ട് $\tan x = \dfrac{AB}{OA} = AB$. എങ്കിൽ B എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ $(1, \tan x)$ എന്ന് കാണാം. ഇവിടെ x ന്റെ വില പൂജ്യമാകുമ്പോൾ $\tan x$ ന്റെ വില പൂജ്യമാകുകയും x ന്റെ വില വർധിക്കുന്നത് അനുസരിച്ച് $\tan x$ ന്റെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും വേഗത്തിൽ അധിസംഖ്യയിലേക്ക് വർധിക്കുകയും ചെയ്യും. x ന്റെ വില $\dfrac{\pi}{2}$ നെക്കാൾ കൂടുതൽ ആകുമ്പോൾ, $\tan x$ ന്റെ വില വളരെ ചെറിയ ന്യൂനസംഖ്യയിൽ നിന്നും വേഗത്തിൽ വർധിക്കുന്നതായും ചിത്രത്തിൽ നിന്നും മനസ്സിലാക്കാം. അതായത് $x = \dfrac{\pi}{2}$ ന്റെ ഇടതും വലതും $\tan x$ വൈരുധ്യമുള്ള സ്വഭാവമാണ്. ഈ സ്വഭാവം $\dfrac{\pi}{2}$ ന്റെ എല്ലാ ഒറ്റ സംഖ്യാഗുണിതങ്ങൾക്കും ഉള്ളതായി കാണാം. അതായത് $\tan x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ രംഗം ഒരു രേഖീയ സംഖ്യാഗണമായി നിർവചിക്കാം. അങ്ങനെയെങ്കിൽ $\tan x$ എന്ന ഏകദത്തെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ നിർവചിക്കാം.

$$\tan : R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\, n \in Z\right\} \rightarrow R$$

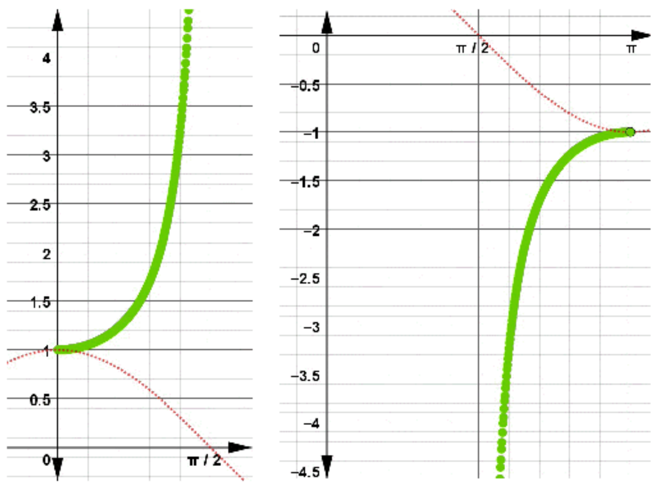
$\tan x$ ന്റെ ഗ്രാഫ്.



ചിത്രം 3.21

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ ആയതുകൊണ്ട് $\cos x$ പൂജ്യമാകുന്ന x വിലകൾക്ക് നിർവചിച്ചിട്ടില്ല. അതായത് $\tan x$ ന്റെ കാര്യത്തിൽ വിശദീകരിച്ചതുപോലെ ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z\right\}$ ആണ്. ഇനി $\sec x$ ന്റെ വിലകളുടെ സ്വഭാവം മനസ്സിലാക്കാം. $\cos x$ ന്റെ വ്യുൽക്രമമായതുകൊണ്ടും $\cos x$ ന്റെ രംഗം $[-1, 1]$ ആയതുകൊണ്ടും $\sec x$ ന്റെ വില $(-1, 1)$ ഇടയിൽ വരില്ല.

$\cos 0 = 1$ ൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ൽ എത്തുമ്പോൾ അതിന്റെ വ്യുൽക്രമം $\sec x$, 1 ൽ നിന്നും വളരെ വേഗത്തിൽ വർധിക്കുന്നതായി ചിത്രം 3.22 നിന്നും മനസ്സിലാക്കാം. അതുപോലെ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ൽ നിന്നും $\cos\pi = -1$ ൽ എത്തുമ്പോൾ $\sec x$ ന്റെ വില വളരെ ചെറിയ ന്യൂനസംഖ്യ



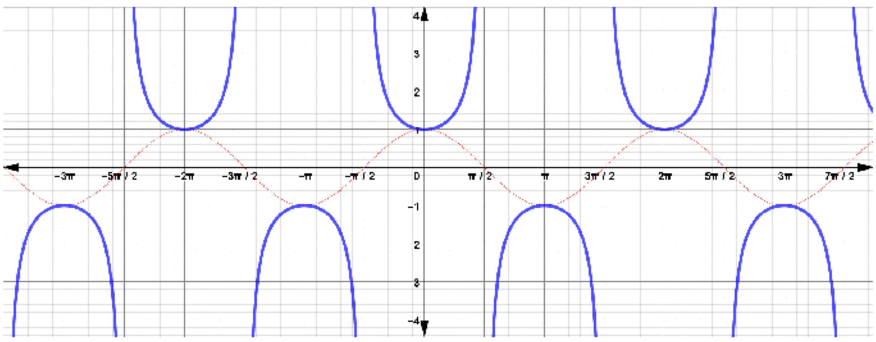
ചിത്രം 3.22

യിൽ നിന്നും വർധിച്ച് -1 ൽ എത്തുന്നതായും മനസ്സിലാക്കാം. $x = \frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഇടതും വലതും $\sec x$ ന് വൈരുധ്യമുള്ള സ്വഭാവമാണ്. ഈ ഒരു സ്വഭാവം $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യാ ഗുണിതങ്ങൾക്കുമുള്ളതായി കാണാൻ കഴിയും. ഇങ്ങനെയാണെങ്കിൽ $\sec x$ ന്റെ വില $(-1, 1)$ ഒഴിച്ചുള്ള രേഖീയസംഖ്യകൾ എടുക്കാം. അതായത് $\sec x$ ന്റെ രംഗം $R - (-1, 1)$ എന്ന് നിർവചിക്കാം.

$\sec x$ എന്ന ഏകദത്തെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ നിർവചിക്കാം.

$$\sec : R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in Z\right\} \to R - (-1, 1)$$

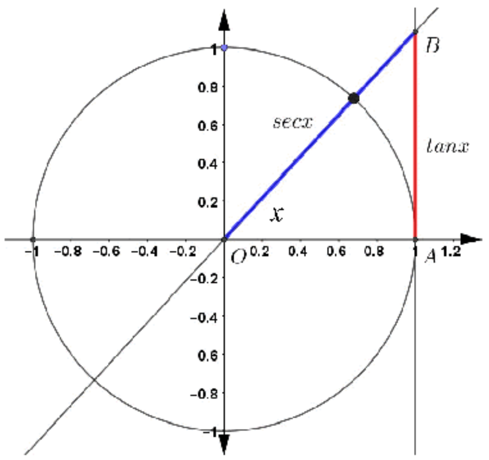
$\sec x$ ന്റെ ഗ്രാഫ്



ചിത്രം 3.23

tangent, secant എന്നീ ഏകദങ്ങളും ചില പ്രത്യേകതകളും

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ഏകകവൃത്തം (ചിത്രം) പരിശോധിക്കാം.



ചിത്രം 3.24

ചിത്രത്തിൽ മട്ടത്രികോണം ΔOAB യിൽ $AB = \tan x$, $OB = \sec x$ ആയതുകൊണ്ട് പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ ചുവടെ ചേർക്കുന്ന സർവസമവാക്യങ്ങൾ ലഭിക്കും.

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$
$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$
$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

- $$\tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin x}{-\cos x} = -\tan x$$

$$\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

$$\sec(\pi - x) = \frac{1}{\cos(\pi - x)} = \frac{1}{-\cos x} = -\sec x$$

$$\sec(\pi + x) = \frac{1}{\cos(\pi + x)} = \frac{1}{-\cos x} = -\sec x$$

- $$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{1}{-\sin x} = -\operatorname{cosec} x$$

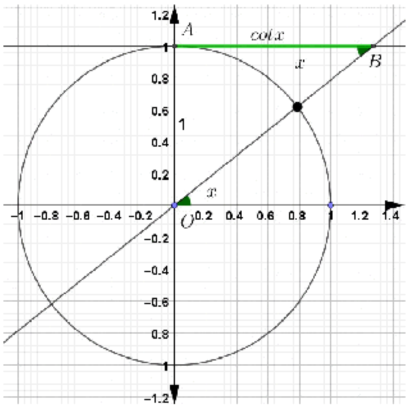
$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$$

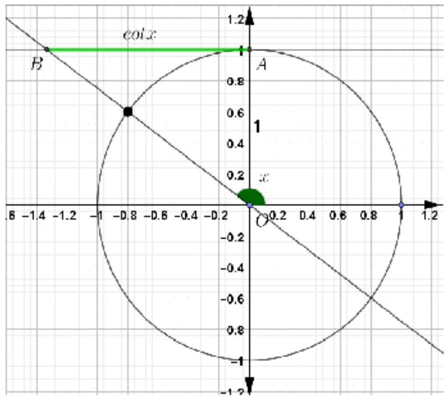
3.3.3 cotangent, cosecant ഏകദങ്ങൾ

$\tan x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമമായതുകൊണ്ട് $\cot x$ നെ $\dfrac{\cos x}{\sin x}$ എന്ന് നിർവചിക്കാം. ഇനി $\cot x$ എന്ന ഏകദം നിർവചിക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. പക്ഷെ x ന്റെ എല്ലാ വില കൾക്കും cot വില ലഭിക്കുകയില്ല. കാരണം ഛേദത്തിൽ $\sin x$ വരുന്നതുകൊണ്ട് അത് പൂജ്യമാകുന്ന x വിലകൾക്ക് cot നിർവചിക്കാൻ കഴിയില്ല. $\sin x$ പൂജ്യമാക്കുന്ന x വിലകളായ $0, \pm\pi, \pm 2\pi$,.......... എന്നിങ്ങനെയുള്ള π യുടെ പൂർണസംഖ്യ ഗുണിതങ്ങൾക്ക് $\cot x$ നിർവചിച്ചിട്ടില്ല. അങ്ങനെയങ്കിൽ $\cot x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡ

ലത്തിൽ നിന്നും ഈ വിലകൾ ഒഴിവാക്കണം. അതായത് $\cot x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം $R - \{n\pi, n \in Z\}$ എന്നാണ്.

ഇനി $\cot x$ ന്റെ വിലകളുടെ സ്വഭാവം പരിചയപ്പെടാം. അതിന് ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം ഉപയോഗിക്കാം.





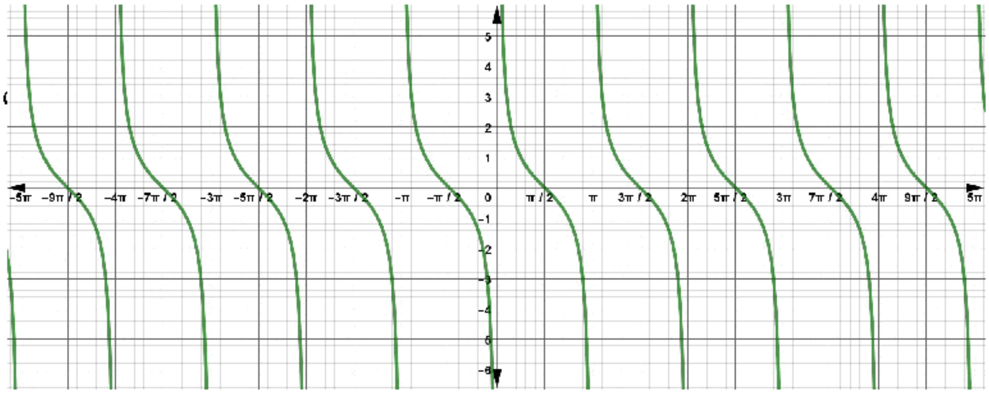
ചിത്രം 3.25

ചിത്രത്തിൽ ΔOAB ഒരു മട്ടത്രികോണമായതുകൊണ്ട് $\cot x = \dfrac{AB}{OA} = AB$

എങ്കിൽ B എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(\cot x, 1)$ എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ഇനി $x = 0$ ആകുമ്പോൾ $\cot x$ നിർവചിച്ചിട്ടില്ല എന്ന് മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ x പൂജ്യത്തിന് അടുത്തുനിന്നും വർധിച്ച് $x = \dfrac{\pi}{2}$ ആകുമ്പോൾ $\cot x$ ന്റെ വില വലിയ അധിസംഖ്യയിൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് പൂജ്യമാകുന്നു. ഇനി x ന്റെ വില $\dfrac{\pi}{2}$ നെക്കാൾ കൂടുതൽ ആകുമ്പോൾ $\cot x$ ന്റെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് x ന്റെ വില π ലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ വില വളരെ ചെറിയ ന്യൂനസംഖ്യയിലേക്ക് പോകുന്നതായി ചിത്രത്തിൽ നിന്നും മനസ്സിലാക്കാം. x ന്റെ വില π യെക്കാൾ കൂടുതൽ ആകുമ്പോൾ $\cot x$ ന്റെ വില വളരെ വലിയ അധിസംഖ്യയിൽ നിന്നും കുറഞ്ഞുവരുന്നതായി മനസ്സിലാക്കാം. അതായത് $x = \pi$ ന്റെ ഇടതും വലതും $\cot x$ ന് വൈരുധ്യമുള്ള സ്വഭാവം കാണിക്കുന്നു. ഈ സ്വഭാവം π യുടെ എല്ലാ പൂർണസംഖ്യാഗുണിതങ്ങൾക്കും ഉള്ളതായി മനസ്സിലാക്കാം. അങ്ങനെ $\cot x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ രംഗം ഒരു രേഖീയ സംഖ്യാഗണം.

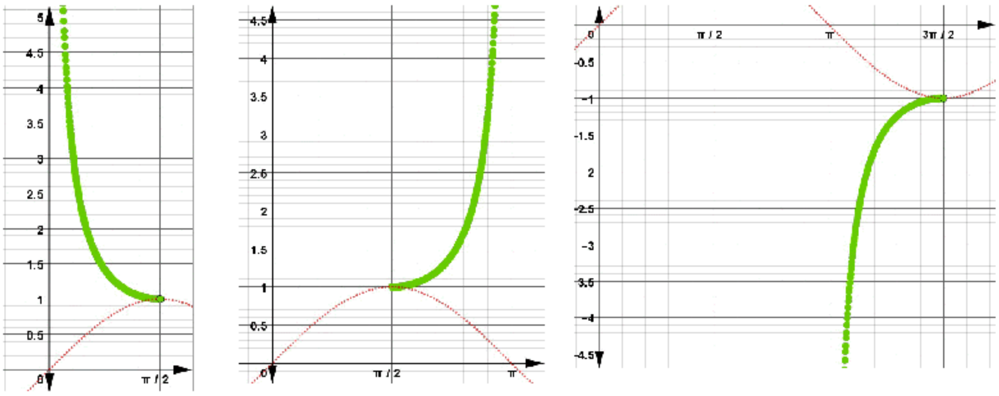
ഇനി $\cot x$ എന്ന ഏകദത്തെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ നിർവചിക്കാം.

$$\cot : R - \{n\pi, n \in Z\} \to R$$



ചിത്രം 3.26

$\cos ec\, x = \dfrac{1}{\sin x}$ ആയതുകൊണ്ട് $\sin x$ പൂജ്യമാകുന്ന x വിലകൾക്ക് നിർവചിച്ചിട്ടില്ല. അതായത് $\cot x$ ന്റെ കാര്യത്തിൽ വിശദീകരിച്ചതുപോലെ ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം $R - \{n\pi, n \in Z\}$ ആണ്. ഇനി cosec x ന്റെ വിലകളുടെ സ്വഭാവം മനസ്സിലാക്കാം. sin x ന്റെ വ്യുൽക്രമമായതുകൊണ്ടും sin x ന്റെ രംഗം $[-1, 1]$ ആയതുകൊണ്ടും cosec x ന്റെ വില $(-1, 1)$ ഇടയിൽ വരില്ല.



ചിത്രം 3.27

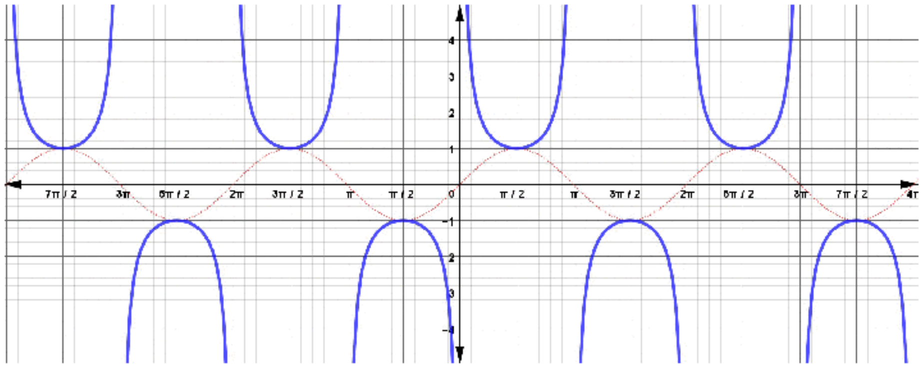
$\sin 0 = 0$ ൽ നിന്നും വർധിച്ച് $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$ ൽ എത്തുമ്പോൾ അതിന്റെ വ്യുൽക്രമം cosec x, വളരെ വില അധിസംഖ്യയിൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് 2 ൽ എത്തുന്നതായി കാണാം. അതുപോലെ $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$ നിന്നും $\sin \pi = 0$ ക്ക് അടുത്ത് എത്തുമ്പോൾ

cosec x ന്റെ വില 1 ൽ നിന്നും വർധിച്ച് വളരെ വലിയ അധിസംഖ്യയിലേക്ക് പോകുന്നതായി കാണാം. ഇനി $x = \pi$ കടക്കുമ്പോൾ $\sin x$ ന്യൂനസംഖ്യയാകുകയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമം cosec x വളരെ ചെറിയ ന്യൂനസംഖ്യയിൽ നിന്നും വർധിച്ചു വരുന്നതായും $x = \frac{3\pi}{2}$ ൽ എത്തുമ്പോൾ വില -1 ആകുകയും ചെയ്യുന്നു. അതായത് π യുടെ ഇടതും വലതും cosec x ന് വൈരുധ്യമുള്ള സ്വഭാവമാണ്. ഈ ഒരു സ്വഭാവം π യുടെ എല്ലാ പൂർണസംഖ്യാഗുണിതങ്ങൾക്കും കാണാൻ കഴിയും. ഇങ്ങനെയാണെങ്കിൽ cosec x ന്റെ വില $(-1, 1)$ ഒഴിച്ചുള്ള ഏത് രേഖീയസംഖ്യകളുമാകാം. അതായത്, cosec x ന്റെ രംഗം $R - (-1, 1)$ എന്ന് നിർവചിക്കാം.

cosec x എന്ന ഏകദത്തെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ നിർവചിക്കാം.

$$\operatorname{cosec}: R - \{n\pi, n \in Z\} \to R - (-1,1)$$

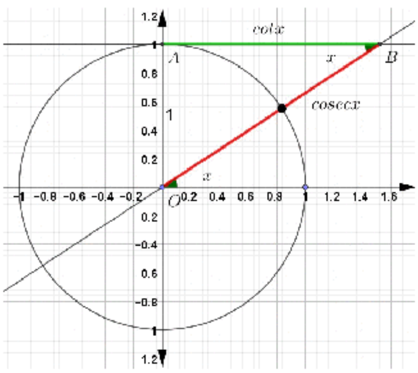
cosec x ന്റെ ഗ്രാഫ്



ചിത്രം 3.28

cotangent, cosecant എന്നീ ഏകദങ്ങളുടെ ചില പ്രത്യേകതകൾ

- ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ഏകക വൃത്ത ചിത്രം പരിശോധിക്കാം.



ചിത്രം 3.29

ചിത്രത്തിൽ മട്ടത്രികോണം ΔOAB യിൽ $AB = \cot x$, $OB = \operatorname{cosec} x$ ആയതുകൊണ്ട് പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സർവസമവാക്യങ്ങൾ ലഭിക്കും.

$$\operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x = 1$$
$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$$
$$\cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$$

- $$\cot(\pi - x) = \frac{\cos(\pi - x)}{\sin(\pi - x)} = \frac{-\cos x}{\sin x} = -\cot x$$

$$\cot(\pi + x) = \frac{\cos(\pi + x)}{\sin(\pi + x)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \cot x$$

$$co\sec(\pi - x) = \frac{1}{\sin(\pi - x)} = \frac{1}{\sin x} = co\sec x$$

$$co\sec(\pi + x) = \frac{1}{\sin(\pi + x)} = \frac{1}{-\sin x} = -co\sec x$$

- $$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$co\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

$$co\sec\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

a [Min : -10, Max : 10, Speed : 0.1] എന്ന number slider നിർമ്മിക്കാം. Graphics $\rightarrow x$ Axis $\rightarrow$ Distance ൽ $pi/4$ കൊടുക്കുമ്പോൾ x അക്ഷത്തിൽ $\frac{\pi}{4}$ ന്റെ പൂർണാങ്കഗുണിതങ്ങളായി മാറും. (a, sin (a)) എന്ന input command നൽകി ഒരു ബിന്ദു (A) അടയാളപ്പെടുത്തുകയും അതിന് trace കൊടുക്കുകയും ചെയ്യാം. ഇനി സ്ലൈഡറിന് അനിമേഷൻ കൊടുത്താൽ sine ന്റെ ഗ്രാഫ് കിട്ടും. Input ൽ sin(x) എന്ന് കൊടുത്ത് ഈ ഏകദ

ത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം. ഇതുപോലെ;

- (a, cos (a)); cos (x) എന്നീ input command കൾ നൽകി cosine എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം.
- (a, tan(a)); tan(x) എന്നീ input command കൾ നൽകി tangent എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം.
- (a, sec (a)), sec (x), cos (x) എന്നീ input command കൾ നൽകി secant എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം.
- (a, cosec(a)), cosec(x), sin(x) എന്നീ input command കൾ നൽകി cosecant എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം.
- (a, cot a), cot(x) എന്നീ input command കൾ നൽകി cotagent എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം : 6

$\cos x = -\dfrac{3}{5}$, x മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ, മറ്റ് അഞ്ച് ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങളുടെ വിലകൾ കാണുക.

പരിഹാരം

$\cos x = -\dfrac{3}{5}$ ആയതുകൊണ്ട് $\sec x = -\dfrac{5}{3}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

അപ്പോൾ $\sin^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25} \Rightarrow \sin x = \pm \dfrac{4}{5}$

x മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതുകൊണ്ട്, $\sin x = -\dfrac{4}{5}$

എങ്കിൽ; $\operatorname{cosec} x = -\dfrac{5}{4}$

തുടർന്ന്; $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{4}{3}$; $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{3}{4}$.

ഉദാഹരണം: 7

$\cot x = -\dfrac{5}{12}$, x രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ, മറ്റ് അഞ്ച് ത്രികോണമതി ഏകദങ്ങളുടെ വിലകൾ കാണുക.

പരിഹാരം

$\cot x = -\dfrac{5}{12}$ ആയതുകൊണ്ട് $\tan x = -\dfrac{12}{5}$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25} \Rightarrow \sec x = \pm\frac{13}{5}$$

x രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതുകൊണ്ട് $\sec x = -\frac{13}{5}$

തുടർന്ന്; $\cos x = -\frac{5}{13}$

എങ്കിൽ; $\sin x = \tan x \cos x$

$$= (-\frac{12}{5}) \times (-\frac{5}{13}) = \frac{12}{13}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{13}{12}.$$

ഉദാഹരണം: 8

$\sin\frac{31\pi}{3}$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

ഓരോ, 2π ഇടവേളകൾ കഴിയുമ്പോഴും $\sin x$ ന്റെ വിലകൾ ആവർത്തിക്കുന്നതായി മനസിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

$$\begin{aligned}\sin\frac{31\pi}{3} &= \sin\left(\frac{30\pi + \pi}{3}\right)\\ &= \sin\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം: 9

$\cos(-1710^\circ)$ യുടെ വില കാണുക.

ഓരോ 2π ഇടവേളകൾ കഴിയുമ്പോഴും $\cos x$ ന്റെ വിലകൾ ആവർത്തിക്കുന്നതായി മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

$$\begin{aligned}\cos(-1710^\circ) &= \cos(-1710^\circ + 5 \times 360^\circ)\\ &= \cos(-1710^\circ + 1800^\circ)\\ &= \cos 90^\circ = 0\end{aligned}$$

പരിശീലനപ്രശ്നം – 3.2

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന 1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ മറ്റ് അഞ്ച് ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങളുടെ വിലകൾ കാണുക.

1. $\cos x = -\frac{1}{2}$, x മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

2. $\sin x = \frac{3}{5}$, x രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

3. $\cot x = \frac{3}{4}$, x മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

4. $\sec x = \frac{13}{5}$, x നാലാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

5. $\tan x = -\frac{5}{12}$, x രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന 6 മുതൽ 10 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിലെ ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങളുടെ വിലകൾ കാണുക.

6. $\sin 765°$
7. $\operatorname{cosec} (-1410°)$
8. $\tan \frac{19\pi}{3}$
9. $\sin \left(-\frac{11\pi}{3}\right)$
10. $\cot \left(-\frac{15\pi}{4}\right)$

3.4 രണ്ട് കോണുകളുടെ തുകയുടെയും, വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ

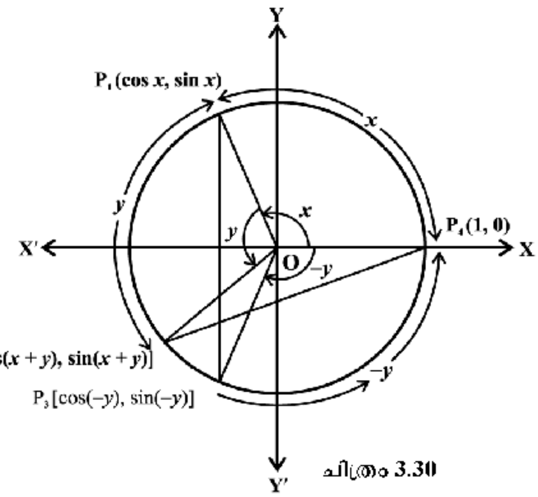
ഇവിടെ രണ്ട് കോണുകളുടെ തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങൾ എന്ന ആശയങ്ങളും മറ്റ് പ്രയോഗശൈലികളും പരിചയപ്പെടാം.

1. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

   തെളിവ്

   സൂചകാക്ഷത്തിൽ ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രമായി വരുന്ന ഒരു ഏകക വൃത്തം പരിഗണിക്കാം. കോൺ P_4OP_1 ന്റെ അളവ് x എന്നും കോൺ P_1OP_2 ന്റെ

അളവ് y എന്നും കരുതാം. എങ്കിൽ കോൺ P_4OP_2 ന്റെ അളവ് $(x + y)$ ആകും. കൂടാതെ കോൺ P_4OP_3 യുടെ അളവ് $(-y)$ എന്നെടുക്കാം. എങ്കിൽ P_1, P_2, P_3, P_4 എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ യഥാക്രമം $(\cos x, \sin x)$, $(\cos (x + y), \sin (x + y)$, $[(\cos (-y), \sin (-y)]$, $(1, 0)$ എന്ന് എടുക്കാൻ കഴിയും.



ചിത്രം 3.30

ΔP_1OP_3, ΔP_2OP_4 എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം. അവ സർവസമമാണ് അതുകൊണ്ട് P_1P_3, P_2P_4 എന്നീ വശങ്ങൾ തുല്യമാണ്. ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം.

$$\begin{aligned}
P_1P_3^2 &= [\cos x - \cos (-y)]^2 + [\sin x - \sin(-y)]^2 \\
&= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2 \\
&= \cos^2 x + \cos^2 y - 2 \cos x \cos y + \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y \\
&= 2 - 2 (\cos x \cos y - \sin x \sin y)
\end{aligned}$$

തുടർന്ന്
$$\begin{aligned}
P_2P_4^2 &= [1 - \cos (x + y)]^2 + [0 - \sin (x + y)]^2 \\
&= 1 - 2\cos (x + y) + \cos^2 (x + y) + \sin^2 (x + y) \\
&= 2 - 2 \cos (x + y)
\end{aligned}$$

$P_1P_3 = P_2P_4$, ആയതുകൊണ്ട് $P_1P_3^2 = P_2P_4^2$ എന്നെടുക്കാം.

അങ്ങനെയെങ്കിൽ; $2 - 2 (\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2 - 2 \cos (x + y)$.

$$\Rightarrow \cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

2. $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

തെളിവ്

ഒന്നാമത്തെ സർവസമവാക്യത്തിൽ y ക്ക് പകരം $(-y)$ കൊടുത്താൽ നമ്മുക്ക് ഇതു തെളിയിക്കാം.

$\cos(x+(-y))=\cos x\cos(-y)-\sin x\sin(\ \ y)$

$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

3. $\sin(x+y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$

തെളിവ്

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ എന്ന സർവസമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച്

$\sin(x+y)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(x+y)\right)$ എന്ന് എഴുതാം.

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-y)\right]\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos y+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin y\\ &= \sin x\cos y+\cos x\sin y\end{aligned}$$

4. $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$. മൂന്നാമത്തെ സർവസമവാക്യത്തിൽ y ക്ക് പകരം $(-y)$ കൊടുത്താൽ നമുക്ക് ഇതു തെളിക്കാം.

5. x, y, $(x+y)$ എന്നീ കോണുകൾ $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഒറ്റസംഖ്യാഗുണിതങ്ങളല്ലങ്കിൽ

$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$

തെളിവ്

ഒന്നാമത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും സർവസമവാക്യം ഇവിടെ ഉപയോഗിക്കാം

$$\tan(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}$$

$\cos x\cos y$ കൊണ്ട് അംശവും ഛേദവും ഹരിക്കാം

$$\tan(x+y) = \frac{\dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}}$$

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

6. $x, y, (x-y)$ എന്നീ കോണുകൾ $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഒറ്റസംഖ്യാഗുണിതങ്ങളല്ലെങ്കിൽ,

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

തെളിവ്

അഞ്ചാമത്തെ സർവസമവാക്യത്തിൽ y ക്ക് പകരം $-y$ കൊടുക്കാം

$$\tan(x-y) = \tan[x + (-y)]$$

$$= \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \tan(-y)} = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

7. $x, y, (x+y)$ എന്നീ കോണുകൾ π യുടെ പൂർണസംഖ്യാഗുണിതങ്ങളല്ലെങ്കിൽ

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$$

തെളിവ്

ഒന്നാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും സർവസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം

$$\cot(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y}$$

അംശവും ഛേദവും $\sin x . \sin y$ കൊണ്ട് ഹരിക്കാം.

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

8. $x, y, (x+y)$ എന്നീ കോണുകൾ π യുടെ പൂർണസംഖ്യാഗുണിതങ്ങളല്ലെങ്കിൽ,

$$\cot(x-y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$$

ഏഴാമത്തെ സർവസമവാക്യത്തിൽ y ക്ക്പകരം $(-y)$ ഉപയോഗിക്കാൻ നമുക്ക് അറിയാം.

9. $\mathbf{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$

$$\mathbf{= 1 - 2\sin^2 x}$$

$$\mathbf{= 2\cos^2 x - 1}$$

$$= \frac{\mathbf{1-\tan^2 x}}{\mathbf{1+\tan^2 x}},\ x \neq n\pi + \frac{\pi}{2},$$ ഇവിടെ n ഒരു പൂർണസംഖ്യയാണ്

തെളിവ്

നമുക്ക് അറിയാം;

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

ഇവിടെ y ക്ക് പകരം x കൊടുക്കാം.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

തുടർന്ന്, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$$

അംശവും ഛേദവും $\cos^2 x$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ

$\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x},\ x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2},$ ഇവിടെ n ഒരു പൂർണസംഖ്യയാണ്.

10. $\mathbf{\sin 2x = 2\sin x \cos x}$

$$= \frac{\mathbf{2\tan x}}{\mathbf{1+\tan^2 x}},\ x \neq n\pi + \frac{\pi}{2},$$ n ഒരു പൂർണസംഖ്യ

തെളിവ്

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

ഇവിടെ y ക്ക് പകരം x ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

തുടർന്ന്, $\sin 2x = \dfrac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

അംശവും ഛേദവും $\cos^2 x$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ;

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

11. $\mathbf{\tan 2x} = \dfrac{\mathbf{2\tan x}}{\mathbf{1-\tan^2 x}},\ 2x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 \quad \tan x \tan y}$$

ഇവിടെ y ക്ക് പകരം x ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

12. **sin 3*x* = 3 sin *x* – 4 sin³ *x***

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin(2x+x)\\
&= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x\\
&= 2\sin x \cos x \cos x + (1-2\sin^2 x)\sin x\\
&= 2\sin x(1-\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x\\
&= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x\\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x
\end{aligned}$$

13. **cos 3*x* = 4 cos³ *x* – 3 cos *x***

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x+x)\\
&= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x\\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x\\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x)\\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x\\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x.
\end{aligned}$$

14. $\mathbf{\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}}$, $3x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\tan 3x &= \tan(2x+x)\\
&= \frac{\tan 2x + \tan x}{1-\tan 2x \tan x} = \frac{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}+\tan x}{1-\dfrac{2\tan x \,.\, \tan x}{1 \quad \tan^2 x}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 \quad \tan^2 x \quad 2\tan^2 x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 \quad 3\tan^2 x}$$

15. **(i)** $\mathbf{\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}$

(ii) $\mathbf{\cos x - \cos y = -\,2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}}$

(iii) $\mathbf{\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$

(iv) $\mathbf{\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$; ... (1)

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ ... (2)

(1), (2) കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$ ... (3)

$\cos(x+y) - \cos(x-y) = \quad 2\sin x \sin y$ ... (4)

തുടർന്ന്, $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$; ... (5)

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ ... (6)

(5), (6) കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ,

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$; ... (7)

$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y$ ... (8)

$x + y = \theta$; $x - y = \phi$. എന്ന് കൊടുത്താൽ,

$$x = \left(\frac{\theta+\phi}{2}\right),\ y = \left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

x, y യുടെ ഈ വിലകൾ (3), (4), (7), (8) എന്നിവയിൽ കൊടുത്താൽ;

$$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta - \cos\phi = -2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta\quad\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta + \sin\phi = 2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta - \sin\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

θ, ϕ ഇവയ്ക്ക് ഏത് രേഖീയ വിലകളും സ്വീകരിക്കാവുന്നതുകൊണ്ട്, θ ക്ക് പകരം x ഉം ϕ ക്ക് പകരം y യും കൊടുക്കാം.

അങ്ങനെയെങ്കിൽ;

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\ ;\ \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}\ ;\ \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

16. (i) $2 \cos x \cos y = \cos (x + y) + \cos (x - y)$
(ii) $-2 \sin x \sin y = \cos (x + y) - \cos (x - y)$
(iii) $2 \sin x \cos y = \sin (x + y) + \sin (x - y)$
(iv) $2 \cos x \sin y = \sin (x + y) - \sin (x - y)$

ഉദാഹരണം: 10

$3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4} = 1$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}$$

$$= 3 \times \frac{1}{2} \times 2 - 4 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \times 1 = 3 - 4 \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 3 - 4 \times \frac{1}{2} = 1$$

ഉദാഹരണം: 11

$\sin 15°$ യുടെ വില കാണുക

പരിഹാരം

$$\begin{aligned}\sin 15° &= \sin (45° - 30°)\\ &= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം: 12

$\tan \frac{13\pi}{12}$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

$$\tan \frac{13\pi}{12} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$$

ഉദാഹരണം: 13

$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}$ എന്നു തെളിയിക്കുക

പരിഹാരം

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\cos y-\cos x\sin y}$$

$\cos x \cos y$ കൊണ്ട് അംശവും ഛേദവും ഹരിച്ചാൽ

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}.$$

ഉദാഹരണം: 14

$\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$ എന്നു തെളിയിക്കുക

പരിഹാരം

$\tan 3x = \tan(2x + x)$

$$\tan 3x=\frac{\tan 2x+\tan x}{1-\tan 2x\tan x}$$

$$\tan 3x - \tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 2x + \tan x$$

$$\tan 3x - \tan 2x - \tan x = \tan 3x \tan 2x \tan x$$

$$\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$$

ഉദാഹരണം: 15

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos x$ എന്നു തെളിയിക്കുക

പരിഹാരം

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x-(\frac{\pi}{4}-x)}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{\pi}{4}\cos x - 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\sqrt{2}\cos x$$

ഉദാഹരണം: 16

$\dfrac{\cos 7x + \cos 5x}{\sin 7x - \sin 5x} = \cot x$ എന്നു തെളിയിക്കുക

പരിഹാരം

$$\frac{\cos 7x + \cos 5x}{\sin 7x - \sin 5x} = \frac{2\cos\dfrac{7x+5x}{2}\cos\dfrac{7x-5x}{2}}{2\cos\dfrac{7x+5x}{2}\sin\dfrac{7x-5x}{2}} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

ഉദാഹരണം: 17

$\dfrac{\sin 5x - 2\sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} = \tan x$ എന്നു തെളിയിക്കുക

പരിഹാരം

$$\frac{\sin 5x - 2\sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} = \frac{\sin 5x + \sin x - 2\sin 3x}{\cos 5x - \cos x}$$

$$= \frac{2\sin 3x\cos 2x - 2\sin 3x}{-2\sin 3x \sin 2x} = -\frac{\sin 3x\,(\cos 2x - 1)}{\sin 3x \sin 2x}$$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \tan x$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ - 3.3

1. $\sin^2\dfrac{\pi}{6} + \cos^2\dfrac{\pi}{3} - \tan^2\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{1}{2}$ എന്നു തെളിയിക്കുക

2. $2\sin^2\dfrac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2\dfrac{7\pi}{6}\cos^2\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}$ എന്നു തെളിയിക്കുക

3. $\cot^2\dfrac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}\dfrac{5\pi}{6} + 3\tan^2\dfrac{\pi}{6} = 6$ എന്നു തെളിയിക്കുക

4. $2\sin^2\dfrac{3\pi}{4} + 2\cos^2\dfrac{\pi}{4} + 2\sec^2\dfrac{\pi}{3} = 10$ എന്നു തെളിയിക്കുക

5. വില കാണുക.
(i) $\sin 75°$ (ii) $\tan 15°$

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ തെളിയിക്കുക.

6. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sin(x+y)$

7. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$

8. $\dfrac{\cos(\pi+x)\ \cos(-x)}{\sin(\pi-x)\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\cot^2 x$

9. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos(2\pi+x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cot(2\pi+x)\right]=1$

10. $\sin(n+1)x\sin(n+2)x+\cos(n+1)x\cos(n+2)x=\cos x$

11. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{2}\sin x$

12. $\sin^2 6x-\sin^2 4x=\sin 2x\sin 10x$

13. $\cos^2 2x-\cos^2 6x=\sin 4x\sin 8x$

14. $\sin 2x+2\sin 4x+\sin 6x=4\cos^2 x\sin 4x$

15. $\cot 4x(\sin 5x+\sin 3x)=\cot x(\sin 5x-\sin 3x)$

16. $\dfrac{\cos 9x-\cos 5x}{\sin 17x-\sin 3x}=-\dfrac{\sin 2x}{\cos 10x}$

17. $\dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{\cos 5x+\cos 3x}=\tan 4x$

18. $\dfrac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}=\tan\dfrac{x-y}{2}$

19. $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\tan 2x$

20. $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=2\sin x$

21. $\dfrac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x$

22. $\cot x \cot 2x - \cot 2x \cot 3x - \cot 3x \cot x = 1$

23. $\tan 4x = \dfrac{4\tan x\,(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x + \tan^4 x}$

24. $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

25. $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$

3.5 ത്രികോണമിതീയ സമവാക്യങ്ങൾ

ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന സമവാക്യത്തെ ത്രികോണമിതീയ സമവാക്യങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു. ഈ പാഠഭാഗത്ത് ഇതുപോലെയുള്ള സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനെ കുറിച്ച് മനസിലാക്കാം. ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ വിലകൾ ആവർത്തിച്ചുവരുന്നതാണെന്ന് നാം നേരത്തെ മനസിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അതായത് $\sin x$, $\cos x$, അതിന്റെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെയും വിലകളും 2π യുടെ ഇടവേളകളിൽ ആവർത്തിക്കുന്നതായും $\tan x$ ന്റെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും വിലകൾ π ഇടവേളകളിൽ ആവർത്തിക്കുന്നതായും മനസിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അതുകൊണ്ട് ഇത്തരത്തിലുള്ള സമവാക്യത്തിന് അനന്തമായ പരിഹാരങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഈ അനന്തമായ പരിഹാരത്തെ പൊതുപരിഹാരം എന്നു പറയുന്നു. പൊതുപരിഹാരം $n \in z$ ഉൾപ്പെടുത്തിയാണ് എഴുതാറ്.

ഇതിൽ $0 \le x < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളയിൽ വരുന്ന പരിഹാരത്തെ പ്രഥമ പരിഹാരം എന്നു പറയുന്നു.

3.5.1: $\sin x = 0$

$\sin x = 0$ കിട്ടുന്ന x ന്റെ വിലകൾ കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിക്കാം

$\sin 0 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\sin \pi = 0 \Rightarrow x = \pi$

$\sin 2\pi = 0 \Rightarrow x = 2\pi$

അതുപോലെ

$\sin(-\pi) = 0 \Rightarrow x = -\pi$

$\sin(-2\pi) = 0 \Rightarrow x = -2\pi$

ഇങ്ങനെ

ഇവിടെ ലഭിച്ച x ന്റെ വിലകൾ π യുടെ പൂർണസംഖ്യാഗുണിതങ്ങളാണ്. അതായത് ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരം $x = n\pi, n \in Z$ എന്നും, പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ $x = 0, \pi$ ആണെന്നും കാണാം.

3.5.2 $\sin x = \sin y$

ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ ഇതിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ മനസിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. $\sin x = \frac{1}{2}$

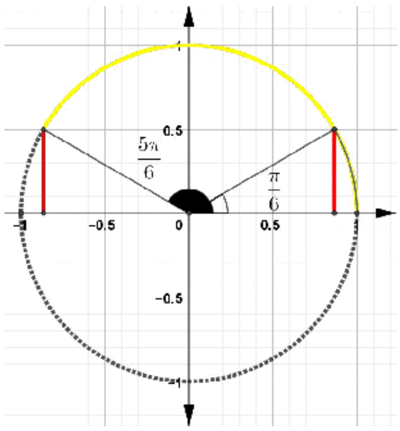
ഇവിടെ $0 \le x < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളയിലെ ഒരു പരിഹാരം ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ ലഭിക്കും.

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

അതുപോലെ രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ നിന്നും രണ്ടാമത്തെ പരിഹാരം ലഭിക്കും.

$$\sin x = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$$

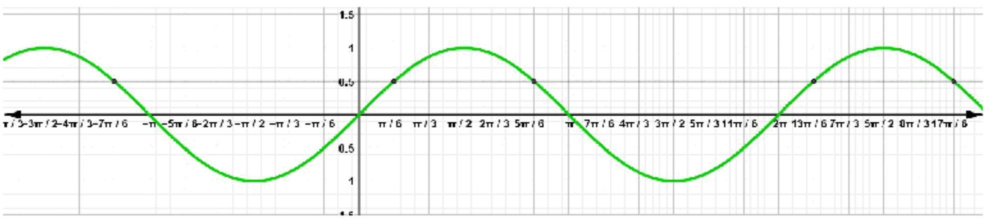
ഇങ്ങനെ ഒരു ഭ്രമണം പൂർത്തിയാക്കി കഴിഞ്ഞാൽ വീണ്ടും $\sin x = \frac{1}{2}$ ശരിയായി വരുന്ന x ന്റെ വിലകൾ ലഭിക്കുന്നു.



ചിത്രം 3.31

ചിത്രത്തിൽ x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി $y = \frac{1}{2}$ എന്ന വര വരക്കുകയാണെ ¦ nÂ $\sin x$ ന്റെ ഗ്രാഫുമായി അനന്തമായ ബിന്ദുക്കളിൽ സംഗമിക്കുന്നതായി കാണാം.

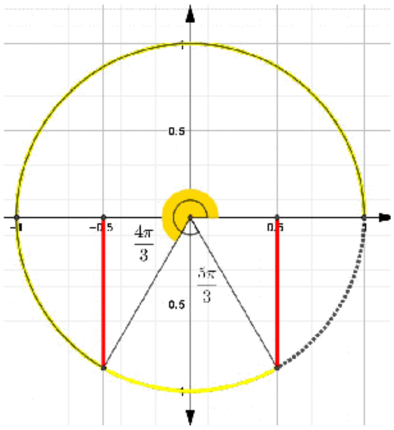
ഇതിൽ പൂജ്യത്തിനും 2π ക്കും ഇടയിലുള്ള വിലകളാണ് പ്രഥമ പരിഹാരം എന്ന് ചിത്രത്തിൽ നിന്നും കാണാം.



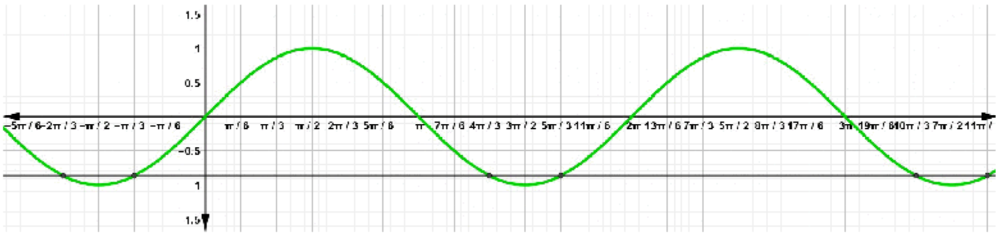
ചിത്രം 3.32

ഇനി $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ.

ഒരു പരിഹാരം $\left(x = \frac{4\pi}{3}\right)$ മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലും രണ്ടാമത്തെ പരിഹാരം $\left(x = \frac{5\pi}{3}\right)$ നാലാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലുമായി വരുന്നത് ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്നും കാണാം.



ചിത്രം 3.33



ചിത്രം 3.34

നിരീക്ഷണങ്ങൾ:

മേൽ ആശയങ്ങൾ പൊതുവായി കാണാം

- $\sin x = \sin y$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ $0 \le x < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളക്കുള്ളിൽ ഒരു ജോഡി പരിഹാരങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. ഒന്നുകിൽ ഈ പരിഹാരങ്ങൾ ഒന്നാമത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും ചതുർത്ഥാംശത്തിലായിരിക്കും അല്ലെങ്കിൽ മൂന്നാമത്തെയും നാലാമത്തെയും ചതുർത്ഥംശത്തിലായിരിക്കും. ഈ ജോഡികളാണ് സമവാക്യത്തിന്റെ പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ.

  അതായത് $\sin x = \frac{1}{2}$ ന്റെ പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$

  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ന്റെ പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ $x = \frac{4\pi}{3},\ x = \frac{5\pi}{3}$

- $\sin x = \sin y$ ന്റെ പൊതുവായ പരിഹാരങ്ങൾ എടുക്കാം.

$$\sin x = \sin y \Rightarrow x = y$$
$$\sin x = \sin(\pi - y) \Rightarrow x = \pi - y$$
$$\sin x = \sin(2\pi + y) \Rightarrow x = 2\pi + y$$
$$\sin x = \sin(3\pi - y) \Rightarrow x = 3\pi - y$$
$$\sin x = \sin(4\pi + y) \Rightarrow x = 4\pi + y$$

അങ്ങനെയെങ്കിൽ പൊതുപരിഹാരം $x = n\pi + (-1)^n y, n \in Z$ എന്നു പറയാം.

സിദ്ധാന്തം: 1

x, y എന്നിവ രേഖീയസംഖ്യകളായാൽ $\sin x = \sin y$ ന്റെ പൊതുപരിഹാരങ്ങൾ $x = n\pi + (-1)^n y, n \in \mathbf{Z}$ ആണ്.

തെളിവ്

ഇവിടെ

$\sin x = \sin y \Rightarrow \sin x - \sin y = 0$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x+y}{2} = 0 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \sin\frac{x-y}{2} = 0$$

അതായത്, $\dfrac{x+y}{2} = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $\dfrac{x-y}{2} = n\pi, n \in \mathbf{Z}$

$\Rightarrow x = (2n+1)\pi - y$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 2n\pi + y, n \in \mathbf{Z}$

$\Rightarrow x = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1} y$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 2n\pi + (-1)^{2n} y, n \in \mathbf{Z}$.

ഈ രണ്ട് പരിഹാരങ്ങളും ചേർത്ത് $x = n\pi + (-1)^n y, n \in \mathbf{Z}$

3.5.3 $\cos x = 0$

$\cos x = 0$ കിട്ടുന്ന x ന്റെ വിലകൾ കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിക്കാം

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$
$$\cos\frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{5\pi}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{5\pi}{2}$$

ഇവിടെ ലഭിച്ച x ന്റെ വിലകൾ $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഒറ്റസംഖ്യാ ഗുണിതങ്ങളാണ്. അതായത് ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതു പരിഹാരം $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in Z$ എന്നും, പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ $x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ എന്നും കാണാം.

3.5.4 $\cos x = \cos y$

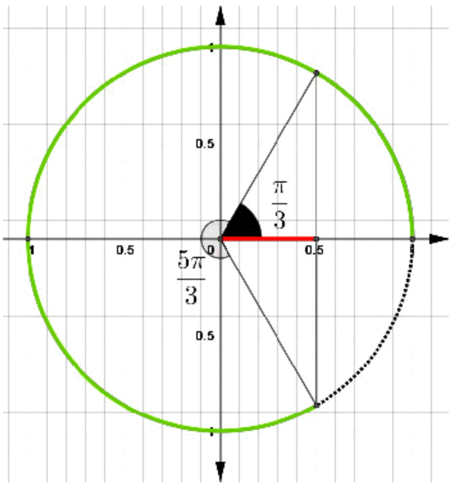
ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ ഇതിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ മനസിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. $\cos x=\frac{1}{2}$

ഇതിന്റെ $0\le x<2\pi$ എന്ന ഇടവേളയിലെ ഒരു പരിഹാരം ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ്

$$\cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

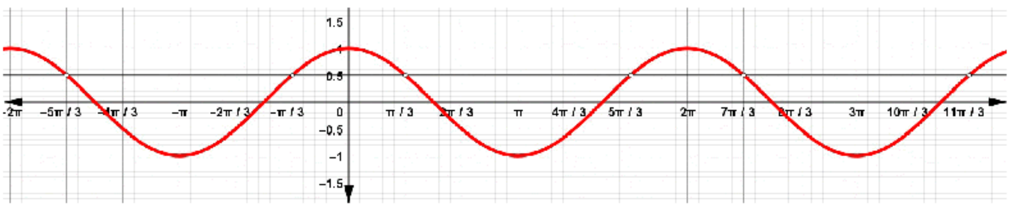
രണ്ടാമത്തെ പരിഹാരം നാലമത്തെ ചതുർത്ഥംശത്തിലാണ്.

$$\cos x=\frac{1}{2}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{5\pi}{3}$$



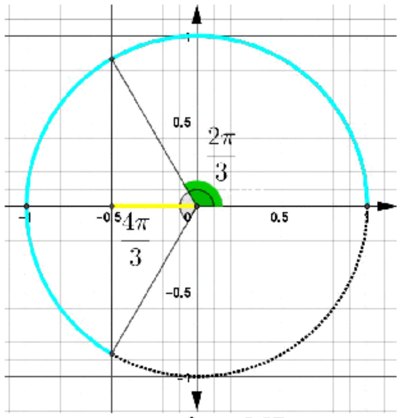
ചിത്രം 3.35

ചിത്രത്തിൽ x അക്ഷത്തിന്സമാന്തരമായി $y=\frac{1}{2}$ എന്ന വര വരക്കുകയാണെങ്കിൽ cos x ന്റെ ഗ്രാഫുമായി അനന്തമായ ബിന്ദുകളിൽ സംഗമിക്കുന്നതായി കാണാം. ഇതിൽ പൂജ്യത്തിനും 2π ക്കും ഇടയിലുള്ള പരിഹാരങ്ങൾ (പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ ചിത്രത്തിൽ നിന്നു കാണാം.

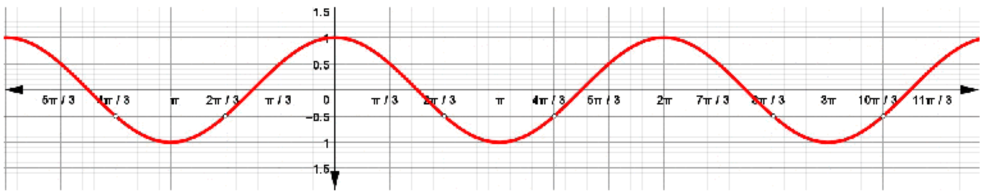


ചിത്രം 3.36

ഇനി $\cos x = -\frac{1}{2}$ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ. ഒരു പരിഹാരം $\left(x = \frac{2\pi}{3}\right)$ രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലും രണ്ടാമത്തെ പരിഹാരം $\left(x = \frac{4\pi}{3}\right)$ മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലുമായി വരുന്നത് കാണാം.



ചിത്രം 3.37



ചിത്രം 3.38

> a [Mini : - 1, Max : 1] എന്ന number slider നിർമിക്കാം. x അക്ഷത്തെ $\frac{\pi}{4}$ ന്റെ പൂർണ്ണാങ്ക ഗുണിതങ്ങളായി മാറ്റണം. sin (x), $y = a$ എന്നീ input command കൾ നൽകി sin x ന്റെ ഗ്രാഫും $y = a$ എന്ന വരയും നിർമിക്കുക. വരയും ഗ്രാഫും സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് sin $x = a$ എന്ന ത്രികോണമിതീയ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ ഇതിൽ പ്രധമ പരിഹാരം ഏത്? സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറ്റി ഈ ആശയം മനസിലാക്കാം. ഇതുപോലെ cos(x) എന്ന input command നൽകി cos $x = a$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ പരിചയപ്പെടാം.

നിരീക്ഷണങ്ങൾ:

- $\cos x = \cos y$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് $0 \leq x < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളക്കുള്ളിൽ ഒരു ജോഡി പരിഹാരങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. ഒന്നുകിൽ ഈ പരിഹാരങ്ങൾ ഒന്നാമത്തെയും നാലാമത്തെയും ചതുർത്ഥാംശത്തിലായിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും ചതുർത്ഥാംശത്തിലായിരിക്കും.

  അതായത് $\cos x = \frac{1}{2}$ ന്റെ പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

  $\cos x = -\frac{1}{2}$ ന്റെ പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

- $\cos x = \cos y$ ന്റെ പൊതുവായ പരിഹാരങ്ങൾ പരിചയപ്പെടാം.

$$\cos x = \cos y \Rightarrow x = y$$
$$\cos x = \cos(2\pi - y) \Rightarrow x = 2\pi - y$$
$$\cos x = \cos(2\pi + y) \Rightarrow x = 2\pi + y$$
$$\cos x = \cos(4\pi - y) \Rightarrow x = 4\pi - y$$
$$\cos x = \cos(4\pi + y) \Rightarrow x = 4\pi + y$$

....

അങ്ങനെയെങ്കിൽ ഇതിന്റെ പൊതു പരിഹാരങ്ങൾ $x = 2n\pi \pm y, n \in Z$ എന്ന് പറയാം.

സിദ്ധാന്തം: 2

x, y എന്നിവ രേഖീയസംഖ്യയായാൽ $\cos x$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരം $x = 2n\pi \pm y,\ n \in \mathbf{Z}$ ആണ്.

തെളിവ് :

ഇവിടെ $\cos x = \cos y \ \Rightarrow \cos x - \cos y = 0$

$$\Rightarrow -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \sin \frac{x+y}{2} = 0 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \sin \frac{x-y}{2} = 0$$

അതായത്; $\frac{x+y}{2} = n\pi$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{x-y}{2} = n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$

$\Rightarrow x = 2n\pi - y$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 2n\pi + y,\ n \in \mathbf{Z}$

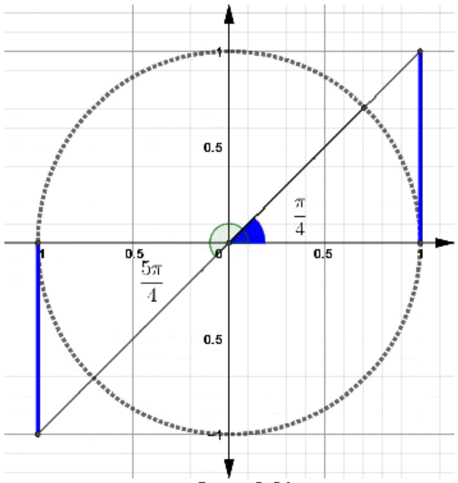
എങ്കിൽ; $x = 2n\pi \pm y,\ n \in \mathbf{Z}$

3.5.5: $\tan x = 0$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ആയതുകൊണ്ട് $\sin x$ പൂജ്യമാകുന്ന x ന്റെ വിലകളിൽ $\tan x$ പൂജ്യമാകും. അങ്ങനെയെങ്കിൽ $\tan x = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതു പരിഹാരങ്ങൾ $x = n\pi, n \in Z$ എന്നും, പ്രധാന പരിഹാരങ്ങൾ $x = 0, \pi$ ആണെന്ന് കാണാം.

3.5.6 $\tan x = \tan y$

ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ ഇതിന്റെ പരിഹാരം മനസിലാക്കാം.



ചിത്രം 3.39

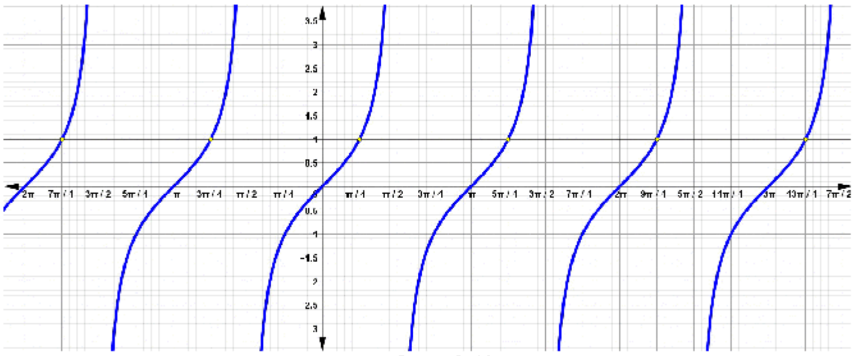
$\tan x = 1$ എന്ന സമവാക്യം പരിഗണിക്കാം. ഇതിന്റെ $0 \le x < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളയിലെ ഒരു പരിഹാരം ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ്.

$$\tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

രണ്ടാമത്തെ പരിഹാരം മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ്

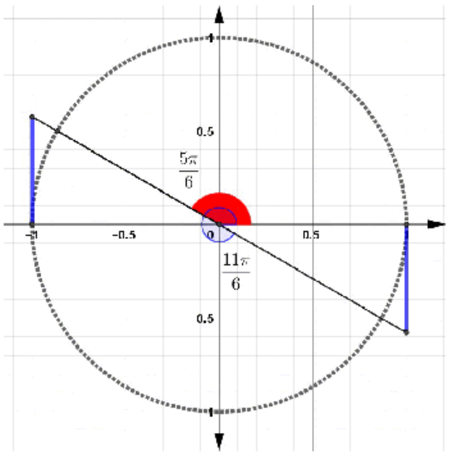
$$\tan x = \tan\frac{5\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$$

ചിത്രത്തിൽ x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി $y = 1$ എന്ന വര വരികയാണെങ്കിൽ $\tan x$ ന്റെ ഗ്രാഫുമായി അനന്തമായ സംഗമ ബിന്ദുകളിലൂടെ കടന്ന പോകുന്നതായി കാണാം. ഇതിൽ പൂജ്യത്തിനും 2π ക്കും ഇടയിലുള്ള പ്രധമപരിഹാരങ്ങൾ ചിത്രത്തിൽ നിന്നു കാണാം.

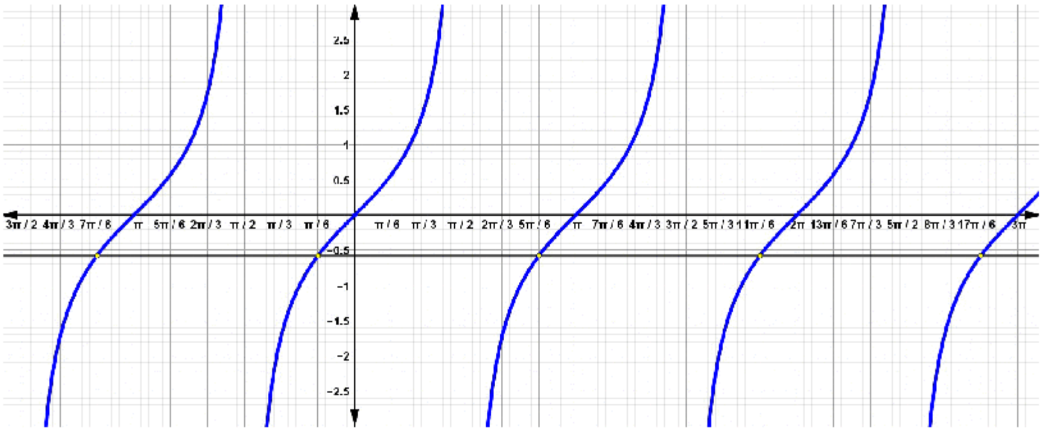


ചിത്രം 3.40

ഇതുപോലെ $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ആണ് പരിഗണിക്കുന്നതെങ്കിൽ. ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ $0 \le x < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളയിലെ ഒരു പരിഹാരം $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥംശത്തിലും രണ്ടാമത്തെ പരിഹാരം $\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ നാലാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലുമായി വരുന്നത് കാണാം.



ചിത്രം 3.41



ചിത്രം 3.42

> tan(x), y = 1 എന്നീ input command കൾ നൽകി tan x ന്റെ ഗ്രാഫും, y = 1 എന്ന വരയും നിർമിക്കാം. x അക്ഷത്തെ $\frac{\pi}{4}$ ന്റെ പൂർണാങ്ക ഗുണിതത്തിലേക്ക് മാറ്റുക. ഗ്രാഫി ന്റെയും വരയുടെയും സംഗമബിന്ദുക്കളാണ് tan x = 1 എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാ രങ്ങളായി വരുന്നത് ഇതിൽ നിന്നും പ്രധമ പരിഹാരം കാണാം. Move tool ഉപയോഗിച്ച് വരയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിയാൽ ഈ ആശയങ്ങൾ വ്യക്തമാകും.

നിരീക്ഷണങ്ങൾ:

- tan$x$ = tan$y$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് $0 \le x < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളകൾക്കുള്ളിൽ ഒരു ജോഡി പരിഹാരങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. ജോഡിയിൽ ഒരെണ്ണം ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണെങ്കിൽ മറ്റേത് മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലായി രിക്കും. അതുപോലെ ജോഡിയിൽ ഒരെണ്ണം രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തി ലാണെങ്കിൽ മറ്റേത് നാലാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലായിരിക്കും.

  അതായത് $\tan x = 1$ ന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

  $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ $x = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

- tan x = tan y ന്റെ പൊതുവായ പരിഹാരങ്ങൾ പരിചയപ്പെടാം.

  $\tan x = \tan y \Rightarrow x = y$

  $\tan x = \tan(\pi + y) \Rightarrow x = \pi + y$

  $\tan x = \tan(2\pi + y) \Rightarrow x = 2\pi + y$

  $\tan x = \tan(3\pi + y) \Rightarrow x = 3\pi + y$

  $\tan x = \tan(4\pi + y) \Rightarrow x = 4\pi + y$

  – – – – – – – – – – – – – – – – – –

അങ്ങനെയെങ്കിൽ ഇതിന്റെ പൊതു പരിഹാരങ്ങൾ $x = n\pi + y, n \in Z$ എന്ന് പറയാം.

സിദ്ധാന്തം: 3

x, y എന്നിവ $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഒറ്റ സംഖ്യാഗുണിതങ്ങളല്ലെങ്കിൽ $\tan x = \tan y$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരം $x = n\pi + y, n \in \mathbf{Z}$ ആണ്.

തെളിവ്:

ഇവിടെ; $\tan x = \tan y \Rightarrow \tan x - \tan y = 0$

$$\Rightarrow \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = 0$$

$$\Rightarrow \sin (x - y) = 0$$

അതായത്; $x - y = n\pi$

$$\Rightarrow x = n\pi + y, n \in \mathbf{Z}$$

ഉദാഹരണം: 18

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ യുടെ പരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

അതുകൊണ്ട് പ്രഥമ പരിഹാരം $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

പരിഹാരങ്ങൾ

ഉദാഹരണം: 19

$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ യുടെ പ്രഥമപരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

നമുക്ക് അറിയാം; $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \tan \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

അതുകൊണ്ട് പ്രഥമപരിഹാരങ്ങൾ $\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

ഉദാഹരണം: 20

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ കാണുക.

പരിഹാരം

$$\text{ഇവിടെ} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin\frac{4\pi}{3},$$

എങ്കിൽ പൊതുപരിഹാരം: $x = n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3}, \ n \in \mathbf{Z}.$

ഉദാഹരണം: 21

$\cos x = \frac{1}{2}$ ന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ കാണുക.

പരിഹാരം

$$\text{ഇവിടെ} \quad \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

അങ്ങനെ എങ്കിൽ; $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

ഉദാഹരണം: 22

$\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ കാണുക.

പരിഹാരം

$$\text{ഇവിടെ} \quad \tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2x = n\pi + x + \frac{5\pi}{6}, n \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = n\pi + 5\frac{\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$$

ഉദാഹരണം: 23

$\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0$ യുടെ പരിഹാരങ്ങൾ കാണുക.

പരിഹാരം

$$\sin 6x + \sin 2x - \sin 4x = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin 4x \cos 2x - \sin 4x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin 4x(2\cos 2x - 1) = 0$$

അതുകൊണ്ട് $\sin 4x = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin 4x = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

തുടർന്ന് $4x = n\pi$ അല്ലെങ്കിൽ $2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}$

$x = \frac{n\pi}{4}$ അല്ലെങ്കിൽ $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, \quad n \in \mathbf{Z}.$

ഉദാഹരണം: 24

$2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ ത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ കാണുക.

പരിഹാരം

$$2\left(1 - \sin^2 x\right) + 3\sin x = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

തുടർന്ന് $\sin x = -\frac{1}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $\sin x = 2$

പക്ഷെ; $\sin x = 2$ സാധ്യമല്ല.

അതുകൊണ്ട് $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6}.$

അതിനാൽ പരിഹാരങ്ങൾ

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}.$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 3.4

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ പ്രഥമ, പൊതുപരിഹാരങ്ങൾ കാണുക.

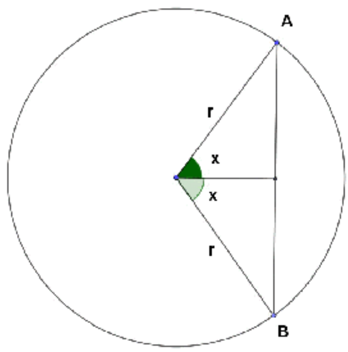
1. $\tan x = \sqrt{3}$
2. $\sec x = 2$
3. $\cot x = -\sqrt{3}$
4. $\operatorname{cosec} x = -2$

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളുടെ പൊതുപരിഹാരങ്ങൾ കാണുക.

5. $\cos 4x = \cos 2x$
6. $\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$
7. $\sin 2x + \cos x = 0$
8. $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$
9. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

3.6 സൈൻ, കൊസൈൻ സൂത്രവാക്യങ്ങളുടെ തെളിവും ലളിതമായ പ്രായോഗങ്ങളും

പത്താം ക്ലാസ്സിൽ ത്രികോണമിതി എന്ന പാഠത്തിൽ പഠിച്ച ചില ആശയങ്ങൾ ഇവിടെ ഓർമ്മിക്കാം. അതായത് ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണിന്റെ നീളവും കേന്ദ്ര കോണിന്റെ പകുതിയുടെ sine നെ ആരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്.

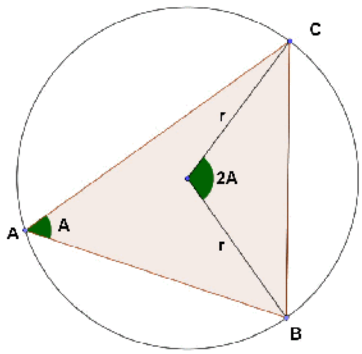


ചിത്രം 3.43

ചിത്രം 3.43 നിന്നും $AB = 2r\sin x$

ഇനി ചിത്രം 3.44 ൽ ΔABC യും അതിന്റെ പരിവൃത്തവും പരിഗണിച്ചാൽ

BC = 2r sinA; AB = 2r sinC; AC = 2r sinB



ചിത്രം 3.44

കോൺ A ക്ക് എതിരെയുള്ളവശത്തിന് 'a' എന്നും, B ക്ക് എതിരെയുള്ള വശത്തിന് 'b' എന്നും, C ക്ക് എതിരെയുള്ള വശത്തിന് 'c' എന്നും എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ.

$a = 2r \sin A$; $b = 2r \sin B$; $c = 2r \sin C$ എന്നു എഴുതാം.

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = 2r; \frac{b}{\sin B} = 2r; \frac{c}{\sin C} = 2r$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ഇതിനെ സൈൻ നിയമം എന്നാണ് പറയുന്നത്

സിദ്ധാന്തം: 1 സൈൻ സൂത്രവാക്യം

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളുടെ നീളവും അവയ്ക്ക് എതിരെയുള്ള കോണുക ളുടെ സൈനും ഒരേ അനുപാതത്തിലാണ്,

അതായത് ΔABC പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ ; $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

തെളിവ്:

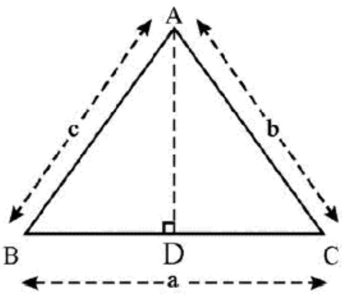
അവസ്ഥ: 1. ΔABC ന്യൂനത്രികോണം എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഇവിടെ a = BC, b = AC, c = AB

ചിത്രത്തിൽ AD എന്നത് BC യ്ക്ക് ലംബമാണ്

ΔABD യിൽ $\frac{AD}{AB} = \sin B \Rightarrow AD = c \sin B$.......(1)

ΔACD യിൽ $\frac{AD}{AC} = \sin C \Rightarrow AD = b \sin C$.......(2)



ചിത്രം 3.45

(1), (2)ഉപയോഗിച്ച്

$c \sin B = b \sin C$

$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$..................$(A)$

അതു പോലെ; $BE \perp AC$ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ;

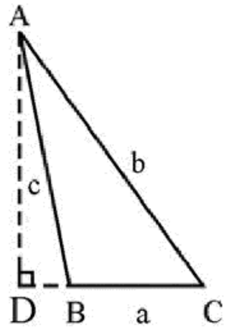
$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$..................$(B)$ എന്ന് തെളിയിക്കാം.

എങ്കിൽ (A), (B) ഉപയോഗിച്ച് $\left(\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}\right)$

അവസ്ഥ: 2. ΔABC ഒരു ബൃഹത്ത്രികോണമായൽ നീട്ടി വരച്ച BC യിലേക്ക് AD എന്ന ലംബം വരക്കുന്നു.

ΔABD യിൽ $\frac{AD}{AB}=\sin(180-B)\Rightarrow AD=c\sin B$.......(1)

ΔACD യിൽ $\frac{AD}{AC}=\sin C\Rightarrow AD=b\sin C$.......(2)



ചിത്രം 3.46

(1), (2) ഉപയോഗിച്ച്

$c\sin B=b\sin C$

$\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}$..................$(A)$

അതു പോലെ; $BE\perp AC$ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ ;

$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$..................$(B)$ എന്ന് തെളിയിക്കാം

എങ്കിൽ (A), (B) ഉപയോഗിച്ച് $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

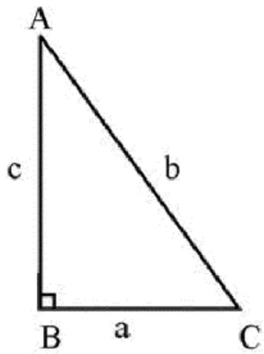
അവസ്ഥ: 3. ΔABC ഒരു മട്ടത്രികോണമാണെന്ന് പരിഗണിക്കാം

ΔABC യിൽ B ഒരു മട്ട കോണാണ്

$\frac{AB}{AC}=\sin C\Rightarrow\frac{c}{b}=\sin C\Rightarrow\frac{1}{b}=\frac{\sin C}{c}$.......(1)

$\frac{BC}{AC}=\sin A\Rightarrow\frac{a}{b}=\sin A\Rightarrow\frac{1}{b}=\frac{\sin A}{a}$.......(2)

$\sin B=\sin\frac{\pi}{2}=1\Rightarrow\frac{1}{b}=\frac{\sin B}{b}$.......(3)



ചിത്രം 3.47

എങ്കിൽ(1),(2),(3) ഉപയോഗിച്ച്

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

മേൽവിവരിച്ച മൂന്ന് വ്യത്യസ്ത അവസ്ഥയിലും

$\Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ ആണെന്ന് കാണാൻ കഴിയും

സിദ്ധാന്തം: 2 : കൊസൈൻ സൂത്രവാക്യം

ത്രികോണം ABC യിൽ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

തെളിവ്:

അവസ്ഥ 1 : ത്രികോണം ABC ഒരു ന്യൂനത്രികോണമായാൽ

A യിൽ നിന്നും $AD \perp BC$ വരക്കുക.

ΔABD യിൽ, $\cos B = \dfrac{BD}{c} \Rightarrow BD = c\cos B$

ΔACD യിൽ, $\cos C = \dfrac{CD}{b} \Rightarrow CD = b\cos B$

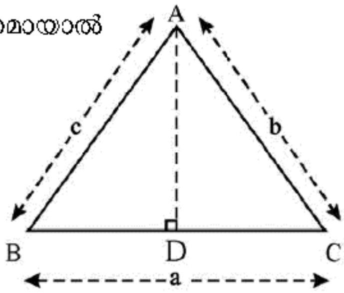
എങ്കിൽ, $AC^2 = CD^2 + AD^2$

$= AD^2 + (BC - BD)^2$

$= BC^2 + (AD^2 + BD^2) - 2BC.BD$

$= BC^2 + AB^2 - 2BC.\ BD$

അതായത് $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$



ചിത്രം 3.48

അവസ്ഥ 2 : ΔABC ഒരു ബൃഹദ്ത്രികോണമായാൽ

A യിൽ നിന്നും $AD \perp CB$ വരക്കുക.

ΔABD യിൽ $\dfrac{BD}{c} = \cos(180 - B) = -\cos B$

$\Rightarrow BD = -c\cos B$

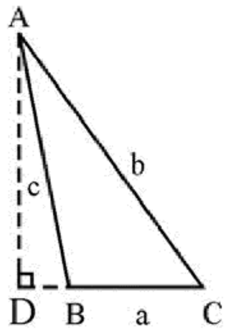
എങ്കിൽ, $AC^2 = AD^2 + CD^2$

$= AD^2 + (BC + BD)^2$

$= AD^2 + BD^2 + BC^2 + 2BC.BD$

$= AB^2 + BC^2 + 2BC.\ BD$

അതായത് $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$



ചിത്രം 3.49

അവസ്ഥ 3 : ΔABC ഒരു മട്ടത്രികോണമായാലൽ

$b^2 = c^2 + a^2$

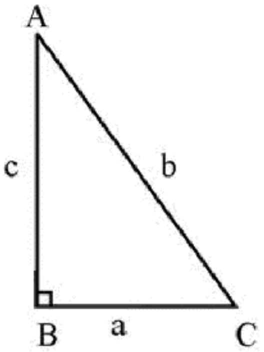
$$B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos B = 0$$

അതുകൊണ്ട് $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$

ഇതുപോലെ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

എന്ന് തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്.



ചിത്രം 3.50

കോണളവുകൾ കണ്ടെത്തുന്നതിനായി കൊസൈൻ സൂത്യവാക്യങ്ങളെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിലും എഴുതാറുണ്ട്.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Polygon tool ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണം ABC നിർമ്മിക്കാം. ഇപ്പോൾ Algebra view ൽ ΔABC യുടെ വശങ്ങളുടെ നീളവും $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ എന്നിവക്ക് എതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b, c എന്നിങ്ങനെയും കാണാം. Angle tool ഉപയോഗിച്ച് മൂന്ന് കോണുകളും കണ്ടെത്തുക. (ഉദാ: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$). sin (α), sin (β), sin (γ) എന്നീ input command കൾ നൽകി ഈ കോണുകളുടെ sine വിലകൾ കാണാം. ഇവ Algebra view Number ഉണ്ടാകും (d, e, f). ഇനി $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{c}{f}$ എന്നീ input command കൾ നൽകി ഈ അംശബന്ധങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യാം. Move tool ഉപയോഗിച്ച് DABC യുടെ വലിപ്പം മാറ്റി സൈൻ സൂത്യവാക്യം പരിചയപ്പെടാം. a ^ 2; b ^ 2 + c ^ 2 - 2 * b * c * cos (α) എന്നീ, input command കൾ നൽകുക. ഇതിന്റെ വിലകൾ തുല്യമാണെന്ന് Algebra view ൽ നിന്നും കാണാം. Move tool ഉപയോഗിച്ച് ΔABC യുടെ വലിപ്പം മാറ്റി കൊസൈൻ സൂത്ര വാക്യം പരിചയപ്പെടാം.

ഉദാഹരണം: 25

ത്രികോണം ABC യിൽ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നവ തെളിയിക്കുക.

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

$$\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

പരിഹാരം

സൈൻ നിയമം ഉപയോഗിച്ച്;

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \text{ (എന്നിരിക്കട്ടെ)}$$

തുടർന്ന്, $$\frac{b-c}{b+c} = \frac{k(\sin B - \sin C)}{k(\sin B + \sin C)}$$

$$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$= \cot\frac{(B+C)}{2}\tan\frac{(B-C)}{2}$$

$$= \cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$\left[\because A+B+C = 180 \Rightarrow B+C = 180 - A \Rightarrow \frac{B+C}{2} = 90 - \frac{A}{2}\right]$$

$$= \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}$$

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

ഉദാഹരണം: 26

ത്രികോണം ABC യിൽ

$a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$a \sin(B - C) = a\,[\sin B \cos C - \cos B \sin C] \qquad (1)$$

തുടർന്ന് $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c} = k\,(\text{say})$

തുടർന്ന്, $\sin A = ak$, $\sin B = bk$, $\sin C = ck$

sin B, sin C ഇവയുടെ വിലകൾ സമവാക്യം (1) ൽ ആരോപിക്കുക.

$$a \sin(B - C) = a\left[bk\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) - ck\left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}\right)\right]$$

$$= \frac{k}{2}\left(a^2 + b^2 - c^2 - c^2 - a^2 + b^2\right)$$

$$= k(b^2 - c^2)$$

ഇതുപോലെ, $b \sin(C - A) = k(c^2 - a^2)$

$c \sin(A - B) = k(a^2 - b^2)$

L.H.S $= k(b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2)$

$= 0 =$ R.H.S.

ഉദാഹരണം: 27

h പൊക്കമുള്ള കുത്തനെയുള്ള ഗോപുരമാണ് PQ. A എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് P യെ 45° മേൽക്കോണിൽ കാണുന്നു. മറ്റൊരു ബിന്ദുവായ B യിൽ നിന്ന് P യെ 60° മേൽക്കോണിൽ കാണാം. A യിൽ നിന്നും AB യിലൂടെ B ലേക്കുള്ള ദൂരം d ആണ്. AB യും AQ വും തമ്മിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ 30° ആയാൽ $d = h\left(\sqrt{3} - 1\right)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$\angle PAQ = 45°$, $\angle BAQ = 30°$, $\angle PBH = 60°$ ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

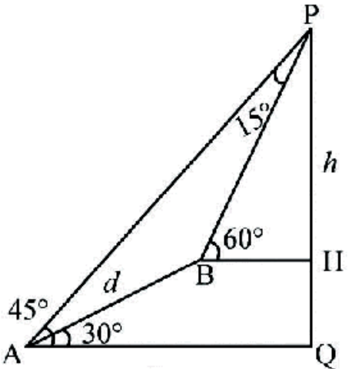
$\angle APQ = 45°, \angle BPH = 30°, \angle APB = 15°$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

$\angle PAB = 15° \Rightarrow \angle ABP = 150°$

ΔAPQ, എന്ന ത്രികോണത്തിൽ നിന്ന് $AP^2 = h^2 + h^2 = 2h^2$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{2}h$$

Δ ABP യിൽ സൈൻസൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ



ചിത്രം 3.51

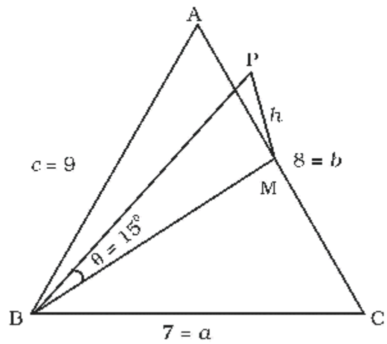
$$\frac{AB}{\sin 15°} = \frac{AP}{\sin 150°} \Rightarrow \frac{d}{\sin 15°} = \frac{\sqrt{2}h}{\sin 150°}$$

അതായത്, $d = \dfrac{\sqrt{2}h \sin 15°}{\sin 30°}$

$= h(\sqrt{3} - 1)$

ഉദാഹരണം: 28

ABC എന്ന ത്രികോണ രൂപത്തിലുള്ള സ്ഥലത്തിന്റെ AC എന്ന വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവായ M ൽ ഒരു വിളക്ക് മരം സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ AB = 9 സെ.മീ., CA = 8 സെ.മീ., BC = 7മീറ്റർ ആകുകയും വിളക്ക് മരം B എന്ന ബിന്ദുവുമായി 15° കോണുണ്ടാക്കുകയും ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ വിളക്കു മരത്തിന്റെ പൊക്കം കാണുക.



ചിത്രം 3.52

പരിഹാരം

$AB = 9 = c$, $BC = 7 = a$

$AC = 8 = b$

AC എന്ന വശത്തിന് മധ്യബിന്ദുവായ M ൽ MP എന്ന h പൊക്കമുള്ള വിളക്ക് മരം സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. വിളക്ക് മരം B യിൽ $\theta = 15°$ കോണുണ്ടാക്കുന്നു.

ΔABC, എന്ന ത്രികോണത്തിൽ കൊസൈൻ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + 64 - 81}{2 \times 7 \times 8} = \frac{2}{7} \qquad (1)$$

അതുപോലെ ΔBMC യിലും കൊസൈൻ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 - 2\ BC \times CM \cos C.$$

ഇവിടെ, $CM = \frac{1}{2}CA = 4$, M എന്നത് AC യുടെ മധ്യബിന്ദുവാണ്.

അങ്ങനെ (1) ഉപയോഗിച്ച്

$$\begin{aligned} BM^2 &= 49 + 16 - 2 \times 7 \times 4 \times \frac{2}{7} \\ &= 49 \\ BM &= 7 \end{aligned}$$

M ൽ മട്ടകോണുള്ള ΔBMP യിൽ നിന്നും,

$$\tan\theta = \frac{PM}{BM} = \frac{h}{7}$$

$$\frac{h}{7} = \tan(15°) = 2 - \sqrt{3}$$

അതായത്, $h = 7(2-\sqrt{3})$ മീറ്റർ

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 3.5

ത്രികോണം ABC യിൽ $a = 18$, $b = 24$, $c = 30$ ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കാണുക.

1. cos A, cos B, cos C

2. sin A, sin B, sin C

ഏതൊരു ത്രികോണം ABC യ്ക്കും ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നവ തെളിയിക്കുക.

3. $$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}$$

4. $$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}}$$

5. $\sin\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{a}\cos\dfrac{A}{2}$

6. $a\,(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2$

7. $a\,(\cos C - \cos B) = 2\,(b-c)\cos^2\dfrac{A}{2}$

8. $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \dfrac{b^2-c^2}{a^2}$

9. $(b+c)\cos\dfrac{B+C}{2} = a\cos\dfrac{B-C}{2}$

10. $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$

11. $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

12. $(b^2-c^2)\cot A + (c^2-a^2)\cot B + (a^2-b^2)\cot C = 0$

13. $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A + \dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B + \dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C = 0$

14. സമതലവുമായി 15° കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഒരു കുന്നിൻ ചെരിവിൽ ഒരു മരം ലംബമായി നില്ക്കുന്നു. മരച്ചുവട്ടിൽ നിന്നും കുന്നിൻ ചരിവിലൂടെ 35 മീറ്റർ താഴേയ്ക്കുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും മരത്തിൻ മുകളിലേക്കുള്ള മേൽക്കോൺ 60° ആണ്. എങ്കിൽ മരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.

15. രണ്ട് കപ്പലുകൾ തുറമുഖത്തുനിന്നും ഒരേ സമയത്ത് പുറപ്പെടുന്നു. ഒന്ന് NE45° എന്ന ദിശയിലേക്ക് 24 കി.മീ./മണിക്കൂറിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു, മറ്റേത് 575° എന്ന ദിശയിലേക്ക് 32 കി.മീ./മണിക്കൂറിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. മൂന്ന് മണിക്കൂറ് കഴിഞ്ഞ് കപ്പലുകൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം കാണുക,

16. ഒരു പുഴയുടെ ഒരേ വശത്തുള്ള രണ്ട് മരങ്ങളാണ് A യും B യും. C എന്ന പുഴയിലെ ബിന്ദുവും A യിലും B യിലും നിന്ന് യഥാക്രമം 250 മീറ്റർ, 300 മീറ്റർ അകലെയാണ്. കോൺ C, 45° ആയാൽ മരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണുക.

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 29

$\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos y = -\frac{12}{13}$ ആകുകയും x, y രണ്ടാമത്തെ ചതുർഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുകയും ആണെങ്കിൽ $\sin (x + y)$ കാണുക.

പരിഹാരം

$$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \ldots (1)$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

അതുകൊണ്ട് $\cos x = \pm\frac{4}{5}$.

x രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ ആയതുകൊണ്ട് $\cos x$ ന്യൂനസംഖ്യയാണ്.

തുടർന്ന് $\cos x = -\frac{4}{5}$

$$\Rightarrow \sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$$

$$\Rightarrow \sin y = \pm\frac{5}{13}$$

y രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ ആയതുകൊണ്ട് $\sin y$ അധിസംഖ്യയാണ്. അതുകൊണ്ട് $\sin y = \frac{5}{13}$. $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$ എന്നിവയുടെ വിലകൾ (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ.

$$\sin(x + y) = \frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{13} = -\frac{36}{65}-\frac{20}{65}=-\frac{56}{65}$$

ഉദാഹരണം : 30

$\cos 2x \cos\frac{x}{2} - \cos 3x \cos\frac{9x}{2} = \sin 5x \sin\frac{5x}{2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{2}\left[2\cos 2x \cos\frac{x}{2} - 2\cos\frac{9x}{2}\cos 3x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}+3x\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}-3x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{15x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{15x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}+\frac{15x}{2}}{2}\right\}\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}-\frac{15x}{2}}{2}\right\}\right]$$

$$= -\sin 5x \, \sin\left(-\frac{5x}{2}\right) = \sin 5x \, \sin\frac{5x}{2} = \text{R.H.S.}$$

ഉദാഹരണം: 31

$\tan\frac{\pi}{8}$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

$x = \frac{\pi}{8}$ എന്നെടുക്കുക. അപ്പോൾ $2x = \frac{\pi}{4}$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$ എന്ന് നമുക്കറിയാം

A Xpsl m v $\tan\frac{\pi}{4} = \dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$

$y = \tan\frac{\pi}{8}$ എന്നെടുക്കുക. അപ്പോൾ $1 = \frac{2y}{1-y^2}$

അതുകൊണ്ട് $y^2 + 2y - 1 = 0$

അതുകൊണ്ട് $y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

$\frac{\pi}{8}$ ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലായതുകൊണ്ട്, $y = \tan\frac{\pi}{8}$ ന്റെ വില അധിസംഖ്യയാണ്.

തുടർന്ന്

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

ഉദാഹരണം: 32

$\tan x = \frac{3}{4}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$, ആയാൽ $\sin\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}$, $\tan\frac{x}{2}$ എന്നിവയുടെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $\cos x$ ന്യൂനസംഖ്യയാണ്.

അതുപോലെ; $$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}.$$

അതുകൊണ്ട് $\sin\frac{x}{2}$ അധിസംഖ്യയാണ്. $\cos\frac{x}{2}$ ന്യൂനസംഖ്യയാണ്.

നമുക്കറിയാം $$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

അതുകൊണ്ട് $$\cos^2 x = \frac{16}{25} \text{ or } \cos x = \frac{4}{5}$$ (എന്തുകൊണ്ട്?)

$$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

അതുകൊണ്ട് $$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

അതുപോലെ $$2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

അതുകൊണ്ട് $$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{(എന്തുകൊണ്ട്?)}$$

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \times \left(\frac{-\sqrt{10}}{1}\right) = -3.$$

ഉദാഹരണം: 33

$\cos^2 x + \cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\text{L.H.S.} = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2} + \frac{1+\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}.$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x+2\cos 2x\cos\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x+2\cos 2x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x-2\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x-\cos 2x\right] = \frac{3}{2} = \text{R.H.S.}$$

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

തെളിയിക്കുക.

1. $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$
2. $(\sin 3x + \sin x)\sin x + (\cos 3x - \cos x)\cos x = 0$

3. $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\cos^2 \dfrac{x+y}{2}$

4. $(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\sin^2 \dfrac{x-y}{2}$

5. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4\cos x \cos 2x \sin 4x$

6. $\dfrac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)} = \tan 6x$

7. $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 4\sin x \cos \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{3x}{2}$

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് $\sin \dfrac{x}{2}$, $\cos \dfrac{x}{2}$, $\tan \dfrac{x}{2}$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. $\tan x = -\dfrac{4}{3}$, x രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു

9. $\cos x = -\dfrac{1}{3}$, x മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു

10. $\sin x = \dfrac{1}{4}$, x രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു

സംഗ്രഹം

- r ആരമുള്ള വൃത്തത്തിലെ l നീളമുള്ള ഒരു ചാപം ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവ് θ റേഡിയൻ ആയാൽ $l = r\theta$
- റേഡിയൻ അളവ് $= \dfrac{\pi}{180} \times$ ഡിഗ്രി അളവ്
- ഡിഗ്രി അളവ് $= \dfrac{180}{\pi} \times$ റേഡിയൻ അളവ്
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- $1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$
- $\cos(2n\pi + x) = \cos x$
- $\sin(2n\pi + x) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$

- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin(\pi - x) = \sin x$

  $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$

  $\cos(2\pi - x) = \cos x$ $\qquad$ $\sin(2\pi - x) = -\sin x$

- $x, y, (x \pm y)$ എന്നീ കോണുകൾ $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഒറ്റസംഖ്യാഗുണിതമല്ലെങ്കിൽ

  $$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

  $$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

- $x, y, (x \pm y)$ എന്നീ കോണുകൾ π ന്റെ പൂർണസംഖ്യാഗുണിതമല്ലെങ്കിൽ

  $$\cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

  $$\cot(x - y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$$

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \dfrac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$

- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
- $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$
- (i) $\cos x + \cos y = 2\cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

  (ii) $\cos x - \cos y = -2\sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$

  (iii) $\sin x + \sin y = 2\sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

  (iv) $\sin x - \sin y = 2\cos \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$
- (i) $2\cos x \cos y = \cos (x+y) + \cos (x-y)$

  (ii) $-2\sin x \sin y = \cos (x+y) - \cos (x-y)$

  (iii) $2\sin x \cos y = \sin (x+y) + \sin (x-y)$

  (iv) $2\cos x \sin y = \sin (x+y) - \sin (x-y)$.
- $\sin x = 0$ ആയാൽ $x = n\pi$, ഇവിടെ $n \in \mathbf{Z}$.
- $\cos x = 0$ ആയാൽ $x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, ഇവിടെ $n \in \mathbf{Z}$.
- $\sin x = \sin y$ ആയാൽ $x = n\pi + (-1)^n y$, ഇവിടെ $n \in \mathbf{Z}$.
- $\cos x = \cos y$, ആയാൽ $x = 2n\pi \pm y$, ഇവിടെ $n \in \mathbf{Z}$.
- $\tan x = \tan y$ ആയാൽ $x = n\pi + y$, ഇവിടെ $n \in \mathbf{Z}$.
- സൈൻ സൂത്രവാക്യം : ഒരു ത്രികോണം ABC യിലെ വശങ്ങളുടെ നീളവും അവക്ക് എതിരെയുള്ള കോണുകളുടെ സൈനും ഒരേ അനുപാതത്തിലാണ്.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

- കൊസൈൻ സൂതൃവാക്യം : ത്രികോണം ABC യിൽ

  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, $c^2 = a^2 + bc^2 - 2ab \cos C$

ചരിത്രക്കുറിപ്പ് (Historical note)

ത്രികോണമിതിയെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനം തുടങ്ങുന്നത് ഇന്ത്യയിൽ തന്നെയാണ്. ആര്യഭടൻ (എ.ഡി. 476), ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ (എ.ഡി. 598) ഭാസ്ക്കര I (എ.ഡി. 600) ഭാസ്ക്കര II (എ.ഡി. 1114) തുടങ്ങിയ പ്രാചീന ഇന്ത്യൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർ ത്രികോണമിതിയിലെ പല സുപ്രധാന ഫലങ്ങളും കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്. ഇവർ കണ്ടെത്തിയ ഈ അറിവുകൾ ആദ്യം അറേബ്യയിലേക്കും പിന്നീട് യൂറോപ്പിലേക്കും കൈമാറ്റം ചെയ്യപ്പെട്ടു. ഗ്രീക്കുകാരും ത്രികോണമീതി പഠനം തുടങ്ങിയെങ്കിലും അവരുടെ രീതി വിലക്ഷണമായതിനാൽ ഇന്ത്യൻ ശാസ്ത്രജ്ഞരുടെ സമീപനം വളരെപ്പെട്ടെന്നു തന്നെ ലോകം മുഴുവനും അംഗീകരിക്കപ്പെടുകയായിരുന്നു. ഒരു കോണിന്റെ സൈൻ മൂല്യവും സൈൻ ഏകദവും ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരുടെ 'സിദ്ധാന്ത'ങ്ങളിലെ (സംസകൃതത്തിലുള്ള ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രഗ്രന്ഥങ്ങൾ) ഒരു പ്രധാന കണ്ടെത്തലാണ്.

90^0 ൽ കൂടുതലുള്ള കോണുകളുടെ സൈൻ ഏകദത്തിന്റെ വിലകാണാനുള്ള മാർഗം ഭാസ്ക്കര I(ഏകദേശം എഡി 600) രൂപീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. $\sin(A+B)$ യുടെ വിപുലനത്തിന്റെ തെളിവ് 16-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ എഴുതപ്പെട്ട യുക്തിഭാഷ എന്ന മലയാള ഗണിത പുസ്തകത്തിൽ പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്. സൈൻ അല്ലെങ്കിൽ കൊസൈൻ ഏകദത്തിന്റെ $18°, 36°, 54°, 72°$ തുടങ്ങിയ വിലകൾ ഭാസ്ക്കര II കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്.

ജ്യോതിശാസ്ത്രജ്ഞാനിയായിരുന്ന സർ ജോൺ ഹെർസിഹേൽ (1813) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$,എന്നിവയെ arc sine, arc cosine എന്നിങ്ങനെ മാറ്റി എഴുതണമെന്ന് നിർദ്ദേശിച്ചു. ഥേൽസ് (ഏകദേശം ബിസി 600) നിയതമായി ത്രികോണമിതിയിലെ ദൂരവും ഉന്നതിയും ഉൽപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ കൈകാര്യം ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ഈജിപ്ടിലെ ഭീമൻ പിരമിഡിന്റെ ഉയരം അതിന്റെ നിഴലിന്റെയും, നീളം അറിയാവുന്ന ഒരു വടിയുടെയും നീളങ്ങൾ അളന്നുകൊണ്ട് കണ്ടുപിടിച്ചത് എക്കാലത്തും അംഗീകരിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan\ (\text{സൂര്യന്റെ ഉന്നതി കോൺ})$$

കടലിൽ കിടക്കുന്ന ഒരു കപ്പൽ എത്ര അകലെയാണെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാൻ സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ അനുപാതം എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ചു ഥേൽസ് കണ്ടുപിടിച്ചു എന്നു പറയപ്പെടുന്നു. ദൂരവും ഉന്നതിയും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ ഗുണധർമങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാൻ പ്രാചീന ഭാരതീയ ഗണിതജ്ഞർ പ്രയത്നിച്ചിരുന്നു എന്ന് കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്.

A1W9G9

അധ്യായം 4

ഗണിതാഗമന തത്ത്വം (PRINCIPLE OF MATHEMATICAL INDUCTION)

❖ *വിശ്ലേഷണവും സ്വാഭാവിക തത്വശാസ്ത്രവും അവയുടെ ഏറ്റവും പ്രധാനപ്പെട്ട കണ്ടുപിടുത്തങ്ങൾക്ക് ആഗമനരീതി എന്നറിയപ്പെടുന്ന ഫലദായകമായ രീതിയോടാണു കടപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്. ദ്വിപദസിദ്ധാന്തത്തിനും പ്രപഞ്ച ഗുരുത്വാകർഷണ തത്വത്തിനും ന്യൂട്ടൺ അതിനോട് കടപ്പെട്ടു - ലാപ്ലാസ്* ❖

4.1 ആമുഖം

ഗണിതശാസ്ത്രം യുക്തിചിന്തയിലധിഷ്ഠിതമാണെന്ന് അറിയാമല്ലോ. യുക്തിചിന്ത പ്രധാനമായും നിഗമനരീതി, ആഗമനരീതി (Deduction and Induction) എന്നിവയിൽ അധിഷ്ഠിതമാണ്. ഒരു ഗണിത പ്രസ്താവനയുടെ സാധുത പരിശോധിക്കുവാൻ നിഗമനരീതി ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്.

ജി. പിയാനോ
(1858-1932)

ഉദാഹരണമായി ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ പരിഗണിക്കുക.

(i) 8 എന്ന സംഖ്യയെ 2 കൊണ്ട് പൂർണമായി ഹരിക്കാൻ സാധ്യമാണ്.

(ii) 2 കൊണ്ട് ഹരിക്കാൻ സാധ്യമായ സംഖ്യകളെല്ലാം ഇരട്ടസംഖ്യകളാണ്.

ആയതിനാൽ

(iii) 8 ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്.

മുകളിലെ പ്രസ്താവനകളിൽ ഒന്നാമത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും പ്രസ്താവനകൾ ശരിയാണെങ്കിൽ മൂന്നാമത്തെ പ്രസ്താവനയും ശരിയായിരിക്കും. പൊതുവായ രീതിയിൽ നിന്നും പ്രത്യേക സവിശേഷ രീതിയിലേക്കുള്ള പ്രയോഗമാണ് നിഗമന രീതി എന്ന് കാണാവുന്നതാണ്.

അടുത്തതായി ഒരു തലത്തിലെ ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണളവുകളുടെ തുക $180°$ എന്ന് തെളിയിക്കണമെന്നിരിക്കട്ടെ, നമ്മുടെ സമീപനം എന്തായിരിക്കും? പ്രതലത്തിലെ കുറെ ത്രികോണങ്ങൾ പരിഗണിച്ച്, ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും കോണ

ഉവുകളുടെ തുക പരിശോധിച്ച്, പൊതുവായ ഒരു അനുമാനത്തിലെത്തിച്ചേരുക യാകും ചെയ്യുന്നത്.

ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്നും പൊതുവായ അനുമാനങ്ങളിലേക്ക് എത്തിച്ചേരുന്നത് എപ്പോഴും സ്വീകരിക്കാവുന്ന ഒരു രീതിയാണോ?

"n എന്ന ഏതൊരു എണ്ണൽസംഖ്യയ്ക്കും $n^2 + n + 41$ ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയാ യിരിക്കും" എന്ന പ്രസ്താവന പരിഗണിക്കുക. $n = 1$ എന്ന വിലയ്ക്കു പ്രസ്താ വനശരിയാണെന്ന് കാണാം.

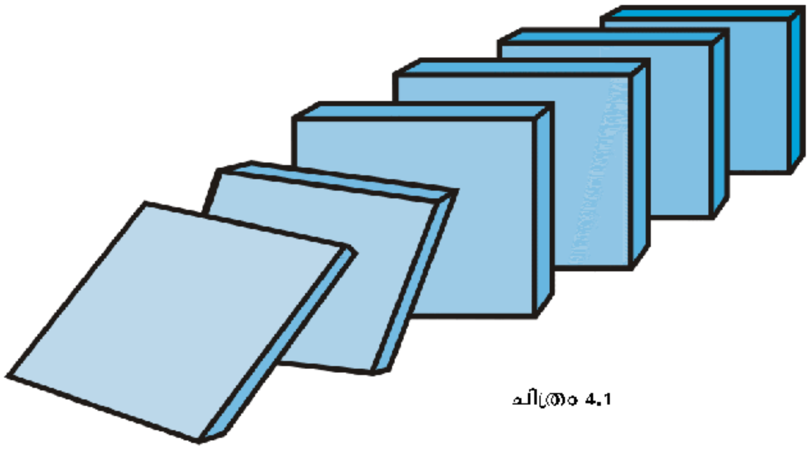
$n = 2, 3, 4$ .... 39 എന്നീ വിലകൾ നൽകിയാലോ?

$n = 40$ ആയാലോ? ചെയ്തു നോക്കൂ.

ഉദാഹരണങ്ങളെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ള സാമാന്യവത്കരണം എപ്പോഴും ശരി യാകണമെന്നില്ല. ഇതിന് മറ്റൊരു രീതി അനിവാര്യമാണ്.

4.2 പ്രചോദനം (Motivation)

ആഗമനരീതിയെ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കുന്നു എന്ന് പരി ശോധിക്കാം. ഒരു കൂട്ടം ടൈലുകൾ ചിത്രം 4.1 ലേതു പോലെ ഒരു വരിയിൽ ക്രമീ കരിച്ചിരിക്കുന്നതായി കരുതുക.



ചിത്രം 4.1

ആദ്യത്തെ ടൈൽ നിശ്ചിത ദിശയിൽ വീണാൽ മറ്റെല്ലാ ടൈലുകളും വീഴുമെന്ന് കാണാൻ കഴിയും. എല്ലാ ടൈലുകളും വീണുവെന്ന് ഉറപ്പുവരുത്തുവാൻ താഴെ പറ യുന്ന കാര്യങ്ങൾ തീർച്ചയായും സംഭവിച്ചിരിക്കണം.

(a) ഒന്നാമത്തെ ടൈൽ വീഴണം

(b) ഏതെങ്കിലും ഒരു ടൈൽ വീണാൽ അതിനെ തുടർന്നുവരുന്ന ടൈൽ നിർബന്ധമായും വീണിരിക്കുകയും വേണം.

ഇതാണ് ആഗമനരീതിയിൽ അന്തർലീനമായ തത്ത്വം.

വിശദീകരണം

ആദ്യ n എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക കാണണമെന്നിരിക്കട്ടെ, അതായത് $n = 3$ ആയാൽ $1 + 2 + 3$ എന്നും, $n = 4$ ആയാൽ $1 + 2 + 3 + 4$ എന്നും തുടർന്ന്

$1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ എന്ന സൂത്രവാക്യത്തിലേക്കാണ് എത്തിച്ചേരേണ്ടത്.

ഈ സൂത്രവാക്യം എങ്ങനെ തെളിയിക്കും? 'n' ന്റെ ഏത് വിലയ്ക്കും മേൽ പ്രസ്താവന ശരിയാണെന്ന് കാണാം. 'n' ന്റെ എല്ലാ വിലകൾക്കും ഈ പ്രസ്താവനയുടെ സാധുത പരിശോധിക്കാൻ കഴിയുമോ? എന്തുകൊണ്ട്?

മേൽപറഞ്ഞ പ്രസ്താവന തെളിയിക്കുന്നതിന് ഏതെങ്കിലും ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യക്ക് ഈ പ്രസ്താവന ശരിയാകുന്നുണ്ടെങ്കിൽ തുടർന്നുവരുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കും ഈ പ്രസ്താവന ശരിയാകുന്നുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിച്ചാൽ മതിയല്ലോ? ഈ അനന്തമായ പ്രക്രിയ ആഗമന രീതി (Induction method)യിലേയ്ക്കുള്ള ചുവടുവയ്പായി വിവക്ഷിക്കാവുന്നതാണ്.

4.3 ഗണിതാഗമന തത്ത്വം (Principle of Mathematical Induction)

മുൻപ് കൊടുത്തിട്ടുള്ള വിശദീകരണത്തിൽ നിന്നും ഗണിതാഗമന രീതിയുടെ അടിസ്ഥാന തത്ത്വം ചുവടെ കൊടുത്ത വിധത്തിൽ സംഗ്രഹിക്കാം.

'n' എന്ന ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഒരു പ്രസ്താവനയാണ് $P(n)$ എന്നു കരുതുക. ഏതൊരു എണ്ണൽസംഖ്യയ്ക്കും $P(n)$ ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കാൻ ചുവടെയുള്ളവ തെളിയിച്ചാൽ മതി.

1. $P(1)$ ശരിയാകണം
2. 'k' എന്ന ഏതൊരു എണ്ണൽസംഖ്യയ്ക്കും $P(k)$ എന്ന പ്രസ്താവന ശരിയാണെങ്കിൽ, $P(k + 1)$ ശരിയാകണം

എങ്കിൽ $P(n)$ എന്ന പ്രസ്താവന എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കും ശരിയായിരിക്കും.

ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ $P(n)$ എന്ന (തന്നിരിക്കുന്ന) പ്രസ്താവന $n \geq 4$ എന്ന വിലകൾക്കു മാത്രമേ ശരിയാകുകയുള്ളൂ എന്നു കരുതുക.

അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ $n = 4$ എന്ന വില നൽകി വേണം നമുക്കു തുടങ്ങാൻ, അതായത് $P(4)$ എന്ന പ്രസ്താവന ശരിയാണെന്ന് പരിശോധിച്ചുവേണം ഇത്തരം സാഹചര്യങ്ങൾ ആരംഭിക്കേണ്ടത്.

രണ്ടാമത്തെ സവിശേഷത ഒരു നിബന്ധനയാണ്. ഇത് $P(n)$ എന്ന പ്രസ്താവന $n = k$ എന്ന വിലയ്ക്ക് ശരിയാണ് എന്നല്ല പ്രസ്താവിക്കുന്നത് മറിച്ച് $n = k$ എന്ന വിലയ്ക്ക് $P(n)$ ശരിയായാൽ ആ പ്രസ്താവന $n = (k + 1)$ നും ശരിയായിരിക്കും

എന്നാണ്. അതുകൊണ്ട് ഈ സവിശേഷത പരിശോധിക്കുവാൻ "P(n) എന്ന പ്രസ്താവന $n = k$ എന്ന വിലയ്ക്ക് ശരിയാകുകയാണെങ്കിൽ $n = (k + 1)$ എന്ന വിലയ്ക്കും ശരിയായിരിക്കും" എന്ന് തെളിയിച്ചാൽ മതി. ഈ രീതിയെ ആഗമനരീതിയെന്ന് വിളിക്കാറുണ്ട്, ആഗമനരീതിയിൽ $n = k$ എന്ന വിലയ്ക്ക് P(n) ശരിയാണ് എന്ന അനുമാനത്തിനെ ആഗമനിക പരികൽപനയെന്നും പറയുന്നു.

ഈ രീതി ഗണിത തത്ത്വങ്ങളെ സമഗ്രമായി വിശദീകരിക്കുന്നതിൽ മുഖ്യപങ്ക് വഹിക്കുന്നു. പ്രത്യേകിച്ച് എണ്ണൽസംഖ്യകളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രമേയങ്ങളുടെ തെളിവിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന കൃത്യമായ രീതിയാണിത്. പ്രശസ്ത ഗണിതജ്ഞനായ യൂക്ലിഡ് (Euclid, ബി.സി. 300) അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ എണ്ണം അനന്തമാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുന്നതിന് ആഗമനയുക്തി പ്രയോഗിച്ചതായി കാണാം.

ആഗമനയുക്തിയുടെ സമീപനം ഗണിതസിദ്ധാന്തങ്ങളെ യാന്ത്രികമായി പ്രയോഗിക്കുന്നതിൽ നിന്നും വ്യത്യസ്തമായി ഗണിത ആശയങ്ങളെ തെളിവുകളിലൂടെയും വിശകലനങ്ങളിലൂടെയും സൃഷ്ടിപരമായ രീതിയിൽ അവലോകനം ചെയ്യാൻ സഹായിക്കുന്നു.

ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന സംഖ്യാപാറ്റേൺ പരിഗണിക്കുക.

$$1 = 1^2 = 1$$
$$4 = 2^2 = 1 + 3$$
$$9 = 3^2 = 1 + 3 + 5$$
$$16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$$

– – – – – – – – – – – –

– – – – – – – – – – – –

ഇതിൽ നിന്നും ആദ്യ രണ്ട് ഒറ്റ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക രണ്ടാമത്തെ എണ്ണൽ സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിന് തുല്യവും ആദ്യത്തെ മൂന്ന് ഒറ്റ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക മൂന്നാമത്തെ എണ്ണൽസംഖ്യയുടെ വർഗത്തിന് തുല്യമാണെന്നും കാണാം. ഈ സവിശേഷത തുടർന്നുവരുന്ന സംഖ്യകൾക്കും ശരിയാകുന്നുവെന്നും മനസിലാക്കാവുന്നതാണ്. അതായത്, $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2n - 1) = n^2$ എന്ന നിഗമനത്തിലെത്തിച്ചേരാൻ കഴിയും. ആയതിനാൽ "ആദ്യത്തെ 'n' ഒറ്റ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക n^2 ആയിരിക്കും". ഇത് ഗണിതാഗമനരീതി ഉപയോഗിച്ച് എങ്ങനെ തെളിയിക്കാമെന്ന് പരിശോധിക്കാം.

തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവന P(n) ആയി പരിഗണിക്കുക.

$$P(n): 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

ഏതൊരു എണ്ണൽസംഖ്യ 'n' നും P(n) ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കണം.

ഗണിതാഗമന രീതിയുടെ അടിസ്ഥാനസവിശേഷത പ്രകാരം P(1) ശരിയാകണം. $1 = 1^2$ ആയതിനാൽ P(1) ശരിയാകുന്നു.

ആഗമന രീതിയനുസരിച്ച് 'k' എന്ന ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയ്ക്ക് P(k) ശരിയാണെന്ന് അനുമാനിക്കുക.

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k^2 \text{ .... } (1)$$

ഇനി P(k − 1) ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കണം.

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2 \text{ ....}(2)$$

അതായത് P(k + 1) ശരിയാകുന്നുവെന്ന് കാണാം. അതുകൊണ്ട് ഗണിതാഗമനരീതിയുടെ തത്ത്വമനുസരിച്ച് P(n) എന്ന പ്രസ്താവന 'n' എന്ന ഏതൊരു എണ്ണൽ സംഖ്യയ്ക്കും ശരിയായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 1

ഏതൊരു എണ്ണൽസംഖ്യ $n \geq 1$ നും $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവന P(n) എന്നിരിക്കട്ടെ,

$$\text{അതായത്, } P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 1$ ആയാൽ

$$P(1) : 1 = \frac{1(1 + 1)\ (2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1 \text{ എന്നത് ശരിയാണ്.}$$

k എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യക്ക് P(k) ശരിയാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക.
അതായത്,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \text{ ആണ് --------}(1)$$

ഇനി P(k + 1) ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കണം. അതിനായി,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \text{ (സമവാക്യം (1) ഉപയോഗിച്ച്)}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1+1)\left[2(k+1)+1\right]}{6}$$

P(k) ശരിയാകുമ്പോൾ P(k + 1) ശരിയാകുന്നു.
ആയതിനാൽ ഗണിതാഗമനരീതിയുടെ തത്ത്വം അനുസരിച്ച് P(n) എന്ന പ്രസ്താവന ഏതൊരു എണ്ണൽസംഖ്യ 'n' നും ശരിയായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 2

ഗണിതാഗമന തത്തമുപയോഗിച്ച് ഏതൊരു പൂർണ അധിസംഖ്യ 'n' നും $2^n > n$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവന P(n) എന്നിരിക്കട്ടെ, അതായത് P(n) : $2^n > n$
$n -1$ ആയാൽ $2^1 = 2 > 1$ ആണ്. അതുകൊണ്ട് P(1) ശരിയാണ്.
k എന്ന പൂർണ അധിസംഖ്യക്ക് P(k) ശരിയാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക.

അതായത്, $2^k > k$ ആണ് ....(1)

P(k + 1) ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കണം.
സമവാക്യം (1) ന്റെ ഇരുവശത്തും. 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ $2.\ 2^k > 2k$
അതായത് $2^{k-1} > 2k = k + k > k + 1$
അതുകൊണ്ട് P(k) ശരിയാകുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിലെല്ലാം P(k + 1) ശരിയാകുന്നു.
ആയതുകൊണ്ട് ഗണിതാഗമന തത്ത്വപ്രകാരം ഏതൊരു പൂർണഅധിസംഖ്യ n നും P(n) ശരിയാണ്.

ഉദാഹരണം: 3

n ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാൽ $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

P(n): $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ എന്ന് കരുതുക.

P(1): $\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$ എന്നത് ശരിയാണ്. അതുകൊണ്ട് P(1) ശരിയാകുന്നു.

k എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യയ്ക്ക് P(k) ശരിയാണെന്ന് സങ്കൽപിക്കുക.

അതായത്, $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$ ---------(1)

P(k + 1) ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കണം

അതിനുവേണ്ടി,

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$ (സമവാക്യം (1) ഉപയോഗിച്ച്)

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k^2+2k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$

അതായത് P(k) ശരിയാകുമ്പോൾ P(k + 1) ശരിയാകുന്നുവെന്ന് കാണാം. അതുകൊണ്ട് ഗണിതാഗമനരീതിയുടെ തത്ത്വമനുസരിച്ച് ഏതൊരു എണ്ണൽസംഖ്യ n നും P(n) ശരിയാണ്.

ഉദാഹരണം : 4

n എന്ന ഏതൊരു എണ്ണൽസംഖ്യയ്ക്കും $7^n - 3^n$ നെ 4 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാവുന്നതാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനയെ P(n) എന്ന് കരുതുക. P(n) : $7^n - 3^n$ നെ 4 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാവുന്നതാണ്. **P(1)**: $7^1 - 3^1 = 4$, നിശേഷം 4 കൊണ്ട് ഹരിക്കാവുന്നതാണ്. അതായത് P(1) ശരിയാണ്. ഏതൊരു എണ്ണൽസംഖ്യ 'k' യ്ക്കും P(k) ശരിയാണെന്ന് അനുമാനിക്കാം, അതായത് **P(k)** : $7^k - 3^k$ എന്നതിനെ 4 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം.

$7^k - 3^k = 4d$, $d \in \mathbf{N}$, എന്നിരിക്കട്ടെ

$P(k + 1)$ ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കണം,

$$
\begin{aligned}
7^{(k+1)} - 3^{(k-1)} &= 7^{k+1} - 7.3^{k} + 7.3^{k} - 3^{k+1}\\
&= 7(7^{k} - 3^{k}) + (7 - 3)3^{k}\\
&= 7(4d) + (7 - 3)3^{k}\\
&= 7(4d) + 4.3^{k}\\
&= 4(7d + 3^{k})
\end{aligned}
$$

ഇതിൽ നിന്നും $7^{k-1} - 3^{k+1}$ എന്നതിനെയും 4 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാവുന്നതാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. അതായത് $P(k + 1)$ ശരിയാകുന്നുവെന്ന് കാണാം. അതുകൊണ്ട് ഗണിതാഗമന തത്ത്വപ്രകാരം $P(n)$ എന്ന പ്രസ്താവന എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യ 'n' നും ശരിയായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 5

-1 നെക്കാൾ വലുതായ ഒരു രേഖീയസംഖ്യയാണ് 'x' എങ്കിൽ ഏതൊരു എണ്ണൽ സംഖ്യ 'n' നും $(1 + x)^{n} \geq (1 + nx)$ എന്ന് ഗണിതാഗമന തത്ത്വം ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$x > -1$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവന, $P(n)$: $(1 + x)^{n} \geq (1 + nx)$ എന്നിരിക്കട്ടെ,

$n = 1$ ആയാൽ $P(1)$: $1 + x = 1 + x$. ശരിയാണ്.

$$P(k): (1 + x)^{k} \geq (1 + kx),\ x > -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

എന്ന പ്രസ്താവന ശരിയാണെന്ന് അനുമാനിച്ചാൽ, $P(k + 1)$ ശരിയായിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കണം.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യം പരിഗണിക്കുക.

$$(1 + x)^{k\ \ 1} = (1 + x)^{k}\,(1 + x) \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$x > -1$ ആയതിനാൽ $(1+x) > 0$ ആകും,

സമവാക്യം (1), (2) എന്നിവ പ്രകാരം

$$(1 + x)^{k-1} \geq (1 + kx)(1 + x)$$

$$(1 + x)^{k-1} \geq (1 + x + kx + kx^{2}) \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ഇവിടെ 'k' ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയും $x^{2} \geq 0$ ഉം ആയതിനാൽ $kx^{2} \geq 0$ ആകുന്നു.

$$(1 + x)^{k\ \ 1} \geq (1 + x + kx + kx^{2}) \geq (1 + x + kx),$$

അതുകൊണ്ട്,

$$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + x + kx)$$

$$(1 + x)^{k-1} \geq [1 + (k + 1)x]$$

ഇതിൽ നിന്നും $P(k+1)$ ശരിയാണെന്ന് കാണാം. അതുകൊണ്ട് ഗണിതാഗമന തത്ത്വം അനുസരിച്ച് $P(n)$ എന്ന പ്രസ്താവന എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കും ശരിയാണ്.

ഉദാഹരണം: 6

ഏതൊരു എണ്ണൽസംഖ്യ 'n' നും $2.7^n + 3.5^n - 5$ നെ 24 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാവുന്നതാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$P(n) : 2.7^n + 3.5^n - 5$ നെ 24 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം എന്ന പ്രസ്താവന പരിഗണിക്കുക.

$n = 1$ ആയാൽ $P(1) : 2.7 + 3.5 - 5 = 24$. ഇത് 24 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാവുന്നതിനാൽ $P(1)$ ശരിയാണ്.

$P(k)$ ശരിയാണെന്ന് സങ്കൽപിച്ചാൽ

$$P(k) : 2.7^k + 3.5^k - 5 = 24q,\ q \in \mathbf{N} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$P(k+1)$ ശരിയാകുമെന്ന് തെളിയിക്കണം

$$P(k+1) : 2.7^{k+1} + 3.5^{k+1} - 5 = 2.7^k . 7 + 3.5^k . 5 - 5$$

$$= 7\,[2.7^k + 3.5^k - 5 - 3.5^k + 5] + 3.5^k . 5 - 5$$

$$= 7\,[24q - 3.5^k + 5] + 15.5^k - 5$$

$$= 7 \times 24q - 21.5^k + 35 + 15.5^k - 5$$

$$= 7 \times 24q - 6.5^k + 30$$

$$= 7 \times 24q - 6\,(5^k - 5)$$

$= 7 \times 24q - 6\,(4p)$ ($5^k - 5$ എന്നത് 4 ന്റെ ഗുണിതമാണ്. എന്തുകൊണ്ട്?)

$$= 7 \times 24q - 24p$$

$$= 24\,(7q - p)$$

$= 24 \times r$; ഇവിടെ $r = 7q - p$, എന്നത് ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയാണ്

ഇതിൽ നിന്നും $P(k+1)$ എന്നത് 24 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാവുന്നതാണെന്ന് കാണാം. അതായത് $P(k)$ ശരിയാകുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ $P(k+1)$ ശരിയാകുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഗണിതാഗമന തത്ത്വമനുസരിച്ച് എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കും $P(n)$ ശരിയാണ്.

ഉദാഹരണം: 7

$1^2 + 2^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}$, $n \in \mathbf{N}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$P(n) : 1^2 + 2^2 + ... + n^2 > \frac{n^3}{3}$, $n \in \mathbf{N}$ എന്ന് കരുതുക.

$n = 1$ ആയാൽ $P(1) : 1^2 > \frac{1^3}{3}$, P(1) ശരിയാണ്.

$P(k)$ ശരിയാണെന്ന് സങ്കൽപിക്കുക.

$P(k) : 1^2 + 2^2 + ... + k^2 > \frac{k^3}{3}$ ....(1)

$P(k + 1)$ ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കണം.

അതിനായി,

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2$

$$= \left(1^2 + 2^2 + ... + k^2\right) + (k+1)^2 > \frac{k^3}{3} + (k+1)^2$$

(സമവാക്യം (1) ഉപയോഗിച്ച്)

$$= \frac{1}{3}\,[k^3 + 3k^2 + 6k + 3]$$

$$= \frac{1}{3}\,[(k + 1)^3 + 3k - 2] > \frac{1}{3}\,(k + 1)^3$$

അപ്പോൾ $P(k + 1)$ ശരിയാണെന്ന് കാണാം

ഗണിതാഗമന തത്ത്വമനുസരിച്ച് $P(n)$ എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കും ശരിയാകുന്നു എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം: 8

$(ab)^n = a^n b^n$ എന്ന കൃത്യങ്കനിയമം ഗണിതാഗമന തത്ത്വമനുസരിച്ച് എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കും ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$P(n) : (ab)^n = a^n b^n$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ $n = 1$ ആയാൽ $(ab)^1 = a^1 b^1$ ആയതിനാൽ P(1) ശരിയാണ്.

ഇനി $P(k)$ ശരിയാണെന്ന് അനുമാനിക്കാം. അതായത്

$$(ab)^k = a^k b^k \text{ .... } (1)$$

P(k + 1) ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കണം

അതിനായി P(k + 1) : $(ab)^{k\ \ 1} = (ab)^k\,(ab)$

$= (a^k\, b^k)\,(ab)$ (സമവാക്യം (1) ഉപയോഗിച്ച്)

$= (a^k\,.\,a^1)\,(b^k\,.\,b^1)$

$= a^{k\,1}\,.\,b^{k\ 1}$

അപ്പോൾ P(k + 1) ശരിയാണെന്ന് കാണാം. അതുകൊണ്ട് ഗണിതാഗമന തത്ത്വമനുസരിച്ച് ഏതൊരു എണ്ണൽസംഖ്യ n നും P(n) ശരിയാണ്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 4.1

ഗണിതാഗമന തത്ത്വം ഉപയോഗിച്ച്, ഏതൊരു എണ്ണൽസംഖ്യ 'n' നും ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

1. $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n\ \ 1} = \dfrac{(3^n - 1)}{2}$.

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

3. $1 + \dfrac{1}{(1+2)} + \dfrac{1}{(1+2+3)} + \ldots + \dfrac{1}{(1+2+3+\ldots n)} = \dfrac{2n}{(n+1)}$.

4. $1.2.3 + 2.3.4 + \ldots \quad n(n+1)\,(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

5. $1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \ldots - n.3^n = \dfrac{(2n-1)3^{n\ 1} + 3}{4}$.

6. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots - n.(n+1) = \left[\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$.

7. $1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + (2n-1)\,(2n+1) = \dfrac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$.

8. $1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots \quad n.2^n = (n-1)\,2^{n-1} + 2$.

9. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$.

10. $\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{(6n+4)}$.

11. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

12. $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$.

13. $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\ldots\left(1+\frac{(2n+1)}{n^2}\right)=(n+1)^2$.

14. $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=(n+1)$.

15. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

16. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{(3n+1)}$.

17. $\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{3(2n+3)}$.

18. $1 + 2 + 3 + \ldots - n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$.

19. $n(n+1)(n+5)$ എന്നത് 3 ന്റെ ഗുണിതമാകുന്നു.

20. $10^{2n-1} + 1$ എന്നത് 11 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാവുന്നതാണ്.

21. $x^{2n} - y^{2n}$ എന്നത് $x + y$ കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാവുന്നതാണ്.

22. $3^{2n+2} - 8n - 9$ എന്നത് 8 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാവുന്നതാണ്.

23. $41^n - 14^n$ എന്നത് 27 ന്റെ ഗുണിതമാകുന്നു.

24. $(2n+7) < (n+3)^2$.

സംഗ്രഹം

- ഗണിത യുക്തിചിന്തയുടെ പ്രധാനപ്പെട്ട അടിസ്ഥാനം നിഗമനരീതിയാണ്. നിഗമനരീതിയിൽ നിന്നും വ്യത്യസ്തമായി ആഗമനരീതിയിൽ ഓരോ സാഹചര്യങ്ങളും പ്രത്യേകം പരിശോധിച്ച് ഒരു പൊതു അനുമാനത്തിൽ എത്തിച്ചേരുന്നു. ചുരുക്കി പറഞ്ഞാൽ ആഗമനരീതി സൂക്ഷ്മ വിവരങ്ങളിൽ നിന്നും പൊതു ആശയങ്ങളിലേക്ക് എത്തിച്ചേരലാണ്.
- ഗണിതാഗമനരീതി എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച് വ്യത്യസ്തങ്ങളായ ഗണിത പ്രസ്താവനകൾ തെളിയിക്കാൻ കഴിയും. ഓരോ പ്രസ്താവനകളെയും n എന്ന പൂർണ്ണ അധിസംഖ്യയുമായി ചേർന്ന് വരുന്ന $P(n)$ ആയി എടുക്കുകയും $n = 1$ ന് പരിശോധിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. തുടർന്ന് k എന്ന പൂർണ്ണ അധിസംഖ്യയ്ക്ക് $P(k)$ ശരിയാണെന്ന് അനുമാനിച്ച് $P(k+1)$ ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുന്നു.

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ മറ്റു ആശയങ്ങളോ, രീതികളോ പോലെ ഗണിതാഗമന തത്ത്വത്തിന്റെ തെളിവും ഒരു പ്രത്യേക വ്യക്തിയുടെ കണ്ടുപിടുത്തമോ, സംഭാവനയോ അല്ല. എന്നാൽ പൈഥഗോറസിന്റെ (ബി.സി. 570 - 495) കാലഘട്ടത്തിൽ തന്നെ ഗണിതാഗമന തത്ത്വത്തെക്കുറിച്ച് അറിവുള്ളതായി നിരീക്ഷിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

ആഗമനയുക്തിയുടെ മറ്റൊരു വ്യക്തമായ സൂചന 17-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ബ്ലെയ്സ് പാസ്കൽ (Blaise Pascal 1623 - 1662) അദ്ദേഹത്തിന്റെ രചനകളിൽ നൽകിയിരുന്നു. പാസ്കൽ ത്രികോണം (Pascal's Triangle) എന്ന പേരിൽ ഇപ്പോൾ അറിയപ്പെടുന്ന സിദ്ധാന്തത്തിൽ അദ്ദേഹം പൊതുവായ രീതി നിർവചിക്കുന്നതിന് പകരം ആഗമനരീതി അനുവർത്തിച്ചതായി കാണാം. ${}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r+1} = {}^{n+1}C_{r+1}$ എന്ന പൊതുവായ പ്രസ്താവന രൂപപ്പെട്ടത് 19-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ മാത്രമാണ്.

ആഗമനരീതി (Induction) എന്ന പദം അവതരിപ്പിച്ചത് ഇംഗ്ലീഷ് ഗണിതജ്ഞനായ ജോൺ വാലിസ് (John Wallis 1616 - 1703) ആണ്. തുടർന്ന് ബൈനോമിയൽ സിദ്ധാന്തം ആവിഷ്കരിക്കുന്നതിന് ഈ തത്ത്വം പ്രയോഗിച്ചതായി കാണാൻ കഴിയും.

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ വിവിധ മേഖലകളിൽ മഹത്തായ സംഭാവനകൾ നൽകിയ ദ് മോർഗൺ (Augustus De Morgan, 1806 - 1871) എന്ന ഗണിത ശാസ്ത്രവിദഗ്ദ്ധനാണ് ഗണിതാഗമനരീതി (Mathematical Induction) എന്ന പദം ആദ്യമായി വിശദീകരിച്ചത്. അഭിസരണ ഗണിത അനുക്രമങ്ങളുമായി (Convergent of Mathematical Series) ബന്ധപ്പെട്ട നിയമം വികസിപ്പിച്ചത് ഇദ്ദേ ഹമാണ്.

ഒരു ഗണത്തിൽ സ്പഷ്ടമായി പ്രസ്താവിച്ച അനുമാനങ്ങളിൽ നിന്നും എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ സവിശേഷതകൾ നിഗമനം ചെയ്തത് ജി. പിയാനോ (G. Peano) എന്ന ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനാണ്. പിയാനോയുടെ സ്വയംപ്രമാ ണങ്ങൾ (Peano's axioms) എന്ന പേരിൽ ഇപ്പോൾ അറിയപ്പെടുന്ന സിദ്ധാന്ത ങ്ങളിലൊന്നിന്റെ പുനഃപ്രസ്താവനയാണ് ഗണിതാഗമന തത്വം.

D6A5L6

അധ്യായം **5**

സമ്മിശ്രസംഖ്യകളും രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങളും (COMPLEX NUMBERS AND QUADRATIC EQUATIONS)

❖ *ശാസ്ത്രങ്ങളുടെ രാജ്ഞിയാണ് ഗണിതം, ഗണിതത്തിന്റെ രാജ്ഞിയാണ് അങ്കഗണിതം – ഗോസ്* ❖

5.1 ആമുഖം

ആദ്യകാലങ്ങളിൽ നാം സംഖ്യകൾ എണ്ണാൻ വേണ്ടി മാത്രമാണ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്. ഒരാളുടെ പരിമിതമായ ആവശ്യങ്ങൾക്ക് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ മതിയായിരുന്നു. എന്നാൽ മനുഷ്യന്റെ ദൈനംദിന ആവശ്യങ്ങളുടെ വർദ്ധനവിനനുസൃതമായി ഗണിതപരമായ ആവശ്യങ്ങൾ വർദ്ധിക്കുകയും പുതിയ സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തേണ്ടിവരികയും ചെയ്തു. ന്യൂനസംഖ്യകൾ സ്വീകരിക്കുന്നതു വരെ $x + 3 = 2$ പോലുള്ള സമവാക്യങ്ങൾക്ക് പരിഹാരമില്ല എന്ന് വിശ്വസിച്ചിരുന്നു.

ഡബ്ല്യു. ആർ. ഹാമിൽട്ടൺ
(1805-1865)

ന്യൂനസംഖ്യകളുടെ ഗുണന നിയമമനുസരിച്ച് വർഗങ്ങൾ എല്ലാം അധിസംഖ്യകളാണ്. അപ്പോൾ ന്യൂനസംഖ്യകൾക്ക് വർഗമൂലമില്ല. എന്നാൽ ഗണിതത്തിൽ ന്യൂനസംഖ്യകൾക്ക് വർഗമൂലം ഉണ്ട് എന്ന സങ്കൽപം ഒരു ഘട്ടത്തിൽ ആവശ്യമായി വന്നു. മൂന്നാംകൃതി സമവാക്യപ്രശ്നങ്ങളുടെ പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ശ്രമമാണ് ഇതിനു കാരണമായത്. $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള രണ്ടാംകൃതിസമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്താം. എന്നാൽ ഒരു മൂന്നാംകൃതി സമവാക്യത്തിന് ഇത്തരത്തിൽ ഒരു സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ചുള്ള പൊതുരീതി സാധ്യമല്ല എന്ന് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർ വളരെ വർഷങ്ങളോളം വിശ്വസിച്ചിരുന്നു.

ഇറ്റാലിയൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ ദെൽഫെറോ ഒരു മൂന്നാംകൃതിസമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് ഒരു വെല്ലുവിളിയായി ഏറ്റെടുക്കുകയും $x^3 + ax = b$ പോലുള്ള സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം

$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$ എന്ന് കണ്ടെത്തുകയുമുണ്ടായി. എല്ലാ മൂന്നാംകൃതിസമവാക്യങ്ങളുടെയും പരിഹാരം ഈ രീതിയിൽ കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുമോ? ഉദാഹരണത്തിന് $x^3 - 15x = 4$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരം കാണാൻ ദെൽഫെറോയുടെ രീതി ഉപയോഗിച്ചാൽ

$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$ എന്ന് കിട്ടും. ന്യൂനസംഖ്യകളുടെ ഗുണനം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് അനുസരിച്ച്, ഓരോ സംഖ്യയുടേയും വർഗം ന്യൂനം ആകില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ $\sqrt{-121}$ ന് അർത്ഥമില്ല. എന്നാൽ സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരമില്ല എന്ന് കരുതാനും കഴിയില്ല, കാരണം $x = 4$ എന്നെടുത്താൽ ഈ സമവാക്യം ശരിയാണെന്ന് കാണാൻ കഴിയും. ഇവിടെ $\sqrt{-121}$ നെ $11 \times \sqrt{-1}$ എന്നെടുക്കുകയും $\sqrt{-1}$ നെ ഒരു സാങ്കല്പികസംഖ്യയായി എടുത്ത് സാധാരണ ഗണിതനിയമങ്ങളനുസരിച്ച് മുന്നോട്ട് പോയാൽ ഈ മൂന്നാം കൃതി സമവാക്യത്തിന് 4 എന്ന പരിഹാരം കിട്ടും.

ഇത്തരം സാങ്കല്പികസംഖ്യകൾക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരുടെ അംഗീകാരം നേടാൻ ഏറെക്കാലം വേണ്ടിവന്നു. പ്രശസ്ത ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഓയിലറാണ് $\sqrt{-1}$ ന് i എന്ന ചിഹ്നം ആദ്യമായി നൽകിയത്. ഇന്ന് വൈദ്യുതകാന്തതരംഗങ്ങളുടെ പഠനത്തിലും, ദ്രാവകങ്ങളുടെയും വാതകങ്ങളുടെയും ചലനത്തിന്റെ പഠനത്തിലും സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുന്ന സമവാക്യങ്ങളാണ് സൗകര്യം എന്ന് ശാസ്ത്രം തിരിച്ചറിഞ്ഞു. സൂക്ഷ്മകണികകളുടെ പഠനത്തിൽ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ ഒഴിവാക്കാൻ കഴിയാത്ത ഘടകമായി നിലനിൽക്കുന്നു.

5.2 ന്യൂന രേഖീയസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം

മുകളിൽ വിശദീകരിച്ച ചരിത്ര പശ്ചാത്തലത്തിൽ നിന്നും $\sqrt{-1} = i$ എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കുന്നതിനെ കുറിച്ച് മനസ്സിലായി.

അതായത്, $i^2 = -1$

അതുപോലെ; $(-i)^2 = -i \times -i = i^2 = -1$

ചുരുക്കി പറഞ്ഞാൽ -1 ന് രണ്ട് വർഗമൂലങ്ങൾ $-i$, i യുമാണ്.

$x^2 + 1 = 0$ അഥവാ $x^2 = -1$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളാണ് i യും $-i$ യും

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം പരിഗണിക്കാം.

$$\left(\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 (i)^2 = 3(-1) = -3$$

$$\left(-\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 (i) = 3(-1) = -3$$

അതായത് -3 ന്റെ രണ്ട് വർഗമൂലങ്ങൾ $\sqrt{3}\,i$ യും $-\sqrt{3}\,i$ യും ആണ്.

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ എന്ന പ്രസ്താവന $a > 0, b > 0$ അഥവാ $a > 0, b < 0$ അഥവാ $a < 0, b > 0$ എന്നീ നിബന്ധനകൾ ശരിയാണ്. എന്നാൽ $a < 0, b < 0$ എന്ന നിബന്ധനക്ക് ഈ പ്രസ്താവന ശരിയാകുമോ? നമുക്ക് പരിശോധിച്ചു നോക്കാം.

$$i^2 = i \times i = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\,(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

ഇത് $i^2 = -1$ എന്ന വസ്തുതക്ക് വിരുദ്ധമാണ്. അതുകൊണ്ട് $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ എന്ന പ്രസ്താവന $a < 0, b < 0$ എന്ന നിബന്ധനക്ക് ശരിയാകില്ല.

5.3 രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ

$x^2 + x + 1 = 0$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം കണ്ടെത്താം.

അതായത്; $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

മുൻപ് വിശദീകരിച്ചത് പ്രകാരം $\sqrt{-3} = \sqrt{-1 \times 3} = \sqrt{-1}\sqrt{3} = i\sqrt{3}$ എന്ന് എഴുതാം.

അങ്ങനെയെങ്കിൽ $x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ എന്നാകും.

CAS ഉപയോഗിച്ച് $x^2 + x + 1 = 0$ എന്ന രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ കാണാം. ഇതിനായി View ൽ നിന്നും CAS എടുക്കണം. Complex root [x^2 + x + 1] എന്ന Comand നൽകി Enter നൽകിയാൽ സമവാക്യത്തിന്റെ രണ്ട് പരിഹാരങ്ങൾ $\dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i, \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ എന്നിങ്ങനെ ലഭിക്കും. ഇടതു വശത്തുള്ള check box click ചെയ്താൽ ഈ സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ പരിഹാരങ്ങൾ Graphic ൽ അടയാളപ്പെടുത്താം. Complex root [x^2 + x + 1] എന്ന input നൽകിയും മേൽ വിശദീകരിച്ച ആശയങ്ങളിലേക്ക് എത്തിച്ചേരാൻ സാധിക്കും. പരിശീലന പ്രശ്നം 5.1 ലെ ചോദ്യങ്ങൾ ഇതേ രീതിയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി പരിഹാരങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം.

അതായത് $x = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; $x = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ എന്നിവ $x^2+x+1=0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളാണ്.

ഉദാഹരണം : 1

പരിഹാരം കാണുക: $x^2+2=0$

പരിഹാരം

$x^2 = -2$ അതായത്, $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{-1}\,\sqrt{2} = \pm i\sqrt{2}$

ഉദാഹരണം : 2

പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക : $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$

പരിഹാരം

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} = \frac{-1\pm\sqrt{1-20}}{2\sqrt{5}} = \frac{-1\pm\sqrt{-19}}{2\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{-1-i\sqrt{19}}{2}, \quad x = \frac{-1+i\sqrt{19}}{2}$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.1

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക.

1. $x^2+3=0$
2. $2x^2+x+1=0$
3. $x^2+3x+9=0$
4. $-x^2+x-2=0$
5. $x^2+3x+5=0$
6. $x^2-x+2=0$
7. $\sqrt{2}x^2+x+\sqrt{2}=0$
8. $\sqrt{3}x^2-\sqrt{2}x+3\sqrt{3}=0$
9. $x^2+x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$
10. $x^2+\dfrac{x}{\sqrt{2}}+1=0$

5.4 സമ്മിശ്ര സംഖ്യകൾ (Complex Numbers)

$x^2 + x + 1 = 0$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ $\dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ആണ്. ഈ പരിഹാരങ്ങൾക്ക് ഒരു പൊതുഘടനയുള്ളതായി കാണാം. അതായത് ഈ സംഖ്യകൾക്ക് രണ്ട് ഭാഗങ്ങളുണ്ട്. ഒന്ന് രേഖീയഭാഗവും മറ്റൊന്ന് മുമ്പ് പരിചയപ്പെട്ട i ചേർന്നുവരുന്ന സാങ്കൽപ്പികഭാഗവും. ഈ പൊതുഘടന പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.1 ലെ എല്ലാ പരിഹാരങ്ങൾക്കുമുള്ളതായി കാണാം.

ന്യൂനസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം ഉൾപ്പെടുന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരമായിവരുന്ന സംഖ്യകൾക്ക് പൊതുഘടനയുണ്ട്. അതായത് a, b എന്നിവ രേഖീയസംഖ്യയാക്കുകയും $a + ib$ എന്ന രൂപത്തിൽ വരുന്നതുമാണ് ഈ സംഖ്യകൾ. ഇതിനെ സമ്മിശ്ര സംഖ്യകൾ (Complex numbers) എന്ന് പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി $2 + 3i$, $2 - 3i$, $4+i\left(\frac{-1}{3}\right)$, $2 = 2 + i0$.

$z = a + ib$ എന്ന സമ്മിശ്ര സംഖ്യയിൽ 'a' യെ രേഖീയഭാഗം (Real part) എന്നും 'b' യെ സാങ്കല്പിക ഭാഗം (Imaginary part) എന്നും പറയുന്നു. രേഖീയഭാഗത്തെ Re(z) കൊണ്ടും സാങ്കല്പിക ഭാഗത്തെ Im(z) കൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് $z = 2 + i\,5$ ആയാൽ Re(z)= 2, Im(z)= 5 ആണ്.

കുറിപ്പ്

- ഒരു രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ ഒരു പരിഹാരം $a + ib$ ആണെങ്കിൽ $a - ib$ മറ്റൊരു പരിഹാരമായിരിക്കും. ഇവയെ കോൺജുഗേറ്റ് ജോടികൾ എന്ന് പറയുന്നു.
- സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ തുല്യത: $z_1 = a + ib, z_2 = c + id$ എന്നീ സമ്മിശ്ര സംഖ്യകൾ തുല്യം ആകണമെങ്കിൽ $a = c; b = d$ ആകണം എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു.
- ഏതൊരു രേഖീയസംഖ്യയെയും ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയായി പരിഗണിക്കാവുന്നതാണ്. ഇവിടെ സാങ്കൽപ്പികഭാഗം പൂജ്യമാണ്.

ഉദാഹരണം : 3

$x, y \in \mathbf{R}$, $4x + i(3x - y) = 3 + i\,(-6)$, ആയാൽ x, y കാണുക.

പരിഹാരം

$$4x + i(3x - y) = 3 + i(-6)....(1)$$

രേഖീയ ഭാഗം തുല്യമായതുകൊണ്ട് $4x = 3$ എന്നും സാങ്കൽപ്പികഭാഗം തുല്യമായതുകൊണ്ട് $3x - y = -6$ എന്നും കിട്ടുന്നു.

ഈ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും $x = \frac{3}{4}; y = \frac{33}{4}$.

5.5: i യുടെ കൃത്യങ്കം

-1 ന്റെ ഏത് കൃത്യങ്കത്തിനും -1, 1 എന്ന ക്രമത്തിൽ ആവർത്തിക്കുന്നു എന്ന് അറിയാമല്ലോ. സമാനമായ ഒരു സ്വഭാവമാണ് i യുടെ ഏത് കൃത്യങ്കത്തനും ഉണ്ടാകുന്നത്.

$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$$
$$i^4 = i^2 \times i^2 = -1 \times -1 = 1$$
$$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$$
$$i^6 = i^4 \times i^2 = 1 \times -1 = -1$$
$$i^7 = -i$$
$$i^8 = 1 \quad \text{മുതലായവ}$$

അതായത്, $i, -1, -i, 1$ എന്ന ക്രമത്തിൽ ആവർത്തിക്കുന്നു.

Mini = 1, Max = 30 ആകുന്ന വിധത്തിൽ n എന്ന integer slider നിർമിക്കുക. $(i)^n$ എന്നതിനെ വിപുലീകരിക്കാൻ CAS ഉപയോഗിക്കാം. (View → CAS).Sqrt(-1)^n എന്ന input നൽകി CAS ന്റെ ഇടതുവശത്തെ checkbox click ചെയ്താൽ Algebra view ൽ $z_1 = 0 + i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ ലഭിക്കും. അതുപോലെ Graphics view ൽ z_1 എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്തി കാണാം. Slider അനക്കി z_1 ന്റെ വ്യത്യസ്ത സ്ഥാനവും പ്രത്യേകതയും കാണാം.

പൊതുവായി k ഒരു പൂർണസംഖ്യ ആയാൽ $i^{4k} = 1$, $i^{4k-1} = i$, $i^{4k-2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$ എന്നു കാണാം.

ഉദാഹരണം : 4

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകളെ $a + ib$ രൂപത്തിൽ എഴുതുക

(i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right)$ (ii) $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3$

പരിഹാരം

(i) $$(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right) = \frac{-5}{8}i^2 = \frac{-5}{8}(-1) = \frac{5}{8} = \frac{5}{8} + i0$$

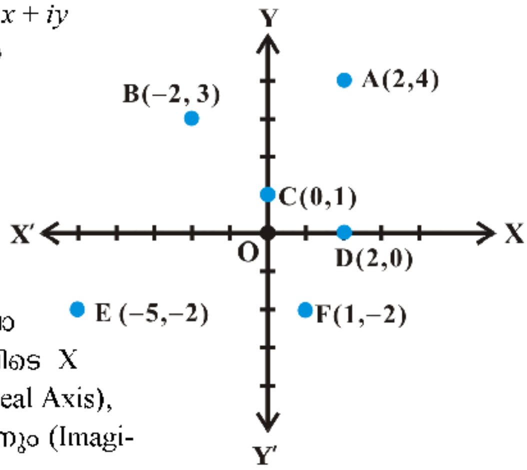
(ii) $$(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3 = 2 \times \frac{1}{8 \times 8 \times 8}(i)^5 = \frac{1}{256}(i^2)^2(i) = \frac{1}{256}i$$

5.6 ആർഗന്റ്തലവും പോളാർ രൂപവും (Argand Plane and Polar Representation)

ആർഗന്റ്തലം, പോളാർ രൂപം എന്നീ ആശയങ്ങൾ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്ക് ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനം നൽകുന്നു. അതിലൂടെ സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ബീജഗണിതത്തെ കുറിച്ച് മനസിലാക്കാൻ കഴിയുന്നു.

5.6.1 ആർഗന്റ് തലം അഥവാ സമ്മിശ്രതലം (Argand Plane or Complex Plane)

XY പ്രതലത്തിൽ ഏതൊരു ബിന്ദുവിനെയും (x, y) എന്ന സൂചകസംഖ്യ ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാമെന്ന് അറിയാം. $z = x + iy$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ രേഖീയ ഭാഗം (അതായത് x) സാങ്കൽപ്പിക ഭാഗം, (അതായത് y) എന്നിവ ചേർന്ന് സൂചകസംഖ്യയായി പരിഗണിച്ചാൽ, $z = x + iy$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ XY പ്രതലത്തിൽ (x, y) എന്ന ബിന്ദു കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്. ഈ പ്രതലത്തെ സമ്മിശ്രതലം അഥവാ ആർഗന്റ് തലം എന്ന് പറയുന്നു. ഇവിടെ X അക്ഷത്തെ രേഖീയ അക്ഷമെന്നും (Real Axis), Y അക്ഷത്തെ സാങ്കൽപ്പിക അക്ഷമെന്നും (Imaginary Axis) പറയുന്നു.



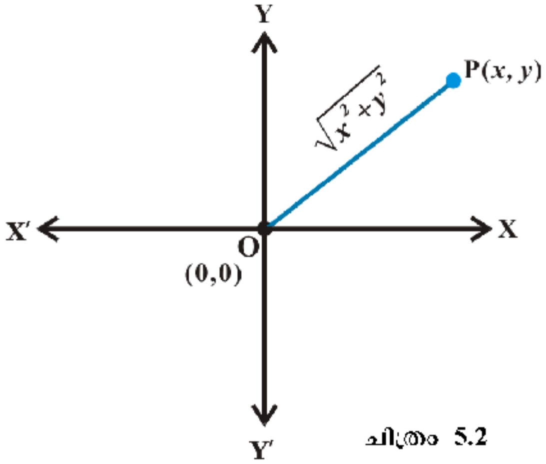
ചിത്രം 5.1

$a + i\,0$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ X അക്ഷത്തിലും $0 + i\,b$ എന്നത് Y അക്ഷത്തിലും സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു എന്നു മനസിലാക്കാം. ഒരു രേഖീയസംഖ്യയുടെ കേവലവില ആ സംഖ്യക്ക് സംഖ്യാരേഖയിലെ ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലമാണെന്ന് മുൻ ക്ലാസുകളിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ കേവലവില എന്താണെന്ന് നോക്കാം. മുകളിലെ ആർഗന്റ് തലത്തിലെ ഒരോ സമ്മിശ്രസംഖ്യയും പരിഗണിച്ച് ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക ശ്രദ്ധിക്കാം.

സമ്മിശ്ര സംഖ്യ	X Y തലത്തിലെസൂചക സംഖ്യകൾ	ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ളദൂരം
$2+4i$	$(2,4)$	$\sqrt{(2)^2+(4)^2}=\sqrt{20}$
$-2+3i$	$(-2,3)$	$\sqrt{(-2)^2+(3)^2}=\sqrt{13}$
$2+0i$	$(2,0)$	$\sqrt{(2)^2+(0)^2}=2$
$1-2i$	$(1,-2)$	$\sqrt{(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$
$-5-2i$	$(-5,-2)$	$\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$

$2 + 4i$ എന്ന input നൽകി സമ്മിശ്രസംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Segment tool ഉപയോഗിച്ച് ആധാരബിന്ദുവിനെയും സമ്മിശ്രസംഖ്യയേയും ബന്ധിപ്പിക്കുക. Distance tool ഉപയോഗിച്ച് വരയുടെ നീളം കാണുക. ഇതുപോലെ പട്ടികയിലെ മറ്റ് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളും അടയാളപ്പെടുത്തി ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ദൂരം കണ്ടെത്താം. ഈ വിലകളും പട്ടികയിലെ ദൂരവും തമ്മിൽ താരതമ്യം ചെയ്യുക.

ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ദൂരത്തെ ആ സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ കേവലവില (Modulus) എന്ന് പറയുന്നു. $z = x + iy$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ കേവലവില $\sqrt{x^2 + y^2}$ ആണ്. അതിനെ $|z|$ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.



ചിത്രം 5.2

5.6.2 പോളാർ രൂപം (Polar Form)

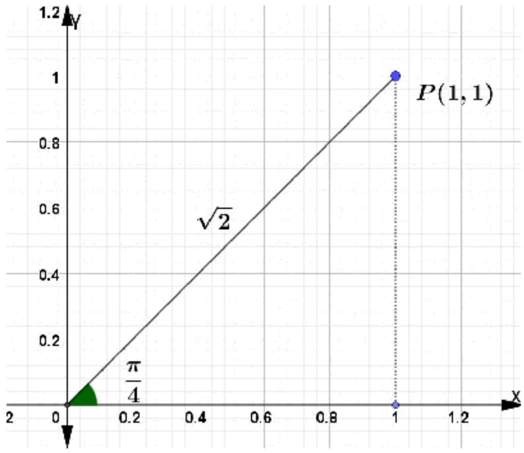
സമ്മിശ്രതലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ മറ്റൊരു രൂപത്തിൽ കൂടി വ്യാഖ്യാനിക്കാൻ കഴിയും. സമ്മിശ്രതലത്തിലെ ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും സമ്മിശ്രസംഖ്യയിലേക്കുള്ള ദൂരവും (കേവലവില) ആധാരബിന്ദുവിനേയും സമ്മിശ്രസംഖ്യയേയും ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന വര രേഖീയ അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി (Positive direction) ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവും ഉപയോഗിച്ച് സംഖ്യയെ കൃത്യമായി സൂചിപ്പിക്കുവാൻ കഴിയും.

ഉദാഹരണമായി ചിത്രം 5.3 ലെ **P** എന്ന ബിന്ദു പരിഗണിക്കുക. ഇത് $z = 1 + i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

$$OP = Z = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$-1 + i, 1 - i, -1 - i, sqrt(2) + 0i, -sqrt(2) + 0i, i * sqrt(2), -i * sqrt(2)$ എന്നീ input command കൾ നൽകി $-1 + i,\ 1 - i,\ -1 - i,\ \sqrt{2}, -\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$ എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തം വരക്കാം. ഇതിനായി circle with center through point എന്ന tool ഉപയോഗിക്കാം. മറ്റ് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളും ഈ വൃത്തത്തിലാണ് എന്ന് കാണാം.

ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും P യിലേക്കുള്ള അകലം $\sqrt{2}$ ആയി വരുന്ന വേറെയും സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ ഉണ്ട്. $-1 + i, 1 - i, -1 - i, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$ തുടങ്ങിയ ധാരാളം സംഖ്യകൾക്ക് കേവലവില $\sqrt{2}$ ആണ്. ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്തോടുകൂടി ഇവ സമ്മിശ്രതലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ $\sqrt{2}$ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായിരിക്കും. അതായത് $|Z| = \sqrt{2}$ ആയ സമ്മിശ്രസംഖ്യകളെല്ലാം $\sqrt{2}$ ആരമായ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാണ്. ഇതിൽ രേഖീയ അക്ഷത്തിന്റെ A [nZn b pamb n $45°$ കോണുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവാണ് $z = 1 + i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.



ചിത്രം 5.3

ഇവിടെ;

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

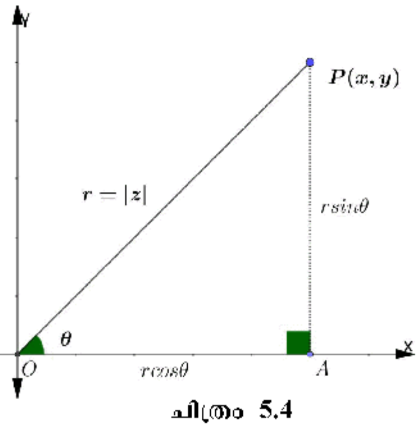
എങ്കിൽ;

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

അതായത് $z = 1 + i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ എന്ന രൂപത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കാം. ഇതിനെ $z = 1 + i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ പോളാർ രൂപമെന്ന് പറയുന്നു.

$z = x + iy$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു സമ്മിശ്രതലത്തിൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക.



ചിത്രം 5.4

ഇവിടെ $r = \text{OP} = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$, OP രേഖീയ അക്ഷവുമായുള്ള കോൺ θ യുമാണ്. എങ്കിൽ (r, θ) എന്ന രേഖീയ ക്രമജോഡി ഉപയോഗിച്ച് ആ സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കുവാൻ കഴിയും. (r, θ) എന്നതിനെ പോളാർ സൂചക

സംഖ്യകൾ എന്ന് പറയുന്നു. കൂടാതെ ത്രികോണം OAP പരിഗണിച്ചാൽ
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ യുമാണ്

അതായത് $z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

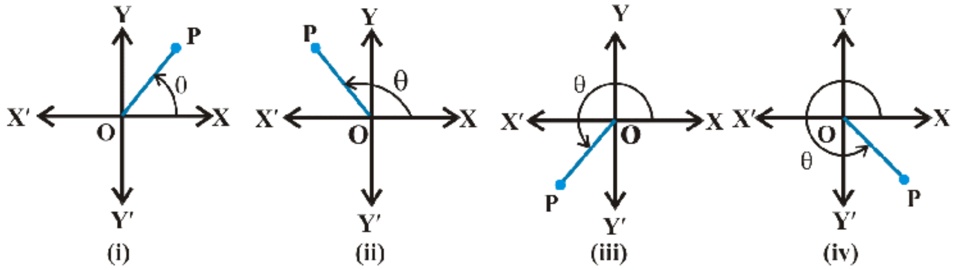
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ എന്ന രൂപത്തിൽ ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിനെ ആ സംഖ്യയുടെ പോളാർ രൂപമെന്ന് പറയുന്നു. $z \neq 0$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ $0 \leq \theta < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളയിൽ θ ക്ക് ഒരു വിലമാത്രമാണ് ഉണ്ടാകുക. ഇതിനെ z ന്റെ ആർഗ്യുമെന്റ് (Argument) അഥവാ ആംപ്ലിറ്റ്യൂഡ് എന്ന് പറയുന്നു. സൗകര്യത്തിനായി $-\pi < \theta \leq \pi$ ലുള്ള വിലയാണ് പരിഗണിക്കുന്നത്. അതിനെ പ്രഥമ ആർഗ്യുമെന്റ് (Principal Argument) എന്ന്, അതിനെ 'arg z' എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

പൊതുവായി പോളാർ രൂപത്തിൽ ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ മാറ്റി എഴുതാൻ പ്രഥമ ആർഗ്യുന്റാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഇനി വ്യത്യസ്ത ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സമ്മിശ്രസംഖ്യ വരുമ്പോൾ arg z കണ്ടെത്തുന്നതും പോളാർ രൂപം എഴുതുന്നതും പരിചയപ്പെടാം.

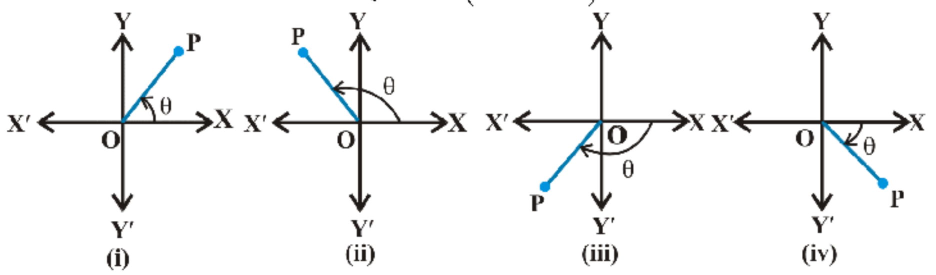
ഒന്നും രണ്ടും ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ് സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതെങ്കിൽ, സമ്മിശ്രസംഖ്യയും ആധാരബിന്ദുവുമായി ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്ന രേഖ രേഖീയ അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി ഉണ്ടാകുന്ന കോണളവ് $(0, \pi)$ എന്ന ഇടവേളയിലാണ്. അതുകൊണ്ട് ഇവിടെ ലഭിക്കുന്ന കോണളവ് arg z ആയി എടുക്കാം. മൂന്നും നാലും ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ് സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതെങ്കിൽ, സമ്മിശ്രസംഖ്യയും ആധാരബിന്ദുവുമായി ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന രേഖ രേഖീയ അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവ് $(\pi, 2\pi)$എന്ന ഇടവേളയിലാണ്. ഇവിടെ ലഭിക്കുന്ന കോണളവ് arg z ആയി എടുക്കാൻ കഴിയില്ല. പകരം രേഖീയ അധിദിശയിൽ നിന്നും OP എന്ന രേഖയിലേക്കുള്ള കോണളവ് പ്രദക്ഷിണമായി അളക്കുന്നു. പ്രദിക്ഷിണമായി കോൺ അളക്കുകയാണെങ്കിൽ അതിന്റെ വില ന്യൂനമാക്കും. അതുകൊണ്ട് $(-\pi, 0)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ വരുന്ന ന്യൂനസംഖ്യയായ കോൺ ലഭിക്കുകയും ഇതിനെ arg z ആയി പരിഗണിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

$1 + i$ എന്ന input നൽകി z_1 എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്തുക. തുടർന്ന് സംഖ്യയും ആധാര ബിന്ദുവും തമ്മിൽ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന വര നിർമ്മിച്ച് വരയുടെ നീളം (കേവലവില) കണ്ടെത്തുക. x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയും വരയും തമ്മിലുള്ള കോൺ Angle tool ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കുക. ഇവിടെ കേവലവില 1.41 എന്നും കോൺ $45°$ യും ലഭിക്കുന്നു. അതായത് $1 + i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ $(1.41, 45°)$ എന്ന സൂചകസംഖ്യകൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്താം. സമ്മിശ്രസംഖ്യയേ move tool ഉപയോഗിച്ച് മറ്റ് ചതുർത്താംശത്തിലേക്ക് മാറ്റി അവയുടെ പോളാർ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക. സമ്മിശ്രസംഖ്യ 3, 4 ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ വരുമ്പോൾ x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി പ്രദക്ഷിണമായി അളന്നു നോക്കാം.
abs എന്ന കമാന്റുപയോഗിച്ച് ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ കേവല വില കണ്ടെത്താം. z എന്ന സമ്മിശ്ര സംഖ്യയുടെ കേവല വില കാണാൻ abs(z) എന്ന് നൽകിയാൽ മതി.

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്നും ഇത് വ്യക്തമാകും.

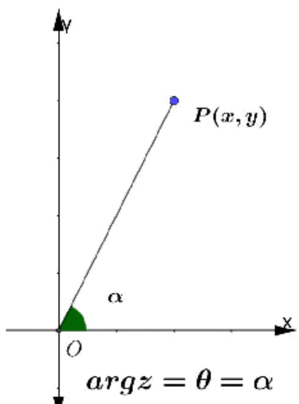


ചിത്രം 5.5 $(0 \leq \theta < 2\pi)$

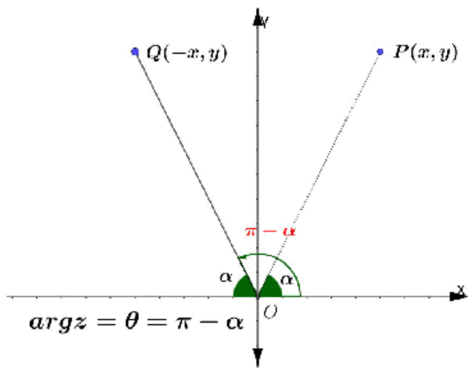


ചിത്രം 5.6 $(-\pi < \theta \leq \pi)$

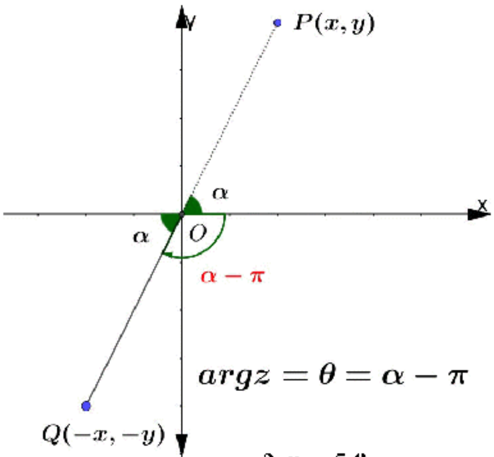
ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ രേഖീയഭാഗത്തിന്റെയും സാങ്കൽപ്പികഭാഗത്തിന്റെയും ചിഹ്നം അനുസരിച്ച് അവ ഏത് ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത് എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ഇവിടെ ചതുർത്ഥാംശം അനുസരിച്ച് പ്രഥമ ആർഗ്യുന്റ് വ്യത്യസ്തമാകുന്നു. ഇത് കണ്ടെത്താൻ $\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരമായി വരുന്ന α വില കണക്കാക്കുന്നു. ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ $z = x + iy$ എന്ന സമ്മിശ്ര സംഖ്യകൾ വ്യത്യസ്ത ചതുർഥാംശത്തിൽ വരുന്നതും അവയുടെ ആർഗ്യുമെന്റിന്റെ മാറ്റം നിരീക്ഷിക്കാം.



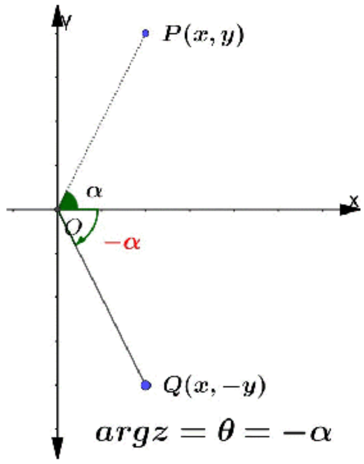
ചിത്രം 5.7



ചിത്രം 5.8



ചിത്രം 5.9



ചിത്രം 5.10

കുറിപ്പ്

- $z=i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ $z=0+i$ എന്നെഴുതാം. ഇത് x അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാകുന്ന കോണളവ് $\frac{\pi}{2}$ ആണ്. അതുകൊണ്ട് i യുടെ പോളാർ രൂപം $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ ആണ്.
- $z=1$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ $z=1+i0$ എന്നെഴുതാം. ഇത് x അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാകുന്ന കോണളവ് 0 ആണ്. അതുകൊണ്ട് 1 ന്റെ പോളാർ രൂപം, $\cos 0+i\sin 0$ ആണ്.
- $z=-1$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ $z=-1+i0$ എന്നെഴുതാം. ഇത് x അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാകുന്ന കോണളവ് π ആണ്. അതുകൊണ്ട് -1 ന്റെ പോളാർ രൂപം $\cos\pi+i\sin\pi$ ആണ്.

$z_1=1+i\sqrt{3}$; $z_2=1-i\sqrt{3}$; $-z_2=-1+i\sqrt{3}$; $-z_1=-1-i\sqrt{3}$ എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ ഒരു സമ്മിശ്രതലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി അവയുടെ മറ്റ് പ്രത്യേകതകൾ പരിചയപ്പെടാം.

നിരീക്ഷണങ്ങൾ:

- $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=1-i\sqrt{3}$ എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ആർഗ്യുമെന്റുകൾ യഥാക്രമം $\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}$ മാണ്. ഇവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ചിഹ്നത്തിൽ മാത്രമാണ്.

ഇങ്ങനെയുള്ള സമ്മിശ്രസംഖ്യകളെ പരസ്പരം കോൺജുഗേറ്റ് (conjugate) എന്ന് പറയുന്നു. അതായത് $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ കോൺജുഗേറ്റാണ് $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ എന്നും, z_2 ന്റെ കോൺജ്യുഗേറ്റാണ് z_1 എന്ന് തിരിച്ചും പറയുന്നു. ഇതുപോലെ $z_2 = -1+i\sqrt{3}$, $-z_1 = -1-i\sqrt{3}$ എന്നിവയും പരസ്പരം കോൺജുഗേറ്റുകളാണ്. പൊതുവായി $z = x+iy$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ കോൺജുഗേറ്റ് $\bar{z} = x-iy$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $\bar{z} = x-iy$ എന്നത് $z = x+iy$ സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ X –അക്ഷത്തിലെ പ്രതിബിംബമായിരിക്കും. അതായത് $\arg \bar{z} = -\arg z$

- $z_1 = 1+i\sqrt{3}$, $-z_1 = -1-i\sqrt{3}$ ഇവയുടെ ആഗുമെന്റിന്റെ വ്യത്യാസം π ആണെന്ന് കാണാം. അതായത് $z = x+iy, -z = -x-iy$ എന്നീ രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ആഗുമെന്റിന്റെ വ്യത്യാസം π ആണെന്ന് പൊതുവായി പറയാം.

കുറിപ്പ്

- സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ z, z_1, z_2 ഇവയ്ക്ക് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശരിയായിരിക്കും.

i. $z\bar{z} = |z|^2$ ii. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

iii. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $z_2 \neq 0$ iv. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

v. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ vi. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$; $z_2 \neq 0$

ഉദാഹരണം : 5

$z = -\sqrt{3}-i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ പോളാർ രൂപമെഴുതുക.

പരിഹാരം

$-\sqrt{3}-i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ആയാൽ

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{-1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$z = -\sqrt{3}-i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതു കൊണ്ട്

$$\theta = \arg z = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$-\sqrt{3}-i = 2\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right)$$

ഉദാഹരണം : 6

$z = -2 + i\,2\sqrt{3}$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ പോളാർ രൂപമെഴുതുക.

പരിഹാരം

$$-2 + i2\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$-2 + i2\sqrt{3}$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതുകൊണ്ട്. $\theta = \arg z = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$$\Rightarrow -2 + i2\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

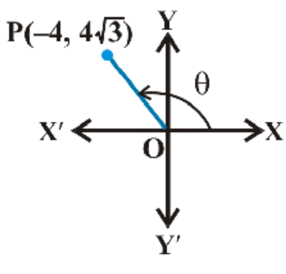
ഉദാഹരണം : 7

$\frac{-16}{1+i\sqrt{3}}$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ പോളാർ രൂപത്തിൽ എഴുതുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ $a + ib$ രൂപത്തിലല്ലാത്തതുകൊണ്ട്, ആ രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റാം. $\frac{-16}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-16}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

$$= \frac{-16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1-\left(i\sqrt{3}\right)^2} = \frac{-16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1+3} = -4\left(1-i\sqrt{3}\right) = -4 + i4\sqrt{3}$$



ചിത്രം 5.11

ഇവിടെ; $-4 + i4\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$r = \sqrt{(-4)^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16+48} = 8$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{4\sqrt{3}}{-4}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$-4 + i4\sqrt{3}$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതുകൊണ്ട്

$$\theta = \arg z = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow -4 + i4\sqrt{3} = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.2

I. ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ കേവലവിലയും, ആംപ്ലിറ്റ്യൂഡും കാണുക.

1. $z = -1 - i\sqrt{3}$ 2. $z = -\sqrt{3} + i$

II. തന്നിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ പോളാർരൂപമെഴുതുക.

3. $1-i$ 4. $-1+i$ 5. $-1-i$

6. -3 7. $\sqrt{3}+i$ 8. i

5.7 സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ബീജഗണിതം

രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നീ അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ പരിചയപ്പെടാം.

5.7.1 രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ സങ്കലനം

രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ തുക രേഖീയഭാഗങ്ങളുടെ തുക രേഖീയഭാഗവും സാങ്കൽപ്പിക ഭാഗങ്ങളുടെ തുക സാങ്കൽപ്പിക ഭാഗവുമായി വരുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയാണ്. അതായത് $z_1 = a + ib, z_2 = c + id$ എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ, അവയുടെ തുക $z_1 + z_2$ എന്നത് $z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയായി നിർവചിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന്;

$(4+i)+(1+3i)$

$$= (4+1) + i(1+3)$$
$$= 5 + 4i$$

സങ്കലനത്തിന്റെ ചില സ്വഭാവ സവിശേഷതകൾ

1. **സംവൃതിനിയമം:** രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ തുക ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയായിരിക്കും. z_1, z_2 എന്നിങ്ങനെയുള്ള എല്ലാ സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടേയും തുകയായ $z_1 + z_2$ ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയായിരിക്കും.

2. **ക്രമനിയമം:** z_1, z_2 എന്നിങ്ങനെയുള്ള എല്ലാ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്കും $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ആയിരിക്കും.

3. **സംയോജനനിയമം:** z_1, z_2, z_3 എന്നിങ്ങനെയുള്ള എല്ലാ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്കും $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ ആയിരിക്കും.

4. **അനന്യദത്തിന്റെ അസ്തിത്വം:** 0 ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയാണല്ലോ. z എന്ന ഏതൊരു സമ്മിശ്രസംഖ്യ 0 ത്തോട് കൂട്ടിയാലും, തുക z ആയിരിക്കും. z+0=0+z=z ആണ്.

   $z = x + iy$; $z + 0 = (x + iy) + (0 + i0) = (x + 0) + i(y + 0) = x + iy = z$

5. **വിപരീതത്തിന്റെ അസ്തിത്വം:**

   $z = a + ib$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയോട് $-z = -a - ib$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ '0' കിട്ടുന്നു.

   അതിനാൽ $-z$ നെ z ന്റെ സങ്കലന വിപരീതം എന്നു വിളിക്കുന്നു.

   $z-a-ib$ എന്ന രീതിയിലുള്ള എല്ലാ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്കും $-z--a-ib$ എന്ന തരത്തിലുള്ള ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യ നിർവ്വചിക്കുവാൻ കഴിയും. ഇവ രണ്ടിന്റെയും തുക സങ്കലനത്തിലെ അനന്യദമായിരിക്കുമെങ്കിൽ $[z\ (-z)-a \mid ib \mid (-a-ib)\ -0]$. $z-a-ib$ ന്റെ സങ്കലനത്തിലെ വിപരീതം $-z--a-ib$ എന്നും, തിരിച്ചും പറയാം.

5.7.2 രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ വ്യവകലനം

z_1, z_2 എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ പരിഗണിച്ചാൽ, ഇവയുടെ വ്യവകലനം $z_1 - z_2$ എന്നത് $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന് $(4+i)-(1+3i) = 4+i+(-1-3i) = 3-2i$

$(1+3i)-(4+i) = 1+3i+(-4-i) = -3+2i$

5.7.3 രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ഗുണനം

$z_1 = a+ib, z_2 = c+id$ എന്നീ രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ പരിഗണിച്ചാൽ, അവയുടെ ഗുണനഫലം $z_1 z_2$ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപൊലെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

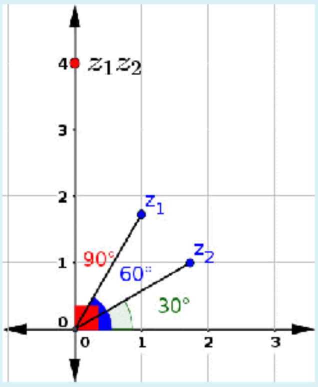
$z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലം

$z_1.z_2 = (a + ib)\ (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$ എന്ന് നിർവചിക്കാം.

$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$

ഉദാഹരണത്തിന് $(3+i5)(2+i6) = (3\times 2 - 5\times 6) + i(3\times 6 + 5\times 2) = -24 + i28$

$1 + isqrt(3)$; $sqrt(3) + i$ എന്നീ input കൾ നൽകി $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്താം. $\left(2, \frac{\pi}{3}\right), \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ യഥാക്രമം z_1, z_2 ന്റെ പോളാർ സൂചക സംഖ്യകളാണ്. z_1, z_2 എന്ന input command നൽകി അവയുടെ ഗുണനഫലത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്താം. Graph ൽ നിന്നും $z_1z_2 = 4i$ എന്ന സംഖ്യയുടെ പോളാർ സൂചക സംഖ്യകൾ $\left(4, \frac{\pi}{4}\right)$ എന്ന് കാണാൻ കഴിയും. അതായത്



z_1z_2 ന്റെ കേവലവില z_1, z_2 ന്റെ കേവലവിലകളുടെ ഗുണനഫലമാണ്. അതുപോലെ z_1z_2 ന്റെ ആർഗ്യുമെന്റ് z_1, z_2 ഇവയുടെ ആർഗ്യുമെന്റുകളുടെ തുകയാണ്. സംഖ്യകൾ മാറ്റി നൽകി ഈ ആശയം ശരിയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. $i * z -1$, $-1 *z -1$, $conjugate\ (z -1)$ എന്നിവ അടയാളപ്പെടുത്തി ആർഗ്യുമെന്റിന്റെ മാറ്റങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കാം.

ഗുണനത്തിന്റെ ചില സ്വഭാവ സവിശേഷതകൾ

1. **സംവൃതിനിയമം:** രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയായിരിക്കും.

2. **ക്രമനിയമം:** z_1, z_2 എന്നിങ്ങനെയുള്ള എല്ലാ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്കും $z_1z_2 = z_2z_1$ ആയിരിക്കും.

3. **സംയോജനനിയമം:** z_1, z_2, z_3 എന്നിങ്ങനെയുള്ള എല്ലാ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്കും $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ ആയിരിക്കും

4. **അനന്യദത്തിന്റെ അസ്തിത്വം:** $1 + i0$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകൊണ്ട്, z എന്ന ഏതോരു സമ്മിശ്രസംഖ്യ ഗുണിച്ചാലും ഗുണനഫലം z തന്നെയായിരിക്കും. അതായത് $z(1+i0) = z = (1 + i0)z$

5. **വിപരീതത്തിന്റെ അസ്തിത്വം:** $z = a + ib, a \neq 0, b \neq 0$ എന്ന രീതിയിലുള്ള എല്ലാ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്കും $\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$ ($\frac{1}{z}$ അഥവാ z^{-1} എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു) എന്ന ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യ നിർവചിക്കുവാൻ കഴിയും. ഇവ

തമ്മിൽ ഗുണിച്ചാൽ 1 കിട്ടുന്നു. അതിനാൽ z ന്റെ ഗുണന വിപരീതം $\frac{1}{z}$,

$z \neq 0$ എന്നും തിരിച്ച് $\frac{1}{z}$ ന്റെ ഗുണനവിപരീതം z എന്നും പറയാം.

6. **വിതരണനിയമം:** z_1, z_2, z_3 എന്നീ മൂന്ന് സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ പരിഗണിച്ചാൽ

(a) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

(b) $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$

ഉദാഹരണം : 8

$(-\sqrt{3}+\sqrt{-2})(2\sqrt{3}-i)$ എന്നതിനെ $a + ib$ രൂപത്തിൽ എഴുതുക

പരിഹാരം

$$(-\sqrt{3}+\sqrt{-2})(2\sqrt{3}-i) = (-\sqrt{3}+i\sqrt{2})(2\sqrt{3}-i)$$

$$= -6+\sqrt{3}i+2\sqrt{6}i-\sqrt{2}i^2 = (-6+\sqrt{2})+\sqrt{3}(1+2\sqrt{2})i$$

5.7.4 രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ഹരണം

z_1, z_2 എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ, ഇവയുടെ ഹരണം

$\frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_2}\right)$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു; $z_2 \neq 0$

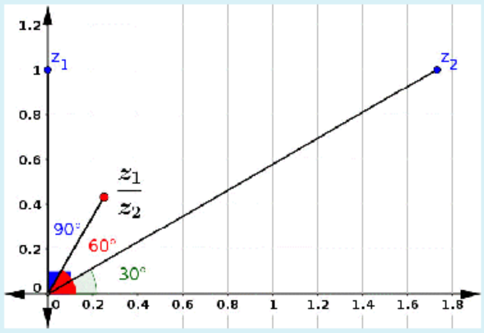
ഉദാഹരണത്തിന് $z_1 = 6+3i, z_2 = 2-i$

$$\frac{z_1}{z_2} = (6+3i)\left(\frac{1}{2-i}\right)$$

$$= (6+3i)\left(\frac{2}{2^2+(-1)^2} + i\frac{-(-1)}{2^2+(-1)^2}\right)$$

$$= (6+3i)\left(\frac{2+i}{5}\right) = \frac{1}{5}(12-3+(6+6)) = \frac{1}{5}(9+12i)$$

$z_1 = i,\ z_2 = \sqrt{3} + i$ എന്നീ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ input ൽ command കൾ നൽകി അടയാളപ്പെടുത്താം. ഇവയുടെ പോളാർ സൂചകസംഖ്യകൾ യഥാക്രമം $\left(1, \frac{\pi}{2}\right), \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ ആണ്. $\frac{z_1}{z_2}$ എന്ന command input ൽ നൽകി ഹരണഫലത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്താം.



Graphic ൽ നിന്നും $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$ ന്റെ പോളാർ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$ എന്നു കാണാൻ കഴിയും. അതായത് $\frac{z_1}{z_2}$ ന്റെ കേവലവില z_1 ന്റെ ആർഗ്യുമെന്റിൽ നിന്നും z_2 ന്റെ ആർഗ്യുമെന്റ് കുറക്കുന്നതാണ്. സംഖ്യകൾ മാറ്റിനൽകി ഈ ആശയം ശരിയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം : 9

$2-3i$ എന്നതിന്റെ ഗുണനവിപരീതം കാണുക

പരിഹാരം

$$\frac{1}{2-3i} = \frac{1}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + i\,\frac{3}{13}$$

ഉദാഹരണം : 10

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകളെ $a + ib$ രൂപത്തിൽ എഴുതുക

(i) $\dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$, (ii) i^{35}

പരിഹാരം

(i) $$\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} = \frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} \times \frac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}$$

$$= \frac{5+5\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2}{1+2} = \frac{3+6\sqrt{2}i}{3} = 1+2\sqrt{2}i$$

(ii) $$i^{35} = \frac{1}{i^{35}} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = -\frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = i$$

5.8 സർവസമവാക്യങ്ങൾ

z_1, z_2 എന്നീ പൊതുവായ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്ക് $(z_1+z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2$ എന്ന് നമുക്ക് തെളിയിക്കാം

തെളിവ്

$$\begin{aligned}(z_1+z_2)^2 &= (z_1+z_2)(z_1+z_2)\\ &= (z_1+z_2)z_1 + (z_1+z_2)z_2\\ &= z_1^2 + z_2z_1 + z_1z_2 + z_2^2\\ &= z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2\end{aligned}$$

ഇതുപൊലെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സർവ്വസമവാക്യങ്ങളും തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്.

(i) $(z_1-z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2$

(ii) $(z_1+z_2)^3 = z_1^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3$

(iii) $(z_1-z_2)^3 = z_1^3 - 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 - z_2^3$

(iv) $z_1^2 - z_1^2 = (z_1+z_2)(z_1-z_2)$

ഇങ്ങനെ രേഖീയസംഖ്യകൾ പാലിക്കുന്ന പല സർവസമവാക്യങ്ങളും സമ്മിശ്രസംഖ്യകളും പാലിക്കുന്നതായി കാണാം.

ഉദാഹരണം : 11

$(5-3i)^3$ എന്നതിനെ $a + ib$ രൂപത്തിൽ എഴുതുക

പരിഹാരം

$$\begin{aligned}(5-3i)^3 &= 5^3 - 3\times 5^2(3i) + 3\times 5(3i)^2 - (3i)^3\\ &= 125 - 225i - 135 - 27i = -10 - 198i\end{aligned}$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.3

I. ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകളെ $a+ib$ രൂപത്തിൽ

1. $(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right)$
2. i^9+i^{19}
3. i^{39}
4. $3(7+7i)+i(7+7i)$
5. $(1-i)-(-1+6i)$
6. $\left(\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}\right)-\left(4+\frac{5}{2}i\right)$
7. $\left[\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}\right)+\left(4+\frac{1}{3}i\right)\right]-\left(-\frac{4}{3}+i\right)$
8. $(1-i)^4$
9. $\left[\frac{1}{3}+3i\right]^3$
10. $\left[-2-\frac{1}{3}i\right]^3$

11 മുതൽ 13 വരെയുള്ള സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ ഗുണനവിപരീതം കാണുക

11. $4-3i$ 12. $\sqrt{5}+3i$ 13. $-i$

14. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വാക്യത്തെ $a+ib$ രൂപത്തിൽ എഴുതുക.

$$\frac{\left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}i\right)-\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)}$$

5.9. സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം

ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ പരിചയപ്പെടാം.

ഉദാഹരണം : 11

-7 - 24i യുടെ വർഗമൂലം കാണുക.

പരിഹാരം

$x+iy=\sqrt{-7-24i}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$(x+iy)^2=-7-24i$

$\Rightarrow x^2-y^2+2xyi=-7-24i$

രേഖീയഭാഗവും സാങ്കൽപ്പികഭാഗവും സമീകരിച്ചാൽ

$$x^2 - y^2 = -7;\ 2xy = -24 \text{ --------}(1)$$

സർവസമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച്

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = \left(x^2-y^2\right)^2+\left(2xy\right)^2$$
$$= 49+576$$
$$= 625$$

അങ്ങനെ; $x^2 + y^2 = 25$ -------(2)

(1), (2) ഉപയോഗിച്ച്

$x^2 = 9;\ y^2 = 16$

$$\Rightarrow x = \pm 3,\ y = \pm 4$$

എന്നാൽ xy യുടെ വില ന്യൂനസംഖ്യയായതുകൊണ്ട്

$x = 3, y = -4$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -3, y = 4$

അപ്പോൾ $\sqrt{-7-24i} = 3 - 4i; -3 + 4i$

ഉദാഹരണം : 12

$-2 + i2\sqrt{3}$ യുടെ വർഗമൂലം കാണുക.

പരിഹാരം

$$\sqrt{-2 + i2\sqrt{3}} = x + iy$$

$$-2 + i\ 2\sqrt{3} = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = -2;\ 2\sqrt{3} = 2xy \quad \text{-----------(2)}$$

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = \left(x^2 - y^2\right)^2 + \left(2xy\right)^2$$
$$= 4 + 12 = 16$$
$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{-----------(2)}$$

(1), (2) ഉപയോഗിച്ച്

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

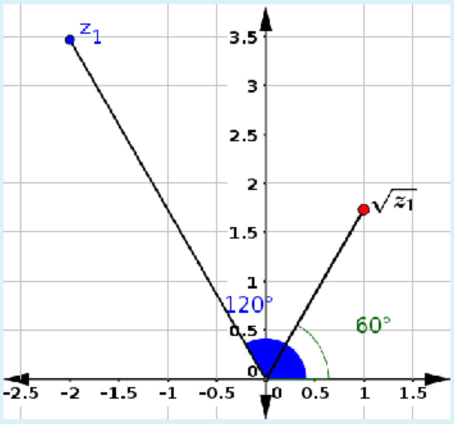
$$y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

ഇവിടെ xy അധിസംഖ്യയായതുകൊണ്ട്

$\sqrt{-2 + i2\sqrt{3}} = 1 + i\sqrt{3}$ അല്ലെങ്കിൽ $-1 - i\sqrt{3}$

ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ കേവലവിലക്കും പ്രഥമ ആർഗ്യുമെന്റിനും ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തെക്കുറിച്ച് ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ പരിചയപ്പെടാം. ഉദാഹരണം 6 ലെ സമ്മിശ്രസംഖ്യ എടുക്കാം.

–2 + i * 2sqrt (3) എന്ന input നൽകി $z_1 = -2 + i2\sqrt{3}$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്താം. Graphics view ൽ നിന്നും z_1 പോളാർ സൂചകസംഖ്യ $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$ ആണെന്ന് കാണാം. sqrt (z – 1) എന്ന input നൽകി $\sqrt{z_1}$ നെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്താം. $\sqrt{z_1} = 1 + i\sqrt{3}$ ന്റെ പോളാർ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ ആണെന്ന്



കാണാം. അതായത് $\sqrt{z_1}$ ന്റെ ആഗുമെന്റ് z_1 ന്റെ ആഗുമെന്റിന്റെ പകുതിയായിരിക്കും. സമ്മിശ്രസംഖ്യ മാറ്റി നൽകി ഈ ആശയം ശരിയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. അതുപോലെ $-\left(\sqrt{z_1}\right) = -1 - i\sqrt{3}$, z_1 ന്റെ മറ്റൊരു വർഗമൂലമാണ്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.4

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നവയുടെ വർഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $-15 - 8i$
2. $-8 - 6i$
3. $1 - i$
4. $-i$
5. i
6. $1 + i$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 13

$\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ ന്റെ കോൺജുഗേറ്റ് (conjugate) കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$$

$$= \frac{6+9i-4i+6}{2-i+4i+2} = \frac{12+5i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$= \frac{48-36i+20i+15}{16+9} = \frac{63-16i}{25} = \frac{63}{25} - \frac{16}{25}i$$

$\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ ന്റെ കോൺജുഗേറ്റ് $\dfrac{63}{25} + \dfrac{16}{25}i$ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 14

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ കേവലവിലയും, ആംപ്ലിറ്റ്യൂഡും കണ്ടെത്തുക.

1. $\dfrac{1+i}{1-i}$ 2. $\dfrac{1}{1+i}$

പരിഹാരം

1. $$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1-1+2i}{1+1} = i$$

$\dfrac{1+i}{1-i}$ യുടെ കേവലവില 1, ആംപ്ലിറ്റ്യൂഡും $\dfrac{\pi}{2}$.

2. $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$$r = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{-1/2}{1/2}\right| = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ നാലാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതു കൊണ്ട്

$$\theta = \arg z = -\alpha = -\frac{\pi}{4}$$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ യുടെ കേവലവില $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ആപ്ലിറ്റ്യൂഡ് = $-\frac{\pi}{4}$

ഉദാഹരണം : 15

$x + iy = \frac{a+ib}{a-ib}$ ആയാൽ എന്ന് $x^2 + y^2 = 1$ തെളിയ്ക്കുക

പരിഹാരം

ഇവിടെ $x + iy = \frac{a+ib}{a-ib} \times \frac{a+ib}{a+ib} = \frac{(a+ib)(a+ib)}{a^2+b^2}$

$$= \frac{(a+ib)(a+ib)}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

ഇതുപോലെ; $x - iy = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2}i$

$$x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = \frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} = 1$$

ഉദാഹരണം : 16

$\dfrac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ ഒരു രേഖീയസംഖ്യ ആയാൽ θ യുടെ വില കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ; $\dfrac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}=\dfrac{(3+2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}{(1-2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}$

$$=\frac{3+6i\sin\theta+2i\sin\theta-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta}=\frac{3-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta}+i\frac{8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

ഇത് ഒരു രേഖീയസംഖ്യ ആയതിനാൽ

$$\frac{8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta}=0\Rightarrow\sin\theta=0\Rightarrow\theta=n\pi, n\in Z$$

ഉദാഹരണം : 17

$z=\dfrac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ പോളാർരൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റുക

പരിഹാരം

ഇവിടെ; $z=\dfrac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{i-1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$=\frac{2(i-1)}{1+i\sqrt{3}}\times\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{2(i+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i)}{1+3}$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i)}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2\left((\sqrt{3})^2+1\right)}{4}}=\sqrt{2}$$

$$\tan\alpha=\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right|=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\Rightarrow\alpha=45^\circ+30^\circ=75^\circ=\frac{5\pi}{12}$$

$\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതു കൊണ്ട്

$$0=\arg z=\alpha=\frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. $\left[i^{18}+\left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$ ന്റെ വില കണ്ടെത്തുക.

2. z_1, z_2 എന്നീ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ $\operatorname{Re}(z_1z_2)=\operatorname{Re}z_1\operatorname{Re}z_2-\operatorname{Im}z_1\operatorname{Im}z_2$ എന്ന് തെളിയ്ക്കുക

3. $\left(\frac{1}{1-4i}-\frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$ നെ സാമാന്യ രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റുക ($a+ib$ രൂപം)

4. $x-iy=\sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}$ ആയാൽ $\left(x^2+y^2\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$ എന്ന് തെളിയ്ക്കുക

5. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യകളുടെ പോളാർ രൂപമെഴുതുക.

   (i) $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ (ii) $\frac{1+3i}{1-2i}$

6 മുതൽ 9 വരെയുള്ള സമവാക്യങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക.

6. $3x^2 - 4x + \dfrac{20}{3} = 0$

7. $x^2 - 2x + \dfrac{3}{2} = 0$

8. $27x^2 - 10x + 1 = 0$

9. $21x^2 - 28x + 10 = 0$

10. $z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i$ ആയാൽ $\left|\dfrac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i}\right|$ കാണുക.

11. $a + ib = \dfrac{(x+i)^2}{2x^2 + 1}$ ആയാൽ $a^2 + b^2 = \dfrac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

12. $z_1 = 2 - i, z_2 = -2 + i$ ആയാൽ

(i) $\text{Re}\left(\dfrac{z_1 z_2}{\overline{z_1}}\right)$ കണ്ടെത്തുക (ii) $\text{Im}\left(\dfrac{1}{z_1 \overline{z_1}}\right)$ കണ്ടെത്തുക

13. $\dfrac{1+2i}{1-3i}$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ കേവലവിലയും, ആർഗ്യുമെന്റും കണ്ടെത്തുക.

14. $(x - iy)(3 + 5i)$ എന്നത് $-6-24i$ ന്റെ കോൺജുഗേറ്റ് ആയാൽ x, y എന്നീ രേഖീയ സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.

15. $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$ ന്റെ കേവലവില കണ്ടെത്തുക.

16. $(a + iy)^3 = u + iv$ ആയാൽ $\dfrac{u}{x} + \dfrac{v}{y} = 4(x^2 - y^2)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

17. α, β എന്നീ വ്യത്യസ്ത സമ്മിശ്രസംഖ്യകളിൽ $|\beta| = 1$ ആയാൽ $\left|\dfrac{\beta - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\beta}\right|$ കാണുക.

18. $|1 - i|^x = 2^x$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പൂജ്യമല്ലാത്ത പൂർണസംഖ്യാ പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക.

19. $(a + ib)(c + id)(e + if)(g + ih) = A + iB$ ആയാൽ

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2) = A^2+B^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

20. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$ ആയാൽ 'm' ന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ പൂർണ്ണ അധിസംഖ്യാവില കണ്ടെത്തുക.

സംഗ്രഹം

- a, b ഇവ രേഖീയ സംഖ്യയായാൽ, $a+ib$ രൂപത്തിൽ എഴുതാവുന്ന സംഖ്യകളെ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾ എന്ന് പറയുന്നു. ഈ സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ രേഖീയ ഭാഗം 'a' യും സാങ്കൽപ്പിക ഭാഗം 'b' യും ആണ്.
- $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$, ആയാൽ
  (i) $z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d)$
  (ii) $z_1\, z_2 = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$
- പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സമ്മിശ്രസംഖ്യ $z = a + ib$ ($a \neq 0, b \neq 0$) യുടെ ഗുണന വിപരീതം $\frac{1}{z}$ അഥവാ z^{-1} എന്നത് $\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$ എന്ന സമ്മിശ്ര സംഖ്യയാണ്. അതായത് $(a+ib)\left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = 1 + i0 = 1$.
- ഏതൊരു പൂർണസംഖ്യ k ക്കും. $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k-2} = -1$, $i^{4k-3} = -i$ ആയിരിക്കും.
- $z = a + ib$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ കൊൺജുഗേറ്റ് $\overline{z} = a - ib$ ആണ്.
- $z = x + iy$ യുടെ സമ്മിശ്രസംഖ്യയുടെ പോളാർ രൂപം $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, ആണ്. ഇവിടെ $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (z ന്റെ കേവലവില), $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$. (θ എന്നത് z ന്റെ ആർഗ്യുമെന്റുമാണ്). $-\pi < \theta \leq \pi$, എന്ന ഇടവേളയിലെ θ യുടെ വിലയെ പ്രിൻസിപ്പൽ ആർഗ്യുമെന്റ് എന്ന് പറയുന്നു.
- കൃതി n ആയ ഒരു ബഹുപദസമവാക്യത്തിന് n പരിഹാരമൂല്യങ്ങൾ ഉണ്ട്.
- $a, b, c \in \mathrm{R}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$ ആയ $ax^2 + bx + c = 0$, എന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം $x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\,i}{2a}$ ആണ്.

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ഗ്രീക്കുകാരാണ് ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം രേഖീയസംഖ്യാ സമ്പ്രദായത്തിൽ നിലനിൽക്കില്ല എന്ന വസ്തുത തിരിച്ചറിഞ്ഞത്. പക്ഷെ ഈ വസ്തുത ആദ്യമായി വിശദീകരിച്ചതിന്റെ അംഗീകാരം ലഭിച്ചത് ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്ര Ú ª al nhn œ\ nW v(Mahavira (850)). ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്വഭാവം പോലെ ന്യൂന അളവ് ഒരു അളവിന്റെയും വർഗമല്ല, അതുകൊണ്ട് വർഗമൂലമില്ല എന്ന് "ഗണിതസാര സംഗ്രഹ" (Ganithasara Sangraha) എന്ന അദ്ദേഹത്തിന്റെ കൃതിയിൽ പരാമർശിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഭാസ്ക്കര എന്ന മറ്റൊരു ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ 1150-ൽ രചിച്ച ബീജഗണിത എന്ന കൃതിയിൽ "വർഗം അല്ലാത്തതുകൊണ്ട് ഒരു ന്യൂനഅളവിനും വർഗമൂലം ഉണ്ടാകില്ല." എന്ന് എഴുതിയിട്ടുണ്ട്. കാർഡാൻ (1545) $x + y = 10, xy = 40$ എന്ന പ്രശ്നപരിഹാരം പരിഗണിക്കുകയുണ്ടായി. ഇതിന്റെ പരിഹാരമായ $x = 5 + \sqrt{-15}$ നും $y - 5 \quad \sqrt{-15}$ നും അർത്ഥമില്ലാത്ത സംഖ്യകളാണെന്ന് പറഞ്ഞ് ഉപേക്ഷിച്ചു. ന്യൂനസംഖ്യയുടെ വർഗമൂലം ഉണ്ടെന്ന് അംഗീകരിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഒരു ബഹുപദത്തിന്റെ കൃതിയുടെ എണ്ണം അനുസരിച്ചുള്ള പരിഹാരമൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കും എന്ന് ആൽബർട്ട് ഗിറാഡിന്റെ (ഏകദേശം 1625) പ്രസ്താവിച്ചു. ഓയിലറാണ് $\sqrt{-1}$ എന്നതിന് ആദ്യമായി i എന്ന ചിഹ്നം നൽകി. ഡബ്ല്യു. എച്ച്. ഹാമിൽട്ടൻ $a + ib$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യയെ (a, b) എന്ന രേഖീയ ക്രമജോഡിയായി പരിഗണിക്കുകയും അങ്ങനെ സമ്മിശ്രസംഖ്യകൾക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രപരമായ നിർവചനം ലഭിക്കുകയും സാങ്കൽപ്പികസംഖ്യ എന്ന പ്രയോഗം ഒഴിവാക്കാനും സാധിച്ചു.

Q4Z2P8

അധ്യായം **6**

രേഖീയ അസമതകൾ
(LINEAR INEQUALITIES)

❖*പല കാര്യങ്ങൾ പല രീതിയിൽ പറയുന്ന കലയാണ് ഗണിതം – മാക്സ്‌വെൽ* ❖

6.1 ആമുഖം

ഒരു ചരമുള്ളതും, രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ളതുമായ സമവാക്യങ്ങളെക്കുറിച്ച് മുൻ ക്ലാസുകളിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. പ്രസ്താവനാരീതിയിലുള്ള ധാരാളം പ്രശ്നങ്ങളെ സമവാക്യരൂപത്തിലാക്കി പരിഹാരവും കാണാനറിയാം. പ്രസ്താവനാരൂപത്തിലുള്ള എല്ലാ പ്രശ്നങ്ങളെയും സമവാക്യരൂപത്തിൽ എഴുതുവാൻ കഴിയുമോ? നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിൽ ഉൾക്കൊള്ളാൻ കഴിയുന്ന പരമാവധി കസേരകളുടേയോ, മേശകളുടേയോ അഥവാ രണ്ടിന്റെയുമോ എണ്ണം 60 ആണെങ്കിൽ അതിനെ സമവാക്യരൂപത്തിൽ എഴുതുവാൻ സാധിക്കുമോ? ഈ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് പരിഹാരമായി $<, >, \leq, \geq$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രസ്താവനകൾ വേണ്ടിവരും. ഈ പ്രസ്താവനകളെ അസമതകൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഈ അധ്യായത്തിൽ ഒരു ചരമുള്ളതും, രണ്ടുചരങ്ങളുള്ളതുമായ രേഖീയ അസമതകളെക്കുറിച്ചാണ് പഠിക്കുന്നത്. ഗണിതശാസ്ത്രം, ധനതത്വശാസ്ത്രം, മനശാസ്ത്രം എന്നീ മേഖലകളിലെ പ്രശ്ന പരിഹാരത്തിന് അസമതകൾ ഏറെ സഹായിക്കുന്നു.

6.2 അസമതകൾ (Inequalities)

ചുവടെ പറയുന്ന സാഹചര്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക

i) 1 കി.ഗ്രാം വീതം അരി പാക്കറ്റുകളിലാക്കി വച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു കടയിൽ 200 രൂപയുമായി രവി അരി വാങ്ങാനെത്തി. ഒരു കിലോ അരിയുടെ വില 30 രൂപയാണ്. രവി x പാക്കറ്റ് അരി വാങ്ങിയെങ്കിൽ അതിനായി ചെലവഴിച്ച തുക $30\,x$ ആകുന്നു. അരി 1 കി.ഗ്രാം പാക്കറ്റുകളിൽ മാത്രം ലഭ്യമാകുന്ന കടയായതിനാൽ 200 രൂപ മുഴുവനായും അയാൾക്ക് ചെലവഴിക്കാൻ പറ്റിയില്ല (എന്തുകൊണ്ട്?)

അതുകൊണ്ട് $30x < 200$ ... (1)

(1) ഒരു അസമതയാണ്, കാരണം അതിൽ '$<$' എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

ii) പുസ്തകങ്ങളും പേനയും വാങ്ങാൻ രേഷ്മയുടെ കൈവശം 120 രൂപയുണ്ട്. ഒരു പുസ്തകത്തിന് 40 രൂപയും ഒരു പേനയക്ക് 20 രൂപയും വിലയുണ്ട്. രേഷ്മ x പുസ്തകങ്ങളും y പേനകളും വാങ്ങിയെങ്കിൽ ആകെ ചെലവായ തുക $40x \quad 20y$

അങ്ങനെയെങ്കിൽ, $40x \quad 20y \leq 120$ ...... (2)

അതായത്, ഒന്നുകിൽ $40x + 20y < 120$ ...... (3)

അല്ലെങ്കിൽ $40x + 20y = 120$ .... (4)

(3) സമവാക്യമല്ല അസമതയാണ്, പക്ഷേ (4) സമവാക്യമാണ്.

നിർവചനം 1

രണ്ടു രേഖീയസംഖ്യകളേയോ, ബീജഗണിത വാക്യങ്ങളേയോ $<, >, \leq, \geq$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങളുപയോഗിച്ച് ബന്ധപ്പെടുത്തിയാൽ ഒരു അസമത രൂപപ്പെടുന്നു. പ്രസ്താവനകൾ

(1), (2), (3) എന്നിവ അസമതകളാണ്.

$3 < 5;\ 7 > 5$ എന്നിവ സംഖ്യകൾ മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന അസമതകളും

$x < 5;\ y > 2;\ x \geq 3,\ y \leq 4$ എന്നിവ ചരങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന അസമതകളുമാണ്.

$3 < 5 < 7$, $3 \leq x < 5$ എന്നിവ ഇരട്ട അസമതകൾക്ക് ഉദാഹരണമാണ്.

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന അസമതകൾ പരിശോധിക്കാം.

$ax \quad b < 0$ ... (5)

$ax \quad b > 0$ ... (6)

$ax + b \leq 0$ ... (7)

$ax + b \geq 0$ ... (8)

$ax - by < c$ ... (9)

$ax - by > c$ ... (10)

$ax - by \leq c$ ... (11)

$ax + by \geq c$ ... (12)

$ax^2 + bx - c \leq 0$ ... (13)

$ax^2 + bx + c > 0$ ... (14)

(5), (6), (9), (10), (14) എന്നിവയെ കർശന അസമതകളെന്നും (7), 8), (11), (12), (13) എന്നിവയെ സ്ലാക് അസമതകളെന്നും പറയുന്നു. (5) മുതൽ (8) വരെയുള്ളവ ഒരു ചരമുള്ള രേഖീയ അസമതകളാണ് ($a \neq 0$). എന്നാൽ (9) മുതൽ (12) വരെയുള്ളവ രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ അസമതകളാണ് ($a \neq 0$, $b \neq 0$)

(13), (14) എന്നിവ രേഖീയ അസമതകൾ അല്ല, ഒരു ചരമുള്ള ദ്വിമാന അസമതകളാണ് ($a \neq 0$)

ഈ അധ്യായത്തിൽ ഒരു ചരങ്ങളുള്ളതും രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ളതുമായ രേഖീയ അസമതകളെക്കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യാം.

6.3 ഒരു ചരമുള്ള രേഖീയ അസമതകളുടെ ബീജഗണിത പരിഹാരവും അവയുടെ ഗ്രാഫുകളും

6.2 ലെ ഉദാഹരണം (1) പരിഗണിക്കുക. $30x < 200$. x എന്നത് അരി പാക്കറ്റുകളുടെ എണ്ണമാണ്. അതുകൊണ്ട് x ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയോ, ഭിന്നസംഖ്യയോ ആകുവാൻ കഴിയില്ല. ഈ അസമതയുടെ ഇടതുവശം $30x$, വലതുവശം 200 എന്നിവ ആണ്.

അസമതയിൽ x എന്ന ചരത്തിന് 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 എന്നീ വിലകൾ ആരോപിക്കുമ്പോൾ, അസമതയുടെ ഇടതുവശത്തിന്റെ വില യഥാക്രമം 0, 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210 എന്നിവയാണ്. ഇതിൽ x ന്റെ വില 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ആകുമ്പോൾ അസമത സത്യമാകുന്നു (ശരിയാകുന്നു). പക്ഷേ $x = 7$ ആകുമ്പോൾ അസമത അസത്യമാകുന്നു (തെറ്റാകുന്നു).

അസമത സത്യപ്രസ്താവനകളാകുന്ന x ന്റെ വിലകളാണ് ഈ അസമതയുടെ പരിഹാരം. അതുകൊണ്ട്, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ഈ അസമതയുടെ പരിഹാരഗണമാകുന്നു.

അസമത ശരിയാകുന്ന x ന്റെ വിലകളാണ് 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. അസമത സത്യപ്രസ്താവനകളാകുന്ന x ന്റെ വിലകളാണ് ഈ അസമതയുടെ പരിഹാരം.

അതായത് "ഒരു ചരം മാത്രമുള്ള രേഖീയ അസമതയുടെ പരിഹാരം ആ അസമത സത്യപ്രസ്താവന ആകുന്ന ചരത്തിന്റെ വിലകളാണ്.

മുകളിൽ ചർച്ച ചെയ്ത രീതിയിൽ പരിഹാരം കണ്ടെത്തുന്നത് വളരെ സമയമെടുക്കുന്നതും, ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ കൃത്യത ഉറപ്പാക്കാൻ കഴിയാത്തതുമായതിനാൽ രേഖീയ അസമതയുടെ പരിഹാരം കാണുവാൻ മറ്റു മാർഗങ്ങൾ കൂടി പരിഗണിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഒരു അസമതയുടെ പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ചുവടെ നല്കിയിരിക്കുന്ന ചില വസ്തുതകൾ അറിയേണ്ടതുണ്ട്.

1. ഒരു അസമതയുടെ ഇരുവശങ്ങളോടും ഒരേ സംഖ്യ കൂട്ടുകയോ, ഇരുവശങ്ങ

ളിൽ നിന്നും ഒരേ സംഖ്യ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്താൽ അസമതയ്ക്കു മാറ്റം ഉണ്ടാകില്ല.

2. ഒരു അധിസംഖ്യകൊണ്ട് ഇരുവശങ്ങളിലും ഗുണിച്ചാലും ഹരിച്ചാലും അസമതക്കു മാറ്റമുണ്ടാകുകയില്ല.

3. ഒരു ന്യൂനസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുയോ ഹരിക്കുകയോ ചെയ്താൽ അസമത വിപരീതമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 1

$30\,x < 200$ എന്ന അസമതയുടെ പരിഹാരം കാണുക.

i) x ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ

ii) x ഒരു പൂർണസംഖ്യ,

പരിഹാരം

$30\,x < 200$

$$\frac{30x}{30} < \frac{200}{30} \quad \text{(നിയമം 2)}$$

അതായത്, $x < \dfrac{20}{3}$ ആണ്

(i) x ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയായാൽ 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നീ വിലകൾക്ക് അസമത സത്യപ്രസ്താവനയാകുന്നു.

ആയതിനാൽ, {1, 2, 3, 4, 5, 6} പരിഹാരഗണമാകുന്നു.

(ii) x ഒരു പൂർണസംഖ്യയായാൽ പരിഹാരങ്ങൾ

.... $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ആയതിനാൽ

പരിഹാരഗണം $\{....\ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ഉദാഹരണം : 2

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ $5x - 3 < 3x + 1$ എന്ന അസമതയുടെ പരിഹാരം കാണുക.

(i) x ഒരു പൂർണസംഖ്യ,

(ii) x ഒരു രേഖീയസംഖ്യ,

പരിഹാരം

$5x - 3 + 3 < 3x + 1 + 3$ (നിയമം -1)

$\Rightarrow 5x < 3x + 4$

$\Rightarrow 5x - 3x < 3x + 4 - 3x$ (നിയമം -1)

$\Rightarrow 2x < 4$

$\Rightarrow x < 2$ (നിയമം -2)

(i) x ഒരു പൂർണസംഖ്യയായാൽ പരിഹാരഗണം $\{\ldots\ldots\ldots\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ ആണ്.

(ii) x ഒരു രേഖീയ സംഖ്യയാകുമ്പോൾ പരിഹാരം $(-\infty, 2)$ എന്ന ഇടവേളയായിരിക്കും.

> **കുറിപ്പ്**
>
> പരിഹാരം കാണേണ്ട അസമതയിൽ ചരങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ഗണം പറഞ്ഞിട്ടില്ലെങ്കിൽ, രേഖീയസംഖ്യാഗണമായി പരിഗണിക്കണം.

ഉദാഹരണം : 3

$4x + 3 < 6x + 7$ എന്ന അസമതയുടെ പരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

$$4x + 3 < 6x + 7$$

$$\Rightarrow 4x + 3 - 3 < 6x + 7 - 3$$

$$\Rightarrow 4x < 6x + 4$$

$$\Rightarrow 4x - 6x < 6x + 4 - 6x$$

$$\Rightarrow -2x < 4$$

$$\Rightarrow x > -2 \quad \text{(നിയമം -3)}$$

പരിഹാരഗണം: $(-2, \infty)$

ഉദാഹരണം : 4

$\frac{5 \quad 2x}{3} \le \frac{x}{6} \quad 5$ എന്ന അസമതയുടെ പരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

$$\frac{5 \quad 2x}{3} \le \frac{x}{6} \quad 5$$

$$\Rightarrow 2(5 - 2x) \le x - 30$$

$$\Rightarrow 10 - 4x \le x - 30$$

$$\Rightarrow 10 - 4x - 10 \le x - 30 - 10$$

$$\Rightarrow -4x \le x - 40$$
$$\Rightarrow -5x \le -40$$
അതായത് $x \ge 8$

പരിഹാരഗണം: $x \in [8, \infty)$

ഉദാഹരണം : 5

$7x + 3 < 5x + 9$ എന്ന അസമതയുടെ പരിഹാരം കാണുക. കൂടാതെ പരിഹാരം സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

പരിഹാരം

$$7x + 3 < 5x + 9$$
$$\Rightarrow 7x + 3 - 3 < 5x + 9 - 3$$
$$\Rightarrow 7x < 5x + 6$$
$$\Rightarrow 7x - 5x < 6$$
$$\Rightarrow 2x < 6$$
അല്ലെങ്കിൽ $x < 3$

പരിഹാരം ഗ്രാഫ് രൂപത്തിൽ

ചിത്രം 6.1

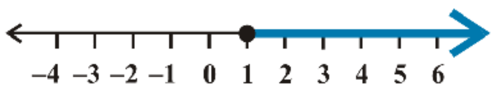
ഉദാഹരണം : 6

$\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x+1}{4} - 1$ ന്റെ പരിഹാരം കാണുക. പരിഹാരം സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക

പരിഹാരം

$$\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x+1}{4} - 1$$
$$\Rightarrow \frac{3x-4}{2} \ge \frac{x-3}{4}$$
$$\Rightarrow 2(3x-4) \ge (x-3)$$
$$\Rightarrow 6x - 8 \ge x - 3$$
$$\Rightarrow 5x \ge 5,$$
$$\Rightarrow x \ge 1$$

പരിഹാരം ഗ്രാഫ് രൂപത്തിൽ;



ചിത്രം 6.2

ഉദാഹരണം : 7

ഒന്നും രണ്ടും പാദവാർഷിക പരീക്ഷയിൽ 11-ാം ക്ലാസിൽ പഠിക്കുന്ന ഒരു കുട്ടിക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ യഥാക്രമം 62, 48 എന്നിവയാണ്. ശരാശരി 60 മാർക്ക് ലഭിക്കാൻ വർഷാന്ത്യപരീക്ഷയിൽ കുട്ടിക്ക് കുറഞ്ഞത് എത്ര മാർക്ക് ലഭിക്കണം?

പരിഹാരം

വർഷാന്ത്യപരീക്ഷയിൽ ലഭിക്കേണ്ട മാർക്ക് x എന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ

$$\frac{62+48+x}{3} \geq 60$$

$$110 + x \geq 180$$

$$x \geq 70$$

ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് 70 മാർക്ക് വാങ്ങിയാൽ കുട്ടിക്ക് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ശരാശരി 60 മാർക്ക് ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം : 8

10 നേക്കാൾ വലുതും, എന്നാൽ തുക 40 നേക്കാൾ കുറവുമായ അടുത്തടുത്ത എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളുടേയും ജോടികൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

അടുത്തടുത്ത ഒറ്റസംഖ്യകളിൽ ചെറുത് x എന്നെടുത്താൽ വലുത് $x + 2$ ആകുമല്ലോ. അതുകൊണ്ട്

$$x + 2,\ x > 10 \qquad \ldots (1)$$

$$x + x + 2 < 40 \qquad \ldots (2)$$

(1), (2) എന്നിവ പരിഗണിച്ചാൽ $10 < x < 19$

x ഒറ്റസംഖ്യയായതുകൊണ്ട് x ന് സ്വീകരിക്കാവുന്ന വിലകൾ 11, 13, 15, 17 ആണ്. അതുകൊണ്ട് ലഭ്യമായ ജോടികൾ (11, 13) (13, 15) (15, 17) (17, 19)

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 6.1

1. $24\,x < 100$ ന്റെ പരിഹാരം ചുവടെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ കണ്ടുപിടിക്കുക.
   i) x ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയാകുമ്പോൾ
   ii) x ഒരു പൂർണസംഖ്യയാകുമ്പോൾ
2. $-12x > 30$ ന്റെ പരിഹാരം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ കണ്ടെത്തുക.
   i) x ഒരു പൂർണസംഖ്യ.
   ii) x ഒരു രേഖീയസംഖ്യ.
3. $5\,x - 3 < 7$ ന്റെ പരിഹാരം ചുവടെ പറയുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ കണ്ടെത്തുക.
   i) x ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ.
   ii) x ഒരു പൂർണസംഖ്യ.

4. $3x - 8 > 2$ ന്റെ പരിഹാരം ചുവടെ പറയുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ കണ്ടെത്തുക.
   i) x ഒരു പൂർണസംഖ്യ.
   ii) x ഒരു രേഖീയസംഖ്യ.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അസമതകൾക്കു പരിഹാരം നിർദേശിക്കുക.

5. $4x + 3 < 6x + 7$

6. $3x - 7 > 5x - 1$

7. $3(x - 1) \leq 2(x - 3)$

8. $3(2 - x) \geq 2(1 - x)$

9. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 11$

10. $\frac{x}{3} > \frac{x}{2} + 1$

11. $\frac{3(x-2)}{5} \leq \frac{5(2-x)}{3}$

12. $\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{5} + 4\right) \geq \frac{1}{3}(x - 6)$

13. $2(2x + 3) - 10 < 6(x - 2)$

14. $37 - (3x + 5) \geq 9x - 8(x - 3)$

15. $\frac{x}{4} < \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$

16. $\frac{(2x-1)}{3} \geq \frac{(3x-2)}{4} - \frac{(2-x)}{5}$

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അസമതകൾക്കു പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക. പരിഹാരം സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

17. $3x - 2 < 2x + 1$

18. $5x - 3 \geq 3x - 5$

19. $3(1 - x) < 2(x + 4)$

20. $\frac{x}{2} \geq \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$

21. ആദ്യ രണ്ടു യൂണിറ്റ് ടെസ്റ്റുകളിൽ രവിക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ യഥാക്രമം 70, 75 ആണ്. ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ശരാശരി 60 മാർക്ക് ലഭിക്കുവാൻ മൂന്നാം യൂണിറ്റ് ടെസ്റ്റിൽ രവിക്ക് ലഭിക്കേണ്ട കുറഞ്ഞ മാർക്കു കണ്ടെത്തുക.

22. ഒരു കോഴ്സിന് എ ഗ്രേഡ് ലഭിക്കുവാൻ 5 വിഷയങ്ങൾക്ക് ശരാശരി 90 അല്ലെങ്കിൽ അതിൽ കൂടുതൽ മാർക്ക് വാങ്ങണം. സുനിതക്ക് ആദ്യ 4 പരീക്ഷകളിൽ ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ 87, 92, 94, 95 ആയാൽ എ ഗ്രേഡ് ലഭിക്കാൻ 5-ാം പരീക്ഷയിൽ ലഭിക്കേണ്ട കുറഞ്ഞ മാർക്ക് എത്രയെന്നു കണ്ടെത്തുക.

23. 10 നേക്കാൾ കുറവായ തുടർച്ചയായ രണ്ടു ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക 11 നേക്കാൾ കൂടുതലായാൽ സംഖ്യകൾ കാണുക.

24. 5 നെക്കാൾ കൂടുതലായ തുടർച്ചയായ രണ്ടു ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക 23 ൽ കുറവവാണെങ്കിൽ സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.

25. ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഏറ്റവും വലിയ വശം ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ 3 മടങ്ങാണ്; മൂന്നാം വശം ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിനേക്കാൾ 2 സെ.മീ. കുറവും ആണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കുറഞ്ഞപക്ഷം 61 സെ.മീ. ആകാൻ ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ കുറഞ്ഞ നീളം കണ്ടെത്തുക.

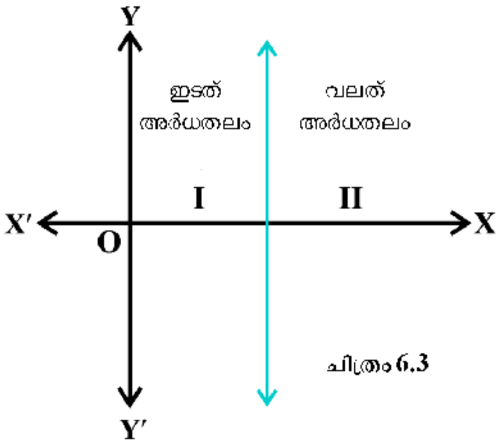
26. 91 സെ.മീ. നീളമുള്ള ഒരു പലകയെ ഒരാൾക്ക് 3 ഭാഗങ്ങൾ ആക്കണം. രണ്ടാം ഭാഗത്തിന്റെ നീളം ഏറ്റവും ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ നീളത്തേക്കാൾ 3 സെ.മീ. കൂടുതലും, മൂന്നാം ഭാഗം നീളം കുറഞ്ഞ ഭാഗത്തിന്റെ ഇരട്ടിയുമാണ്. രണ്ടാം ഭാഗത്തിന്റെ നീളത്തേക്കാൾ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് 5 സെ.മീ. കൂടുതലുമായാൽ ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ സാധ്യമായ നീളം കണ്ടെത്തുക.

സൂചന : പലകയുടെ ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x എന്ന് എടുത്താൽ $(x-3)$, $2x$ എന്നിവ യഥാക്രമം രണ്ടും മൂന്നും പലകകളുടെ നീളമാകും. അങ്ങനെ എങ്കിൽ $x + (x - 3) + 2x \leq 91$; $2x \geq (x + 3) + 5$

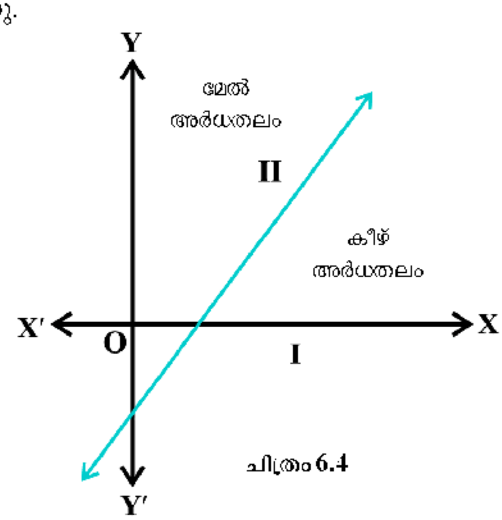
6.4 രണ്ടുചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ അസമതകളുടെ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ചുള്ള പരിഹാരം

ഒരു ചരമുള്ള അസമതയുടെ പരിഹാരവും അത് സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത് കുറേകൂടി സൗകര്യപ്രദവുമാണെന്ന് മനസിലാക്കി. ഇനി രണ്ട് ചരമുള്ള രേഖീയ അസമതയുടെ പരിഹാരവും അവയുടെ ഗ്രാഫും പരിചയപ്പെടാം. ഇവിടെ രണ്ട് ചരമുള്ളതുകൊണ്ട് കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിലാണ് ഈ അസമതയുടെ പരിഹാരം അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത്. രണ്ട് ചരമുള്ള സമവാക്യം കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ ഒരു വരയായാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എന്ന് അറിയാം.

ഒരു രേഖ കാർട്ടീഷൻ തലത്തെ രണ്ടായി വിഭജിക്കും എന്നു നമുക്കറിയാം. ലഭിക്കുന്ന ഓരോ ഭാഗത്തേയും അർധതലം എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഒരു ലംബരേഖ, തലത്തിനെ ഇടതും വലതുമായ രണ്ട് അർധധതലങ്ങളാക്കി വിഭജിക്കുന്നു. എന്നാൽ ലംബമല്ലാത്ത രേഖ, തലത്തിനെ മേൽഭാഗത്തും, കീഴ്ഭാഗത്തുമുള്ള രണ്ട് അർധതലങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് രണ്ട് ചരമുള്ള അസമതയുടെ പരിഹാരം ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു അർധതലമായിരിക്കും പരിഹാരമായി വരുന്ന അർധതലത്തെ അവയുടെ പരിഹാരമേഖല എന്ന് പറയുന്നു.



ചിത്രം 6.3



ചിത്രം 6.4

കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു പരിഗണിച്ചാൽ അത് ഒന്നുകിൽ ഒരു രേഖയിലോ അല്ലെങ്കിൽ 2 അർധതലങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിലോ ആയിരിക്കും.

$ax + by \le c$ (അല്ലെങ്കിൽ $ax + by \ge c$) എന്ന അസമതയുടെ പരിഹാരം കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത് മനസ്സിലാക്കാം. അദ്യം $ax + by = c$ എന്ന വര അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു. മുൻപ് വിശദീകരിച്ചതുപോലെ ഈ വര കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തെ രണ്ട് അർധതലങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു. ഈ അർധതലങ്ങളിലെ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിലെ ഒരു ബിന്ദു എടുത്തതിനു ശേഷം ഈ ബിന്ദുവിൽ തന്നിരിക്കുന്ന അസമത ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുന്നു. പരിശോധനയിൽ ശരിയാണെങ്കിൽ ബിന്ദു ഉൾപ്പെടുന്ന അർധതലം അസമതയുടെ പരിഹാരമേഖല ആകുകയും ആ ഭാഗം ഷേഡ് ചെയ്ത് പരിഹാരമേഖലയായി സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇനി പരിശോധനയിൽ അസമത ശരിയാകുന്നില്ലെങ്കിൽ ബിന്ദു ഉൾപ്പെടാത്ത അർധതലം പരിഹാരമേഖലയാകുകയും അത് ഷെഡ് ചെയ്ത് സൂചിപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഇവിടെ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളും പരിഹാരമേഖലയുടെ ഭാഗമാണ്.

$ax + by < c$ (അല്ലെങ്കിൽ $ax + by > c$) എന്ന അസമത പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ പരിഹാരമേഖലയുടെ ഭാഗമല്ലാത്തതുകൊണ്ട് വര ബിന്ദുക്കൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

കുറിപ്പ്

1. ഒരു രേഖീയ അസമതയുടെ പരിഹാരമായി വരുന്ന അർധതലത്തെ അസമതയുടെ പരിഹാരമേഖല എന്ന് പറയുന്നു.
2. പരിഹാരമേഖല കണ്ടെത്തുവാൻ വരയിലല്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദു പരിഗണിക്കുകയും ആ ബിന്ദുവിൽ അസമത ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ശരിയാണെങ്കിൽ ആ അർധതലം പരിഹാരമേഖലയാകും. ശരിയല്ലെങ്കിൽ ബിന്ദു ഉൾപ്പെടാത്ത അർധതലം പരിഹാരമേഖലയാകും.
3. $ax + by \le c$ (അല്ലെങ്കിൽ $ax + by \ge c$) എന്ന അസമതയാണ് വരുന്നതെങ്കിൽ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളും പരിഹാരമേഖലയിലായതുകൊണ്ട് സ്പഷ്ടമായ വര കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.
4. $ax + by < c$ (അല്ലെങ്കിൽ $ax + by > c$) എന്ന അസമതയാണ് വരുന്നതെങ്കിൽ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ പരിഹാരമേഖലയിലല്ലാത്തതുകൊണ്ട് ഡോട്ടട് ബിന്ദുക്കൾ കൊണ്ടാണ് വരയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഭാഗം 6.2 ൽ ലഭിച്ച രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമവാക്യം പരിഗണിക്കുക.

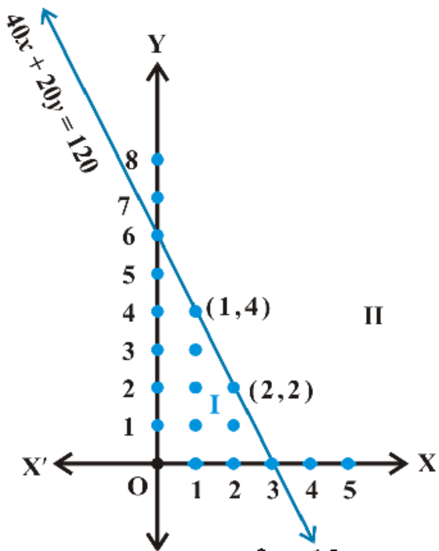
$$40x + 20y \le 120 \ldots (1)$$

ഇവിടെ x എന്നത് രേഷ്മ വാങ്ങിയ പുസ്തകങ്ങളുടെയും, y പേനകളുടെയും എണ്ണമായിരുന്നു. x, y എന്നിവ എണ്ണത്തിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതു കൊണ്ട് അതിന്റെ വിലകളായി അഖണ്ഡസംഖ്യ മാത്രമേ പരിഗണിക്കാൻ പറ്റുകയുള്ളൂ. അങ്ങനെ പരിഗണിക്കുമ്പോൾ പ്രസ്താവന

$x = 0$ എന്ന് സങ്കൽപിച്ചു തുടങ്ങിയാൽ (1) ന്റെ ഇടതുഭാഗം

$40x + 20y = 40 \Rightarrow (0) + 20y = 20y$. അതായത് $20y \le 120$ അല്ലെങ്കിൽ $y \le 6$ (2)

$x = 0$ ആകുമ്പോൾ y ക്ക് ലഭിക്കാവുന്ന വിലകൾ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 മാത്രമാണ്. അപ്പോൾ 1 ന്റെ പരിഹാരഗണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ (0, 0), (0, 1), (0,2), (0,3), (0,4), (0, 5), (0, 6) ആകുന്നു. ഇതുപോലെ x ന്റെ വില കൾ 1, 2, 3 എന്നിവയായാൽ (1) ന്റെ പരി ഹാരഗണത്തിൽ (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0) എന്നിവ ഉണ്ടാവും. ഇതാണ് ചിത്രം 6.6 ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

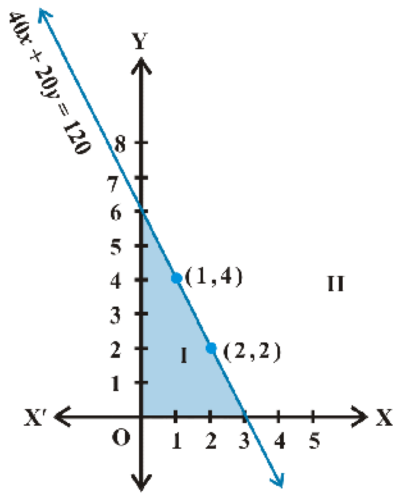


ചിത്രം 6.5

x, y എന്നിവയുടെ മണ്ഡലം അഖണ്ഡസംഖ്യയിൽ നിന്നും രേഖീയ സംഖ്യാഗണത്തിലേക്ക് ഉയർത്തിയാൽ (1) ന്റെ പരിഹാരം എന്താകും എന്നതിനെക്കുറിച്ച് ചിന്തിച്ചിട്ടുണ്ടോ? ഇവിടെ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ചുള്ള പരിഹാരമാണ് ഉചിതമായിട്ടുള്ളത്.

അതിനായി $40x + 20y = 120$ ----------- (3) ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

അസമത (1) ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാൻ 1-ാം അർധതലത്തിലെ (0, 0) എന്ന ബിന്ദു എടുക്കുക. x, y എന്നിവയുടെ വിലകളായി (0, 0) നൽകുക. (1) സത്യമാണോ അല്ലയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.



ചിത്രം 6.6

ഇവിടെ (1) സത്യമായതായി കാണാം. അതുകൊണ്ട് 1-ാം അർധതലമാണ് (1) ന്റെ ഗ്രാഫ് എന്നു പറയാം. വരയിൽ വന്ന ബിന്ദുക്കളും 1-ാമത്തെ അസമതയെ സ്വീകരിക്കുന്നതുകൊണ്ട് (3) എന്ന വരയും ഗ്രാഫിന്റെ ഭാഗമാകുന്നു പരിഹാരഭാഗം 1-ാം അർധതലത്തിൽ ആകുന്നു. രണ്ടാം അർധതലം ഗ്രാഫിന്റെ ഭാഗമല്ല എന്നും കാണാവുന്നതാണ്. (ചിത്രം 6.7)

അസമത (1) ന്റെ പരിഹാരം വരയുൾപ്പെടെയുള്ള 1 -ാം അർധതലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാണെന്നു പറയാം.

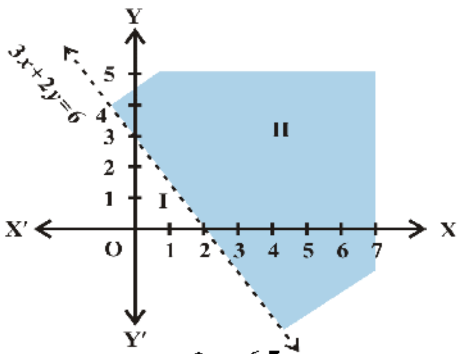
രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം മുകളിൽ ചർച്ചചെയ്ത രീതിയിൽ കൂടുതൽ മനസിലാക്കുവാൻ ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടി പരിഗണിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 9

ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് പരിഹാരം കാണുക: $3x + 2y > 6$ .... (1)

പരിഹാരം

$3x + 2y = 6$ ന്റെ ഗ്രാഫാണ് ബിന്ദുക്കൾ കൊണ്ട് അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന വരയാണ്. ചിത്രം (6.8)



ചിത്രം 6.7

ഈ വര തലത്തെ I, II എന്നീ രണ്ട് അർധതലങ്ങളായി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നു. വരയുടെ ഭാഗമല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലും ഒരു അർധതലത്തിൽ വരുന്ന ഒരു ബിന്ദു പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ (0, 0) പരിഗണിക്കാം.

ഈ ബിന്ദു (1) ൽ നൽകിയാൽ

$3\times0+2\times0>6$ അല്ലെങ്കിൽ $0>6$ ഇത് തെറ്റായ പ്രസ്താവനയാണ്.

അതുകൊണ്ട് (0, 0) എന്ന ബിന്ദു ഉൾപ്പെടുന്ന അർധതലം 1 ന്റെ പരിഹാരമായ അർധതലമല്ല.

അതായത് വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഒഴിവാക്കിയിട്ടുള്ള രണ്ടാം അർദ്ധതലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാണ് 1 ന്റെ പരിഹാരമായി വരുന്ന ബിന്ദുക്കളുൾപ്പെടുന്ന ഗ്രാഫ്.

ഉദാഹരണം 9 ലെ അസമത $3x + 2y > 6$ ജിയോജിബ്രയിൽ വരക്കുന്നതിന് $3x + 2y > 6$ എന്ന input command കൊടുത്താൽ മതി. പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 6.2 ലെ ചോദ്യങ്ങൾ ഈ രീതിയിൽ വരച്ച് മനസ്സിലാക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം : 10

$3x - 6 \geq 0$ നെ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ പരിഹാരം അടയാളപ്പെടുത്തുക:

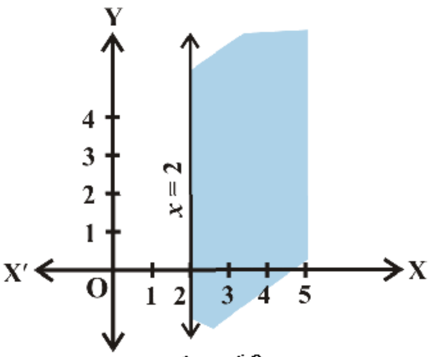
പരിഹാരം

$3x - 6 = 0$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 6.9 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു. (0,0) എന്ന ബിന്ദുവിനെ തന്നിരിക്കുന്ന അസമതയിൽ നൽകിയാൽ

$3 \times 0 - 6 \geq 0$ അല്ലെങ്കിൽ

$-6 \geq 0$, (0, 0) ഉൾക്കൊള്ളുന്ന അർധതലത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്ന അസമത തെറ്റാണ്.

അതിനാൽ (0, 0) ഉൾപ്പെടാത്ത രണ്ടാം അർധതലത്തിലാണ് തന്നിരിക്കുന്ന അസമതയുടെ പരിഹാര ഗ്രാഫ് ഉൾപ്പെടുന്നത്.



ചിത്രം 6.8

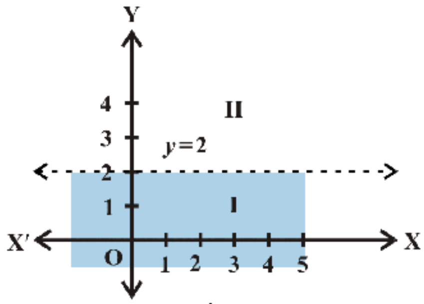
ഉദാഹരണം - 11

$y < 2$ നെ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് പരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

$y = 2$ ന്റെ ഗ്രാഫ് കുത്തിട്ട വരയായി ചിത്രം 6.10 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

1-ാം അർധതലത്തിലെ (0,0) എന്ന ബിന്ദു പരിഗണിക്കുക. തന്നിരിക്കുന്ന അസമതയിൽ ഈ ബിന്ദു നൽകിയാൽ, $0 < 2$ സത്യമായി മാറുന്നു.



ചിത്രം 6.9

അതായത് ഒന്നാം അർദ്ധതലത്തിൽ $y = 2$ എന്ന വര ഒഴിവാക്കിയുള്ള ഷെയ്ഡു ചെയ്ത ഭാഗമാണ് തന്നിരിക്കുന്ന അസമതയുടെ പരിഹാര ഗ്രാഫ്

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 6.2

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അസമതകളുടെ പരിഹാരം ദ്വിമാനതലത്തിൽ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തുക.

1. $x + y < 5$
2. $2x + y \geq 6$
3. $3x + 4y \leq 12$
4. $y + 8 \geq 2x$
5. $x - y \leq 2$
6. $2x - 3y > 6$
7. $-3x + 2y \geq -6$
8. $3y - 5x < 30$
9. $y < -2$
10. $x > -3$.

6.5 രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള ഒരു കൂട്ടം രേഖീയ അസമതകളുടെ പരിഹാരം

മുൻഭാഗങ്ങളിൽ നാം ചർച്ച ചെയ്തത് ഒരു ചരമുള്ള ഒരു രേഖീയ അസമതയുടെയും, രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള ഒരു രേഖീയ അസമതയുടേയും പരിഹാരം ആണ്. ഇനി, രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ അസമതകൾ ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ഉണ്ടെങ്കിൽ അതിന്റെ പരിഹാരം ഗ്രാഫിന്റെ സഹായത്താൽ എങ്ങനെ കണ്ടെത്താം എന്ന് ഏതാനും ഉദാഹരണങ്ങളിൽ കൂടി മനസിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം : 12

ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന രണ്ട് രേഖീയ അസമതകളുടെ പരിഹാരം ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തുക.

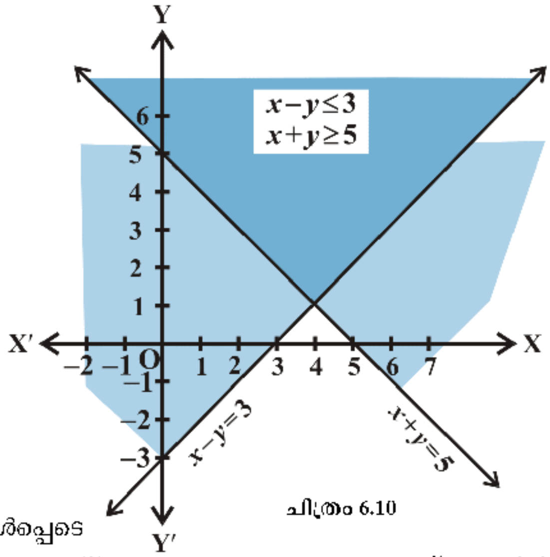
$$x + y \geq 5 \quad \ldots (1)$$

$$x - y \leq 3 \quad \ldots (2)$$

പരിഹാരം

$x + y - 5$ എന്ന രേഖീയ സമവാക്യത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ചിരിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. (ചിത്രം 6.11)

അസമത (1) ന്റെ പരിഹാരം $x + y - 5$ എന്ന വരയിലുൾപ്പെടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഉൾപ്പടെ അതിനു മുകളിലുള്ള ഷേഡ് ചെയ്ത ഭാഗമാണ്. ഇതേ അക്ഷങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് $x - y - 3$ എന്ന രേഖീയ അസമവാക്യത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ചിരിക്കുന്നത് ചിത്രം 6.11 ൽ നൽകിയിട്ടുള്ളത് ശ്രദ്ധിക്കുക.



ചിത്രം 6.10

$x - y - 3$ എന്ന വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഉൾപ്പെടെ അതിനു മുകളിലുള്ള ഷേഡ് ചെയ്ത ഭാഗം (2) എന്ന അസമതയുടെ ഗ്രാഫ് വരച്ചിരിക്കുന്നത് (ചിത്രം 6.11) ൽ നൽകിയിട്ടുണ്ട്.

$x - y - 3$ എന്ന വരയിലെ ബിന്ദുക്കളടക്കം അതിനു മുകളിലുള്ള കറുപ്പിച്ച ഭാഗം അസമത (2) ന്റെ പരിഹാരഭാഗമാണ്. അതായത് (1), (2) എന്നീ അസമതകളുടെ പരിഹാരഭാഗം, ചിത്രത്തിൽ പൊതുവായി ഷെഡ് ചെയ്ത ഭാഗമാണ്. (ചിത്രം 6.11)

ഉദാഹരണം : 13

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അസമതകളുടെ പരിഹാരം ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

$$5x + 4y \leq 40 \ldots (1)$$

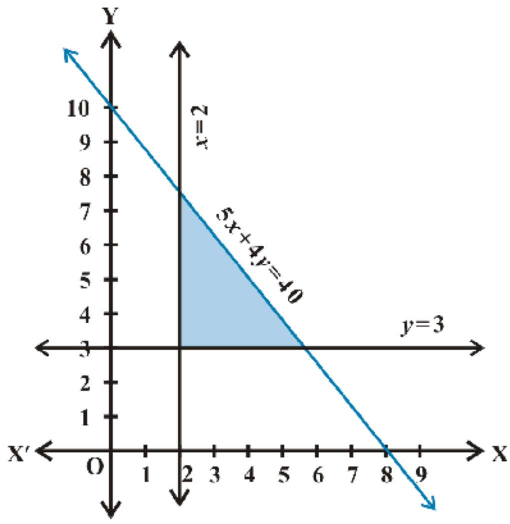
$$x \geq 2 \quad \ldots (2)$$

$$y \geq 3 \quad \ldots (3)$$

പരിഹാരം

$5x + 4y - 40$; $x = 2$, $y = 3$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് ആദ്യം വരയ്ക്കുക.

അസമത (1) ന്റെ പരിഹാരമായി ലഭിക്കുന്ന ഗ്രാഫ് $x + 4y = 40$ എന്ന വരയുൾപ്പെടെ താഴ്ഭാഗം ഷേഡ് ചെയ്തതും; അസമത (2) ന്റെ പരിഹാരം ഉൾപ്പെടുന്ന ഗ്രാഫ് $x = 2$ എന്നീ വരയുൾപ്പെടെ അതിന്റെ വലതുഭാഗം ഷേഡ് ചെയ്തതും; അസമത (3) ന്റെ പരിഹാരം ഉൾപ്പെടുന്ന ഗ്രാഫ് $y = 3$ എന്ന വരയുൾപ്പെടെ അതിന്റെ മുകൾഭാഗം ഷേഡ് ചെയ്തതും ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന അസമത ക്കൂട്ടത്തിന്റെ പരിഹാരം പൊതുവായി ഷേഡ് ചെയ്ത ഭാഗം ആണ്.



ചിത്രം 6.11

കുറിപ്പ്

പ്രായോഗികമായി ചില അസമതകളിൽ x, y എന്നിവയുടെ വില എണ്ണവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടുവരുന്നു. ഉദാഹരണം പുസ്തകങ്ങളുടെ എണ്ണം, ജോലി ചെയ്ത സമയദൈർഘ്യം, ഉത്പാദിപ്പിച്ച വസ്തുക്കളുടെ എണ്ണം, വാങ്ങിയ സാധനങ്ങളുടെ എണ്ണം. ഈ സന്ദർഭങ്ങളിൽ $x \geq 0$, $y \geq 0$; പരിഹാരമണ്ഡലം ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 14

$8x + 3y \leq 100$ ... (1)

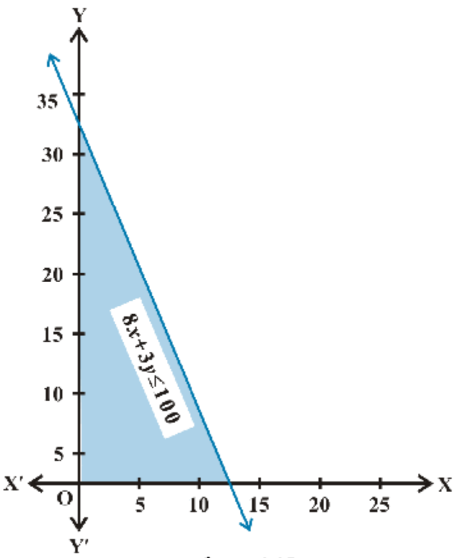
$x \geq 0$ ... (2)

$y \geq 0$ ... (3)

പരിഹാരം, ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$8x + 3y = 100$ എന്ന രേഖീയ സമവാക്യത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. $8x + 3y \leq 100$ എന്ന അസമതയുടെ പരിഹാരം $8x + 3y = 100$ എന്ന വരയിലുള്ള ബിന്ദുക്കളും അതിന് താഴെയുള്ള ഭാഗവും ആണ്. ചിത്രം (6.13) $x \geq 0$, ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശം ആയതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന കൂട്ടം അസമതകളുടെ കൂട്ടത്തിന്റെ പരിഹാരം ഗ്രാഫിലെ പൊതുവായി ഷേഡ് ചെയ്ത ഭാഗമാണ്.



ചിത്രം 6.12

($x = 0,\ y - 0,\ 8x + 3y = 100$ എന്നീ വരകളിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഉൾപ്പെടും)

ഉദാഹരണം : 15

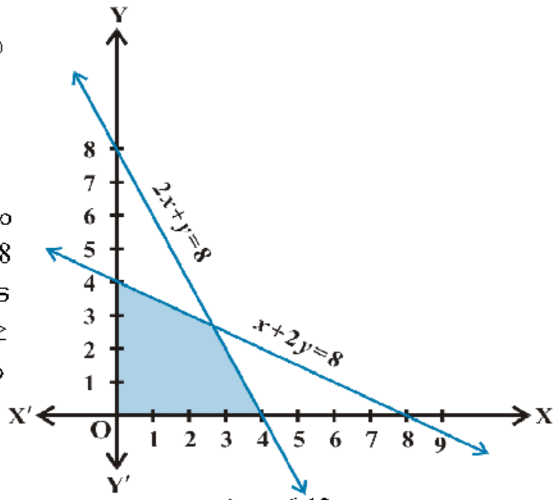
ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന അസമതകളുടെ പരിഹാരം ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.

$$x + 2y \le 8 \quad \ldots (1)$$
$$2x + y \le 8 \quad \ldots (2)$$
$$x \ge 0 \quad \ldots (3)$$
$$y \ge 0 \quad \ldots (4)$$

പരിഹാരം

$x + 2y = 8,\ 2x + y = 8$ എന്നീ രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

അസമത (1) ന്റെ പരിഹാരം $x + 2y = 8$ എന്ന വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുൾപ്പെടെ അതിന്റെ താഴ്ഭാഗവും അസമത (2) ന്റെ പരിഹാരം $2x + y = 8$ എന്ന വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുൾപ്പെടെ അതിന്റെ താഴ്ഭാഗവും ആകുന്നു. $x \ge 0, y \ge 0$ എന്നിവ ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശം ആകയാൽ, തന്നിരിക്കുന്ന അസമത ക്കൂട്ടത്തിന്റെ പരിഹാരം ഗ്രാഫിൽ പൊതുവായി ഷേഡ് ചെയ്ത ഭാഗം ആകുന്നു. (ചിത്രം 6.14)



ചിത്രം 6.13

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 6.3

തന്നിരിക്കുന്ന അസമതക്കൂട്ടങ്ങളുടെ പരിഹാരം ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.

1. $x \ge 3, y \ge 2$
2. $3x + 2y \le 12,\ x \ge 1, y \ge 2$
3. $2x + y \ge 6,\ 3x + 4y \le 12$
4. $x + y \ge 4,\ 2x - y > 0$
5. $2x - y > 1,\ x - 2y < -1$
6. $x + y \le 6,\ x + y \ge 4$
7. $2x + y \ge 8,\ x + 2y \ge 10$
8. $x + y \le 9,\ y > x,\ x \ge 0$
9. $5x + 4y \le 20,\ x \ge 1, y \ge 2$
10. $3x + 4y \le 60,\ x + 3y \le 30,\ x \ge 0,\ y \ge 0$
11. $2x + y \ge 4,\ x + y \le 3,\ 2x - 3y \le 6$
12. $x - 2y \le 3,\ 3x + 4y \ge 12,\ x \ge 0,\ y \ge 1$

$a : x+2y<=8; b : 2x+y<=8; c : x>=0; d : y>=0$ എന്നീ input command കൾ നൽകി ഉദാഹരണം 15 ലെ അസമതകൾ വരക്കാവുന്നതാണ്. പരിഹാരഭാഗം. അടയാള പ്പെടുത്തുന്നതിനായി $a \wedge b \wedge c \wedge d$ എന്ന input command കൊടുക്കുക. പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 6.3 ലെ ചോദ്യങ്ങൾ ഈ രീതിയിൽ മനസിലാക്കാവുന്നതാണ്.

13. $4x + 3y \le 60,\ y \ge 2x,\ x \ge 3,\ \ x, y \ge 0$

14. $3x + 2y \le 150,\ x + 4y \le 80,\ x \le 15,\ y \ge 0,\ x \ge 0$

15. $x + 2y \le 10,\ x + y \ge 1,\ x - y \le 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 16

പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക $-8 \le 5x - 3 < 7$.

പരിഹാരം

ഈ ചോദ്യത്തിൽ രണ്ട് അസമതകളാണുള്ളത് അവ $-8 \le 5x - 3$, $5x - 3 < 7$ ഉം എന്നിവയാണ്. ഇവയുടെ പരിഹാരം ഒരേ സമയത്ത് കണ്ടുപിടിക്കണം.

$$-8 \le 5x - 3 < 7$$

അല്ലെങ്കിൽ $-5 \le 5x < 10$ അല്ലെങ്കിൽ $-1 \le x < 2$

ഉദാഹരണം : 17

പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക. $-5 \le \dfrac{5-3x}{2} \le 8$

പരിഹാരം

ഇവിടെ $-5 \le \dfrac{5-3x}{2} \le 8$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു.

അതായത് $-10 \le 5 - 3x \le 16$, അല്ലെങ്കിൽ $-15 \le -3x \le 11$, അല്ലെങ്കിൽ $5 \ge x \ge -\dfrac{11}{3}$

ഇതിനെ $\dfrac{-11}{3} \le x \le 5$ എന്നെഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 18

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അസമതകളുടെ പൊതുവായ പരിഹാരം കണ്ടെത്തുകയും അതിനെ സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യുക.

$$3x - 7 < 5 + x \quad \ldots (1)$$

$$11 - 5x \le 1 \quad \ldots (2)$$

പരിഹാരം

1 -ാം അസമതയിൽ നിന്ന്

$$3x - 7 < 5 + x,$$

അല്ലെങ്കിൽ $x < 6 \ \ldots (3)$

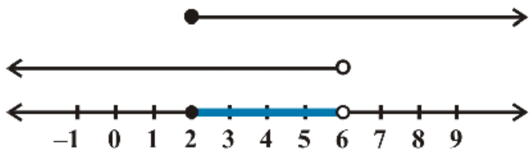
2-ാം അസമതയിൽ നിന്നും,

$$11 - 5x \le 1$$

അല്ലെങ്കിൽ, $-5x \le -10$

അതായത്, $x \ge 2 \ \ldots (4)$

(3), (4) എന്നീ അസമതകളുടെ ഗ്രാഫുകൾ സംഖ്യാരേഖയിൽ വരച്ചാൽ, രണ്ട് അസമതകൾക്കും പൊതുവായ ഭാഗം ചിത്രത്തിൽ നൽകിയിരിക്കുന്നത് കാണുക.



ചിത്രം 6.15

അതുകൊണ്ട്, ഇതിന്റെ പരിഹാരം 2 ഉൾപ്പെടെ 2 നും 6 നും ഇടയിലുള്ള രേഖീയ സംഖ്യകളാണ്.

അതായത്, $2 \le x < 6$

ഉദാഹരണം : 19

ഒരു പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഭാഗമായി ഹൈഡ്രോക്ലോറിക് ആസിഡിനെ 30° സെൽഷ്യസിനും 35° സെൽഷ്യസിനും ഇടയിൽ സൂക്ഷിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ഊഷ്മാവിനെ ഫാരൻഹീറ്റിലേക്ക് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് മാറ്റുക.

$C = \frac{5}{9}(F - 32)$; C സെൽഷ്യസിനെയും F ഫാരൻഹീറ്റിനെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

പരിഹാരം

$30 < C < 35$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു.

$C = \frac{5}{9}(F - 32)$ എന്ന വില നൽകുക.

അതായത് $30 < \frac{5}{9}(F - 32) < 35$,

$$\Rightarrow \frac{9}{5} \times (30) < (F - 32) < \frac{9}{5} \times (35)$$

അല്ലെങ്കിൽ $54 < (F - 32) < 63$

അല്ലെങ്കിൽ $86 < F < 95$.

അതായത്, ഊഷ്മാവ് 86° ഫാരൻഹീറ്റിനും 95° ഫാരൻഹീറ്റിനും ഇടയിലായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 20

12% ആസിഡുള്ള 600 ലിറ്റർ ലായനി ഒരു ഉൽപാദകന്റെ പക്കലുണ്ട്. 30% ആസിഡുള്ള എത്ര ലിറ്റർ ലായനി ഇതിലേക്ക് ചേർത്താൽ, ലഭിക്കുന്ന മിശ്രിതത്തിൽ 15% ന് മുകളിലും 18% ന് താഴെയും ആസിഡ് ഉണ്ടായിരിക്കും?

പരിഹാരം

കൂട്ടിച്ചേർക്കേണ്ട 30% ആസിഡ് ലായനിയുടെ അളവ് x ലിറ്ററാണെന്ന് കരുതുക.

അതുകൊണ്ട്, ആകെ മിശ്രിതം = $(x + 600)$ ലിറ്റർ

അതുകൊണ്ട്, x ന്റെ 30% + 600 ന്റെ 12% > $(x + 600)$ ന്റെ 15%

x ന്റെ 30% + 600 ന്റെ 12% < $(x + 600)$ ന്റെ 18%

അല്ലെങ്കിൽ $$\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) > \frac{15}{100}(x + 600)$$

$$\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) < \frac{18}{100}(x + 600)$$

അല്ലെങ്കിൽ $30x + 7200 > 15x + 9000$

$30x + 7200 < 18x + 10800$

അല്ലെങ്കിൽ $15x > 1800,\ 12x < 3600$

അല്ലെങ്കിൽ $x > 120,\ x < 300,$

അതായത് $120 < x < 300$

അതിനാൽ, ചേർക്കേണ്ട 30% ആസിഡ് ലായനിയുടെ അളവ് 120 ലിറ്ററിൽ കൂടുതലും 300 ലിറ്ററിൽ കുറവും ആണ്.

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1 മുതൽ 6 വരെയുള്ള അസമതകളുടെ പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക.

1. $2 \le 3x - 4 \le 5$
2. $6 \le -3(2x - 4) < 12$
3. $3 \le 4 - \dfrac{7x}{2} \le 18$
4. $-15 < \dfrac{3(x-2)}{5} \le 0$
5. $-12 < 4 - \dfrac{3x}{-5} \le 2$
6. $7 \le \dfrac{(3x+11)}{2} \le 11$.

7 മുതൽ 10 വരെയുള്ള അസമതകളുടെ പരിഹാരം കണ്ടതിനുശേഷം അതിന്റെ ഗ്രാഫ് സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

7. $5x + 1 > -24,\quad 5x - 1 < 24$
8. $2(x - 1) < x + 5,\quad 3(x + 2) > 2 - x$
9. $3x - 7 > 2(x - 6),\quad 6 - x > 11 - 2x$
10. $5(2x - 7) - 3(2x + 3) \le 0,\quad 2x + 19 \le 6x + 47$

11. ഒരു മിശ്രിതം 68° ഫാരൻഹീറ്റിനും 77° ഫാരൻഹീറ്റിനും ഇടയിൽ സൂക്ഷിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ഊഷ്മാവിനെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഫാരൻഹിറ്റ് (F), സെൽഷ്യസ് (C) എന്നിവ ഉൾപ്പെടുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് സെൽഷ്യസിലേക്ക് മാറ്റുക.

$$F = \frac{9}{5} C + 32$$

12. 8% ബോറിക് ആസിഡ് ലായനിയിൽ 2% ബോറിക് ആസിഡ് ലായനി ഉപയോഗിച്ച് നേർപ്പിക്കുന്നു. ലഭിക്കുന്ന മിശ്രിതത്തിൽ 4% നും 6% നും ഇടയിൽ ബോറിക് ആസിഡ് ഉണ്ടായിരിക്കണം. 8% ബോറിക് ആസിഡുള്ള 640 ലിറ്റർ ലായനി ഉണ്ടെങ്കിൽ, അതിനോടുകൂടി 2% ബോറിക് ആസിഡുള്ള എത്ര ലിറ്റർ ലായനി ചേർക്കണം?

13. 45% ആസിഡുള്ള 1125 ലിറ്റർ ലായനിയിലേക്ക് എത്ര ലിറ്റർ ജലം ചേർത്താൽ ലഭിക്കുന്ന ലായനിയിൽ 25% നും 30% ഇടയിൽ ആസിഡ് സാന്നിദ്ധ്യം ഉണ്ടാകും?

14. ഒരു വ്യക്തിയുടെ ബുദ്ധിക്ഷമത അളക്കുവാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം $IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$, ഇവിടെ MA എന്നത് മനഃപ്രായത്തെയും (Mental age) CA എന്നത് കാലക്രമമനുസരിച്ചുള്ള പ്രായത്തെയും (Chronological age) സൂചിപ്പിക്കുന്നു. 12 വയസ്സുള്ള ഒരു കൂട്ടം കുട്ടികളുടെ ബുദ്ധിക്ഷമത $80 \le IQ \le 140$ ആയാൽ അവരുടെ മനപ്രായത്തിന്റെ പരിധി കണ്ടെത്തുക.

സംഗ്രഹം

- രണ്ട് രേഖീയസംഖ്യകളെയോ രണ്ട് ബീജഗണിതവാക്യങ്ങളെയോ $<, >, \le, \ge$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഉപയോഗിച്ച് ബന്ധിപ്പിച്ചാൽ ഒരു അസമത ലഭിക്കും.
- ഒരു അസമതയുടെ ഇരുവശത്തോട്ടും ഒരേ സംഖ്യ കൂട്ടുകയോ ഇരുവശത്തുനിന്നും ഒരേ സംഖ്യ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യാവുന്നതാണ്.
- ഒരു അസമതയുടെ ഇരുവശത്തും ഒരേ അധിസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ ചെയ്യാവുന്നതാണ്. എന്നാൽ ന്യൂനസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ ചെയ്താൽ അസമത വിപരീതമാകും.
- x ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു അസമതയെ സത്യപ്രസ്താവനയാക്കുന്ന x ന്റെ വിലകളെ ആ അസമതയുടെ പരിഹാരം എന്നു പറയുന്നു.

- $x < a$ (അല്ലെങ്കിൽ $x > a$) എന്നത് ഒരു സംഖ്യാരേഖയിൽ രേഖപ്പെടുത്തുമ്പോൾ a യ്ക്ക് ചുറ്റും വളരെ ചെറിയ വൃത്തം വരയ്ക്കുകയും അതിന് ഇടതുവശം (അല്ലെങ്കിൽ വലതുവശം) സംഖ്യാരേഖയിൽ ഷേഡ് ചെയ്യുക.
- $x \le a$ (അല്ലെങ്കിൽ $x \ge a$) എന്നത് ഒരു സംഖ്യാരേഖയിൽ രേഖപ്പെടുത്തുമ്പോൾ a യ്ക്ക് ചുറ്റും വളരെ ചെറിയ ഒരു കറുത്ത വൃത്തം വരയ്ക്കുകയും അതിന് ഇടതുവശം (അല്ലെങ്കിൽ വലതുവശം) സംഖ്യാരേഖയിൽ ഷേഡ് ചെയ്യുക.
- $\le, \ge$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉൾപ്പെട്ട അസമതകളുടെ പരിഹാരത്തിൽ ആ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളും ഉൾപ്പെടുന്നു. വര വിഭജിക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭാഗത്തെ ബിന്ദു അസമതയിൽ ശരിയാകുന്നെങ്കിൽ ബിന്ദു ഉൾപ്പെടുന്ന ഭാഗവും, ശരിയാകുന്നില്ലെങ്കിൽ മറ്റുഭാഗവും ഷേഡ് ചെയ്ത് അസമതയുടെ പരിഹാര ഗ്രാഫ് വരക്കുന്നു.
- $<, >$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉൾപ്പെട്ട അസമതകളുടെ പരിഹാരത്തിൽ ആ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഉൾപ്പെടുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് പരിഹാര ഗ്രാഫിൽ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഒഴിവാക്കുന്നു.
- ഒരു കൂട്ടം അസമതകളുടെ പരിഹാരഭാഗം എന്നത് ആ അസമതകൾ ഓരോന്നും പാലിക്കപ്പെടുന്ന പൊതു ഭാഗമായിരിക്കും.

H9S8X6

അധ്യായം **7**

ക്രമീകരണവും തെരഞ്ഞെടുക്കലും (PERMUTATIONS AND COMBINATIONS)

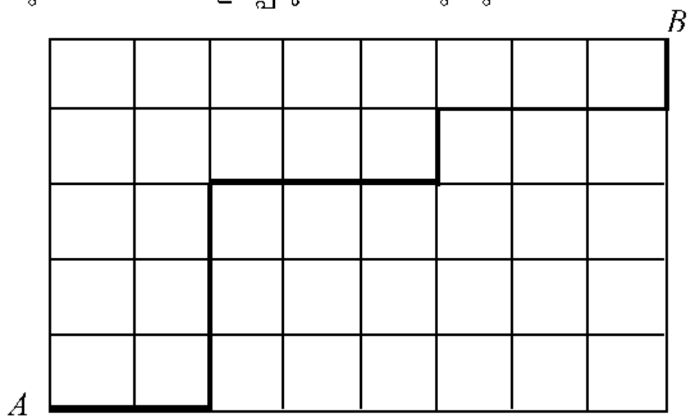
❖ *എല്ലാ കണ്ടുപിടുത്തങ്ങളും ഗണിതരൂപത്തിലാണ്, കാരണം നമുക്കു മറ്റൊരു വഴികാട്ടിയില്ല – ഡാർവിൻ* ❖

7.1 ആമുഖം

ജേക്കബ് ബർണോലി (1654-1705)

മനുഷ്യന്റെ അതിജീവന ചരിത്രത്തിലെ ഒരു സുപ്രധാന നാഴികക്കല്ലാണ് സംഖ്യകളുടെ കണ്ടുപിടുത്തം. അതോടെ വസ്തുക്കളെ എണ്ണിത്തിട്ടപ്പെടുത്തൽ എന്ന പ്രക്രിയ സുഗമമായി. ഗണിതത്തിന്റെ വളർച്ചയുടെ നാൾവഴികൾ എണ്ണൽ എളുപ്പമാക്കാനുള്ള മാർഗങ്ങൾ ചിന്തിച്ചതോടെ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ 'എണ്ണൽ തത്വങ്ങൾ' (counting principles) എന്ന ഒരു ശാഖ തന്നെ വളർന്നു വന്നു. ഈ അധ്യായത്തിൽ എണ്ണൽ തത്വങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ചില കാര്യങ്ങൾ പഠിക്കാം.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ A എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് B എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരത്തിൽ ഒരു 'വഴി' അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.



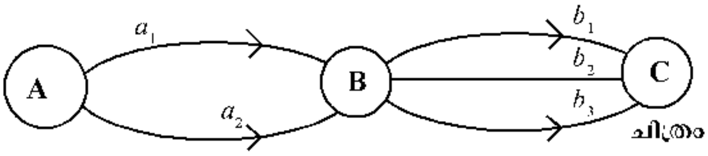
ചിത്രം 7.1

(എല്ലാ വരകളും തുല്യ അകലത്തിലാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക.)

ഇതുപോലെ A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്ക് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരമുള്ള എത്ര വഴികൾ ഉണ്ടെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാമോ? ധാരാളം വഴികൾ നിർദേശിക്കാൻ നിങ്ങൾക്കറിയാമെങ്കിലും 'എത്ര' വഴികൾ എന്ന ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം പറയുക അത്ര എളുപ്പമല്ല. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിലാണ് എണ്ണി നോക്കാതെ എണ്ണം പറയാൻ പറ്റുന്ന "എണ്ണൽ സൂത്രങ്ങൾ" വികസിപ്പിക്കേണ്ടി വന്നത്. മേൽപ്പറഞ്ഞ ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം കണ്ടെത്താനാകും വിധം എണ്ണം കണ്ടെത്തുന്നതിനുള്ള മാർഗങ്ങളാണ് ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.

7.2 എണ്ണലിന്റെ അടിസ്ഥാന തത്വം (Fundamental Principle of Counting)

A, B, C എന്നിവ മൂന്നു സ്ഥലങ്ങൾ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്കെത്താൻ രണ്ടു വഴികളുണ്ട്. B യിൽ നിന്ന് C യിലേക്കെത്താൻ 3 വഴികളുണ്ട്. A യിൽ നിന്ന് C യിലേക്ക് എത്ര വ്യത്യസ്ത വഴികൾ സാധ്യമാകും? ഈ പ്രശ്നത്തെ വിശകലനം ചെയ്തു നോക്കാം.



ചിത്രം 7.2

A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്കുള്ള വഴികൾ a_1, a_2 എന്നിവയാണ്. B യിൽ നിന്ന് C യിലേക്കുള്ള വഴികൾ b_1, b_2, b_3 എന്നിവയും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്ക് a_1, എന്ന വഴിയിലൂടെ വന്നാൽ B യിൽ C നിന്ന് യിലേക്ക് മൂന്ന് വഴികൾ സാധ്യമാണ്. അതായത് A യിൽ നിന്ന് $a_1 b_1$, $a_1 b_2$, $a_1 b_3$ എന്നിങ്ങനെ മൂന്ന് വഴികളിലൂടെ C യിൽ എത്താം. ഇനി A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്ക് a_2 എന്ന വഴിയാണ് തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നതെങ്കിലും A യിൽ നിന്ന് C യിലേക്ക് 3 വഴികൾ തന്നെ സാധ്യമാണ്. $a_2 b_1$, $a_2 b_2$, $a_2 b_3$ എന്നിവ. അപ്പോൾ A യിൽ നിന്ന് C യിലെത്താൻ ആകെ സാധ്യമായ വഴികൾ $3 + 3 = 6$ ആയിരിക്കും.

ഇനി B യിൽ നിന്ന് C യിലേക്ക് 4 വ്യത്യസ്ത വഴികൾ ഉണ്ടായിരുന്നെങ്കിലോ? a_1ന്റെ തുടർച്ചയായി 4 വഴികളും a_2 വിന്റെ തുടർച്ചയായി 4 വഴികളും കിട്ടും. അങ്ങനെ A യിൽ നിന്ന് C യിലേക്ക് $4 + 4 = 8$ വഴികൾ ഉണ്ടാകും.

അപ്പോൾ A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്ക് m വഴികളും B യിൽ നിന്ന് C യിലേക്ക് n വഴികളും ഉണ്ടായിരുന്നെങ്കിൽ A യിൽ നിന്ന് C യിലേക്കുള്ള ആകെ വഴികളുടെ എണ്ണം കിട്ടാൻ n എന്ന സംഖ്യയെ m തവണ കൂട്ടേണ്ടി വരില്ലേ?

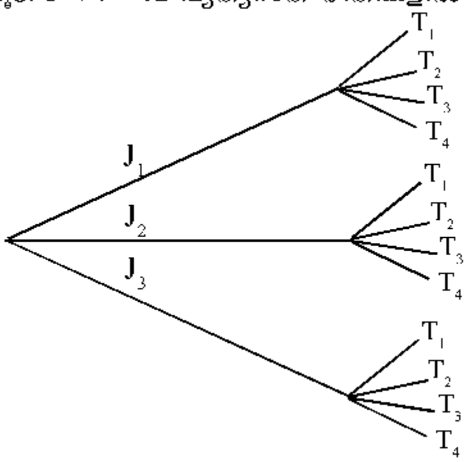
A യിൽ നിന്ന് C യിലേക്കുള്ള വഴികളുടെ എണ്ണം.

$$= n + n + n \text{ ...... } (m \text{ തവണ})$$

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്ക് m വഴികളും B യിൽ നിന്ന് C യിലേക്ക് n വഴികളും ഉണ്ടെങ്കിൽ A യിൽ നിന്ന് C യിലേക്ക് $m \times n$ വഴികൾ ഉണ്ടാകും. വഴിയുടെ കാര്യത്തിൽ മാത്രമാണോ ഇത് ശരിയാകുക?

നിങ്ങൾക്ക് 4 ടീഷർട്ടും 3 ജീൻസുമുണ്ടെന്ന് കരുതുക. എത്ര വ്യത്യസ്ത രീതിയിൽ ഇവ ധരിക്കാൻ പറ്റും?

ഓരോ ജീൻസ് ധരിക്കുമ്പോഴും 4 ടീഷർട്ടുകളിൽ ഏതു വേണമെങ്കിലും ധരിക്കാം. അതായത് ഒരു ജീൻസിന്റെ കൂടെ 4 ടീ ഷർട്ട് എന്ന തോതിൽ 3 ജീൻസും 4 ടീഷർട്ടും കൂടി $3 \times 4 = 12$ വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ ധരിക്കാൻ കഴിയും.



ചിത്രം 7.3

J_1, J_2, J_3 ജീൻസുകളും T_1, T_2, T_3, T_4 ടീഷർട്ടുകളുമാണെങ്കിൽ

$$\left.\begin{array}{l} J_1T_1,\ J_1T_2,\ J_1T_3,\ J_1T_4 \\ J_2T_1,\ J_2T_2,\ J_2T_3,\ J_2T_4 \\ J_3T_1,\ J_3T_2,\ J_3T_3,\ J_3T_4 \end{array}\right\} 3 \times 4 = 12$$

ഇതിനെ സാമാന്യവത്കരിച്ചാൽ എണ്ണലിന്റെ അടിസ്ഥാനതത്ത്വത്തിൽ എത്താം. അതായത്,

കുറിപ്പ്

ഒരു പ്രവൃത്തി m വ്യത്യസ്ത രീതികളിലും അതിനെത്തുടർന്ന് മറ്റൊരു പ്രവൃത്തി n വ്യത്യസ്ത രീതികളിലും ചെയ്യാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ രണ്ടും കൂടി ഒരുമിച്ച് mn വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ ചെയ്യാം.

ഇത് എണ്ണലിന്റെ അടിസ്ഥാനതത്ത്വം അല്ലെങ്കിൽ ഗുണനതത്ത്വം എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ലളിതമായ ചില ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ നമുക്ക് ഈ തത്ത്വത്തെ കൂടുതൽ മനസ്സിലാക്കാം.

എത്ര രണ്ടക്ക സംഖ്യകളുമുണ്ട്? ഉത്തരം എളുപ്പമാണ് എണ്ണി നോക്കാതെ തന്നെ പറയാം, 90.

എത്ര മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുണ്ട് എന്നാണ് ചോദ്യമെങ്കിലോ? അപ്പോഴും ബുദ്ധിമുട്ടില്ലാതെ ഉത്തരം പറയാം, 900

ഇനി ആദ്യത്തെ ചോദ്യത്തിൽ ഒരല്പം മാറ്റം വരുത്തി, അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാത്ത എത്ര രണ്ടക്ക സംഖ്യകളുണ്ടെന്നാക്കിയാലോ?

അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുന്ന രണ്ടക്ക സംഖ്യകൾ അറിയാമല്ലോ. 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. ഇവയെ ഒഴിവാക്കിയാൽ അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാത്ത രണ്ടക്ക സംഖ്യകൾ കിട്ടും.

അതായത് 90–9 =81 രണ്ടക്ക സംഖ്യകൾ.

ഇത്തരത്തിൽ മാറ്റുന്നത് രണ്ടാമത്തെ ചോദ്യത്തിലാണെങ്കിലോ?

ഒരു അക്കം പോലും ആവർത്തിക്കാത്ത എത്ര മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുണ്ട്?

ഇതിനുത്തരം കണ്ടെത്തുക അത്ര എളുപ്പമല്ല. അങ്ങനെയെങ്കിൽ ഈ ചോദ്യത്തെ മറ്റൊരു രീതിയിൽ നോക്കിക്കാണാം.

ഒരു മൂന്നക്ക സംഖ്യ എഴുതുക എന്നത്, ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനത്തും പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തും നൂറിന്റെ സ്ഥാനത്തും ഓരോ അക്കം എഴുതുക എന്ന മൂന്നു കാര്യങ്ങളുടെ ചേർച്ചയാണ്.

മൂന്ന് സ്ഥാനവിലകളെ മൂന്ന് പെട്ടികളാക്കിയെടുത്താൽ നൂറിന്റെ സ്ഥാനത്ത്, അതായത് ആദ്യത്തെ കള്ളിയിൽ 1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള ഒൻപത് അക്കങ്ങളിൽ ഏത് വേണമെങ്കിലും എഴുതാം. (പൂജ്യമെഴുതിയാൽ അത് രണ്ടക്ക സംഖ്യയായിത്തീരും)

രണ്ടാമത്തെ കളത്തിൽ 0 മുതൽ 9 വരെയുള്ള 10 അക്കങ്ങളിൽ, ഒന്നാമത്തെ കളത്തിൽ അക്കം ഒഴികെ ഏതക്കവും എഴുതാം. (അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചു കൂടല്ലോ) മൂന്നാമത്തെ കളത്തിൽ ആദ്യത്തെ രണ്ടു കളങ്ങളിൽ എഴുതിയ അക്കങ്ങൾ ഒഴികെ ഏതക്കവും എഴുതാം.

അതായത്, ആദ്യത്തെ അക്കം 9 രീതിയിൽ, രണ്ടാമത്തെ അക്കം 9 രീതിയിൽ, മൂന്നാമത്തെ അക്കം 8 രീതിയിൽ

മൂന്നും ഒന്നിനു പുറകെ ഒന്നായി ചെയ്യേണ്ടി വരുമ്പോൾ ഗുണന തത്വപ്രകാരം വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ സംഖ്യകൾ എഴുതാം.

അതായത് $9 \times 9 \times 8 = 648$ മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ, ഒരു അക്കം പോലും ആവർത്തിക്കാതെ എഴുതാൻ കഴിയും.

ഉദാഹരണം : 1

1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാത്ത എത്ര രണ്ടക്ക സംഖ്യകൾ എഴുതാം?

പരിഹാരം

5	4

ആദ്യത്തെ കളത്തിൽ തന്നിട്ടുള്ള 5 അക്കങ്ങളിൽ ഏത് വേണമെങ്കിലും എഴുതാം. ആവർത്തിക്കാൻ പാടില്ലാത്തതിനാൽ അടുത്ത കളത്തിൽ 4 അക്കങ്ങളിൽ ഏതു വേണമെങ്കിലും ഉപയോഗിക്കാം.

ആകെ രണ്ടക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= 5 \times 4 = 20$

ഉദാഹരണം : 2

1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്, എത്ര രണ്ടക്ക ഇരട്ടസംഖ്യകൾ എഴുതാം? അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാവുന്നതാണ്.

പരിഹാരം

ഇരട്ടസംഖ്യ ആവണമെന്നതുകൊണ്ട് ഒന്നുകളുടെ സ്ഥാനത്ത് 2 അല്ലെങ്കിൽ 4 തന്നെ വരണമല്ലോ. അതായത് 2 സംഖ്യകൾ മാത്രമേ ആ കള്ളിയിൽ എഴുതാനാകൂ. അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുന്നതിന് തടസ്സമില്ലാത്തതിനാൽ രണ്ടാമത്തെ കളത്തിൽ 5 അക്കങ്ങളിൽ ഏതു വേണമെങ്കിലും ഉപയോഗിക്കാം.

ആകെ രണ്ടക്ക ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= 5 \times 2 = 10$

ഉദാഹരണം : 3

'ROSE' എന്ന ഇംഗ്ലീഷ് വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ അർത്ഥമുള്ളതോ ഇല്ലാത്തതോ ആയ 4 അക്ഷരമുള്ള എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

പരിഹാരം

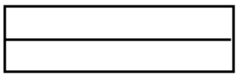
ആദ്യത്തെ കളത്തിൽ 4 അക്ഷരങ്ങളിൽ ഏതു വേണമെങ്കിലും ഉപയോഗിക്കാം. തുടർന്ന് 3, 2, 1 എന്ന ക്രമത്തിൽ കളങ്ങൾ നിറയ്ക്കാം.

ആകെ വാക്കുകൾ $= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

ഉദാഹരണം : 4

രണ്ടു വ്യത്യസ്ത നിറത്തിലുള്ള പതാകകൾ ഒന്നിനു താഴെ മറ്റൊന്ന് ചേർത്ത് വെച്ച് ഒരു അടയാളം (സിഗ്നൽ) ഉണ്ടാക്കുന്നു. 4 വ്യത്യസ്ത നിറത്തിലുള്ള പതാകകൾ ലഭ്യമാണെങ്കിൽ എത്ര അടയാളങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാം?

പരിഹാരം



ഒരു അടയാളം ഉണ്ടാക്കുന്നതിന് രണ്ടു പതാകകൾ മുകളിലും താഴെയുമായി ചേർത്തു വെയ്ക്കണം.

മുകളിലെ പതാക നാല് നിറങ്ങളിൽ ഏതുമാവാം. താഴത്തെ പതാകയ്ക്ക് പിന്നെ മൂന്നു സാധ്യതകളേയുള്ളു.

ആകെ രൂപീകരിക്കാവുന്ന അടയാളങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 4 \times 3 = 12$

ഉദാഹരണം : 5

അഞ്ചു വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങളിലുള്ള പതാകകൾ ലഭ്യമാണ്. ചുരുങ്ങിയത് രണ്ടു പതാകകളെങ്കിലും ഒന്നിന് താഴെ മറ്റൊന്ന് ചേർത്തു വെച്ച് എത്ര വ്യത്യസ്ത അടയാളങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാം?

പരിഹാരം

ചുരുങ്ങിയത് രണ്ടു പതാകകളെങ്കിലും ഉപയോഗിച്ചാണ് അടയാളങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കേണ്ടത്.

ആയതിനാൽ 2 പതാകകൾ, 3 പതാകകൾ, 4 പതാകകൾ, 5 പതാകകൾ ഇങ്ങനെ ഉപയോഗിച്ച് 4 വ്യത്യസ്ത തരം അടയാളങ്ങൾ സാധ്യമാണ്.

ആകെ അടയാളങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണാൻ ഇവയുടെ തുക കണ്ടെത്തണം.

രണ്ടു പതാകകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള അടയാളങ്ങളുടെ എണ്ണം

5
4

$5 \times 4 = 20$

മൂന്ന് പതാകകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള അടയാളങ്ങളുടെ എണ്ണം

5
4
3

$5 \times 4 \times 3 = 60$

നാല് പതാകകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള അടയാളങ്ങളുടെ എണ്ണം

5
4
3
2

$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

അഞ്ച് പതാകകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള അടയാളങ്ങളുടെ എണ്ണം

5
4
3
2
1

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ആകെ അടയാളങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 20 + 60 + 120 + 120$

$= 320$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 7.1

1. 1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ നിർമിക്കാം?
   (i) അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചുപയോഗിച്ചാൽ
   (ii) അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചുപയോഗിക്കാതിരുന്നാൽ
2. അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചുപയോഗിക്കാമെങ്കിൽ 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര മൂന്നക്ക ഇരട്ടസംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം?
3. ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ ആദ്യത്തെ 10 അക്ഷരങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉപയോഗിച്ച് 4 അക്ഷരങ്ങളുടെ എത്ര കോഡുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?
4. അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ 0 മുതൽ 9 വരെയുള്ളവ ഉപയോഗിച്ച് 67 ൽ തുടങ്ങുന്ന എത്ര അഞ്ചക്ക സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

5. ഒരു നാണയം 3 തവണ ടോസ്സ് ചെയ്ത് പരിണിതഫലം രേഖപ്പെടുത്തുന്നു, എത്ര പരിണിതഫലങ്ങൾ സാധ്യമാവും?

6. വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങളിലുള്ള 5 പതാകകളിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ടെണ്ണം ഒന്നിനു താഴെ മറ്റൊന്ന് ചേർത്ത് വച്ച് എത്ര അടയാളങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം?

7.3 ക്രമീകരണങ്ങൾ (Permutations)

ചർച്ച ചെയ്ത ഉദാഹരണങ്ങളുടെ വെളിച്ചത്തിൽ ചിന്തിച്ചാൽ ഏതൊരു മൂന്നക്ക സംഖ്യയും 0 മുതൽ 9 വരെയുള്ള അക്കങ്ങളുടെ വ്യത്യസ്ത ക്രമീകരണങ്ങൾ ആണ ല്ലോ. അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചുപയോഗിച്ചും അല്ലാതെയും ഇത്തരം സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം. ഇവിടെ സംഖ്യകളെ പരസ്പരം വ്യത്യസ്തമാക്കുന്നത് അവയിലോ രോന്നിലും അക്കങ്ങളുടെ സ്ഥാനത്തിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ്. ഉദാഹരണത്തിന് 123, 321 എന്നീ സംഖ്യകളെയും ഒരേ അക്കങ്ങൾ ആണെങ്കിലും അവയെ ക്രമീകരിച്ചിരി ക്കുന്നത് വ്യത്യസ്ത സ്ഥാനങ്ങളിലാണ്. അതുകൊണ്ട് തന്നെ സംഖ്യകൾ വ്യത്യ സ്തമാകുകയും ചെയ്യുന്നു. അതായത് ക്രമീകരണം പ്രധാനമാണെന്ന് സാരം.

7.3.1 നിർവചനം :

ഒരു നിശ്ചിത എണ്ണം വസ്തുക്കളിൽ മുഴുവനും, അല്ലെങ്കിൽ ചിലതിനെ നിശ്ചിത രീതിയിൽ എഴുതുന്നതിനെ ഒരു ക്രമീകരണം (Permutation) എന്നു പറയുന്നു.

7.3.2 പരിഗണിക്കുന്ന എല്ലാ വസ്തുക്കളെയും ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണം

1, 2, 3, 4 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ എത്ര നാലക്ക സംഖ്യകൾ എഴുതാം എന്ന പ്രശ്നം പരിഗണിക്കുക.

ആദ്യ കളത്തിൽ 4, രണ്ടാമത്തേതിൽ 3 എന്ന ക്രമത്തിൽ, അക്കങ്ങൾ ഉൾപ്പെടു ത്തുന്ന സാധ്യത പരിഗണിച്ച് $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ നാലക്ക സംഖ്യകൾ സാധ്യമാകും എന്നു പറയാം. ഇതേപോലെ 5 അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് അക്കങ്ങൾ ആവർത്തി ക്കാതെ അഞ്ചക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം കാണുന്നതിന് $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ കണ ക്കാക്കിയാൽ മതി. അതായത് n വസ്തുക്കൾ ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണങ്ങ ളുടെ എണ്ണം കാണാൻ 1 മുതൽ n വരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടു പിടിച്ചാൽ മതി.

7.3.2 ക്രമഗുണിതം

1 മുതൽ n വരെയുള്ള സംഖ്യകളെ തമ്മിൽ ക്രമമായി ഗുണിച്ചെഴുതുന്ന വിലയ്ക്ക് സൗകര്യാർത്ഥം "ക്രമഗുണിതം n" എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $n\,!$ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം.' 'ക്രമഗുണിതം n' എന്നതിനെ $\underline{|n}$ എന്നും സൂചിപ്പിക്കാം.

$$\begin{aligned} 1 &= 1! \\ 1 \times 2 &= 2! \\ 1 \times 2 \times 3 &= 3! \\ 1 \times 2 \times 3 \times 4 &= 4! \\ n\,! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots\ldots (n-1)n \end{aligned}$$

കുറിപ്പ്

$$\begin{aligned} n\,! &= (1 \times 2 \times \text{----------} \times (n-1)) \times n \\ &= (n-1)!n \\ &= (n-2)! \times (n-1) \times n \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം : 6

വില കാണുക.

(i) 5 ! (ii) 7 ! (iii) 7 ! - 5 !

പരിഹാരം

(i) $5\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

(ii) $7\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

(iii) $7\,! - 5\,! = 5040 - 120 = 4920$

ഉദാഹരണം : 7

വില കാണുക:

(i) $\dfrac{7!}{5!}$ (ii) $\dfrac{12!}{(10!)(2!)}$

പരിഹാരം

(i) $\dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$

(ii) $\dfrac{12!}{(10!)(2!)} = \dfrac{12 \times 11 \times 10!}{10! \times 2} = 11 \times 6 = 66$

ഉദാഹരണം : 8

$n - 5$ ഉം $\mathrm{r} - 2$ ഉം ആണെങ്കിൽ $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ന്റെ വില കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\times 3!} = \frac{4\times 5}{2} = 10$$

ഉദാഹരണം : 9

$\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = \frac{1}{9!}$ ആയാൽ x ന്റെ വില കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$$\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = \frac{x}{10!}$$

$$\frac{1}{8!} + \frac{1}{8!\times 9} = \frac{x}{10!}$$

$$\frac{1}{8!}\left(1+\frac{1}{9}\right) = \frac{x}{10!}$$

$$\frac{10}{8!\times 9} = \frac{x}{10!}$$

$$\frac{10}{8!\times 9} = \frac{x}{10\times 9\times 8!}$$

$$x = 100$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 7.2

1. വില കാണുക.

   (i) $8!$ (ii) $4! - 3!$

2. $3! + 4! = 7!$ ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

3. $\dfrac{8!}{6! \times 2!}$ ന്റെ വില കാണുക.

4. $\dfrac{1}{6!} + \dfrac{1}{7!} = \dfrac{x}{8!}$ ആയാൽ x ന്റെ വില കാണുക.

5. $\dfrac{n!}{(n-r)!}$ ന്റെ വില കാണുക.

   (i) $n = 6,\ r = 2$ (ii) $n = 9,\ r = 5$

7.4 പരിഗണിക്കുന്ന വസ്തുക്കളിൽ ഒരു നിശ്ചിത എണ്ണം ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണം.

1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാവുന്ന മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണമെത്ര എന്ന പ്രശ്നം നാം കണ്ടതാണല്ലോ.

$5 \times 4 \times 3 = 60$ വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകൾ സാധ്യമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം. ഒരു അഞ്ചക്ക സംഖ്യയാണ് എഴുതണമെങ്കിൽ 5 അക്കങ്ങളും ഒരുമിച്ച് ഉപയോഗിക്കണം. ഇത്തരത്തിൽ എഴുതാവുന്ന അഞ്ചക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $5!$ ആണെന്നും അറിയാം.

മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം കാണുന്ന പ്രശ്നത്തെ ക്രമഗുണിതം ഉപയോഗിച്ച് പറയാൻ സാധിച്ചാൽ ഇത്തരം പ്രശ്നങ്ങളുടെ സാമാന്യവത്ക്കരണം എളുപ്പമായിരിക്കില്ലേ? മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $5 \times 4 \times 3$ ആണല്ലോ. ഇതിനെ

$\dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$ എന്നെഴുതിയാലോ?

അപ്പോൾ $\dfrac{5!}{2!}$ എന്നു കിട്ടില്ലേ?

ഇത്തരത്തിൽ 10 വസ്തുക്കളിൽ 4 എണ്ണം ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണമാണെ ങ്കിലോ? മേൽപറഞ്ഞ രീതിയിൽ ചിന്തിച്ചാൽ $\frac{10!}{6!}$ എന്ന് ഉത്തരം കിട്ടില്ലേ?

(4 എണ്ണത്തിന്റെ ക്രമീകരണമാണ് വേണ്ടത്. ആദ്യത്തെ സ്ഥാനത്തിന് 10, അടുത്ത തിന് 9 എന്ന ക്രമത്തിൽ $10\times9\times8\times7$ ക്രമീകരണങ്ങൾ സാധ്യമാവും. അതിനെ $\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$ എന്നും $\frac{10!}{6!}$ എന്നും മാറ്റിയെഴുതാം.)

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ

n വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് r വസ്തുക്കൾ ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $\frac{n!}{(n-r)!}$ ആയിരിക്കും. ഇതിനെ നമുക്ക് ${}^{n}p_{r}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

അതായത് ${}^{n}p_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}\ 0 \le r \le n$

ഈ സൂത്രവാക്യപ്രകാരം, n വസ്തുക്കളെ മുഴുവൻ ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണ ങ്ങളുടെ എണ്ണം എത്രയായിരിക്കും?

$${}^{n}p_{n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

$0! = 1$ എന്നാണ് നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത്.

അപ്പോൾ ${}^{n}p_{n} - n!$

$${}^{n}p_{o} = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

സിദ്ധാന്തം : 1

n വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് r എണ്ണം എടുത്തുള്ള ക്രമീകരണത്തിൽ ആവർത്തനം അനു വദിച്ചാൽ n^r ക്രമീകരണങ്ങൾ സാധ്യമാകും. (തെളിവ് കണ്ടെത്തുക)

ഉദാഹരണം 10

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ n ന്റെ വില കണക്കാക്കുക :

(i) $\quad {}^{n}p_5 = 42\ {}^{n}p_3\ ,\ n > 4 \qquad$ (ii) $\quad \dfrac{{}^{n}p_4}{{}^{(n-1)}p_4} = \dfrac{5}{3},\ n > 4$

പരിഹാരം

(i)
$$
\begin{aligned}
{}^{n}p_5 &= 42\ {}^{n}p_3 \\
\frac{n!}{(n-5)!} &= 42\frac{n!}{(n-3)!} \\
\frac{1}{(n-5)!} &= 42\ \frac{1}{(n-3)\ (n-4)(n-5)!} \\
(n-3)(n-4) &= 42 \\
n^2-7n-30 &= 0 \\
(n-10)(n+3) &= 0
\end{aligned}
$$

$n = 10$ അല്ലെങ്കിൽ $n = -3$

$n = -3$ സാധ്യമല്ലാത്തതിനാൽ $n = 10$.

(ii)
$$
\begin{aligned}
\frac{{}^{n}p_4}{{}^{(n-1)}p_4} &= \frac{5}{3},\ n > 4 \\
\frac{\dfrac{n!}{(n-4)!}}{\dfrac{(n-1)!}{((n-1)-4)!}} &= \frac{5}{3} \\
\frac{n}{n-4} &= \frac{5}{3} \\
3n &= 5\ (n - 4) \\
n &= 10
\end{aligned}
$$

ഉദാഹരണം 11

$5 \times 4p_r = 6 \times 5p_{r-1}$ ആയാൽ r ന്റെ വില കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$$5 \times 4p_r = 6 \times 5p_{r-1}$$

$$5 \times \frac{4!}{(4-r)!} = 6 \times \frac{5!}{(5-(r-1))!}$$

$$\frac{1}{(4-r)!} = \frac{6}{(6-r)!}$$

$$\frac{1}{(4-r)!} = \frac{6}{(6-r)(5-r)(4-r)!}$$

$$(6-r)(5-r) = 6$$

$$30 - 11r + r^2 = 6$$

$$r^2 - 11r + 24 = 0$$

അതുകൊണ്ട് $$(r-8)(r-3) = 0$$

$r = 8$ അല്ലെങ്കിൽ $r = 3$

$r \le n$ ആകേണ്ടതിനാൽ $r \ne 8$

$$r = 3$$

7.5 വ്യത്യസ്തമല്ലാത്ത വസ്തുക്കളുടെ ക്രമീകരണം

അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ 1, 2, 3 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഉണ്ടാക്കാവുന്ന മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $3 \times 2 \times 1 = 6$ ആണെന്ന് നമുക്കറിയാം.

ഇതിൽ 3 ന് പകരം 2 തന്നെ ആയിരുന്നെങ്കിലോ? 1, 2, 2 എന്നീ മൂന്ന് അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉണ്ടാക്കുന്ന മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം എത്രയായിരിക്കും?

ഇതൊരു ലളിതമായ പ്രശ്നം ആയതുകൊണ്ട് നമുക്ക് ഈ രണ്ടു പ്രശ്നത്തിനും എഴുതാവുന്ന എല്ലാ മൂന്നക്ക സംഖ്യകളും എഴുതി നോക്കാം.

1, 2, 3 ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാവുന്ന മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ	1, 2, 2 ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാവുന്ന മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ
123	122
132	212
213	221
231	
312	
321	

അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണം രണ്ട് പ്രശ്നത്തിലും തുല്യമായിരുന്നു. എന്നാൽ എഴുതാവുന്ന മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം തുല്യമല്ല. ഇതെന്തുകൊണ്ട് സംഭവിച്ചു? രണ്ട് അക്കങ്ങൾ സമാനമായപ്പോൾ ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം രണ്ടിലൊന്നായി (പകുതിയായി) കുറഞ്ഞു. ഇനി മേൽപ്രശ്നത്തിലെ 1 എന്ന അക്കം കൂടി മാറ്റി 2 ആക്കിയാൽ മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാൻ ശ്രമിച്ചാലോ? അതായത് 2, 2, 2 എന്നീ മൂന്ന് അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം? 222 എന്ന ഒരു സംഖ്യമാത്രം. മൂന്നു അക്കങ്ങളും ഒരുപോലെയായപ്പോൾ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം ആദ്യം ഉണ്ടായിരുന്നതിന്റെ ആറിലൊന്ന് ആയികുറഞ്ഞു. 3 അക്കങ്ങൾ പല വിധത്തിൽ ക്രമീകരിച്ചാണല്ലോ സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നത്. 3 ക്രമീകരണങ്ങൾ സാധ്യമാണ് താനും. അക്കങ്ങൾ തിരിച്ചറിയാനാവാതെ ആയപ്പോൾ ഈ ക്രമീകരണങ്ങൾ എല്ലാം ഒരുപോലെ (വേർതിരിച്ചറിയാൻ പറ്റാത്തവിധം) ആയിത്തീർന്നു. അതിനാൽ 3! ക്രമീകരണങ്ങളിൽ നിന്ന് ഒരു മൂന്നക്ക സംഖ്യ മാത്രമേ എഴുതാൻ സാധിക്കൂ. അതായത്

3 വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളുടെ ക്രമീകരണം – $3\,! = 6$ രീതിയിൽ

3 വസ്തുക്കളിൽ 2 എണ്ണം സമാനമായാൽ ക്രമീകരണം $\dfrac{3!}{2!} = 3$

3 വസ്തുക്കളിൽ 3 എണ്ണവും സമാനമായാൽ ക്രമീകരണം $\dfrac{3!}{3!} = 1$

ഇതിനെ സാമാന്യവത്ക്കരിച്ച് പറഞ്ഞാൽ വസ്തുക്കൾ ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണത്തിൽ p വസ്തുക്കൾ സമാനമായാൽ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $\dfrac{n!}{p!}$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 12

ROOT എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഉണ്ടാക്കാവുന്ന അർത്ഥമുള്ളതോ ഇല്ലാത്തതോ ആയ നാലക്ഷരമുള്ള വാക്കുകളുടെ എണ്ണമെത്ര?

പരിഹാരം

4 അക്ഷരങ്ങളിൽ 2 എണ്ണം സമാനമായ അക്ഷരങ്ങളാണ്. ആയതിനാൽ

ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{4!}{2!} = 12$

വാക്കുകളുടെ എണ്ണം $= 12$

> **കുറിപ്പ്**
>
> n വസ്തുക്കളിൽ p_1 വസ്തുക്കൾ ഒരുതരം, p_2 വസ്തുക്കൾ മറ്റൊരു തരം .... അങ്ങനെ p_k വസ്തുക്കൾ വേറൊരു തരം ആയാൽ വസ്തുക്കളുടെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $\dfrac{n!}{P_1!\times P_2!....P_k!}$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 13

"ALLAHABAD' എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക.

പരിഹാരം

ആകെ അക്ഷരങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 9$

ആവർത്തിക്കുന്ന അക്ഷരങ്ങൾ A - 4, L - 2

ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{9!}{4!2!} = \dfrac{5\times 6\times 7\times 8\times 9}{2}$

$= 7560$

ഉദാഹരണം : 14

1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര നാലക്ക സംഖ്യകൾ എഴുതാം?

പരിഹാരം

1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള അക്കങ്ങളിൽ 4 എണ്ണം ഒരുമിച്ചെടുത്തുള്ള ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണമാണ് നാലക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം.

$\therefore$ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം = $^9P_4$

$$= \frac{9!}{(9-4)!} = 3024$$

ഉദാഹരണം : 15

0, 1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉപയോഗിച്ച് 100 നും 1000 നും ഇടയ്ക്കുള്ള എത്ര സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

പരിഹാരം

100 നും 1000 നും ഇടയിലുള്ള സംഖ്യകൾ എല്ലാം മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ ആണല്ലോ.

5	5	4

100 ന്റെ സ്ഥാനത്ത് 0 വന്നാൽ അത് രണ്ടക്ക സംഖ്യയായിത്തീരും. ആ സ്ഥാനത്ത് 0 ഒഴികെ 5 സാധ്യതകൾ. 10 ന്റെ സ്ഥാനത്ത് വീണ്ടും 5, ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്ത് 4.

ആകെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 5 \times 5 \times 4$

$= 100$

ഉദാഹരണം : 16

'DAUGHTER' എന്ന വാക്കിന്റെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്

(i) എല്ലാ സ്വരാക്ഷരങ്ങളും ഒരുമിച്ച് വരുംവിധം 8 അക്ഷരങ്ങളുള്ള എത്ര വാക്കുകൾ രൂപീകരിക്കാം?

(ii) എല്ലാ സ്വരാക്ഷരങ്ങളും ഒരുമിച്ച് വരാത്ത വിധത്തിൽ 8 അക്ഷരങ്ങളുള്ള വാക്കുകൾ രൂപീകരിക്കാം?

പരിഹാരം

(i) 8 വ്യത്യസ്ത അക്ഷരങ്ങളാണ് DAUGHTER എന്ന വാക്കിൽ ഉള്ളത്. അതിൽ A, U, E എന്നിങ്ങനെ മൂന്ന് സ്വരാക്ഷരങ്ങളും. ഇവ മൂന്നും ഒരുമിച്ച് വരേണ്ടതിനാൽ ഇവയെ ഒറ്റ വസ്തുവായി പരിഗണിക്കുക (AUE). ഇതും ബാക്കി 5 അക്ഷരങ്ങളും ചേർന്ന് 6 അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണം $6!$ രീതിയിൽ ചെയ്യാം. A, U, E എന്നീ സ്വരാക്ഷരങ്ങളെ വീണ്ടും $3!$ രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം. ഗുണനതത്വം ഉപയോഗിച്ചാൽ ആകെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $6! \times 3! = 4320$.

(ii) സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒരുമിച്ചു വരാത്ത ക്രമീകരണങ്ങലുടെ എണ്ണം കാണാൻ ആകെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിൽ നിന്ന് സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒരുമിച്ച് വരുന്ന ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം കുറച്ചാൽ മതിയാകുമല്ലോ.

ആകെ 8 അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണങ്ങൾ $= 8!$

സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒരുമിച്ച് വരുന്ന ക്രമീകരണങ്ങൾ $= 6! \times 3!$

സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒരുമിച്ച് വരാത്ത ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 8! - 6! \times 3!$

$$= 6!\,(7 \times 8 - 6)$$

$$= 50 \times 6! = 50 \times 720 = 36,000$$

ഉദാഹരണം : 17

4 ചുവന്ന ഡിസ്കുകളും, 3 മഞ്ഞ ഡിസ്കുകളും 2 പച്ച ഡിസ്കുകളും ഒരു വരിയിൽ ക്രമീകരിക്കണം. ഒരേ നിറമുള്ള ഡിസ്കുകളെ പരസ്പരം തിരിച്ചറിയാനാവില്ല. ഇങ്ങനെ എത്ര രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം?

പരിഹാരം

ആകെ ഡിസ്ക്കുകളുടെ എണ്ണം $= 4 + 3 + 2 = 9$

ആകെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{9!}{4! \times 3! \times 2!}$

$$= 1260$$

ഉദാഹരണം : 18

INDEPENDENCE എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഈ ക്രമീകരണങ്ങളിൽ എത്ര എണ്ണം.

(i) P എന്ന അക്ഷരത്തിൽ ആരംഭിക്കുന്നു?

(ii) എല്ലാ സ്വരാക്ഷരങ്ങളും ഒരുമിച്ച് വരുന്നു?

(iii) സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒരുമിച്ച് വരുന്നില്ല?

(iv) I ൽ തുടങ്ങി P യിൽ അവസാനിക്കുന്നു?

പരിഹാരം

ഈ വാക്കിൽ ആകെ 12 അക്ഷരങ്ങളുണ്ട്. ഇതിൽ N മൂന്ന് തവണയും E നാലു തവണയും D രണ്ടു തവണയും ആവർത്തിച്ചു വരുന്നു.

ആയതിനാൽ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{12!}{3!.4!.2!} = 1663200$

(i) ഏറ്റവും ഇടത്തായി P എന്ന അക്ഷരത്തെ ഉറപ്പിച്ചാൽ ബാക്കി 11 അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണം കണക്കാക്കിയാൽ മതി. അതായത് ക്രമീകരണങ്ങളുടെ

$$\text{എണ്ണം} = \frac{11!}{3!.4!.2!}$$

$$= 138600$$

(ii) ഈ വാക്കിൽ ആകെ 5 സ്വരാക്ഷരങ്ങളാണുള്ളത്. അതിൽ 4 തവണ E ആവർത്തിച്ചു വരുന്നു.

$\boxed{EEEEI}$ ഒറ്റ വസ്തു ആയി പരിഗണിച്ചാൽ ആകെ 8 വസ്തുക്കളുടെ ക്രമീകരണമാണ് കണക്കാക്കേണ്ടത്. അതിൽ 3 N ഉം 2 D യും ഉണ്ട്. ആയതിനാൽ അവയെ $\frac{8!}{3! \times 2!}$ രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം.

ഇതിലെ ഓരോ ക്രമീകരണത്തിലും $\boxed{EEEEI}$ ലെ അക്ഷരങ്ങളെ $\frac{5!}{4!}$ രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം.

ആയതിനാൽ ആകെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= \frac{8!}{3! \times 2!} \times \frac{5!}{4!} = 16{,}800$

(iii) ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം = ആകെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം – സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒരുമിച്ചു വരുന്ന ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം.

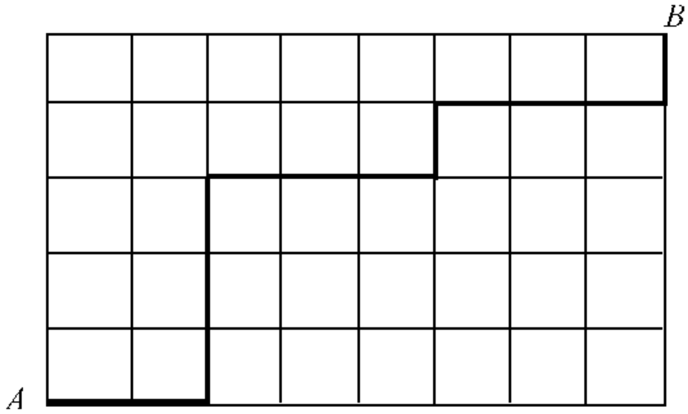
$$= 1663200 - 16800 = 1646400$$

(iv) I ഇടത്തേ അറ്റത്തും P വലത്തേ അറ്റത്തും ഉറപ്പിച്ചാൽ ബാക്കി 10 അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണം കണക്കാക്കിയാൽ മതി.

$$\text{ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം} = \frac{10!}{3!.2!.4!}$$

$$= 12{,}600$$

ഇത്രയും ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ കടന്നു പോയതിന്റെ വെളിച്ചത്തിൽ, ഈ പാഠം തുടങ്ങുന്നിടത്ത് നമ്മൾ ഉന്നയിച്ച പ്രശ്നത്തിലേക്ക് ഒന്ന് തിരിച്ചുപോയാലോ? A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്കുള്ള ഏറ്റവും ചെറിയ ദൂരത്തിലുള്ള വഴികളുടെ എണ്ണമെത്ര എന്നായിരുന്നു ചോദ്യം.



ഏതെങ്കിലും ഒരു വഴി നമുക്ക് എഴുതാൻ ശ്രമിക്കാം. വലത്തേക്ക് 1 യൂണിറ്റിന് R എന്നും മുകളിലേക്ക് ഒരു യൂണിറ്റിന് U എന്നും എഴുതിയാൽ ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ വഴിയെ $RRUUURRRURRRU$ എന്ന് എഴുതാം. ഇതിൽ കൗതുകകരമായ വസ്തുത ഏത് വഴി തിരഞ്ഞെടുത്താലും അതിൽ $8R$ ഉം $5U$ ഉം ഉണ്ടാകും എന്നതാണ്. മറ്റേതൊരു വഴി എഴുതിയാലും അത്, മേൽ എഴുതിയ വഴിയുടെ ഒരു ക്രമീകരണം തന്നെയായിരിക്കും. അപ്പോൾ വഴികളുടെ എണ്ണം എന്നത് $RRUUURRRURRRU$ എന്ന വാക്കിന്റെ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന് തുല്യമാണ്. ഈ വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളെ എത്ര വിധത്തിൽ ക്രമീകരിക്കാം?

13 അക്ഷരങ്ങളിൽ $8R$ ഉം $5U$ ഉം ഉണ്ട്.

ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{13!}{8! \times 5!}$

അതായത് A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്കുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരത്തിലുള്ള

വഴികളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{13!}{8! \times 5!}$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 7.3

1. 1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ എത്ര മൂന്നക്ക സംഖ്യകൾ എഴുതാം?

2. ഒരു അക്കം പോലും ആവർത്തിക്കാത്ത എത്ര നാലക്ക സംഖ്യകളുണ്ട്?

3. 1, 2, 3, 4, 6, 7 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉണ്ടാക്കാവുന്ന നാലക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം കാണുക. ഇവയിൽ എത്ര ഇരട്ടസംഖ്യകൾ ഉണ്ട്?

4. 1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉണ്ടാക്കാവുന്ന നാലക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം കാണുക. ഇവയിൽ ഇരട്ടസംഖ്യകൾ എത്ര?

5. 8 പേരുള്ള ഒരു സമിതിയിൽ നിന്ന് ചെയർമാനെയും വൈസ് ചെയർമാനെയും തെരഞ്ഞെടുക്കണം. ഒരാൾ ഒന്നിൽ കൂടുതൽ സ്ഥാനങ്ങൾ വഹിക്കാൻ പാടില്ല. ഇവരെ എത്ര രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

6. ${}^{(n-1)}P_3 : {}^{n}p_4 = 1 : 9$ ആയാൽ n കണ്ടുപിടിക്കുക

7. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ r കണ്ടുപിടിക്കുക

   (i) ${}^5P_r = 2.{}^6P_{r-1}$

   (ii) ${}^5P_r = {}^6P_{r-1}$

8. EQUATION എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ അർത്ഥമുള്ളതോ, ഇല്ലാത്തതോ ആയ എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

9. MONDAY എന്ന വാക്ക് പരിഗണിക്കുക.

   (i) ഈ വാക്കിൽ നിന്നും 4 അക്ഷരങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ അർത്ഥമുള്ളതോ ഇല്ലാത്തതോ ആയ എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

   (ii) എല്ലാ അക്ഷരങ്ങളും ആവർത്തിക്കാതെ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

   (iii) എല്ലാ അക്ഷരങ്ങളും ഉപയോഗിക്കുകയും. സ്വരാക്ഷരത്തിൽ തുടങ്ങുകയും ചെയ്യുന്ന എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

10. MISSISSIPPI എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചും നാലു 'I' കളും ഒരുമിച്ചു വരാതെ എത്ര ക്രമീകരണങ്ങൾ ഉണ്ട്?

11. PERMUTATIONS എന്ന വാക്കിന്റെ അക്ഷരങ്ങളുടെ ക്രമീകരണത്തിൽ, താഴെ പറയും വിധമുള്ള എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാകും എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) P യിൽ തുടങ്ങി S ൽ അവസാനിക്കുന്നവ

   (ii) സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ ഒരുമിച്ച് വരുന്നവ

   (iii) P ക്കും S നും ഇടയിൽ എല്ലായ്പ്പോഴും 4 അക്ഷരങ്ങൾ വരുന്ന വിധം.

7.6 തെരഞ്ഞെടുക്കൽ (Combinations)

A, B, C എന്നീ മൂന്നു കുട്ടികളിൽ നിന്ന് രണ്ടുപേരെ ഒരു സമിതിയിലേക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കണമെന്ന് കരുതുക. എത്ര രീതിയിൽ ഇത് ചെയ്യാം? A, B; A, C; B, C.

ഇങ്ങനെ മൂന്ന് രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം. ഇവിടെ ക്രമത്തിന് പ്രാധാന്യമില്ല എന്നത് വ്യക്തമാണല്ലോ. ഈ വ്യത്യസ്ത തെരഞ്ഞെടുപ്പുകളെ നമുക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കൽ (combination) എന്നു പറയാം. അതായത് 3 വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് 2 വസ്തുക്കളടങ്ങുന്ന മൂന്ന് തെരഞ്ഞെടുക്കലുകൾ ലഭിക്കും. ഈ തെരഞ്ഞെടുക്കളിലൂടെ എണ്ണത്തെ $^3C_2$ അല്ലെങ്കിൽ C (3, 2) എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചാൽ

$\boxed{^3C_2 = 3}$ എന്നെഴുതാം.

A, B, C എന്നീ കുട്ടികളിൽ നിന്ന് ഒരു കുട്ടിയെയയാണ് വേണ്ടതെങ്കിലോ? A ഒരു തെരഞ്ഞെടുക്കലാണ്. അതേപോലെ B, C ഇവയും കിട്ടും.

അതായത് $\boxed{^3C_1 = 3}$ ആണ്.

മൂന്നു കുട്ടികളടങ്ങുന്ന സമിതിയെയാണ് തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നതെങ്കിലോ? ഒരു തെരഞ്ഞെടുക്കൽ മാത്രമല്ലേ കിട്ടൂ (ABC). അതിനർത്ഥം $\boxed{^3C_3 = 1}$ എന്നല്ലേ?

A, B, C, D എന്നീ 4 കുട്ടികളിൽ നിന്ന് 2 പേരെയാണ് സമിതിയിലേക്ക് തിരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതെങ്കിലോ?

AB, AC, AD, BC, BD, CD എന്നിങ്ങനെ 6 തെരഞ്ഞെടുക്കലുകൾ ലഭ്യമാകും അതായത്

$^4C_2 = 6$ ആയിരിക്കും.

$^4C_1$, $^4C_2$, $^4C_3$, $^4C_4$, എന്നിവയുടെ വിലകൾ എന്തായിരിക്കും? $^4C_5$ കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുമോ? സാധ്യമല്ല കാരണം 4 വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് 5 എണ്ണത്തെ തെരഞ്ഞെടുക്കാനാവില്ലല്ലോ.

നമുക്ക് n വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് r വസ്തുക്കൾ ഉൾപ്പെടുന്ന തെരഞ്ഞെടുക്കലിനെ പൊതുവായി ^nc_r എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

$r \leq n$ ആയിരിക്കണം എന്നത് വ്യക്തമാണല്ലോ. ഇതിന് മുൻപ് പഠിച്ച ക്രമീകരണവുമായി തെരഞ്ഞെടുക്കലിന്റെ വ്യത്യാസം എന്താണെന്ന് ചിന്തിച്ചു നോക്കൂ.

A, B, C എന്നീ മൂന്നു കുട്ടികളെ രണ്ടു കസേരകളിൽ എങ്ങനെയൊക്കെ ഇരുത്താം എന്ന പ്രശ്നത്തിൽ AB എന്ന ക്രമീകരണം BA എന്ന ക്രമീകരണത്തിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമാണല്ലോ. പക്ഷേ ഒരു സമിതിയിലേക്കുള്ള തെരഞ്ഞെടുപ്പാവുമ്പോൾ AB യും BA യും ഒന്നു തന്നെയാണ്. ഇവരിൽ ഒന്ന് മാത്രം പരിഗണിച്ചാൽ മതി. അതായത് തിരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്ന വസ്തുക്കളുടെ ക്രമീകരണത്തിന്റെ എണ്ണം പരിഗണിക്കേണ്ടതില്ല എന്ന് സാരം.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ A, B, C എന്നീ മൂന്നു കുട്ടികളിൽ നിന്നും രണ്ടുപേരെ ഒരു സമയം തെരഞ്ഞെടുത്താൽ AB, BC, AC എന്നിങ്ങനെ $^3C_2$ തെരഞ്ഞെടുപ്പുകൾ

ലഭിക്കുന്നു. ഇതിൽ ഒരു തെരഞ്ഞെടുപ്പിനെ 2! വിധത്തിൽ ക്രമീകരിക്കാമല്ലോ. *AB, BA, BC, CB, AC, CA* ആകെ $^3P_2$ ക്രമീകരണം ലഭിക്കുന്നു. അതായത് $^3C_2 \times 2! = {^3P_2}$ ആയിരിക്കാം.

n വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് r വസ്തുക്കളെ തെരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടി വരുമ്പോൾ r വസ്തുക്കൾ തമ്മിലുള്ള ക്രമീകരണത്തിൽ നിന്ന് $(r!)$ ഒരെണ്ണം മാത്രമേ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടേണ്ടതുള്ളൂ. അതായത് $\frac{n!}{(n-r)!}$ രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കപ്പെടുന്ന വസ്തുക്കളിൽ $\frac{n!}{(n-r)!} \div r!$ തെരഞ്ഞെടുപ്പ് മാത്രമേ സാധ്യമാവു.

ആയതിനാൽ n വസ്തുക്കളിൽ നിന്നും r വസ്തുക്കളുടെ തെരഞ്ഞെടുക്കൽ $\frac{n!}{(n-r)!\ r!}$ ആയിരിക്കും.

അതായത് $$\boxed{^nc_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

തിരിച്ച് $$^np_r = r! \times \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ എന്ന് പരിഗണിച്ചാൽ

$\boxed{^np_r = r! \times {^nc_r}}$ ആയിരിക്കും.

$$\boxed{^nc_n - \frac{n!}{n!\,o!} - 1}$$

$$\boxed{^nc_o - \frac{n!}{o!\,n!} - 1}$$

ഒരു ക്ലാസിലെ 60 കുട്ടികളിൽ നിന്ന് 50 പേരെ തെരഞ്ഞെടുക്കണമെങ്കിൽ, 50 പേരെ തെരഞ്ഞെടുക്കാനുള്ള എളുപ്പവഴി 10 പേരെ തെരഞ്ഞെടുത്ത് ഒഴിവാക്കുന്നതല്ലേ? അതായത് 60 പേരിൽ നിന്ന് 50 പേരുടെ തെരഞ്ഞെടുക്കലുകളുടെ എണ്ണവും 60 പേരിൽ നിന്ന് 10 പേരുടെ തെരഞ്ഞെടുക്കലുകളുടെ എണ്ണവും തുല്യമാണ്. അതിനാൽ $^{60}C_{50} = {^{60}C_{10}}$ ആയിരിക്കും.

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ

$\boxed{^nc_r = {^nc_{n\ r}}}$ ആയിരിക്കും.

കുറിപ്പ്

$$ {}^{n}c_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\left[n-(n-r)\right]!} $$

$$ = \frac{n!}{(n-r)!(r)!} $$

$$ = {}^{n}c_{r} $$

സിദ്ധാന്തം 2 : ${}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_{r}$

തെളിവ് :

$$ {}^{n}\mathrm{C}_{r} + {}^{n}\mathrm{C}_{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} $$

$$ = \frac{n!}{r\times(r-1)!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)\,(n-r)!} $$

$$ = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r+1}\right] $$

$$ = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\times\frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)} $$

$$ = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = {}^{n+1}\mathrm{C}_{r} $$

ഉദാഹരണം 19

${}^{n}\mathrm{C}_{9} = {}^{n}\mathrm{C}_{8}$ ആയാൽ ${}^{n}\mathrm{C}_{17}$ കണക്കാക്കുക

പരിഹാരം

$$ {}^{n}\mathrm{C}_{9} = {}^{n}\mathrm{C}_{8} $$

$$ \frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{n!}{(n-8)!\,8!} $$

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{n-8}\ ,\ n=17$$

$$^{n}C_{17}={}^{17}C_{17}=1$$

ഉദാഹരണം : 20

2 പുരുഷന്മാരും 3 സ്ത്രീകളും ഉണ്ട്. ഇവരിൽ നിന്നും 3 ആളുകളുടെ ഒരു സമിതിയെ തെരഞ്ഞെടുക്കണം. ഇത് എത്ര വിധത്തിൽ ചെയ്യാം? ഇങ്ങനെ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്ന സമിതികളിൽ എത്രയെണ്ണത്തിൽ 1 പുരുഷനും 2 സത്രീകളും ഉണ്ടായിരിക്കും?

പരിഹാരം

5 പേരിൽ നിന്ന് 3 പേരെ $^{5}C_{3}=\frac{5!}{3!\ 2!}=\frac{4\times 5}{2}=10$ വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം. രണ്ടു പുരുഷന്മാരിൽ നിന്ന് ഒരാളെ $^{2}C_{1}$ രീതിയിലും 3 സ്ത്രീകളിൽ നിന്ന് 2 സ്ത്രീകളെ $^{3}C_{2}$ രീതിയിലും തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

1 പുരുഷനും 2 സ്ത്രീകളും ഉൾപ്പെടുന്ന സമിതി

$^{2}C_{1}\times {}^{3}C_{2}$ രീതികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

$= 2\times 3 = 6$ രീതികൾ

ഉദാഹരണം : 21

52 ചീട്ടുകളുള്ള ഒരു പെട്ടിയിൽ നിന്നും 4 ചീട്ടുകൾ എത്ര വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം? ഇവയിൽ എത്രയെണ്ണത്തിൽ

(i) നാലും ഒരേ ഇനം ആവും?

(ii) നാലും വ്യത്യസ്ത ഇനം ആവും?

(iii) നാലും മുഖമുള്ള ചീട്ടുകൾ ആവും?

(iv) രണ്ടെണ്ണം ചുവപ്പും രണ്ടെണ്ണം കറുപ്പും ആവും?

(v) നാലും ഒരേ നിറമുള്ളതാവും?

പരിഹാരം

52 ചീട്ടുകളിൽ നിന്ന് 4 ചീട്ടുകൾ $^{52}C_{4}$ രീതികളിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

$$^{52}C_{4}=\frac{52!}{4!\ 48!}=\frac{49\times 50\times 51\times 52}{2\times 3\times 4}$$

$$=270725$$

(i) ചീട്ടുകൾ നാല് ഇനമാണുള്ളത്. സ്പേഡ്, ഡയമണ്ട്, ഹാർട്ട്സ്, ക്ലബ്ബ്. ഓരോന്നിലും 13 ചീട്ട് വീതമായിരിക്കും ഉണ്ടായിരിക്കുക നാലു ചീട്ടും ഒരേ ഇനമാവാൻ നാലും സ്പേഡ് അല്ലെങ്കിൽ നാലും ഡയമണ്ട് അല്ലെങ്കിൽ നാലും ഹാർട്ട് അല്ലെങ്കിൽ നാലും ക്ലബ്ബ് ആവണം.

ഇത്തരത്തിൽ $^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4$ രീതികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

$$4 \times \frac{13!}{4!\ 9!} = 2860$$

(ii) ഓരോ ചീട്ടും ഓരോ ഇനമാവണം. അതായത് ഒരുതരത്തിൽ നിന്ന് ഒരു ചീട്ട്, അടുത്ത തരത്തിൽ നിന്ന് അടുത്ത ഒന്ന് എന്നിങ്ങനെ

ഇത് $^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 = (13)^4$ രീതിയിൽ ചെയ്യാം.

(iii) മുഖമുള്ള ചീട്ടുകൾ ആകെ 12 എണ്ണമാണുള്ളത്. ഇതിൽ നിന്നും 4 എണ്ണം എടുക്കണമെങ്കിൽ അത് $^{12}C_4$ രീതിയിൽ ചെയ്യാം.

$$^{12}C_4 = \frac{12!}{4!\ 8!} = 495$$

(iv) 26 ചുവപ്പ് ചീട്ടുകളും 26 കറുപ്പ് ചീട്ടുകളുമാണുള്ളത്. രണ്ടെണ്ണം വീതം $^{26}C_2 \times {}^{26}C_2$ രീതിയിൽ എടുക്കാം.

$$= \left(\frac{26!}{2!\ 24!}\right)^2 = (325)^2 = 105625$$

(v) ഒരേ നിറമുള്ള ചീട്ടുകൾ കിട്ടാൻ ഒന്നുകിൽ 4 ചീട്ടുകളും കറുപ്പാവണം. അല്ലെങ്കിൽ നാലും ചുവപ്പാകണം.

തെരഞ്ഞെടുപ്പിന്റെ എണ്ണം $= {}^{26}C_4 + {}^{26}C_4$

$= 29900$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 7.4

1. $^nC_8 = {}^nC_2$ ആയാൽ $^nC_2$ കണ്ടു പിടിക്കുക.

2. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളിൽ n ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 12 : 1$

   (ii) $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 11 : 1$

3. ഒരു വൃത്തത്തിൽ 21 ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഇവ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര ഞാണുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

4. 5 ആൺ കുട്ടികളും 4 പെൺകുട്ടികളുമുള്ള ഒരു സംഘത്തിൽ നിന്ന് 3 ആൺകുട്ടികളും 3 പെൺകുട്ടികളും ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു ടീമിനെ എത്ര തരത്തിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

5. ഒരു ബാഗിൽ 6 ചുവന്ന പന്തുകളും 5 വെളുത്ത പന്തുകളും 5 നീല പന്തുകളു മുണ്ട്. ഓരോ നിറത്തിൽ നിന്നും 3 പന്തുകൾ വീതം ഉൾപ്പെടും വിധം 9 പന്തു കൾ എത്ര രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

6. 52 ചീട്ടുകളുള്ള ഒരു പെട്ടിയിൽ നിന്നും കൃത്യം ഒരു എയ്സ് ഉൾപ്പെടുന്ന വിധം, 5 ചീട്ടുകൾ എത്ര രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

7. 17 ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാരിൽ നിന്ന് 11 പേരുടെ ഒരു ടീം തെരഞ്ഞെടുക്കണം. 17 പേരിൽ 5 പേർക്ക് മാത്രമാണ് പന്തെറിയാനറിയാവുന്നത്. പന്തെറിയാനറി യാവുന്ന കൃത്യം 4 പേരെ ഉൾപ്പെടുത്തിക്കൊണ്ട് 11 പേരുടെ ഒരു ടീം എത്ര രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.?

8. ഒരു ബാഗിൽ 5 കറുത്ത പന്തുകളും 6 ചുവന്ന പന്തുകളും ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്ന് 2 കറുത്ത പന്തുകളും 3 ചുവന്ന പന്തുകളും എത്ര രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

9. 9 കോഴ്സുകളിൽ നിന്ന് 5 കോഴ്സുകൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു പാഠ്യപദ്ധതി ഒരു കുട്ടിക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കണം. ഇതിൽ 2 പ്രത്യേക കോഴ്സുകൾ നിർബന്ധ മായും പഠിക്കേണ്ടതാണ്. എന്നാൽ കുട്ടിക്ക് ഈ പാഠ്യപദ്ധതി എത്ര രീതി യിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം 22

'INVOLUTE' എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് മൂന്നു സ്വരാക്ഷരങ്ങളും രണ്ട് വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളും വരുന്ന വിധം, അർത്ഥമുള്ളതോ ഇല്ലാത്തതോ ആയ എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

പരിഹാരം

' INVOLUTE' എന്ന വാക്കിൽ E,I,O,U എന്നീ നാല് സ്വരാക്ഷരങ്ങളും N, V, L, T എന്നിങ്ങനെ നാല് വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളുമാണുള്ളത്.

3 സ്വരാക്ഷരങ്ങളെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നവിധം $= {}^4C_3 = 4.$

2 വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നിവിധം $= {}^4C_2 = 6$

3 സ്വരാക്ഷരങ്ങളെയും 2 വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളെയും തെരഞ്ഞെടുക്കാനുള്ള ആകെ വഴികൾ $= 4 \times 6 = 24$

ഇങ്ങനെ 24 വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്ന 5 അക്ഷരങ്ങളുടെ 5! ക്രമീകരണങ്ങൾ സാധ്യമാണ്.

ആയതിനാൽ ആകെ, $24 \times 5\,! = 2880$ വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം.

ഉദാഹരണം : 23

ഒരു സംഘത്തിൽ 4 പെൺകുട്ടികളും 7 ആൺകുട്ടികളുമുണ്ട്. ഇവരിൽ നിന്നും 5 അംഗങ്ങളുള്ള എത്ര ടീമുകളെ ചുവടെ പറയും വിധം തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

(i) ഒറ്റ പെൺകുട്ടി പോലുമില്ലാത്ത ടീം

(ii) ചുരുങ്ങിയത് ഒരു ആൺകുട്ടിയും ഒരു പെൺകുട്ടിയും

(iii) ചുരുങ്ങിയത് 3 പെൺകുട്ടികൾ

പരിഹാരം

(i) പെൺകുട്ടികളെ ഉൾപ്പെടുത്താത്ത ടീം ആയതുകൊണ്ട് 7 ആൺകുട്ടികളിൽ നിന്നു തന്നെ 5 പേരെ തെരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടി വരും.

ഇത് ${}^7C_5$ രീതിയിൽ ചെയ്യാം

$${}^7C_5 = \frac{7!}{5!\ 2!} = 21$$

(ii) ചുരുങ്ങിയത് ഒരാൺകുട്ടിയും ഒരു പെൺകുട്ടിയും ടീമിൽ ഉൾപ്പെടണമെങ്കിൽ ചുവടെ പറയും വിധം കുട്ടികളെ ഉൾപ്പെടുത്താം.

a. 1 ആൺകുട്ടി 4 പെൺകുട്ടി (${}^7C_1 \times {}^4C_4$ രീതികൾ)

b. 2 ആൺകുട്ടി 3 പെൺകുട്ടി (${}^7C_2 \times {}^4C_3$ രീതികൾ)

c. 3 ആൺകുട്ടി 2 പെൺകുട്ടി (${}^7C_3 \times {}^4C_2$ രീതികൾ)

d. 4 ആൺകുട്ടി 1 പെൺകുട്ടി (${}^7C_4 \times {}^4C_1$ രീതികൾ)

തെരഞ്ഞെടുക്കാവുന്ന ടീമുകളുടെ എണ്ണം.

$$= {}^7C_1 \times {}^4C_4 + {}^7C_2 \times {}^4C_3 + {}^7C_3 \times {}^4C_2 + {}^7C_4 \times {}^4C_1$$

$$= 7 + 84 + 210 + 140 = 441$$

(iii) ചുരുങ്ങിയത് 3 പെൺകുട്ടികൾ ടീമിൽ ഉൾപ്പെടണമെങ്കിൽ ടീമിൽ

a. 3 പെൺകുട്ടി 2 ആൺകുട്ടി (${}^4C_3 \times {}^7C_2$ രീതിയിൽ)

b. 4 പെൺകുട്ടി 1 ആൺകുട്ടി (${}^4C_4 \times {}^7C_1$ രീതിയിൽ)

തെരഞ്ഞെടുക്കാവുന്ന ടീമുകളുടെ എണ്ണം.

$$= {}^4C_3 + {}^7C_2 + {}^4C_4 + {}^7C_1$$

$$= 84 + 7$$

$= 91$ രീതികൾ

ഉദാഹരണം : 24

AGAIN എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് അർത്ഥമുള്ളതോ ഇല്ലാത്തതോ ആയ എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം? ഈ വാക്കുകളെ ഒരു നിഘണ്ടുവിലെ ക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ 50–ാമത്തെ വാക്ക് ഏതായിരിക്കും?

പരിഹാരം

AGAIN എന്ന വാക്കിൽ 5 അക്ഷരങ്ങളാണുള്ളത്. അതിൽ A രണ്ടു തവണ വരുന്നു.

$$\text{ഉണ്ടാക്കാവുന്ന വാക്കുകളുടെ എണ്ണം} = \frac{5!}{2!} = 60$$

നിഘണ്ടു ക്രമത്തിലെഴുതാനായി AGAIN എന്ന വാക്കിനെ അക്ഷരമാലാ ക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ AAGIN എന്നു കിട്ടും.

A യിൽ തുടങ്ങുന്ന ആകെ വാക്കുകളുടെ എണ്ണം $= 4\,! = 24$

G യിൽ തുടങ്ങുന്ന വാക്കുകളുടെ എണ്ണം $= \frac{4!}{2!} = 12$

I യിൽ തുടങ്ങുന്ന വാക്കുകളുടെ എണ്ണം $= \frac{4!}{2!} = 12$

I യിൽ തുടങ്ങുന്ന വാക്കുകൾ വരെ എഴുതിക്കഴിയുമ്പോൾ ആകെ $24 + 12 + 12 = 48$ വാക്കുകൾ ആയി.

49– ാം വാക്ക് = NAAGI

50 ാം വാക്ക് = NAAIG

ഉദാഹരണം - 25

1, 2, 0, 2, 4, 2, 4 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്, 1000000 ത്തിൽ കൂടിയ എത്ര സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

പരിഹാരം

1000000 ഒരു ഏഴക്ക സംഖ്യയാണ്. തന്നിരിക്കുന്ന അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണവും 7 തന്നെയാണല്ലോ. ആയതിനാൽ 1000000 ത്തിൽ കൂടിയ ഏഴക്ക സംഖ്യകളുടെ എണ്ണമാണ് കണ്ടെത്തേണ്ടത്. ഈ സംഖ്യകൾ 1,2 അല്ലെങ്കിൽ 4 ൽ തുടങ്ങിയേ പറ്റൂ.

1 ൽ തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= \frac{6!}{3!\,2!} = 60$

(ഒന്നിനെ ഇടത്തെ അറ്റത്ത് ഉറപ്പിച്ചാൽ അവശേഷിക്കുന്ന ആറക്കങ്ങളിൽ മൂന്ന് 2 ഉം രണ്ട് 4 ഉം ഉണ്ട്)

2 ൽ തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{6!}{2!\ 2!} = 180$

4 ൽ തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= \dfrac{6!}{3!} = 120$

ആകെ ഉണ്ടാക്കാവുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= 60 + 180 + 120$

$= 360$

ഉദാഹരണം : 26

5 പെൺകുട്ടികളും 3 ആൺകുട്ടികളും ഉണ്ട്. ഒരു വരിയിൽ, രണ്ടു ആൺകുട്ടികൾ അടുത്തടുത്ത് വരാത്ത വിധത്തിൽ എത്ര രീതിയിൽ ഇവരെ ഇരുത്താം?

പരിഹാരം

ആദ്യം 5 പെൺകുട്ടികളെ ഒന്നിടവിട്ട കസേരകളിൽ ഇരുത്തുക.

$$\times\ G \times G \times G \times G \times G \times$$

ഇത് 5! രീതിയിൽ ചെയ്യാം.

$\times$ അടയാളം ഇട്ട സ്ഥലങ്ങളിൽ മാത്രം ആൺകുട്ടികളെ ഇരുത്തുകയാണെങ്കിൽ, 6 കസേരകളിലായി 3 പേരെ ക്രമീകരിക്കണം. ഇത് ${}^6P_3$ രീതിയിൽ ചെയ്യാം.

ആകെ ക്രമീകരണങ്ങൾ $= 5! \times {}^6p_3$

$= 5! \times \dfrac{6!}{3!}$

$= 14400$

കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. DAUGHTER എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് രണ്ട് സ്വരാക്ഷരങ്ങളും 3 വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളും വരുന്നവിധം അർത്ഥമുള്ളതോ ഇല്ലാത്തതോ ആയ എത്ര വാക്കുകൾ എഴുതാൻ കഴിയും?

2. സ്വരാക്ഷരങ്ങളെല്ലാം ഒരുമിച്ചും വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളെല്ലാം ഒരുമിച്ചും വരുന്ന വിധം EQUATION എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് അർത്ഥമുള്ളതോ ഇല്ലാത്തതോ ആയ എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

3. 9 ആൺകുട്ടികളും 4 പെൺകുട്ടികളും ഉള്ള ഒരു സംഘത്തിൽ നിന്ന് 7 അംഗങ്ങളുടെ ഒരു സമിതി രൂപീകരിക്കണം. താഴെപറയുന്ന നിബന്ധനകൾ പാലിക്കുന്ന എത്ര സമിതികൾ രൂപീകരിക്കാം?

   (i) കൃത്യം 3 പെൺകുട്ടികൾ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കണം

   (ii) 3 പെൺകുട്ടികളെങ്കിലും ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കണം

   (iii) പരമാവധി 3 പെൺകുട്ടികൾ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കണം.

4. EXAMINATION എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളെ ക്രമീകരിച്ചുണ്ടാക്കിയ വാക്കുകളെ നിഘണ്ടു ക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ E യിൽ തുടങ്ങുന്ന ആദ്യത്തെ വാക്കിന് മുൻപ് എത്ര വാക്കുകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും?

5. 0, 1, 3, 5, 7, 9 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതെ ഉപയോഗിച്ച് 10 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ എത്ര ആറക്ക സംഖ്യകൾ എഴുതാം?

6. ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിൽ 21 വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളും 5 സ്വരാക്ഷരങ്ങളുമുണ്ട്. രണ്ടു വ്യത്യസ്ത സ്വരാക്ഷരങ്ങളും രണ്ടു വ്യത്യസ്ത വ്യഞ്ജനാക്ഷരങ്ങളും ഉൾപ്പെടുന്ന എത്ര വാക്കുകൾ എഴുതാം?

7. ഒരു പരീക്ഷക്ക്, ഒന്നും രണ്ടും ഭാഗങ്ങളായി തിരിച്ച 12 ചോദ്യങ്ങളുള്ള ചോദ്യപേപ്പർ ആണുള്ളത്. ആദ്യഭാഗത്ത് 5 ചോദ്യങ്ങളും രണ്ടാമത്തെ ഭാഗത്ത് 7 ചോദ്യങ്ങളുമുണ്ട്. ഒരു കുട്ടി ഓരോ ഭാഗത്തുനിന്നും ചുരുങ്ങിയത് 3 ചോദ്യങ്ങളെങ്കിലും ഉൾപ്പെടുത്തി 8 ചോദ്യങ്ങൾക്കാണ് ഉത്തരം എഴുതേണ്ടത്. എത്ര രീതിയിൽ കുട്ടിക്ക് ചോദ്യങ്ങൾ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

8. 52 ചീട്ടുകളുള്ള ഒരു പെട്ടിയിൽ നിന്നും കൃത്യം ഒരു രാജാവ് ഉൾപ്പെടുന്ന വിധം എത്ര തരത്തിൽ 5 ചീട്ടുകൾ തിരഞ്ഞെടുക്കാം?

9. 5 പുരുഷൻമാരെയും 4 സ്ത്രീകളെയും ഒരു വരിയിൽ ഇരുത്തണം. സ്ത്രീകൾ ഇരട്ടസംഖ്യാസ്ഥാനങ്ങളിൽ (2, 4, 6.... തുടങ്ങിയ സ്ഥാനങ്ങളിൽ) വരത്തക്ക വിധം എത്ര രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം?

10. 25 കുട്ടികളിൽ നിന്നും 10 പേരെ ഒരു വിനോദയാത്രാ സംഘത്തിലേക്ക് തിരഞ്ഞെടുക്കണം. ഇതിൽ മൂന്ന് പേർ ഒന്നുകിൽ ഒരുമിച്ച് വിനോദയാത്രയിൽ പങ്കെടുക്കും, അല്ലെങ്കിൽ മാറിനിൽക്കും എന്ന് തീരുമാനിക്കുന്നു. എത്ര വിധത്തിൽ വിനോദയാത്രാ സംഘത്തെ തെരഞ്ഞെടുക്കാം?

11. ASSASSINATION എന്ന വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എല്ലാ 'S' കളും ഒരുമിച്ച് വരുന്നവധം എത്ര ക്രമീകരണങ്ങൾ സാധ്യമാണ്?

സംഗ്രഹം

- എണ്ണലിന്റെ അടിസ്ഥാന തത്വം: ഒരു കാര്യം m വ്യത്യസ്ത രീതികളിലും തുടർന്നു മറ്റൊരു കാര്യം n വ്യത്യസ്ത രീതികളിലും സംഭവിച്ചാൽ രണ്ടും കൂടി ഒരുമിച്ച് ആകെ $m \times n$ രീതികളിൽ സംഭവിക്കും.
- n വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയം r വീതം എടുത്തു ആവർത്തനം ഇല്ലാതെയുള്ള ക്രമീകരണത്തിന്റെ എണ്ണം ${}^nP_r$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, ഇവിടെ $0 \le r \le n$.
- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$
- $n! = n \times (n-1)!$
- n വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയം r വീതം എടുത്ത് ആവർത്തനം അനുവദിച്ചുള്ള ക്രമീകരണത്തിന്റെ എണ്ണം n^r ആയിരിക്കും.
- n വസ്തുക്കളിൽ p_1 വസ്തുക്കൾ ഒരു തരം p_2 വസ്തുക്കൾ മറ്റൊരു തരം.... അങ്ങനെ p_k വസ്തുക്കൾ വേറൊരു തരം ആയാൽ ക്രമീകരണങ്ങളുടെ എണ്ണം $\dfrac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_k!}$ ആയിരിക്കും.
- n വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയം 'r' വീതം തെരഞ്ഞെടുത്താൽ ആകെ തെരഞ്ഞെടുക്കലുകളുടെ എണ്ണം ${}^nC_r$ ആയിരിക്കും.

$$ {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!},\ 0 \le r \le n. $$

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ജൈനമതത്തിന്റെ ആവിർഭാവത്തിനോ ഒരു പക്ഷേ അതിനു മുൻപോ ഭാരത്തിൽ ക്രമീകരണത്തിന്റെയും തെരഞ്ഞെടുക്കലിന്റെയും ആശയം ഉണ്ടായിരുന്നതായി കാണാം. 'വികല്പം' എന്ന പേരിൽ ഇത് ഒരു പ്രത്യേക വിഷയമായി പഠിച്ചതിന്റെ ഖ്യാതി ജൈനർക്ക് അവകാശപ്പെട്ടതാണ്.

ക്രമീകരണത്തിനും തെരഞ്ഞെടുക്കലിനുമുള്ള പൊതുസൂത്രവാക്യം രേഖപ്പെടുത്തിയ ലോകത്തെ ആദ്യ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർക്കുള്ള അംഗീകാരം 850 നോടടുത്തു ജീവിച്ചിരുന്ന ജൈനമതസ്ഥനായ മഹാവീരന് അവകാശപ്പെട്ടതാണ്.

ആറു വ്യത്യസ്ത രുചികളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയം ഒന്ന്, രണ്ട് എന്നിങ്ങനെയെടുത്ത് 63 വിധത്തിലുള്ള രുചിക്കൂട്ടുകൾ തയാറാക്കാമെന്ന് ബി.സി ആറാം

നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന സുശ്രുതൻ മരുന്നുകളെപ്പറ്റിയുള്ള തന്റെ സുപ്രസിദ്ധ ഗ്രന്ഥമായ 'സുശ്രുതസംഹിത'യിൽ പ്രതിപാദിക്കുന്നു. ഏതാനും അക്ഷരങ്ങളിൽ നിന്ന് ഒരു സമയം ഒന്ന്, രണ്ട്, എന്നിങ്ങനെ അക്ഷരങ്ങളെടുത്താൽ എത്ര തരത്തിലുള്ള തെരഞ്ഞെടുക്കലുകളാകാമെന്ന് ബി.സി. മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടിനോടടുത്ത് പിംഗളൻ തന്റെ 'ഛന്ദസൂത്രം' എന്ന കൃതിയിൽ വെളിപ്പെടുത്തുന്നു.

1114 ൽ ജനിച്ച ഭാസ്കരാചാര്യൻ തന്റെ പ്രസിദ്ധമായ 'ലീലാവതി'യിൽ ക്രമീകരണത്തേയും തെരഞ്ഞെടുക്കലിന്റെയും അങ്ക് പാഷ എന്ന പേരിൽ വിവരിക്കുന്നുണ്ട്. മഹാവീരൻ നേരത്തെ തന്നെ തെളിയിച്ചിരുന്ന ${}^nC_r$, ${}^nP_r$ എന്നിവയ്ക്കുള്ള പൊതുസൂത്രവാക്യങ്ങൾക്കു പുറമേ ഭാസ്കരാചാര്യർ നിരവധി സിദ്ധാന്തങ്ങളും ഫലങ്ങളും തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഭാരതത്തിനുവെളിയിൽ ക്രമീകരണങ്ങളേയും തെരഞ്ഞെടുക്കലിനേയും പറ്റിയുള്ള പഠനത്തിനു തുടക്കം കുറിച്ചത് ചൈനയിൽ രചിക്കപ്പെട്ട ഇ–ചിങ് (മാറ്റത്തിന്റെ പുസ്തകം) എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിലാണ്. ഈ ഗ്രന്ഥത്തിന്റെ ഏകദേശ കാലം നിർണയിക്കാൻ പ്രയാസമാണ്, കാരണം ബി.സി. 213 ൽ രാജ്യത്തെ എല്ലാ ഗ്രന്ഥങ്ങളും കൈയെഴുത്ത് പ്രതികളും കത്തിച്ചുകളയാൻ ഒരു ചക്രവർത്തി ഉത്തരവിട്ടു. ഭാഗ്യവശാൽ ആ ഉത്തരവ് പൂർണമായി നടപ്പായില്ല. ഗ്രീസുകാരും ലാറ്റിൻ എഴുത്തുകാരും അങ്ങിങ്ങായി ചില കണ്ടുപിടുത്തങ്ങൾ ക്രമീകരണങ്ങളേയും തെരഞ്ഞെടുക്കലിനേയും പറ്റി നടത്തിയിട്ടുണ്ട്.

അറബി, ഹീബ്രു എഴുത്തുകാർ ജ്യോതിശാസ്ത്ര പഠനത്തിന് ക്രമീകരണത്തിന്റെയും തെരഞ്ഞെടുക്കലിന്റെയും ആശയം ഉപയോഗിച്ചു. ഉദാഹരണത്തിന്, അറിയപ്പെടുന്ന ഗ്രന്ഥങ്ങളെ രണ്ട്, മൂന്ന് എന്നിങ്ങനെ ഒരു സമയം എടുത്താൽ എത്ര തെരഞ്ഞെടുക്കലുണ്ടാവുമെന്ന് റബി ബെൻ എസ്ര കണക്കാക്കിയിരുന്നു. ഇത് ഏകദേശം 1140 ൽ ആണ്. റബി ബെൻ എസ്രയ്ക്ക് ${}^nC_r$ന്റെ സൂത്രവാക്യം നിശ്ചയമില്ലായിരുന്നെന്നു വേണം അനുമാനിക്കാൻ. എന്നിരുന്നാലും നിശ്ചിത n നും r നും ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ എന്ന ഫലം അദ്ദേഹത്തിന് അറിയാമായിരുന്നു. 1321 ൽ മറ്റൊരു ഹീബ്രു എഴുത്തുകാരനായ ലെവി ബെൻ ഗെർസൺ ${}^n\mathbf{P}_r$ നും ${}^n\mathbf{P}_n$ നും ${}^nC_r$ നും ഒരു പൊതുസൂത്രവാക്യം കണ്ടുപിടിച്ചു.

സ്വിറ്റ്സർലൻഡുകാരനായ ജേക്കബ് ബെർണൂലി (1654 – 1705) ആണ് തന്റെ ആർസ് കൺജക്ടൻസി എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിൽ ക്രമീകരണത്തെയും തെരഞ്ഞെടുക്കലിനെപറ്റി സവിസ്തരം പ്രതിപാദിച്ചത്. ഈ ഗ്രന്ഥം അദ്ദേഹത്തിന്റെ മരണാനന്തരം 1713 ൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു. ഇന്നു നമ്മൾ പഠിക്കുന്ന രീതിയിൽ ക്രമീകരണങ്ങളുടെയും തെരഞ്ഞെടുക്കലിന്റെയും അവതരണം ഈ ഗ്രന്ഥത്തിലേതാണ്.

U6E3M2

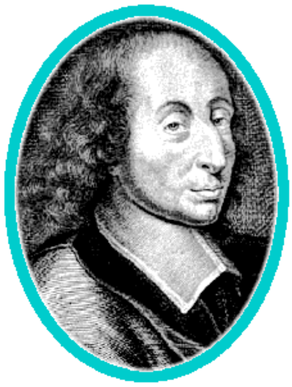
അധ്യായം **8**

ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം (BINOMIAL THEOREM)

❖ *ഏറ്റവും കൃത്യമായ ശാസ്ത്രമാണ് ഗണിതം. അതിന്റെ നിഗമനങ്ങൾ കൃത്യമായ തെളിവുകളുടെ പിൻബലമുള്ളവയാണ് - സി.പി. സ്റ്റൈൻമെറ്റ്സ്* ❖

8.1 ആമുഖം

$(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$ മുതലായ ദ്വിപദങ്ങൾ വിപുലനം ചെയ്തു കിട്ടിയ ബീജഗണിത വാചകങ്ങൾ എന്താണെന്ന് മുൻ ക്ലാസുകളിൽ പഠിച്ചത് നിങ്ങൾക്ക് ഓർമയുണ്ടാകുമല്ലോ. ഇത്തരം സർവസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് $101^2 = (100 +1)^2$, $998^3 = (1000 - 2)^3$ തുടങ്ങിയ സംഖ്യകളുടെ വില കാണാനും നമുക്കറിയാം. എന്നാൽ 99^5, 102^6, 1001^6 എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വില കാണുന്നതിന് ആവർത്തിച്ചുള്ള ഗുണനക്രിയ പ്രയാസമാണ്. ഇത് പരിഹരിക്കാൻ 11-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന പേർഷ്യൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ അൽ-ഖരാജിയുടെ പേരിലുള്ള 'ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം' എന്ന ആശയമാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.



ബ്ലെയ്സ് പാസ്കൽ
(1623-1662)

ഒരു പൂർണസംഖ്യ അഥവാ ഭിന്നസംഖ്യയാകുന്ന സാഹചര്യത്തിൽ $(a + b)^n$ എന്ന ദ്വിപദ വിപുലീകരണം എളുപ്പത്തിൽ ചെയ്യുന്നതിന് ഈ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

8.2 ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം

$$(a \quad b)^0 = 1, \ a + b \neq 0$$
$$(a - b)^1 = a + b$$
$$(a \quad b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a \quad b)^4 = (a + b)^3 \ (a + b)$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ഇവിടെ ദ്വിപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കവും വിപുലീകരണം ചെയ്തു കിട്ടിയ പദങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതകളും ശ്രദ്ധിച്ചു നോക്കൂ.

- വിപുലീകരണം ചെയ്തു കിട്ടിയ വാചകത്തിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ദ്വിപദ ത്തിന്റെ കൃത്യങ്കത്തേക്കാൾ 1 കൂടുതലായിരിക്കും.
- $(a \quad b)$ യുടെ കൃത്യങ്കവും ഓരോ പദത്തിലെയും *'a'* യുടെയും, *'b'* യുടെയും കൃത്യങ്കങ്ങളുടെ തുകയും തുല്യമാണ്.
- 'a' യുടെ കൃത്യങ്കം 1 വീതം കുറഞ്ഞും 'b' യുടെ കൃത്യങ്കം 1 വീതം കൂടിയും വരുന്നു.

കൃത്യങ്കം	ഗുണകങ്ങൾ
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1

വിപുലീകരിച്ചു കിട്ടിയ വാചകത്തിലെ ഗുണ കങ്ങൾ പട്ടികയായി എഴുതിനോക്കാം. ഈ സംഖ്യകളുടെ ക്രമം നിരീക്ഷിച്ചാൽ, അടുത്ത വരി എഴുതാൻ കഴിയും. ഇവിടെ കൃത്യങ്കം 1 ലെ 1, 1 എന്നീ സംഖ്യകൾ കൂട്ടി യാണ് കൃത്യങ്കം 2 വരുന്ന വരിയിലെ 2 എന്ന സംഖ്യ എഴുതിയിട്ടുള്ളത്. കൃത്യങ്കം 2 ലെ 1, 2, 1 എന്നീ സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാണ് കൃത്യങ്കം 3 വരുന്ന വരിയിലെ 3; 3 എന്നീ സംഖ്യകൾ എഴുതിയിട്ടുള്ളത്. ഇവിടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ നിന്നും ഇത് വ്യക്തമാകും.

തുടർന്നുള്ള രണ്ടു വരികൾ കൂടി എഴുതി നോക്കൂ.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക നോക്കാം

കൃത്യങ്കം	ഗുണകങ്ങൾ
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4

അങ്ങനെ ആയാൽ തുടർന്നുള്ള രണ്ടു വരികൾ എഴുതാം.

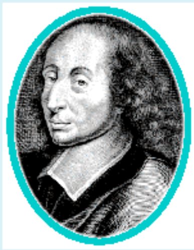
1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

പാസ്ക്കൽ ത്രികോണം

ത്രികോണമാതൃകയിലുള്ള സംഖ്യക ളുടെ ഈ ക്രമീകരണത്തെ പാസ്ക്കൽ ത്രികോണം (Pascal's Triangle) എന്ന പേരിലാണ് അറിയപ്പെടുന്നത്.

ബ്ലെയ്സ് പാസ്ക്കൽ



ബ്ലെയ്സ് പാസ്ക്കൽ (1623 – 1662)

ഫ്രഞ്ച് പ്രവിശ്യയായ അവേർ ജിനിലെ ക്ലേർ മോണ്ട് നഗര ത്തിൽ 1623 ജൂൺ 19-ാം തീയതി പാസ്ക്കൽ ജനിച്ചു. അഭിഭാഷകനും പൊതുപ്ര വർത്തകനുമായിരുന്നു പിതാവ് എറ്റ്യാനെ പാസ്ക്കൽ. പിതാ വിന്റെ പ്രത്യേക മേൽനോട്ടത്തി ലായിരുന്നു മകൻ പാസ്ക്ക ലിന്റെ വിദ്യാഭ്യാസം നടന്നിരു ന്നത്. ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിലും അതീവ തല്പരനായിരുന്ന പിതാവ് തന്റെ പുത്രനെ ഭാഷാപഠനത്തിൽ നിപുണനാക്കിയ ശേഷം ഗണി തത്തിലേക്കു നയിക്കാമെന്ന് തീരുമാനിച്ചിരുന്നു. എന്നാൽ 12-ാമത്തെ വയസിൽത്തന്നെ ജ്യാമിതി യിലെ നിരവധി സൂത്രങ്ങളും അവയുടെ തെളിവു കളും ഈ ബാലൻ കണ്ടെത്തിയിരുന്നു. 16-ാമത്തെ വയസിൽ കോണുകങ്ങളെപ്പറ്റി ആധികാരികമാ യൊരു പുസ്തകം എഴുതിയ അദ്ദേഹം പ്രഗത്ഭർ ക്കുമാത്രം അംഗത്വമുള്ള ഗണിതശാസ്ത്ര സമിതി യിൽ ഇടം നേടി. 19-ാംമത്തെ വയസിൽ കണക്കു കൂട്ടൽ യന്ത്രം കണ്ടുപിടിച്ച പാസ്ക്കൽ 1658-ൽ സൈക്ലോയിഡ് എന്ന ഗണിതീയ വക്രത്തിന്റെ ചിത്രം രൂപപ്പെടുത്തി. 1662-ൽ തന്റെ 39-ാം വയ സിൽ പല പ്രമുഖ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരേയും പോലെ വളരെ നേരത്തേ ആ ഗണിതപ്രതിഭയും ഭൂമിയോട് വിട പറഞ്ഞു.

ഇനി $(2x + 3y)^4$ വിപുലീകരണം ചെയ്തു കിട്ടുന്ന വാചകം എന്തായിരിക്കും?

ഇതിന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ 5 പദങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും എന്ന് കാണാമല്ലോ. അതുപോലെ ഗുണകങ്ങൾ പാസ്ക്കൽ ത്രികോണത്തിന്റെ 5-ാംവരിയിലെ സംഖ്യകളായ 1, 4, 6, 4, 1 എന്നും കാണാാം. പദങ്ങൾ

$(2x)^4$, $(2x)^3 \times 3y$, $(2x)^2 \times (3y)^2$, $(2x)^1 \times (3y)^3$, $(3y)^4$ ആണെന്നു കാണാം.

അതായത്,

$$(2x + 3y)^4 = (2x)^4 + 4\ (2x)^3 \times 3y + 6y\ (2x)^2 \times (3y)^2 + 4 \times (2x)(3y)^3 + (3y)^4$$

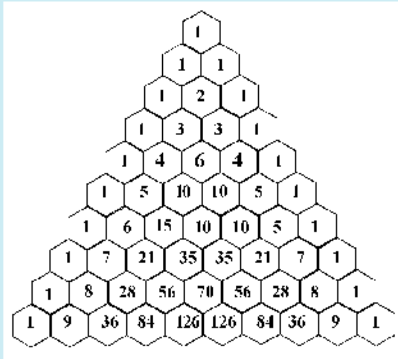
ഇതു ഒന്നു കൂടി ലഘൂകരിച്ചാൽ

$$16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4$$

എന്നു കിട്ടും. എന്നാൽ $(2x + 3y)^{12}$ എന്ന ദ്വിപദമാണ് വിപുലീകരണം ചെയ്യേണ്ടതെങ്കിൽ പാസ്ക്കൽ ത്രികോണത്തിലെ 13 വരികൾ എഴുതണം. ഇതുപോലെ ദ്വിപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം വലുതാകും തോറും വിപുലീകരണത്തിന്റെ പ്രയാസവും കൂടുന്നതായി കാണാം. ഉദാഹരണത്തിന് പാസ്ക്കൽ ത്രികോണത്തിലെ 10-ാം വരി മാത്രമായി എഴുതുക പ്രയാസമാണ്.

ഈ പ്രയാസം ലഘൂകരിക്കുന്നതിന് നമുക്ക് ക്രമീകരണവും തെരഞ്ഞെടുക്കലും (Permutation and combination) എന്ന അധ്യായത്തിൽ പഠിച്ച ചില പ്രധാന ആശയങ്ങൾ പ്രയോജനപ്പെടുത്താം.

ത്രികോണം ആരുടേത്



$(a+b)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന സംഖ്യാത്രികോണം ഫ്രഞ്ചു ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന ബ്ലേസ് പാസ്ക്കൽ (1623-1662) ന്റെ പേരിലാണ് അറിയപ്പെടുന്നത്. എന്നാൽ 10-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഹലായുധൻ ഈ സംഖ്യാത്രികോണം ഇതേ ആവശ്യത്തിന് ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ടെന്ന് ചരിത്രം. 'മേരുപ്രസ്ഥാരം' എന്നാണ് ഈ ത്രികോണത്തിന് അദ്ദേഹം നൽകിയ പേര്. 11-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന പേർഷ്യൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ -അൽ-ഖരാജി യുടെ പേരും ഇവിടെ പരാമർശിക്കുന്നുണ്ട്. 13-ാം നൂറ്റാണ്ടിലെ ചൈനീസ് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ യാങ്ഹുയി ചില ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളുടെ ഉത്തരം കണ്ടെത്താൻ ഈ ത്രികോണസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു.

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!},\ 0 \le r \le n,$$ കൂടാതെ ${}^nC_0 = 1 = {}^nC_n$ എന്നീ ആശയങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പാസ്ക്കൽ ത്രികോണം മാറ്റി എഴുതാം.

കൃത്യങ്കം	ഗുണകങ്ങൾ
0	${}^0C_0$ (=1)
1	${}^1C_0$ (=1) ${}^1C_1$ (=1)
2	${}^2C_0$ (=1) ${}^2C_1$ (=2) ${}^2C_2$ (=1)
3	${}^3C_0$ (=1) ${}^3C_1$ (=3) ${}^3C_2$ (=3) ${}^3C_3$ (=1)
4	${}^4C_0$ (=1) ${}^4C_1$ (=4) ${}^4C_2$ (=6) ${}^4C_3$ (=4) ${}^4C_4$ (=1)
5	${}^5C_0$ (=1) ${}^5C_1$ (=5) ${}^5C_2$ (=10) ${}^5C_3$ (=10) ${}^5C_4$ (=5) ${}^5C_5$ (=1)

$(x + 2)^6$ ന്റെ വിപുലീകരണം ചെയ്യുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. ഇതിന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ 7 പദങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. കൂടാതെ ഗുണകങ്ങൾ കൃത്യങ്കം 6 വരുന്ന വരിയിലെ ${}^6C_0$, ${}^6C_1$, ${}^6C_2$, ${}^6C_3$, ${}^6C_4$, ${}^6C_5$, ${}^6C_6$ എന്നിവയാണ്. ഗുണകങ്ങൾ ഒഴികെയുള്ളവ $x^6, x^5{\times}2, x^4{\times}2^2, x^3{\times}2^3, x^2{\times}2^4, x \times 2^5, 2^6$ എന്നിവയാണല്ലോ.

അപ്പോൾ

$(x + 2)^6 = x^6 + {}^6C_1 \times x^5 \times 2 + {}^6C_2 \times x^4 \times 2^2 + {}^6C_3 \times x^3 \times 2^3 + {}^6C_4 \times x^2 \times 2^4 + {}^6C_5 \times x^1 \times 2^5 + {}^6C_6 \times 2^6$

ലഘൂകരിച്ചാൽ,

$(x + 2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64.$

എന്നു കിട്ടും.

8.2.1 ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം

'n' ഒരു പൂർണഅധിസംഖ്യയായാൽ

$$(a + b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} a.b^{n-1} + {}^nC_n b^n$$

തെളിവ്:

ഈ സിദ്ധാന്തം ഗണിതാഗമന തത്ത്വമുപയോഗിച്ചാണ് തെളിയിച്ചിരിക്കുന്നത്.

ഈ പ്രസ്താവനയെ $P(n)$ എന്നെഴുതിയാൽ

$P(n) : (a + b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} a.b^{n-1} + {}^nC_n b^n.$

$n = 1$ ആയാൽ

$$P(1) : (a + b)^1 = {}^1C_0 a^1 + {}^1C_1 b^1$$
$$= a + b$$

അതുകൊണ്ട് **P (1)** ശരിയാണ്.

P (k) ശരിയാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ

$$P(k) : (a + b)^k = {}^kC_0 a^k + {}^kC_1 a^{k-1} b + {}^kC_2 a^{k-2} b^2 + {}^kC_3 a^{k-3} b^3 + \cdots {}^kC_r a^{k-r} b^r + \ldots {}^kC_k b^k$$

അടുത്തതായി P(k + 1) ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കണം.

$$(a + b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0 a^{k+1} + {}^{k+1}C_1 a^k b + {}^{k+1}C_2 a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^{k-1}C_r a^{k-1-r} b^r \ldots {}^{k-1}C_k b^{k+1}$$

എന്നു തെളിയിക്കണം.

അപ്പോൾ $(a + b)^{k+1} = (a + b)(a + b)^k$

$$= (a + b)({}^kC_0 a^k + {}^kC_1 a^{k-1} b + {}^kC_2 a^{k-2} b^2 + {}^kC_3 a^{k-3} b^3 + \ldots + {}^kC_r a^{k-r} b^r + \ldots {}^kC_k b^k))$$
$$= {}^kC_0 a^{k-1} + ({}^kC_1 a^k b + {}^kC_0 a^k b) + ({}^kC_2 a^{k-1} b^2 + {}^kC_1 a^{k-1} b^2) + \cdots + {}^kC_k b^{k-1}$$
$$= {}^kC_0 a^{k+1} + ({}^kC_0 + {}^kC_1)\, a^k b + ({}^kC_1 + {}^kC_2) a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^kC_k b^{k+1}$$

എന്നാൽ $^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{(n+1)}C_r$

$\therefore\ {}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{(k+1)}C_r$

${}^kC_1 + {}^kC_0 = {}^{(k+1)}C_1$

${}^kC_2 + {}^kC_1 = {}^{(k+1)}C_2$

${}^kC_0 = 1 = {}^{(k+1)}C_0$

${}^kC_k = 1 = {}^{(k+1)}C_{k+1}$ എന്നും എഴുതാം.

$$\therefore (a + b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0 a^{k+1} + {}^{k+1}C_1 a^k b + {}^{k+1}C_2 a^{k-1} b^2 + {}^{k+1}C_3 a^{k-2} b^3 + \ldots + {}^{k+1}C_{k+1} b^{k+1}$$

എന്നാകും.

അതായത് P (k) ശരിയാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ **P** (k + 1) ശരിയാണെന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതായത്, ഏത് പൂർണഅധിസംഖ്യ n നും P(n) ശരിയാണ്.

ഉദാഹരണത്തിന്

$$(x + 2)^6 = {}^6C_0 x^6 + {}^6C_1 x^5.2 + {}^6C_2 x^4 2^2 + {}^6C_3 x^3.2^3 + {}^6C_4 x^2.2^4 + {}^6C_5 x.2^5 + {}^6C_6.2^6.$$
$$=(1)x^6 + 6x^5(2) + 15x^4(4) + 20x^3(8) + 15x^2(16) + 6x(32) + (1)(64)$$
$$(x + 2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

അങ്ങനെ

$$(a + b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + {}^nC_3 a^{n-3} b^3 + \ldots + {}^nC_r a^{n-r} b^r \ldots + {}^nC_n b^n$$

ദ്വിപദസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ

1. $^nC_0a^nb^0 + {}^nC_1a^{n-1}b^1 + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + {}^nC_3a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots.. + {}^nC_ra^0b^n$

   നെ ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച്

   $\sum\limits_{k=0}^{n} {}^nC_k\, a^{n-k}b^k$ എന്നെഴുതാമല്ലോ.

   അതുകൊണ്ട് $(a+b)^n - \sum\limits_{k=0}^{n} {}^nC_k\, a^{n-k}b^k$ എന്ന് ചുരുക്കി എഴുതാം.

2. ഇവിടെ $^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, ------, {}^nC_n$ എന്നീ $n+1$ ഗുണകങ്ങളെ ദ്വിപദഗുണകങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

3. $(a+b)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $(n+1)$ പദങ്ങൾ ഉണ്ട്.

4. 'a' യുടെ കൃത്യങ്കം $n, n-1, n-2, \ldots, 0$ എന്ന ക്രമത്തിൽ കുറഞ്ഞും 'b' യുടെ കൃത്യങ്കം $0, 1, 2, \ldots n$ എന്ന ക്രമത്തിൽ കൂടിയും വരുന്നു.

5. ഓരോ പദത്തിലെയും 'a' യുടെയും 'b' യുടെയും കൃത്യങ്കങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ എല്ലായ്പ്പോഴും n ആയിരിക്കും.

8.2.2 പ്രത്യേക സന്ദർഭങ്ങൾ

$(a+b)^n$ എന്ന വിപുലീകരണത്തിൽ

(i) $a - x, b - -y$ എന്നെടുത്താൽ

$$(x-y)^n - [x+(-y)]^n$$
$$- {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}(-y) + {}^nC_2x^{n-2}(-y)^2 + \ldots\ldots + {}^nC_n(-y)^n$$
$$- {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 - \ldots\ldots + (-1)^n\, {}^nC_ny^n$$

അതായത് ഒന്നിടവിട്ട പദങ്ങൾ ന്യൂനമായി മാറുന്നു.

$(2-x)^5$ ന്റെ വിപുലീകരണം എങ്ങനെ?

$$(2-x)^5 = 5C_02^5 - 5C_1\times 2^4\times x \quad 5C_2\times 2^3\times x^2 - 5C_3\times 2^2\times x^3 + 5C_4\times 2\times x^4 - 5C_5\times x^5$$
$$= 32 - 80x + 80x^2 - 40x^3 + 10x^4 - x^5$$

(ii) $a = 1, b - x$ എന്നെടുത്താൽ

$$(1+x)^n = {}^nC_0(1)^n + {}^nC_1(1)^{n-1}x + {}^nC_2(1)^{n-2}x^2 + \ldots + {}^nC_nx^n$$
$$= {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \ldots + {}^nC_nx^n$$

ഈ വാചകത്തിൽ $x = 1$ എന്നു കരുതിയാൽ

$$(1+1)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \ldots + {}^nC_n$$

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + {}^nC_n \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(A)}$$

(iii) $a = 1,\ b = -x$ എന്നു ആരോപിച്ചാൽ

$$(1-x)^n = {}^nC_0 + -{}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 - {}^nC_3 x^3 + \ldots + (-1)^n\, {}^nC_n x^n$$

ഇവിടെ $x = 1$ എന്നു എഴുതിയാൽ

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + (-1)^n\, {}^nC_n \text{\_\_\_\_\_\_\_\_ (B)}$$

$$(A) + (B) \Rightarrow 2^n = 2\,{}^nC_0 + 2\,{}^nC_2 + 2\,{}^nC_4 + \ldots\ldots$$

അതായത് ${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + {}^nC_6 + \ldots. = 2^{n-1}$

അതുപോലെ,

(A) - (B)

$$2^n = 2\,{}^nC_1 + 2\,{}^nC_3 + 2\,{}^nC_5 + 2\,{}^nC_7 + \ldots.$$

അതായത് ${}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \ldots. = 2^{n-1}$

ഉദാഹരണം : 1

വിപുലീകരിക്കുക : $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4,\ x \neq 0$

പരിഹാരം

$$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4 = {}^4C_0 (x^2)^4 + {}^4C_1 (x^2)^3 \left(\frac{3}{x}\right)^1 + {}^4C_2 (x^2)^2 \left(\frac{3}{x}\right)^2 + {}^4C_3 (x^2)^1 \left(\frac{3}{x}\right)^3 + {}^4C_4 \left(\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= 1x^8 + 4x^6\,\frac{3}{x} + 6x^4\,\frac{9}{x^2} + 4x^2\,\frac{27}{x^3} + 1\,\frac{81}{x^4}$$

$$= x^8 + 12x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}.$$

ഉദാഹരണം : 2

$(98)^5$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

$$
\begin{aligned}
(98)^5 &= (100-2)^5 \\
&= {}^5C_0\,(100)^5 - {}^5C_1\,(100)^4\,2 + {}^5C_2\,(100)^3 2^2 \\
&\quad - {}^5C_3\,(100)^2\,(2)^3 + {}^5C_4\,(100)\,(2)^4 - {}^5C_5\,(2)^5 \\
&= 10000000000 - 5 \times 100000000 \times 2 + 10 \times 1000000 \times 4 - 10 \times 10000 \\
&\quad \times 8 + 5 \times 100 \times 16 - 32 \\
&= 10040008000 - 1000800032 = 9039207968.
\end{aligned}
$$

ഉദാഹരണം : 3

$(1.01)^{1000000}$, 10,000 ഇവയിൽ ഏതാണ് വലിയ സംഖ്യ.

പരിഹാരം

1.01 നെ $(1 + 0.01)$ എന്ന് എഴുതി ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് പദങ്ങൾ എഴുതിയാൽ

$$
\begin{aligned}
(1.01)^{1000000} &= (1 + 0.01)^{1000000} \\
&= {}^{1000000}C_0 + {}^{1000000}C_1(0.01) + \text{മറ്റ് അധിസംഖ്യകൾ} \\
&= 1 + 1000000 \times 0.01 + \text{മറ്റ് അധിസംഖ്യകൾ} \\
&= 1 + 10000 + \text{മറ്റ് അധിസംഖ്യകൾ} \\
&\quad > 10000
\end{aligned}
$$

അതുകൊണ്ട്, $(1.01)^{1000000} > 10000$

ഉദാഹരണം : 4

ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് 6^n-5n എന്നതിനെ 25 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ എല്ലായ്പ്പോഴും ശിഷ്ടം 1 കിട്ടും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

a എന്ന സംഖ്യയെ b എന്ന സംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ 'q' ഹരണഫലവും r ശിഷ്ടവുമാണെങ്കിൽ $a = bq + r$ എന്ന് എഴുതാം.

$6^n - 5n$ എന്നതിനെ 25 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 കിട്ടണം എന്ന് തെളിയിക്കുന്നതിന്

$6^n - 5n = 25k + 1$, k ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ എന്ന് തെളിയിച്ചാൽ മതിയല്ലോ?

$$(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x + \ldots + {}^nC_nx^n$$

$$(1 + 5)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1 \times 5 + {}^nC_2 \times 5^2 + {}^nC_3 \times 5^3 + \ldots + {}^nC_n \times 5^n$$

$$6^n = 1 + n \times 5 + {}^nC_2 \times 25 + \ldots + {}^nC_n \times 5^n$$

$$6^n - 5n = 1 + 25\,[{}^nC_2 + {}^nC_3 \times 5 + {}^nC_4 \times 5^2 + \ldots + {}^nC_n \times 5^{n-2}]$$
$$= 25k + 1$$

ഇവിടെ $k = {}^nC_2 + {}^nC_3 \times 5 + {}^nC_4 \times 5^2 \ldots + {}^nC_n 5^{n-2}$

അതായത് $6^n - 5n$ നെ 25 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം : 5

$(x+1)^6 + (x-1)^6$ വിപുലീകരിക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ച് $\left(\sqrt{3}+1\right)^6 + \left(\sqrt{3}-1\right)^6$ ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം:

$$(x+1)^6 = 6C_0x^6 + 6C_1x^5 + 6C_2x^4 + 6C_3x^3 + 6C_4x^2 + 6C_5x + 1$$
$$(x-1)^6 = 6C_0x^6 - 6C_1x^5 + 6C_2x^4 - 6C_3x^3 + 6C_4x^2 - 6C_5x + 1$$
$$(x+1)^6 + (x-1)^6 = 2 \times [6C_0x^6 + 6C_2x^4 + 6C_4x^2 + 1]$$
$$= 2\,[x^6 + 15x^4 + 15x^2 + 1]$$

ഇവിടെ $x = \sqrt{3}$ ആയാൽ

$$\left(\sqrt{3}+1\right)^6 + \left(\sqrt{3}-1\right)^6 = 2\,[\sqrt{3}^{\,6} + 15\sqrt{3}^{\,4} + 15\sqrt{3}^{\,2} + 1]$$
$$= 2\,[27 + 15 \times 9 + 15 \times 3 + 1]$$
$$= 2\,[27 + 135 + 45 + 1]$$
$$= 2 \times 208$$
$$= 416$$

> **കുറിപ്പ്**
> കൃതി 'n' ഇരട്ടസംഖ്യയായാൽ
> $(a+b)^n + (a-b)^n = 2\,[{}^nC_0a^n + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + b^n]$

ഉദാഹരണം : 6

$9^{n+1} - 8n - 9$ നെ 64 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$9^{n+1} - 8n - 9$ നെ 64 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം എന്നു തെളിയിക്കുന്നതിന് $9^{n+1} - 8n - 9 = 64k$ എന്നു സ്ഥാപിച്ചാൽ മതിയാകുമല്ലോ.

$$9^{n+1} = (1+8)^{n+1}$$
$$= 1 + {}^{(n+1)}C_1 \times 8 + {}^{(n-1)}C_2 \times 8^2 + \ldots\ldots \; {}^{(n-1)}C_{n-1} \times 8^{n+1}$$
$$= 1 + (n+1) \times 8 + 8^2\,[{}^{(n-1)}C_2 + {}^{(n-1)}C_3\,8 + \ldots\ldots - 8^{n-1}]$$

$$= 1 + 8n + 8 + 8^2 K$$ ഇവിടെ $k = [^{(n+1)}C_2 + ^{(n+1)}C_3 8 + \ldots\ldots + 8^{n-1}]$

$$= 8n + 9 + 64K$$

$$9^{n+1} - 8n - 9 = 64K$$

ഉദാഹരണം : 7

$\sum\limits_{r=0}^{n} 3^r \, {}^nC_r = 4^n$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$4^n - (1+3)^n - {}^nC_0 + {}^nC_1(3) + {}^nC_2(3)^2 + \ldots\ldots + {}^nC_n 3^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} nC_r \times 3^r$$

> **കുറിപ്പ്**
>
> $$(1+x)^n - \sum_{r=0}^{n} nC_r x^r$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 8.1

വിപുലീകരിക്കുക

1. $(1-2x)^5$ **2.** $\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{x}{2}\right)^5$ **3.** $(2x-3)^6$

4. $\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{x}\right)^5$ **5.** $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^6$

ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് വില കണക്കാക്കുക.

6. $(96)^3$ **7.** $(102)^5$ **8.** $(101)^4$

9. $(99)^5$

10. $(1.1)^{10000}$, 1000. ഇവയിൽ വലിയ സംഖ്യ ഏത്?

11. $(a+b)^4 - (a-b)^4$ നെ വിപുലീകരിക്കുക. ഇത് ഉപയോഗിച്ച്

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4 - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4$ ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

12. $(x+1)^6 + (x-1)^6$ നെ വിപുലീകരിക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ച്

$\left(\sqrt{2}+1\right)^6 + \left(\sqrt{2}-1\right)^6$ ന്റെ വില കണ്ടെത്തുക.

8.3 പൊതുപദവും മധ്യപദവും

1. $(a + b)^n$ വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ പദങ്ങൾ ${}^nC_0a^n$, ${}^nC_1a^{n-1}b$, ${}^nC_2a^{n-2}b^2$,.... എന്നി ങ്ങനെയാണ്. ഇതിൽ $(r + 1)$ -ാം പദമായ ${}^nC_ra^{n-r}b^r$ നെ പൊതുപദം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ T_{r+1} കൊണ്ടാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

$$T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}b^r.$$

2. മധ്യപദത്തെപ്പറ്റി ചിന്തിക്കുമ്പോൾ രണ്ടു സന്ദർഭങ്ങളാണ് ഉണ്ടാവുക. $(a + b)^n$ എന്ന ദ്വിപദത്തിൽ കൃത്യങ്കമായ 'n' ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയോ ഒറ്റസംഖ്യയോ ആകാം. 'n' ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ ആയാൽ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം $n + 1$ ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ ആയിരിക്കും. അപ്പോൾ മധ്യപദം ഒരെണ്ണം മാത്രമായിരിക്കുമല്ലോ ഉണ്ടാവുക.

$$\text{മധ്യപദം} = \left(\frac{n+1+1}{2}\right)\text{-ാം പദം}$$

$$= \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{-ാം പദം}$$

ഉദാഹരണത്തിന് $(2x + y)^6$ വിപുലീകരിച്ചാൽ

$$\text{മധ്യപദം} = \left(\frac{6}{2}+1\right) = 4\text{-ാം പദം}$$

n ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ ആയാൽ $(n + 1)$ ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ ആയിരിക്കും. അപ്പോൾ മധ്യത്ത് രണ്ട് പദങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും എന്ന് കാണാം.

അതായത് $\left(\frac{n+1}{2}\right)$, $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ -ാം പദങ്ങളാണ് മധ്യപദങ്ങൾ.

ഉദാഹരണത്തിന് $(2x - y)^9$ വിപുലീകരണം ചെയ്താൽ $\left(\frac{9+1}{2}\right) = 5$-ാം പദവും,

$\left(\frac{9+1}{2}+1\right) = 6$-ാം പദവും ആയിരിക്കും മധ്യപദങ്ങൾ.

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ

$$\text{മധ്യപദം} = \left(\frac{2n+1+1}{2}\right)\text{-ാം പദം}$$

$= (n + 1)$-ാം പദമാണ് മധ്യപദം

മധ്യപദം $= {}^{2n}C_n x^n \left(\frac{1}{x}\right)^n$

$= {}^{2n}C_n$ (ഒരു സറിരസംഖ്യയാണ്)

ഉദാഹരണം : 8

$(2 + a)^{50}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ 17-ാം പദവും 18-ാം പദവും തുല്യമായാൽ a യുടെ വിലയെന്ത്?

പരിഹാരം

പൊതുപദം $T_{r+1} = {}^{n}C_r a^{n-r} b^r$

അപ്പോൾ $T_{17} = {}^{50}C_{16}\ (2)^{50-16}\ a^{16}$

$= {}^{50}C_{16}\ 2^{34} \times a^{16}$

$T_{18} = {}^{50}C_{17}\ 2^{50-17} \times a^{17}$

$= {}^{50}C_{17}\ (2)^{33} \times a^{17}$

$T_{17} = T_{18}$ എന്നു തന്നിരിക്കുന്നു.

$\therefore\ {}^{50}C_{16} \times (2)^{34} \times a^{16} = {}^{50}C_{17} \times (2)^{33} \times a^{17}$

$$\frac{{}^{50}C_{16}\,.\,2^{34}}{{}^{50}C_{17}\,.\,2^{33}} = \frac{a^{17}}{a^{16}}$$

$$\therefore \qquad a = \frac{{}^{50}C_{16} \times 2}{{}^{50}C_{17}}$$

$$= \frac{17 \times 2}{34} = 1$$

ഉദാഹരണം : 9

n ഒരു അധിപൂർണസംഖ്യയായാൽ $(1+x)^{2n}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ മധ്യപദം $\frac{1.3.5...(2n-1)}{n!}\ 2^n\ x^n$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$(1+x)^{2n}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $(2n+1)$ പദങ്ങൾ ഉണ്ട്.

മധ്യപദം = $\left(\frac{2n+1+1}{2}\right)$ = $(n+1)$-ാം പദം.

$$= {}^{2n}C_{n}\, x^{2n-n}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\ (2n-n)!}\, x^n$$

$$= \frac{2n\,(2n-1)\ (2n-2)\ \ldots 3.2.1}{n!\times n!}\, x^n$$

$$= \frac{\left[2n\,(2n-2)\ (2n-4)\ \ldots 4.2\right]\left[(2n-1)\ (2n-3)\ldots 3.1\right]}{n!\times n!}\, x^n$$

$$= \frac{\left[1.3.5.7\ldots.2n-1\right]\times\left[\,n\,(n-1)\,(n-2)\ldots.2.1\right]}{n!\,n!}\, x^n.2^n$$

$$= \frac{[1.3.5.7\ldots.(2n-1)]2^n\, n!}{n!\,n!}\, x^n$$

$$= \frac{2^n x^n\ 1.3.5.7\ldots.(2n-1)}{n!}$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}\ 2^n\, x^n$$

ഉദാഹരണം : 10

$(x + 2y)^9$ വിപുലീകരിച്ചാൽ x^6y^3 ന്റെ ഗുണകം എന്തായിരിക്കും?

പരിഹാരം

$(x + 2y)^9$ വിപുലീകരിച്ചാൽ പൊതുപദം

$$T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r} b^r$$

$$= {}^9C_r\, x^{9-r}.(2y)^r$$

ഇവിടെ x^6y^3 ഉൾപ്പെടണമെങ്കിൽ $r = 3$ ആകുന്നു.

$$\mathrm{T}_4 = {}^9C_3\, x^{9-3}\, (2y)^3$$

$$\mathrm{T}_4 = {}^9C_3\, x^6 .\, 2^3 .\, y^3$$

$$= \frac{9.8.7}{1.2.3} \times 2^3 \times x^6 \times y^3$$

$$= 672\ x^6y^3$$

അപ്പോൾ x^6y^3 ന്റെ ഗുണകം 672 എന്ന് മനസ്സിലാകും.

ഉദാഹരണം : 11

$(x + a)^n$ വിപുലീകരിച്ചാൽ 2-ാം പദം, 3-ാം പദം, 4-ാം പദം യഥാക്രമം 240, 720, 1080 ആയാൽ x, a, n ഇവ കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$\mathrm{T}_2 = 240$, $\mathrm{T}_3 = 720$, $\mathrm{T}_4 = 1080$ ഇവ തന്നിരിക്കുന്നു.

അതായത്,

$$\mathrm{T}_2 = {}^nC_1 x^{n-1} .\ a = 240 \quad \ldots (1)$$

$$\mathrm{T}_3 = {}^nC_2 x^{n-2} a^2 = 720 \quad \ldots (2)$$

$$\mathrm{T}_4 = {}^nC_3 x^{n-3} a^3 = 1080 \quad \ldots (3)$$

$$(2) \div (1) \Rightarrow \quad \frac{{}^nC_2 x^{n-2} a^2}{{}^nC_1 x^{n-1} a} = \frac{720}{240}$$

അതായത്,

$$\frac{\left[\dfrac{n\,!}{2\,!\,(n-2)\,!}\right] a}{\left[\dfrac{n\,!}{1\,!\,(n-1)\,!}\right] x} = 3$$

$$\frac{(n-1)}{2 \times x} \times a = 3 \qquad [(n-1)! = (n-1)\,(n-2)!$$

$$\frac{a}{x} = \frac{6}{(n-1)} \quad \ldots (4)$$

$$(3) \div (2) \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{9}{2(n-2)} \quad \dots (5)$$

(4), (5) ഇവ പരിഗണിച്ചാൽ

$$\frac{6}{n-1} = \frac{9}{2(n-2)}$$

$$12n - 24 = 9n - 9$$

$$3n = 15 \Rightarrow n = 5$$

(1) ൽ നിന്ന് $\quad 5x^4a = 240 \quad \dots (6)$

(4) ൽ നിന്ന് $\quad \dfrac{a}{x} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \quad \dots (7)$

(6), (7) ഇവയുടെ പരിഹാരം കണ്ടെത്തിയാൽ

$$x = 2,\ a = 3$$

ഉദാഹരണം : 12

$(1 + a)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ അടുത്തടുത്തുള്ള മൂന്നു പദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങൾ 1 : 7 : 42 എന്ന അംശബന്ധത്തിലായാൽ n എത്രയാണ്?

പരിഹാരം

$(1 + a)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള മൂന്നു പദങ്ങൾ T_{r-1}, T_r, T_{r-1} എന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ T_{r-1}, T_r, T_{r+1} ന്റെ ഗുണകങ്ങൾ ${}^nC_{r-2}, {}^nC_{r-1}, {}^nC_r$ എന്നു കിട്ടുമല്ലോ,

അതായത്

${}^nC_{r-2} : {}^nC_{r-1} : {}^nC_r = 1 : 7 : 42$ എന്നു തന്നിട്ടുണ്ട്.

$$\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-1}} = \frac{1}{7}, \quad \frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} = \frac{7}{42} = \frac{1}{6} \text{ എന്നും കിട്ടും}$$

$$\therefore \qquad \frac{\left[\dfrac{n!}{(r-2)!\,(n-r+2)!}\right]}{\left[\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}\right]} = \frac{1}{7}; \quad \frac{\left[\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}\right]}{\left[\dfrac{n!}{r!(n-r)!}\right]} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{r-1}{n-r+2} = \frac{1}{7}; \frac{r}{n-r+1} = \frac{1}{6}$$

ലഘൂകരിച്ചാൽ

n - $8r + 9 = 0$; n - $7r + 1 = 0$ എന്നും കിട്ടും.

ഈ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം

$n = 55$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം : 12

$(1 + x)^{2n}$, $(1 + x)^{2n-1}$ എന്നിവയുടെ വിപുലീകരണത്തിൽ x^n ന്റെ ഗുണകങ്ങൾ യഥാക്രമം A, B ഇവ ആയാൽ A = 2B എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$A = {}^{2n}C_n$, $B = {}^{2n-1}C_n$ എന്നിവ ആണ്.

$$\frac{A}{B} = \frac{{}^{2n}C_n}{{}^{2n-1}C_n}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{(2n)!}{n!(2n-n)!}\right]}{\left[\dfrac{(2n-1)!}{n!(2n-1-n)!}\right]}$$

$$= \frac{2n}{n}$$

$$= 2$$

$$\therefore A = 2B$$

ഉദാഹരണം : 14

$\left(2+\frac{x}{3}\right)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ x^7, x^8, ഇവയുടെ ഗുണകങ്ങൾ തുല്യമായാൽ n ന്റെ വിലയെന്ത്?

പരിഹാരം

$${}^nC_7 2^{n-7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 = {}^nC_8 2^{n-8}\left(\frac{1}{3}\right)^8$$ എന്നു തന്നിട്ടുണ്ട്.

$$\frac{nC_7}{nC_8} = \frac{2^{n-8}.3^7}{3^8.2^{n-7}} \Rightarrow \frac{\frac{n!}{7!(n-7)!}}{\frac{n!}{8!(n-8)!}} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n-7}{8} = 6 \Rightarrow n = 55$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 8.2

1. $(x+3)^8$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ x^5 ന്റെ ഗുണകം എന്ത്?

2. $(a-2b)^{12}$ നെ വിപുലീകരിച്ചാൽ a^5b^7 ന്റെ ഗുണകം എന്ത്?

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയുടെ പൊതുപദം കാണുക?

3. $(x^2-y)^6$

4. $(x^2-yx)^{12}, x \neq 0.$

5. $(x-2y)^{12}$ നെ വിപുലീകരിച്ചാൽ 4-ാം പദം ഏത്?

6. $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$, $x \neq 0$ വിപുലീകരിച്ചാൽ 13-ാം പാദം കണ്ടെത്തുക.

ചുവടെ തന്നിട്ടുള്ളവ വിപുലീകരിച്ചാൽ മധ്യപദം ഏത്?

7. $\left(3 - \frac{x^3}{6}\right)^7$

8. $\left(\frac{x}{3} + 9y\right)^{10}$.

9. $(1+a)^{m+n}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ a^m, a^n ഇവയുടെ ഗുണകങ്ങൾ തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

10. $(x+1)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $(r-1)$ -ാം പദം r -ാം പദം, $(r+1)$ -ാം പദം ഇവയുടെ ഗുണകങ്ങൾ $1:3:5$ എന്ന അനുപാദത്തിൽ ആയാൽ n, r ഇവ കണ്ടെത്തുക.

11. $(1 + x)^{2n}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ x^n ന്റെ ഗുണകം $(1 + x)^{2n - 1}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ x^n ന്റെ ഗുണകത്തിന്റെ 2 മടങ്ങാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

12. $(1 + x)^m$ വിപുലീകരിച്ചാൽ x^2 ന്റെ ഗുണകം 6 ആയാൽ m ന്റെ അധിസംഖ്യാവില എത്രയാണ്?

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 15

$(1 + x)^{39}$ വിപുലീകരിച്ചാൽ അവസാനത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങളുടെ തുകയെത്രയാണ്.

പരിഹാരം

$(1 + x)^{39}$ വിപുലീകരിച്ചാൽ 40 പദങ്ങൾ ഉണ്ടാകുമല്ലോ.

$S = {}^{39}C_{20} + {}^{39}C_{21} + \ldots\ldots {}^{39}C_{39}$ ....(1)

${}^{n}C_{r} = {}^{n}C_{n-r}$ ആയതുകൊണ്ട്.

$S = {}^{39}C_{19} + {}^{39}C_{18} + \ldots\ldots {}^{39}C_{0}$ ....(2)

$(1) + (2) \Rightarrow 2S = {}^{39}C_0 + {}^{39}C_1 + \ldots\ldots + {}^{39}C_{19} + {}^{39}C_{20} + {}^{39}C_{21} + \ldots\ldots {}^{39}C_{39}$ ....(2)

${}^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 + \ldots\ldots + {}^{n}C_n - 2^n$ ആയതുകൊണ്ട്

$$2S = 2^{39}$$

$$S = 2^{38}$$

ഉദാഹരണം : 16

$\sum\limits_{m=0}^{100} {}^{100}C_m (x-5)^{100\ \ m} \times 4^m$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ x^{53} ന്റെ ഗുണകം എന്താണ്?

പരിഹാരം

$$\sum_{m=0}^{100} {}^{100}C_m (x-5)^{100-m} \times 4^m = (x-5+4)^{100}$$

$$= (x-1)^{100}$$

ഇതിൽ x^{53} ന്റെ ഗുണകം $= (-1)^{53}\ \ {}^{100}C_{53} (1)^{100-53}$

$$= -{}^{100}C_{53}$$

ഉദാഹരണം : 17

$\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^6$ വിപുലീകരിച്ചാൽ x ഉൾപ്പെടാത്ത പദം ഏത്?

പരിഹാരം

$$T_{r+1} = (-1)^r\, {}^6C_r \left(\frac{3}{2}x^2\right)^{6-r} \left(\frac{1}{3x}\right)^r$$

$$= (-1)^r\, {}^6C_r \left(\frac{3}{2}\right)^{6-r} \left(x^2\right)^{6-r} \frac{1}{3^r} \times \frac{1}{x^r}$$

$$= \frac{(-1)^r\, {}^6C_r \left(\frac{3}{2}\right)^{6-r}}{3^r} x^{12-2r-r}$$ എന്ന് നാം കണ്ടതാണല്ലോ.

'x' ഇല്ലാതെ വരണമെങ്കിൽ $12 - 2r - r = 0$

$r = 4$ എന്നു കിട്ടും

അതുകൊണ്ട് 5-ാം പദം $= \dfrac{(-1)^4 \cdot {}^6C_4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{6-4}}{3^4}$

$$= \frac{{}^6C_4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{3^4}$$

$$= \frac{{}^6C_2 \times 3^2}{3^4 \times 2^2} \qquad \because {}^nC_r = {}^nC_{n-r}$$

$$= \frac{6\times5}{1\times2}\times\frac{3^2}{3^4\times2^2}$$

$$= \frac{15}{3^2\times2^2} = \frac{5}{12}$$ ആണ് x ഉൾപ്പെടാത്ത പദം

ഉദാഹരണം :18

$\left(1+a\right)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $a^{r\ \ 1}$, a^r $a^{r\ \ \ 1}$ ഇവയുടെ ഗുണകങ്ങൾ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിൽ ആയാൽ $n^2 - n\ (4r + 1)\ +\ 4r^2 - 2 = 0$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $T_{r-1} = {}^nC_r a^r$ എന്ന് നമുക്ക് അറിയാമല്ലോ.

${}^nC_{r\ 1,}\ {}^nC_{r,}\ {}^nC_{r\ 1\ 1}$ ഇവ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്നാണ് തന്നിരിക്കുന്നത്.

അതായത്, $2({}^nC_r) = {}^nC_{r\ 1} + {}^nC_{r\ 1\ 1}$

$\because$ [a, b, c, AP യിൽ ആയാൽ $2b = a + c$ ആയിരിക്കും]

അതായത്, $$\frac{2\times n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{(n-r-1)!(r+1)!}$$

$$\frac{2\times n!}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)(n-r-1)!} + \frac{n!}{(n-r-1)!(r+1)(r)(r-1)!}$$

ഇരു വശത്തുനിന്നും പൊതുവായ പദങ്ങൾ ഒഴിവാക്കിയാൽ

$$\frac{2}{r(n-r)} = \frac{1}{(n-r+1)(n-r)}+\frac{1}{r(r+1)}$$

$$\frac{2}{r(n-r)} = \frac{r(r+1)+(n-r+1)(n-r)}{(n-r+1)(n-r)(r)(r+1)}$$

$$2 = \frac{r^2+r+n^2-nr-nr+r^2+n-r}{(n-r+1)(r+1)}$$

$$2(n-r+1)(r+1) = n^2+2r^2-2nr+n$$

$$2nr+2n-2r^2-2r+2r+2 = n^2+2r^2-2nr+n$$

$$n^2-4nr-n+4r^2-2 = 0$$

അതായത്, $n^2-n(4r+1)+4r^2-2=0$

ഉദാഹരണം : 19

$(1+x)^{2n}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ മധ്യപദത്തിന്റെ ഗുണകം $(1+x)^{2n-1}$ ന്റെ മധ്യപദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങളുടെ തുകയായിരിക്കും എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$(1+x)^{2n}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $(2n+1)$പദങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

അതായത്, പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യ ആയിരിക്കും.

$$\therefore \text{ മധ്യപദം } = \left(\frac{2n}{2}+1\right)\text{-ാം പദം}$$

$$= (n+1)\text{-ാം പദം}$$

$$= {}^{2n}C_n x^n$$

$(1+x)^{2n-1}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $2n-1+1=2n$ പദങ്ങൾ ഉണ്ട്.

അതായത്, പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്.

$\therefore$ മധ്യഭാഗത്ത് 2 പദങ്ങൾ ഉണ്ടാകുമല്ലോ.

$$\therefore \text{ മധ്യപദങ്ങൾ } \frac{(2n-1+1)}{2}\text{-ാം പദവും, } \left(\frac{2n-1+1}{2}+1\right)\text{-ാം പദവും ആയിരിക്കും}$$

അതായത്, n-ാം പദവും, $(n+1)$ -ാം പദവും ആയിരിക്കുമല്ലോ.

$\therefore$ അവയുടെ ഗുണകങ്ങളുടെ തുക

$${}^{2n-1}C_{n-1} + {}^{2n-1}C_n = {}^{2n}C_n \quad (\because nC_r + nC_{r-1} = (n+1)C_r)$$

$$= (1+x)^{2n} \text{ ന്റെ മധ്യപദത്തിന്റെ ഗുണകം}$$

ഉദാഹരണം :20

ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $(1 + 2a)^4 (2 - a)^5$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ a^4 ന്റെ ഗുണകം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$$(1 + 2a)^4 = {}^4C_0 + {}^4C_1 (2a) + {}^4C_2 (2a)^2 + {}^4C_3 (2a)^3 + {}^4C_4 (2a)^4$$

$$= 1 + 4 (2a) + 6(4a^2) + 4 (8a^3) + 16a^4.$$

$$= 1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4$$

$$(2 - a)^5 = {}^5C_0 (2)^5 - {}^5C_1 (2)^4 (a) + {}^5C_2 (2)^3 (a)^2 - {}^5C_3 (2)^2 (a)^3 + {}^5C_4 (2) (a)^4 - {}^5C_5 (a)^5$$

$$= 32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5$$

$(1 + 2a)^4 (2 - a)^5$

$$= (1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4) \times (32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5)$$

ഇവിടെ ഗുണനഫലത്തിൽ a^4 ഉൾപ്പെടുന്ന പദം മാത്രം കണ്ടാൽ മതിയാകും. അതായത്

a^4 ന്റെ ഗുണകം

$$= 1 (10a^4) + (8a) (-40a^3) + (24a^2) (80a^2) + (32a^3) (-80a) + (16a^4) (32)$$

$$= (10 - 320 + 1920 - 2560 + 512)a^4$$

$$= -438a^4$$

$\therefore$ a^4 ന്റെ ഗുണകം $= -438$

ഉദാഹരണം : 21

$(x + a)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ വലത്തെ അറ്റത്തു നിന്ന് r -ാം പദം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$(x + a)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ വലത്തെ അറ്റത്തുനിന്നും r-ാം പദവും ഇടത്തെ അറ്റത്തു നിന്നും $(n + 1) - (r - 1)$ പദവും ഒന്നു തന്നെ ആയിരിക്കും. ഇത് $(x + a)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ പദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങൾ പരിശോധിച്ചാൽ അറിയാം. അതായത്,

$${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \ldots\ldots {}^nC_{r-1}, {}^nC_r, {}^nC_{r+1}, {}^nC_{r+2}, \ldots\ldots\ldots\ldots {}^nC_{n-1}, {}^nC_n$$

അങ്ങനെയെങ്കിൽ T_{n-r+2} കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി.

$$\therefore T_{n-r+2} = {}^{n}C_{n-r+1}\, x^{r-1} a^{n-r+1}$$

ഉദാഹരണം : 22

$\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ *'x'* ഉൾപ്പെടാത്ത പദം ഏതാണ്.

പരിഹാരം

പൊതുപദം $T_{r-1} = {}^{n}Cr\ a^{n-r}\ b^{r}$

ഇവിടെ $T_{r+1} = {}^{18}C_r \left(\sqrt[3]{x}\right)^{18-r} \left(\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{r}$

$$= {}^{18}C_r\, x^{\frac{18-r}{3}} . \frac{1}{2^r . x^{\frac{r}{3}}}$$

$$= {}^{18}C_r \frac{1}{2^r} . x^{\frac{18-2r}{3}}$$

ഈ വിപുലീകരണത്തിൽ *'x'* ഉൾപ്പെടാതെ വരണമെങ്കിൽ $\frac{18-2r}{3} = 0$ ആകണം

അതായത്, $r = 9$ ആകണം

എങ്കിൽ ഈ വിപുലീകരണത്തിൽ x ഉൾപ്പെടാത്ത പദം $= \dfrac{{}^{18}C_9}{2^9}$

ഉദാഹരണം : 23

$\left(x - \dfrac{3}{x^2}\right)^{m}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നുപദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങളുടെ തുക 559 ആയാൽ x^3 ഉൾപ്പെടുന്ന പദം ഏതാണ്. (m ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ).

പരിഹാരം

$\left(x - \dfrac{3}{x^2}\right)^{m}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങൾ.

${}^{m}C_0, {}^{m}C_1 \times (-3),\ {}^{m}C_2 \times (-3)^2$ ഇവയാണ്.

$$\text{അതുകൊണ്ട്,}\quad {}^{m}C_0 - 3\,{}^{m}C_1 + 9\,{}^{m}C_2 = 559$$

അതായത്, $1 - 3m + \dfrac{9m\,(m-1)}{2} = 559$

$$2 - 6m + 9m^2 - 9m = 1118$$

$$9m^2 - 15m - 1116 = 0 \Rightarrow 3m^2 - 5m - 372 = 0$$

ഈ ദ്വിമാന സമവാക്യം പരിഹരിച്ചാൽ $m = 12$ എന്നു കിട്ടുമല്ലോ.

$$\therefore\ T_{r+1} = {}^{12}C_r\, x^{12-r} \left(-\frac{3}{x^2}\right)^r$$

$$= {}^{12}C_r\,(-3)^r \cdot x^{12-3r}$$

ഇതിൽ x^3 ഉൾപ്പെടുത്ത പദത്തിൽ $12 - 3r = 3 \Rightarrow r = 3$

എങ്കിൽ x^3 ഉൾപ്പെടുന്ന പദം $= {}^{12}C_3\,(-3)^3\, x^3$

$$= -5940\, x^3$$

ഉദാഹരണം : 24

$(1 + x)^{34}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $(r - 5)$ -ാം പദം $(2r - 1)$ -ാം പദം.

എന്നിവയിലെ ഗുണകങ്ങൾ തുല്യമായാൽ 'r' ന്റെ വില കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$(1 + x)^{34}$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $(r - 5)$ -ാം പദം $(2r - 1)$ -ാം പദം ഇവയുടെ ഗുണകങ്ങൾ ${}^{34}C_{r\ \ 6}$, ${}^{34}C_{2r\ \ 2}$ ഇവയാണല്ലോ.

${}^{34}C_{r\ \ 6} = {}^{34}C_{2r\ \ 2}$

അതുകൊണ്ട്, $r - 6 = 2r - 2$ $\qquad nC_a - nC_b \Rightarrow n - a + b \text{ or } a - b$

അല്ലെങ്കിൽ

$2r - 2 + r - 6 = 34$

അതുകൊണ്ട്, $r = -4$ അല്ലെങ്കിൽ $r = 14$

$r = -4$ സാധ്യമാവുകയില്ലല്ലോ. (എന്തുകൊണ്ട്?)

$r = 14$ എന്നു കിട്ടും.

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. $(a + b)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ 729, 7290, 30375 ഇവ ആയാൽ a, b, n എന്നിവ കണ്ടെത്തുക.
2. $(3 + ax)^9$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ x^2, x^3 എന്നിവയുടെ ഗുണകങ്ങൾ തുല്യമായാൽ a യുടെ വില എന്ത്?

3. $(1 + 2x)^6 (1 - x)^7$ ഗുണനഫലത്തിൽ x^5 ന്റെ ഗുണകം എത്ര?

4. a, b ഇവ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത പൂർണസംഖ്യകൾ ആയാൽ $a^n - b^n$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ് $a - b$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

   (സൂചന : $a^n = (a - b + b)^n$ എന്ന് പരിഗണിച്ച് വിപുലീകരിക്കുക)

5. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6 - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^6$ ന്റെ വില എന്ത്?

6. $\left(a^2+\sqrt{a^2-1}\right)^4 + \left(a^2-\sqrt{a^2-1}\right)^4$ ന്റെ വില എന്ത്?

7. $(0.99)^5$ ന്റെ ഏകദേശ വിലയെത്ര?

   (സൂചന : $(0.99)^5 = (1 - 0.01)^5$ ന്റെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ എടുത്താൽ മതിയാകും.)

8. $\left(\sqrt[4]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ തുടക്കത്തിൽ നിന്നുള്ള 5–ാം പദവും, അവസാനത്തു നിന്ന് 5–ാം പദവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $\sqrt{6}:1$ ആയാൽ 'n' എത്രയാണ്?

9. ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $\left(1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}\right)^4, x \neq 0$ വിപുലീകരിക്കുക.

10. $(3x^2 - 2ax + 3a^2)^3$ നെ ദ്വിപദസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് വിപുലീകരിക്കുക.

സംഗ്രഹം

- 'n' ഒരു പൂർണഅധിസംഖ്യ ആയാൽ

  $(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n\ \ 1} b + {}^nC_2 a^{n\ \ 2} b^2 + \ldots + {}^nC_{n\ \ 1} a.b^{n\ \ 1} + {}^nC_n b^n.$
- വിപുലീകരണത്തിലെ വാചകത്തിലെ ഗുണകങ്ങളെ ഒരു ശ്രേണിയായി ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നതാണ് പാസ്ക്കൽ ത്രികോണം .
- $(a + b)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ പൊതുപദം

  $T_{r-1} = {}^nC_r a^{n-r} b^r$
- $(a - b)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ പൊതുപദം.

$$T_{r+1} = (-1)^r \, {}^nC_r a^{n-r} b^r$$

- $(a+b)^n$ ൽ 'n' ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ ആയാൽ വിപുലീകരണത്തിലെ മധ്യപദം $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ -ാം പദമാണ്.
- $(a+b)^n$ ൽ 'n' ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ ആയാൽ വിപുലീകരണത്തിലെ മധ്യപദങ്ങൾ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-ാം പദം, $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$-ാം പദം എന്നിവ ആയിരിക്കും.

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

$(x+y)^n$, $0 \le n \le 7$ വരെയുള്ള വിപുലീകരണത്തിന്റെ ഗുണകങ്ങളെ പ്രാചീന ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ പിംഗളൻ തന്റെ ഛന്ദശാസ്ത്ര (200 ബി.സി) മേരു-പ്രസ്ഥാരം എന്ന പുസ്തകത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. മേരു-പ്രസ്ഥാരം എന്നാണ് ഈ ത്രികോണസംഖ്യാരൂപത്തിനുള്ള പേര്. 1303 ൽ ചൈനീസ് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന ചു-ഷി-കി ഈ ത്രികോണസംഖ്യകളെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്. ജർമൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന മിഖായേൽ സ്റ്റിപ്പൽ (1486 - 1567) ആണ്, ഏകദേശം 1544 ൽ ഈ സംഖ്യകൾക്ക് ദ്വിപദഗുണകം എന്ന പേര് ആദ്യം നൽകിയത്. 1572 ൽ ബോംബെല്ലി $(a+b)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $n = 1, 2, \ldots, 7$ വരെയുള്ള ഗുണകങ്ങളും 1631-ൽ ഓട്രിഡ് $n = 1, 2, \ldots, 10$ വരെയുള്ള ഗുണകങ്ങളും കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്. ബ്ലേസ് പാസ്ക്കൽ (1623-1662) എന്ന ഫ്രഞ്ച് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനാണ് പിംഗളന്റെ 'മേരുപ്രസ്ഥാരം' ത്തിന്റെ മാതൃകയിൽ തയാറാക്കിയിരുന്ന ഈ ത്രികോണരൂപം പാസ്ക്കൽ ത്രികോണം എന്ന പേരിൽ നിർമിച്ചതും ജനകീയമാക്കിയതും.

പാസ്ക്കൽ എഴുതിയ *Trate du triange arithmetic* എന്ന പുസ്തകത്തിൽ 'n' ഒരു പൂർണസംഖ്യയാവുമ്പോൾ ഉള്ള ദ്വിപദസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ഇന്നത്തെ രൂപം കാണപ്പെടുന്നതും അത് അദ്ദേഹത്തിന്റെ മരണാനന്തരം 1665 ൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ചതും ചരിത്രം. $(a+b)^n$ ൽ സർ. ഐസക് ന്യൂട്ടൻ പ്രസരാവിക്കുകയും 1736 ൽ ജോൺ കോൾസൺ (1680 - 1760) എന്ന ഇംഗ്ലീഷ് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ ഈ സിദ്ധാന്തത്തിന് ഒരു തെളിവ് (proof) നൽകുകയുമുണ്ടായി.

M2Y4Z5

അധ്യായം **9**

ശ്രേണിയും അനുക്രമവും (SEQUENCES AND SERIES)

❖ *മനുഷ്യന്റെ ചിന്തയുടെ ഫലമാണ് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ – ഡെഡെകിൻഡ്* ❖

9.1 ആമുഖം

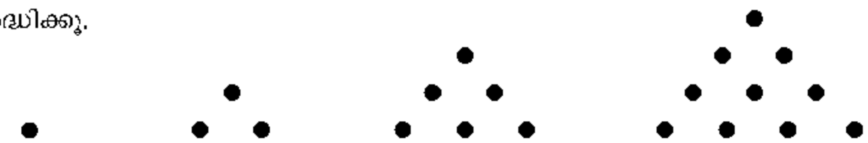
ഫിബോനാച്ചി
(1175-1250)

ശ്രേണികൾ (sequences) അനുക്രമങ്ങൾ (series) എന്നിവയെക്കുറിച്ചുള്ള കുറേ വസ്തുതകൾ നിങ്ങൾ മുൻ ക്ലാസുകളിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്? ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം, ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളിലെ വിവിധ ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം, ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളിലെ വിവിധ അനുശ്രേണികൾ, എന്നിവയെക്കുറിച്ച് പത്താം തരത്തിൽ വിശദമായി ചർച്ച ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. നിയതമായി എഴുതിയിട്ടുള്ള അനുക്രമങ്ങളെ പ്രോഗ്രഷനുകൾ എന്ന് പറയുന്നു.

സമാന്തരശ്രേണികളെക്കുറിച്ച് മുമ്പ് പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. സമാന്തരമാധ്യം (AM), സമഗുണിതശ്രേണി, ജ്യാമിതീയ മാധ്യം (GM) ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, തുടർച്ചയായ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക, തുടർച്ചയായ സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക, n എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ഘനസംഖ്യകളുടെ തുക എന്നിവയാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം പഠിക്കുന്നത്.

9.2 ശ്രേണികൾ

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പൊട്ടുകൾ ഉപയോഗിച്ചു നിർമിച്ചിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കൂ.



ഓരോ ചിത്രവും നിർമിക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച പൊട്ടുകളുടെ എണ്ണം 1, 3, 6, 10 എന്നിങ്ങനെയാണ്. എങ്കിൽ തുടർന്നുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ നിർമിക്കാൻ ആവശ്യമായ പൊട്ടുകളുടെ എണ്ണം 15, 21, 28.... എന്നിങ്ങനെയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ഈ സംഖ്യകൾ

1, 3, 6, 10, 15, ... എന്ന ശ്രേണി രൂപീകരിക്കുന്നു.

ഈ ശ്രേണിയുടെ ഒന്നാം പദം, $a_1 = 1$

രണ്ടാം പദം, $a_2 = 1 + 2 = 3$

മൂന്നാം പദം, $a_3 = a_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$

എങ്കിൽ ഈ ശ്രേണിയുടെ n -ാം പദം

$a_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ എന്ന് ബീജഗണിത രൂപത്തിൽ എഴുതാം.

n ന്റെ 1, 2, 3, ... തുടങ്ങിയ എണ്ണൽ സംഖ്യാവിലകൾക്കനുസരിച്ച് ശ്രേണിയിലെ $a_1, a_2, a_3, ...$ എന്നിങ്ങനെ പദങ്ങൾ കണ്ടെത്താം.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം

3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം കിട്ടുന്ന 1 നും 50 നും ഇടക്കുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി പരിഗണിക്കുക. ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ 1, 4, 7, 10, ..., 49 ആണെന്നും, ഇതിൽ ആകെ 17 പദങ്ങളാണുള്ളതെന്നും കണാം. അതായത് n ന്റെ 1, 2, 3, ..., 17 വരെയുള്ള വിലകൾക്കനുസരിച്ച് ശ്രേണിയിലെ $a_1, a_2, a_3, ..., a_{17}$ എന്നിങ്ങനെ പദങ്ങൾ കണ്ടെത്താം. കൂടാതെ n ാം പദത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം $a_n - 3n - 2$ എന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

മണ്ഡലം എണ്ണൽ സംഖ്യാഗണമോ അതിന്റെ ഉപഗണമോ ആയിവരുന്ന ഒരു ഏകദമായി ഒരു ശ്രേണിയെ പരിഗണിക്കാം. ഈ ഏകദത്തെ $a(n)$ അല്ലെങ്കിൽ a_n എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം. ഇവയെ ശ്രേണിയുടെ പദങ്ങളെന്നു വിളിക്കുന്നു. അതിനാൽ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ ഈ ഏകദത്തിന്റെ രംഗത്തിലെ അംഗങ്ങളായിരിക്കും.

3 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ 1 ശിഷ്ടം വരുന്ന 1 നും 50 നും ഇടക്കുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയിൽ ആകെ 17 പദങ്ങളാണുള്ളതെന്ന് മനസ്സിലായല്ലോ. ഇങ്ങനെ ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കൃത്യമായി പറയാൻ കഴിയുന്ന ശ്രേണിയെ പരിമിത ശ്രേണി (finite sequence) എന്നു പറയുന്നു.

3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം ലഭിക്കുന്ന എല്ലാ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെയും ശ്രേണിയെടുത്താൽ അതിലെ പദങ്ങൾ 1, 4, 7, 10, ... എന്നീ ക്രമത്തിലായിരിക്കും. ഈ അനുക്രമത്തിൽ എത്ര പദങ്ങളുണ്ടെന്ന് എണ്ണിതിട്ടപ്പെടുത്താൻ കഴിയില്ല. ഇത്തരം ശ്രേണിയെ അനന്ത ശ്രേണി (infinite sequence) എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു ശ്രേണിയുടെ n -ാം പദം എല്ലായ്പ്പോഴും 'n' മാത്രം ഉൽപ്പെടുന്ന ബീജഗണിത രൂപത്തിൽ തന്നെ എഴുതണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണത്തിന് ഫിബോനാച്ചി ശ്രേണി പരിഗണിക്കുക.

അതിലെ പദങ്ങൾ

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

എന്നിങ്ങനെയാണല്ലോ.

$$a_1 = a_2 = 1$$
$$a_3 = 2 = a_1 + a_2$$
$$a_4 = 5 = a_2 + a_3$$
$$a_5 = 5 = a_3 + a_4$$

ഇങ്ങനെ എഴുതിയാൽ ഫിബോനാച്ചി ശ്രേണിയുടെ പദങ്ങളെഴുതാനുള്ള നിയമം

$$a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, n > 2$$

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾകൂടി പരിഗണിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 1

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ മൂന്ന് പദങ്ങൾ എഴുതുക.

(i) $a_n = 2n + 5$ (ii) $a_n = \dfrac{n - 3}{4}$

പരിഹാരം

i. ഇവിടെ $a_n - 2n - 5$

$$a_1 = 2 \times 1 + 5 = 7$$
$$a_2 = 2 \times 2 + 5 = 9$$
$$a_3 = 2 \times 3 + 5 = 11$$

ആദ്യത്തെ മൂന്ന് പദങ്ങൾ 7, 9, 11 എന്നിവയാണ്

ii. ഇവിടെ $a_n = \dfrac{n-3}{4}$

$$a_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2 - 3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{3-3}{4} = 0$$

അതുകൊണ്ട് ആദ്യ മൂന്ന് പദങ്ങൾ, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0$ എന്നിവയാണ്.

ഉദാഹരണം : 2

$a_n = (n-1)(2-n)(3+n)$ എന്നു നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ശ്രേണിയുടെ 20-ാമത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$n = 20$ എന്നു കൊടുത്താൽ

$$a_{20} = (20-1)(2-20)(3+20)$$
$$= 19 \times (-18) \times (23) = -7866.$$

9.3 അനുക്രമം (Series)

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, എന്ന ശ്രേണി പരിഗണിക്കുക. $a_1 + a_2 + a_3 +, \ldots \quad a_n$ എന്ന രൂപത്തെ തന്നിരിക്കുന്ന ശ്രേണിയോടനുബന്ധിച്ചുള്ള അനുക്രമം (series) എന്നു പറയാം. അനുക്രമത്തെ ഗ്രീക്ക് അക്ഷരം $\sum$ (sigma) ഉപയോഗിച്ച് ചുരുക്കി എഴുതാം. $a_1 \quad a_2$ $+ a_3 + \ldots + a_n$ എന്ന ശ്രേണിയെ $\sum_{k=1}^{n} a_k$ എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ്.

> **കുറിപ്പ്**
>
> 1, 3, 5, 7 എന്ന ശ്രേണിയോടനുബന്ധിച്ചുള്ള അനുക്രമം $1 + 3 + 5 + 7$ ആണ്. ഈ പരിമിത അനുക്രമത്തിന്റെ തുക $1 + 3 + 5 + 7$ ന്റെ വിലയാണ്. അതായത് 16.

ഉദാഹരണം : 3

ഒരു ശ്രേണി ചുവടെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. $a_1 = 1, \; a_n = a_{n\;\;1} + 2, n \geq 2.$

ആദ്യത്തെ അഞ്ച് പദങ്ങൾ കണ്ടെത്തി അതിനോടനുബന്ധിച്ചുള്ള അനുക്രമം എഴുതുക.

പരിഹാരം

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$
$$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7$$

$$a_5 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9$$

ആദ്യത്തെ അഞ്ച് പദങ്ങൾ 1, 3, 5, 7, 9 ആണ്. ഇതിനോടനുബന്ധിച്ചുള്ള അനുക്രമം $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ ആയിരിക്കും.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.1

1 മുതൽ 6 വരെയുള്ള ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും n-ാം പദം തന്നിരിക്കുന്നു. ആദ്യത്തെ അഞ്ച് പദങ്ങളെഴുതുക.

1. $a_n = n\,(n + 2)$ **2.** $a_n - \dfrac{n}{n+1}$ **3.** $a_n - 2^n$

4. $a_n = \dfrac{2n-3}{6}$ **5.** $a_n = (-1)^{n-1}\, 5^{n+1}$ **6.** $a_n = n\dfrac{n^2+5}{4}$

7 മുതൽ 10 വരെ ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും n-ാം പദം തന്നിരിക്കുന്നു. സൂചിപ്പിച്ചി രിക്കുന്ന പദങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. $a_n = 4n - 3;\ a_{17},\ a_{24}$ **8.** $a_n - \dfrac{n^2}{2^n};a_7$

9. $a_n = (-1)^{n-1}n^3;\ a_9$ **10.** $a_n = \dfrac{n(n-2)}{n+3};a_{20}$.

11 മുതൽ 13 വരെയുള്ള ഓരോ ചോദ്യങ്ങളിൽ ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങളും അതിനോടനുബന്ധിച്ചുള്ള അനുക്രമവും എഴുതുക.

11. $a_1 = 3,\ a_n = 3a_{n-1} + 2,\ \ n > 1$ **12.** $a_1 = -1,\ a_n - \dfrac{a_{n-1}}{n},\ n \geq 2$

13. $a_1 = a_2 - 2,\ a_n - a_{n-1} - 1,\ n > 2$

14. $a_1 = a_2 = 1$ ഉം, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n > 2$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഫിബോനാച്ചി ശ്രേണിയിൽ, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ എന്നീ വിലകൾക്ക് $\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

9.4 സമാന്തര ശ്രേണി (Arithmetic Progression)

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\ldots\ldots$ എന്ന ശ്രേണി ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയാകണമെങ്കിൽ $a_{n-1} = a_n + d, n \in \mathbf{N}$, ഇവിടെ a_1 നെ ഒന്നാം പദം എന്നും d എന്ന സറിരസംഖ്യയെ പൊതുവ്യത്യാസമെന്നും പറയുന്നു. ഒന്നാം പദം a യും പൊതുവ്യത്യാസം d യുമായ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ പൊതുരൂപം $a, a+d, a+2d, \ldots$ എന്നാണ്. ഇതിന്റെ n-ാം പദത്തിന്റെ പൊതുരൂപം $a_n = a + (n-1)\,d$ ആണ്.

- ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a+l\right]$$

a – ഒന്നാം പദം, l – അവസാനപദം

ഉദാഹരണം : 4

ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ m-ാമത്തെ പദം n, n-ാമത്തെ പദം m ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ p-ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$a_m = n$

$a_n = m$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു

എങ്കിൽ $a_m - a_n = (m-n)\,d$ ആയിരിക്കും

അതായത് $n - m = (m-n)\,d$

അതുകൊണ്ട് $d = -1$ എന്നു ലഭിക്കും.

p- ാം പദം ലഭിക്കാൻ a_m ന്റെ കൂടെ $(p-m)\,d$ കൂട്ടിയാൽ മതിയല്ലോ.

$$\begin{aligned} a_p &= n + (p-m) \times -1 \\ &= n - p + m \\ &= m + n - p \end{aligned}$$ എന്നു ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം : 5

ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q$

ആണെങ്കിൽ പൊതുവ്യത്യാസം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇവിടെ P, Q എന്നിവ സ്ഥിരസംഖ്യകളാണ്.

പരിഹാരം

$$S_n = nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q \text{ എന്നു തന്നിരിക്കുന്നു.}$$

എങ്കിൽ $S_1 = P + \frac{1}{2} \times 0 = P$

അതായത് $a_1 = P$ എന്നു ലഭിക്കും

ഇതുപോലെ ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക

$$S_2 = 2 \times P + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times Q$$

അതായത് $a_1 + a_2 = 2P + Q$

$$\therefore \; a_2 = 2P + Q - P$$
$$= P + Q$$

പൊതുവ്യത്യാസം $d = a_2 - a_1 = P + Q - P = Q$

ഉദാഹരണം : 6

രണ്ടു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $(3n + 8) : (7n + 15)$ ആണെങ്കിൽ അവയുടെ 12-ാമത്തെ പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

a_1, a_2 എന്നത് ഈ ശ്രേണിയിലെ യഥാക്രമം ഒന്നാമത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും പദങ്ങൾ എന്നും d_1, d_2 എന്നിവ യഥാക്രമം അവയുടെ പൊതുവ്യത്യാസവും എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഒന്നാമത്തെ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d_1)$$

രണ്ടാമത്തെ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{n}{2}(2a_2 + (n-1)d_2)$$

$$\frac{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2 + (n-1)d_2]} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

$$\text{അതായത്}\quad \frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2}=\frac{3n+8}{7n+15}\quad \text{---------------(1)}$$

$n = 23$ എന്നു കൊടുത്താൽ

$$\frac{2a_1+22d_1}{2a_2+22d_2}=\frac{3\times 23+8}{7\times 23+15}$$

$$\text{അതായത്}\quad \frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}=\frac{77}{176}=\frac{7}{16}$$

അംശബന്ധം 7 : 16 എന്നു ലഭിക്കുന്നു

$$\therefore \frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}=\frac{\text{ആദ്യ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ 12-ാം പദം}}{\text{രണ്ടാമത്തെ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ 12-ാം പദം}}=\frac{7}{16}$$

ഉദാഹരണം : 7

ഒരാളുടെ ആദ്യവർഷത്തെ വരുമാനം 3,00,000 രൂപയാണ്. ഓരോ വർഷവും 10000 രൂപയുടെ വർദ്ധനവ് അടുത്ത 19 വർഷത്തേക്ക് ലഭിക്കുമെങ്കിൽ അയാൾക്ക് 20 വർഷങ്ങളിലായി ലഭിക്കുന്ന ആകെ തുക എത്രയാണ്?

പരിഹാരം

ഓരോ വർഷവും അയാൾക്ക് ലഭിക്കുന്ന വരുമാനം ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയാണ്.
ഒന്നാം പദം $a = 3{,}00{,}000$, $d = 10{,}000$, $n = 20$
20-ാം വർഷം ലഭിക്കുന്ന ആകെ തുക.
ആദ്യത്തെ ഇരുപത് പദങ്ങളുടെ തുകയായിരിക്കും.

$$S_{20}=\frac{20}{2}[600000+19\times 10000]=10\,(790000)=79{,}00{,}000$$

അതായത്, 20-ാം വർഷാവസനം അയാൾക്ക് ലഭിക്കുന്ന തുക = 79,00,000 രൂപ

9.4.1. സമാന്തരമാധ്യം (Arithmetic Mean)

10, 20 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ A എന്ന ഏതു സംഖ്യ ഉൾപ്പെടുത്തിയാൽ 10, A, 20 ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയാകും എന്നു കണ്ടെത്താം.
10, A, 20 ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയാകണമെങ്കിൽ $A - 10 = 20 - A$ ആയിരിക്കണം
അതായത് $2A = 10 + 20$

$A = \frac{30}{2} = 15$ എന്ന് ലഭിക്കും

15 നെ 10, 20 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ സമാന്തരമാധ്യം എന്നു പറയാം. പൊതുവായി] dª nÂ a, A, b സംഖ്യകൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെങ്കിൽ A എന്ന സംഖ്യയെ a, b എന്നീ സംഖ്യകളുടെ സമാന്തരമാധ്യം എന്ന് പറയാം. അതുകൊണ്ട്

$$A - a = b - A, \Rightarrow A = \frac{a+b}{2} \text{ ആകും}$$

അതുകൊണ്ട്, a, b എന്നീ സംഖ്യകളുടെ സമാന്തരമാധ്യം $A = \frac{a+b}{2}$ എന്നെഴുതാം.

മറ്റൊരു പ്രശ്നം പരിഗണിച്ചാലോ? 4, 20 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ 3 സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുത്തി ഒരു സമാന്തരശ്രേണി രൂപീകരിക്കണം, എന്നാൽ സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെ?

ശ്രേണി $4, A_1, A_2, A_3, 20$ എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ 4 ഈ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദവും 20 അതിന്റെ 5-ാം പദവുമായിരിക്കണം.

അതുകൊണ്ട് $20 - 4 = 4d$

$16 = 4d$

$\therefore d = 4$ എന്ന് ലഭിക്കും.

നമുക്കാവശ്യമായ മൂന്ന് പദങ്ങൾ 8, 12, 16 എന്നിവയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ഈ മൂന്നു സംഖ്യകളെ 4, 20 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള സമാന്തരമാധ്യങ്ങൾ എന്നു പറയാം. പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ a, b എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ n സമാന്തരമാധ്യങ്ങൾ കാണണമെന്നു കരുതുക. സമാന്തരമാധ്യങ്ങൾ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ എന്നിരിക്കട്ടെ, എങ്കിൽ $a, A_1, A_2, \ldots, A_n b$ എന്നിവ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയായിരിക്കും. പൊതു വ്യത്യാസം അറിഞ്ഞാൽ പദങ്ങൾ കണ്ടെത്താം. a ശ്രേണിയുടെ ഒന്നാം പദവും b എന്നത് $(n + 2)$-ാം പദം ആയിരിക്കുമല്ലോ.

അതുകൊണ്ട് $b - a = (n + 1)d$

$$d = \frac{b-a}{n+1} \text{ എന്നു ലഭിക്കും}$$

സമാന്തര മാധ്യങ്ങൾ

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

....
....

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}.$$

എന്നിങ്ങനെ ലഭിക്കും

ഉദാഹരണം : 8

3, 24 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ 6 സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുത്തി ഒരു സമാന്തര ശ്രേണി രൂപീകരിക്കുക.

പരിഹാരം

സംഖ്യകൾ $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ $3, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, 24$ എന്നിവ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയായിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് $24 - 3 = 7d$,

$21 = 7d$

അതായത്, $d = 3$ ആയിരിക്കും.

സംഖ്യകൾ 6, 9, 12, 15, 18, 21 എന്നിവയായിരിക്കും.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.2

1. 1, 2001 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെയും തുക കാണുക.
2. 100, 1000 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള 5 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ എല്ലാ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെയും തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.
3. ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിൽ ആദ്യപദം 2, ആദ്യത്തെ അഞ്ച് പദങ്ങളുടെ തുക അടുത്ത അഞ്ച് പദങ്ങളുടെ തുകയുടെ നാലിലൊന്നുമായാൽ 20-ാമത്തെ പദം –112 ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
4. $-6, -\frac{11}{2}, -5, \ldots$ എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ എത്ര പദങ്ങളുടെ തുകയാണ് –25?

5. p -ാംപദം $\frac{1}{q}$, q -ാംപദം $\frac{1}{p}$ യും ആണെങ്കിൽ, ആദ്യത്തെ pq പദങ്ങളുടെ തുക $\frac{1}{2}(pq+1)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക. ഇവിടെ $p \neq q$ ആകുന്നു.

6. 25, 22, 19, ... എന്ന സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ കുറച്ചു പദങ്ങളുടെ തുക 116 ആണെങ്കിൽ അവസാന പദമേത്?

7. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ k -ാമത്തെ പദം $5k + 1$ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $(pn + qn^2)$ ആയാൽ പൊതുവ്യത്യാസം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇവിടെ p, q എന്നിവ സ്ഥിരസംഖ്യക ളാണ്.

9. രണ്ടു സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $(5n + 4) : (9n + 6)$ എങ്കിൽ അവയുടെ 18-ാമത്തെ പദങ്ങൾ തമ്മി ലുള്ള അംശബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

10. ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ p പദങ്ങളുടെ തുകയും, ആദ്യത്തെ q പദങ്ങളും തുല്യമാണെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ $(p + q)$ പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടി ക്കുക.

11. ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ p, q, r എന്നീ പദങ്ങളുടെ തുക യഥാ ക്രമം a, b, c എന്നിവയാണെങ്കിൽ. $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

12. ആദ്യത്തെ m, n പദങ്ങളുടെ തുകകളുടെ അംശബന്ധം $m^2 : n^2$ ആണെങ്കിൽ m-ാം പദവും, n -ാം പദവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $(2m - 1) : (2n - 1)$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

13. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ n പദങ്ങളുടെ തുക $3n^2 + 5n$, m-ാം പദം 164 ആണെങ്കിൽ, m ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

14. 8, 26 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ അഞ്ച് സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുത്തി ഒരു സമാ ന്തരശ്രേണി രൂപീകരിക്കുക.

15. a, b എന്നീ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള സമാന്തരമാധ്യം $\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$ ആണെ ങ്കിൽ, n ന്റെ വില കണ്ടെത്തുക.

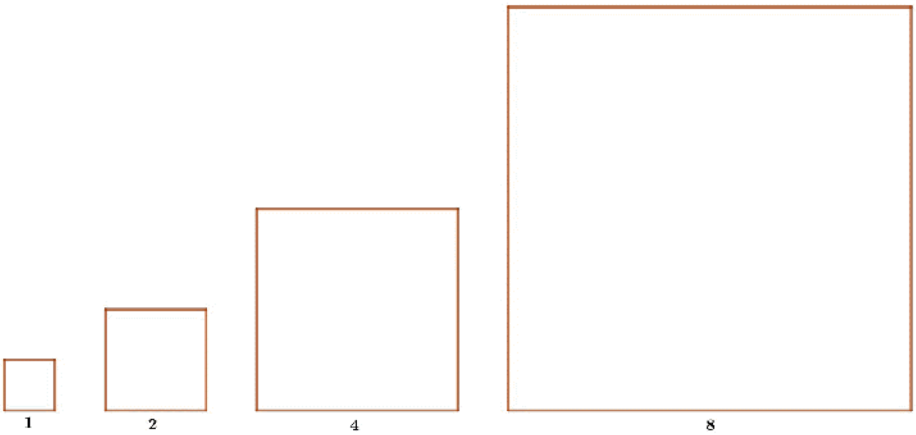
16. 1, 31 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ m സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുത്തി ഒരു സമാന്തര ശ്രേണി രൂപീകരിക്കുന്നു. 7 -ാമത്തെയും $(m - 1)$ -ാമത്തെയും പദങ്ങൾ തമ്മി ലുള്ള അംശബന്ധം 5 : 9 എങ്കിൽ m ന്റെ വില കാണുക.

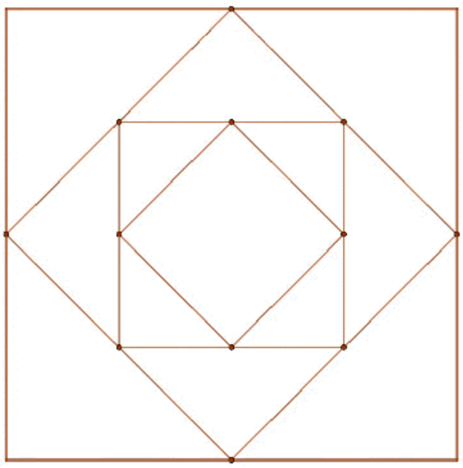
17. ഒരാൾ തന്റെ വായ്പാതിരിച്ചടവ് ഒന്നാമത്തെ ഗഡുവായി Rs. 100 അടച്ച് തുടങ്ങുന്നു. തുടർന്ന് വരുന്ന ഓരോ മാസവും 5 രൂപാവീതം വായ്പാതിരിച്ചടവിൽ വർദ്ധനവ് വരുത്തുന്നു എങ്കിൽ 30–ാമത്തെ ഗഡുവായി അടക്കുന്ന തുക എത്രയാണ്.

18. ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ കോൺ $120°$ യും അടുത്തടുത്ത ഏത് രണ്ട് കോണുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം $5°$ യുമാണെങ്കിൽ ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

9.5 സമഗുണിത ശ്രേണി (Geometric Progression)

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമചതുരങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കൂ.





വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളുടെ ശ്രേണി 1, 2, 4, 8, ...

പരപ്പളവിന്റെയും ചുറ്റളവിന്റെയും ശ്രേണികൾ യഥാക്രമം 1, 4, 16, 64, ... 4, 8, 16, 32, ... എന്നിവയായിരിക്കും.

വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളുടെ ശ്രേണി 1 ൽ തുടങ്ങി 2 വീതം ഗുണിച്ച ശ്രേണിയും, പരപ്പളവുകളുടെ ശ്രേണി 1 ൽ നിന്നും തുടങ്ങി 4 വീതം ഗുണിച്ച ശ്രേണിയും കൂടാതെ ചുറ്റളവുകളുടെ ശ്രേണി 4 ൽ തുടങ്ങി 2 വീതം ഗുണിച്ച് കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയാണെന്നും മനസ്സിലാക്കാം. ഇത്തരം ശ്രേണികളെ പൊതുവായി സമ

ഗുണിത ശ്രേണികൾ (Geometric Progression) എന്നു പറയാം. മറ്റൊരുദാഹരണം പരിഗണിക്കാം.

ആദ്യം വശത്തിന്റെ നീളം 1 യൂണിറ്റായ ഒരു സമചതുരം പരിഗണിക്കുക. അതിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാണ് രണ്ടാമത്തെ സമചതുരം നിർമിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇങ്ങനെ തുടർന്നു പോയാൽ ആദ്യത്തെ അഞ്ച് സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവിന്റെ ശ്രേണി കണ്ടെത്താം.

ഇവിടെ വശങ്ങൾ $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}$ എന്നിങ്ങനെയാണ്. എങ്കിൽ പരപ്പളവുകളുടെ ശ്രേണി $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ ആയിരിക്കും

ഈ ശ്രേണി അഞ്ച് പദങ്ങളുള്ള ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണ്. 1 ൽ തുടങ്ങി $\frac{1}{2}$ വീതം ഗുണിച്ചാണ് ഈ ശ്രേണി കിട്ടുന്നത്. $\frac{1}{2}$ നെ നമുക്ക് പൊതുഗുണിതം (common ratio) എന്നു വിളിക്കാം എങ്കിൽ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളുടെ ശ്രേണി ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണോ, എങ്കിൽ അതിന്റെ പൊതുഗുണിതം എത്ര?

സമചതുരത്തിന്റെ നിർമിതി തുടർന്നുകൊണ്ടേയിരുന്നാൽ പരപ്പളവിന്റെ ശ്രേണി $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8},$ .... എന്ന അനന്തമായ സമഗുണിത ശ്രേണിയാണെന്ന് കാണാം.

ഒന്നാം പദം -5, പൊതുഗുണിതം -2, ആയ സമഗുണിത ശ്രേണി

$-5, 10, -20, 40$....... ആയിരിക്കും എന്നു കാണാം.

സമഗുണിത ശ്രേണിയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു പദം പൂജ്യമാകുവാൻ കഴിയുമോ?

ഒരു പദം പൂജ്യമായാൽ ആ പദത്തിനുശേഷം വരുന്ന എല്ലാ പദങ്ങളും അതിനു മുൻപുള്ള എല്ലാ പദങ്ങളും പൂജ്യമായി മാറും, അപ്പോൾ ശ്രേണി.

0, 0, 0 .... എന്നിങ്ങനെയായിരിക്കും എങ്കിൽ ഇതിന്റെ പൊതുഗുണിതം ഏതായിരിക്കും. ഏതു സംഖ്യവേണമെങ്കിലും ആകാം. അതുകൊണ്ട് ഈ ശ്രേണിയുടെ പൊതുഗുണിതം കൃത്യമായി നിർവചിക്കാൻ കഴിയില്ല.

ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ എല്ലാ പദങ്ങളും പൂജ്യമല്ലാത്ത പദങ്ങളായിരിക്കണം എന്നു മനസ്സിലാക്കാം. പൊതുഗുണിതം 1 ആയാലോ? a ഒന്നാം പദമാണെങ്കിൽ അനുക്രമം, $a, a, a,$ ...... എന്നിങ്ങനെയായിരിക്കും. അപ്പോൾ പൊതുഗുണിതം 1 ആയാൽ ശ്രേണിയിലെ എല്ലാ പദങ്ങളും തുല്യമായിരിക്കും എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

ഇത്തരം ശ്രേണികൾ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയായിരിക്കുമോ? പൊതുവായി ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയെ താഴെ പറയും പ്രകാരം നിർവചിക്കാം.

പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സംഖ്യയിൽ നിന്നു തുടങ്ങി പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സംഖ്യകൊണ്ട് വീണ്ടും, വീണ്ടും ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയെ സമഗുണിത ശ്രേണി എന്നു പറയാം.

ഈ പ്രസ്താവനയെ മറ്റൊരു രീതിയിലും വിവരിക്കാം. ഏതുപദത്തെയും തൊട്ടു പുറകിലുള്ള പദം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയാണ് സമഗുണിത ശ്രേണി. അതായത്,

എല്ലാ പദങ്ങളും പൂജ്യമല്ലാത്ത

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\, a_n, \ldots..$ എന്ന ശ്രേണി ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാകണമെങ്കിൽ

$k \geq 1$ ആകുമ്പോൾ $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (സ്ഥിരസംഖ്യ) ആയിരിക്കണം.

9.5.1. സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ പൊതുപദം

a, r എന്നിവ യഥാക്രമം ഒന്നാം പദവും, പൊതുഗുണിതവുമായ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയെ

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots.$ എന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം. എങ്കിൽ ഈ ശ്രേണിയുടെ n-ാം പദം

$a_n = ar^{n-1}$ ആണ്.

സമഗുണിത ശ്രേണിയിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം പരിഗണിക്കുക.

ഉദാഹരണത്തിന് $\dfrac{a_5}{a_3} = \dfrac{ar^4}{ar^2} = r^2$; $\dfrac{a_{10}}{a_7} = \dfrac{ar^9}{ar^6} = r^3$ എന്നിങ്ങനെ ലഭിക്കും പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ

$$\frac{a_m}{a_n} = r^{m-n} \text{ ആയിരിക്കും}$$

9.5.2 സമഗുണിത ശ്രേണിയിലെ n പദങ്ങളുടെ തുക

a, r എന്നിവ യഥാക്രമം ഒന്നാം പദവും പൊതുഗുണിതവുമായിവരുന്ന ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ (Geometric progression) ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക S_n എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \quad \ldots (1)$$

$r = 1$, ആയാൽ $S_n = a + a + a + \ldots + a = na$ എന്ന് ലഭിക്കും.

$r \neq 1$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

സമവാക്യം (1) നെ r കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n \quad \ldots (2)$$

(2) ൽ നിന്നും (1) കുറച്ചാൽ

$(r - 1)\, S_n = ar^n - a$

$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ അല്ലെങ്കിൽ $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ എന്നും എഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 9

5, 25, 125, … . എന്ന സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ 10–ാം പദവും, n –ാം പദവും കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $a = 5$, $r = 5$

$a_{10} = ar^9 = 5 \times 5^9 = 5^{10}$

$a_n = ar^{n-1} = 5 \times 5^{n-1} = 5^n$

ഉദാഹരണം : 10

2, 8, 32, ... എന്ന സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ എത്രാമത്തെ പദമാണ് 131072?

പരിഹാരം

ഇവിടെ $a = 2$, $r = 4$

131072 എന്നത് n ാം പദമായെടുക്കാം.

$$a_n = 131072$$

$$131072 = ar^{n-1}$$

$$131072 = 2 \times 4^{n-1}$$

$$65536 = 4^{n-1}$$

അതായത് $4^8 = 4^{n-1}$.

$$n - 1 = 8, \; n = 9$$

അതുകൊണ്ട് 9 –ാമത്തെ പദം 131072

ഉദാഹരണം : 11

ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ മൂന്നാം പദം 24, 6–ാം പദം, 192 ആയാൽ 10–ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$a_3 = 24 \Rightarrow ar^2 = 24 \text{ ------(1)}$$
$$a_6 = 192 \Rightarrow ar^5 = 192 \text{ -----(2)}$$
$$\frac{a_6}{a_3} = \frac{192}{24}$$

അതുകൊണ്ട് $r^3 = 8$

$$r^3 = 8$$

$\therefore$ r = 2 എന്നു ലഭിക്കും

സമവാക്യം (1) ൽ നിന്ന് $a \times 2^2 = 24$

അതിനാൽ $a = 6$ എന്നും ലഭിക്കും

അതുകൊണ്ട് $a_{10} = ar^9 = 6 \times 2^9 = 3072$

ഉദാഹരണം : 12

$1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots$ എന്ന സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെയും ആദ്യത്തെ 5 പദങ്ങളുടെയും തുകകൾ കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $a = 1, r = \frac{2}{3}$

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} = \frac{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

അതുകൊണ്ട് $S_5 = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right] = 3\times\frac{211}{243} = \frac{211}{81}$

ഉദാഹരണം : 13

$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ എന്ന സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ എത്ര പദങ്ങളുടെ തുകയാണ് $\frac{3069}{512}$?

പരിഹാരം

ഇവിടെ $a = 3,\ r = \frac{1}{2}$

n പദങ്ങളുടെ തുകയാണ് $\frac{3069}{512}$ എന്നെടുക്കാം.

$$S_n = \frac{3069}{512}$$

$$\frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{3069}{512}$$

$$\frac{3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3069}{512}$$

$$6\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{3069}{512}$$

$$1 - \frac{1}{2^n} = \frac{3069}{3072}$$

$$\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{3069}{3072} = \frac{3}{3072} = \frac{1}{1024}$$

$$2^n = 1024 = 2^{10}$$

അതുകൊണ്ട്, $n = 10$

ഉദാഹരണം : 14

ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക $\frac{13}{12}$. അവയുടെ ഗുണനഫലം -1 ആയാൽ പൊതുഗുണിതവും പദങ്ങളും കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

പദങ്ങൾ $\frac{a}{r}, a, ar$ എന്നിരിക്കട്ടെ

എങ്കിൽ $\frac{a}{r} + ar + a = \frac{13}{12}$ ... (1)

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = -1 \quad \text{... (2)}$$

അതായത് $a^3 = -1$, $a = -1$ ഈ വില സമവാക്യം (1) ൽ കൊടുത്താൽ

$$\frac{1}{r} \quad 1 \quad r = \frac{13}{12}$$

അല്ലെങ്കിൽ $12r^2 + 25r + 12 = 0$ എന്നു ലഭിക്കും ഇതിന്റെ പരിഹാരം കണ്ടാൽ

$r = \frac{3}{4}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{4}{3}$

$r = -\frac{3}{4}$ ആയാൽ പദങ്ങൾ $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$

$r = \frac{-4}{3}$ ആയാൽ പദങ്ങൾ $\frac{3}{4}$, 1, $\frac{4}{3}$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 15

7, 77, 777, 7777, ... എന്ന ശ്രേണിയുടെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന ശ്രേണി ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണി അല്ലെന്നു മനസ്സിലാക്കാം, സമഗുണിത ശ്രേണിയുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തി തുക എങ്ങനെ കാണാമെന്ന് നോക്കാം.

$$S_n = 7 + 77 + 777 + 7777 + \ldots n \text{ പദങ്ങൾ വരെ}$$

$$= \frac{7}{9}[9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots n \text{ പദങ്ങൾ വരെ}]$$

$$= \frac{7}{9}[(10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + (10^4-1) + \ldots n \text{ പദങ്ങൾ വരെ}]$$

$$= \frac{7}{9}[(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots n \text{ പദങ്ങൾ വരെ} - n]$$

$$= \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{10-1} - n\right] = \frac{7}{9}\left[\frac{10\,(10^n-1)}{9} - n\right]$$

ഉദാഹരണം : 16

ഒരാൾക്ക് രക്ഷിതാക്കൾ 2, മുൻതലമുറയിൽ 4, അതിനും മുൻതലമുറയിൽ 8 എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്നു. അയാൾക്ക് മുൻപുള്ള 10 തലമുറയിൽപെട്ട ആകെ അംഗങ്ങൾ എത്ര?

പരിഹാരം

ഇവിടെ $a = 2, r = 2, n = 10$ ആകുന്നു.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

10 തലമുറയിൽപ്പെട്ട ആകെ അംഗങ്ങൾ

$$S_{10} = 2(2^{10} - 1) = 2046$$

9.3.4 സമഗുണിതമാധ്യം (Geometric Mean)

സമാന്തരമാധ്യവും സമാന്തരമാധ്യങ്ങളും നിങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കിയല്ലോ? അതുപോലെ സമഗുണിത മാധ്യമെന്താണെന്നു നോക്കാം.

4, 16 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ G എന്ന അധിസംഖ്യ ഉൾപ്പെടുത്തിയാൽ 4, G, 16 ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാകുമോ എന്നു കണ്ടെത്താം.

4, G, 16 എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണെങ്കിൽ $\frac{G}{4} = \frac{16}{G}$ ആയിരിക്കും.

അതായത് $G^2 = 64$

$G = 8$ എന്ന് ലഭിക്കും

8 നെ നമുക്ക് 4, 16 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ സമഗുണിതമാധ്യം (Geometric Mean) എന്നു പറയാം അതായത് a, b എന്നിവ രണ്ടു അധിസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ അവയുടെ സമഗുണിത മാധ്യം $G = \sqrt{ab}$ ആയിരിക്കും.

മറ്റൊരു പ്രശ്നം പരിഗണിക്കൂ. 2, 64 എന്നീ പോസിറ്റീവ് സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ നാല് അധിസംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുത്തി നമുക്കൊരു സമഗുണിതശ്രേണി രൂപീകരിക്കണം. എങ്കിൽ സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെ?

ശ്രേണി 2, G_1, G_2, G_3, G_4, 64 എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ ഈ ശ്രേണിയുടെ 2 ഒന്നാം പദവും 64 ആറാം പദവുമായിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് $\frac{64}{2} = r^5$ ആയിരിക്കും.

അതായത് $r = 2$ എന്നു ലഭിക്കും
സംഖ്യകൾ $G_1 = 4, G_2 = 8, G_3 = 16, G_4 = 32$ എന്നു ലഭിക്കും, ഈ സംഖ്യകളെ 2, 64 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള നാല് സമഗുണിത മാധ്യങ്ങൾ (Geometric Means) എന്നു പറയാം.
പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ a, b എന്നീ അധിസംഖ്യകൾക്കിടയിൽ n സമഗുണിതമാധ്യങ്ങൾ കാണണമെന്നു കരുതുക. സമഗുണിതമാധ്യങ്ങൾ $G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots G_n$ എന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നാൽ $a, G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n, b$ എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയായിരിക്കും. പൊതുഗുണിതം അറിഞ്ഞാൽ നമുക്ക് പദങ്ങൾ കണ്ടെത്താം. a, b എന്നിവ യഥാക്രമം ശ്രേണിയുടെ ഒന്നാം പദവും $(n+2)$ാം പദവും ആണല്ലോ. അതുകൊണ്ട്,

$\frac{b}{a} = r^{n-1}$ ആയിരിക്കും

അതായത് $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ എന്നു ലഭിക്കും

അതുകൊണ്ട് സംഖ്യകൾ, $\quad G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

$$G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$ എന്നു ലഭിക്കും

ഉദാഹരണം : 17

1, 256 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ മൂന്നു സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുത്തി ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണി രൂപീകരിക്കുക.

പരിഹാരം

G_1, G_2, G_3 എന്നീ 3 സംഖ്യകൾ 1 നും 256 നും ഇടയിലുള്ള മൂന്ന് സംഖ്യകൾ ആയാൽ, $1, G_1, G_2, G_3, 256$ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയായിരിക്കും.
അതുകൊണ്ട് $256 = r^4$ ആയിരിക്കും.
അതിനാൽ $r = \pm 4$ (രേഖീയ പരിഹാരം മാത്രം പരിഗണിച്ചിരിക്കുന്നു.)

അതുകൊണ്ട് $\frac{256}{1} = r^4$ ആയിരിക്കും

$$r = \pm 4$$

$r = -4$, ആയാൽ സംഖ്യകൾ $-4, 16, -64$ (ഈ സംഖ്യകൾ 1 നും 256 നും ഇടയിലല്ല) $r = 4$ ആകുമ്പോൾ 4, 16, 64 എന്നീ സംഖ്യകൾ 1, 256 സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ അതു കൊണ്ട് സമഗുണിതശ്രേണി 1, 4, 16, 64, 256 ആകുന്നു.

9.6 സമാന്തരമാധ്യവും സമഗുണിതമാധ്യവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

A, G എന്നിവ യഥാക്രമം a, b എന്നീ രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ സമാന്തരമാധ്യവും, സമഗുണിതമാധ്യവുമാണെന്ന് കരുതുക.

എങ്കിൽ $A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab}$ ആയിരിക്കും.

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

$$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0$$

അതായത് $A \geq G$.

> ☛ കുറിപ്പ്
>
> $a = b$ ആയാൽ $A = G$ ആയിരിക്കും

ഉദാഹരണം : 18

a, b എന്നീ അധിസംഖ്യകളുടെ സമാന്തരമാധ്യവും സമഗുണിതമാധ്യവും യഥാക്രമം 10, 8 എന്നിവയായാൽ സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$A = 10$ എന്നും $G = 8$ എന്നും തന്നിരിക്കുന്നു. അതായത്

$$\frac{a+b}{2} = 10, \quad \sqrt{ab} = 8$$

$$a + b = 20 \text{ ------- } (1)$$

$ab = 64$ ------- (2) എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾ ലഭിക്കും

$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ എന്നെഴുതാമല്ലോ

$$(a-b)^2 = 20^2 - 4 \times 64$$

$$(a-b)^2 = 144$$

$a - b = \pm 12$ ------- (3) എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

സമവാക്യം (1), (3) പരിഗണിച്ചാൽ

$a = 4, b = 16$ അല്ലെങ്കിൽ $a = 16, b = 4$ എന്ന് ലഭിക്കും.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 9.3

1. $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$ എന്ന സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ 20-ാം പദവും n-ാം പദവും കാണുക.

2. ഒരു സമഗുണിതശ്രേണിയുടെ 8-ാം പദം 192, പൊതുഗുണിതം 2, ആയാൽ ഇതിന്റെ 12-ാം പദം കാണുക

3. ഒരു സമഗുണിതശ്രേണിയുടെ 5, 8, 11 എന്നീ പദങ്ങൾ യഥാക്രമം p, q, s ആയാൽ $q^2 = ps$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. ഒരു സമഗുണിതശ്രേണിയുടെ നാലാം പദം അതിന്റെ 2-ാം പദത്തിന്റെ വർഗ മാണ്. ആദ്യപദം -3 ആയാൽ അതിന്റെ 7-ാം പദം കാണുക.

5. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ശ്രേണികളിൽ എത്രാമത്തെ പദമാണ് അവസാന ത്തേത്?

   (a) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots 128$ (b) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots 729$

   (c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots \frac{1}{19683}$

6. x ന്റെ ഏത് വിലയ്ക്ക് $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ എന്നത് ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണി ആകും.

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ശ്രേണികളിൽ ബ്രാക്കറ്റിൽ നല്കിയിട്ടുള്ള പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

7. 0.15, 0.015, 0.0015, ... (20 പദങ്ങളുടെ)

8. $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \ldots$ (n പദങ്ങളുടെ)

9. $1, -a, a^2, -a^3, \ldots$ n terms ($a \neq -1$, n പദങ്ങളുടെ)

10. $x^3, x^5, x^7, \ldots$ n terms ($x \neq \pm 1$, n പദങ്ങളുടെ)

11. വിലകാണുക $\sum_{k=1}^{11} (2+3^k)$

12. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ തുക $\frac{39}{10}$. അവയുടെ ഗുണഫലം 1 ആയാൽ പൊതുഗുണിതവും, ആദ്യപദവും കാണുക.

13. $3, 3^2, 3^3, \ldots$ എന്ന ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങളുടെ തുകയാണ് 120?

14. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ തുക 16 കൂടാതെ അടുത്ത മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ തുക 128 ആയാൽ, ആദ്യപദവും, പൊതുഗുണിതവും ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയും കാണുക.

15. ഒരു സമഗുണിതത്തിന്റെ ശ്രേണിയിൽ $a = 729$, 7-ാം പദം 64 ആയാൽ S_7 കാണുക.

16. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിൽ ആദ്യ രണ്ട് പദങ്ങളുടെ തുക -4 ആകുന്നു. കൂടാതെ അതിന്റെ 5-ാം പദം മൂന്നാം പദത്തിന്റെ നാല് മടങ്ങാണ്. GP എഴുതുക.

17. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ 4-ാം പദം, 10-ാം പദം. 16-ാം പദം ഇവ യഥാക്രമം x, y, z ആയാൽ, x, y, z ഇവയും ഒരു G.P യിലായിരിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

18. 8, 88, 888, 8888… എന്ന ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കുക.

19. 2, 4, 8, 16, 32 എന്ന ശ്രേണിയുടെയും 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ എന്ന ശ്രേണിയുടെയും സമസ്ഥാനീയ പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ തുക കാണുക.

20. $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}$ എന്ന ശ്രേണിയുടെയും $A, AR, AR^2, \ldots AR^{n-1}$ എന്ന ശ്രേണിയുടെയും സമസ്ഥാനീയ പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലങ്ങളും ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. ഇതിന്റെ പൊതുഗുണിതം എഴുതുക.

21. ചുവടെ നല്കിയിട്ടുള്ള നിബന്ധനകൾ ശരിയാകുന്ന സമഗുണിത ശ്രേണി എഴുതുക. മൂന്നാംപദം ഒന്നാം പദത്തെക്കാൾ 9 കൂടുതലാണ്. രണ്ടാംപദം 4-ാം പദത്തെക്കാൾ 18 കൂടുതലാണ്.

22. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിലെ p-ാം, q-ാം, r-ാം പദങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b, c ആണെങ്കിൽ $a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

23. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ ഒന്നാംപദം, n-ാം പദം ഇവ യഥാക്രമം a, b ആണ്, P എന്നത് ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം ആണെങ്കിൽ $P^2 = (ab)^n$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

24. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയും, $(n + 1)$ -ാം പദം മുതൽ $2n$ -ാം വരെയുള്ള പദങ്ങളുടെ തുകയും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $\frac{1}{r^n}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

25. a, b, c, d ഇവ സമഗുണിത ശ്രേണിയിൽ ആയാൽ $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

26. 3 നും 81 നും ഇടയിൽ രണ്ട് പദങ്ങൾ ചേർത്ത് ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണി രൂപീകരിക്കുക.

27. a, b യുടെ ഇടയിലുള്ള ഒരു സമഗുണിതമാധ്യം $\frac{a^{n-1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ ആയാൽ n ന്റെ വില കാണുക.

28. രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ തുക അവയുടെ സമഗുണിത മാധ്യത്തിന്റെ 6 മടങ്ങാണ് എങ്കിൽ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $\left(3+2\sqrt{2}\right):\left(3-2\sqrt{2}\right)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

29. A, G ഇവ യഥാക്രമം രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ സമാന്തരമാധ്യവും സമഗുണിത മാധ്യവുമായാൽ സംഖ്യകൾ $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

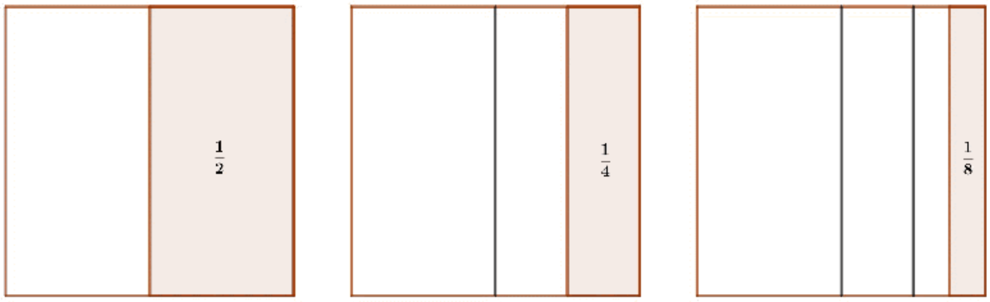
30. ഒരു പരീക്ഷണത്തിലെ ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം ഓരോ മണിക്കൂറിലും ഇരട്ടിയാകുന്നു. പരീക്ഷണാരംഭത്തിൽ 30 ബാക്ടീരിയകളാണുണ്ടായിരുന്നത്. 2-ാം മണിക്കൂർ, 4-ാം മണിക്കൂർ, n -ാം മണിക്കൂർ, ഇവയിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

31. ഒരു ബാങ്ക് നിക്ഷേപത്തിന് 10% കൂട്ടുപലിശ നൽകുന്നു. 500 രൂപ നിക്ഷേപിച്ച ഒരാൾക്ക് 10 വർഷം കഴിയുമ്പോളുള്ള തുക കാണുക.

32. ഒരു ദ്വിമാന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യവും സമഗുണിത മാധ്യവും യഥാക്രമം 8, 5 ആയാൽ സമവാക്യം കാണുക.

9.7 അനന്തസമഗുണിത അനുക്രമം (Infinite Geometric series)

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം ശ്രദ്ധിക്കൂ.



ഒരു മീറ്റർ വശമുള്ള ഒരു സമചതുരത്തെ തുല്യമായ രണ്ട് ഭാഗങ്ങളാക്കി, അതിലൊരു ഭാഗം ഷെയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തെ ഭാഗത്തെ വീണ്ടും രണ്ടു തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കി വിഭജിച്ചതിനുശേഷം അതിലൊരുഭാഗം ഷെയ്ഡു ചെയ്തിരിക്കുന്നു. ഈ പ്രക്രിയ തുടർന്നുകൊണ്ടേയിരിക്കുക. ഷെയ്ഡ് ചെയ്ത ഭാഗങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -----$ എന്ന അനന്ത സമഗുണിത ശ്രേണി രൂപീകരിക്കുന്നതുകാണാം. ഇതിനോടനുബന്ധിച്ചുള്ള ശ്രേണിയിലെ 'n' പദങ്ങളുടെ തുക.

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ----+ \frac{1}{2^n}$ ആയിരിക്കും. n ന്റെ വില കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് പരപ്പളവുകളുടെ തുക 1 മീറ്റർ നീളമുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനോടടുക്കുന്നതായി കാണാം. അതായത് $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ ഈ തുക 1 നോടടുക്കുന്നു. എന്നു പറയാം. അതായത് അനന്തസമഗുണിത അനുക്രമത്തിന്റെ തുക.

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ---- = 1$$

എന്നു പരിഗണിക്കാം. ഇത് തന്നെ മറ്റൊരു രീതിയിൽ കാണാം.

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ----+ \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1/2\left(1-\left(1/2\right)^n\right)}{1-1/2}$$

$$= 1-\left(1/2\right)^n$$

n ന്റെ വില കൂടുന്നതനുസരിച്ച് $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ന്റെ വില കുറഞ്ഞു വരുന്നതായി കാണാം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക ശ്രദ്ധിക്കൂ.

n	1	2	3	4	5	6	7
$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125	0.015625	0.0078125

അതായത് $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ ആകുന്നു എന്നു പറയാം. അപ്പോൾ അനന്ത അനുക്രമത്തിലെ പദങ്ങളുടെ തുക

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + - - - -$$

= 1 - 0 = 1 എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ പൊതുഗുണിതം $\frac{1}{2}$ നും 1 നും ഇടയിലാണല്ലോ, അതു പോലെ പൊതുഗുണിതം r, 0, 1 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കിടയിലാണെങ്കിൽ, അതായത് $0 < r < 1$, $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ $r^n \to 0$ ആയിരിക്കും എന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

പൊതുഗുണിതം $-\frac{1}{2}$ ആയാലോ? $-\frac{1}{2}$ ന്റെ കേവലവില $\frac{1}{2}$ ആയതുകൊണ്ടു തന്നെ $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ എന്നു കണ്ടെത്താം.

അതായത് $-1 < r < 0$, ആയാലും $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ $r^n \to 0$ ആയിരിക്കും. പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ പൊതുഗുണിതം 'r', $0 < |r| < 1$ ആയാൽ $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ $r^n \to 0$ ആയിരിക്കും. ഇത്തരം അവസരങ്ങളിൽ നമുക്ക് അനന്ത സമഗുണിത അനുക്രമത്തിന്റെ തുക കാണാൻ ശ്രമിക്കാം.

$a, ar^2, ar^3, \ldots$ എന്ന സമഗുണിതശ്രേണി പരിഗണിക്കുക ഇവിടെ $0 < |r| < 1$ ആണ്. സമഗുണിത അനുക്രമത്തിന്റെ 'n' പദങ്ങളുടെ തുക

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ $r^n \to 0$ ആയിരിക്കും. അപ്പോൾ $S_n \to \dfrac{a}{1-r}$ എന്നു മനസ്സിലാക്കാം.
ഈ അനന്തഅനുക്രമത്തിന്റെ തുകയെ നമുക്ക് S എന്നു സൂചിപ്പിച്ചാൽ

$$S = \frac{a}{1-r} \text{ എന്നു കിട്ടുന്നു.}$$

r ന്റെ വില $0 < |r| < 1$ അല്ലെങ്കിൽ എന്തായിരിക്കും അനന്ത സമഗുണിത അനുക്രമത്തിന്റെ തുക എന്ന് ആലോചിച്ചു നോക്കൂ.
ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിശോധിക്കൂ.

i. $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$

ii. $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.4

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ അനന്തസമഗുണിത ശ്രേണിയുടെയും പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots\ldots\ldots$
2. $6, 1.2, 2.4, \ldots\ldots\ldots$
3. $5, \frac{20}{7}, \frac{80}{49}, \ldots\ldots\ldots$
4. $\frac{-3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{-3}{64}, \ldots\ldots\ldots$
5. $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \times \ldots\ldots\ldots = 3$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
6. $x = 1 + a + a^2 + \ldots\ldots\ldots, y = 1 + b + b^2 + \ldots\ldots\ldots, |a| < 1, |b| < 1$ ഉം ആയാൽ

   $1 + ab + a^2b^2 + \ldots\ldots = \dfrac{xy}{x+y-1}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9.8. ചില സവിശേഷ അനുക്രമങ്ങളുടെ n പദങ്ങളുടെ തുക

ആദ്യത്തെ n എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ആണെന്ന് പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇതുപോലെ ആദ്യത്തെ n എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക, $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, മൂന്നാംകൃതികളുടെ തുക $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ എന്നിവ എങ്ങനെ കണ്ടെത്താമെന്നു നോക്കാം.
ആദ്യമായി, $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ പരിഗണിക്കാം.

$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ എന്ന സർവസമവാക്യത്തിൽ $k = 1, 2\ldots, n$ എന്നീ വില കൾ കൊടുത്താൽ നമുക്ക് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ ലഭിക്കും.

$$1^3 - 0^3 = 3\,(1)^2 - 3\,(1) + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3\,(2)^2 - 3\,(2) + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3\,(3) + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3\,(n)^2 - 3\,(n) + 1$$

മുകളിലത്തെ സമവാക്യങ്ങളുടെ രണ്ടു ഭാഗവും കൂട്ടിയാൽ

$$n^3 - 0^3 = 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

അതായത്, $n^3 = 3S_n - \dfrac{3n(n+1)}{2} + n$, ഇവിടെ $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

$$\Rightarrow 3Sn = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n$$
$$= n\left[\frac{2n^2 + 3(n+1) - 2}{2}\right]$$
$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{6}\left(2n^2 + 3n + 3 - 2\right)$$
$$S_n = \frac{n}{6}\left(2n^2 + 3n + 1\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

അതായത്, $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

അല്ലെങ്കിൽ, $\sum_{k\;1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ എന്നെഴുതാവുന്നതാണ്.

അടുത്തതായി

$S_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ എന്ന തുക എങ്ങനെ കാണാമെന്നു നോക്കാം. അതിനായി $(k + 1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ എന്ന സർവസമവാക്യത്തിൽ $k = 1, 2, 3, \dots\dots n$ എന്നീ വിലകൾ കൊടുത്താൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന n സമവാക്യങ്ങൾ ലഭിക്കും.

$$2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$$

$$4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$$

....

....

....

$$n^4 - (n - 1)^4 = 4(n - 1)^3 + 6(n - 1)^2 + 4(n - 1) + 1$$

$$(n + 1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

മുകളിലത്തെ n സമവാക്യങ്ങളുടെ രണ്ടുഭാഗവും കൂട്ടിയാൽ

$(n + 1)^4 - 1^4$

$= 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$

എന്നു ലഭിക്കും

അതായത്

$$(n + 1)^4 - 1 = 4S_n + \frac{6n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + \frac{4n\,(n+1)}{2} + n$$

$$4S_n = (n \quad 1)^4 - n\,(n + 1)\,(2n + 1) - 2n\,(n + 1) - n - \ 1$$

$$= (n \quad 1)^4 - n\,(n + 1)\,(2n + 1) - 2n\,(n + 1) - (n + 1)$$

$$= (n + 1)\,[(n + 1)^3 - n(2n + 1) - 2n \ - \ 1]$$

$$S_n = \frac{(n+1)}{4}\left[n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1\right]$$

$$= \frac{(n+1)}{4}\left(n^3 + n^2\right)$$

$$= \frac{(n+1)n^2(n+1)}{4}$$

$$- \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

അതായത്, $$1^3 + 2^3 + \ldots\ldots + n^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{k\ 1}^{n} k^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

ഉദാഹരണം : 19

ഒരു അനുക്രമത്തിന്റെ n-ാം പദം $n(n+3)$ ആയാൽ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

പരിഹാരം

$$a_n = n(n+3)$$
$$= n^2 + 3n$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

ഉദാഹരണം : 20

$5 + 11 + 19 + 29 + 41 \ldots$ എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

പരിഹാരം

$$S_n = 5 + 11 + 19 + 29 + \ldots + a_{n-1} + a_n \ldots\ldots\ldots.(1)$$

അല്ലെങ്കിൽ $S_n = 5 + 11 + 19 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} - a_n \ldots\ldots\ldots.(2)$

(1) ൽ നിന്നും (2) കുറച്ചാൽ

$$0 = 5 + [6 + 8 + 10 + 12 + \ldots (n-1) \text{ പദങ്ങൾ}] - a_n$$

$$a_n = 5 + \frac{(n \quad 1)[12+(n-2)\times 2]}{2}$$

$$= 5 + (n-1)(n+4) = n^2 + 3n + 1$$

$$S_n = \sum_{k-1}^{n} a_k = \sum_{k-1}^{n} (k^2 + 3k + 1)$$

$$= \sum_{k-1}^{n} k^2 + 3\sum_{1}^{n} k + \sum_{k-1}^{n} 1$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n(n+2)(n+4)}{3}$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 9.5

1 മുതൽ 7 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

1. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \ldots$
2. $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \ldots$
3. $3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + \ldots$
4. $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots$
5. $5^2 + 6^2 + 7^2 + \ldots + 20^2$
6. $3 \times 8 + 6 \times 11 + 9 \times 14 + \ldots$
7. $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \ldots$

8 മുതൽ 10 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ n -ാം പദം തന്നിട്ടുണ്ട്. n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

8. $n(n+1)(n-4)$.
9. $n^2 + 2^n$
10. $(2n \quad 1)^2$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 21

ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ p, q, r, s എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിൽ വരുന്ന പദങ്ങൾ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിലാണെങ്കിൽ $(p \quad q), (q - r), (r \quad s)$ എന്നീ മൂന്നു സംഖ്യകളും സമഗുണിത ശ്രേണിയിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ

$$a_p = a + (p-1)\,d \quad \ldots (1)$$

$$a_q = a + (q-1)\,d \quad \ldots (2)$$

$$a_r = a + (r-1)\,d \quad \ldots (3)$$

$$a_s = a + (s-1)\,d \quad \ldots (4)$$

a_p, a_q, a_r, a_s എന്നിവ സമഗുണിത ശ്രേണിയിലായതുകൊണ്ട്

$$\frac{a_q}{a_p} = \frac{a_r}{a_q} = \frac{a_q - a_r}{a_p - a_q} = \frac{q-r}{p-q} \quad \ldots (5)$$

എന്നെഴുതാം. അതുപോലെ

$$\frac{a_r}{a_q} = \frac{a_s}{a_r} = \frac{a_r - a_s}{a_q - a_r} = \frac{r-s}{q-r} \quad \ldots (6)$$

(5), (6) എന്നിവയിൽ നിന്നും

$$\frac{q-r}{p \quad q} = \frac{r-s}{q \quad r}$$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

അതായത്, $p-q, q-r, r-s$ എന്നിവ സമഗുണിത ശ്രേണിയിലായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 22

a, b, c എന്നീ സംഖ്യകൾ ഒരു സമഗുണിതശ്രേണിയിലും കൂടാതെ $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$, ആണെങ്കിൽ, x, y, z എന്നിവ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$ എന്നിരിക്കട്ടെ

എങ്കിൽ $a = k^x$, $b - k^y$, $c = k^z$. എന്നെഴുതാം.

a, b, c എന്നീ സംഖ്യകൾ സമഗുണിത ശ്രേണിയിലായതുകൊണ്ട്

$$b^2 = ac$$

$$\text{അതായത്} \Rightarrow (k^y)^2 = k^x \times k^z$$

$$k^{2y} = k^{x+z}$$

$$\text{അതുകൊണ്ട് } 2y = x + z$$

അതായത് x, y, z എന്നിവ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിലായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 23

a, b, c, d, p എന്നിവ വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകളും $(a^2 + b^2 + c^2)p^2 - 2(ab + bc + cd)\, p + (b^2 + c^2 + d^2) \le 0$, യും ആണെങ്കിൽ a, b, c, d എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$(a^2 + b^2 + c^2)\, p^2 - 2\,(ab + bc + cd)\, p + (b^2 + c^2 + d^2) \le 0$ ... (1)
എന്നു തന്നിരിക്കുന്നു.

കൂടാതെ, $(a^2 + b^2 + c^2)\, p^2 - 2\,(ab + bc + cd)\, p + (b^2 + c^2 + d^2)$

$$= (a^2p^2 - 2abp + b^2) + (b^2p^2 - 2bcp + c^2) + (c^2p^2 - 2cdp + d^2),$$

$$(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 \ge 0 \text{ ... (2)}$$

കാരണം സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക എല്ലായ്പ്പോഴും ന്യൂനമല്ലാത്ത സംഖ്യയായിരിക്കും. (1), (2) എന്നിവയിൽ നിന്നും

$$(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 = 0$$

അതായത് $ap - b = 0,\ bp - c = 0,\ cp - d = 0$

$ap = b,\ bp = c,\ cp = d$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു

ഇതിൽ നിന്നും $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{d}{c} = p$

എന്നെഴുതാം.

അതുകൊണ്ട് a, b, c, d എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിലായിരിക്കും

ഉദാഹരണം : 24

p, q, r എന്നീ സംഖ്യകൾ സമഗുണിത ശ്രേണിയിലും കൂടാതെ $px^2 + 2qx + r = 0$; $dx^2 + 2ex + f = 0$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾക്ക് പൊതുവായി ഒരു പരിഹാരവുമുണ്ട്.

എങ്കിൽ $\dfrac{d}{p}, \dfrac{e}{q}, \dfrac{f}{r}$ എന്നിവ സമാന്തര ശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$px^2 + 2qx + r = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ, $x = \dfrac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4rp}}{2p}$

p, q, r എന്നിവ സമഗുണിത ശ്രേണിയിലായതുകൊണ്ട് $q^2 = pr$ ആയിരിക്കും.

$$\text{അതുകൊണ്ട്, } x = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4rp}}{2p}$$

$$\frac{-2q}{2p} = \frac{-q}{p}$$ പരിഹാരങ്ങൾ രണ്ടും തുല്യമാണെന്നു കാണാം.

$x = \dfrac{-q}{p}$, $dx^2 + 2ex + f = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ കൂടി പരിഹാരമാണല്ലോ. അതുകൊണ്ട്

$$d\left(\frac{-q}{p}\right)^2 + 2e\left(\frac{-q}{p}\right) + f = 0,$$

$$\frac{dq^2}{p^2} - \frac{2eq}{p} + f = 0$$

അതായത് $$dq^2 - 2epq + fp^2 = 0$$

ഈ സമവാക്യത്തെ pq^2 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ

$$\frac{d}{p} - \frac{2e}{q} + \frac{f}{p} = 0 \quad \text{അല്ലെങ്കിൽ} \quad \frac{2e}{q} = \frac{d}{p} + \frac{f}{r}$$

അതുകൊണ്ട് $\dfrac{d}{p}, \dfrac{e}{q}, \dfrac{f}{r}$ എന്നിവ സമാന്തര ശ്രേണിയിലായിരിക്കും

കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ $(m + n)$-ാം പദത്തിന്റെയും $(m - n)$ -ാം പദത്തിന്റെയും തുക m -ാം പദത്തിന്റെ ഇരട്ടിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
2. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ തുക 24, അവയുടെ ഗുണനഫലം 440 ആയാൽ പദങ്ങൾ കാണുക.

3. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ n, $2n$, $3n$ എന്നീ പദങ്ങളുടെ തുക യഥാക്രമം S_1, S_2, S_3, ആയാൽ $S_3 = 3(S_2 - S_1)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. 200 നും 400 നും ഇടയിലുള്ള 7 ന്റെ എല്ലാ ഗുണിതങ്ങളുടെയും തുക കാണുക.

5. 1 നും 100 നും ഇടയിലുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ 2 ന്റെയോ, 5 ന്റെയോ ഗുണിതങ്ങളായ എല്ലാ സംഖ്യകളുടെയും തുക കാണുക.

6. 4 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 വരുന്ന എല്ലാ രണ്ടക്ക സംഖ്യകളുടെയും തുക കാണുക.

7. $f(x+y) = f(x).f(y)$, $x, y \in \mathbf{N}$ എന്ന പ്രത്യേകതയുള്ള ഏകദം f ൽ

$f(1) = 3$ ഉം $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$ ആയാൽ n ന്റെ വില കാണുക.

8. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദം 5, പൊതുഗുണിതം 2 എന്നിവ ആകുന്നു. ഈ അനുക്രമത്തിലെ കുറച്ച് പദങ്ങളുടെ തുക 315 ആയാൽ ഈ ശ്രേണിയുടെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണവും അവസാന പദവും കാണുക.

9. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും അഞ്ചാമത്തെയും പദങ്ങളുടെ തുക 90 ആയാൽ പൊതുഗുണിതം കാണുക.

10. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിലെ ആദ്യ മൂന്ന് പദങ്ങളുടെ തുക 56 ഈ പദങ്ങളിൽ നിന്നും യഥാക്രമം, 1, 7, 21 എന്നീ സംഖ്യകൾ കുറച്ചാൽ ഒരു സമാന്തര അനുക്രമം ലഭിക്കും. എന്നാൽ പദങ്ങൾ കാണുക.

11. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിലുള്ള ആകെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യയാണ്. ഈ ശ്രേണിയിലെ എല്ലാ പദങ്ങളുടെയും തുക ഒറ്റയുടെ സ്ഥാനത്ത് വരുന്ന പദങ്ങളുടെ തുകയുടെ 5 മടങ്ങായാൽ അനുക്രമത്തിന്റെ പൊതുഗുണിതം എഴുതുക.

12. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിൽ 11 പദങ്ങളുണ്ട്, ആദ്യപദം 11 ഉം, അതിലെ ആദ്യ നാല് പദങ്ങളുടെ തുകയും അവസാനത്തെ നാല് പദങ്ങളുടെ തുകയും യഥാക്രമം 56, 112 എന്നിവ ആയാൽ ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക.

13. ഏതൊരു $x \neq 0$, $\dfrac{a+bx}{a-bx} = \dfrac{b+cx}{b-cx} = \dfrac{c+dx}{c-dx}$ ആയാൽ a, b, c, d എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

14. ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയിലെ n പദങ്ങളുടെ തുക S ഉം ഗുണനഫലം P യും അവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ തുക R ഉം ആയാൽ $P^2R^n = S^n$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

15. ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ p, q, r എന്നീ പദങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b, c ആയാൽ $(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

16. $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right), c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണി ആയാൽ a, b, c യും ഒരു സമാന്തര ശ്രേണി ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

17. a, b, c, d ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണി ആയാൽ $(a^n + b^n)$, $(b^n + c^n)$, $(c^n + d^n)$ യും ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

18. a,b,c,d എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണ്. a,b എന്നിവ $x^2 - 3x + p = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരവും c, d എന്നിവ $x^2 - 12x + q = 0$, എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരവും ആയാൽ $(q + p) : (q - p) = 17:15$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

19. a, bഎന്നീ സംഖ്യകളുടെ സമാന്തര മാധ്യവും, സമഗുണിത മാധ്യവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $m : n$ ആയാൽ $a:b = \left(m+\sqrt{m^2-n^2}\right):\left(m-\sqrt{m^2-n^2}\right)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

20. a, b, c എന്നിവ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയും, b, c, d എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയും, $\frac{1}{c},\frac{1}{d},\frac{1}{e}$ എന്നിവ ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുമായാൽ a, c, e എന്നിവ ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

21. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അനുക്രമങ്ങളുടെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

(i) $5 + 55 + 555 + \ldots$ (ii) $.6 + .66 + .666 + \ldots$

22. $2 \times 4 + 4 \times 6 + 6 \times 8 + \ldots + n$ പദം, എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ 20-ാം പദം കാണുക.

23. $3 + 7 + 13 + 21 + 31 + \ldots$ എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

24. S_1, S_2, S_3 ഇവ യഥാക്രമം ആദ്യത്തെ n എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക, അവയുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക, അവയുടെ ഘനങ്ങളുടെ തുക, ആയാൽ $9S_2^2 = S_3(1 + 8S_1)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

25. $\frac{1^3}{1} + \frac{1^3+2^3}{1+3} + \frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5} + ...$ എന്ന അനുക്രമത്തിന്റെ n പദങ്ങളുടെ തുക ലഘൂകരിച്ച രൂപത്തിൽ എഴുതുക.

26. $\frac{1\times 2^2 + 2\times 3^2 + ... + n\times(n+1)^2}{1^2\times 2 + 2^2\times 3 + ... + n^2\times(n+1)} = \frac{3n+5}{3n+1}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

27. 12000 രൂപ വിലയ്ക്ക് ഒരു കർഷകൻ സെക്കന്റ് ഹാൻഡ് ട്രാക്ടർ വാങ്ങിക്കുന്നു. അഡ്വാൻസായി 6000 രൂപ നൽകുകയും ബാക്കി തുക വാർഷിക ഗഡുവായി നൽകാം എന്ന കരാറിൽ എത്തിച്ചേരുന്നു. വാർഷിക ഗഡു 500 രൂപയും ബാക്കി അടക്കാനുള്ള തുകയുടെ 12% പലിശയും എന്നതായിരുന്നു നിബന്ധന. എങ്കിൽ ഇടപാട് തീരുമ്പോൾ ട്രാക്ടറിന് എന്ത് വിലയാകും?

28. ഷംസാദ് അലി 22000 രൂപ വിലയുള്ള സ്കൂട്ടർ വാങ്ങിക്കുന്നു. 4000 രൂപ പണമായി നൽകി ബാക്കി തുക 1000 രൂപ വീതമുള്ള വാർഷിക തവണകളായി 10% പലിശയും കൂടി നൽകാൻ തീരുമാനിച്ചു. എങ്കിൽ ഇടപാട് തീരുമ്പോൾ എന്ത് തുക നൽകേണ്ടി വരും?

29. ഒരാൾ അദ്ദേഹത്തിന്റെ നാല് സുഹൃത്തുക്കൾക്ക് കത്തയച്ചു. ഇതിന്റെ കോപ്പി എടുത്ത് ഏതെങ്കിലും നാല് വ്യത്യസ്ത സുഹൃത്തുക്കൾക്ക് അയയ്ക്കുവാൻ അദ്ദേഹം നിർദ്ദേശിച്ചു. ഈ ശൃംഖല തുടർച്ചയായി സംഭവിക്കുന്നു എന്ന് വിചാരിക്കുക. ഒരു കത്തയക്കാൻ 50 പൈസ ചെലവ് വരുമെങ്കിൽ 8–ാമത്തെ സെറ്റ് അയക്കാൻ മൊത്തം ചെലവ് എത്ര?

30. ഒരാൾ 10000 രൂപ 5% സാധാരണ പലിശ നൽകുന്ന ഒരു ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപിച്ചു. 15 വർഷത്തിന് ശേഷവും 20 വർഷത്തിന് ശേഷവും അദ്ദേഹത്തിന് ലഭിക്കാൻ സാധ്യതയുള്ള തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

31. ഒരു യന്ത്രത്തിന്റെ വില 15625 രൂപയാണ്. ഇത് വർഷം തോറും 20% നിരക്കിൽ കുറയുന്നുവെങ്കിൽ 5 വർഷത്തിന് ശേഷം യന്ത്രത്തിന്റെ വില എന്തായിരിക്കാം.

32. 150 പേർ ഒരു ജോലി നിശ്ചിത ദിവസം കൊണ്ട് ചെയ്ത് തീർക്കാമെന്നുറപ്പ് നല്കുന്നു. പക്ഷെ രണ്ടാം ദിവസം 4 പേരും 3–ാം ദിവസം വീണ്ടും 4 പേരും അങ്ങനെ തുടർച്ചയായി കൊഴിഞ്ഞു പോയ്ക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നു. ജോലി തീരാൻ ആദ്യം നിശ്ചയിച്ചതിനേക്കാൾ 8 ദിവസം കൂടുതൽ എടുത്തു എങ്കിൽ എത്രദിവസം കൊണ്ടാണ് ജോലി പൂർത്തീകരിച്ചത്.

സംഗ്രഹം

- ഒരു നിയമമനുസരിച്ച് ക്രമമായി നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള സംഖ്യകളെയാണ് ശ്രേണി എന്നത് കൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്. മറ്റൊരു രീതിയിൽ നിർവചി ച്ചാൽ എണ്ണൽ സംഖ്യയുടെയോ അല്ലെങ്കിൽ അതിന്റെ $\{1, 2, 3, ...k\}$ പോലുള്ള ഉപഗണങ്ങൾ മണ്ഡലമായി വരുന്ന ഏകദമാണ് ശ്രേണി. നിശ്ചിത പദങ്ങളുള്ള ശ്രേണിയെ പരിമിത ശ്രേണിയാണെന്ന് പറയുന്നു. പരിമിത ശ്രേണിയല്ലാത്ത ശ്രേണികളെ അനന്ത ശ്രേണി എന്ന് പറയു ന്നു.

- $a_1, a_2, a_3, ...$ എന്ന ശ്രേണി പരിഗണിച്ചാൽ $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ എന്നതിനെ അനുക്രമം എന്ന് പറയുന്നു. ഒരു അനുക്രമത്തിൽ പരിമിതമായ പദങ്ങളാ ണുള്ളത് എങ്കിൽ അതിനെ പരിമിത അനുക്രമം എന്ന് പറയുന്നു.

- ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയിൽ (A.P.) ഓരോ പദത്തോടും ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൂട്ടുകയോ കുറയുകയോ ചെയ്യുന്നു. ഈ നിശ്ചിത സംഖ്യയെ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം എന്ന് പറയുന്നു. A.P യുടെ ഒന്നാം പദം a യും പൊതുവ്യത്യാസം d യും അവസാനത്തെ പദം l ഉം ആയാൽ ശ്രേണിയുടെ n -ാം പദം അല്ലെങ്കിൽ പൊതുപദം.

$$a_n = a + (n - 1)\ d$$

  എന്നും ആദ്യ n പദങ്ങളുടെ തുക $S_n - \frac{n}{2}\left[2a-(n-1)d\right]-\frac{n}{2}(a+l)$ എന്നു മാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

- രണ്ട് സംഖ്യകൾ a, b യുടെ സമാന്തരമാധ്യം $(A) = \frac{a \mid b}{2}$ ആണ്. അതാ യത് a, A, b ഒരു സമാന്തര അനുക്രമമാണ്.

- ഒരു ശ്രേണിയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു പദവും അതിന് തൊട്ട് മുന്നെയുള്ള പദവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യയാണെങ്കിൽ ഈ ശ്രേണിയെ സമഗുണിത ശ്രേണി (GP) എന്ന് പറയാം. ഈ അംശബന്ധത്തെ GP യുടെ പൊതുഗുണകം എന്ന് പറയുന്നു. GP യുടെ ഒന്നാം പദം a, പൊതുഗുണകം r ആയാൽ n - ാം പദത്തെ $a_n = ar^{n-1}$ എന്നും

  ആദ്യ n പദങ്ങളുടെ തുകയെ $S_n = \dfrac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1}$ അല്ലെങ്കിൽ $\dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$, $r \neq 0$

  എന്ന് നിർവചിക്കുന്നു.

- a, b എന്നീ സംഖ്യകളുടെ സമഗുണിത മാധ്യത്തെ (G) $\sqrt{ab}$ എന്ന് നിർവചിക്കുന്നു. അതായത് a, G, b എന്നിവ ഒരു G.P യാണ്.

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ഏകദേശം 4000 വർഷങ്ങൾക്ക് മുൻപ് തന്നെ ബാബിലോണിയക്കാർക്ക് സമാന്തര, സമഗുണിത ശ്രേണികളെക്കുറിച്ച് അറിവുള്ളതായി തെളിവുകളുണ്ട്. ബോയിത്തിയസ് (510) പറയുന്നത് പ്രകാരം ഗ്രീക്ക് എഴുത്തുകാർക്ക് സമാന്തര, സമഗുണിത ശ്രേണികളെക്കുറിച്ച് അറിയാമെന്നാണ്. ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരിൽ ആര്യഭട്ട (476) യാണ് ആര്യഭടീയം എന്ന അദ്ദേഹത്തിന്റെ കൃതിയിൽ ആദ്യമായി എണ്ണൽ സംഖ്യയുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക ക്യൂബുകളുടെ തുക എന്നിവയ്ക്കുള്ള സൂത്രവാക്യങ്ങൾ കണ്ടെത്തിയത്. അദ്ദേഹം p -ാം പദത്തിൽ ആരംഭിക്കുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ n പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടെത്തുന്ന സൂത്രവാക്യം നൽകിയിട്ടുണ്ട്. പ്രധാനപ്പെട്ട ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻമാരായ ബ്രഹ്മഗുപ്ത (598), മഹാവീര (850), ഭാസ്കര (1114-1185) എന്നിവരും വർഗങ്ങളുടെയും ക്യൂബുകളുടെയും തുകയെക്കുറിച്ച് പരാമർശിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഒരുപാട് പ്രായോഗിക

തല ഉപയോഗങ്ങളുള്ള ഒരു ശ്രേണിയാണ് ഫിബോനാച്ചി ശ്രേണി. ഈ ശ്രേണി ലിയനാർഡോ ഫിബോനാച്ചി (1170-1250) എന്ന ഇറ്റാലിയൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനാണ് കണ്ടെത്തിയത്. പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ശ്രേണികളെ പ്രത്യേക രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റുന്ന പ്രക്രിയകൾക്ക് തുടക്കമായി. 1671 ൽ ജെയിംസ് ഗ്രിഗറി അനന്തശ്രേണികളെ ബന്ധപ്പെടുത്തി അനന്തഅനുക്രമം എന്ന വാക്ക് ഉപയോഗിക്കുകയുണ്ടായി. ബീജഗണിതം, ഗണിതസിദ്ധാന്തം എന്ന ഗണിതശാഖകളുടെ വ്യക്തമായ ആവിർഭാവത്തോടുകൂടിയാണ് ശ്രേണി, അനുക്രമം എന്നീ ആശയങ്ങൾ അനുയോജ്യമായ രീതിയിൽ രൂപപ്പെട്ടത്.

P3N5G2

അധ്യായം 10

നേർവരകൾ (Straight Lines)

❖ *മനുഷ്യന്റെ ചിന്താശേഷി കുട്ടികൾക്കു ബോധ്യപ്പെടുത്താനുതകുന്ന ഏറ്റവും ശക്തമായ മാർഗമാണ് യുക്തിഭദ്രമായ ഒരു വ്യവസ്ഥ എന്ന നിലയിൽ ജ്യാമിതി – എച്ച്. ഫ്രൊയ്ഡൻതൽ* ❖

10.1 ആമുഖം

റെനെ ദെക്കാർത്തെ
(1596 -1650)

സൂചകസംഖ്യകളെക്കുറിച്ച് (coordinates) മുൻ ക്ലാസുകളിൽ നാം മനസിലാക്കിയിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇത് ജ്യാമിതിയുടെയും ബീജഗണിതത്തിന്റെയും ഒരു സംയോജിത രൂപമാണ്. ബീജഗണിതത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ ജ്യാമിതിയിൽ ചിട്ടയോടുകൂടിയ പഠനം ആദ്യമായി നടത്തിയത് പ്രശസ്ത ഫ്രഞ്ച് തത്വചിന്തകനും ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനുമായ റെനെ ദെക്കാർത്തെയാണ്. ഇതിനെ സംബന്ധിച്ച് 1637–ൽ അദ്ദേഹം 'La G'eom'etry' എന്ന പുസ്തകം പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു. ഈ പുസ്തകത്തിൽ വക്രങ്ങളുടെ സമവാക്യത്തെയും അവയുടെ ജ്യാമിതിയെക്കുറിച്ചും വിശദമായി പ്രതിപാദിക്കുന്നു. ഈ ജ്യാമിതി 'അനലിറ്റിക്കൽ ജ്യാമിതി' (Analytical Geometry) എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

പ്രധാന സൂത്രവാക്യങ്ങൾ

1. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം.

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ $m : n$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ

   (i) ആന്തരികമായി (Internally) വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു $\left(\dfrac{m x_2 + n x_1}{m+n}, \dfrac{m y_2 + n y_1}{m+n}\right)$

   (ii) ബഹ്യമായി (Externally) വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു $\left(\dfrac{m x_2 - n x_1}{m-n}, \dfrac{m y_2 - n y_1}{m-n}\right)$

   ആയിരിക്കും.

3. (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ആയിരിക്കും.

4. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) എന്നിവ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചക സംഖ്യകളായാൽ ആ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

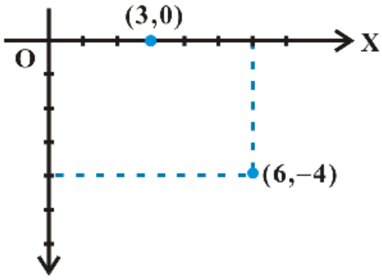
$$\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]$$ ആയിരിക്കും.

ഒരു തലത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം കൃത്യമായി പറയുവാനാണ് സൂചകസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത് എന്ന് നമുക്കറിയാം. ഇതിനായി തലത്തിലെ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ട് വരകളാണ് ആധാരമായി എടുക്കുന്നത്. x അക്ഷം (x - axis) എന്നും y അക്ഷം (y - axis) എന്നും ഈ വരകൾ അറിയപ്പെടുന്നു.

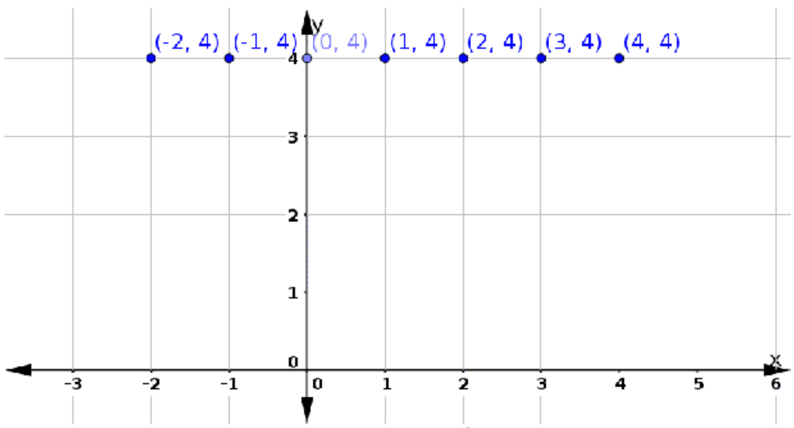
ചിത്രം 10.1 ൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യയാണല്ലോ $(6, -4)$. ഈ ബിന്ദു x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയിൽ നിന്നും 6 യൂണിറ്റും y അക്ഷത്തിന്റെ ന്യൂനദിശയിൽ നിന്നും 4 യൂണിറ്റും അകലെയാണ് എന്നാണ് അർത്ഥമാക്കുന്നത്.

ഇത്തരത്തിൽ കുറെ ബിന്ദുക്കൾ നമുക്ക് XY തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിനോക്കാം.

(0, 4), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (-1, 4), (-2, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഇത്തരത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 10.1



ചിത്രം 10.2

ഈ ബിന്ദുക്കളുടെ പ്രത്യേകതകൾ നിരീക്ഷിക്കാം.

എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും y സൂചകസംഖ്യ 4 ആണ്. ഗ്രാഫിൽ ഇവയുടെ സ്ഥാനം ശ്രദ്ധിക്കുക. എന്താണ് നിരീക്ഷിക്കാൻ കഴിയുന്നത്?

ഇവയുടെ ഇടയിലെല്ലാം ഇതുപോലുള്ള അനേകം ബിന്ദുക്കളുണ്ട്? ഉദാഹരണമായി (1, 4) നും (2, 4) നും ഇടയിൽ തന്നെ അനന്തം ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ട്. ഇവയുടെയെല്ലാം y സൂചകസംഖ്യ 4 തന്നെയായിരിക്കും.

ഈ സംഖ്യകളെയെല്ലാം (y സൂചകസംഖ്യ 4 ആയ) XY തലത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ ഒരു നേർവര ലഭിക്കും.

അതായത് y സൂചകസംഖ്യ 4 ആയ എല്ലാബിന്ദുക്കളും അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ അത് ഒരു നേർവരയായി മാറുന്നു. ഈ വര x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി അക്ഷത്തിന് 4 യൂണിറ്റ് മുകളിലുമായിരിക്കും.

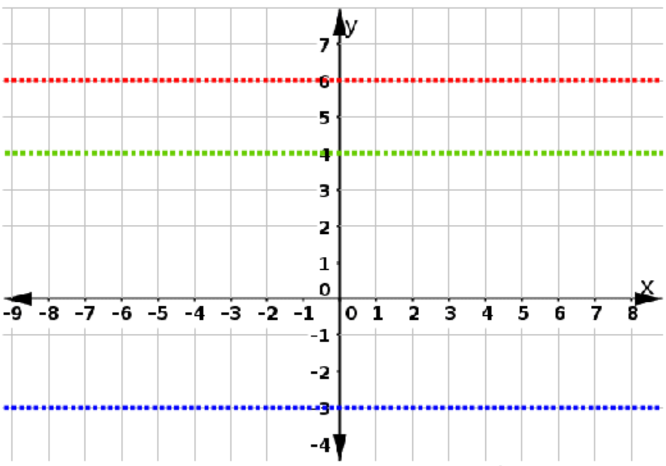
അതായത് ഈ വരയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടേയും y സൂചകസംഖ്യ 4 ആയിരിക്കും. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ y സൂചകസംഖ്യ 4 ആയ ഏതൊരു ബിന്ദുവും ഈ വരയിലെ ബിന്ദു ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് $y = 4$ എന്നത് ഈ നേർവരയുടെ സമവാക്യമായി പരിഗണിക്കുന്നു.

പൊതുവെ, ഒരു വരയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും അനുസരിക്കേണ്ടതും ആ വരയിൽ അല്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദുവും അനുസരിക്കാത്തതുമായ ഒരു നിബന്ധനയാണ് ആ വരയുടെ സമവാക്യം എന്നു പറയാം.

y സൂചകസംഖ്യ 6 ആയ ($y = 6$ എന്ന സമവാക്യമുള്ള) നേർവര സങ്കല്പിക്കാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ?

y സൂചകസംഖ്യ −3 ആയാലോ?

ഇത്തരത്തിലുള്ള എല്ലാ നേർവരകളും x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായിരിക്കില്ലേ?



ചിത്രം 10.3

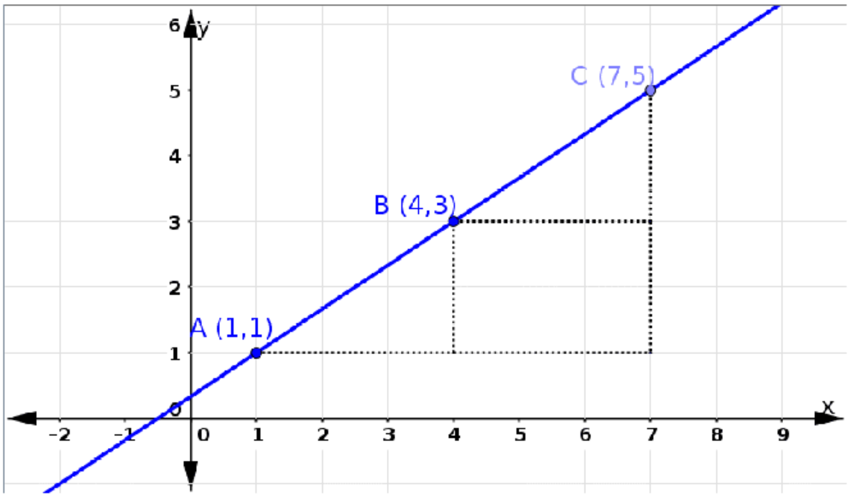
അതായത്,

x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഏതൊരു നേർവരയുടെയും സമവാക്യം $y = k$, (k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ) ആയിരിക്കും.

ഇനി x സൂചകസംഖ്യ സ്ഥിരസംഖ്യ ആയാലോ?

ഇത്തരം വരകൾ y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായിരിക്കും. എങ്കിൽ y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഏതൊരു വരയുടെയും സമവാക്യം $x = k$, (k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ) ആയിരിക്കും.

10.2 വരയുടെ ചരിവ്



ചിത്രം 10.4

ചിത്രത്തിൽ A(1, 1), B(4, 3), (7, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു നേർവര വരച്ചിരിക്കുന്നു.

A എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് 3 യൂണിറ്റ് തിരശ്ചീനമായും 2 യൂണിറ്റ് ലംബമായും സഞ്ചരിച്ചാൽ B യിൽ എത്താമല്ലോ?

B യിൽ നിന്ന് C യിൽ എത്താനും ഇതേപോലെ 3 യൂണിറ്റ് തിരശ്ചീനമായും 2 യൂണിറ്റ് ലംബമായും സഞ്ചരിക്കണം.

A യിൽ നിന്നും C യിലെത്താൻ 6 യൂണിറ്റ് തിരശ്ചീനമായും 4 യൂണിറ്റ് ലംബമായും സഞ്ചരിക്കണം, അതായത് തിരശ്ചീനദൂരം 3 എങ്കിൽ ലംബദൂരം 2.

തിരശ്ചീനദൂരം 6 എങ്കിൽ ലംബദൂരം 4.

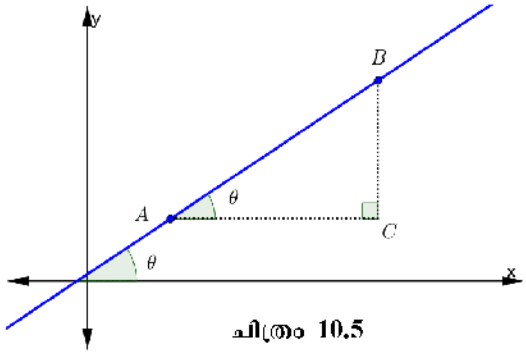
അതായത് $\frac{\text{ലംബദൂരം}}{\text{തിരശ്ചീനദൂരം}} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഇത്തരത്തിൽ ഈ നേർവരയിലെ ഏത് രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ എടുത്താലും $\frac{\text{ലംബദൂരം}}{\text{തിരശ്ചീനദൂരം}}$ ഒരേ അനുപാതത്തിൽ ആയിരിക്കും. ഈ അനുപാതത്തെ വരയുടെ ചരിവ് എന്നു പറയുന്നു.

അതാണ് A(1, 1) എന്ന ബിന്ദു B(4, 3) ആയപ്പോൾ x സൂചകസംഖ്യ 3 വർദ്ധിക്കുകയും y സൂചകസംഖ്യ 2 വർദ്ധിക്കുകയും ചെയ്തു എന്നർത്ഥം.

ഏതൊരു വരയിലും ഈ അനുപാതം സ്ഥിരസംഖ്യയാണ്. അതാണ് ആ വരയുടെ ചരിവ്.

ചിത്രം 10.5 ൽ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന വര നൽകിയിരിക്കുന്നു. ഈ വര x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി θ ഡിഗ്രി കോണുണ്ടാക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക.



ചിത്രം 10.5

ഇവിടെ വരയുടെ ചരിവ് = $\dfrac{BC}{AC}$ ആണ്.

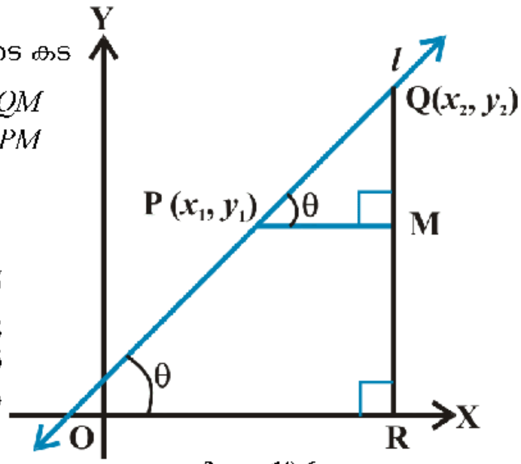
മട്ടത്രികോണം ACB പരിഗണിച്ചാൽ $\dfrac{BC}{AC} = \tan\theta$ യാണ്. അങ്ങനെയെങ്കിൽ ഒരു വരയുടെ ചരിവ്, ആ വര x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ tan വിലയാണെന്ന് പറയാം. ഇനി വര x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായാൽ $\theta = 0°$ ആകുന്നതുകൊണ്ട് ചരിവ് പൂജ്യമാകുന്നു. അതുപോലെ x അക്ഷത്തിന് ലംബമായാൽ $\theta = 90°$ ആകുകയും $\tan 90°$ നിർവചിച്ചിട്ടില്ലാത്തതുകൊണ്ട് ലംബവരക്ക് ചരിവ് നിർവചിച്ചിട്ടില്ല.

10.2.1 വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തന്നാൽ വരയുടെ ചരിവ് കാണുന്ന വിധം

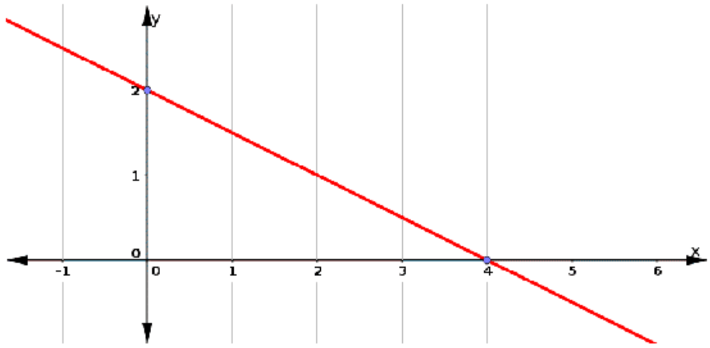
$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന ഒരു നേർവരയുടെ ചരിവ് $\dfrac{QM}{PM}$

$= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ആണ്.

ഇത് $\tan\theta$ യും ആയിരിക്കും. θ എന്നത് ഈ വര x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി അപ്രദക്ഷിണ ദിശയിൽ (Anticlockwise) ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ ആണ്.



ചിത്രം 10.6



ചിത്രം 10.7

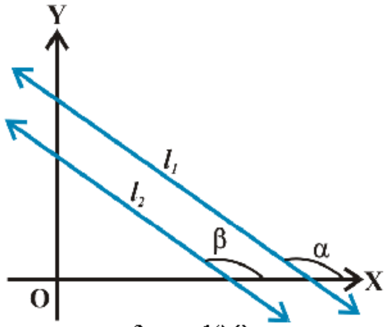
ചിത്രം 10.7 ലെ വര കടന്നുപോകുന്ന രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ (4, 0) (0, 2) എന്നിവയാണ്. x സൂചകസംഖ്യ കുറയുമ്പോൾ y സൂചകസംഖ്യ കൂടുന്നു. ഇത്തരം രേഖകളുടെ ചരിവ് ഒരു ന്യൂനസംഖ്യ ആയിരിക്കും. ചരിവ് = $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$

ഇവിടെ θ ബൃഹത്കോൺ ആണല്ലോ. അതുകൊണ്ട് tan θ ന്യൂനസംഖ്യ ആയിരിക്കുമെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

10.2.2 ചരിവ് ഉപയോഗിച്ച് സമാന്തര, ലംബ രേഖകൾക്കുള്ള വ്യവസ്ഥകൾ

സമാന്തരവരകളുടെ ചരിവ്

ചിത്രത്തിൽ y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമല്ലാത്തതും എന്നാൽ പരസ്പരം സമാന്തരങ്ങളുമായ രണ്ട് വരകളാണ് l_1, l_2. x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി ഇവ യഥാക്രമം α, β എന്നീ കോണുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു.

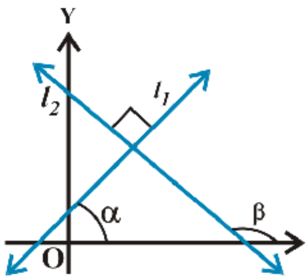


ചിത്രം 10.8

l_1, l_2 എന്നിവ സമാന്തരങ്ങളായതിനാൽ α യും β യും തുല്യമായിരിക്കും.
അതായത് tan α = tan β
എന്നു പറഞ്ഞാൽ രണ്ട് വരകളുടെയും ചരിവുകൾ തുല്യമായിരിക്കുമെന്നർത്ഥം.
അതായത്, സമാന്തരവരകൾക്ക് ഒരേ ചരിവ് ആയിരിക്കും.

ലംബവരകളുടെ ചരിവ്

പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ട് വരകളുടെ (ഇവയിലൊന്നും y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാവരുത്) ചരിവിന്റെ പ്രത്യേകതയെക്കുറിച്ച് മനസിലാക്കാം.



ചിത്രം 10.9

ചിത്രത്തിൽ l_1, l_2 എന്നീ വരകൾ പരസ്പരം ലംബങ്ങളാണ്. l_1ന്റെ ചരിവ് m_1 എന്നും l_2 ന്റെ ചരിവ് m_2 എന്നും സൗകര്യത്തിനായി എടുക്കാം.

അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ $\tan\alpha = m_1$ എന്നും $\tan\beta = m_2$ ലഭിക്കും.

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് $\beta = 90° + \alpha$

അതായത്; $\tan\beta = \tan(\alpha + 90°)$

$$= -\cot\alpha$$

$$= -\frac{1}{\tan\alpha}$$

അതായത്; $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

അല്ലെങ്കിൽ; $m_1 \times m_2 = -1$

അതായത്; പരസ്പരം ലംബമായ (സൂചകാക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരങ്ങളല്ലാത്ത) രണ്ട് വരകളുടെ ചരിവുകളുടെ ഗുണനഫലം -1 ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 1

a. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകളുടെ ചരിവ് കണക്കാക്കുക.

(i) (3, -2), (-1, 4)

(ii) (3, -2), (7, -2)

(iii) (3, -2), (3, 4)

b. x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി $60°$ കോണളവ് ഉണ്ടാക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവ് എത്ര?

പരിഹാരം

a. (i) (3, -2), (-1, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ്

$$m = \frac{4-(-2)}{-1-3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

(ii) ചരിവ് $m = \dfrac{-2-(-2)}{7-3} = \dfrac{0}{4} = 0$

(iii) ചരിവ് $m = \dfrac{4-(-2)}{3-3} = \dfrac{6}{0}$ ഇത് നിർവചിക്കാൻ സാധ്യമല്ല.

b. വരയുടെ ചരിവ് $m = \tan 60° = \sqrt{3}$

10.2.3 രണ്ട് നേർവരകൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ

പരസ്പരം സംഗമിക്കുന്ന രണ്ടു വരകൾ അവയ്ക്കിടയിൽ നാല് കോണുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നുണ്ട്. ഇവയിൽ ഓരോ ജോടി എതിർകോണുകൾ തുല്യമായിരിക്കും. അതുപോലെ അടുത്തടുത്തുള്ള ഓരോ ജോടി കോണുകളുടെ തുക $180°$ ആയിരിക്കും.

ഇവിടെയും നമുക്ക് l_1 ന്റെ ചെരിവ് m_1 എന്നും l_2 വിന്റേത് m_2 എന്നും എടുക്കാം. അതുപോലെ l_1, l_2 എന്നീ വരകൾ x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി നിർണയിക്കുന്ന കോണുകൾ യഥാക്രമം α_1, α_2 എന്നും കരുതുക. വരകൾക്കിടയിലെ രണ്ട് അനുപൂരക കോണുകളാണ് θ, ϕ

അപ്പോൾ $\tan \alpha_1 = m_1$, $\tan \alpha_2 = m_2$

ചിത്രത്തിൽ $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

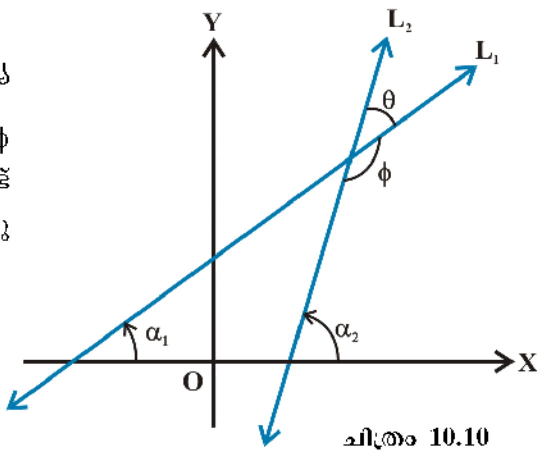
$$\tan \theta = \tan (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

അവസ്ഥ : 1

$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ എന്നത് അധിസംഖ്യ ആയാൽ $\tan \theta$ അധിസംഖ്യയും $\tan \phi$ ന്യൂനസംഖ്യയും ആണ്. അതുകൊണ്ട് θ ന്യൂനകോണും ϕ ബൃഹത്കോണുമായിരിക്കും.

അവസ്ഥ : 2

$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ എന്നത് ന്യൂനസംഖ്യ ആയാൽ θ ബൃഹത്കോണും ϕ ന്യൂനകോണും ആകും. അതുകൊണ്ട് $\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|, 1 + m_1 m_2 \neq 0$ ശരിയാകുന്ന θ കണ്ടെത്തുന്നു. അപ്പോൾ ബൃഹത്കോൺ, ϕ എന്നത് $\phi = 180° - \theta$ ആയിരിക്കുകയും ചെയ്യും.



ചിത്രം 10.10

ഉദാഹരണം : 2

രണ്ടു വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് $\frac{\pi}{4}$. അതിലൊന്നിന്റെ ചരിവ് $\frac{1}{2}$ ആയാൽ രണ്ടാമത്തെ വരയുടെ ചരിവ് കാണുക.

പരിഹാരം

വരകളുടെ ചരിവുകൾ യഥാക്രമം m_1, m_2; അവ തമ്മിലുള്ള കോണളവ് θ യും ആയാൽ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$$

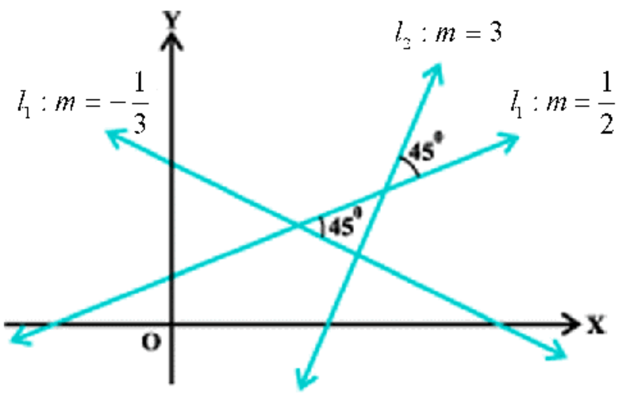
$m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = m$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ എന്നെടുത്താൽ, $\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right|$

അതായത്, $$1 = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right|$$

$\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} = 1$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} = \quad 1$

അതുകൊണ്ട്, $m = 3$ അല്ലെങ്കിൽ $m = -\frac{1}{3}$

രണ്ടാമത്തെ വരയുടെ ചരിവുകൾ 3 അല്ലെങ്കിൽ $-\frac{1}{3}$. ചിത്രം 10.11 എന്തുകൊണ്ട് രണ്ട് ഉത്തരങ്ങൾ എന്നതിനുള്ള വിശദീകരണമാകുന്നു.



ചിത്രം 10.11

ഉദാഹരണം : 3

(-2, 6), (4, 8) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ പോകുന്ന വര, (8, 12), (x, 24) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ പോകുന്ന വരയ്ക്ക് ലംബമായാൽ 'x' ന്റെ വില കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

(-2, 6), (4, 8) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ പോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ്

$$m_1 = \frac{8-6}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(8, 12), (x, 24) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ പോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ്

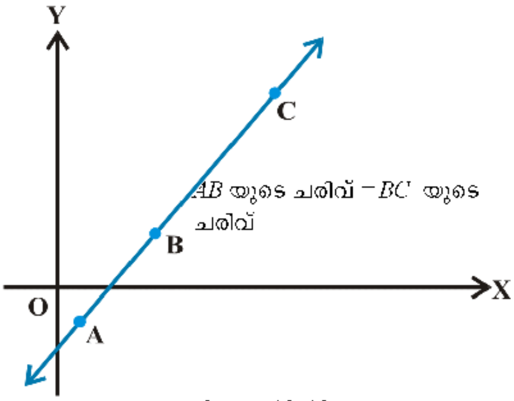
$$m_2 = \frac{24-12}{x-8} = \frac{12}{x-8}$$

രണ്ടു വരകളും പരസ്പരം ലംബമായതിനാൽ $m_1 m_2 = -1$

$$\frac{1}{3} \times \frac{12}{x-8} = -1 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = 4$$

10.2.4 ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ നേർവരയിൽ വരുന്നതെപ്പോൾ?

രണ്ട് നേർവരകളുടെ ചരിവ് തുല്യമാണെങ്കിൽ അവ രണ്ടും ഒരേ നേർവരയാകണമെന്ന് നിർബന്ധമില്ല. കാരണം ചരിവ് തുല്യമാണെങ്കിൽ അവ സമാന്തരങ്ങളായ നേർവരകൾ ആയാലും മതി.



ചിത്രം 10.12

മുകളിലെ ചിത്രത്തിലെ നേർവര നോക്കുക. AB എന്ന വരയുടെ ചരിവും, BC എന്ന വരയുടെ ചരിവും തുല്യമാണ്. മാത്രമല്ല B എന്നത് AB യ്ക്കും BC യ്ക്കും പൊതുവായുള്ള ബിന്ദുവാണ്. അതിനാൽ A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ നേർവരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ആകണം. അതായത് AB യുടെ ചരിവ് = BC യുടെ ചരിവ് ആണെങ്കിൽ A, B, C എന്നിവ നേർവരയിലായിരിക്കും. തിരിച്ചും ഈ വസ്തുത ശരിയാണ്. അതായത് A, B, C എന്നിവ നേർവരയിലാണെങ്കിൽ AB യുടെ ചരിവ് = BC യുടെ ചരിവ് ആയിരിക്കണം.

ഉദാഹരണം : 4

P (h, k), Q (x_1, y_1), R (x_2, y_2) എന്നിവ ഒരു വരയിലെ ബിന്ദുക്കളാണെങ്കിൽ $(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

P, Q, R എന്നിവ ഒരേ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളായതിനാൽ

PQ വിന്റെ ചരിവ് = QR ന്റെ ചരിവ്

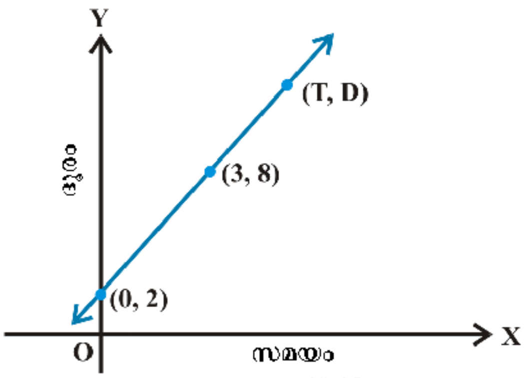
അതായത് $$\frac{y_1 - k}{x_1 - h} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ഇതിൽ നിന്നും, $$\frac{k - y_1}{h - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

അതായത്, $(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$

ഉദാഹരണം : 5

ചിത്രം 10.13 ൽ ഒരു രേഖീയചലനത്തിന്റെ സമയ-ദൂര ഗ്രാഫാണ് തന്നിരിക്കുന്നത്. സമയത്തിന്റെയും (T) ദൂരത്തിന്റെയും (D) രണ്ട് വ്യത്യസ്ത സ്ഥാനങ്ങൾ T = 0 ആയാൽ, D = 2, T = 3 ആയാൽ D = 8 ആകുന്നു. ചരിവിന്റെ ആശയമുപയോഗിച്ച്, ചലന നിയമം കാണുക, അതായത് ദൂരം എങ്ങനെ സമയത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നു എന്ന നിയമം.



ചിത്രം 10.13

പരിഹാരം

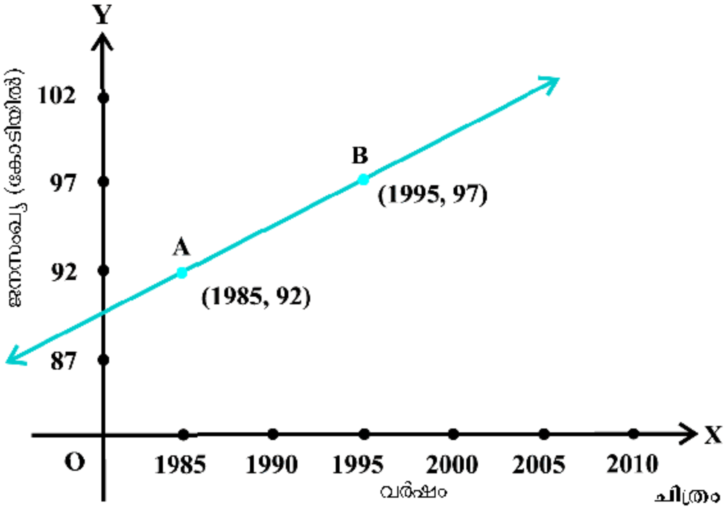
(T, D) എന്നത് വരയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവായാൽ, (0, 2), (3, 8), (T, D) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളാകുന്നു.

$\frac{8-2}{3-0} = \frac{D-8}{T-3}$. അപ്പോൾ 6(T – 3) = 3(D– 8). അതുകൊണ്ട് D = 2(T + 1) ആയിരിക്കും ചലന നിയമം.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 10.1

1. മൂലകൾ $(-4, 5)$, $(0, 7)$, $(5, -5)$, $(-4, -2)$ ആയ ഒരു ചതുർഭുജം കാർട്ടീഷ്യൻ തലത്തിൽ വരയ്ക്കുക. കൂടാതെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.
2. ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പാദം y അക്ഷത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. പാദത്തിന്റെ നീളം $2a$ യും പാദത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു ആധാരബിന്ദു (origin) വുമായാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ കണ്ടെത്തുക.
3. $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം ചുവടെ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾക്കനുസരിച്ച് കണക്കാക്കുക.
   (i) PQ, y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുമ്പോൾ
   (ii) PQ, x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുമ്പോൾ
4. $(7, 6)$, $(3, 4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിലുള്ള x അക്ഷത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു കണ്ടെത്തുക.
5. $A(0, -4)$, $B(8, 0)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെയും, ആധാരബിന്ദു (origin) വിലൂടെയും കടന്നു പോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ് (slope) കണ്ടെത്തുക.
6. $(4, 4)$, $(3, 5)$, $(-1, -1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളാണെന്ന് പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കാതെ തെളിയിക്കുക.
7. y അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി അപ്രദക്ഷിണ ദിശയിൽ $30°$ കോണുണ്ടാകുന്ന ഒരു വരയുടെ ചരിവ് കണ്ടെത്തുക.
8. $(x, -1)$, $(2, 1)$, $(4, 5)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെങ്കിൽ (collinear points) ആയാൽ 'x' ന്റെ വില കണക്കാക്കുക.
9. $(-2, 1)$, $(4, 0)$, $(3, 3)$, $(-3, 2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ മൂലകളാണെന്ന് അകലസൂത്രം (distance formula) ഉപയോഗിക്കാതെ തെളിയിക്കുക.
10. $(3, -1)$, $(4, -2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ തമ്മിൽ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന വരയും x അക്ഷവും തമ്മിലുള്ള കോണളവ് കണക്കാക്കുക.
11. രണ്ടു വരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണളവിന്റെ ടാൻജന്റ് (tangent) $\frac{1}{3}$ ആണ്. ഇതിൽ ഒരു വരയുടെ ചരിവിന്റെ ഇരട്ടിയാണ് രണ്ടാമത്തെ വരയുടെ ചരിവ് എങ്കിൽ വരകളുടെ ചരിവുകൾ കാണുക.
12. (x_1, y_1), (h, k) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ് m എങ്കിൽ $k - y_1 = m\,(h - x_1)$ എന്നു തെളിയിക്കുക.
13. $(h, 0)$, (a, b), $(0, k)$ എന്നിവ ഒരേ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളാണെങ്കിൽ $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

14. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ജനസംഖ്യ, വർഷം എന്നിവ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഗ്രാഫ് പരിഗണിക്കുക (ചിത്രം 10.14) AB എന്ന വരയുടെ ചരിവ് കണ്ടെത്തുക, അതു പയോഗിച്ച് 2010 ലെ ജനസംഖ്യ എത്രയായിരിക്കും എന്ന് കണ്ടെത്തുക.



ചിത്രം 10.14

10.3 നേർവരകളുടെ വിവിധതരം സമവാക്യങ്ങൾ

അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരങ്ങളായ വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ അധ്യായത്തിന്റെ തുടക്കത്തിൽ വിശദീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. പക്ഷെ എല്ലാ വരകളും x അക്ഷത്തിനോ y അക്ഷത്തിനോ സമാന്തരമായിരിക്കില്ല. അത്തരം വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ ഇനി കണ്ടെത്താം.

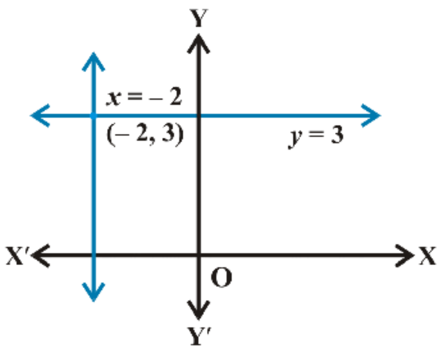
വ്യത്യസ്ത സന്ദർഭങ്ങളിൽ സൗകര്യപ്രദമായി ഉപയോഗപ്പെടുത്താവുന്ന തരത്തിലാണ് വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ നിർമിക്കുന്നത്. ഒരു പ്രത്യേക പ്രശ്നത്തിൽ ലഭ്യമായ അറിവ് ഉപയോഗിച്ച് വരകളുടെ സമവാക്യം നിർണയിക്കാനാവുന്ന തരത്തിൽ വ്യത്യസ്ത സമവാക്യമാതൃകകൾ കണ്ടെത്തുന്നു. ഇവയെല്ലാം പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ടു കിടക്കുന്നവയാണ്. ഒറ്റപ്പെട്ടു നിൽക്കുന്നവയല്ല.

ഉദാഹരണം : 6

അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരവും $(-2, 3)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതുമായ വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ചിത്രം 10.15 പരിഗണിക്കുക. ചിത്രത്തിൽ നിന്നും x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ എല്ലാ വരകളുടെയും സൂചകസംഖ്യ 3 ആയിരിക്കും. ആയതിനാൽ x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരവും



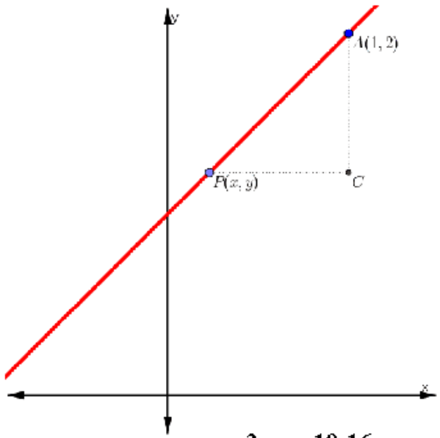
ചിത്രം 10.15

(-2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യം $y = 3$ ആയിരിക്കും.

ഇതുപോലെ y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരവും (-2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യം $x = -2$ ആകുന്നു.

10.3.1. ബിന്ദു – ചരിവ് രൂപം (Point - Slope form)

(1, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന അനന്തം വരകൾ ഉണ്ടാകും. അതുകൊണ്ട് തന്നെ വര കടന്നുപോവുന്ന ഒരു ബിന്ദു മാത്രമേ അറിയൂ എങ്കിൽ അതിൽ നിന്ന് ഏതെങ്കിലും ഒരു പ്രത്യേക വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കാനാവില്ല. മറ്റൊരു അളവ് കൂടി തരേണ്ടതുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി (1, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന, ചരിവ് 1 ആയ വരയുടെ സമവാക്യം പരിഗണിക്കാം.



ചിത്രം 10.16

ചരിവ് 1 ആണെങ്കിൽ $\tan\theta = 1$ ആകും.
അതായത് $\theta = 45°$ ആയിരിക്കും.

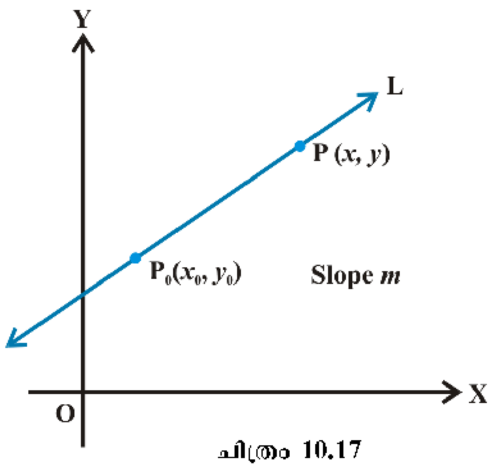
ഈ രണ്ട് നിബന്ധനകളും പാലിക്കുന്ന ഒരേ ഒരു നേർവര മാത്രമേ സാധ്യമാകൂ എന്നതിനാൽ ഇതിന്റെ സമവാക്യത്തിലെത്തിച്ചേരാനാവും.

ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നതുപോലെ വരയിലെ P(x, y) എന്ന പൊതുബിന്ദുവും PCA എന്ന മട്ടത്രികോണവും നിർമിക്കുന്നു.

ഇവിടെ; $\tan\theta = \tan 45 = 1 = \dfrac{AC}{PC}$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2-y}{1-x} \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

ഇങ്ങനെ വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്താം.



ചിത്രം 10.17

പൊതുവായി വര കടന്നു പോവുന്ന ബിന്ദു (x_0, y_0) എന്നും ചെരിവ് m എന്നും കരുതുക. ഈ വരയിൽ എവിടെയെങ്കിലുമുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിനെ (x, y) എന്നും എടുക്കാം. എങ്കിൽ ഈ പൊതുബിന്ദു (x, y) പാലിക്കേണ്ട നിബന്ധനയെയാണല്ലോ നാം ഈ നേർവരയുടെ സമവാക്യമായി എടുക്കു

ന്നത്. നേർവര (x_0, y_0), (x, y) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോവുന്നുതുകൊണ്ട് ചരിവ് $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ ആവണം.

$$\text{അതായത്,}\quad m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$$

ഇതിനെ $y - y_0 = m(n - x_0)$ എന്ന് എഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 7

(-2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും ചരിവ് –4 ഉം ആയ വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ ചരിവ് $m = -4$. തന്നിരിക്കുന്ന (–2, 3) എന്ന ബിന്ദു (x_0, y_0) ന് പകരം എഴുതാം.

ചരിവും ഒരു ബിന്ദുവും തന്നാൽ വരയുടെ സമവാക്യം $(y - y_0) = m(x - x_0)$ ആണ്.

$$y - 3 = -4(x + 2)$$

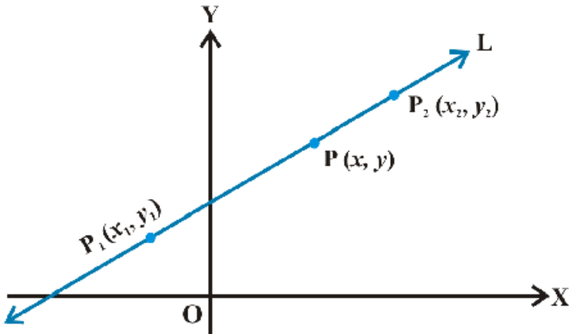
$$\Rightarrow 4x + y + 5 = 0 \text{ എന്ന് ലഭിക്കും.}$$

10.3.3 രണ്ടു ബിന്ദു രൂപം (Two point form)

രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളിലൂടെ ഒരേ ഒരു നേർവര മാത്രമേ സാധിക്കൂ. അതുകൊണ്ട് തന്നെ ഈ ബിന്ദുക്കൾ ഉപയോഗപ്പെടുത്തി സമവാക്യം നിർമിക്കാവുന്നതാണ്.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെ നേർവര കടന്നുപോവുന്നു എന്ന് കരുതുക. ഇതിൽ നിന്ന് വരയുടെ ചരിവ് കണക്കാക്കാം.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



ചിത്രം 10.18

ഇത് തൊട്ടു മുമ്പ് കണ്ട സമവാക്യത്തിൽ കൊടുത്താൽ

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

അതുകൊണ്ട്; $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-x_1}$ എന്നും പറയാം.

ഉദാഹരണം : 8

(1, –1), (3, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന (1, –1), (3, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നിവക്ക് പകരം എടുക്കാം.

രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തന്നാൽ വരയുടെ സമവാക്യം $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$.

അതായത് $$y-(-1) = \frac{5-(-1)}{3-1}(x-1)$$

$\Rightarrow$ $-3x + y + 4 = 0$ എന്നതാണ് നിർദ്ദിഷ്ട വരയുടെ സമവാക്യം.

10.3.4. ചരിവ് – ഇട അകല രൂപം (Slope - Intercept form)

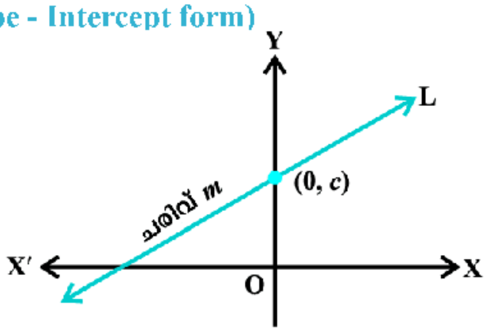
y ഇട അകലം c ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ വര കടന്നുപോവുന്ന ഒരു ബിന്ദു $(0, c)$ ആണ്.

ചരിവ് m ആണെന്ന് കരുതാം. അപ്പോൾ നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ വരയുടെ സമവാക്യം

$y - c = m(x - 0)$ എന്നെഴുതാം.

അതായത് $y - c = mx$

അല്ലെങ്കിൽ $y = mx + c$



ചിത്രം 10.19

ഇനി x ഇട അകലം 'd' ആണ് തന്നിരിക്കുന്നതെങ്കിൽ വര കടന്നുപോകുന്ന ബിന്ദു $(d, 0)$ ആകും.

$$y - 0 = m(x - d)$$

$y = m(x - d)$ എന്നു കിട്ടും.

ഉദാഹരണം : 9

ഒരു വര x അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ θ ആകുകയും, $\tan\theta = \frac{1}{2}$ ആയാൽ

(i) y അക്ഷത്തിലെ ഇട അകലം $\frac{3}{2}$ ആകുമ്പോഴും

(ii) x അക്ഷത്തിലെ ഇട അകലം 4 ആകുമ്പോഴും

വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

(i) ഇവിടെ വരയുടെ ചരിവ് $m = \tan\theta = \dfrac{1}{2}$

y അക്ഷത്തിലെ ഇട അകലം $c = \dfrac{3}{2}$ ആകുന്നു. ചരിവ് ഇട അകല രൂപം ഉപയോഗിച്ച് വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്താം.

അതായത്, $y = mx + c$

$$y = \frac{1}{2}x \quad \frac{3}{2}$$

അതായത് നിശ്ചിത സമവാക്യം $2y - x + 3 = 0$

(ii) ഇവിടെ $m = \tan\theta = \dfrac{1}{2}$, x ഇട അകലം $= d = 4$ ആകുന്നു. എങ്കിൽ ചരിവ് – ഇട അകല രൂപം $y = m(x - d)$ ഉപയോഗിച്ച് വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്താം.

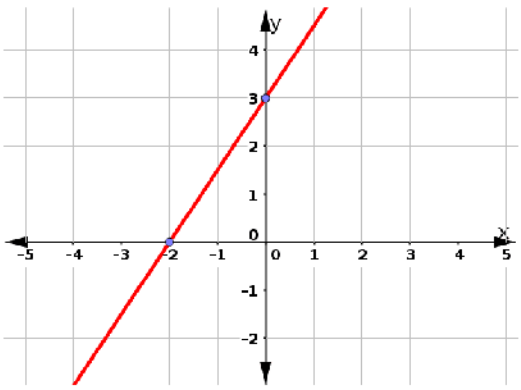
അതായത് സമവാക്യം $y = \dfrac{1}{2}(x - 4)$

$$\Rightarrow 2y - x + 4 = 0$$

10.3.5 ഇട അകല രൂപം (Intecept form)

ചിത്രത്തിലെ വര x അക്ഷത്തെയും y അക്ഷത്തെയും യഥാക്രമം $(-2, 0)$, $(0, 3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സംഗമിക്കുന്നു. അപ്പോൾ രണ്ടു ബിന്ദു രൂപമുപയോഗിച്ച് വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്താം.

അതായത്,



ചിത്രം 10.20

$$y - 0 = \frac{3 - 0}{0 - (-2)}\left(x - (-2)\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2}\left(x + 2\right)$$

$$\Rightarrow 2y = 3x + 6$$

$$\Rightarrow 3x - 2y + 6 = 0 \text{ -------}(1)$$

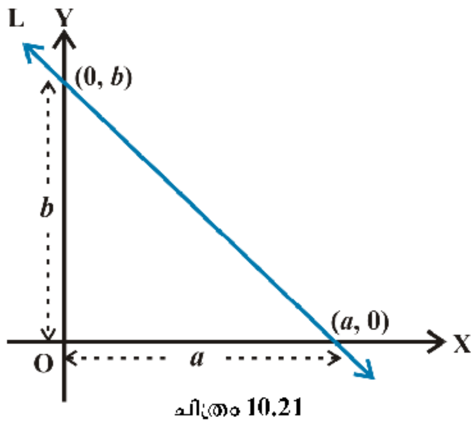
വരയുടെ സമവാക്യം (1) പുനർ ക്രമീകരിച്ചുനോക്കാം.

അതായത്, $3x - 2y = -6 \rightarrow \dfrac{3x - 2y}{-6} = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{3} = 1$

ഇവിടെ x ന്റെ ഛേദം -2, y യുടെ ഛേദം 3 ആണ്. ചിത്രത്തിൽ നിന്നും -2, x ഇട അകലവും 3, y ഇട അയകലവുമാണ്. അപ്പോൾ x, y ഇട അകലങ്ങൾ അറിയാമെങ്കിൽ വരയുടെ സമവാക്യം എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടെത്താം.

ഇനി ഈ ആശയം പൊതുവായി കാണാം.

x ഇട അകലം a യും y ഇടയകലം b യും ആണെങ്കിൽ വര കടന്നുപോവുന്ന ബിന്ദുക്കൾ $(a, 0)$, $(0, b)$ എന്നിവയാണ്.



ചിത്രം 10.21

ഇവിടെ $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

എന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}$$

$$\frac{x - a}{-a} = \frac{y}{b}$$

$$-\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}$$

അതായത് $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ എന്ന് കിട്ടും.

ഉദാഹരണം : 10

x, y അക്ഷങ്ങളിലെ ഇട അകലം യഥാക്രമം -3, 2 ആയാൽ വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

x അക്ഷത്തിലെ ഇട അകലം $a = -3$,

y അക്ഷത്തിലെ ഇട അകലം $b = 2$

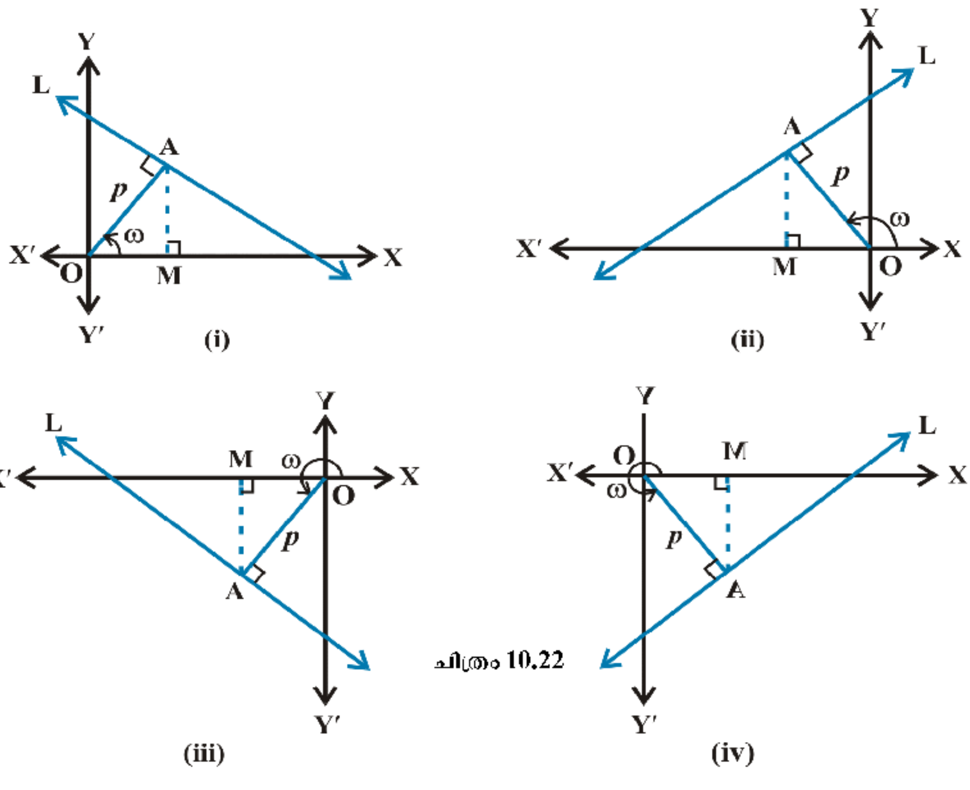
ഇട അകലങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് വരയുടെ സമവാക്യം $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

ആയതിനാൽ $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$

അതായത് $2x - 3y + 6 = 0$

10.3.6 ലംബരൂപം (Normal form)

ഒരു വരയിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ നീളവും (അകലം) ആ ലംബം x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണും അറിയാമെങ്കിൽ ആ വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്താനാകും.
താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങൾ പരിശോധിക്കുക.



ചിത്രം 10.22

വരയിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലം p ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഈ ലംബം OA, x അക്ഷവുമായി ചിത്രത്തിലേതുപോലെ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ ω ആണെന്നും കരുതുക. നേരത്തെ പഠിച്ച ഏതെങ്കിലും രീതിയിലുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഈ നേർവരയുടെ സമവാക്യത്തിലെത്താനാവുമോ?

OA എന്ന വര L ന് ലംബമായതുകൊണ്ട്

$$L \text{ ന്റെ ചരിവ്} = \frac{-1}{OA \text{ യുടെ ചരിവ്}} = \frac{-1}{\tan\omega} = -\frac{\cos\omega}{\sin\omega}$$

വരയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുകൂടി കിട്ടിയാൽ ഈ വരയുടെ സമവാക്യം കിട്ടും.

A എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കിട്ടുമോ? ഇതിന് OM, AM എന്നീ അകല ങ്ങൾ കിട്ടിയാൽ പോരേ? മട്ടത്രികോണം OMA ശ്രദ്ധിക്കൂ.

ഇതിൽ നിന്നും

$$\cos\omega = \frac{OM}{p} \text{ എന്നും } \sin\omega = \frac{AM}{p} \text{ എന്നും കിട്ടും}$$

അതായത്; $OM = p\cos\omega$, $AM = p\sin\omega$

അതുകൊണ്ട് A യുടെ സൂചകസംഖ്യ $(p\cos\omega, p\sin\omega)$ ആയിരിക്കും.

ഇനി ചരിവും ഈ ബിന്ദുവും ഉപയോഗിച്ച് സമവാക്യം കണ്ടെത്താം.

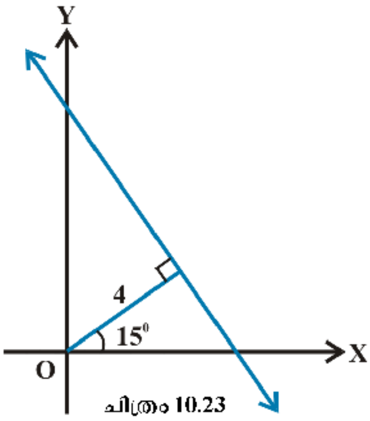
$$\begin{aligned}
y - y_0 &= m(x - x_0)\\
y - p\sin\omega &= -\cot\omega\,(x - p\cos\omega)\\
y - p\sin\omega &= \frac{-\cos\omega}{\sin\omega}(x - p\cos\omega)\\
(y - p\sin\omega)\sin\omega &= -x\cos\omega\,(x - p\cos\omega)
\end{aligned}$$

അതായത്; $$x\cos\omega + y\sin\omega = p\cos^2\omega + p\sin^2\omega$$

$$\mathbf{x\cos\omega + y\sin\omega = p}$$

ഉദാഹരണം: 11

ഒരു വരയിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ലംബദൂരം 4 യൂണിറ്റും, ലംബം x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവ് $15°$ യും ആയാൽ വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.



ചിത്രം 10.23

പരിഹാരം

ചിത്രം 10.23 പരിഗണക്കുക. ചിത്രത്തിൽ ആധാര ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ലംബദൂരം $p = 4$, കോണളവ് $\omega = 15°$ ആയിരുന്നാൽ,

വരയുടെ $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ എന്ന ലംബരൂപം ഉപയോഗിക്കാം.
ഇവിടെ

$$\cos \omega = \cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin \omega = \sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \quad \text{(എന്തുകൊണ്ട്?)}$$

$$x \cos 15° + y \sin 15° = 4$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}y = 4$$

$\Rightarrow \left(\sqrt{3}+1\right)x + \left(\sqrt{3}-1\right)y = 8\sqrt{2}$ എന്നാണ് വരയുടെ സമവാക്യം

ഉദാഹരണം : 12

താപനിലയുടെ ഫാരൻഹീറ്റ് F, കേവല താപനില K യും തമ്മിൽ ഒരു രേഖീയ സമവാക്യബന്ധം പാലിക്കുന്നുണ്ട്. കൂടാതെ F = 32 ആകുമ്പോൾ K = 273 ഉം F = 312 ആകുമ്പോൾ K = 373 ഉം ആയാൽ K യെ F ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കുക. കൂടാതെ K = 0 ആകുമ്പോൾ F ന്റെ വില കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

(32, 273), (212, 373) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയിലെ പൊതുവായ ഒരു ബിന്ദുവാണ് L(F, K) എങ്കിൽ വരയുടെ സമവാക്യം;

$$K - 273 = \frac{373 - 273}{212 - 32}(F - 32)$$

ആകുമല്ലോ.

$$K - 273 = \frac{100}{180}(F - 32)$$

$$\Rightarrow K = \frac{5}{9}(F - 32) + 273 \quad \text{ആയിരിക്കും}$$

അടുത്തതായി K = 0 ആകുമ്പോൾ $\frac{5}{9}(F - 32) + 273 = 0$

$$F - 32 = \frac{-273 \times 9}{5} = -491.4$$

$$F = -459.4$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 10.2

1 മുതൽ 8 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധന അനുസരിച്ചുള്ള വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

1. x അക്ഷത്തിന്റെയും y അക്ഷത്തിന്റെയും സമവാക്യങ്ങൾ എഴുതുക.
2. ചരിവ് $\frac{1}{2}$ വും, (-4, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതുമായ വര.
3. (0, 0) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതും ചരിവ് m ആയിട്ടുള്ള വര.
4. $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും, x അക്ഷവുമായി $75°$ കോണളവ് ഉണ്ടാക്കുന്നതുമായ വര.
5. ചരിവ് -2 ആധാരബിന്ദുവിന് 3 യൂണിറ്റ് ഇടത്തോട്ട് x അക്ഷവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്നതുമായ വര.
6. x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി $30°$ കോണളവുള്ളതും y അക്ഷത്തിനെ ആധാരബിന്ദുവിന് മുകളിലായി 2 യൂണിറ്റ് അകലത്തിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നതുമായ വര.
7. (-1, 1), (2, -4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വര.
8. ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും 5 യൂണിറ്റ് ലംബദൂരത്തിലും, x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി $30°$ കോണളവ് ഉണ്ടാകുന്നതുമായ വര.
9. ത്രികോണം PQR ന്റെ മൂലകൾ യഥാക്രമം P(2, 1), Q(-2, 3), R(4, 5) എന്നിവയാണ്. R എന്ന മൂലയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന മധ്യമത്തിന്റെ (Median) സമവാക്യമെഴുതുക.
10. (2, 5), (-3, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയ്ക്ക് ലംബവും (-3, 5) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.
11. (1, 0), (2, 3) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ $1 : n$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ ലംബമായി പോകുന്ന വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.
12. (2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ പോകുന്നതും അക്ഷങ്ങളുമായി തുല്യ ഇടയകലം പാലിക്കുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.
13. (2, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ പോകുന്നതും ഇടയകലങ്ങളുടെ തുക (sum of intercepts) 9 ആയ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

14. (0, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ പോകുന്നതും, x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി $\frac{2\pi}{3}$ കോണളവ് ഉണ്ടാക്കുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക. കൂടാതെ മേൽ സൂചിപ്പിച്ച വരയ്ക്ക് സമാന്തരവും ആധാരബിന്ദുവിന് 2 യൂണിറ്റ് താഴെ y അക്ഷവുമായി സംഗമിക്കുന്നതുമായ വരയുടെയും സമവാക്യമെഴുതുക.
15. ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഒരു വരയിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബം വരയെ (-2, 9) എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുന്നുവെങ്കിൽ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.
16. ഒരു ചെമ്പ് കമ്പിയുടെ നീളം L (സെന്റിമീറ്ററിൽ) താപം C (സെൽഷ്യസിൽ) യുടെ ഒരു രേഖീയ ഏകദമാകുന്നു. ഒരു പരീക്ഷണത്തിൽ C = 20 ആകുമ്പോൾ L = 124.942, C = 110 ആകുമ്പോൾ L = 125.334 എന്നു കരുതുക. എങ്കിൽ L നെ C യുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കുക.
17. ഒരു പാൽ വിൽപനക്കാരന് ആഴ്ചതോറും 14 രൂപ നിരക്കിൽ 980 ലിറ്റർ പാലും, 16 രൂപ നിരക്കിൽ 1220 ലിറ്റർ പാലും വിൽക്കാൻ കഴിയുന്നു. പാലിന്റെ വിറ്റവിലയും, ആവശ്യകതയും തമ്മിൽ ഒരു രേഖീയ സമവാക്യബന്ധമാണെങ്കിൽ, അദ്ദേഹത്തിന് 17 രൂപ നിരക്കിൽ എത്ര ലിറ്റർ പാൽ ഒരാഴ്ച വിൽക്കാൻ കഴിയും.
18. P(a, b) എന്നുള്ളത് അക്ഷങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള വരയുടെ മധ്യബിന്ദു ആണ്. വരയുടെ സമവാക്യം $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
19. അക്ഷങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള രേഖാഖണ്ഡത്തെ R(h, k) എന്ന ബിന്ദു 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നുവെങ്കിൽ രേഖാഖണ്ഡം ഉൾപ്പെടുന്ന വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.
20. (3, 0), (-2, -2), (8, 2) എന്നീ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെന്ന് വരയുടെ സമവാക്യം എന്ന ആശയമുപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

10.4 വരയുടെ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുരൂപം
(General Equation of a Straight Line)

ഇതുവരെ ചർച്ച ചെയ്ത എല്ലാ വരകളുടെയും സമവാക്യത്തിൽ പൊതുപദങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കൂ.

പരമാവധി 3 പദങ്ങളാണ് ഈ സമവാക്യങ്ങളിലുള്ളത്. x, y ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ എന്നിവയാണ് അവ.

അതുകൊണ്ട് ഒരു നേർവരയുടെ സമവാക്യം പൊതുവായി.

$Ax + By + C = 0$ എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ A, B, C എന്നിവ ഒരേ സമയം പൂജ്യമാവാൻ പാടില്ല. ഈ സമവാക്യത്തെ നേർവരയുടെ പൊതുസമവാക്യം എന്നു പറയാം.

10.4.1 $Ax + By + C = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ വിവിധ രൂപങ്ങൾ

a. ചരിവ് – ഇട അകല രൂപം

$A = 0$ ആയാലോ?

$$By + C = 0 \Rightarrow By = -C \Rightarrow y = \frac{-C}{B} \text{ ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ}$$

അതായത് x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ വരയായിരിക്കും എന്നർത്ഥം.

ഇതുപോലെ $B = 0$ ആയാൽ അത് y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ വരയായിരിക്കും എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

$C = 0$ ആയാലോ?

ഇതറിയാൻ x നും y ക്കും പൂജ്യം കൊടുത്തു നോക്കൂ. അതായത് ഈ വര $(0, 0)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവും.

$Ax + By + C = 0$ എന്ന പൊതുസമവാക്യത്തെ നേരത്തെ നാം മനസിലാക്കിയ ഏതൊരു രൂപത്തിലേക്കും മാറ്റാനും അതുവഴി വരയുടെ ചരിവ്, ഇട അകലം തുടങ്ങിയ അളവുകൾ കണ്ടുപിടിക്കാനും കഴിയും.

ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ ഇത് വിശദമാക്കാം.

$2x + 3y - 5 = 0$ എന്ന സമവാക്യം എടുക്കാം.

$\Rightarrow 3y = -2x + 5 = 0$ എന്നെഴുതാം.

$$\Rightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{5}{3}$$

ഇത് $y = mx + c$ എന്ന രൂപത്തിലാണ്

അതായത് $m = \frac{-2}{3}$, $c = \frac{5}{3}$.

b. ഇട അകല രൂപം

ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ ഇടയകല രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റുന്നത് പരിചയപ്പെടാം.

$2x + 3y = 5$ എന്ന വരയുടെ സമവാക്യം എടുക്കാം.

$$\frac{2x}{5} + \frac{3y}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1$$

ഇതിനെ ഇട അകല രൂപവുമായി $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ താരതമ്യം ചെയ്താൽ

x ഇടയകലം $\frac{5}{2}$ എന്നും y ഇട അകലം $\frac{5}{3}$ എന്നും കിട്ടും.

c. ലംബരൂപം

ഇനി വരയുടെ പൊതുസമവാക്യത്തെ ലംബരൂപം $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ ആക്കിമാറ്റുന്നത് ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ പരിചയപ്പെടാം.

$2x + 3y = 5$ എന്ന വരയുടെ സമവാക്യം പരിഗണിക്കാം.

ഇപ്പോൾ $2x + 3y = 5$ എന്നത് ആ രൂപത്തിലാണോ? $\cos \omega$ ആകാൻ 2 നും $\sin \omega$ ആകാൻ 3 നും കഴിയില്ല. (എന്തുകൊണ്ട്?)

$\frac{2x + 3y}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$ എന്നാക്കാം.

$$\Rightarrow \frac{2x + 3y}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{13}} + \frac{3y}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

ഇതിൽ $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 = 1$ ആയതിനാൽ

നമുക്ക് $\frac{2}{\sqrt{13}}$ എന്നതിനെ $\cos \omega$ എന്നും $\frac{3}{\sqrt{13}}$ നെ $\sin \omega$ എന്നും എടുക്കാം.

അതുകൊണ്ട് $p = \frac{5}{\sqrt{13}}$ ആയിരിക്കും

ഇങ്ങനെ വരയുടെ പൊതുസമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് ആവശ്യാനുസരണം മറ്റ് സമവാക്യരൂപങ്ങളിലേക്ക് മാറ്റി ചരിവ് ഇട അകലം, ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലം എന്നിവയൊക്കെ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 13

ഒരു വരയുടെ സമവാക്യം $3x - 4y + 10 = 0$ ആയാൽ വരയുടെ ചരിവ്, x, y അക്ഷങ്ങളിലെ ഇട അകലങ്ങൾ എന്നിവ എഴുതുക.

പരിഹാരം

$3x - 4y + 10 = 0$ ------(1)

എന്ന വരയുടെ സമവാക്യത്തെ $y = \frac{3}{4}x + \frac{10}{4}$ എന്ന രീതിയിൽ മാറ്റം വരുത്താം.

ഇത് $y = mx + c$ എന്ന മാതൃകയിലാണ്. ആയതിനാൽ വരയുടെ ചരിവ് $m = \frac{3}{4}$

സമവാക്യം (1) നെ $3x - 4y = -10$ എന്നും തുടർന്ന് $\frac{x}{\frac{-10}{3}} + \frac{x}{\frac{5}{2}} = 1$ എന്നും രൂപഭേദം വരുത്തിയാൽ ഇത് $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ എന്ന മാതൃകയിലായിരിക്കും.

അതിനാൽ x ഇട അകലം $a = -\frac{10}{3}$, y ഇട അകലം $b = \frac{5}{2}$

ഉദാഹരണം : 14

$\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ എന്ന വരയുടെ ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ലംബദൂരവും പ്രസ്തുത ലംബം x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവും കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ -------(1)

സമവാക്യം (1) നെ $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 2$ എന്ന സംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിക്കാം.

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 4$$

എങ്കിൽ, $\cos 30° x + \sin 30° y = 4$ എന്ന ലംബദൂര രൂപത്തിൽ സൂചിപ്പിച്ചാൽ

ലംബദൂരം $p = 4$, $\cos \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \omega = \frac{1}{2}$ ആകുന്നു.

$\therefore \omega = 30°$ എന്നും ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം : 15

$y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ എന്നീ വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ എന്ന വരയുടെ ചരിവ്

$$m_1 = \frac{-\left(-\sqrt{3}\right)}{1} = \sqrt{3},$$

$\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ എന്ന വരയുടെ ചരിവ് $m_2 = \dfrac{-(-1)}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് θ ആയാൽ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}}\right|$$

$$= \left|\frac{1-3}{2\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ആയതിനാൽ $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ഇതിൽ നിന്നും $\theta = 30^\circ$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് 30° അല്ലെങ്കിൽ $(180 - 30)^\circ = 150^\circ$ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 16

$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad b_1 \neq 0$
$a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad b_2 \neq 0$

എന്നീ വരകൾ (i) സമന്തരങ്ങളാകുമ്പോൾ $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$ എന്നും

(ii) പരസ്പരം ലംബമാകുമ്പോൾ $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ എന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന വരകൾ

$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad b_1 \neq 0$ --------(1)
$a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad b_2 \neq 0$ --------(1)

ഇവയുടെ ചരിവുകൾ യഥാക്രമം $m_1 = -\dfrac{a_1}{b_1}$, $m_2 = -\dfrac{a_2}{b_2}$ ആകുന്നു.

1. വരകൾ സമാന്തരമായാൽ ചരിവുകൾ തുല്യമാകുന്നു.

   അതായത് $-\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2}$ അല്ലെങ്കിൽ $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$ ആയിരിക്കും

2. വരകൾ പരസ്പരം ലംബമായാൽ $m_1.m_2 = -1$

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right).\left(\frac{a_2}{b_2}\right) = -1$$

അതായത് $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ ആയിരിക്കും

ഉദാഹരണം : 17

(1, -2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതും $x-2y+3=0$ എന്ന വരയ്ക്ക് ലംബവുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

പരിഹാരം

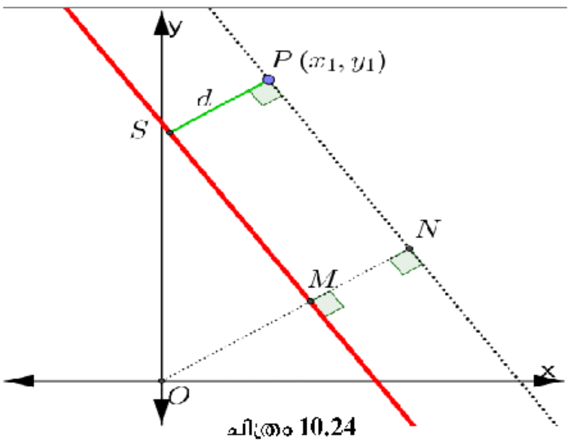
തന്നിരിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം $x-2y+3=0$ --------(1). ഇതിന്റെ ചരിവ് $\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ ആയിരിക്കും. ഇതിന് ലംബമായ ഏതൊരു വരയുടെയും ചരിവ് $\frac{-2}{1} = -2$ ആയിരിക്കും. (ലംബരേഖകളുടെ ചരിവുകളുടെ ഗുണനഫലം -1 ആയതുകൊണ്ട്) ചരിവ് 'm' ഉള്ളതും (x_0, y_0) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യം $y - y_0 = m(x - x_0)$ ആണ്. ആയതിനാൽ $(1, -2)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ പോകുന്നതും ചരിവ് -2 ഉള്ളതുമായ വരയുടെ സമവാക്യം

$y-(-2) = -2(x-1)$ അഥവാ

$y = -2x$ ആയിരിക്കും

10.5 ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഒരു വരയിലേക്കുള്ള അകലം

രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണാൻ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇതുപോലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ആ ബിന്ദു ഉൾപ്പെടാത്ത ഒരു വരയിലേക്കുള്ള ദൂരം കാണുന്നതിന് എന്തെങ്കിലും എളുപ്പവഴി കണ്ടെത്താനാവുമോ? ഈ പ്രശ്നത്തെ പൊതുവായി സമീപിക്കാം. $P(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദുവും $ax + by + c = 0$ എന്ന വരയും തമ്മിലുള്ള അകലം d എന്നു കരുതാം. $ax + by = -c(-c > 0)$. എന്ന വരയിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ദൂരം $\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ആണെന്നറിയാം.



ചിത്രം 10.24

അതായത് ചിത്രത്തിൽ $OM = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. ഇനി $P(x_1, y_1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ $ax + by = c$ എന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായ വര ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. $ax + by = c$ എന്ന വരയുടെ ചരിവ് $-\frac{a}{b}$ ആണ്.

(x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന ഈ വരയുടെ സമവാക്യം

$y - y_1 = -\frac{a}{b}\ (x - x_1)$ ആണ്.

ഇത് ക്രമപ്പെടുത്തി എഴുതിയാൽ $ax + by = ax_1 + by_1$ എന്ന് കിട്ടും. ($ax_1 + by_1 > 0$ ആവുന്ന വിധത്തിൽ എടുക്കാം)

ഇനി ഈ വരയിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലം $ON = \frac{ax_1 + by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ആയിരിക്കും.

അതായത്, ചിത്രത്തിൽ $ON = \frac{ax_1 + by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ആയിരിക്കും.

OM − ON = MN = PS = d ആണ്.

$$\Rightarrow\ d = \text{ON} - \text{OM}$$

$$= \frac{ax_1 + by_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

d എന്നത് ദൂരമായതുകൊണ്ട് കേവലവിലയാണ് എടുക്കേണ്ടത്.

അതായത് (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $ax + by + c = 0$ എന്ന വരയിലേക്കുള്ള

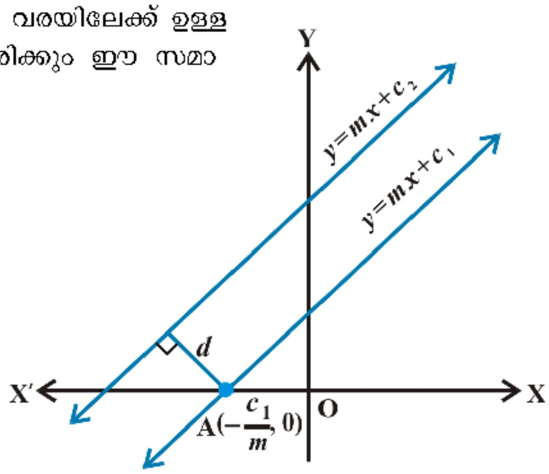
ദൂരം $d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

10.5.1 രണ്ട് സമാന്തരവരകൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം

$ax + by + c_1 = 0$, $ax + by + c_2 = 0$ എന്നിവ രണ്ട് സമാന്തര വരകളാണ്.
$ax + by + c_1 = 0$ എന്ന വരയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു $P(x_1, y_1)$ എടുക്കുക. P യിൽ നിന്നും $ax + by + c_2 = 0$ എന്ന വരയിലേക്ക് ഉള്ള ദൂരം കണ്ടെത്താം. ഇതുതന്നെയായിരിക്കും ഈ സമാന്തര വരകൾക്കിടക്കുള്ള അകലവും.
അതുകൊണ്ട്

$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-c_1 + c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$



ചിത്രം 10.25

ഉദാഹരണം : 18

$3x - 4y - 26 = 0$ എന്ന വരയിൽ നിന്നും $(3, -5)$ എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$Ax + By + C = 0$ എന്ന വരയിൽ നിന്നും (x_1, y_1) ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം,

$d = \dfrac{|\ Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{\ A^2 + B^2}}$ ആണ്.

ഇവിടെ $A = 3$, $B = -4$, $C = -26$, $(3, -5)$ എന്ന ബിന്ദു (x_1, y_1) ന് പകരം എടുക്കാം.

$$\therefore d = \frac{\left|3.3 + (\ \ 4)(\ \ 5)\ \ \ 26\right|}{\sqrt{3^2 + (\ \ 4)^2}} = \frac{3}{5}$$

ഉദാഹരണം : 19

$3x - 4y + 7 = 0$, $3x - 4y + 5 = 0$ എന്നീ സമാന്തര വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $A = 3$, $B = -4$, $C_1 = 7$, $C_2 = 5$ ആകുന്നു

വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $d = \dfrac{|\ 7-5|}{\sqrt{3^2+(\ \ 4)^2}} = \dfrac{2}{5}$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 10.3

1. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളെ ചരിവ് – ഇട അകല രൂപത്തിലാക്കുക. (Slope intercept form). കൂടാതെ വരയുടെ ചരിവ്, അക്ഷങ്ങളിലെ ഇടയകലം എന്നിവ കണ്ടെത്തുക.

   (i) $x + 7y = 0$ (ii) $6x + 3y - 5 = 0$ (iii) $y = 0$.

2. ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളെ ഇട അകല (intercept form) രൂപത്തിൽ എഴുതുക. കൂടാതെ വരയുടെ ഇടയകലങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക.

   (i) $3x + 2y - 12 = 0$ (ii) $4x - 3y = 6$ (iii) $3y + 2 = 0$

3. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളെ ലംബരൂപത്തിൽ എഴുതുക. കൂടാതെ ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും വരയിലേക്കുള്ള ലംബദൂരവും, ഈ ലംബം x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവും കണ്ടെത്തുക.

   (i) $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x - y = 4$.

4. $(-1, 1)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വര $12(x + 6) = 5(y - 2)$ യിലേക്കുള്ള അകലം കാണുക.

5. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 1$ എന്ന വരയിൽ നിന്നും 4 യൂണിറ്റ് അകലെ x അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടെത്തുക.

6. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമാന്തര വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണുക.

   (i) $15x + 8y - 34 = 0, \quad 15x + 8y + 31 = 0$

   (ii) $l(x+y) + p = 0, \quad l(x+y) - r = 0$.

7. $(-2, 3)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതും, $3x - 4y + 2 = 0$ എന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരവുമായ വരയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക.

8. x ഇട അകലം 3 യൂണിറ്റും, $x - 7y + 5 = 0$ എന്ന വരയ്ക്ക് ലംബവുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

9. $\sqrt{3}x + y = 1,\ x + \sqrt{3}y = 1$ എന്നീ വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് കണ്ടെത്തുക.

10. $(h, 3), (4, 1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വര, $7x - 9y - 19 = 0$ എന്ന വരയ്ക്ക് ലംബമായാൽ h ന്റെ വില കണ്ടെത്തുക.

11. (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ പോകുന്നതും, $Ax + By + C = 0$ എന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരവുമായ വരയുടെ സമവാക്യം $A(x - x_1) - B(y - y_1) = 0$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

12. $(2, 3)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ പോകുന്ന രണ്ടു വരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണളവ് $60°$ ആണ്. ഇതിൽ ഒരു വരയുടെ ചരിവ് 2 ആയാൽ രണ്ടാമത്തെ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

13. $(3, 4)$, $(\ 1, 2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജിയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

14. $3x \quad 4y \quad 16 = 0$ എന്ന വരയും $(\ 1, 3)$ ൽ നിന്നും ഈ വരയിലേക്കുള്ള ലംബവും തമ്മിലുള്ള സംഗമബിന്ദു കാണുക.

15. $y = mx + c$ എന്ന വരയും ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഈ വരയിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബവും $(-1, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുന്നുവെങ്കിൽ m, c എന്നിവയുടെ വില കണ്ടെത്തുക.

16. $x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2\theta$, $x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = k$ എന്നീ വരകളിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും വരയ്ക്കുന്ന ലംബദൂരങ്ങൾ യഥാക്രമം p, q എന്നിവയാണെങ്കിൽ $p^2 + 4q^2 = k^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

17. A $(2, 3)$, B $(4, \ 1)$, C $(1, 2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ മൂലകളായ ത്രികോണം ABC യിൽ A യിൽ നിന്ന് BC യിലേക്കുള്ള ഉന്നതിയുടെ നീളവും (altitude) ഉന്നതിയുടെ സമവാക്യവും കാണുക.

18. ഒരു വരയുടെ x, y ഇട അകലങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b യും ഈ വരയിലേക്ക് മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ലംബദൂരം 'p' യും ആയാൽ $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

10.6. രണ്ട് വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന ഒരു കൂട്ടം വരകളുടെ സമവാക്യം

$x + y = 4$, $x - y = 2$ എന്നീ രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കാനായി നാം ചെയ്യുന്ന ഒരു വഴി ഈ രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളും തമ്മിൽ കൂട്ടുകയും കുറക്കുകയും ചെയ്യുകയാണല്ലൊ.

രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളും തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ

$x + y - 4 + (x - y - 2) = 0$ എന്ന് കിട്ടും

അതായത് $2x - 6 = 0$, $x = 3$

ഇവ തമ്മിൽ കുറച്ചാൽ

$$x + y - 4 - (x - y - 2) = 0$$
$$2y - 2 = 0$$
$$y = 1$$

$x = 3$, $y = 1$ എന്ന ഈ പരിഹാരത്തെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് നിരീക്ഷിക്കൂ.

$x = 3$, $y = 1$ എന്ന പരിഹാരം ഗ്രാഫിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് നോക്കൂ. $x = 3$ എന്നതും $y = 1$ എന്നതും പരിഗണിച്ച $x + y = 4$, $x - y = 2$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന വരകളാണ്.

ഇനി ആദ്യസമവാക്യത്തിന്റെ കൂടെ രണ്ടാം സമവാക്യത്തെ 3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചത് കൂട്ടിനോക്കാം.

$$x + y - 4 + 3(x - y - 2) = 0$$

അതായത് $4x - 2y - 10 = 0$

അഥവാ $2x - y - 5 = 0$

ഈ വരയും ആദ്യ രണ്ട് വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവായ (3, 1) ലൂടെ കടന്നുപോവുന്നുണ്ട്.

ഈ ആശയം ഇനി പൊതുവായി കാണാം.

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ രണ്ട് വരകൾ (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുന്നു എന്നു കരുതുക.

അതായത്,

k ഏതെങ്കിലും ഒരു രേഖീയസംഖ്യയാണെങ്കിൽ മേൽ വിശദീകരിച്ച ഉദാഹരണ പ്രകാരം.

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$$
$$a_2x_1 + b_2y_1 + c_1 = 0$$

$a_1x + b_1y + c_1 + k\,(a_2x + b_2y + c_2) = 0$

അതായത് $0 + k(0) = 0$

അതായത്, ഈ സമവാക്യം (x_1, y_1) ലൂടെ കടന്നു പോവുന്ന നേർവരയാണ്.

k യുടെ എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യാവിലയ്ക്കും അങ്ങനെയൊരു വര ലഭിക്കും.

അതായത് ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിപറയാം. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ എന്നീ

രണ്ട് നേർവരകൾ സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നുപോവുന്ന അനന്ത എണ്ണം നേർവരകളുണ്ട്. ഇവയെല്ലാം $a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ എന്ന സമവാക്യം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 20

- $x = 0, y = 0$ എന്ന നേർവരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന ഒരു കൂട്ടം വരകളുടെ സമവാക്യം എഴുതുക.

പരിഹാരം

$x + ky = 0$ എന്നായിരിക്കുമല്ലോ ആ സമവാക്യം. ഇത് ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന നേർവരകളുടെ സമവാക്യമാണ്.

ഉദാഹരണം : 21

- $x - 7y + 5 = 0, 3x + y - 7 = 0$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$x - 7y + 5 = 0, 3x + y - 7 = 0$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന ഏതൊരു വരയേയും $x - 7y + 5 + k(3x + y - 7) = 0$ എന്നെഴുതാം. ഈ വര y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകണമെങ്കിൽ y യുടെ ഗുണകം പൂജ്യമാകണം.

അതായത്;

$(1 + 3k)x + (k - 7)y + 5 - 7k = 0$ എന്നെഴുതാം.

$k - 7 = 0 \Rightarrow k = 7$

k ക്ക് 7 എന്ന വില നൽകിയാൽ $22x - 44 = 0$

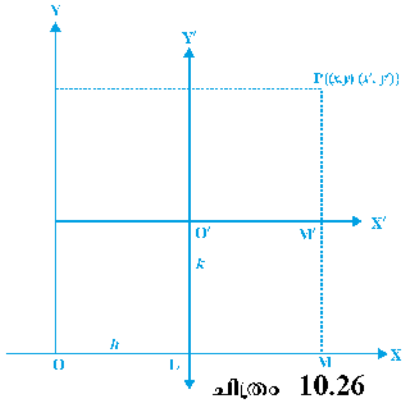
അതായത് $x - 2 = 0$ എന്ന് കിട്ടും

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 10.4

1. $3x + 4y - 7, x - y + 2 = 0$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്നതും ചരിവ് 5 ഉം ആയ വരയുടെ സമവാക്യം കാണുക.
2. $x + 2y - 3 = 0, 4x - y + 7 = 0$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ പോവുന്നതും $5x + 4y - 20 = 0$ എന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരവുമായ വരയുടെ സമവാക്യം കാണുക.
3. $2x + 3y - 4 = 0, x - 5y = 7$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്നതും x ഇടയകലം -4 ഉം ആയ വരയുടെ സമവാക്യം കാണുക.
4. $5x - 3y = 1, 2x + 3y - 23 = 0$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന, $5x - 3y - 1 = 0$ എന്ന വരയ്ക്ക് ലംബമായ വരയുടെ സമവാക്യം കാണുക.

10.7 ആധാരബിന്ദുവിന്റെ മാറ്റം (Shifting of origin)

സംഖ്യാരേഖയിൽ ആദ്യം അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത് ആധാരസംഖ്യയായ 0 ആണ്. ഈ ബിന്ദു രേഖയിൽ എവിടെ വേണമെങ്കിലും നമുക്ക് അടയാളപ്പെടുത്താം. ഇതുപോലെ ഒരു തലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളെ സംഖ്യാപരമായി സൂചിപ്പിക്കാൻ ആ തലത്തിൽ പരസ്പരം ലംബമായ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് നേർവരകളെ അക്ഷങ്ങളായി നാം പരിഗണിക്കുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്. ഈ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദു ആണ് ആധാരബിന്ദു. ഈ അടിസ്ഥാന അക്ഷങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള അകലം ഉപയോഗിച്ചാണല്ലൊ നാം ബിന്ദുക്കൾക്ക് സൂചകസംഖ്യകൾ നൽകുന്നത്.



ചിത്രം 10.26

ചിത്രത്തിൽ x, y അക്ഷങ്ങൾ പ്രകാരം A യുടെ സൂചകസംഖ്യ (x, y) ആണ്.

ഇനി x, y അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായി പുതിയ രണ്ട് അക്ഷങ്ങൾ x', y' എന്നിവ വരക്കുന്നു. ഇവയുടെ സംഗമബിന്ദുവാണ് O′. അതായത്

പുതിയ അക്ഷങ്ങൾ പ്രകാരം O′ ആയിരിക്കും ആധാരബിന്ദു.

A(x, y) എന്നത് A യുടെ x, y അക്ഷങ്ങൾ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയ സൂചകസംഖ്യകളാണ്. ഇതിന് x', y' അക്ഷങ്ങൾ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തി പറയുമ്പോൾ മാറ്റം വരും.

O′ ന്റെ പുതിയ സൂചകസംഖ്യ $(0, 0)$ ആയിരിക്കും. ഇത് പഴയ x, y അക്ഷങ്ങളെ ആധാരമായി പറയുമ്പോൾ (h, k) ആയിരുന്നു എന്ന് കരുതാം. അതായത് xy തലത്തിലെ (h, k) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് ആധാരബിന്ദു മാറ്റുമ്പോൾ A(x, y) എന്ന സൂചകസംഖ്യക്ക് എന്ത് സംഭവിക്കുന്നു. ഇത് (x', y') ആയി മാറുന്നു എന്ന് കരുതുക.

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും

$x = x' + h$, $y = y' + k$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം : 22

(1, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് ആധാരബിന്ദു മാറ്റിയാൽ (3, −4) ന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾക്ക് എന്ത് മാറ്റം വരും?

പരിഹാരം

ഇവിടെ (1, 2) വിലേക്കാണ് ആധാരബിന്ദു മാറുന്നത്

$\therefore h = 1, k = 2$

$x = 3, y = -4$ ആണ് എന്നും അറിയാം

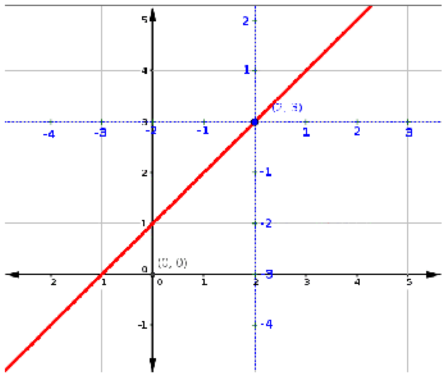
അതുകൊണ്ട് $x' = x - 1 \Rightarrow x' = 3 - 1 = 2$

$$y' = y - 2 \Rightarrow y' = -4 - (2) = -6$$

(3, −4) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ മാറിയ സൂചകസംഖ്യകൾ (2, −6)

ഉദാഹരണം : 23

ചിത്രത്തിൽ നേർവരയുടെ സമവാക്യം $x - y + 1 = 0$ ആണ്. (2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് ആധാരബിന്ദു മാറ്റിയാൽ ഈ വരയുടെ സമവാക്യം എന്താകും?



ചിത്രം 10.27

(x, y) എന്ന ബിന്ദുമാറി (x', y') എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് മാറുമല്ലോ. ഈ മാറ്റം ഈ നേർവരയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾക്കും സംഭവിക്കും.

$h = 2, k = 3$

$x = x' + 2, y = y' + 3$

അതായത് $x - y + 1 = 0$ എന്ന നേർവര

$x' + 2 - (y' + 3) + 1 = 0$ എന്നായി മാറും

അതായത് $x' - y' = 0$ എന്നാകും

ഈ സമവാക്യത്തെ വേണമെങ്കിൽ

$x - y = 0$ എന്നായും പറയാം.

ഇവിടെ സ്ഥിരസംഖ്യ ഇല്ല എന്ന് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കണം. കാരണം ആധാര ബിന്ദുവിലൂടെയാണ് കടന്നു പോവുന്നത്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 10.5

1. ആധാരബിന്ദു(−3, −2)ലേക്ക് മാറുമ്പോൾ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ ബിന്ദുവിന്റെയും മാറിയ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.

   i. (1, 1) ii. (0, 1) iii. (5, 0) iv. (−1, −2) v. (3, −5)

2. ആധാരബിന്ദു (1, 1) ലേക്ക് മാറുമ്പോൾ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ സമവാക്യത്തിന്റെയും പുതിയ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

   (i) $x^2 + xy - 3y^2 - y + 2 = 0$

   (ii) $xy - y^2 - x + y = 0$

   (iii) $xy - x - y + 1 = 0$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 24

1. $2x+y-3=0,\ \ 5x+ky-3=0\ ,\ \ 3x-y-2=0$ എന്നീ വരകൾ ഒരു പൊതു ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്ന് പോകുന്നുവെങ്കിൽ k യുടെ വിലകാണുക.

പരിഹാരം

$2x + y - 3 = 0$ -------------- (1)

$5x + ky - 3 = 0$ ------------- (2)

$3x - y - 2 = 0$ --------------- (3)

(1), (3) എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കണ്ടാൽ $x = 1, y = 1$ എന്ന് ലഭിക്കും.

(1, 1) എന്ന ബിന്ദു (2) -ാം സമവാക്യത്തിൽ കൊടുത്താൽ

$5 + k - 3 = 0.$

$\therefore\ k = -2$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 25

x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി 135° കോണുണ്ടാക്കുന്ന ഒരു വരയിലെ P(4, 1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഈ വര $4x \quad y - 0$ എന്ന വരയുമായുള്ള സംഗമബിന്ദു വരെയുള്ള അകലം കാണുക.

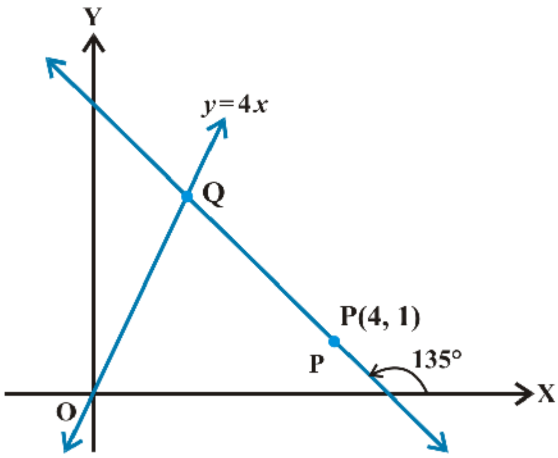
പരിഹാരം

ഇവിടെ 135°കോൺ നിർണയിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിച്ച ശേഷം രണ്ട് വരകളുടെയും പൊതുവായ ബിന്ദു കണ്ടുപിടിച്ചാൽ ദൂരം കണക്കാക്കുന്നത് എളുപ്പമാകും.

വരയുടെ സമവാക്യം

$$y - 1 = \tan(135°)\,(x - 4)$$
$$y - 1 = -(x - 4)$$
$$x + y = 5 \text{ --------(1)}$$
$$4x - y = 0 \text{ --------(2)}$$

(1), (2) എന്നിവയുടെ പരിഹാരം കണ്ടാൽ $x = 1, y = 4$ എന്ന് ലഭിക്കും. അതുകൊണ്ട് P (4, 1), Q (1, 4) എന്നിവ തമ്മിലുള്ള അകലം $3\sqrt{2}$ യൂണിറ്റ്



ചിത്രം 10.28

ഉദാഹരണം : 26

(1, 2) എന്ന ബിന്ദുവിന് $x - 3y + 4 = 0$ എന്ന വര ആധാരമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന പ്രതിബിംബം കാണുക.

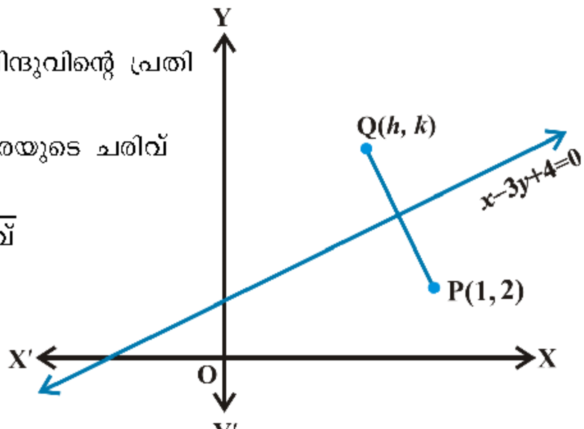
പരിഹാരം

$x - 3y + 4 = 0$ ----------- (1)

Q (h, k) ആണ് P (1, 2) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ പ്രതിബിംബം എന്ന് വിചാരിക്കുക.

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും PQ എന്ന വരയുടെ ചരിവ്

$$\frac{-1}{x - 3y + 0 \text{ എന്ന വരയുടെ ചരിവ്}}$$



ചിത്രം 10.29

അതായത്, $\dfrac{k-2}{h-1} = \dfrac{-1}{\frac{1}{3}}$

$3h + k = 5$ ---------------(2)

PQ വിന്റെ മധ്യബിന്ദു $\left(\dfrac{h+1}{2}, \dfrac{k+2}{2}\right)$ സമവാക്യം (1) ലെ ബിന്ദുവാണ്.

അതുകൊണ്ട്, $\dfrac{h+1}{2} - 3\left(\dfrac{k+2}{2}\right) + 4 = 0$

$$h - 3k = -3 \text{ ---------------(3)}$$

(2), (3) ഇവയ്ക്ക് പരിഹാരം കണ്ടാൽ $h = \dfrac{6}{5},\ k = \dfrac{7}{5}$.

അതുകൊണ്ട് (1, 2) എന്നതിന്റെ പ്രതിബിംബം $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$.

ഉദാഹരണം : 27

$x = 0,\quad y = m_1 x + c_1, y = m_2 x + c_2$ എന്നീ വരകൾ നിർണയിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\dfrac{(c_1 - c_2)^2}{2|m_1 - m_2|}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$y = m_1 x + c_1$ ----------------(1)

$y = m_2 x + c_2$ ---------------- (2)

$x = 0$ ----------------(3)

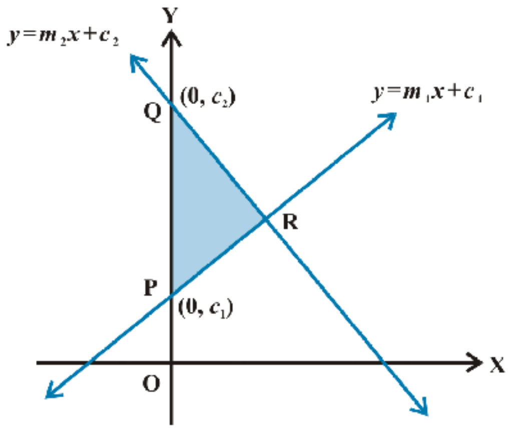
(1), (3) ഇവയുടെ സംഗമബിന്ദു $(0, c_1)$

(2), (3) ഇവയുടെ സംഗമബിന്ദു $(0, c_2)$

(1), (3) ഇവയുടെ സംഗമബിന്ദു

$$\left(\frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1 c_2 - m_2 c_1}{m_1 - m_2}\right)$$

അതുകൊണ്ട്, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്



ചിത്രം 10.30

$$\frac{1}{2}\left|0 + 0 + \frac{(c_2 - c_1)}{(m_1 - m_2)}(c_2 - c_1)\right| = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2|m_1 - m_2|}$$

ഉദാഹരണം : 28

$5x - y + 4 = 0$, $3x + 4y - 4 = 0$ എന്നീ വരകളിൽ അഗ്രബിന്ദുക്കളുള്ള ഒരു രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണ് (1, 5). ഈ രേഖാഖണ്ഡം നിർണയിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

$5x - y + 4 = 0$ --------------(1)

$3x + 4y - 4 = 0$ -------------(2)

രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ (α_1, β_1), (α_2, β_2) ആണെന്നിരിക്കട്ടെ

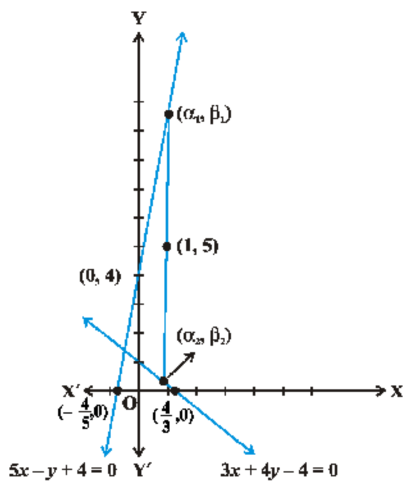
എങ്കിൽ

$$5\alpha_1 - \beta_1 + 4 = 0$$

$$3\alpha_2 + 4\beta_2 - 4 = 0$$

$\beta_1 = 5\alpha_1 + 4$ എന്നും

$\beta_2 = \dfrac{4 - 3\alpha_2}{4}$ എന്നു ലഭിക്കും



ചിത്രം 10.31

(α_1, β_1), (α_2, β_2) ഇവയുടെ മധ്യബിന്ദുവാണ് (1, 5)

അതുകൊണ്ട്

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 1, \quad \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = 5$$

$$\alpha_1 \alpha_2 = 2, \quad \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = 5$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \text{ ------------------(3)}$$

$$\frac{(5\alpha_1 + 4) + \left(\frac{4 - 3\alpha_2}{4}\right)}{2} = 5$$

$$20\alpha_1 - 3\alpha_2 = 20 \text{ ------------------(4)}$$

(3), (4) ഇവയ്ക്ക് പരിഹാരം കണ്ടാൽ $\alpha_1 = \frac{26}{23}$, $\alpha_2 = \frac{20}{23}$ ഇവ ഉപയോഗിച്ച്

$\beta_1 = \frac{222}{23}$ എന്ന് ലഭിക്കും.

(1, 5), (α_1, β_1) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി പോകുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം.

$$y - 5 = \frac{\left(\frac{222}{23} - 5\right)}{\left(\frac{26}{23} - 1\right)}(x - 1)$$

$$107x - 3y - 92 = 0$$

ഉദാഹരണം : 29

$3x - 2y = 5$, $3x + 2y = 5$ എന്നീ വരകളിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന മറ്റൊരു ബിന്ദുവിന്റെ പാത ഒരു വരയായിരിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$3x - 2y = 5 \text{ ----------(1)}$$
$$3x + 2y = 5 \text{ ----------(2)}$$

(h, k) എന്ന ബിന്ദു (1), (2) ഇവയിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിലാണ്.

അതുകൊണ്ട് $\left|\frac{3h - 2k - 5}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}\right| = \left|\frac{3h + 2k - 5}{\sqrt{3^2 + 2^2}}\right|$

$$3h - 2k - 5 = \pm (3h + 2k - 5)$$

$$3h - 2k - 5 = 3h + 2k - 5 \text{ ആയാൽ,}$$

$$k = 0$$

$$3h - 2k - 5 = -3h - 2k + 5 \text{ ആയാൽ,}$$

$$h = \frac{5}{3}$$

$y = 0$ എന്ന വരയും $x = \dfrac{5}{3}$ എന്ന വരയും ലഭിക്കുന്നു.

ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിച്ച് നോക്കൂ.

കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. $(k \quad 3)\, x \quad (4 \quad k^2)\, y + k^2 - 7k + 6 = 0$ എന്ന വരയിൽ k യുടെ വില ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾക്കനുസൃതമായി കാണുക.
   a. x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുമ്പോൾ
   b. y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുമ്പോൾ
   c. ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുമ്പോൾ
2. $x \cos\theta + y \sin\theta = p$ എന്ന വര $\sqrt{3}\,x + y + 2 = 0$ എന്ന വരയുടെ ലംബദൂര രൂപത്തിൽ മാറ്റി p, θ എന്നിവ കാണുക.
3. ഒരു വരയുടെ x, y അക്ഷങ്ങളുടെ ഇടയകലങ്ങളുടെ തുകയും ഗുണനഫലവും യഥാക്രമം 1, –6 എന്നിവ ആയാൽ വരയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക.
4. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 1$ എന്ന വരയിലേക്ക് 4 യൂണിറ്റ് അകലം വരുന്ന y അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ കാണുക.
5. $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(\cos\phi, \sin\phi)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ലംബദൂരം കാണുക.
6. y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായതും $x \quad 7y + 5 = 0$, $3x + y = 0$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമ ബിന്ദുവിലൂടെയും പോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.
7. $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{6} = 1$ എന്ന വരയ്ക്ക് ലംബമായതും y അക്ഷവുമായി ഈ വര സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.
8. $y \quad x - 0$, $x + y - 0$, $x \quad k - 0$ എന്നീ വരകൾ രൂപീകരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

9. $3x + y - 2 = 0$, $px + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 3 = 0$ എന്നീ മൂന്ന് വരകൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുകയാണെങ്കിൽ p യുടെ വില കാണുക.

10. $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$, $y = m_3x + c_3$ എന്നീ മൂന്ന് വരകൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുകയാണെങ്കിൽ $m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

11. $(3, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതും $x - 2y = 3$ എന്ന വരയുമായി $45°$ കോണളവുള്ളതുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

12. $4x + 7y - 3 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ പോകുന്നതും തുല്യ ഇട അകലമുള്ളതുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

13. $y = mx + c$ എന്ന വരയുമായി θ കോണളവ് ഉണ്ടാക്കുന്നതും, മൂലബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യം $\dfrac{y}{x} = \pm\dfrac{m+\tan\theta}{1+m\tan\theta}$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

14. $(1, 1)$, $(5, 7)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയെ, $x + y = 4$ എന്ന വര ഭാഗിക്കുന്ന അംശബന്ധം കാണുക.

15. $(1, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $4x + 7y + 5 = 0$ എന്ന വരയിലേക്കുള്ള അകലം $2x - y = 0$ എന്ന വരയിലൂടെ കാണുക.

16. $(1, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ ഏതുദിശയിൽ വരയ്ക്കുന്ന വരയാണ് $x + y = 4$ എന്ന വരയുമായുള്ള സംഗമബിന്ദു ആ ബിന്ദുവുമായി 3 യൂണിറ്റ് അകലം പാലിക്കുന്നത്.

17. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $(1, 3)$, $(-4, 1)$ ആയാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെയും ലംബത്തിന്റെയും സമവാക്യങ്ങൾ എഴുതുക.

18. $x + 3y = 7$ എന്ന രേഖയെ ആസ്പദമാക്കി $(3, 8)$ എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ പ്രതിബിംബം കാണുക. ($x + 3y = 7$ എന്ന വര ഒരു കണ്ണാടിയായി സങ്കൽപ്പിക്കുക)

19. $y = 3x + 1$, $2y = x + 3$ എന്നീ വരകൾ $y = mx + 4$ എന്ന വരയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന ചരിവുകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ m ന്റെ വില കാണുക.

20. P (x, y) എന്ന ചലിക്കുന്ന ബിന്ദു $x + y - 5 = 0$, $3x - 2y + 7 = 0$ എന്നീ വരകളിലേക്കുള്ള ലംബദൂരങ്ങളുടെ തുക എപ്പോഴും 10 ആകുന്നുവെങ്കിൽ P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാത ഒരു നേർവരയിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

21. $9x + 6y - 7 = 0$, $3x + 2y + 6 = 0$ എന്നീ സമാന്തരവരകളിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിലുള്ള വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

22. (1, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുവരുന്ന പ്രകാശ കിരണം x അക്ഷത്തിലെ A എന്ന ബിന്ദുവിൽ വച്ച് പ്രതിഫലിക്കുന്നു. പ്രതിഫലന കിരണം (5, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോവുകയാണെങ്കിൽ A എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചക സംഖ്യകളെഴുതുക.

23. $\left(\sqrt{a^2-b^2}, 0\right)$, $\left(-\sqrt{a^2-b^2}, 0\right)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1$ എന്ന വരയിലേക്കുള്ള ലംബദൂരങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം b^2 എന്ന് തെളിയിക്കുക.

24. $2x-3y+4=0$, $3x+4y-5=0$ എന്നിവ രണ്ട് നേർപാതകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളാണ്. ഈ പാതകൾ ചേരുന്നിടത്ത് നിൽക്കുന്ന ഒരു വ്യക്തി, $6x-7y+8=0$ എന്ന മറ്റൊരു പാതയിലേക്ക് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ സമയം കൊണ്ട് എത്താൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ സഞ്ചാരപാതയുടെ സമവാക്യം കാണുക.

സംഗ്രഹം

- (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്ന് പോകുന്ന വരയുടെ ചരിവ് $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$, $x_1 \neq x_2$.
- ഒരു വര x അക്ഷത്തിന്റെ പോസ്റ്റീവ് ദിശയുമായി α കോണളവ് ഉണ്ടാക്കുന്നുവെങ്കിൽ വരയുടെ ചരിവ് $m=\tan\alpha$, $\alpha \neq 90°$.
- തിരശ്ചീനവരകളുടെ (x അക്ഷവും, x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരവും) ചരിവ് പൂജ്യം. ലംബവരകളുടെ (y അക്ഷവും, y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരവും) ചരിവ് നിർവചിച്ചിട്ടില്ല.
- L_1, L_2 എന്നീ വരകളുടെ ചരിവുകൾ m_1, m_2 വും അവ തമ്മിലുള്ള ന്യൂന കോണളവ് θ യും ആയാൽ $\tan\theta=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|$, $1+m_1m_2 \neq 0$.
- രണ്ട് വരകൾ സമാന്തരമായിരിക്കാം എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം അവയുടെ ചരിവിന്റെ അളവുകൾ തുല്യമായിരിക്കും.
- രണ്ട് വരകൾ ലംബമായാൽ അവയുടെ ചരിവിന്റെ അളവുകളുടെ ഗുണനഫലം -1 ആയിരിക്കും.

- A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു രേഖയിലായിരിക്കും എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം AB യുടെ ചരിവ്, BC യുടെ ചരിവിന് തുല്യമായിരിക്കും.
- x അക്ഷത്തിൽ നിന്നും a യൂണിറ്റ് അകലെയുള്ള തിരശ്ചീന വരയുടെ സമവാക്യം $y = a$ അല്ലെങ്കിൽ $y = -a$ ആയിരിക്കും.
- y അക്ഷത്തിൽ നിന്നും b യൂണിറ്റ് അകലത്തിലുള്ള x അക്ഷത്തിന് ലംബമായ വരയുടെ സമവാക്യം $x = b$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -b$ ആയിരിക്കും.
- (x, y) എന്ന ബിന്ദു (x_o, y_o) എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി പോകുന്നതും ചരിവിന്റെ അളവ് m ആയ വരയിൽ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം വരയുടെ സമവാക്യം $y - y_o = m\,(x - x_o)$ ആയിരിക്കാം.
- (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി പോകുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം

  $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$ ആയിരിക്കാം.
- ചരിവ് m, y ഇട അകലം c യും ആയ ഒരു വരയിലുള്ള ബിന്ദുവാണ് (x, y) എങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം $y = mx + c$
- ചരിവ് m, x ഇട അകലം d യും ആയാൽ വരയുടെ സമവാക്യം $y = m\,(x - d)$.
- x, y ഇടയകലങ്ങൾ a, b എന്നിവയായാൽ വരയുടെ സമവാക്യം

  $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$
- ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും വരയിലേക്കുള്ള ലംബദൂരം p യും ലംബം x അക്ഷവുമായി നിർണയിക്കുന്ന അപ്രദക്ഷിണ കോണളവ് ω യും ആയാൽ സമവാക്യം $x\cos\omega + y\sin\omega = p$.
- $Ax + By + C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ ഏന്നതാണ് വരയുടെ പൊതുസമവാക്യം.
- (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $Ax + By + C = 0$ എന്ന വരയിലേക്കുള്ള കുറഞ്ഞദൂരം $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

- സമാന്തര വരകളായ $Ax + By + C_1 = 0$, $Ax + By + C_2 = 0$, തമ്മിലുള്ള അകലം $d = \dfrac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ആയിരിക്കും.

- $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ എന്നീ നേർവരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു കൂട്ടം നേർവരകളുടെ സമവാക്യം $a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ ആണ്. ഇവിടെ k ഒരു രേഖീയസംഖ്യയാണ്.

- xy തലത്തിലെ (h, k) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് ആധാര ബിന്ദുമാറിയാൽ $A(x, y)$ എന്ന ബിന്ദു പുതിയ ആധാര ബിന്ദു അനുസരിച്ച് $(x - h, y - k)$ ആകും. അതായത് $x = x' + h$ $y = y' + k$

P5R7U8

അധ്യായം 11

വൃത്തസ്തൂപികാ പരിച്ഛേദങ്ങൾ (CONIC SECTIONS)

❖അറിവും യഥാർഥ ജീവിതവുമായുള്ള ബന്ധം നിങ്ങളുടെ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് വെളിപ്പെടട്ടെ. അറിവിലൂടെ ഉണ്ടാകുന്ന പരിണാമം അവർ മനസ്സിലാക്കട്ടെ – ബെർട്രൻഡ് റസൽ ❖

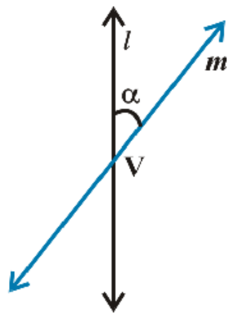
11.1 ആമുഖം

കഴിഞ്ഞ അധ്യായത്തിൽ വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങളും പ്രത്യേകതകളും മനസ്സിലാക്കിയല്ലോ. ഇവിടെ വൃത്തസ്തൂപികാ പരിച്ഛേദങ്ങളും അവയുടെ സമവാക്യങ്ങളും ചില പ്രത്യേകതകളും ചർച്ച ചെയ്യാം. ഏറെ പരിചിതമായ വൃത്തവും, കൂടാതെ സമവക്രം, ന്യൂനവക്രം, അധിവക്രം തുടങ്ങിയ വക്രങ്ങളും അവയുടെ പ്രത്യേകതകളുമാണ് ചർച്ചചെയ്യാൻ ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്. സമവക്രം, അധിവക്രം എന്നിവയ്ക്ക് പേര് നൽകിയത് അപ്പലോണിയസ് എന്ന ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനാണ്. യഥാർഥത്തിൽ ഈ നാല് രൂപങ്ങളും ഒരു ഇരട്ട വൃത്തസ്തൂപികയുടെ പരിച്ഛേദങ്ങളാണ്. ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്തോടെ ഇത് മനസ്സിലാക്കാം. 1604 ൽ ഗലീലിയോ എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ, ഒരു വസ്തു മുകളിലേക്ക് എറിഞ്ഞാൽ അത് സഞ്ചരിക്കുന്ന പാത സമവക്രമായിരിക്കും എന്ന് വിശദീകരിക്കുകയുണ്ടായി. കൂടാതെ വാഹനങ്ങളിലും മറ്റും ഉപയോഗിക്കുന്ന റിഫ്ളക്ടറുകൾ, ടെലിസ്കോപ്പിലെ കണ്ണാടികൾ, റഡാർ, ഡിഷ് ആന്റിനകൾ എന്നിവയിലൊക്കെ സമവക്രത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. 1609 ൽ കെപ്ലർ എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞൻ ഗ്രഹങ്ങളുടെ സഞ്ചാരപാത ന്യൂനവക്രമാണെന്നും സൂര്യൻ അതിന്റെ ഒരു ഫോക്കസിൽ ആയിരിക്കും എന്നും തെളിയിക്കുകയുണ്ടായി. കൂടാതെ പല ധൂമകേതുക്കളുടെ പാതയും ഇത്തരം വക്രങ്ങളിൽ കൂടിയാണ് എന്ന് കണ്ടെത്തി. പാലങ്ങളുടെ നിർമ്മാണം, ആർച്ചുകളുടെ നിർമ്മാണം, വൃക്കയിലെ കല്ലുകൾ നീക്കം ചെയ്യുന്ന ചികിൽസാ രീതികൾ എന്നിവയിൽ ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ആറ്റത്തിന്റെ ന്യൂക്ലിയസിലുള്ള ഇലക്ട്രിക് ഫീൽഡിലൂടെയുള്ള α (ആൽഫ) കണത്തിന്റെ സഞ്ചാരം നിർണയിക്കുന്നതിലും ബാലിസ്റ്റിക്സിലും (പ്രക്ഷേപണ ശാസ്ത്രം) അധിവക്രത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്.

അപ്പലോണിയസ്
(ക്രിമു 190 - 262)

11.2 വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഛേദകം

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രവർത്തനം ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് വിശദമാക്കാം. l ഒരു ലംബവരയാണ്, m എന്നത് l എന്ന വരയെ V എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുകയും α കോണളവ് നിർണയിക്കുകയും ചെയ്യുന്ന മറ്റൊരു വരയാണ്. m എന്ന വരയെ V എന്ന ബിന്ദു ആധാരമാക്കി α കോണളവിൽ തന്നെ കറക്കിയാൽ നമുക്ക് ഒരു ഇരട്ട വൃത്തസ്തൂപിക ലഭിക്കും V എന്നത് ഇവയുടെ പൊതു ശീർഷവും ആയിരിക്കും. m എന്ന വരയെ ഈ സ്തൂപികയുടെ ജനറേറ്റർ (generator) എന്നു വിളിക്കാം. ഇനി, ഈ സ്തൂപികയെ ഒരു തലം കൊണ്ട് ഛേദിക്കാം. 'l' എന്ന ലംബവരയുമായി തലം ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവ് β എന്നു വിചാരിക്കുക. β യുടെ അളവ് മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ഈ തലം സ്തൂപികയെ പല രീതിയിൽ ഛേദിക്കുകയും പല വക്രങ്ങൾ ഉണ്ടാകുകയും ചെയ്യും. അവ എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.



ചിത്രം 11.1

സാധ്യത 1 തലം V എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്നില്ലെങ്കിൽ

(i) $\beta = 90^\circ$ ആയാൽ വൃത്തം

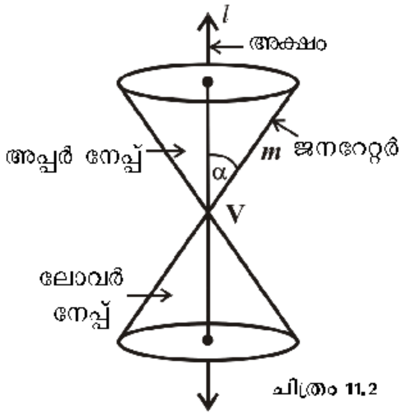
(ii) $\alpha < \beta < 90^\circ$ ആയാൽ ന്യൂനവക്രം (എലിപ്സ്)

(iii) $\beta = \alpha$ ആയാൽ സമവക്രം (പരാബൊള)

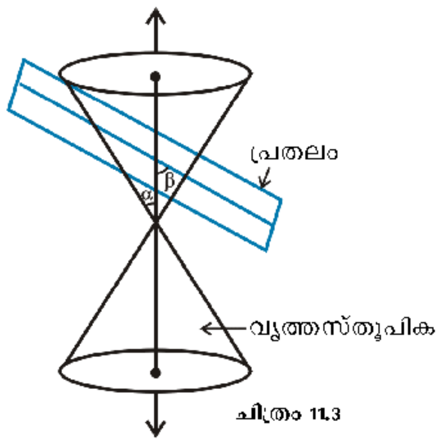
(iv) $0 \leq \beta < \alpha$ ആയാൽ അധിവക്രം ലഭിക്കും (ഹൈപ്പർബൊള)

ജിയോജിബ്ര വഴി പരിശോധിക്കുമല്ലോ.

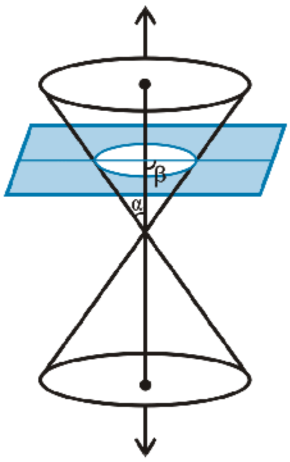
> ഇൻപുട്ട് കമാന്റ് നൽകി A(2, 0, 3), B(-2, 0, -3), C(0, 0, -4), D(0, 0, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക segment ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് AB, CD എന്നീ വരകൾ വരയ്ക്കുക. (AB യുടെ പേര് f എന്നും CD യുടെ പേര് g എന്നുമാവും - Algebra view നോക്കുക). ഒരു angle slider α നിർമ്മിക്കുക., Rotate (f, α, g) എന്ന കമാന്റ് നൽകുമ്പോൾ f' എന്ന പേരിൽ പുതിയ ഒരു വര ലഭിക്കും. ഇതിൽ Right click ചെയ്ത് Trace നൽകുക. സ്ലൈഡറിന് ആനിമേഷൻ നൽകി നോക്കൂ.



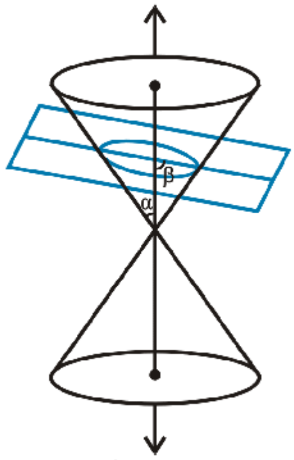
ചിത്രം 11.2



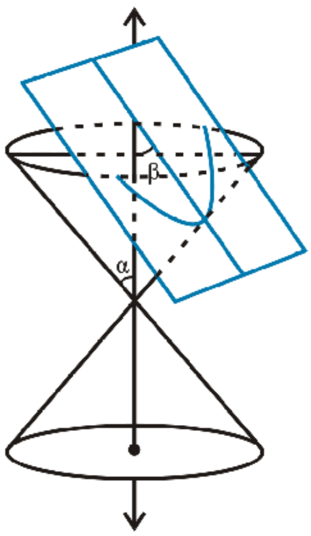
ചിത്രം 11.3



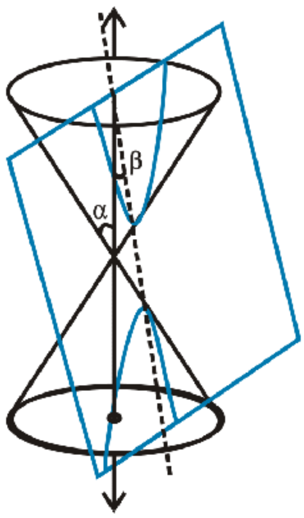
ചിത്രം 11. 4



ചിത്രം 11. 5



ചിത്രം 11. 6



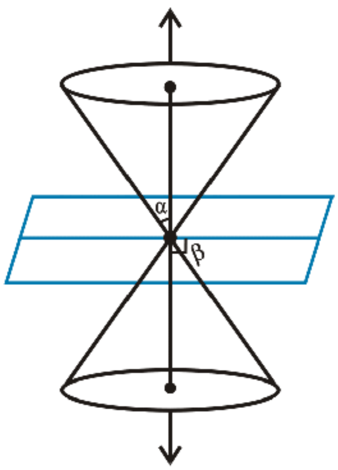
ചിത്രം 11. 7

സാധ്യത 2 തലം V എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്ന് പോയാൽ

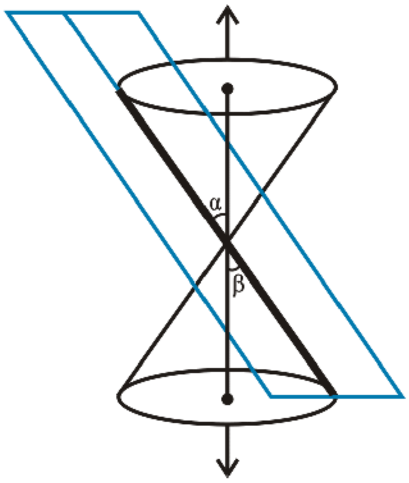
(i) $\alpha < \beta \leq 90^{\circ}$, ആയാൽ ഒരു ബിന്ദു മാത്രം (ചിത്രം 11.8)

(ii) $\beta = \alpha$, ആയാൽ നേർവര (സമവക്രം ലോപിച്ച്) (ചിത്രം 11.9)

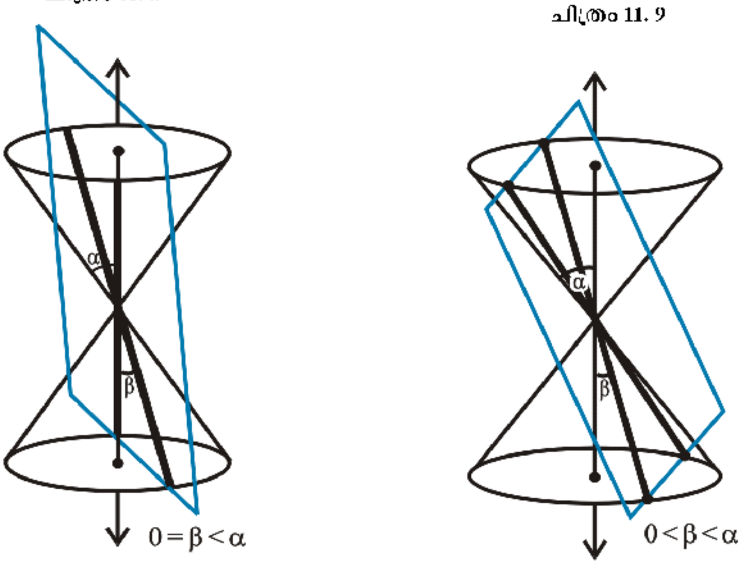
(iii) $0 \leq \beta < \alpha$, നേർവര ജോടികൾ (അധിവക്രം ലോപിച്ച്) (ചിത്രം 11.10)



ചിത്രം 11. 8



ചിത്രം 11. 9

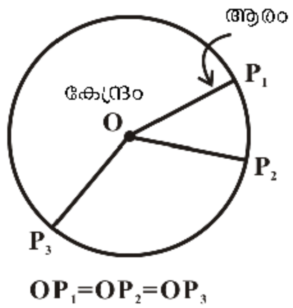


(a) ചിത്രം 11. 10 (b)

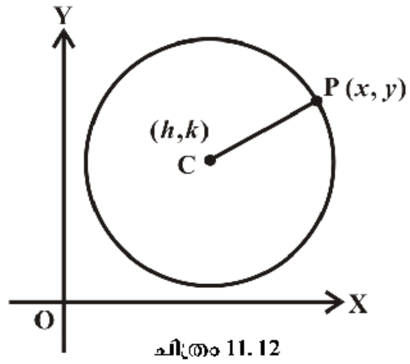
വൃത്തസ്തൂപികയിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്ന വക്രങ്ങളായതു കൊണ്ടാണ് ഇവയെ വൃത്തസ്തൂപികാപരിച്ഛേദങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കുന്നത്. ഇനി ഇവയെ ഒരു കാർട്ടീഷൻ തലത്തിലേക്ക് മാറ്റി ചിന്തിക്കാം. ഇത്തരം വക്രങ്ങൾ എല്ലാം പ്രത്യേക നിബന്ധനകൾക്ക് വിധേയമായി തലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാതയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

11.3 വൃത്തം (Circle)

നിർവചനം: ഒരു തലത്തിലുള്ള ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽനിന്നും നിശ്ചിത അകലത്തിൽ അതേ തലത്തിൽ മറ്റൊരു ബിന്ദു സഞ്ചരിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന പാതയാണ് വൃത്തം. നിശ്ചിത ബിന്ദുവിനെ വൃത്തകേന്ദ്രം എന്നും നിശ്ചിത അകലത്തെ ആരം എന്നും വിളിക്കുന്നു.



ചിത്രം 11.11



ചിത്രം 11.12

വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം വളരെ എളുപ്പം കണ്ടുപിടിക്കാം. വൃത്തകേന്ദ്രം (h, k) യും ആരം 'r' ഉം ആയാൽ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും $|CP| = r$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

അനുപ്രമാണം:

കേന്ദ്രം (0,0), ആരം r എന്നിവ ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $x^2 + y^2 = r^2$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 1

കേന്ദ്രം (–3, 2) ഉം ആരം 7 യൂണിറ്റുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $(h, k) = (-3, 2)$, $r = 7$ ആണല്ലോ. അതുകൊണ്ട് $(x + 3)^2 + (y-2)^2 = 7^2$,

അതായത്, $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 36 = 0$ ആയിരിക്കും വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം.

ഉദാഹരണം : 2

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം $2x - y = 3$ എന്ന വരയിലാണ്. കൂടാതെ ആ വൃത്തത്തിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളാണ് (5, 5), (6, 4) എങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ A = (5, 5), B = (6, 4) എന്നിരിക്കട്ടെ (h, k) എന്ന ബിന്ദു $2x - y = 3$ എന്ന വരയിലായതു കൊണ്ട് $2h - k = 3$ ----(1)

കൂടാതെ, CA = CB = ആരം.

$$\sqrt{(h-5)^2 + (k-5)^2} = \sqrt{(h-6)^2 + (k-4)^2}$$

$-2h + 2k = -2$ -------- (2)

അതുകൊണ്ട് $k = 1, h = 2$

കേന്ദ്രം = (2, 1), ആരം = 5

സമവാക്യം $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

Circle with centre and radius ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തം വരയ്ക്കാം. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് ആരം നൽകിയാൽ മതി. ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം algebra view വിൽ ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം : 3

$x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ആരവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$(x^2 + 8x) + (y^2 + 10y) = 8$$
$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) = 8 + 16 + 25$$
$$(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 49$$
$$\{x - (-4)\}^2 + \{y - (-5)\}^2 = 7^2$$

കേന്ദ്രം (– 4, –5), ആരം = 7 യൂണിറ്റ്

ഉദാഹരണം : 4

(2, – 2), (3,4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽകൂടി കടന്നുപോകുന്നതും കേന്ദ്രം $x + y = 2$ എന്ന വരയിലും ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഈ വൃത്തം (2, – 2), (3,4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നതിനാൽ,

$(2 - h)^2 + (-2 - k)^2 = r^2$ ... (1)

$(3 - h)^2 + (4 - k)^2 = r^2$ ... (2)

വൃത്തകേന്ദ്രം $x + y = 2$ എന്ന വരയിലായതിനാൽ,

$h + k = 2$ ... (3)

(1), (2), (3) എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്താൽ

$h = 0.7, \quad k = 1.3, \quad r^2 = 12.58$

$2x - y = 3$ എന്ന വര വരയ്ക്കുക. (5, 5), (6, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്ന വര വരച്ച് അതിന്റെ ലംബ സമഭാജി വരയ്ക്കുക. ഈ വരകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇത് കേന്ദ്രമായി ആദ്യം അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്ന വൃത്തം വരച്ചു നോക്കൂ. ഇതിന്റെ സമവാക്യമെന്താണ്?

അതുകൊണ്ട് വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$(x - 0.7)^2 + (y - 1.3)^2 = 12.58.$$

ഉദാഹരണം : 5

$3x+2y=11$, $2x+3y=4$ എന്നീ വരകളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലൂടെ കടന്ന് പോകുന്നതും കേന്ദ്രം $(2, -3)$ ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

> ഉദാഹരണം മൂന്നിലെ വൃത്തം ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് വരച്ചു നോക്കൂ. ഇതിന്റെ സമവാക്യമെന്താണ്?

പരിഹാരം

വരകളുടെ സംഗമബിന്ദു കാണാൻ വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കണ്ടാൽ മതിയല്ലോ.

$3x + 2y = 11$ -------(1)

$2x + 3y = 4$ -------(2)

$x = 5, y = -2$

ആരം $r = \sqrt{(2-5)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{10}$

ആരം $= \sqrt{10}$

അതുകൊണ്ട് സമവാക്യം $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$,

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0.$

ഉദാഹരണം : 6

C_1, C_2 എന്നിവ ഏകകേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങളാണ്. C_2 വിന്റെ പരപ്പളവ് C_1 ന്റെ പരപ്പളവിന്റെ ഇരട്ടിയാണ്. C_1 ന്റെ സമവാക്യം $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 8$ ആയാൽ C_2 വിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

C_1 എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 8$

ഇതിന്റെ പദങ്ങളെ പൂർണ്ണവർഗമായി ക്രമീകരിച്ചാൽ,

$x^2 - 2x + 1^2 + y^2 + 4y + 2^2 = 8 + 1^2 + 2^2$

അതുകൊണ്ട്, $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2$

ആരം $= \sqrt{13}$, കേന്ദ്രം $(1, -2)$ ആകുന്നു.

C_1 ന്റെ പരപ്പളവ് $= 13\pi$, C_2 ന്റെ പരപ്പളവ് $= 26\pi$

അതുകൊണ്ട് C_2 വിന്റെ ആരം = $\sqrt{26}$

C_2 വിന്റെ സമവാക്യം $(x-1)^2 + (y+2)^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2$

അതായത്, $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 21$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 11.1

1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിലെ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

1. കേന്ദ്രം $(0, 2)$, ആരം 2

2. കേന്ദ്രം $(-2, 3)$, ആരം 4

3. കേന്ദ്രം $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, ആരം $\frac{1}{12}$

4. കേന്ദ്രം $(1,1)$, ആരം $\sqrt{2}$

5. കേന്ദ്രം $(-a, -b)$, ആരം $\sqrt{a^2 - b^2}$

6 മുതൽ 9 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ വൃത്തകേന്ദ്രവും ആരവും കാണുക.

6. $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 36$

7. $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$

8. $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$

9. $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

10. കേന്ദ്രം $4x + y = 16$ എന്ന വരയിലും, $(4,1)$, $(6,5)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്ന് പോകുന്നതുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

11. കേന്ദ്രം $x - 3y - 11 = 0$ എന്ന രേഖയിലും $(2,3)$, $(-1,1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്നതുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

12. കേന്ദ്രം x അക്ഷത്തിലും, $(2, 3)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നു പോകുന്നതും, ആരം 5 യൂണിറ്റുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

13. $(0,0)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നു പോകുന്നതും, അക്ഷങ്ങളുമായുള്ള ഇടയകലങ്ങൾ a യൂണിറ്റും b യൂണിറ്റും ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

> പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 10, 11 ചോദ്യങ്ങളിലെ വൃത്തങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്താൽ വരച്ച് സമവാക്യമെന്താണെന്ന് നോക്കുക.

> (2, 3) എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി 5 യൂണിറ്റ് ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയക്കുക. ഇത് X അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രങ്ങളായി (2, 3) ൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്ന വൃത്തങ്ങൾ വരച്ച് സമവാക്യം കാണുക.

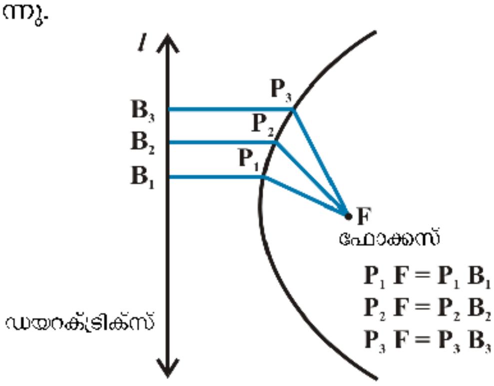
> ചോദ്യം 14 ലെ വൃത്തം ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്താൽ വരയ്ക്കുക. സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

14. വൃത്തകേന്ദ്രം (2, 2), കടന്നു പോകുന്ന ഒരു ബിന്ദു (4, 5) എന്നിവ ആയാൽ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

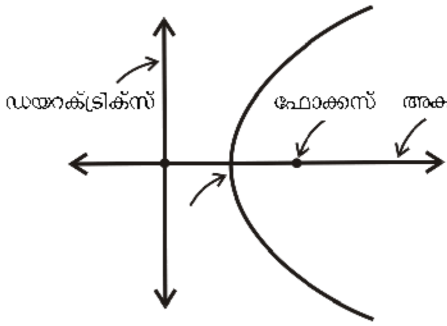
15. (–2.5, 3.5) എന്ന ബിന്ദു $x^2 + y^2 = 25$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ അന്തർഭാഗത്തോ ബഹിർഭാഗത്തോ വൃത്തത്തിലോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

11.4 സമവക്രം (Parabola)

നിർവചനം: തലത്തിലെ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഒരു നിശ്ചിത വരയിൽ നിന്നും സമദൂരത്തിൽ അതേ തലത്തിൽ മറ്റൊരു ബിന്ദു സഞ്ചരിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന പാതയാണ് സമവക്രം (നിശ്ചിത ബിന്ദു നിശ്ചിത വരയിൽ ആകുന്നില്ല) നിശ്ചിത ബിന്ദുവിനെ ഫോക്കസ് എന്നും നിശ്ചിത വരയെ ഡയറക്ട്രിക്സ് എന്നും വിളിക്കുന്നു.



ചിത്രം 11. 13

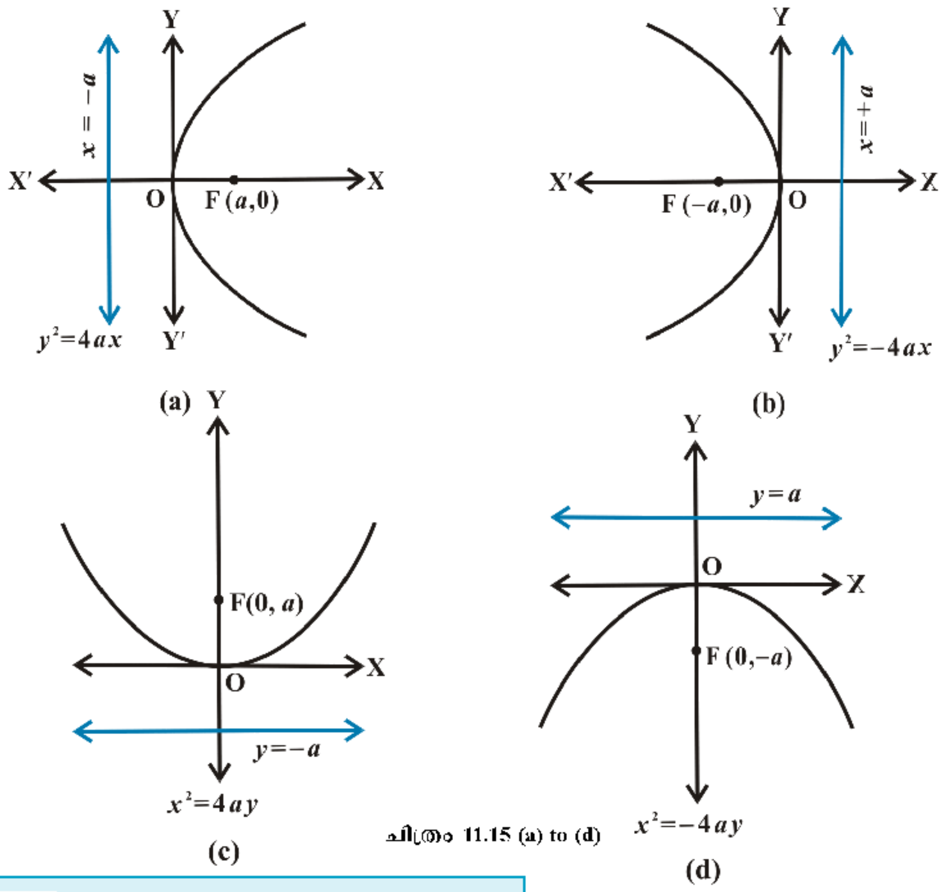


ചിത്രം 11.14

ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് സമവക്രം ട്രേസ് ചെയ്യാം.

കുറിപ്പ്:

1. ഡയറക്ട്രിക്സിന് ലംബമായി ഫോക്കസിൽ കൂടി പോകുന്ന വരയാണ് സമവക്രത്തിന്റെ അക്ഷം.
2. സമവക്രത്തിന്റെ അക്ഷവും സമവക്രവും സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ ശീർഷം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.
3. അക്ഷത്തിന് ലംബമായതും ഫോക്കസിൽ കൂടി പോകുന്നതുമായ വരയുടെ നീളത്തെ ലാറ്റസ് റെക്ടം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.
4. ഈ പാഠഭാഗത്ത് ശീർഷം (0, 0) ആയതും അക്ഷം x ആയതുമായ നാല് രീതിയിലുള്ള സമവക്രങ്ങൾ മാത്രമേ പ്രതിപാദിക്കുന്നുള്ളൂ.

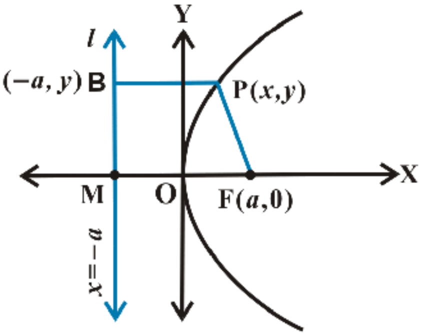


ചിത്രം 11.15 (a) to (d)

Input കമാന്റ് ഉപയോഗിച്ച് സമവക്രം വരയ്ക്കാം. ഉദാഹരണത്തിന് (2, 0) എന്ന ബിന്ദു ഫോക്കസും $x + 2 = 0$ എന്ന വര ഡയറക്ട്രിക്സും ആയ സമവക്രം വരയ്ക്കാൻ parabola ((2, 0), $x + 2 = 0$) എന്ന കമാന്റ് നൽകിയാൽ മതി. a എന്ന ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് parabola ((a, 0), $x + a = 0$) എന്ന കമാന്റ് നൽകി സമവക്രം വരയ്ക്കുക. a മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വക്രത്തിൽ വരുന്ന മാറ്റം നിരീക്ഷിക്കൂ.
ഇതേ സ്ലൈഡർ ഉപയോഗിച്ച് ഫോക്കസ് (-a, 0) ആയ സമവക്രം വരയ്ക്കണമെങ്കിൽ നൽകേണ്ട കമാന്റെന്താണ്?
Y അക്ഷത്തിന് സമമിതമായ സമവക്രങ്ങളും വരച്ചു നോക്കൂ.

സമവാക്യങ്ങൾ Input ആയി നൽകിയും സമവക്രങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.
a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് y^2 = 4a*x എന്ന നൽകി നോക്കൂ. a യുടെ വില മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് സമവക്രത്തിന് എന്ത് മാറ്റമാണ് വരുന്നത്. Y അക്ഷത്തിന് സമമിതമായ വക്രങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ നൽകേണ്ട Input എന്താണ്?

11.4.1 സമവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം



ചിത്രം 11.16

ഇവിടെ സമവക്രത്തിന്റെ ശീർഷം (0, 0), അക്ഷം x അക്ഷവും ആണ്. സമവക്രത്തിന്റെ നിർവചനം അനുസരിച്ച് OF = OM ആണല്ലോ. അതുകൊണ്ട് ഡയറക്ട്രിക്സിന്റെ സമവാക്യം $x = -a$ എന്നായിരിക്കും. ബിന്ദു P സമവക്രത്തിൽ ആയതുകൊണ്ട്.

PF = PB ആകുന്നു.

$$\text{PF} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$\text{PB} = \sqrt{(x+a)^2}$$

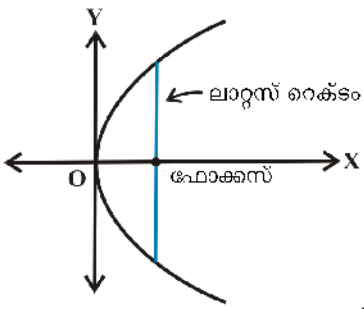
$$\text{PF} = \text{PB}$$

$$\sqrt{(x \quad a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2}$$

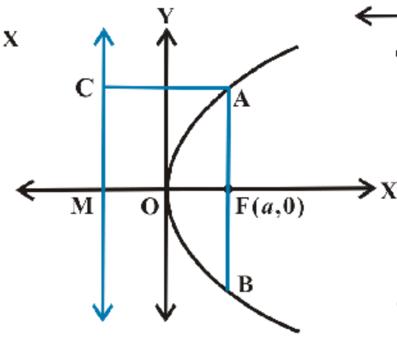
$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$y^2 = 4ax \ (a > 0)$$

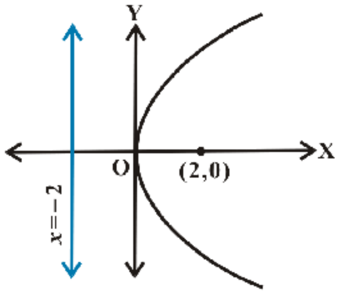
നിരീക്ഷണങ്ങൾ



ചിത്രം 11.17



ം 11.18



ചിത്രം 11.19

1. (x, y) എന്നത് $y^2 = 4ax$ എന്ന സമവക്രത്തിലെ ബിന്ദുവായാൽ $(x, -y)$ യും അതേ സമവക്രത്തിലായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് സമവക്രം x അക്ഷത്തിന് സമമിതമായിരിക്കും.
2. ശീർഷവും ഫോക്കസും തമ്മിലുള്ള ദൂരം a ആയിരിക്കും. ഇതിനെ ഫോക്കൽ നീളം (Focal length) എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

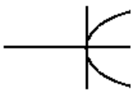
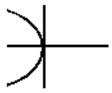
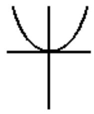
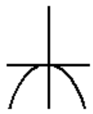
3. ഫോക്കസിൽ കൂടി അക്ഷത്തിന് ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന ഞാണാണ് (Chord) ലാറ്റസ്റെക്ടം എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചുവല്ലോ. ഇതിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ സമവക്രത്തിലായിരിക്കും. ഇതിന്റെ സമവാക്യം $x – a$ എന്നാണല്ലോ. അതുകൊണ്ട് $y^2 – 4a^2 : y – 2a$, അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $(a, 2a)$, $(a, –2a)$ ആയിരിക്കും. ആയതിനാൽ, ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $4a$ ആയിരിക്കും.

4. a > 0 ആയാൽ $y^2 – – 4ax$ ന് x ന്റെ വില നെഗറ്റീവ് അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യം മാത്രമായിരിക്കും. അത്കൊണ്ട് സമവക്രം x അക്ഷത്തിന് സമമിതവും ഇടത്തോട്ട് തിരിഞ്ഞുമിരിക്കും (ചിത്രം കാണുക).

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 11.2 ലെ ചോദ്യങ്ങളിലെ സമവക്രങ്ങൾ വരച്ചു നോക്കുക.

രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ (A, B ഇവ) അടയാളപ്പെടുത്തുക. Min = 0, Max = 10 ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമ്മിക്കുക. A കേന്ദ്രമായി ആരം a ആകുന്ന ഒരു വൃത്തവും B കേന്ദ്രമായി ആരം 10 - a ആകുന്ന മറ്റൊരു വൃത്തവും വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി Trace നൽകുക (Right click - Trace) ഇവയുടെ പാത എന്താണ്? സ്ലൈഡറിന്റെ increment 0.001 എന്ന് കൊടുത്താൽ കുറച്ചു കൂടി വ്യക്തമായ ചിത്രം ലഭിയ്ക്കും.

5. സമവക്രത്തിന്റെ അക്ഷം y അക്ഷമാക്കിയാൽ സമവാക്യം $x^2 – 4ay$ എന്നാകുന്നു. സമവക്രം മുകളിലേക്ക് തുറന്നിരിക്കും. അതുപോലെ $x^2 – –4ay$ എന്ന സമവക്രം താഴേക്ക് തുറന്നിരിക്കും. ലഭിച്ച അറിവുകൾ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ ക്രോഡീകരിക്കാം.

ചിത്രം				
സമവാക്യം	$y^2 – 4ax$	$y^2 – –4ax$	$x^2 – 4ay$	$x^2 – –4ay$
ശീർഷം	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
ഫോക്കസ്	(a, 0)	(–a, 0)	(0, a)	(0, –a)
ഡയറക്ട്രിക്സിന്റെ സമവാക്യം	x = –a	x = +a	y = –a	y = +a
അക്ഷം	x-അക്ഷം	x-അക്ഷം	y-അക്ഷം	y-അക്ഷം
ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം	4a	4a	4a	4a

ഉദാഹരണം : 7

ഫോക്കസ് (5, 0) ഡയറക്ട്രിക്സിന്റെ സമവാക്യം $x = {}^{-}5$ ആയ സമവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക. ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

ഫോക്കസ് (5, 0), ഡയറക്ട്രിക്സ് $x = -5$ ആയതുകൊണ്ട് അക്ഷം x ആണ്. കൂടാതെ ശീർഷം, (5, 0), (–5, 0) എന്നിവയുടെ മധ്യബിന്ദുവും ആണ്. അതുകൊണ്ട് സമവാക്യം $y^2 - 4ax$

ഇവിടെ $y^2 = 4 \times 5x$

$y^2 - 20x$

ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $-$ 4a

$- 4 \times 5$

$- 20$

ഉദാഹരണം : 8

ശീർഷം (0, 0), അക്ഷം y അക്ഷം, കടന്നു പോകുന്ന ഒരു ബിന്ദു (2, –3) ആയ സമവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക. ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

പരിഹാരം

ശീർഷം (0, 0) അക്ഷം y. കടന്നു പോകുന്ന ബിന്ദു (2, –3). അതുകൊണ്ട് സമവക്രം നാലാം ചതുർഥാംശത്തിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്നു.

സമവാക്യം $x^2 - -4ay$ രൂപത്തിലാണ്.

$x - 2, y - -3$ ആയാൽ $4 = 12a$

$$a = \frac{1}{3} \text{ ആയിരിക്കും.}$$

സമവാക്യം $x^2 - -\frac{4}{3}y,\ 3x^2 = -4y,$ ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $\frac{4}{3}$ ആയിരിക്കും.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 11.2

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സമവക്രത്തിന്റെ ഫോക്കസ്, അക്ഷം, ഡയറക്ട്രിക്സിന്റെ സമവാക്യം, ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

1. $y^2 = 12x$
2. $x^2 = 6y$
3. $y^2 = -8x$
4. $x^2 = -16y$
5. $y^2 = 10x$
6. $x^2 = -9y$

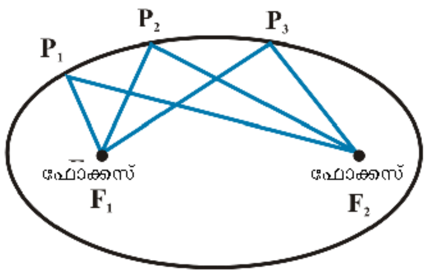
ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾ പാലിക്കുന്ന സമവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

7. ഫോക്കസ് (6, 0), ഡയറക്ട്രിക്സ് $x - -6$
8. ഫോക്കസ് (0, –3), ഡയറക്ട്രിക്സ് $y - 3$
9. ശീർഷം (0, 0) ഫോക്കസ് (3, 0)
10. ശീർഷം (0, 0) ഫോക്കസ് (–2, 0)
11. ശീർഷം (0, 0), കടന്ന് പോകുന്ന ഒരു ബിന്ദു (2, 3), അക്ഷം x അക്ഷം
12. ശീർഷം (0, 0) കടന്ന് പോകുന്ന ഒരു ബിന്ദു (5, 2) y അക്ഷത്തിന് സമമിതം

11.5 ന്യൂനവക്രം (Ellipse)

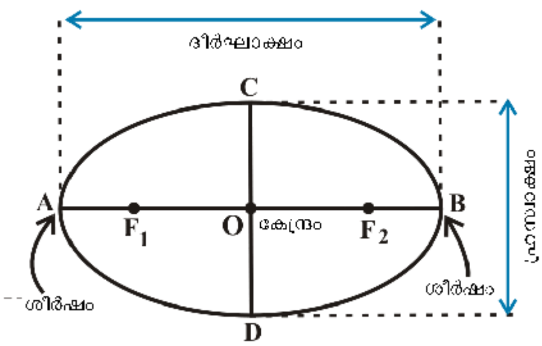
നിർവചനം: ഒരു തലത്തിലുള്ള രണ്ട് നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും അതേ തലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ദൂരങ്ങളുടെ തുക ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യയായാൽ ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാതയാണ് ന്യൂനവക്രം. നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളെ ഫോക്കസുകൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് ന്യൂനവക്രം ട്രേസ് ചെയ്യാം.

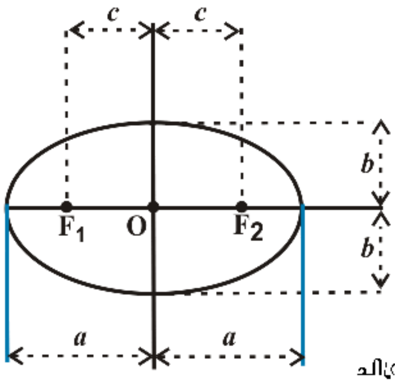


$P_1F_1 + P_1F_2 = P_2F_1 + P_2F_2 = P_3F_1 + P_3F_2$

ചിത്രം 11.20



ചിത്രം 11.21



ചിത്രം 11.22

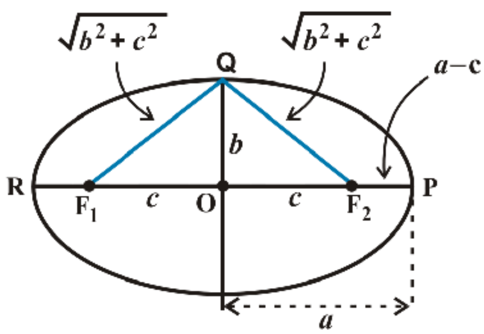
കുറിപ്പ്

1. രണ്ട് ഫോക്കസുകളുടെയും മധ്യബിന്ദുവാണ് ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ കേന്ദ്രം.
2. ഫോക്കസുകൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വരയാണ് ദീർഘാക്ഷം.
3. ദീർഘ അക്ഷത്തിന് ലംബമായതും കേന്ദ്രത്തിൽ കൂടി പോകുന്ന വരയാണ് ഹ്രസ്വാക്ഷം (മൈനർ അക്ഷം).
4. ദീർഘ അക്ഷവും ന്യൂനവക്രവും സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് ശീർഷങ്ങൾ (ദീർഘ അക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ)
5. ദീർഘാക്ഷത്തിന് ലംബമായതും ഫോക്കസിൽ കൂടിയുള്ളതുമായ വരയുടെ നീളമാണ് ലാറ്റസ്റെക്ടം.
6. ഈ അധ്യായത്തിൽ ദീർഘാക്ഷം x അക്ഷത്തിലും, y അക്ഷത്തിലും വരുന്ന രണ്ട് രീതിയിലുള്ള ന്യൂനവക്രം മാത്രമെ ചർച്ച ചെയ്യുന്നുള്ളൂ.

11.5.1 നിരീക്ഷണം

1. ചിത്രത്തിൽ F_1, F_2 ഫോക്കസുകളും P ശീർഷങ്ങളുമാണല്ലോ.

$$\begin{aligned} F_1P + F_2P &= (F_1O + OP) + F_2P \\ &= (c + a) + (a - c) \\ &= 2a \end{aligned}$$



ചിത്രം 11.23

ഹ്രസ്വഅക്ഷത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു Q എടുത്താൽ

$$\begin{aligned} F_1Q + F_2Q &= \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2} \\ &= 2\sqrt{b^2+c^2} \end{aligned}$$

ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ നിർവചനമനുസരിച്ച്

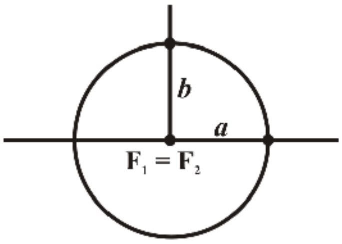
$$F_1P + F_2P = F_1Q + F_2Q$$

അതായത് $\quad 2a = 2\sqrt{b^2 + c^2}$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

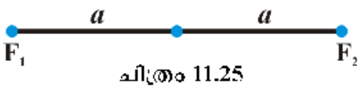
$$a^2 = b^2 + c^2$$

അതായത് $\quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$



ചിത്രം 11.24

11.5.2 ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് a യുടെ വില സ്ഥിരമാക്കിക്കൊണ്ട് c യുടെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്ന് a യിലേക്ക് മാറ്റിയാൽ എന്തു സംഭവിക്കുന്നുവെന്ന് നിരീക്ഷിക്കുക.



ചിത്രം 11.25

11.5.3. ഉൽകേന്ദ്രത (Eccentricity)

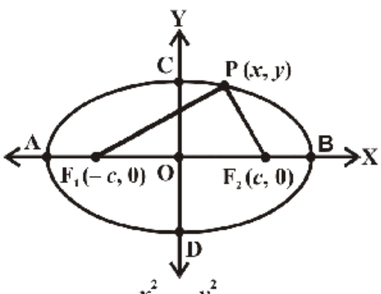
ഒരു ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഒരു ഫോക്കസിലേക്കും ഒരു ശീർഷത്തിലേക്കുമുള്ള അകലങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തെ ഉൽകേന്ദ്രത എന്നു വിളിക്കുന്നു.

$$c = \frac{c}{a}$$

ഇവിടെ $c < a$ ആയതുകൊണ്ട് e യുടെ വില $0 < c < 1$ ആയിരിക്കുമല്ലോ. $c = 0$ ആകുമ്പോൾ ന്യൂനവക്രത്തിന് എന്തു സംഭവിക്കും എന്നു നിരീക്ഷിക്കുക.

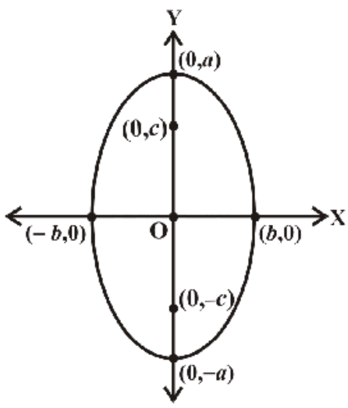
ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം

F_1 (c, 0) യും F_2 (–c, 0) യും ആണല്ലോ. കൂടാതെ, ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ നിർവചനം അനുസരിച്ച് $F_1P + F_2P = 2a$ ആയിരിക്കും.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(a)



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(b)

ചിത്രം 11.26

അകലസൂത്രവാക്യമുപയോഗിച്ച്

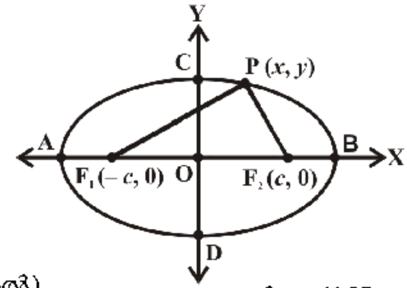
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$



ചിത്രം 11.27

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ കാരണം $c^2=a^2-b^2$ ആയതിനാൽ)

P (x, y) എന്ന ബിന്ദു $0 < c < a$. അനുസരിച്ചാൽ

$$y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\text{PF}_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2+b^2\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2+(a^2-c^2)\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)} \quad (\text{since } b^2 = a^2-c^2)$$

$$= \sqrt{\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2} = a+\frac{c}{a}x$$

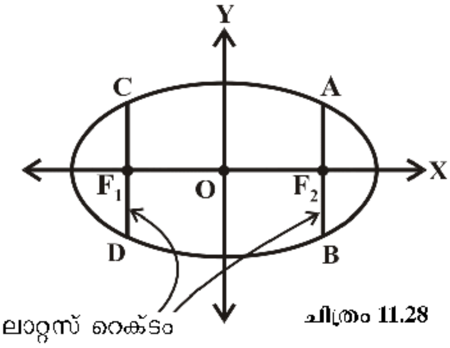
$$\text{PF}_2 = a-\frac{c}{a}x$$

$$\text{PF}_1+\text{PF}_2 = a+\frac{c}{a}x+a-\frac{c}{a}x=2a \qquad \ldots (3)$$

അതുകൊണ്ട് ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രവും ദീർഘാക്ഷം x അക്ഷവും ആയ ന്യൂന വക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ആയിരിക്കും.

11.5.4 നിരീക്ഷണം

1. (x, y) എന്ന ബിന്ദു ന്യൂനവക്രത്തിൽ ആയാൽ $(x, -y)$, $(-x, y)$ $(-x, -y)$ എന്നിവ അതേ ന്യൂനവക്രത്തിലായിരിക്കുമല്ലോ. അതുകൊണ്ടു ന്യൂനവക്രം രണ്ട് അക്ഷത്തിനും സമമിതമായിരിക്കും. അതുകൊണ്ടു തന്നെ ന്യൂനവക്രത്തിന് രണ്ട് ഫോക്കസുകൾ, രണ്ട് ശീർഷങ്ങൾ, രണ്ട് ലാറ്റസ് റെക്ടം എന്നിവ ഉണ്ടായിരിക്കും.
2. ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $(\pm a, 0)$ ആയാൽ ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $(0, \pm b)$ ആയിരിക്കും.
3. ദീർഘാക്ഷം y അക്ഷത്തിലാണെങ്കിൽ ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ആയിരിക്കും.
4. ലാറ്റസ് റെക്ടങ്ങളുടെ സമവാക്യം $x = \pm c$ ആയിരിക്കുമല്ലോ. $x = \pm c$ ആയാൽ



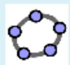
ചിത്രം 11.28

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

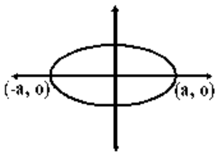
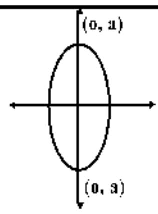
$$y^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

$$y = \frac{\pm b^2}{a}$$ ആയിരിക്കും


9x^2 + 25y^2 = 225 എന്ന input നൽകി ന്യൂനവക്രം വരയ്ക്കുക. c എന്ന പേരിൽ ഇതിന്റെ സമവാക്യം Algebra view ൽ കാണാം. focus (c) എന്ന input നൽകിയാൽ ഇതിന്റെ ഫോക്കസ് കാണാൻ കഴിയും.

$x = c$ എന്ന ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $\left(c, \frac{b^2}{a}\right), \left(c, \frac{-b^2}{a}\right)$ ആണല്ലോ. അതുകൊണ്ട് ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $\frac{2b^2}{a}$ ആയിരിക്കും.

നിരീക്ഷണങ്ങൾ ക്രോഡീകരിച്ച് താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

ചിത്രം		
സമവാക്യം	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
a, b, c ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം	$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = a^2 - b^2$
കേന്ദ്രം	(0, 0)	(0, 0)
ഫോക്കസുകൾ	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
ശീർഷങ്ങൾ	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം	2a	2b
ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ നീളം	2b	2b
ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
ഉൾകേന്ദ്രത	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{a}$

ഉദാഹരണം : 9

$9x^2 + 25y^2 = 225$ എന്ന ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ ഫോക്കസുകളുടെയും ശീർഷങ്ങളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ, ഉൾകേന്ദ്രത എന്നിവയും ദീർഘാക്ഷം, ഹ്രസ്വാക്ഷം, ലാറ്റസ്റെക്ടം എന്നിവയുടെ നീളവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

$$\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225} = 1$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$$

ഒരു ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ രണ്ട് ഫോക്കസും ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളവും അറിഞ്ഞാൽ കമാന്റ് ഉപയോഗിച്ച് വക്രം വരയ്ക്കാം. ഉദാഹരണത്തിന് എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഫോക്കസ് ആയുള്ള, ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം 6 ആയ എലിപ്സ് വരയ്ക്കാൻ ellipse ((-2, 0), (2, 0), 3) എന്ന് നൽകിയാൽ മതി. (ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ പകുതിയാണ് നൽകേണ്ടത്).

a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമ്മിച്ച് ellipse ((-a, 0), (a, 0), 3) എന്ന കമാന്റ് നൽകി എലിപ്സ് വരയ്ക്കുക. a യുടെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. എലിപ്സിന് എന്ത് മാറ്റമാണ് വരുന്നത്? a യുടെ വില പൂജ്യത്തോടടുക്കുമ്പോൾ എലിപ്സിന് എന്തു സംഭവിക്കും? മൂന്നിനോടടുക്കുമ്പോഴോ?

$25 > 9$ ആയതുകൊണ്ട് $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16$$

$$c = 4$$

ഫോക്കസുകൾ $= (\pm c, 0) = (\pm 4, 0)$

ശീർഷങ്ങൾ $= (\pm a, 0) = (\pm 5, 0)$

ഉൾകേന്ദ്രത $= e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$

ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2a = 10$

ഹ്രസ്വക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2b = 8$

ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $= \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{18}{5}$

സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ചും എലിപ്സ് വരയ്ക്കാം. a, b എന്നീ പേരുകളിൽ രണ്ട് സ്ലൈഡറുകൾ നിർമ്മിക്കുക. x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 എന്ന കമാന്റ് നൽകി എലിപ്സ് വരയ്ക്കുക. a, b ഇവയുടെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. a > b, a = b, a < b എന്നീ സന്ദർഭങ്ങളിൽ എലിപ്സിനു വരുന്ന മാറ്റമെന്താണ്?

ഉദാഹരണം : 10

$9x^2 + 4y^2 = 36$ എന്ന ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ ഫോക്കസുകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ, ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം, ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ നീളം, ഉൾകേന്ദ്രത എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ഇവിടെ $\dfrac{y^2}{9}$ എന്ന പദത്തിന്റെ ഛേദം $\dfrac{x^2}{4}$ എന്ന പദത്തിന്റെ ഛേദത്തേക്കാൾ വലുതായതിനാൽ, ദീർഘാക്ഷം y അക്ഷത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു.

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തെ $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ എന്ന സാമാന്യരൂപവുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്തിയാൽ $b = 2$, $a = 3$.

$$c = \sqrt{a^2 \quad b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

അതുകൊണ്ട്, ഫോക്കസുകളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, എന്നിവയും. ശീർഷങ്ങൾ $(0, 3)$, $(0, -3)$ എന്നിവയും ആണ്.

ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2a = 2 \times 3 = 6$

ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2b = 2 \times 2 = 4$

ഉൾകേന്ദ്രത $= \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

ഉദാഹരണം : 11

ശീർഷങ്ങൾ $(0, \pm 13)$, ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 5)$ ആയ ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ തന്നിരിക്കുന്ന ശീർഷങ്ങളിൽ നിന്നും സമവാക്യം $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ ആയിരിക്കും. ദീർഘ അക്ഷം y അക്ഷത്തിലാണ്.

ശീർഷങ്ങൾ $(0, \pm a) = (0, \pm 13)$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

$a = 13$

ഫോക്കസുകൾ $= (0, \pm c) = (0, \pm 5)$

ആയതിനാൽ, $c = 5$

$c^2 = a^2 - b^2$

$b^2 = a^2 - c^2 = 13^2 - 5^2$

അതുകൊണ്ട്, $b^2 = 144$

അതായത്, സമവാക്യം $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{169} = 1$ ആണ്

ഉദാഹരണം : 12

ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം 20 യൂണിറ്റും, ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 5)$ ആയതുമായ ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ഫോക്കസുകൾ y അക്ഷത്തിലായതിനാൽ, ദീർഘാക്ഷം y അക്ഷത്തിലൂടെയായിരിക്കും.

ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ആയിരിക്കും.

$$2a = 20, a = 10.$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 5^2 = 10^2 - b^2$$

$$\therefore b^2 = 75$$

അതുകൊണ്ട്, ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം $\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{100}=1$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 13

ദീർഘ, ഹ്രസ്വാക്ഷങ്ങൾ യഥാക്രമം x അക്ഷത്തിലും y അക്ഷത്തിലും ആയ ന്യൂനവക്രത്തിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളാണ് (4, 3), (–1, 4). ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ നിന്നും സമവാക്യം $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ എന്ന രൂപത്തിലാണല്ലോ.

(4, 3), (–1, 4) ഇവ രണ്ടും ന്യൂനവക്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായതുകൊണ്ട്

$$\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \text{ ---------- (1)}$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \text{ ---------- (2)}$$ ആയിരിക്കും

ഇവ നിർദ്ധാരണം ചെയ്താൽ $a^2=\frac{247}{7}$, $b^2=\frac{247}{15}$ എന്ന് ലഭിക്കും. ഇവ സമവാക്യത്തിൽ ആരോപിച്ചാൽ സാമാന്യരൂപം $7x^2 + 15y^2 = 247$ എന്നു കിട്ടും.

ഉദാഹരണം : 14

കേന്ദ്രം (0, 0) വും ദീർഘാക്ഷം y അക്ഷത്തിലുമായ ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $\frac{4}{\sqrt{3}}$ യും ഉൾകേന്ദ്രത $\frac{1}{\sqrt{3}}$ യും ആയാൽ ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

ദീർഘാക്ഷം y അക്ഷത്തിലായതുകൊണ്ട് സമവാക്യം $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ആയിരിക്കാം.

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow b^2 = \frac{2a}{\sqrt{3}} \quad ----------(1)$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow c = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$c^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$a^2-b^2 = \frac{a^2}{3} \quad ------------(2)$$

$$b^2 = \frac{2a^2}{3}$$

സമവാക്യം (1), (2) ഇവയിൽ നിന്നും $a=\sqrt{3}$ എന്നും $b=\sqrt{2}$ എന്നും ലഭിക്കും.

അതുകൊണ്ട് നിശ്ചിത സമവാക്യം $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$ ആകുന്നു.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 11.3

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ന്യൂനവക്രങ്ങളുടെ ശീർഷങ്ങളുടെയും ഫോക്കസുകളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ, ഉൾകേന്ദ്രത കൂടാതെ ദീർഘാക്ഷം, ഹ്രസ്വാക്ഷം, ലാറ്റസ് റെക്ടം എന്നിവയുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$
2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$
3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$
4. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$
5. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$
6. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{400}=1$
7. $36x^2+4y^2=144$
8. $16x^2+y^2=16$
9. $4x^2+9y^2=36$

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾക്ക് യോജിക്കുന്ന ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

> പരിശീല പ്രശ്നങ്ങൾ 11.3 ലെ ഒന്നാമത്തെ ചോദ്യത്തിലെ എലിപ്സുകൾ വരച്ച് ഫോക്കസ് കണ്ടുപിടിക്കുക. രണ്ടാമത്തെ ചോദ്യത്തിലെ നിബന്ധനകൾ അനുസരിക്കുന്ന എലിപ്സുകൾ വരച്ച് സമവാക്യം കാണുക.

10. ശീർഷങ്ങൾ $(\pm 5, 0)$, ഫോക്കസുകൾ $(\pm 4, 0)$

11. ശീർഷങ്ങൾ $(0, \pm 13)$, ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 5)$

12. ശീർഷങ്ങൾ $(\pm 6, 0)$, ഫോക്കസുകൾ $(\pm 4, 0)$

13. ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെയും ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെയും അഗ്രബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $(\pm 3, 0)$, $(0, \pm 2)$

14. ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $(0, \pm\sqrt{5})$, ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $(\pm 1, 0)$

15. ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം 26, ഫോക്കസുകൾ $(\pm 5, 0)$

16. ഹ്രസ്വാക്ഷത്തിന്റെ നീളം 16, ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 6)$.

17. ഫോക്കസുകൾ $(\pm 3, 0)$, $a = 4$

18. $b = 3$, $c = 4$, കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവിൽ, ഫോക്കസ് x അക്ഷത്തിൽ

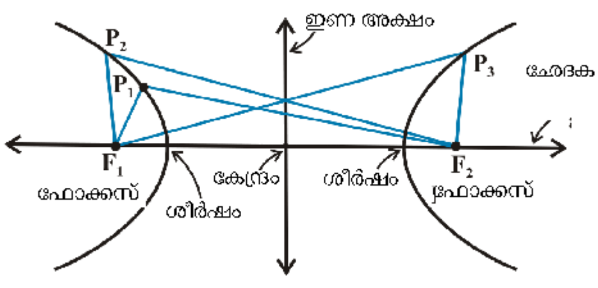
19. കേന്ദ്രം $(0, 0)$, ദീർഘാക്ഷം y അക്ഷത്തിൽ, $(3, 2)$, $(1, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ന്യൂനവക്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ.

20. ദീർഘാക്ഷം x - അക്ഷത്തിൽ, ന്യൂനവക്രം $(4, 3)$, $(6, 2)$ ഇവയിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്നു.

11.6 അധിവക്രം (Hyperbola)

നിർവചനം

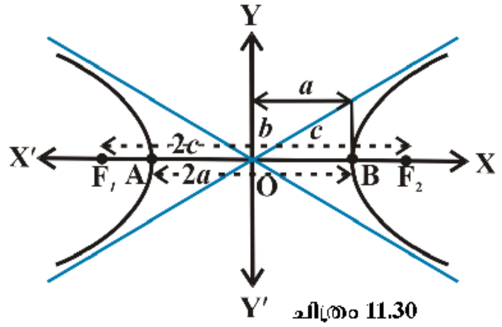
ഒരു തലത്തിലുള്ള രണ്ട് നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും അതേ തലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ദൂരങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യയായാൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദു നിർണയിക്കുന്ന പാതയാണ് അധിവക്രം. നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളെ



$$P_1F_2 - P_1F_1 = P_2F_2 - P_2F_1 = P_3F_1 - P_3F_2$$

ചിത്രം 11.29

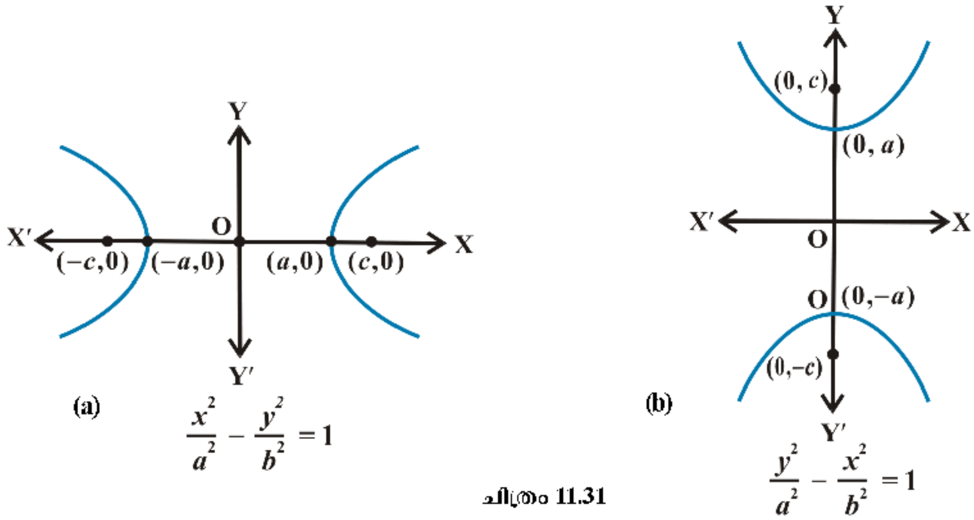
ഫോക്കസുകൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു. (ഇവിടെ ദൂരങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം വലുതിൽ നിന്ന് ചെറുത് കുറക്കണം) ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് അധിവക്രം ട്രേസ് ചെയ്യുക.



ചിത്രം 11.30

കുറിപ്പ്:

1. രണ്ട് ഫോക്കസുകളുടെ മധ്യബിന്ദുവാണ് അധിവക്രത്തിന്റെ കേന്ദ്രം.
2. ഫോക്കസുകൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന രേഖയാണ് ഛേദക അക്ഷം.
3. ഛേദക അക്ഷത്തിന് ലംബമായതും കേന്ദ്രത്തിൽകൂടി പോകുന്നതുമായ രേഖയാണ് ഇണ അക്ഷം.
4. ഛേദക അക്ഷവും അധിവക്രവും സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് ശീർഷങ്ങൾ (അക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ)
5. ഛേദക അക്ഷത്തിന് ലംബമായതും ഫോക്കസിൽ കൂടിയുള്ള രേഖാഖണ്ഡമാണ് ലാറ്റസ്റെക്ടം.
6. ഈ അധ്യായത്തിൽ ന്യൂനവക്രത്തിലേതുപോലെ ഛേദക അക്ഷം x അക്ഷത്തിലും y അക്ഷത്തിലും വരുന്ന രണ്ട് രീതിയിലുള്ള അധിവക്രം മാത്രമേ ചർച്ച ചെയ്യുന്നുള്ളൂ.



ചിത്രം 11.31

നിരീക്ഷണം

A, B എന്നിവ ശീർഷങ്ങളും F_1, F_2 എന്നിവ ഫോക്കസുകളുമാണ്. ഇവ x അക്ഷത്തിലായതുകൊണ്ട് ഇവയെ (–a, 0), (a, 0), (–c, 0), (c, 0) എന്ന് എടുക്കാം.

$F_1F_2 = 2c$

$AB = 2a$ ആണല്ലോ.

$b^2 = c^2 - a^2$ എന്ന് നിർവചിക്കാം, $(0, \pm b)$, $(0, -b)$ ഇവ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ അക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുവായി എടുക്കാം. അല്ലെങ്കിൽ $c^2 = a^2 + b^2$ ആയിരിക്കും.

Input കമാന്റ് നൽകി എലിപ്സ് വരയ്ക്കുന്നതുപോലെ ഹൈപ്പർബോളയും വരയ്ക്കാം. ഉദാഹരണത്തിന് Hyperbola ((-2, 0), (2, 0), 3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഫോക്കസും ട്രാൻസ്‌വേഴ്സ് അക്ഷത്തിന്റെ നീളം 6 ഉം ആയ ഹൈപ്പർബോളലഭിക്കും.
Hyperbola ((-2, 0), (2, 0), 3)) എന്ന് നൽകിയാൽ ഫോക്കസ് (-2, 0), (2, 0) ആയതും യിൽ (2, 3) കൂടി കടന്നു പോകുന്നതുമായ ഹൈപ്പർ ബോള ലഭിയ്ക്കും.

ഇവിടെ $a \to 0$ ആകുമ്പോൾ അധിവക്രത്തിന് എന്ത് സംഭവിക്കും എന്ന് ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിക്കുക.

11.6.1 ഉൽകേന്ദ്രത (Eccentricity)

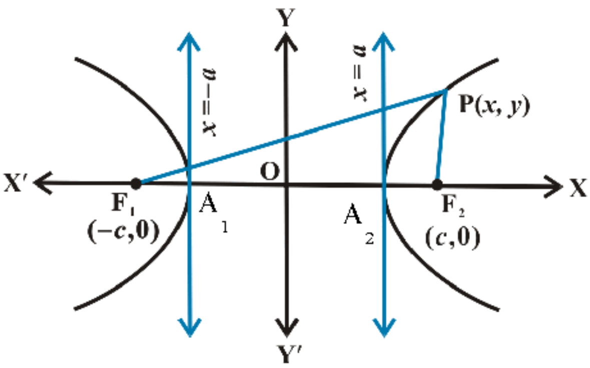
ന്യൂനവക്രത്തിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഫോക്കസിലേക്കും ശീർഷത്തിലേക്കുമുള്ള ദൂരങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തെയാണ് ഉൽകേന്ദ്രത എന്നു പറയുന്നത്. $e = \frac{c}{a}$ ഇവിടെ $c > 1$ ആയിരിക്കുമല്ലോ.

11.6.2 അധിവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം

F_1, F_2 എന്നിവ ഫോക്കസുകളും O രേഖഖണ്ഡം F_1F_2 ന്റെ മധ്യബിന്ദു വുമാണ്. F_1F_2 വിനെ X അക്ഷവും F_1F_2 വിന് ലംബമായ വര Y അക്ഷവുമായി എടുക്കുന്നു.

F_1, F_2 വിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (–c, 0), (c, 0) എന്നിരിക്കട്ടെ.

P(x, y) എന്നത് അധിവക്രത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവായതുകൊണ്ട് $PF_1 - PF_2 = 2a$



ചിത്രം 11.32

$= (c + a) - (c - a) = 2a$ ആയിരിക്കും.

അതായത്,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

വർഗമെടുത്താൽ, $(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$

$$\frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ------------(1) ആണ്.}$$

നേരെ മറിച്ച്, **P**(x, y) എന്ന ബിന്ദു (1) പാലിക്കുകയാണെങ്കിൽ $(0 < a < c)$,

$$y^2 = b^2 \left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)$$

$$\text{PF}_1 = + \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$= + \sqrt{(x + c)^2 + b^2\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)} = a + \frac{c}{a}x$$

$$\text{PF}_2 = a - \frac{a}{c}x$$

$c > a; x > a$, എന്നിവ ആയതുകൊണ്ട്, $\frac{c}{a}x > a$.

$a - \frac{c}{a}x$ എന്നതു ന്യൂന സംഖ്യയാകും

$$\textbf{PF}_2 = \frac{c}{a}x - a.$$

$$\text{PF}_1 - \text{PF}_2 = a + \frac{c}{a}x - \frac{cx}{a} + a = 2a$$

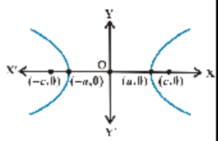
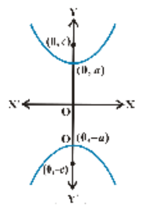
ആയതിനാൽ ഏതൊരു ബിന്ദു **P**(x, y) യും $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന സമവാക്യം പാലിക്കുന്നു.

അധിവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ആയിരിക്കും.

നിരീക്ഷണങ്ങൾ

1. (x, y) എന്ന ബിന്ദു $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ എന്ന അധിവക്രത്തിൽ ആയാൽ $(-x, y)$, $(x_1, -y)$, $(-x, -y)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളും അതേ അധിവക്രത്തിൽ ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് x അക്ഷത്തിനും y അക്ഷത്തിനും സമമിതമായിരിക്കും. അതിനാൽ അധിവക്രത്തിന് രണ്ടു ഫോക്കസും, രണ്ടു ശീർഷങ്ങളും, രണ്ടു ലാറ്റസ് റെക്ടവും ഉണ്ടാകും.
2. ഛേദക അക്ഷം y അക്ഷമായി എടുത്താൽ അധിവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ എന്നായിരിക്കും.
3. ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം ന്യൂനവക്രത്തിലേതുപോലെ കണ്ടുപിടിക്കാം. അതിന്റെ നീളം $\dfrac{2b^2}{a}$ എന്ന് ലഭിക്കും.

നിരീക്ഷണങ്ങളെ ക്രോഡീകരിച്ചാൽ

ചിത്രം		
സമവാക്യം	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$
a, b, c ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$
കേന്ദ്രം	$(0, 0)$	$(0, 0)$
ഫോക്കസുകൾ ശീർഷങ്ങൾ	$(\pm c, 0)$ $(\pm a, 0)$	$(0, \pm c)$ $(0, \pm a)$
ഛേദക അക്ഷത്തിന്റെ നീളം	$2a$	$2a$
ഇണ അക്ഷത്തിന്റെ നീളം	$2b$	$2b$

ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
ഉൾകേന്ദ്രത	$c = \frac{c}{a}$	$c = \frac{c}{a}$

ഉദാഹരണം : 16

ശീർഷങ്ങൾ $(0, \pm 12)$, ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം 36 ആയതുമായ അധിവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 12)$ ആയതുകൊണ്ട് $c = 12$.

$$\text{ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം} = \frac{2b^2}{a} = 36 \quad \therefore \; b^2 = 18a$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$144 = a^2 + 18a$$

$$a^2 + 18a - 144 = 0$$

$$a = -24, 6.$$

a ന്യൂനസംഖ്യയാകാത്തതിനാൽ, $a = 6$ ആയിരിക്കും

$$\therefore \; b^2 = 108$$

അതുകൊണ്ട് അധിവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{108} = 1$

$3y^2 - x^2 = 108$ ആയിരിക്കും

ഉദാഹരണം : 16

$16x^2 - 9y^2 = 144$ എന്ന അധിവക്രത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ, ഫോക്കസുകൾ എന്നിവയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ, ഉൾകേന്ദ്രത, കൂടാതെ ഛേദക അക്ഷം, ഇണ അക്ഷം, ലാറ്റസ്റെക്ടം എന്നിവയുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$$16x^2 - 9y^2 = 144$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

അതിവക്രത്തിന്റെ പൊതുരൂപം $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 25$$

$$c = 5$$

ശീർഷങ്ങൾ $= (\pm a, 0) = (\pm 3, 0)$

ഫോക്കസുകൾ $(\pm c, 0) = (\pm 5, 0)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$$

ഛേദക അക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2a = 6$

ഇണ അക്ഷത്തിന്റെ നീളം $= 2b = 8$

ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $= \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{32}{3}$

ഉദാഹരണം : 17

ശീർഷങ്ങൾ $(0, \pm 5)$ ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 7)$ ആയ അധിവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകളിൽ നിന്നും സമവാക്യം $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ എന്ന രൂപത്തിലാണല്ലോ.

ശീർഷം $= (0, \pm a) = (0, \pm 5), \quad a = 5$

ഫോക്കസ് $= (0, \pm c) = (0, \pm 7), \quad c = 7$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 7^2 - 5^2$$

$b^2 = 24$ ആരോപിച്ചാൽ

സമവാക്യം, $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{24} = 1$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 11.4

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന അധിവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം അതിൽ നിന്നും അവയുടെ ശീർഷങ്ങൾ, ഫോക്കസുകൾ, ഉൾകേന്ദ്രത കൂടാതെ ഛേദകഅക്ഷം, ഇണഅക്ഷം, ലാറ്റസ്റെക്ടം ഇവയുടെ നീളം എന്നിവ കാണുക.

1. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$
2. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$
3. $9y^2 - 4x^2 = 36$
4. $16x^2 - 9y^2 = 576$
5. $5y^2 - 9x^2 = 36$
6. $49y^2 - 16x^2 = 784$.

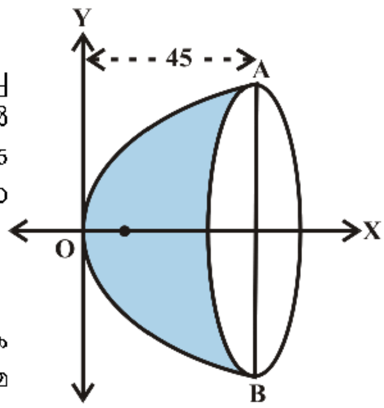
താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾ പാലിക്കുന്ന അധിവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. ശീർഷങ്ങൾ $(\pm 2, 0)$, ഫോക്കസുകൾ $(\pm 3, 0)$
8. ശീർഷങ്ങൾ $(0, \pm 5)$, ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 8)$
9. ശീർഷങ്ങൾ $(0, \pm 3)$, ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 5)$
10. ഫോക്കസുകൾ $(\pm 5, 0)$, ഛേദകഅക്ഷത്തിന്റെ നീളം 8.
11. ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm 13)$, ഇണ അക്ഷത്തിന്റെ നീളം 24.
12. ഫോക്കസുകൾ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$, ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം 8.
13. ഫോക്കസുകൾ $(\pm 4, 0)$, ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ നീളം 12
14. ശീർഷങ്ങൾ $(\pm 7, 0)$, $e = \frac{4}{3}$.
15. ഫോക്കസുകൾ $(0, \pm\sqrt{10})$, അധിവക്രത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു $(2, 3)$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 18

ചിത്രം 11.32 ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവക്ര ദർപ്പണത്തിന്റെ ഫോക്കസ് അതിന്റെ ശീർഷത്തിൽ നിന്നും 5 സെ.മീ. അകലത്തിലാണ്. കണ്ണാടിക്ക് 45 സെ.മീ. ആഴമുണ്ടെങ്കിൽ AB യുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.



ചിത്രം 11.33

പരിഹാരം

ഫോക്കസിന് ശീർഷത്തിൽ നിന്നും 5 സെ.മീ. അകലമുള്ളത് കൊണ്ട് നമുക്ക് $a = 5$ എന്ന് എടുക്കാമ

ല്ലോ, ശീർഷം (0, 0) ആയി എടുക്കുകയും അക്ഷം x അക്ഷവുമായി എടുത്താൽ സമവാക്യം $y^2 = 4ax$ ആയിരിക്കുമല്ലോ.

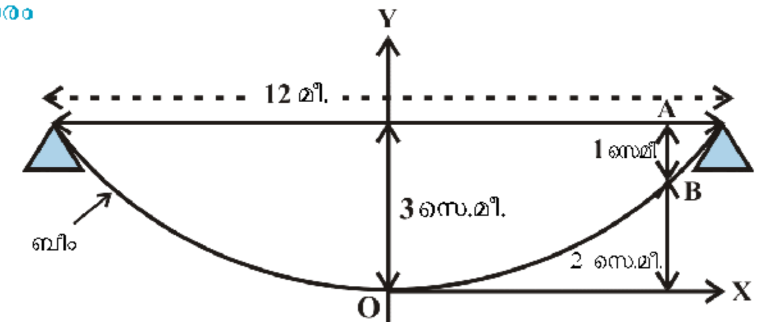
$$y^2 = 4\,(5)\,x$$
$$y^2 = 20\,x$$
$x = 45$ ആയാൽ
$$y^2 = 900$$
$$y = \pm 30$$

അതുകൊണ്ട്, AB = $2y = 2 \times 30 = 60$ സെ.മീ.

ഉദാഹരണം : 19

ഒരു ബീമിനെ താങ്ങിനിർത്തുന്ന രണ്ടു തൂണുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 12 മീറ്ററാണ്. ഭാരം മധ്യഭാഗത്ത് കേന്ദ്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നത് കൊണ്ട് ബീമിന്റെ മധ്യഭാഗം 3 സെ.മീ. താഴോട്ട് വളഞ്ഞിരിക്കുന്നു. കൂടാതെ വളഞ്ഞിരിക്കുന്ന ബീമിന് സമവക്രത്തിന്റെ (Parabola) ആകൃതിയുണ്ട്. (ചിത്രം 11.34 നോക്കുക). എങ്കിൽ ബീമിന് താഴോട്ട് 1 സെ.മീ. വളവുള്ളത് മധ്യഭാഗത്ത് നിന്ന് എത്ര അകലത്തിലാണ് കാണുക.

പരിഹാരം



ചിത്രം 11.34

വളഞ്ഞിരിക്കുന്ന ബീമിന്റെ ഏറ്റവും താഴ്ന്ന ഭാഗം ശീർഷമായി പരിഗണിക്കുകയും അക്ഷം y അക്ഷമായി പരിഗണിച്ചാൽ സമവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം $x^2 = 4ay$ ആയിരിക്കും.

$\left(6, \frac{3}{100}\right)$ എന്ന ബിന്ദു സമവക്രത്തിലായതുകൊണ്ട്

$$(6)^2 = 4a\left(\frac{3}{100}\right)$$

അതുകൊണ്ട്, $a = \frac{36 \times 100}{12} = 300$ മീറ്റർ

AB എന്നത് ബീമിന് 1 സെ.മീ. വളഞ്ഞ ഭാഗമായാൽ. AB = $\frac{1}{100}$ മീറ്റർ ആയിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് $\left(x, \frac{2}{100}\right)$ എന്ന ബിന്ദുസമവക്രത്തിലായിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് $$x^2 = 4 \times 300 \times \frac{2}{100} = 24$$

$$x = \sqrt{24} \quad = 2\sqrt{6}$$

അതുകൊണ്ട് ബീമിന് താഴോട്ട് സെ.മീ. വളവുള്ളത് മധ്യ ഭാഗത്തു നിന്നും $2\sqrt{6}$ മീറ്റർ അകലത്തിലായിരിക്കും.

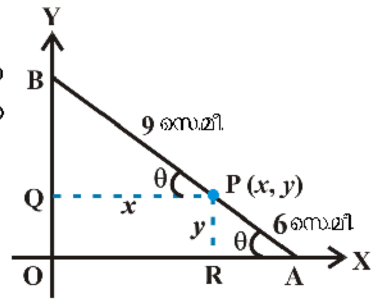
ഉദാഹരണം : 20

15 സെ.മീ. നീളമുള്ള ഒരു ദണ്ഡിന്റെ A എന്ന അഗ്രം x അക്ഷത്തിലും B എന്ന അഗ്രം y അക്ഷത്തിലുമാണെന്നിരിക്കട്ടെ P(x, y) എന്ന ബിന്ദു ദണ്ഡിലുള്ള ബിന്ദുവാണ്. കൂടാതെ AP = 6 സെ.മീ. ആണ് (ചിത്രം കാണുക). ദണ്ഡിന്റെ അഗ്രങ്ങൾ അക്ഷങ്ങളെ ഉരസിനീങ്ങുമ്പോൾ P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാര പാത ന്യൂനവക്രം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

PB = 9 സെ.മീ. ആയിരിക്കും.

P യിൽ നിന്നും PQ, PR എന്നി ലംബങ്ങൾ യഥാക്രമം y അക്ഷത്തിലേക്കും x അക്ഷത്തിലേക്കും വരക്കുക.



ചിത്രം 11.35

Δ PBQ യിൽ നിന്നും $\cos\theta = \frac{x}{9}$

Δ PRA യിൽ നിന്നും $\sin\theta = \frac{y}{6}$

അതുകൊണ്ട് $\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

അതായത്, $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$ ആണ് ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യമാണ്.

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. ഒരു സമവക്ര റിഫ്ളക്ടറിന്റെ വ്യാസം 20 സെ. മീ. യും ആഴം 5 സെ. മീ. യും ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ ഫോക്കസ് കാണുക.

2. ഒരു ആർച്ചിന്റെ ആകൃതി സമവക്രമാണ്, അക്ഷം y അക്ഷമാണ്. ആർച്ചിന്റെ ഉയരം 10 മീറ്ററും അടിഭാഗത്തെ വീതി 5 മീറ്ററുമാണ്. എങ്കിൽ ശീർഷത്തിൽ നിന്നും 2 മീറ്റർ താഴെ ആർച്ചിനുള്ള വീതി കണക്കാക്കുക.

3. ഒരു തൂക്കുപാലം നിർമിച്ചിരിക്കുന്നത് സമവക്രാകൃതിയിലുള്ള രണ്ട് കേബിളുകളിൽ കുത്തനെയുള്ള കമ്പികൾ ഉപയോഗിച്ച് തിരശ്ചീനമായി ബന്ധിപ്പിച്ചിട്ടാണ്. പാലത്തിന്റെ നീളം 100 മീറ്ററാണ്. കുത്തനെയുള്ള കമ്പികളിൽ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ കമ്പി 30 മീറ്ററും ഏറ്റവും നീളം കുറഞ്ഞ കമ്പി 6 മീറ്ററുമാണ്. പാലത്തിന്റെ നടുക്ക് നിന്ന് 18 മീറ്റർ അകലത്തിൽ പാലത്തെ ബന്ധിപ്പിച്ച കുത്തനെയുള്ള കമ്പിയുടെ നീളം കാണുക.

4. ഒരു അർദ്ധ ന്യൂനവക്ര ആകൃതിയിലുള്ള ആർച്ചിന്റെ ദീർഘാക്ഷത്തിന്റെ നീളം 8 മീറ്ററും കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള ഉയരം 2 മീറ്ററും ആയാൽ ഒരു ശീർഷത്തിൽ നിന്നും 1.5 മീറ്റർ അകലെയുള്ള ആർച്ചിന്റെ ഉയരം കണക്കാക്കുക.

5. 12 മീറ്റർ നീളമുള്ള കമ്പി തറയിൽ ചാരി വച്ചിരിക്കുന്നു. തറയിലെ അഗ്രത്ത് നിന്നും 3 മീറ്റർ അകലെ കമ്പിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് $P(x, y)$. കമ്പി, തറയിലൂടെ തെന്നി നീങ്ങുമ്പോൾ P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാത എന്തായിരിക്കും? സമവാക്യം കാണുക.

6. $x^2 = 12y$ എന്ന സമവക്രത്തിന്റെ ശീർഷവും, ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളും മൂലകളായി വരുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. ഒരു ഓട്ടക്കാരൻ തന്റെ ഓട്ടത്തിനിടയിൽ രണ്ടു കൊടിമരങ്ങൾ കാണുന്നു. അയാളിൽ നിന്നും കൊടിമരങ്ങളിലേക്കുള്ള അകലങ്ങളുടെ തുക എല്ലായ്പ്പോഴും 10 മീറ്റർ ആണ്. കൊടിമരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 8 മീറ്റർ ആണ്. അയാൾ ഓടിയ പാതയുടെ സമവാക്യം എഴുതുക.

8. $y^2 = 4ax$ എന്ന സമവക്രത്തിൽ ഒരു സമഭുജത്രികോണം അന്തർലേഖനം ചെയ്തിരിക്കുന്നു. കൂടാതെ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ശീർഷം സമവക്രത്തിന്റെ ശീർഷത്തിലാണ്. എങ്കിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

സംഗ്രഹം

- ഒരു തലത്തിലെ ഒരു നിശ്ചിതബിന്ദുവിൽ നിന്നും നിശ്ചിത അകലത്തിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും കൂട്ടമാണ് വൃത്തം.
- കേന്ദ്രം (h, k) യും ആരം r ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$
- ഒരു തലത്തിലെ ഒരു നിശ്ചിതബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഒരു നിശ്ചിത രേഖയിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടെയും കൂട്ടമാണ് സമവക്രം.
- ഫോക്കസ് $(a, 0)$, $a > 0$ യും ഡയറക്ട്രിക്സ് $x = -a$ യും ആയ സമവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപമാണ് $y^2 = 4ax$.
- സമവക്രത്തിന്റെ ലാറ്റസ്റെക്ടം എന്നത് സമവക്രത്തിന്റെ അക്ഷത്തിന് ലംബമായതും ഫോക്കസിൽക്കൂടി കടന്ന് പോകുന്നതും അഗ്രബിന്ദുക്കൾ സമവക്രത്തിലുമായ രേഖഖണ്ഡമാണ്.
- $y^2 = 4ax$ എന്ന സമവക്രത്തിന്റെ ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $4a$ ആയിരിക്കും.
- ഒരു തലത്തിലെ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത നിശ്ചിതബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നുള്ള ദൂരങ്ങളുടെ തുക എല്ലായിപ്പോഴും ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായി വരുന്ന മുഴുവൻ ബിന്ദുക്കളും ചേർന്നാൽ ലഭിക്കുന്ന സംവൃതരൂപമാണ് ന്യൂനവക്രം.
- ഫോക്കസ് x അക്ഷത്തിൽ വരുന്ന ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ആകുന്നു.
- ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ ലാറ്റസ്റെക്ടം ദീർഘാക്ഷത്തിന് ലംബമായതും ഫോക്കസിൽ കൂടി കടന്ന് പോകുന്നതും അഗ്രബിന്ദുക്കൾ ന്യൂനവക്രത്തിലുമായ രേഖാഖണ്ഡമാണ്.
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $\frac{2b^2}{a}$ ആയിരിക്കും.

- ഒരു ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഒരു ഫോക്കസിലേക്കും ഒരു ശീർഷത്തിലേക്കുമുള്ള ദൂരങ്ങളുടെ അംശബന്ധമാണ് ആ ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ ഉൾകേന്ദ്രത.
- ഒരു തലത്തിലുള്ള രണ്ട് നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും ദൂരങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം എല്ലായ്പ്പോഴും ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായി വരുന്ന മുഴുവൻ ബിന്ദുക്കളും ചേർന്ന രൂപമാണ് അധിവക്രം.
- ഫോക്കസ് x അക്ഷത്തിൽ വരുന്ന അധിവക്രത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപമാണ്

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

- അധിവക്രത്തിന്റെ ലാറ്റസ് റെക്ടം എന്നത് അതിന്റെ ഛേദക അക്ഷത്തിന് ലംബമായതും ഫോക്കസിൽ കൂടി കടന്ന് പോകുന്നതും അഗ്രങ്ങൾ അധിവക്രത്തിൽ വരുന്നതുമായ രേഖാഖണ്ഡമാണ്.
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ എന്ന അധിവക്രത്തിന്റെ ലാറ്റസ്റെക്ടത്തിന്റെ നീളം $\frac{2b^2}{a}$ ആയിരിക്കാം.
- ഒരു അധിവക്രത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും ഒരു ഫോക്കസിലേക്കും ഒരു ശീർഷത്തിലേക്കുമുള്ള ദൂരങ്ങളുടെ അംശബന്ധമാണ് ആ അതിവക്രത്തിന്റെ ഉൾകേന്ദ്രത.

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ ഏറെ പഴക്കമുള്ള പ്രധാനപ്പെട്ട ഒരു വിഭാഗമാണ് ജ്യാമിതി. ഗ്രീക്ക് ജ്യാമിതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർ വിവിധതരം വക്രങ്ങളുടെ സൈദ്ധാന്തികവും പ്രായോഗികകവുമായ പ്രാധാന്യത്തെക്കുറിച്ച് പഠനം നടത്തിയിട്ടുണ്ട്. യൂക്ലിഡ് ജ്യാമിതിയെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിച്ചിരിക്കുന്നത് ബി.സി. 300ൽ ആണ്. അദ്ദേഹമാണ് പ്രായോഗികതലങ്ങളിൽ ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളും ആശയങ്ങളും ആദ്യമായി അവതരിപ്പിച്ചത്. ബീജഗണിതമില്ലാതെ ആദ്യമായി ജ്യാമിതീയ പഠനങ്ങൾ നടത്തിയത് പ്രാചീന ഭാരതീയരും ഗ്രീസുകാരുമാണ്. ജ്യാമിതിക്ക് ഒരു സംയോജനസമീപനം ആദ്യമായി നടപ്പിലാക്കിയത് യൂക്ലിഡും സുൽബസൂത്രയിലുമാ

ണ്, ഇത് 1300 വർഷത്തോളം കാര്യമായ മാറ്റമില്ലാതെ തുടർന്നുവന്നു. ബി.സി. 200 ൽ അപ്പലോണിസ് 'ദ കോണിക്' എന്ന ഗ്രന്ഥമെഴുതി വൃത്തസ്തൂപികാ പരിച്ഛേദങ്ങളിലെ ധാരാളം കണ്ടെത്തലുകൾ ഈ ഗ്രന്ഥത്തിൽ ഉണ്ടായിരുന്നു. 18–ാം നൂറ്റാണ്ടോളം ഇതിനെ വെല്ലാൻ മറ്റൊരു പുസ്തകവും ഇല്ലായിരുന്നു.

1637 ൽ റെനെ ദെക്കാർത്തെ (1596 – 1650) പ്രസിദ്ധീകരിച്ച 'La Geometrie' എന്ന ഗ്രന്ഥത്തോടെ ആധുനിക ജ്യാമിതിയെ "കാർട്ടീഷൻ ജ്യാമിതി" എന്ന പേരിലാണ് ഇപ്പോൾ അറിയപ്പെടുന്നത്. പക്ഷെ ജ്യാമിതിയുടെ അടിസ്ഥാനതത്വങ്ങളും രീതികളും കണ്ടെത്തിയത് പിയർ ദ് ഫെർമ (1601 – 1665) ൽ ആയിരുന്നു. നിർഭാഗ്യവശാൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ കണ്ടുപിടുത്തമായ 'Introduction to Plane and Solid Loci' അദ്ദേഹത്തിന്റെ മരണാനന്തരം 1679 ൽ മാത്രമാണ് പ്രസിദ്ധീകരിച്ചത് അതുകൊണ്ട് ദെക്കാർത്തെയെയാണ് അനലറ്റിക് ജ്യാമിതിയുടെ പിതാവായി കണക്കാക്കപ്പെടുന്നത്.

ഐസക് ബാരോ കാർട്ടീഷൻ രീതി ഒഴിവാക്കിയിരുന്നു. ന്യൂട്ടൻ, നിർണയിക്കാൻ കഴിയാത്ത ഗുണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് വക്രങ്ങളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ നിർണയിച്ചത്. കൂടാതെ അദ്ദേഹം പോളാർ, ബൈപോളാർ തുടങ്ങിയ സൂചകസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു.

ലൈബ്നിറ്റ്സ് ആദ്യമായി അബ്സിസ, ഓർഡിനേറ്റ്, കോർഡിനേറ്റ് തുടങ്ങിയ പദങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു. ലോസ്പിറ്റൽ 1700 ൽ അനലറ്റിക് ജ്യാമിതിയെക്കുറിച്ചൊരു പ്രധാനപ്പെട്ട ഗ്രന്ഥമെഴുതി.

ക്ലേറു 1729 ൽ ആദ്യമായി 'ദൂര സമവാക്യം' അവതരിപ്പിച്ചു. കൂടാതെ ഇട അകകല രൂപത്തെക്കുറിച്ചും അദ്ദേഹം സമവാക്യം അവതരിപ്പിച്ചു. 1750 കാർമർ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $(y - a)^2 + (b - x)^2 = r$ എന്ന രൂപത്തിൽ അവതരിപ്പിച്ചു. മോംഗെ 1781 ൽ ബിന്ദു – ചരിവ് രീതി $y - y' = a(x - x')$ എന്നതും, പരസ്പരം ലംബമാകുന്ന നിബന്ധന $aa' + 1 = 0$ എന്ന രൂപത്തിലും അവതരിപ്പിക്കുകയുണ്ടായി. S.F. ലാക്രോയിക്സ് (1765–1843) 'two-point' സമവാക്യത്തെ

$y - \beta = \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$ എന്ന രൂപത്തിലും (α, β) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും

$y = ax + b$ എന്ന രേഖയിലേക്കുള്ള ദൂരത്തെ $\dfrac{(\beta - a - b)}{\sqrt{1 + a^2}}$ എന്ന രൂപത്തിലും

അവതരിപ്പിച്ചു. കൂടാതെ രണ്ട് രേഖകൾ തമ്മിൽ നിർണ്ണയിക്കുന്ന കോണളവ്

θ ആയാൽ $\tan\theta = \left(\dfrac{a' - a}{1 + aa'}\right)$ ആയിരിക്കുമെന്നും എഴുതുകയുണ്ടായി. പിന്നീട്

150 വർഷത്തോളം കഴിഞ്ഞതിന് ശേഷമാണ് 1818 ൽ സി. ലയിം എന്ന സിവിൽ എഞ്ചിനിയർ $mE + m'E' = 0$ എന്നതാണ് $E = 0, E' = 0$ എന്നീ 'ലോസി'യിൽ കൂടി യുള്ള വക്രത്തിന്റെ നിബന്ധന എന്ന് തെളിയിക്കുകയുണ്ടായത്.

ഗണിതത്തിലും ശാസ്ത്രത്തിലുമുള്ള പലകണ്ടുപിടുത്തങ്ങളും വൃത്തസ്തൂപികാ പരിഛേദത്തെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയുണ്ടായി. എങ്കിലും ആർക്കിമിഡീസും അപ്പ ലോണിസും അവരുടെ കാലത്ത് കണ്ടെത്തിയ പ്രത്യേകതകളും ബന്ധങ്ങളും ഈ കാലഘട്ടത്തിലും പലമേഖലകളിലെ പുതിയ പുതിയ കണ്ടുപിടുത്തങ്ങളിൽ ഉപയോഗിച്ചുവരുന്നു.

T6H8B1

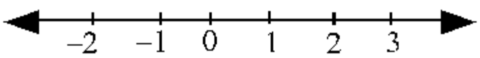
അധ്യായം 12

ത്രിമാന ജ്യാമിതിക്ക് ഒരു ആമുഖം (INTRODUCTION TO THREE DIMENSIONAL GEOMETRY)

❖ *ഗണിതം എല്ലാ ശാസ്ത്രങ്ങളുടേയും രാജ്ഞിയും അതേസമയം ദാസിയുമാണ് – ഇ. ടി. ബെൽ* ❖

12.1 ആമുഖം

സംഖ്യാരേഖയിൽ സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ആധാരമായി നാം സ്വീകരിക്കാറുള്ളത് ഒരു ബിന്ദുവിനെ ആണ്. ആ ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ദൂരത്തിനനുസരിച്ചാണ് സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത്.




ലിയോനാർഡ് ഓയിലർ
(1707-1783)

ഇതുപോലെ ഒരു തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം നിർണയിക്കാൻ ആധാരമായി സ്വീകരിക്കുന്നത് പരസ്പരം ലംബങ്ങളായ രണ്ട് സംഖ്യാരേഖകളാണെന്ന് 10–ാം ക്ലാസിലെ "സൂചകസംഖ്യകൾ" എന്ന അധ്യായത്തിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. X അക്ഷമെന്നും Y അക്ഷമെന്നും വിളിക്കുന്ന ഈ രണ്ട് ലംബവരകളിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങളെയാണ് ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളായി അടയാളപ്പെടുത്തിയത്.

എന്നാൽ ത്രിമാനതലത്തിൽ ഒരു ബിന്ദുവിനെ സൂചിപ്പിക്കുവാൻ ആധാരമായി രണ്ട് ലംബവരകൾ മാത്രം പോര.

ഉദാഹരണമായി, ക്ലാസ്മുറിയിൽ ഒരു പ്രത്യേക സ്ഥലത്ത് ഒരു ബൾബ് തൂക്കിയിടണമെന്ന് കരുതുക. ഇതിന്റെ സ്ഥാനം എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാം? മുറിയുടെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ചുവരിൽ നിന്നുള്ള ദൂരം എടുത്തുകൊണ്ട് ബൾബിന്റെ സ്ഥാനം സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയുമോ? രണ്ടു ചുവരുകളിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങൾ എടുത്താലോ? ഏത് രണ്ട് ചുവരുകൾ? ഇപ്പോഴും ബൾബിന്റെ സ്ഥാനത്തിന് കൃത്യത വന്നിട്ടില്ലല്ലോ? ഇനി മുറിയുടെ തറയിൽ നിന്നോ മുകൾപരപ്പിൽ നിന്നോ ഉള്ള അകലം കൂടി എടുത്താലെ ബൾബിന്റെ കൃത്യമായ സ്ഥാനം നിർണയിക്കാൻ കഴിയുകയുള്ളൂ.

ഇവിടെ പരിഗണിച്ച ചുവരുകൾ, തറ എന്നിവ ഗണിതഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ തലങ്ങൾ ആണ്.

അതായത്, പരസ്പരം ലംബമായ മൂന്ന് തലങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രിമാനതലത്തിൽ ഏതൊരു ബിന്ദുവിന്റെയും സ്ഥാനം കൃത്യമായി സൂചിപ്പിക്കാനാവും. ഒരു ദ്വിമാന തലത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തുന്ന ബിന്ദുവിന് രണ്ട് സൂചകസംഖ്യകൾ ഉള്ളപ്പോൾ ത്രിമാനതലത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തുന്ന ഓരോ ബിന്ദുവിനും മൂന്ന് സൂചകസംഖ്യകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. രണ്ടാം അധ്യായത്തിൽ പരാമർശിച്ച $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ എന്ന കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലത്തിലെ അംഗങ്ങളായ സംഖ്യാത്രയങ്ങൾ ആയിരിക്കും ഈ സൂചകസംഖ്യകൾ. ഇത്തരം സൂചകസംഖ്യകളെക്കുറിച്ചുള്ള ചില ആശയങ്ങൾ കൂടി ഈ അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യാം.

12.2 സൂചകതലങ്ങളും സൂചകാക്ഷങ്ങളും (Co-ordinate planes and Co-ordinate axes)

നേരത്തെ മനസ്സിലാക്കിയ പരസ്പരം ലംബമായ മൂന്ന് തലങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. സമാന്തരങ്ങളല്ലാത്ത രണ്ട് വരകൾ ഒരു ബിന്ദുവിലാണ് സംഗമിക്കുന്നത്. അതുപോലെ സമാന്തരങ്ങളല്ലാത്ത രണ്ട് തലങ്ങൾ സംഗമിക്കുന്നത് ഒരു വരയിലായിരിക്കും. അതായത്, പരിഗണിച്ച മൂന്ന് ലംബതലങ്ങളുടെയും സംഗമമായി ലഭിക്കുന്ന പരസ്പരം ലംബമായ, തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന മൂന്ന് വരകളാണ്, ഇവയെ അക്ഷങ്ങളായി പരിഗണിക്കാം. ഇവ മൂന്നും സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദു ആധാരബിന്ദു (origin) ആകുന്നു. ഇനി നേരത്തെ പരിഗണിച്ച അടിസ്ഥാനതലങ്ങൾക്ക് പേര് നൽകാം.

X, Y എന്നീ അക്ഷങ്ങൾ പൂർണമായും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന തലത്തെ XY തലം എന്നാണ് പറയുക. ഇതേ രീതിയിൽ YZ തലം, ZX തലം എന്നീ പേരുകൾ മറ്റ് രണ്ട് തലങ്ങൾക്കും നൽകാം. ഈ മൂന്ന് തലങ്ങളാണ് സൂചകതലങ്ങൾ.

ഇനി ഒരു സ്ഥലത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിന് സൂചകസംഖ്യകൾ എങ്ങനെയാണ് നൽകുന്നത് എന്ന് നോക്കാം.

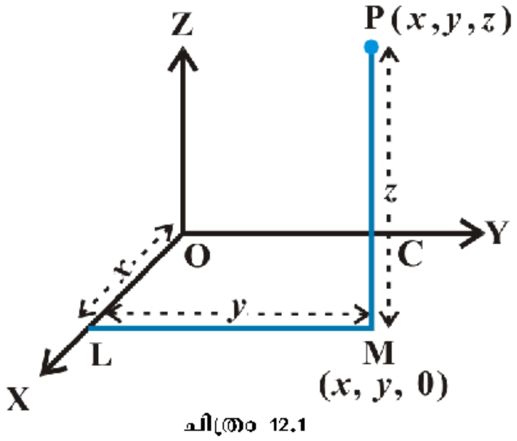
ചിത്രം 12.1 ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ P എന്ന ബിന്ദു പരിഗണിക്കുക. P യിലേക്ക് YZ തലത്തിൽ നിന്നുമുള്ള ലംബദൂരം എടുക്കുക. ഈ അകലം ഏത് അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണ് എന്ന് നോക്കാം. YZ തലത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലം X അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണ്. ഈ അകലത്തെ നമുക്ക് P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ x സൂചകസംഖ്യയായി പരിഗണിക്കാം.

അതായത്,

YZ തലത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലം P യുടെ x സൂചകസംഖ്യ

XZ തലത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലം P യുടെ y സൂചകസംഖ്യ

XY തലത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലം P യുടെ z സൂചകസംഖ്യ



ചിത്രം 12.1

ഉദാഹരണത്തിന് P(3, 4, 5) എന്ന ബിന്ദു സൂചകതലങ്ങളിൽ നിന്ന് എത്രവീതം അകലങ്ങളിലാണെന്ന് നോക്കാം. YZ തലത്തിൽ നിന്ന് 3, XZ തലത്തിൽ നിന്ന് 4, XY തലത്തിൽ നിന്ന് 5 യൂണിറ്റുകൾ അകലത്തിലായിരിക്കും P എന്ന ബിന്ദു.

മറ്റൊരു ബിന്ദു (3, 0, 4) ന്റെ സ്ഥാനം നോക്കാം. y സൂചകസംഖ്യ, അതായത് XZ തലത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലം 0 ആയതിനാൽ ആ ബിന്ദു XZ തലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദു ആകണമല്ലോ.

(3, 0, 0) എന്ന ബിന്ദു ഒരേ സമയം XZ തലത്തിലും XY തലത്തിലുമുള്ള ബിന്ദു ആണ്. അതിനാൽ അത് രണ്ട് തലങ്ങളുടേയും സംഗമരേഖയായ X അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദു ആയിരിക്കും.

പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ട് അക്ഷങ്ങൾ ഒരു ദ്വിമാന തലത്തെ നാല് ഭാഗങ്ങളായി തിരിക്കുമെന്ന് (ചതുർത്ഥാംശങ്ങൾ, *Quadrants*) നാം കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. പരസ്പരം ലംബമായ മൂന്ന് സൂചകതലങ്ങൾ ഈ സ്ഥലത്തെ എട്ട് ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കും. ഇവയെ അഷ്ടകാംശങ്ങൾ (*Octants*) എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്.

XOYZ, X′OYZ, X′OY′Z, XOY′Z, XOYZ′, X′OYZ′, X′OY′Z′, XOY′Z′.

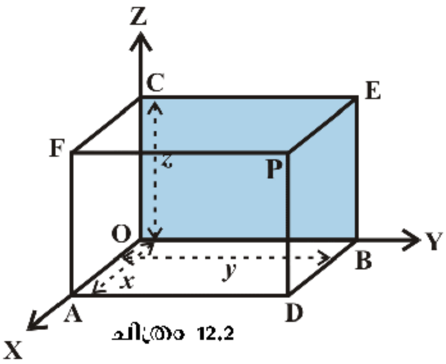
എന്നിങ്ങനെ അവയ്ക്ക് പേര് നൽകാം. ഇവയെ യഥാക്രമം 1–ാം അഷ്ടകാംശം, 2–ാം അഷ്ടകാംശം എന്നിങ്ങനേയും വിളിക്കാറുണ്ട്. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ നിന്ന് ഓരോ അഷ്ടകാംശത്തിലുള്ള സൂചകസംഖ്യകളുടെ ചിഹ്നങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാം.

അഷ്ടകാംശങ്ങൾ / സൂചകസംഖ്യകൾ	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

പട്ടിക 12.1

ഉദാഹരണം: 1

ചിത്രത്തിൽ P (2, 4, 5) ആണെങ്കിൽ A, B, C, D, E, F എന്നിവയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കാണുക.



ചിത്രം 12.2

പരിഹാരം

A(2, 0, 0), B(0, 4, 0)
C(0, 0, 5), D(2, 4, 0)
E(0, 4, 5), F(2, 0, 5)

ഉദാഹരണം: 2

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഏതു അഷ്ടകാംശത്തിലാണെന്ന് എഴുതുക.

A (–3,1, 2), B (–3, 1, – 2), C (3, 1, 2), D (–3, –1, –2)

പരിഹാരം

A (–3,1, 2) → X′OYZ അഷ്ടകാംശം (2–ാം അഷ്ടകാംശം)

B (–3, 1, – 2) → X′OYZ′ അഷ്ടകാംശം (6–ാം അഷ്ടകാംശം)

C (3, 1, 2) → XOYZ അഷ്ടകാംശം (1–ാം അഷ്ടകാംശം)

D (–3, –1, –2) → X′OY′Z അഷ്ടകാംശം (7–ാം അഷ്ടകാംശം)

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 12.1

1. x അക്ഷത്തിലുള്ള ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും y, z സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തായിരിക്കും?
2. XZ തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ y സൂചകസംഖ്യ എന്തായിരിക്കും?

3. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഏത് അഷ്ടകാംശത്തിലാണെന്ന് നിർണ യിക്കുക.

(i) (1, 2, 3) (ii) (4, –2, 3) (iii) (4, –2, –5)

(iv) (4, 2, –5) (v) (–4, 2, –5) (vi) (–4, 2, 5)

(vii) (–3, –1, 6) (viii) (2, – 4, – 7)

4. (i) X അക്ഷത്തേയും Y അക്ഷത്തേയും പൂർണമായി ഉൾക്കൊള്ളുന്ന തലം ഏതാണ്?

(ii) XY തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യയുടെ പൊതുരൂപം എന്ത്?

(iii) സൂചകതലങ്ങൾ ഒരു സ്ഥലത്തെ എത്ര ഭാഗങ്ങൾ ആക്കുന്നു?

12.3 രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം (Distance between two points)

(x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ദ്വിമാനതലത്തിലാകുമ്പോൾ അവ തമ്മി ലുള്ള അകലം കാണാൻ

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$ എന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാറുണ്ടല്ലോ.

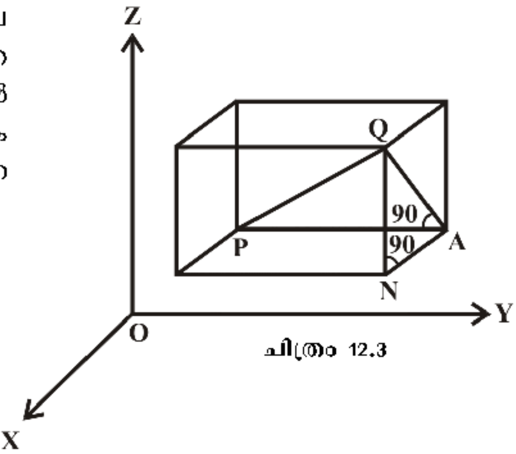
ഇതുപോലെ തന്നെ ത്രിമാനതലത്തിലെ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദു ക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണാൻ

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$ എന്ന സൂത്രവാക്യമുപയോഗിക്കാം

ഇതിൽ എത്തിച്ചേരുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ എന്നിവ OX, OY, OZ എന്ന പരസ്പരലംബമായസൂചക അക്ഷങ്ങൾ ഉള്ള ത്രിമാനതലത്തിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ ആണെന്ന് കരുതുക.

ചിത്രം (12.3) ൽ വരച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി സൂചകത ലങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ തലങ്ങൾ സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ ഒരു സാമാന്തരിക സ്തംഭം ലഭിക്കും. ഇതിന്റെ ഒരു വികർണ മാണ് PQ.



ചിത്രം 12.3

$\angle PAQ = 90^\circ$ ആയതിനാൽ

$$PQ^2 = PA^2 + AQ^2$$

ANQ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$AQ^2 = AN^2 + NQ^2$$

അതായത് $PQ^2 = PA^2 + AN^2 + NQ^2$

$PA = y_2 - y_1$, $AN = x_2 - x_1$ കൂടാതെ $NQ = z_2 - z_1$

$\therefore \quad PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

അതായത്, $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഇനി (x_2, y_2, z_2) എന്ന ബിന്ദു ആധാരബിന്ദു (0, 0, 0) ആയാൽ

$PQ = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ എന്ന് കാണാം.

ഉദാഹരണം: 3

P(1, –3, 4) and Q (– 4, 1, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$$PQ = \sqrt{(-4-1)^2 + (1+3)^2 + (2-4)^2}$$
$$= \sqrt{25+16+4}$$
$$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ യൂണിറ്റ്}$$

ഉദാഹരണം : 4

P (–2, 3, 5), Q (1, 2, 3), R (7, 0, –1) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$PQ = \sqrt{(1+2)^2 + (2-3)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$
$$QR = \sqrt{(7-1)^2 + (0-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$
$$PR = \sqrt{(7+2)^2 + (0-3)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{81+9+36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$
$$PQ + QR = \sqrt{14} + 2\sqrt{14} = 3\sqrt{14} = PR$$

അതുകൊണ്ട് P, Q, R എന്നിവ സമരേഖീയമാണ്.

ഉദാഹരണം : 5

A (3, 6, 9), B (10, 20, 30), C (25, – 41, 5) എന്നിവ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ ആകുമോ? എന്തുകൊണ്ട്?

പരിഹാരം

$$AB^2 = (10-3)^2+(20-6)^2+(30-9)^2$$
$$= 49+196+441=686$$
$$BC^2 = (25-10)^2+(-41-20)^2+(5-30)^2$$
$$= 225+3721+625=4571$$
$$CA^2 = (3-25)^2+(6+41)^2+(9-5)^2$$
$$= 484+2209+16=2709$$

അതുകൊണ്ട് $CA^2 + AB^2 \neq BC^2$. ഈ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ ആയിരിക്കില്ല.

ഉദാഹരണം : 6

A (3, 4, 5), B (–1, 3, –7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തന്നിരിക്കുന്നു, കൂടാതെ

$PA^2 + PB^2 = 2k^2$, k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ.
എങ്കിൽ P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ x, y, z സൂചകസംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

P (x, y, z) ആണ് എന്ന് കരുതുക.

$$PA^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2$$
$$PB^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2$$

$PA^2 + PB^2 = 2k^2$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. അതായത്,

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 + (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = 2k^2$$

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z = 2k^2 - 109$, ആയിരിക്കും

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 12.2

1. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണ്ടെത്തുക.
   (i) (2, 3, 5) , (4, 3, 1) (ii) (–3, 7, 2) , (2, 4, –1)
   (iii) (–1, 3, – 4) , (1, –3, 4) (iv) (2, –1, 3) , (–2, 1, 3).
2. (–2, 3, 5), (1, 2, 3), (7, 0, –1) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
3. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.
   (i) (0, 7, –10), (1, 6, – 6) , (4, 9, – 6) എന്നിവ ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ ആണ്.

(ii) (0, 7, 10), (–1, 6, 6) , (– 4, 9, 6) എന്നിവ ഒരു സമപാർശ്വ മട്ടത്രികോണ ത്തിന്റെ മൂലകൾ ആണ്.

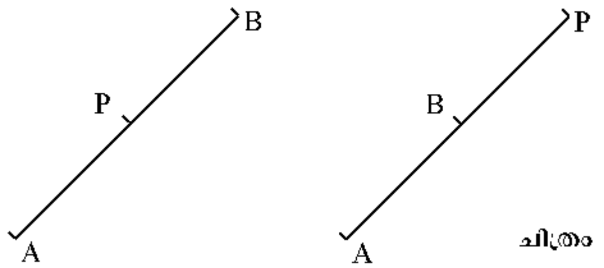
(iii) (–1, 2, 1), (1, –2, 5), (4, –7, 8) , (2, –3, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സാമാന്ത രികത്തിന്റെ മൂലകളാണ്.

4. (1, 2, 3) , (3, 2, –1) എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും എപ്പോഴും തുല്യ അകലം പാലിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

5. A (4, 0, 0), B (– 4, 0, 0) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും P എന്ന ഒരു ബിന്ദു വിലേക്കുള്ള അകലം 10 യൂണിറ്റായാൽ, P പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഒരു കൂട്ടം ബിന്ദുക്കളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

12.4 വിഭജനസൂത്രവാക്യം (Section Formula)

ദ്വിമാനജ്യാമിതിയിൽ, രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ അതിനു ള്ളിലെ ഒരു ബിന്ദു വിഭജിക്കുന്ന അനുപാതം തന്നിരുന്നാൽ, ആ വിഭജന ബിന്ദു വിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ത്രിമാനജ്യാമിതിയിൽ ഇക്കാര്യം ചർച്ച ചെയ്യാം. ഒരു ബിന്ദു ഒരു വരയെ എങ്ങനെയൊക്കെയാണ് വിഭജി ക്കുന്നത് എന്ന് ഓർമിക്കാം.



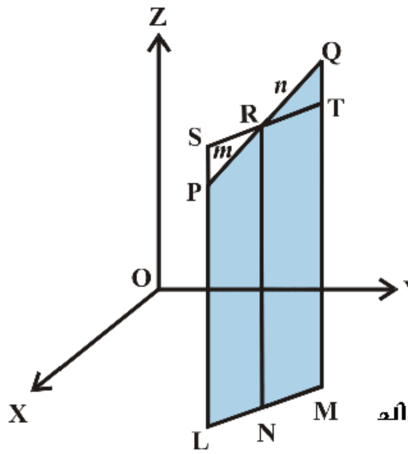
ചിത്രം 12.4

ഇതിൽ ആദ്യ ചിത്രത്തിൽ P എന്ന ബിന്ദു AB എന്ന വരയെ വിഭജിക്കുന്നത് ആന്ത രികമായാണ് (ആന്തരിക വിഭജനം). എന്നാൽ രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ P, AB യെ വിഭജിക്കുന്നത് ബാഹ്യമായാണ് (ബാഹ്യവിഭജനം).

P(x_1, y_1, z_1); Q (x_2, y_2, z_2) എന്നീ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ പരിഗണിക്കുക. R (x, y, z) എന്ന ബിന്ദു PQ എന്ന വരയെ $m : n$ ആനുപാതത്തിൽ ആന്തരികമായി വിഭജിക്കുന്നു എന്നും കരുതുക. x, y, z എന്നിവയുടെ വിലകൾ കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിക്കാം.

P, Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്ന് ചിത്രത്തിലേതുപോലെ XY തലത്തിലേക്ക് വര യ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങൾ XY തലത്തെ യഥാക്രമം L, M, N എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡി ക്കുന്നു. PL, RN, QM എന്നിവ പരസ്പരം സമാന്തരങ്ങൾ ആയിരിക്കും.

L, M, N എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ XY തലത്തിൽ ഒരേ വരയിലായിരിക്കും.



ചിത്രം 12.5

LM എന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായി R എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ ചിത്രത്തിലേതുപോലെ ST വരയ്ക്കുക.

ST എന്ന വര LP യെ S എന്ന ബിന്ദുവിൽ ബാഹ്യമായും MQ എന്ന വരയെ T എന്ന ബിന്ദുവിൽ ആന്തരികമായും മുറിക്കുന്നുണ്ട്.

ഇവിടെ LNRS, NMTR എന്നിവ സാമന്തരികങ്ങളാണെന്ന് വ്യക്തമാണ്.

ത്രികോണം PSR, ത്രികോണം QTR എന്നിവ സദൃശത്രികോണങ്ങളാണ്.

അതുകൊണ്ട്,

$$\frac{m}{n}=\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}=\frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{QT}}=\frac{\mathrm{SL}-\mathrm{PL}}{\mathrm{QM}-\mathrm{TM}}=\frac{\mathrm{NR}-\mathrm{PL}}{\mathrm{QM}-\mathrm{NR}}=\frac{z-z_1}{z_2-z}$$

അതായത്, $z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}$

ഇതുപോലെ P, Q എന്നിവയിൽ നിന്ന് XZ, YZ എന്നീ തലങ്ങളിലേക്ക് ലംബം വരച്ചാൽ

$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$, $x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$ എന്നും ലഭിക്കുന്നു.

അതായത്,

$$\mathrm{R} = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$$

R വിഭജിക്കുന്നത് ബാഹ്യമായാണ് എങ്കിൽ,

$$R = \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right)$$

R എന്നത് മധ്യബിന്ദു ആണെങ്കിൽ $m : n = 1 : 1$ ആകും.

R ന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 7

A (1, –2, 3), B(3, 4, –5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന AB എന്ന വരയെ 2 : 3 അനുപാതത്തിൽ ആന്തരികമായും ബാഹ്യമായും ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

(i) AB യെ ആന്തരികമായി 2:3 അനുപാതത്തിൽ വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദു P (x, y, z) ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$$x = \frac{2(3) + 3(1)}{2+3} = \frac{9}{5}$$

$$y = \frac{2(4) + 3(-2)}{2+3} = \frac{2}{5}$$

$$z = \frac{2(-5) + 3(3)}{2+3} = \frac{-1}{5}$$

അതായത് ബിന്ദു $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$ ആണ്.

(ii) AB യെ ബാഹ്യമായി 2 : 3 എന്ന അനുപാതത്തിൽ വിഭിജിക്കുന്ന ബിന്ദു P (x, y, z) ആണെങ്കിൽ

$$x = \frac{2(3) - 3(1)}{2-3} = -3$$

$$y = \frac{2(4) - 3(-2)}{2-3} = -14$$

$$z = \frac{2(-5) - 3(3)}{2-3} = 19$$

അതുകൊണ്ട് ബിന്ദു (–3, –14, 19) ആണ്

ഉദാഹരണം : 8

വിഭജനസൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് (– 4, 6, 10), (2, 4, 6), (14, 0, – 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിൽ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ A (– 4, 6, 10), B (2, 4, 6), C(14, 0, – 2) ആണെന്ന് കരുതാം.

P എന്ന ബിന്ദു AB യെ $k : 1$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു എന്ന് വിചാരിച്ചാൽ.

P എന്നത് $\left(\frac{2k-4}{k+1}, \frac{4k+6}{k+1}, \frac{6k+10}{k+1}\right)$

k യുടെ ഏതെങ്കിലും വിലകൾക്ക് P യ്ക്കും C യ്ക്കും ഒരേ വിലകൾ കിട്ടുന്നുണ്ടോ എന്ന് നോക്കാം.

$\frac{2k-4}{k+1} = 14$ എന്നെടുത്താൽ $k = -\frac{3}{2}$ ആണ്.

$k = -\frac{3}{2}$ ആകുമ്പോൾ $\qquad \frac{4k+6}{k+1} = \frac{4(-\frac{3}{2})+6}{-\frac{3}{2}+1} = 0$

$$\frac{6k+10}{k+1} = \frac{6(-\frac{3}{2})+10}{-\frac{3}{2}+1} = -2$$

അതായത് C (14, 0, –2) എന്നത് AB യെ 3 : 2 എന്ന അനുപാതത്തിൽ ബാഹ്യമായി വിഭജിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദു ആണ്. അതുകൊണ്ട് A, B, C എന്നിവ ഒരേ വരയിലാണ്.

ഉദാഹരണം : 9

(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ മൂലകളായിട്ടുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രത്തിന്റെ (Centroid) സൂചകസംഖ്യകൾ എന്ത്?

പരിഹാരം

ത്രികോണം ABC എന്നിരിക്കട്ടെ. A, B, C എന്നീ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകളാണ് (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3). BC യുടെ മധ്യബിന്ദുവാണ് D.

BC യുടെ മധ്യബിന്ദു ആണല്ലോ D.

അതുകൊണ്ട്; D $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$ ആണ്.

G എന്ന ബിന്ദു, AD യെ 2 : 1 എന്ന അനുപാതത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നതിനാൽ

വിഭജനസൂത്രവാക്യപ്രകാരം G എന്നത്

$$\left(\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+x_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+y_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)+z_1}{2+1}\right)$$

അതായത്; $$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

ഉദാഹരണം : 10

(4, 8, 10), (6, 10, – 8) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര YZ തലത്തെ വിഭജിക്കുന്ന അനുപാതം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

YZ തലത്തെ ഈ വര മുറിച്ച് കടന്നു പോകുന്നത് YZ തലത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂടിയായതുകൊണ്ട് അതിന്റെ x സൂചകസംഖ്യ പൂജ്യമാണ്.

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

അതായത്, $$0 = \frac{m \times 6 + n \times 4}{m+n}$$

$$\therefore 0 - 6m + 4n$$

$$\Rightarrow 6m - -4n$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} - \frac{-4}{6} - \frac{-2}{3}$$

അതായത് ഈ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര YZ തലത്തെ വിഭജിക്കുന്നത് $-2 : 3$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ ആയിരിക്കും. YZ തലം ഈ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ മുറിക്കുന്നത് ബാഹ്യമായാണ്.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 12.3

1. $(-2, 3, 5)$ $(1, -4, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ $2 : 3$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ (i)ആന്തരികമായും (ii) ബാഹ്യമായും വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.
2. P $(3, 2, -4)$, Q $(5, 4, -6)$, R $(9, 8, -10)$ എന്നിവ ഒരേ വരയിലെ ബിന്ദുക്കൾ ആണ്. Q എന്ന ബിന്ദു PR നെ വിഭജിക്കുന്നത് ഏത് അനുപാതത്തിലാണെന്ന് കണ്ടെത്തുക.
3. $(-2, 4, 7)$, $(3, -5, 8)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ YZ തലം വിഭജിക്കുന്ന അനുപാതം കണ്ടുപിടിക്കുക.
4. വിഭജനസൂത്രവാക്യമുപയോഗിച്ച് A $(2, -3, 4)$, B $(-1, 2, 1)$, $C\left(0, \frac{1}{3}, 2\right)$ എന്നിവ ഒരേ വരയിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
5. P $(4, 2, -6)$, Q $(10, -16, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ മൂന്ന് തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 11

A $(1, 2, 3)$, B $(-1, -2, -1)$, C $(2, 3, 2)$, D $(4, 7, 6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ABCD എന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ മൂലകളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ ABCD ഒരു ചതുരമല്ലെന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ABCD ഒരു സാമാന്തരികമാണെന്ന് തെളിയിക്കുവാൻ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിച്ചാൽ മതി.

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$BC = \sqrt{(2+1)^2+(3+2)^2+(2+1)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

$$CD = \sqrt{(4-2)^2+(7-3)^2+(6-2)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$DA = \sqrt{(1-4)^2+(2-7)^2+(3-6)^2} = \sqrt{9+25+9}=\sqrt{43}$$

$AB = CD$, $BC = AD$, ആയതിനാൽ

ABCD ഒരു സാമാന്തരികമാകുന്നു.

ABCD ഒരു ചതുരമല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുന്നതിന് വികർണങ്ങൾ AC, BD എന്നിവ തുല്യമല്ല എന്ന് തെളിയിച്ചാൽ മതി.

$$AC = \sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

$$BD = \sqrt{(4+1)^2+(7+2)^2+(6+1)^2} = \sqrt{25+81+49}=\sqrt{155}.$$

$AC \neq BD$ ആയതിനാൽ ABCD ഒരു ചതുരമല്ല.

> **കുറിപ്പ്**
>
> ABCD ഒരു സാമാന്തരികമാണെന്ന് തെളിയിക്കാൻ വികർണങ്ങൾ AC, BD എന്നിവ പരസ്പരസമഭാജികളാണെന്ന് തെളിയിച്ചാലും മതി.

ഉദാഹരണം 12

A (3, 4, –5), B (– 2, 1, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്ന് തുല്യ അകലത്തിലുള്ള **P** എന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമവാക്യമെഴുതുക.

പരിഹാരം

PA = PB ആകുന്ന ഒരു ബിന്ദു P (x, y, z) എന്ന ആണ്.

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}$$

അതായത്, $$(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2 = (x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2$$

$$10x+6y-18z-29=0.$$

ഉദാഹരണം 13

A (3, –5, 7) B (–1, 7, – 6) എന്നിവ രണ്ടു മൂലകളായ ത്രികോണം ABC യുടെ മധ്യമകേന്ദ്രം (1, 1, 1) ആയാൽ C എന്ന മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകളെഴുതുക.

പരിഹാരം

C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y, z) എന്നിരിക്കട്ടെ. മധ്യമകേന്ദ്രം $(1, 1, 1)$ ആയതിനാൽ

$$\frac{x+3-1}{3}=1,\quad \frac{y-5+7}{3}=1,\quad \frac{z+7-6}{3}=1,$$

അതായത് $x = 1,\ y = 1, z = 2.$

ആയതിനാൽ C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(1, 1, 2)$.

കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. സാമാന്തരികം ABCD യുടെ മൂന്നു മൂലകൾ യഥാക്രമം $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -4)$, $C(-1, 1, 2)$ ആയാൽ നാലാമത്തെ മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകളെഴുതുക.

2. $(0, 0, 6)$, $B(0, 4, 0)$, $(6, 0, 0)$ എന്നിവ മൂലകളായ ത്രികോണം ABC യുടെ മധ്യമങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

3. ആധാരബിന്ദു മധ്യമകേന്ദ്രമാകുന്ന ത്രികോണം PQR ന്റെ മൂലകൾ യഥാക്രമം $P(2a, 2, 6)$, $Q(-4, 3b, -10)$, $R(8, 14, 2c)$ ആയാൽ a, b, c യുടെ വില കണക്കാക്കുക.

4. $P(3, -2, 5)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $5\sqrt{2}$ യൂണിറ്റ് അകലത്തിൽ y അക്ഷത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളെഴുതുക.

5. $P(2, -3, 4)$, $Q(8, 0, 10)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ബിന്ദുവായ R ന്റെ x സൂചകസംഖ്യ 4 ആയാൽ R ന്റെ മറ്റു സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

   (സൂചന : PQ വിനെ R വിഭജിക്കുന്ന അംശബന്ധം $k : 1$ ആയാൽ, R ന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(\frac{8k+2}{k+1}, \frac{-3}{k+1}, \frac{10k+4}{k+1}\right)$ ആയിരിക്കും)

6. A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യഥാക്രമം $(3, 4, 5)$, $(-1, 3, -7)$ ആകുന്നു. $PA^2 + PB^2 = k^2$, (k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ) ആകുന്ന P എന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമവാക്യമെഴുതുക.

സംഗ്രഹം

- ത്രിമാനജ്യാമിതിയിൽ സൂചക അക്ഷങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബങ്ങളായ മൂന്നു വരകളാണ്. വരകളെ x, y, z അക്ഷങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.
- ഓരോ ജോടി അക്ഷങ്ങൾ നിർണയിക്കുന്ന സൂചകതലങ്ങൾ XY, YZ, ZX തലങ്ങളെന്നു പറയുന്നു.
- സൂചകതലങ്ങൾ സ്പെയിസിനെ എട്ട് ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു. ഈ ഭാഗങ്ങളെ അഷ്ടകാംശങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.
- ത്രിമാനതലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു P യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y, z) എന്ന സംഖ്യാത്രയം ഉപയോഗിച്ച് എഴുതുന്നു. ഇവിടെ x, y, z, യഥാക്രമം YZ, ZX, XY എന്നീ തലങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങളാണ്.
- (i) x അക്ഷത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(x, 0, 0)$ എന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും.

  (ii) y അക്ഷത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(0, y, 0)$ എന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും.

  (iii) z അക്ഷത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(0, 0, z)$ എന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും.
- $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

  $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
- $P(x_1\ y_1\ z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച വരയെ R എന്ന ബിന്ദു $m : n$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിച്ചാൽ R ന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ

  i. $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$, ആന്തരികവിഭജനം

  ii. $\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m\ \ n}, \frac{my_2 - ny_1}{m\ \ n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m\ \ n}\right)$, ബാഹ്യവിഭജനം ആയിരിക്കും.

- $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ ആയിരിക്കും.
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) എന്നിവ ആയാൽ അതിന്റെ മധ്യമകേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$ ആയിരിക്കും.

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

വിശ്ലേഷണജ്യാമിതിയുടെ പിതാവ് എന്നറിയപ്പെടുന്ന റെനെ ഡെക്കാർത്തേ (1596 – 1650) 1637 ൽ മാത്രമാണ് ദ്വിമാന ജ്യാമിതിയെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിച്ചത്. ഈ പ്രസ്താവം അദ്ദേഹത്തിന്റെ സഹപ്രവർത്തകൻ പിയറെ ഫെർമ (1601 – 1665) യുടെയും ലാഹയറെയുടെയും (1640 – 1718) കാര്യത്തിൽ ശരിയാണ്. അവരുടെ സംഭാവനയിൽ ത്രിമാന ജ്യാമിതിയുടെ സൂചനകൾ ഉണ്ടായിരുന്നെങ്കിലും വിശദാംശങ്ങൾ ഇല്ലായിരുന്നു. ഡെകാർത്തേക്കും ത്രിമാന ജ്യാമിതിയുടെ ആശയങ്ങൾ ഉണ്ടായിരുന്നെങ്കിലും അതിനെ വികസിപ്പിച്ചിരുന്നില്ല. ഇന്ന് നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന ത്രിമാന സൂചകതലങ്ങളെക്കുറിച്ച് 1715 ൽ ലബനീസിന് ജെ. ബർനോലി (1667 – 1716) കത്തെഴുതി വിശ്ലേഷണ ത്രിമാന ജ്യാമിതിയെ ചിട്ടയായി വികസിപ്പിച്ചതും ഫ്രഞ്ച് അക്കാദമിയിൽ ആദ്യമായി അവതരിപ്പിച്ചതും 1748 ൽ എൽ.ഓയ്‌ലർ (1707 – 1783) തന്റെ "Introduction to Geometry" എന്ന പുസ്തകത്തിലെ രണ്ടാം വാല്യത്തിലെ 5–ാം അധ്യായത്തിൽ അനുബന്ധമായി ത്രിമാന ജ്യാമിതിയെ കുറിച്ച് ചിട്ടയായി പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്. 19–ാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ രണ്ടാം പകുതിയിൽ മാത്രമാണ് മൂന്നിൽ കൂടുതൽ മാനങ്ങളിലേക്ക് ജ്യാമിതിയെ വിപുലപ്പെടുത്തിയത്. ഐൻസ്റ്റൈന്റെ ആപേക്ഷികതാസിദ്ധാന്തത്തിലെ Space-Time Continuum ത്തിലാണ് ഇതിന്റെ പ്രായോഗികതയുടെ പ്രസിദ്ധമായ ഉദാഹരണം രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ളത്.

R6G8B5

അധ്യായം 13

സീമകളും അവകലജങ്ങളും
(LIMITS AND DERIVATIVES)

❖ *കലനം ഒരു താക്കോൽ ആയി ഉപയോഗിച്ച് പ്രകൃതി പ്രതിഭാസങ്ങളെ വിശദീകരിക്കാൻ ഗണിതം സമർത്ഥമായി ഉപയോഗിക്കാം – വൈറ്റ് ഹെഡ്* ❖

13.1 ആമുഖം

സർ ഐസക് ന്യൂട്ടൺ
(1642-1727)

ഈ അധ്യായം കലനത്തിന്റെ (Calculus) ആദ്യപടിയാണ്. ഒരു ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തിനനുസരിച്ച് ആ ഏകദത്തിന്റെ മൂല്യത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തെ സംബന്ധിച്ച് പഠനം നടത്തുന്ന ഗണിതശാസ്ത്രശാഖയാണ് കലനം. അവകലജത്തെ നിർവചിക്കാതെ തന്നെ അതിന്റെ ഒരു ആശയം നൽകുകയാണ്, ആദ്യം ചെയ്യുന്നത്. പിന്നീട് സീമക്ക് (Limit) സ്വാഭാവികാവസ്ഥയിൽ ഒരു നിർവചനം നൽകുകയും അതിന്റെ ബീജഗണിത ക്രിയകളെപ്പറ്റി പഠിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. തുടർന്ന് അവകലജത്തിന്റെ നിർവചനത്തിലേക്ക് എത്തിച്ചേരുകയും അതിന്റെ ബീജഗണിത ക്രിയകൾ ചർച്ച ചെയ്യുകയും ചെയ്യുന്നു. ഒപ്പം ചില വിശേഷ ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുകയുമാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ

13.2 അവകലജം എന്ന ആശയം

ശാസ്ത്ര-സാങ്കേതിക പഠനത്തിൽ ഏറ്റവും പ്രാധാന്യമുള്ള വസ്തുത രണ്ടോ അതിലധികമോ ഭൗതിക അളവുകളുടെ പരസ്പരബന്ധമാണ്. വൃക്ഷങ്ങളുടെ വളർച്ചാനിരക്ക്, റോഡപകടങ്ങളുടെ വർധനനിരക്ക്, ദൂരം സമയത്തിനനുസരിച്ച് മാറുന്ന നിരക്ക് (വേഗം), വേഗം മാറുന്ന നിരക്ക് (ത്വരണം), കറന്റും വോൾട്ടേജും തമ്മിലുള്ള നിരക്ക്, ജോലി ചെയ്യുന്ന നിരക്ക് (പവർ) എന്നിങ്ങനെ വിവിധ നിരക്കുകളെക്കുറിച്ച് നമുക്കറിയാം. ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ മിക്ക നിരക്കുകളെയും അംശബന്ധം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാറുണ്ട്.

ചുവടെ കാണുന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിശോധിക്കാം.
200 കി.മി. ദൂരം 4 മണിക്കൂർകൊണ്ട് സഞ്ചരിച്ചാൽ ശരാശരി വേഗം

$\frac{200\text{കി.മി.}}{4\text{മണിക്കൂർ}}$ = 50 കി.മി/മണിക്കൂർ. അതുപോലെ ഒരു വൃക്ഷം 3 മാസം കൊണ്ട്

150 സെ.മി വളർന്നാൽ ഒരു മാസത്തെ വളർച്ചാനിരക്ക് $\frac{150\text{സെ.മീ}}{3\text{മാസം}}$ = 50 സെ.മീ./

മാസം. 30 വയസ്സുള്ള ഒരു യുവതിക്ക് 150 സെ.മീ ഉയരമുണ്ട്. അംശബന്ധം എന്ന

ആശയം ഉപയോഗിച്ചാൽ $\frac{150.\text{ സെ.മീ}}{30\text{വർഷം}}$ = 5 സെ.മീ/വർഷം, ഇതിന്റെ അർഥം

ആ യുവതിക്ക് ഒരു വർഷം 5 സെ.മീ. ഉയരം കൂടുന്നു എന്നാകുന്നു. അങ്ങനെയെങ്കിൽ ഈ യുവതിക്ക് 65 വയസ്സാകുമ്പോൾ എത്ര ഉയരം ഉണ്ടായിരിക്കും? $5 \times 65 = 325$ സെ.മീ. (ഏകദേശം 10 അടിക്കു മുകളിൽ) 5 വയസ്സുണ്ടായിരുന്നപ്പോഴുള്ള ഉയരം $5 \times 5 = 25$ സെ.മീ. ഇങ്ങനെയുള്ള പ്രവചനങ്ങൾ കിട്ടുവാൻ കാരണം വളർച്ചയുടെ നിരക്ക് രേഖീയമായിരിക്കുമെന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ചതിനാലാണ്. (ഉയരവും, വയസും തമ്മിലുള്ള ഗ്രാഫ് പരിശോധിച്ചാൽ നേർരേഖയായിരിക്കും, എന്നതാണ് "രേഖീയം" കൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്) ഈ നിഗമനം ശാസ്ത്രീയ തത്വങ്ങളുമായി പൊരുത്തപ്പെടുന്നവയല്ല, കാരണം മനുഷ്യന്റെ വളർച്ച (ഉയരം) പ്രായം കൂടുംതോറും

കുറയുന്നതായാണ് പഠനങ്ങൾ തെളിയിക്കുന്നത്. ആയതിനാൽ $\frac{\text{ഉയരം } (h)}{\text{പ്രായം } (a)}$ എന്ന

നിരക്ക് യഥാർഥ വളർച്ചയുടെ നിരക്കിനെ പ്രതിഫലിപ്പിക്കുന്നില്ല.
പ്രകൃതിയിലെ മിക്ക ബന്ധങ്ങളിലും ഒന്ന് മറ്റൊന്നിനനുസരിച്ച് മാറുന്നത് രേഖീയമായല്ല. അതുകൊണ്ട് തന്നെ നിരക്കുകൾ പറയുമ്പോൾ ഏത് നിശ്ചിത സമയത്തുള്ളതാണ് എന്ന് സൂചിപ്പിക്കേണ്ടി വരുന്നു. ചെറിയ മാറ്റങ്ങളുടെ അംശബന്ധം ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ തരാത്തതിനാൽ സീമ (limit) എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച് ഒരേ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കണ്ടെത്തുകയാണ് കലനത്തിൽ ചെയ്യുന്നത്. അതാണ് അവകലനം.
പ്രശസ്ത ഭൗതികശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഗലീലിയോ, തന്റെ ഭൗതിക പരീക്ഷണങ്ങളുടെ ഭാഗമായി ഉയരത്തിൽ നിന്നും ഭൂമിയിൽ പതിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം സമയത്തിന്റെ വർഗത്തിന് ആനുപാതികമാണെന്ന് കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്. ബീജഗണിതഭാഷയിൽ എഴുതിയാൽ, t സമയം കൊണ്ട് s ദൂരം സഞ്ചരിച്ചാൽ
$s = 4.9\, t^2$ ---------- (i)
ഉയരത്തിൽ നിന്നും താഴേക്ക് (ഭൂമിയിലേക്ക്) പതിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു വ്യത്യസ്ത സമയ ഇടവേളകളിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം പട്ടികയായി താഴെ കൊടുക്കുന്നു.

പട്ടിക 13.1

s	0	1	1.5	1.8	1.9	1.95	2	2.05	2.1	2.2	2.5	3	4
t	0	4.9	11.025	15.876	17.689	18.63225	19.6	20.59	21.609	23.71	30.625	44.1	78.4

$t = 2$ സെക്കന്റ് എന്ന സമയത്തെ വേഗം കണ്ടുപിടിക്കലാണ് ലക്ഷ്യം. ഇതിനായി $t = 2$ സെക്കന്റിൽ അവസാനിക്കുന്ന സമയ ഇടവേളകളിൽ ശരാശരി വേഗം കണ്ടെത്തുകയാണ് ഒരു മാർഗം. ഇത് $t = 2$ സെക്കന്റിലെ വേഗം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് സഹായിക്കും. $t = t_1$, $t = t_2$ എന്നീ സമയങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ശരാശരി വേഗത കാണാൻ $\dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ ഉപയോഗിക്കാം.

$$\text{ആദ്യ രണ്ടു സെക്കന്റിലെ ശരാശരി വേഗത} = \frac{s(t_2 = 2) - s\,(t_1 = 0)}{2 - 0}$$

$$= \frac{19.6\,\text{മീ.} - 0\,\text{മീ.}}{2\,\text{സെ} - 0\,\text{സെ}} = 9.8 \text{ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്}$$

ഇതുപോലെ $t = 1$ സെക്കന്റിനും $t = 2$ സെക്കന്റിനും ഇടയിലുള്ള ശരാശരി

$$\text{വേഗത} = \frac{s(t_2 = 2) - s(t_1 = 1)}{2 - 1} = \frac{(19.6 - 4.9)\,\text{മീറ്റർ}}{1\ \text{സെക്കന്റ്}}$$

$$= 14.7 \text{ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്}$$

ഇതേ മാർഗം ഉപയോഗിച്ച് $t = t_1$, $t = 2$ എന്നീ വിലകളിൽ ശരാശരി വേഗം കണക്കാക്കാം.

$$v = \frac{s(t = 2) - s\left(t = t_1\right)}{2 - t_1}$$

പട്ടിക (13.2) ൽ $t = t_1$, $t = 2$ സെക്കന്റ് എന്നീ വിലകളിലുള്ള ശരാശരി വേഗം നൽകിയിരിക്കുന്നു.

പട്ടിക 13.2

t_1	0	1	1.5	1.8	1.9	1.95	1.99
v	9.8	14.7	17.15	18.62	19.11	19.355	19.551

പട്ടിക 13.2 പ്രകാരം ശരാശരി വേഗം ക്രമേണ വർധിക്കുന്നതായി കാണാം. $t = 2$ സെക്കന്റിൽ അവസാനിക്കുന്ന സമയ ഇടവേളകൾ ചെറുതാക്കിയാൽ $t = 2$ ലെ വേഗം കുറെക്കൂടി കൃത്യമായി പറയാനുള്ള ആശയം ലഭിക്കും. 1.99 സെക്കന്റിലും 2 സെക്കന്റിലുമുള്ള ശരാശരി വേഗത്തിൽ കാര്യമായി ഒന്നും സംഭവിക്കുന്നില്ലെങ്കിലും $t = 2$ സെക്കന്റിലെ വേഗം 1.99 മീറ്റർ/സെക്കന്റിന് മുകളിലാണെന്ന് പറയാം.

നമ്മുടെ അനുമാനം ഒന്നുകൂടി ശക്തിപ്പെടുത്താൻ (ദൃഢീകരിക്കാൻ) താഴെ പറയുന്ന കണക്കുകൂട്ടലുകൾക്ക് കഴിയും. $t = 2$ സെക്കന്റിൽ തുടങ്ങുന്ന സമയ ഇടവേളകളിൽ ലഭിക്കുന്ന ശരാശരി വേഗം കണ്ടുപിടിക്കുക. നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ $t = 2$ സെക്കന്റിനും $t = t_2$ സെക്കന്റിനും ഇടയിലുള്ള ശരാശരി വേഗം

$$= \frac{s(t_2) - s(t=2)}{t_2 - 2} = \frac{s(t_2) - 19.6}{t_2 - 2}$$

s ലെ ചെറിയ വ്യത്യാസത്തെ Δs എന്നും t യിലെ ചെറിയ വ്യത്യാസത്തെ Δt എന്നും സൂചിപ്പിച്ചാൽ ശരാശരി വേഗത്തെ $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ എന്നെഴുതാം.

അതായത്, $\frac{s(t_2) - 19.6}{t_2 - 2} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

പട്ടിക 13.3 ൽ $t = 2$ സെക്കന്റിനും $t = t_2$ സെക്കന്റിലും ലഭിച്ച വേഗം (v) മീ/സെക്കന്റിൽ കാണാം.

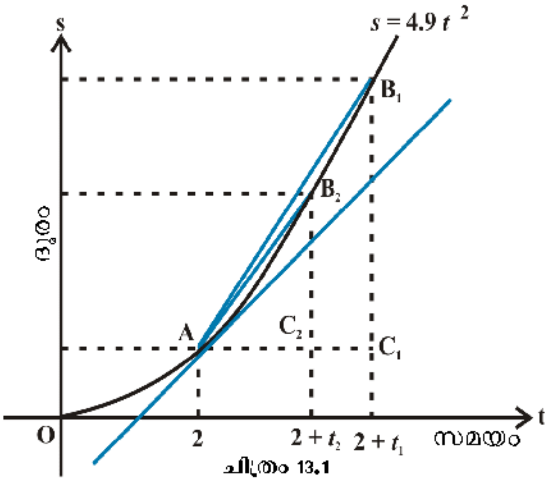
t_2	4	3	2.5	2.2	2.1	2.05	2.01
v	29.4	24.5	22.05	20.58	20.09	19.845	19.649

പട്ടിക 13.3

ഇവിടെ നമുക്ക് മനസിലായത് സമയ ഇടവേള ചെറുതാകും തോറും $t = 2$ സെക്കന്റിൽ ഉള്ള വേഗത്തെ സംബന്ധിച്ച് കൂടുതൽ കൃത്യത ലഭിക്കുന്നു എന്നാണ്. ഇങ്ങനെ 2 സെക്കന്റിനേക്കാൾ കുറവായ സമയങ്ങൾ എടുത്തപ്പോഴും സമയത്തിന്റെ ഇടവേളകൾ ചെറുതാകുന്തോറും ശരാശരി വേഗം 19.6 നോട് അടുക്കുന്നതായി കാണാം. അതായത് 19.551 മീ./സെക്കന്റിനും 19.64 മീ./സെക്കന്റിനും ഇടയിലാണ്. സാങ്കേതികമായി പറഞ്ഞാൽ t = 2 സെക്കന്റാകുമ്പോഴുള്ള ക്ഷണവേഗം (Instantaneous velocity /speed) 19.551 മീ./സെക്കന്റിനും 19.649 മീ/സെക്കന്റിനും ഇടയിലാണ് എന്നു പറയാം. $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ എന്ന അംശബന്ധം Δt വളരെ വളരെ ചെറുതാകുമ്പോൾ

$(\Delta t \to 0)$ ഒരേ ഒരു സംഖ്യയിലേക്ക് അടുക്കുന്നതായി കാണാം എന്നാൽ, ഒരിക്കലും അതാവുകയില്ല. പക്ഷേ അതിൽ നിന്നുള്ള വ്യത്യാസം എത്ര ചെറിയ അധിസംഖ്യ തന്നാലും അതിലും ചെറുതാണ്. അതായത് $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ എന്ന അംശബന്ധം 19.6 മീ/സെക്കന്റിനോട് അത്രയേറെ ചേർന്നിരിക്കുന്നു.

ഇവിടെ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ ഏറ്റവും ഉജ്വലമായ ആശയങ്ങളിൽ ഒന്നായ സീമ (limit) ഉപയോഗിച്ച് ക്ഷണവേഗം കൃത്യമായി കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുന്നു. സമയ ഇടവേളകൾ ഏറ്റവും ചെറുതാകുമ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിച്ച 19.6 മീ/സെക്കന്റിനെ $t = 2$ സെക്കന്റാകുമ്പോഴുള്ള അവകലജമെന്ന് പറയുന്നു.



ചിത്രം 13.1

സീമ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന ഈ പ്രക്രിയയെ മറ്റൊരു തരത്തിൽ കൂടി അവതരിപ്പിക്കാം. മുകളിൽ നിന്നും താഴേക്കു വരുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം (s) y അക്ഷത്തിലും വിവിധ സമയ ഇടവേളകൾ (t) x അക്ഷത്തിലും രേഖപ്പെടുത്തി ഒരു ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാം. $h_1, h_2, h_3 \ldots$ എന്ന സമയ ഇടവേളകൾ പൂജ്യത്തിലലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ, ശരാശരി വേഗത്തിന്റെ ശ്രേണിയും $\frac{C_1B_1}{AC_1}, \frac{C_2B_2}{AC_2}, \frac{C_3B_3}{AC_3}, \cdots$ എന്ന അംശബന്ധത്തിന്റെ ശ്രേണിയും എത്തിച്ചേരുന്ന സീമയും ഒന്നാണ്.

$h_1 = AC_1$, എന്ന സമയ ഇടവേളയിൽ വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരം

$$C_1B_1 = s_1 - s_0$$

$$\frac{C_1B_1}{AC_1} = \frac{S_1 - S_0}{h} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

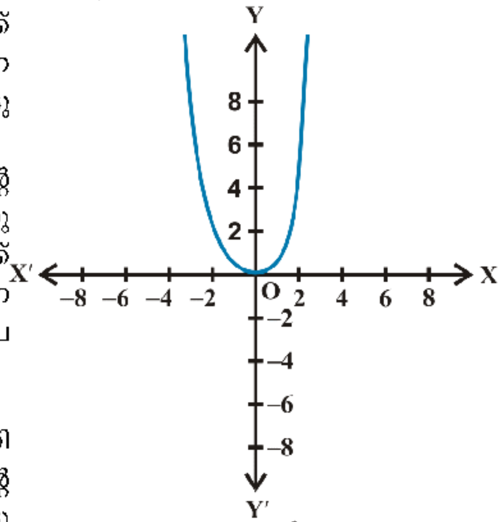
ഈ അംശബന്ധങ്ങളുടെ ശ്രേണി, ഈ വക്രത്തിലെ A എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ (tangent) ചരിവിലേക്ക് അടുക്കുന്നതായി കാണാം. അതായത് $t = 2$ സെക്കന്റിൽ വസ്തുവിന്റെ ക്ഷണവേഗം $v(t)$ എന്നത് $S = 4.9t^2$ എന്ന വക്രത്തിൽ $t = 2$ ലെ ചരിവിന് (slope) തുല്യമാകുന്നതായി കാണാം.

13.3 സീമകൾ (Limits)

മുകൾഭാഗങ്ങളിൽ നടന്ന ചർച്ചയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ നാം എത്തിച്ചേർന്ന വസ്തുത ഇതാണ്. "സീമ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന പ്രക്രിയ നല്ല വ്യക്തതയോടെ മനസ്സിലാക്കേണ്ടതുണ്ട്." താഴെ ചേർക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽ കൂടി സീമ എന്ന ആശയം കൂടുതൽ വ്യക്തമാക്കാം. $f(x) = x^2$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. x ന്റെ വില പൂജ്യത്തോട് വളരെ വളരെ അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ വില പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുന്നു. ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ചാൽ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ എന്നെഴുതാം. (x പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ സീമയാണ് പൂജ്യം എന്ന് വായിക്കണം.)

$f(x)$ എന്ന ഏകദത്തിന്, x, പൂജ്യത്തിലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുമെന്ന് കരുതുന്ന വിലയാണ് $f(x)$ ന്റെ x പൂജ്യത്തിലേക്ക് അടുക്കുമ്പോഴുള്ള സീമ.

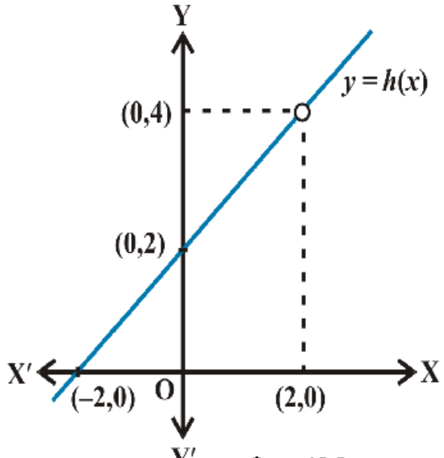
പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ $x \to a$ (x ന്റെ വില a യിലേക്ക് വളരെ വളരെ അടുക്കുമ്പോൾ) $f(x) \to l$ ($f(x)$, ന്റെ വില l ലേക്ക് വളരെ വളരെ അടുക്കുന്നു.) എങ്കിൽ l നെ $f(x)$ ന്റെ സീമ എന്നു പറയാം. ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ചാൽ $\lim_{x \to a} f(x) = l$.



$f(x) = x^2$ ചിത്രം 13.2

$f(x) = |x|$, $x \neq 0$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ $f(0)$ നിർവചിച്ചിട്ടില്ല. x ന്റെ വില പൂജ്യത്തിലേക്ക് വളരെ വളരെ അടുക്കുന്നു. അപ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ വില പൂജ്യത്തിലേക്ക് നീങ്ങുന്നതായി കാണാം. അതായത് $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ ഗ്രാഫിൽ നിന്ന് നേരിട്ട് മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കുന്ന വസ്തുതയാണിത്.

അടുത്തതായി $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കാം. x ന്റെ വില 2 നോട് വളരെ വളരെ അടുക്കുമ്പോൾ $h(x)$ ന്റെ വില 4 ലേക്ക് അടുക്കുന്നതായി കാണാം. $y - h(x)$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ സഹായത്തോടു കൂടി കൂടുതൽ വ്യക്തത കൈവരിക്കുവാൻ സാധിക്കും.



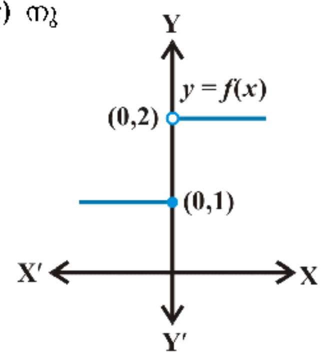
ചിത്രം 13.3

മുകളിൽ വിവരിച്ച എല്ലാ ഉദാഹരണങ്ങളിലും $x \to a$ യോട് അടുക്കുന്നത് ഏതു വഴിയായാലും അപ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഏകദത്തിന്റെ സീമ അതിനെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ലെന്നു കാണാം.

x എന്ന ചരത്തിന് a എന്ന ഒരു രേഖീയസംഖ്യയിലേക്ക് രണ്ടുതരത്തിൽ മാത്രമേ അടുക്കുവാൻ സാധിക്കുകയുള്ളൂ. ഒന്നുകിൽ a യുടെ ഇടത്തുനിന്നും, അല്ലെങ്കിൽ a യുടെ വലതുനിന്നും അതായത് x ന്റെ വില a യേക്കാൾ കുറഞ്ഞ വിലകളിൽ നിന്നും a ലേക്കും അല്ലെങ്കിൽ a യെക്കാൾ കൂടിയ വിലകളിൽ നിന്നും a ലേക്കും അടുക്കാം. സ്വാഭാവികമായും ഇത് രണ്ടു തരത്തിലുള്ള സീമകൾ ഉണ്ടാകുവാൻ കാരണമാകുന്നു. ഇടതുസീമയും (left hand limit) വലതുസീമയും (right hand limit) x എന്ന ചരം a എന്ന രേഖീയസംഖ്യയുടെ ഇടതുഭാഗത്ത് നിന്നും a യിലേക്ക് അടുത്താൽ കിട്ടുന്ന സീമയെ ഇടതുസീമ എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $\lim_{x \to a^-} f(x)$ എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാം. x എന്ന ചരം a എന്ന രേഖീയസംഖ്യയുടെ വലതുഭാഗത്ത് നിന്നും a യിലേക്കടുത്താൽ ഏകദം $f(x)$ നു ലഭിക്കുന്ന സീമയെ വലതുസീമ എന്നു പറയുന്നു.

ഇതിനെ $\lim_{x \to a^+} f(x)$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് (13.4) താഴെ കൊടുക്കുന്നു.



ചിത്രം 13.4

ഗ്രാഫിൽ നിന്നും $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \text{ ആകുന്നു.}$$

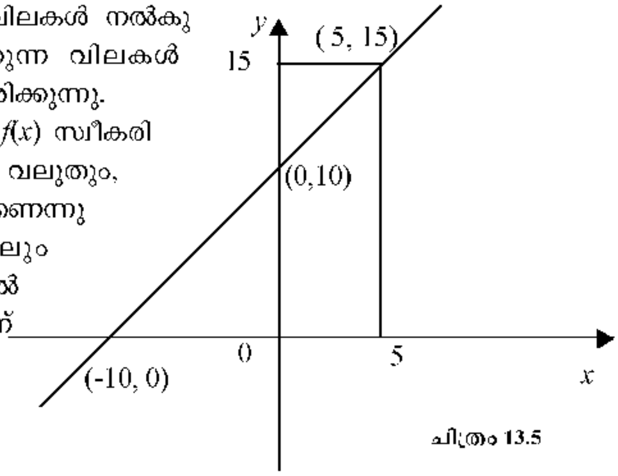
പൂജ്യത്തിലുള്ള ഇടതുവശസീമയും, വലതുവശസീമയും, വ്യത്യസ്തങ്ങളാണ്. (പൂജ്യത്തിൽ ഏകദത്തിന് വിലയുണ്ടുതാനും) ഇങ്ങനെ സംഭവിക്കുമ്പോൾ, x പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുമ്പോൾ f എന്ന ഏകദത്തിന് സീമ നിലനിൽക്കുന്നില്ല എന്നു പറയും.

സീമയുടെ അസ്തിത്വം (Existence of Limits)

ചരം x, രേഖീയ സംഖ്യ a യിലേക്കു നീങ്ങുമ്പോൾ ഏകദം f ന് സീമ ഉണ്ടാകണമെങ്കിൽ (നിലനിൽക്കണമെങ്കിൽ) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ ആയിരിക്കണം. സീമ എന്ന ആശയത്തിന്റെ സ്പഷ്ടീകരണത്തിന് ചുവടെ കാണുന്ന വിശദീകരണങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കാം.

വിശദീകരണം : 1

$f(x) = x + 10$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ $x = 5$ ലെ സീമ കണ്ടെത്തണമെന്ന് കരുതുക. അതിനായി x ന് 5 നോട് അടുത്ത് നിൽക്കുന്ന വിലകളിൽ f ന്റെ വിലകൾ കണ്ടെത്തണം. x സ്വീകരിക്കുന്ന വിലകൾ 5 നേക്കാൾ കുറഞ്ഞതാകാം; 5 നേക്കാൾ കൂടിയ വിലകളാകാം. ഉദാഹരണമായി, 4.9, 4.95, 4.99, 4.995.... ഈ വിലകളെല്ലാം 5 ന്റെ ഇടതുഭാഗങ്ങളിലുള്ളവയും 5.001, 5.01, 5.1 .... എന്നിവ 5 ന്റെ വലതുഭാഗങ്ങളുള്ളവയും ആകുന്നു. ഇവയുടെ വിലകൾ നൽകുമ്പോൾ ഏകദം f സ്വീകരിക്കുന്ന വിലകൾ ചുവടെ പട്ടികയിൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു. പട്ടിക 13.4 ൽ നിന്നും $x = 5$ ൽ $f(x)$ സ്വീകരിക്കുന്ന വില 14.995 നേക്കാൾ വലുതും, 15.001 നേക്കാൾ ചെറുതും ആണെന്നു മനസ്സിലാക്കാം. $x = 4.995$ ലും $x = 5.001$ ലും $f(x)$ ന്റെ വിലയിൽ കാര്യമായ മാറ്റം ഒന്നും ഇല്ലെന്ന് കാണാവുന്നതാണ്.



ചിത്രം 13.5

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = 15$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 15$$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^-} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \to 5} f(x) = 15$$

പട്ടിക 13.4

x	4.9	4.95	4.99	4.995	5.001	5.01	5.1
$f(x)$	14.9	14.95	14.99	14.995	15.001	15.01	15.1

വിശദീകരണം : 2

ഏകദം $f(x) = x^3$ പരിഗണിക്കുക.

$x = 1$ ലെ $f(x)$ ന്റെ സീമ കണ്ടുപിടിക്കുക. മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ചതുപോലെ, $f(x)$ ന് $x = 1$ ന്റെ സമീപവിലകളിലുള്ള വിലകൾ പട്ടികയാക്കുക. (13.5)

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	0.729	0.970299	0.997002999	1.003003001	1.030301	1.331

പട്ടിക – 13.5

പട്ടികയിൽ നിന്നും $f(x)$ ന് $x - 1$ ആകുമ്പോഴുള്ള വില 0.997002999 നേക്കാൾ വലുതും 1.003003001 നേക്കാൾ ചെറുതുമാണെന്നും $x = 0.999$ ലും 1.001 ലും ഉള്ള വിലകളിൽ കാര്യമായ മാറ്റങ്ങളൊന്നും സംഭവിച്ചിട്ടില്ലെന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

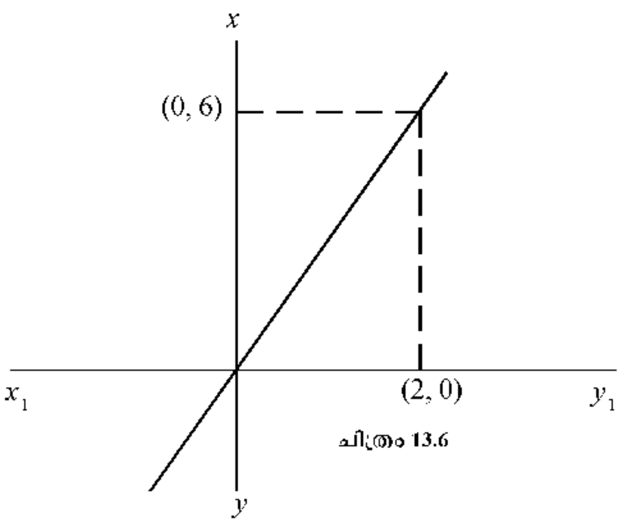
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \,.\, \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

ഗ്രാഫിൽ നിന്നും 1 ന് ഇരുവശത്തുനിന്നും x ന്റെ വില 1 ലേക്ക് അടുത്താൽ $f(x)$ ന്റെ വില 1 ലേക്ക് അടുക്കുന്നതായി മനസിലാക്കാം.
ഗ്രാഫിൽ നിന്നും സീമ കൂടുതൽ വ്യക്തമാകും.

വിശദീകരണം : 3

$f(x) = 3x$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. $x = 2$ ൽ ഇതിന്റെ സീമ പരിശോധിക്കാം.



ചിത്രം 13.6

ഏകദം $f(x)$ പരിഗണിക്കുക. $x = 2$ ലെ സീമ കണക്കാക്കുക. $x = 2$ ന്റെ ഇടതും, വലതുമുള്ള ഏറ്റവും അടുത്ത വിലകൾ പരിഗണിച്ച് $f(x)$ ന്റെ വിലയടങ്ങുന്ന ഒരു പട്ടിക തയാറാക്കുക. (13.6)

പട്ടിക 13.6

x	1.9	1.95	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	5.7	5.85	5.97	5.997	6.003	6.03	6.3

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 6 \,,\, \lim_{x \to 2^-} f(x) = 6$$

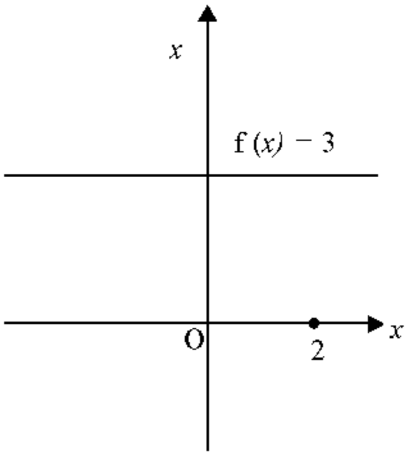
$$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = 6$$

ഗ്രാഫിൽ നിന്നും സീമ കൂടുതൽ വ്യക്തമാക്കാൻ സാധിക്കും.

വിശദീകരണം : 4

$f(x) = 3$ എന്ന സ്ഥിര ഏകദം പരിഗണിക്കുക $x = 2$ ലെ സീമ കണ്ടുപിടിക്കുക. $f(x) = 3$ ൽ $x = 2$ ന്റെ വില വളരെ അടുത്ത ബിന്ദുക്കളിൽ ലഭിക്കുന്ന വില കൾ 3 തന്നെയാണ്, അതായത്

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = 3$$



ചിത്രം 13.7

വിശദീകരണം : 5

ഏകദം $f(x) - x^2 - x$ പരിഗണിക്കുക.

$\lim_{x \to 1} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കണം.

$x - 1$ ന്റെ സമീപത്തുള്ള വിലകളിൽ $f(x)$ ന്റെ വിലകൾ പട്ടികയിൽ എഴുതിയിരിക്കുന്നു. (13.7)

x	0.9	0.99	0.999	1.01	1.1	1.2
$f(x)$	1.71	1.9701	1.997001	2.0301	2.31	2.64

പട്ടിക - 13.7

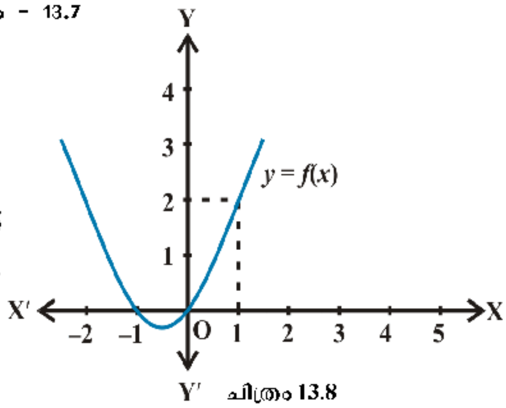
പട്ടികയിൽ നിന്നും

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും x ന്റെ വില 1 ലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ ഗ്രാഫ് (1, 2) എന്ന ബിന്ദു വിലേക്ക് അടുക്കുന്നു.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$$



ചിത്രം 13.8

വിശദീകരണം : 6

ഏകദം $f(x) - \sin x$ പരിഗണിക്കുക. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$, ($x$ റേഡിയൻ അളവിലാണ്) കാണ ണമെന്നിരിക്കട്ടെ.

$\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഇരുവശത്തും ഏറ്റവും അടുത്തുള്ള ബിന്ദുക്കളിൽ $f(x)$ ന്റെ വില പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

x	$\frac{\pi}{2}-0.1$	$\frac{\pi}{2}-0.01$	$\frac{\pi}{2}+0.01$	$\frac{\pi}{2}+0.1$
$f(x)$	0.9950	0.9999	0.9999	0.9950

പട്ടിക – 13.8

പട്ടികയിൽ നിന്നും.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 1$$

വിശദീകരണം : 7

ഏകദം $f(x) = x + \cos x$ പരിഗണിക്കുക. $\lim_{x\to 0} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഇവിടേയു $x = 0$ എന്നതിന്റെ ഇരുവശമുള്ള ഏറ്റവും അടുത്തുള്ള വിലകളിൽ f ന്റെ വിലകൾ കണ്ടുപിടിച്ച് പട്ടികയാക്കിയത് ശ്രദ്ധിക്കൂ.

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.9850	0.98995	0.9989995	1.0009995	1.00995	1.0950

പട്ടിക 13.9

പട്ടികയിൽ നിന്നും

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = 1$ ഇവിടെ $f(0)$ യുടെ വിലയും 1 ആകുന്നു.

വിശദീകരണം : 8

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. $\lim_{x\to 0} f(x)$ കാണുക. ഇവിടെ മണ്ഡലം രേഖീയഅധിസംഖ്യകൾ ആയതിനാൽ x ന് $x = 0$ ത്തിന്റെ ഇടതുവശമുള്ള വില കൾ സ്വീകരിക്കാൻ സാധ്യമല്ലാത്തതിനാൽ x ന്റെ വലതുഭാഗത്ത് ഏറ്റവുമടുത്തുള്ള വിലകളിൽ $f(x)$ ന്റെ വിലകൾ പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

x	1	0.1	0.01	10^{-n}
$f(x)$	1	100	10000	10^{2n}

പട്ടിക 13.10

ഗണിതപരമായി $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

വിശദീകരണം : 9

$f(x)=\begin{cases} x-2, & x<0 \\ 0\ \ , & x=0 \\ x+2, & x>0 \end{cases}$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

സാധാരണ നമ്മൾ ചെയ്യുന്നതുപോലെ; $x = 0$ യുടെ ഏറ്റവും ഇടത്തും വലത്തുമുള്ള വിലകളിൽ $f(x)$ ന്റെ വിലകൾ പട്ടികയിൽ എഴുതുക. (13.11)

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	– 2.1	– 2.01	– 2.001	2.001	2.01	2.1

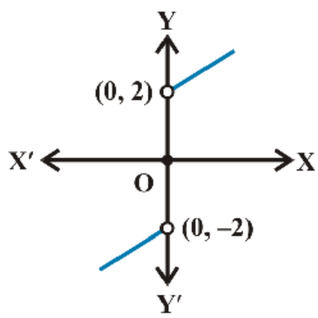
പട്ടിക 13.11

പട്ടികയിൽ നിന്നും $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -2$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq \lim_{x\to 0} f(x)$$

ഈ കാരണത്താൽ '0' ൽ സീമ നിലനിൽക്കുകയില്ല. ഇവിടെ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും $x=0$ ൽ $f(x)$ ന് വിലയുണ്ട്. അത് 0 ആകുന്നു. പക്ഷേ $x=0$ ൽ ഈ ഏകദത്തിന് സീമ നിലനിൽക്കുന്നില്ല.



ചിത്രം 13.9

വിശദീകരണം : 10

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$$

എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ കാണുക.

സാധാരണ ചെയ്യുന്നതുപോലെ $x = 1$ന്റെ ഇടത്തുനിന്നും വലത്തുനിന്നും ഏറ്റവും അടുത്ത വിലകളിൽ $f(x)$ ന്റെ വില പട്ടികയിലാക്കുക. (13.12)

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1

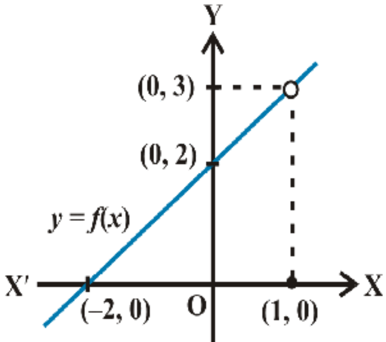
പട്ടിക – 13.12

പട്ടികയിൽ നിന്നും $\lim_{x\to 1^-} f(x)=3$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$.
ഇരു സീമകളും തുല്യമാകുന്നു.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=3$$

ഗ്രാഫിൽ നിന്നും സീമ ലഭിച്ചത് വളരെ വ്യക്തമായി മനസിലാക്കാവുന്നതാണ്.



ചിത്രം 13.10

കുറിപ്പ്

പൊതുവായി ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഒരു ഏകദത്തിന്റെ വിലയും സീമയും കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിഞ്ഞാൽ പോലും അവ വ്യത്യസ്തമാകാം.

13.3.1 സീമകളുടെ ബീജഗണിതം (Algebra of Limits)

സിദ്ധാന്തം 1 : f, g എന്നീ രണ്ട് ഏകദങ്ങൾക്ക് $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ എന്നീ സീമകൾക്ക് അസ്ഥിത്വം ഉണ്ടാകുകയും ചെയ്താൽ

(i) ഏകദങ്ങളുടെ തുകയുടെ സീമ ആ ഏകദങ്ങളുടെ സീമകളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമായിരിക്കും.

അതായത് $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

(ii) അവയുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ സീമ, ആ ഏകദങ്ങളുടെ സീമകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.

അതായത് $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$.

(iii) അവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ സീമ, ആ ഏകദങ്ങളുടെ സീമകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.

അതായത് $\lim_{x\to a} [f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) .\ \lim_{x\to a} g(x)$.

(iv) രണ്ട് ഏകദങ്ങളുടെ ഹരണഫലത്തിന്റെ സീമ, ആ ഏകദങ്ങളുടെ സീമകളുടെ ഹരണഫലം ആയിരിക്കും. (ഛേദം പൂജ്യമാകാൻ പാടില്ല)

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\ ;\ \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

☛ കുറിപ്പ്

(iii) ൽ $g(x) = \lambda$, ഒരു രേഖീയസംഖ്യ ആയാൽ

$$\lim_{x \to a}\left[\lambda . f(x)\right] = \lambda . \lim_{x \to a} f(x).$$

അടുത്ത രണ്ടു ഭാഗങ്ങളിൽ, മുകളിൽ പ്രസ്താവിച്ച സിദ്ധാന്തങ്ങൾ ചില പ്രത്യേക തരം ഏകദങ്ങളുടെ സീമ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കാം എന്ന് വിശദമാക്കുന്നു.

13.3.2 ബഹുപദങ്ങളുടേയും ഭിന്നക ഏകദങ്ങളുടേയും സീമകൾ

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + . . . + a_nx^n$, എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക.

$\lim_{x \to a} x = a$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

കൂടാതെ $\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a}(x.x) = \lim_{x \to a} x . \lim_{x \to a} x = a.a = a^2$.

ആഗമന തത്വം ഉപയോഗിച്ചാൽ.

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

അതിനാൽ $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n\right]$

$$= \lim_{x \to a} a_0 + \lim_{x \to a} a_1x + \lim_{x \to a} a_2x^2 + ... + \lim_{x \to a} a_nx^n$$

$$= a_0 + a_1 \lim_{x \to a} x + a_2 \lim_{x \to a} x^2 + ... + a_n \lim_{x \to a} x^n$$

$$= a_0 + a_1a + a_2a^2 + ... + a_na^n$$

$$= f(a)$$

അടുത്തതായി, $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, $h(x) \neq 0$

$g(x)$, $h(x)$ എന്നിവ രണ്ട് ബഹുപദങ്ങൾ ആണ്.
അതുകൊണ്ട് $f(x)$ എന്നത് ഒരു ഭിന്നക ഏകദം ആണ്.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{g(a)}{h(a)}$$

$h(a) = 0$, ആയാൽ, രണ്ടു തലങ്ങളിലേക്ക് ചർച്ച കടന്നുപോകും.

(i) $g(a) \neq 0$,

(ii) $g(a) = 0$.

(i) $g(a) \neq 0$ ആയാൽ സീമ നിലനിൽക്കുകയില്ല.

(ii) $g(a) = 0$, ആയാൽ, $g(x) = (x - a)^k g_1(x)$, $g(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ $(x - a)$ എന്ന ഘടകത്തിന് ലഭിക്കാവുന്ന പരമാവധി കൃത്യങ്കമാണ് k.

ഇതുപോലെ, $h(x) = (x - a)^l h_1(x)$ $(h(a) = 0)$, $k > l$, ആയാൽ

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{\lim_{x \to a} (x-a)^k g_1(x)}{\lim_{x \to a} (x-a)^l h_1(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to a} (x-a)^{(k-l)} g_1(x)}{\lim_{x \to a} h_1(x)} = \frac{0.g_1(a)}{h_1(a)} = 0$$

$k < l$, ആയാൽ $\lim_{x \to a} f(x)$ എന്ന സീമ നിർവചിക്കാൻ സാധ്യമല്ല.

$k = l$ ആയാൽ $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g_1(x)}{h_1(x)} = \frac{g_1(a)}{h_1(a)}$

ഉദാഹരണം : 1

താഴെ പറയുന്ന സീമകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\lim_{x \to 1} \left[x^3 - x^2 + 1\right]$ (ii) $\lim_{x \to 3} \left[x(x+1)\right]$

(iii) $\lim_{x \to -1} \left[1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}\right]$

പരിഹാരം

കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് ബഹുപദങ്ങളുടെ സീമയായതിനാൽ, തന്നിരിക്കുന്ന, ബിന്ദുവിലെ ഏകദത്തിന്റെ വില തന്നെയായിരിക്കും, സീമയുടെ വില.

(i) $\lim_{x \to 1} [x^3 - x^2 + 1] = 1^3 - 1^2 + 1 = 1$

(ii) $\lim_{x \to 3} \left[x(x+1)\right] = 3(3+1) = 3(4) = 12$

(iii) $\lim_{x \to -1} \left[1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}\right] = 1 + (-1) + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{10}$

$$= 1 - 1 + 1 \ldots + 1 = 1.$$

ഉദാഹരണം : 2

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\lim_{x \to 1}\left[\frac{x^2+1}{x+100}\right]$ (ii) $\lim_{x \to 2}\left[\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}\right]$

(iii) $\lim_{x \to 2}\left[\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x}\right]$ (iv) $\lim_{x \to 2}\left[\frac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6}\right]$

(v) $\lim_{x \to 1}\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]$

പരിഹാരം

ഇവിടെ നാം പരിഗണിക്കുന്ന എല്ലാ ഏകദങ്ങളും ഭിന്നകഏകദങ്ങളാണ്. അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഏകദത്തിന്റെ വില കണ്ടുപിടിച്ച് പരിഹാരം കാണാനാണ് ശ്രമിക്കുന്നത്. ഇങ്ങനെ ചെയ്യുമ്പോൾ $\frac{0}{0}$ രൂപത്തിലേക്ക് മാറിയാൽ, അതിനു കാരണക്കാരായ ഘടകങ്ങളെ അംശത്തിൽ നിന്നും, ഛേദത്തിൽ നിന്നും ഒഴിവാക്കണം.

(i) $\lim_{x \to 1}\frac{x^2+1}{x+100}=\frac{1^2+1}{1+100}=\frac{2}{101}$

(ii) സീമ $\frac{0}{0}$ രൂപത്തിലാകുന്നു.

ആകയാൽ $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$

$$= \lim_{x \to 2}\frac{x(x-2)}{(x+2)} \qquad \text{as } x \neq 2$$

$$= \frac{2(2-2)}{2+2}=\frac{0}{4}=0.$$

(iii) 2 എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഏകദങ്ങളുടെ വിലകൾ കണ്ടു പിടിച്ചാൽ സീമ $\frac{0}{0}$ രൂപത്തിലാകും.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{x(x-2)} = \frac{2+2}{2(2-2)} = \frac{4}{0}$$

അതുകൊണ്ട് സീമ നിലനിൽക്കുന്നില്ല.

(iv) $x-2$ ലെ ഏകദങ്ങളുടെ വില കണ്ടുപിടിച്ചാൽ, സീമ $\frac{0}{0}$ എന്ന രൂപത്തിലേക്ക് മാറുന്നു.

അതുകൊണ്ട് $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x-3)}$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2}{(x-3)} = \frac{(2)^2}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

(v) തന്നിരിക്കുന്ന ഭിന്നക ഏകദത്തെ, ലഘൂകരിച്ചാൽ

$$\left[\frac{x-2}{x^2-x} - \frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right] = \left[\frac{x-2}{x(x-1)} - \frac{1}{x\left(x^2-3x+2\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{x-2}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \left[\frac{x^2-4x+4-1}{x(x-1)(x-2)}\right] = \frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{(x-1)\,(x-3)}{x(x-1)(x-2)}$$

$x=1$ ൽ $\frac{0}{0}$ രൂപത്തിലേക്ക് മാറുന്നു.

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-2}{x^2-x} - \frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-3)(x-1)}{x(x-1)(x-2)} \quad [(x \neq 1) \text{ ആയതുകൊണ്ട് } (x-1) \text{ ഒഴിവാക്കാം}]$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x-3}{x(x-2)} = \frac{1-3}{1(1-2)} = 2.$$

സിദ്ധാന്തം 2

n ഒരു പൂർണഅധിസംഖ്യ ആയാൽ

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

തെളിവ് :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x\,a^{n-2} + a^{n-1})$$

$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x\,a^{n-2} + a^{n-1})$ ആയതിനാൽ

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x\,a^{n-2} + a^{n-1})$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = a^{n-1} + a\,a^{n-2} + \ldots + a^{n-2}(a) - a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots + a^{n-1} + a^{n-1} \quad (n \text{ പദങ്ങൾ})$$

$$= na^{n-1}$$

> **കുറിപ്പ്**
>
> n ഒരു ഭിന്നകസംഖ്യയാവുകയും a ഒരു അധിസംഖ്യയും ആയാൽ
>
> $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ ശരിയായിരിക്കും. ഇതിന്റെ തെളിവ് ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യുന്നില്ല.

ഉദാഹരണം : 3

വില കണക്കാക്കുക.

(i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^{15} - 1}{x^{10} - 1}$ (ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

പരിഹാരം (1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{15}-1}{x^{10}-1} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\div\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\right]\div\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= 15\,(1)^{14}\div 10(1)^{9}$$ (മുകളിലെ സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്)

$$= 15\div 10 = \frac{3}{2}$$

(ii) $y = 1 + x$, എന്നെടുത്താൽ, $x\to 0$ ആകുമ്പോൾ $y\to 1$ ആകും.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{y\to 1}\frac{\sqrt{y}-1}{y-1}$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{y^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}}{y-1}$$

$$= \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}$$

13.4 ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ സീമകൾ

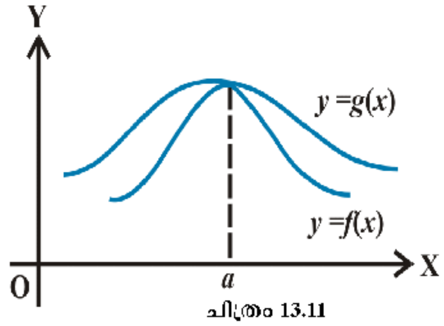
(Limits of Trigonometric Functions)

ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ ഉൾപ്പെട്ട സീമകളുടെ പരിഹാരം കാണുവാൻ ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന സിദ്ധാന്തങ്ങൾ ആവശ്യമായതുകൊണ്ട് അവ മനസ്സിലാക്കുവാനായി പ്രസ്താവിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 3

ഒരേ മണ്ഡലത്തിൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ട രണ്ട് ഏകദങ്ങളായ f, g എന്നിവക്ക് മണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ x വിലകൾക്കും $f(x) \le g(x)$ ആവുകയും a എന്ന രേഖീയസംഖ്യക്ക് $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ എന്നീ സീമകൾ ഉണ്ടാവുകയും ചെയ്താൽ $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$ ആയിരിക്കും.

ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന ചിത്രം ഇതിനെ വ്യക്തമാക്കുന്നു.

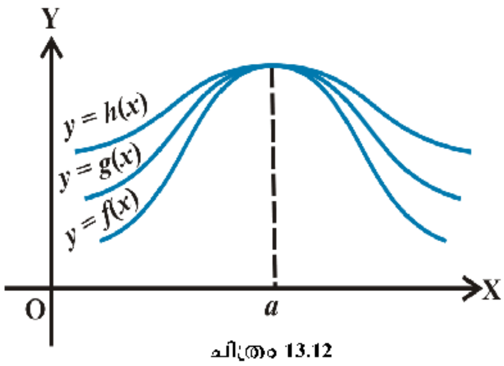


ചിത്രം 13.11

സിദ്ധാന്തം 4 (സാന്റ്‌വിച്ച് സിദ്ധാന്തം)

ഒരു പൊതുമണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ x വിലകൾക്കും, $f(x) \le g(x) \le h(x)$ ആകുന്ന മൂന്ന് രേഖീയ ഏകദങ്ങളാണ് f, g, h എന്നിവ. a എന്ന രേഖീയസംഖ്യയിൽ

$$\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x) \text{ ആയാൽ } \lim_{x\to a} g(x) = l \text{ ആയിരിക്കും.}$$



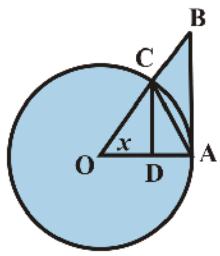
ചിത്രം 13.12

ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തിയുള്ള താഴെ പറയുന്ന വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ട അസമതയുടെ മനോഹരമായ ജ്യാമിതീയ തെളിവാണ് ഇനി ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,\ 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

തെളിവ് : $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$ ആയതുകൊണ്ട്

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ എന്ന അസമത തെളിയിച്ചാൽ മതി. ചിത്രം 13.13 ൽ, ആരം ഒരു യൂണിറ്റായ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ് O, $\angle AOC = x$ റേഡിയൻ



ചിത്രം 13.13

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ആണ്.

രേഖാഖണ്ഡങ്ങൾ BA യും CD യും OA ക്ക് ലംബങ്ങളാണ്. AC യോജിപ്പിക്കുക. ചിത്രത്തിൽ നിന്നും.

ΔOAC യുടെ പരപ്പളവ് < OAC വൃത്തഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് < ΔOAB യുടെ പരപ്പളവ്.

അതായത് $\dfrac{1}{2}\text{OA.CD} < \dfrac{x}{2\pi}.\pi.(\text{OA})^2 < \dfrac{1}{2}\text{OA.AB}$

$$\text{CD} < x\ .\ \text{OA} < \text{AB}.\text{------------ (1)}$$

Δ OCD യിൽ നിന്നും,

$$\sin x = \frac{\text{CD}}{\text{OA}} \qquad (\therefore\ \text{OC} = \text{OA})$$

$$\therefore \text{CD} = \text{OA} \sin x$$

$$\tan x = \frac{\text{AB}}{\text{OA}} \Rightarrow \text{AB} = \text{OA} \tan x$$

(1) $\Rightarrow$ OA $\sin x <$ OA. $x <$ OA. $\tan x$

OA ഒരു അധിസംഖ്യയായതുകൊണ്ട്

$\sin x < x < \tan x$------------ (2)

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ആയതുകൊണ്ട് $\sin x$ ന്റെ വില അധിസംഖ്യയാകും.

(2) നെ $\sin x$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുക, അപ്പോൾ

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

വ്യുൽക്രമം എടുത്താൽ $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$

അങ്ങനെ തെളിവ് പൂർണ്ണമായി.

സിദ്ധാന്തം : 5

താഴെ പറയുന്നവ പ്രധാനപ്പെട്ട രണ്ട് സീമകൾ ആണ്.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$.

തെളിവ് : മുൻസിദ്ധാന്തത്തിൽ നിന്നും, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ ആയിരുന്നല്ലോ. $\frac{\sin x}{x}$ ന്റെ വില $\cos x$ നും 1 നും ഇടയിൽ ആയിരിക്കും, കൂടാതെ

$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, $\lim_{x\to 0} (1) = 1$ സാന്റ്‌വിച്ച് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(ii) $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ ആണല്ലോ.

അതിനാൽ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right), x\to 0,\ \frac{x}{2}\to 0$

$\left(x\to 0 \text{ ആയാൽ } \frac{x}{2}\to 0\right)$

$$= \lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1.0 = 0$$

ഉദാഹരണം : 4

വില കണക്കാക്കുക.

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x}$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

പരിഹാരം

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}.\frac{2x}{\sin 2x}.2\right]$

$$= 2.\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right] \div \left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$$= 2.\lim_{4x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right] \div \lim_{2x\to 0}\left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$= 2.1.1 = 2$ ($x \to 0$ ആയാൽ $4x \to 0$, $2x \to 0$)

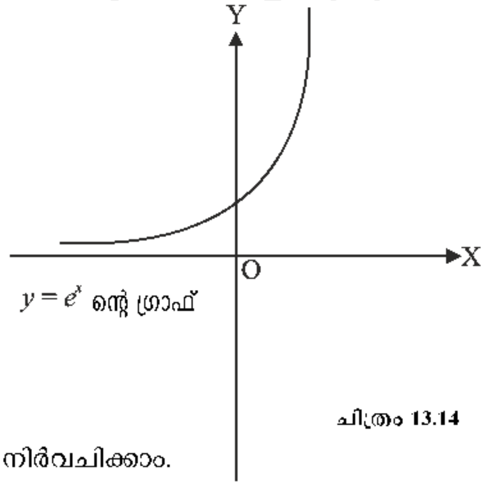
$$\text{(ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,.\,\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\times 1 = \underline{1}$$

13.4.1 കൃതി ഏകദവും ലോഗരിതമിക ഏകദവും ഉൾപ്പെടുന്ന സീമകൾ (Limits of Exponential and Logarithmic Functions)

പ്രശസ്തനായ സ്വിസ് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ ഓയിലർ e എന്ന സംഖ്യ അവതരിപ്പിച്ചു. e യുടെ വില 2 നു 3 ഇടയിലാണ്. ഈ സംഖ്യ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു കൃതി ഏകദം നിർവചിക്കാം.

$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^{-}, f(x) = e^x$

$f(x) = e^x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

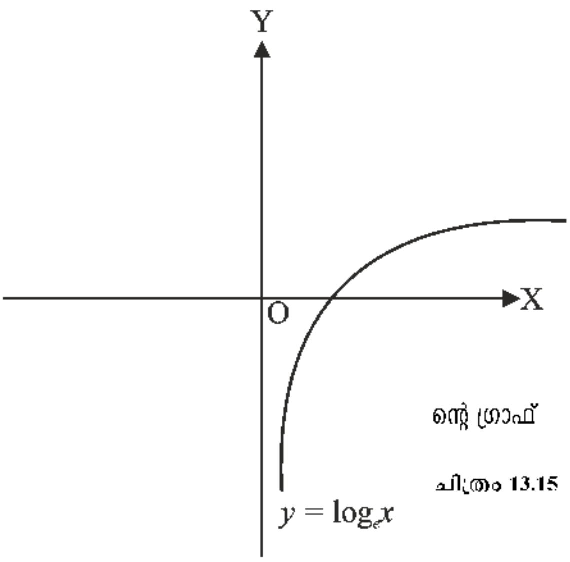


ചിത്രം 13.14

ഇതുപോലെ, ലോഗരിതമിക ഏകദവും നിർവചിക്കാം. അതായത്;

$$f : \mathrm{R}^{1} \to \mathrm{R},\ f(x) = \log x$$

$f(x) = \log x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.



ചിത്രം 13.15

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ എന്ന തത്ത്വം തെളിയിക്കുന്നതിന് $\frac{e^x-1}{x}$ എന്ന ആവിഷ്കരണം ഉൾപ്പെടുന്നു. ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന അസമത ഉപയോഗപ്പെടുത്താം.

$$\frac{1}{1+|x|}\le \frac{e^x-1}{x} \le 1+(e-2)\,|x|,\ x\in[-1,1]\sim\{0\}.$$

സിദ്ധാന്തം : 5.1

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

തെളിവ്

മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച അസമത പരിഗണിക്കാം.

$$\frac{1}{1+|x|}\le \frac{e^x-1}{x} \le 1+|x|\,(e-2),\ x\in[-1,1]\sim\{0\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+|x|}=\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to 0}|x|}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\left[1+(e-2)|x|\right]=1+(e-2)\lim_{x\to 0}|x|=1+(e-2)0=1$$

സാന്റ്വിച്ച് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

സിദ്ധാന്തം : 5.2

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

തെളിവ്

$$\frac{\log_e(1+x)}{x}=y$$

$$\log_e(1+x)=xy$$

$$\Rightarrow 1+x=e^{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{xy}-1}{x}=1$$

അല്ലെങ്കിൽ $$\frac{e^{xy}-1}{xy}.y=1$$

$$\Rightarrow \lim_{xy\to 0}\frac{e^{xy}-1}{xy}\lim_{x\to 0} y = 1 \text{ (since } x\to 0 \text{ gives } xy\to 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} y = 1\left(\text{as} \lim_{xy\to 0}\frac{e^{xy}-1}{xy}=1\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1$$

ഉദാഹരണം : 4.1

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$ ന്റെ വിലകാണുക.

പരിഹാരം

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}=\lim_{3x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3$$

$$=3\left(\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}\right), \quad \text{where } y=3x$$

$$=3.1=3$$

ഉദാഹരണം : 4.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{x}$$

പരിഹാരം

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1}{x}-\frac{\sin x}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1-1=0$$

ഉദാഹരണം : 4.3

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log_e x}{x-1}$$

പരിഹാരം

$x = 1 + h$, then as $x\to 1\Rightarrow h\to 0$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log_e x}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)}{h}=1\left(\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1\right).$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 13.1

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സീമകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $\lim\limits_{x \to 3} x+3$

2. $\lim\limits_{x \to \pi}\left(x-\frac{22}{7}\right)$

3. $\lim\limits_{r \to 1} \pi r^2$

4. $\lim\limits_{x \to 4}\frac{4x+3}{x-2}$

5. $\lim\limits_{x \to -1}\frac{x^{10}+x^5+1}{x-1}$

6. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{(x+1)^5-1}{x}$

7. $\lim\limits_{x \to 2}\frac{3x^2-x-10}{x^2-4}$

8. $\lim\limits_{x \to 3}\frac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$

9. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{ax+b}{cx+1}$

10. $\lim\limits_{z \to 1}\frac{z^{\frac{1}{3}}-1}{z^{\frac{1}{6}}-1}$

11. $\lim\limits_{x \to 1}\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}, a+b+c \neq 0$

12. $\lim\limits_{x \to -2}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2}$

13. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin ax}{bx}$

14. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}, a, b \neq 0$

15. $\lim\limits_{x \to \pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi(\pi-x)}$

16. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\cos x}{\pi-x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\cos 2x-1}{\cos x-1}$

18. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{ax+x\cos x}{b\sin x}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} x\sec x$

20. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin ax+bx}{ax+\sin bx} a, b, a+b \neq 0,$

21. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x-\cot x)$

22. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan 2x}{x-\frac{\pi}{2}}$

23. $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 3(x+1), & x > 0 \end{cases}$ ആയാൽ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, എന്നിവയുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

24. $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\le 1 \\ -x^2-1, & x>1 \end{cases}$ ആയാൽ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

25. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ ആയാൽ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

26. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ ആയാൽ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

27. $f(x)=|x|-5$ ആയാൽ $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

28. $f(x)=\begin{cases} a+bx, & x<1 \\ 4, & x=1 \\ b-ax, & x>1 \end{cases}$ ഉം $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ ആയാൽ a ക്കും b ക്കും ലഭിക്കാവുന്ന സാധ്യമായ വിലകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

29. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ എന്നിവ രേഖീയസംഖ്യകളാണ്. $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. $\lim\limits_{x\to a_1} f(x)$ എന്താണ്? $a\ne a_1, a_2, \ldots, a_n$, ആയാൽ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

30. $f(x)=\begin{cases} |x|+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ |x|-1, & x>0 \end{cases}$ ആയാൽ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ നിലനിൽക്കുന്ന a യുടെ വിലകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

31. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-2}{x^2-1}=\pi$, ആയാൽ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

32. $f(x)=\begin{cases} mx^2+n, & x<0 \\ nx+m, & 0\le x\le 1 \\ nx^3+m, & x>1 \end{cases}$ ആയാൽ $\lim_{x\to 0} f(x)$ ഉം $\lim_{x\to 1} f(x)$ ഉം നിലനിൽക്കുന്ന

m, n എന്നീ പൂർണ്ണ സംഖ്യകളുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 13.1

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{x}$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2+x}-e^2}{x}$

3. $\lim_{x\to 5} \frac{e^x-e^5}{x-5}$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{x}$

5. $\lim_{x\to 3} \frac{e^x-e^3}{x-3}$

6. $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x-1)}{1-\cos x}$

7. $\lim_{x\to 0} \frac{\log_e(1+2x)}{x}$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3)}{\sin^3 x}$

13.5 അവകലജങ്ങൾ (DERIVATIVES)

ഒരു വസ്തുവിന്റെ വിവിധ സമയ ഇടവേളകളിലുള്ള സ്ഥാനങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കൊണ്ട്, ആ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനമാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കുമെന്ന് ഭാഗം 13.2 ൽ മനസ്സിലാക്കിയതാണ്. പൊതുവായി ഒരു പ്രാചലത്തിന്റെ പല ഘട്ടങ്ങളിലുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കണ്ടുപിടിക്കുക എന്നത് വളരെ പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്ന, നിത്യവും ഉപയോഗിക്കേണ്ടി വരുന്ന ഒരു കാര്യമാണ്. ഉദാഹരണമായി, വിവിധസമയങ്ങളിൽ ഒരു ജലസംഭരണിയിലെ ജലത്തിന്റെ ആഴം മനസ്സിലാക്കികൊണ്ട് അത് എപ്പോൾ നിറഞ്ഞു കവിയും എന്നു പറയുവാനും, ഒരു റോക്കറ്റിന്റെ വിവിധ സമയ ഇടവേളകളിലുള്ള ഉയരം മനസിലാക്കി അതിന്റെ കൃത്യമായ പ്രവേഗം കണ്ടുപിടിച്ച് അതിനുള്ളിലുള്ള ഉപഗ്രഹത്തെ യഥാസ്ഥാനത്ത് ഉപേക്ഷിക്കുവാൻ ശാസ്ത്രജ്ഞൻമാരെ സഹായിക്കുവാനും കഴിയുന്നു. നിലവിലുള്ള ഒരു ഉൽപന്നത്തിന്റെ വില ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ധനകാര്യസ്ഥാപനത്തിന് ആ ഉൽപന്നത്തിൽ വരാൻ പോകുന്ന മാറ്റങ്ങളെപ്പറ്റി പ്രവചിക്കുവാൻ സാധിക്കും. നാമെല്ലാം ഏറെ യാത്ര ചെയ്യുന്നവരാണ്. ഒരു വാഹനത്തിനും ഒരേ വേഗത്തിൽ നേർരേഖയിൽ സഞ്ചരിക്കാനാവില്ല. ഒരു ചെറിയ അളവിലെങ്കിലും വേഗം നിരന്തരം മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കും. ഒരു വാഹനം 80 കി.മി.ദൂരം 4 മണിക്കൂർ കൊണ്ട് ഓടിയെത്തിയാൽ അതിന്റെ ശരാശരി വേഗം $\frac{80}{4}$ കി. മി/മണിക്കൂർ $= 20$ കി.മി/മണിക്കൂർ ഈ നാലു മണിക്കൂറിലും

ഒരേ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുവാനാകില്ല. അങ്ങനെയെങ്കിൽ വാഹനത്തിന്റെ ഏറ്റവും മുൻഭാഗം ഒരു ജംഗഷനിലെ ഒരു വൈദ്യുതപോസ്റ്റ് കടന്നുപോയത് എത്ര വേഗതത്തിലാണ് എന്ന ചോദ്യത്തിന് നാം എങ്ങനെ ഉത്തരം നൽകും. ഇത്തരത്തിലുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്കെല്ലാം വ്യക്തമായ ഉത്തരം നൽകാൻ അവകലജം നമ്മെ സഹായിക്കും. വാഹനങ്ങൾക്ക് ചക്രങ്ങളെന്നപോലെ നമുക്ക് ശാസ്ത്രത്തേയും അതിന്റെ പ്രയോഗങ്ങളേയും ഉള്ളറിഞ്ഞ് മനസ്സിലാക്കുവാൻ "കലനം" (Calculus) എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രശാഖ അനിവാര്യമാണ്. ഒരു ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലുള്ള അവകലജത്തിന്റെ വില കണ്ടു പിടിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് പരിശോധിക്കാം.

നിർവചനം 1

f ഒരു രേഖീയഏകദവും a അതിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ എന്ന സീമ നിലനില്ക്കുകയാണെങ്കിൽ ഈ സീമയെ f ന്റെ a യിലെ അവകലജമായി നിർവചിക്കാം. f ന്റെ a യിലെ അവകലജത്തെ $f'(a)$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ എന്ന സീമ നിലനിൽക്കുകയാണെങ്കിൽ ഈ സീമയെ f ന്റെ a യിലെ അവകലജം എന്നു നിർവചിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 5

$f(x) = 3x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ 2 ലുള്ള അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)-3(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{6+3h-6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$$

$\therefore$ 2 ലുള്ള f ന്റെ അവകലജം 3 ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 6

$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ $x = -1$ ലെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക. കൂടാതെ $f'(0)+3f'(-1) = 0$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2(\ 1+h)^2+3(\ 1+h)-5-\left(2\times\ 1^2+3\times\ 1-5\right)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2h^2-h}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left(2h^2-1\right) = 0-1=-1$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2(0+h)^2+3(0+h)-5-\left(2\left(0^2\right)+3(0)-5\right)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2h^2+3h}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left(2h+3\right) = 2(0)+3=3$$

$$f'(0)+3f'(-1) = 3+3(-1)=3-3=0$$

ഉദാഹരണം : 7

$\sin x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ $x = 0$ ലെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

ഉദാഹരണം : 8

$f(x) = 3$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ $x = 0$, $x = 3$ ലെ അവകജങ്ങളുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3-3}{h} = 0$$

ഒരു ബിന്ദുവിലുള്ള അവകലജത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനം

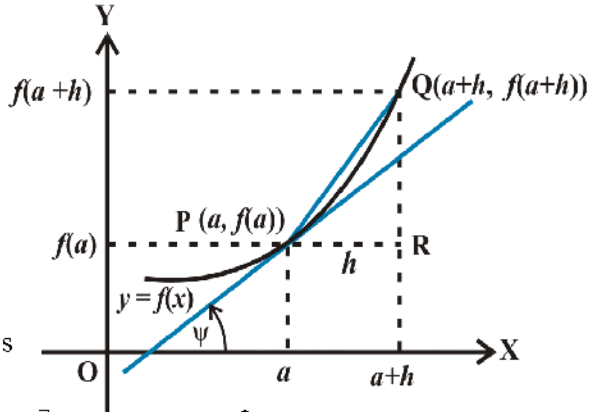
$y = f(x)$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിലെ ഏറ്റവും അടുത്തടുത്തായിട്ടുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കളാണ് $P(a, f(a))$, $Q(a + h, f(a + h))$ എന്നിവ. ചിത്രം 13.11 പരിശോധിച്ചാൽ

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ΔPQR, ൽ നിന്നും tan(QPR) എന്നത് ഞാൺ PQ വിന്റെ എന്ന ചരിവാണ്.

$$\tan(\text{QPR}) = \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a}\right] \text{s}$$

$$= \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right]$$



ചിത്രം 13.16

സീമ എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ചാൽ h പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുമ്പോൾ Q എന്ന ബിന്ദു 'P' എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് അടുക്കുന്നു.

അതായത് $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{Q \to P} \frac{QR}{PR}$

ഞാൺ PQ, എന്ന ഞാൺ, P യിലുള്ള തൊടുവരയായി (tangent) മാറുന്നു അതായത് $f'(a) = \tan \psi$. ഒരു ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന അവകലജം ആ ഏകദത്തിന്റെ വക്രത്തിലെ ആ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് ആയിരിക്കും.

പൊതുവായി, ഒരു ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിച്ചാൽ (നില നിന്നാൽ) ആ ഏകദത്തിന്റെ അവകലജ ഏകദം കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കുന്നതാണ്.

നിർവചനം 2

f ഒരു രേഖീയഏകദമാവുകയും $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ എന്ന സീമ നിലനിൽക്കു

കയും ചെയ്താൽ ഏകദം f ന് x ൽ അവകലജമുണ്ടെന്ന് പറയാം. അതിനെ $f'(x)$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അവകലജത്തിന്റെ ഈ നിർവചനം ആദ്യതത്വത്തിൽ നിന്നുള്ള അവകലനം (differentiation from first principle) എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

അതായത് $f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$

$f'(x)$ നെ $\frac{d}{dx}\big(f(x)\big)$ ഏതെന്നെഴുതാവുന്നതാണ്. $y = f(x)$ ആണെങ്കിൽ $\frac{dy}{dx}$ എന്നും സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്. കൂടാതെ $D(f(x))$ എന്നും സൂചിപ്പിക്കുന്നുണ്ട്. ഏകദം f ന്റെ a യിലെ അവകലജത്തെ $\frac{d}{dx}f(x)\Big|_a$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{df}{dx}\Big|_a$ അതുമല്ലെങ്കിൽ $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$ എന്നിങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുണ്ട്.

ഉദാഹരണം : 9

$f(x) = 10x$ ന്റെ അവകലജം ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{10(x+h)-10(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{10h}{h} = \lim_{h\to 0}(10) = 10 \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം : 10

$f(x) = x^2$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2x) = 2x \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം : 11

$f(x) = a$ എന്ന സംഖ്യ ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക. $a \in \mathbf{R}$

പരിഹാരം

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{a-a}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{0}{h}\right] = 0\ ;\ h \neq 0$$

ഉദാഹരണം : 12

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ ന്റെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\frac{1}{(x+h)} - \frac{1}{x}}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

13.5.1 അവകലജങ്ങളുടെ ബീജഗണിതം

സിദ്ധാന്തം 5 : ഒരു പൊതുമണ്ഡലത്തിൽ അവകലജമുള്ള രണ്ടു ഏകദങ്ങളാണ് f, g എന്നിവയെങ്കിൽ

1. അവയുടെ തുകയുടെ അവകലജം അവയുടെ അവകലജങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമായിരിക്കും.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

2. അവയുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ അവകലജം അവയുടെ അവകലജങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായിരിക്കും.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

3. അവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ അവകലജം ഗുണനനിയമമായി ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\ .\ g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,\frac{d}{dx}g(x)$$

4. അവയുടെ ഹരണഫലത്തിന്റെ അവകലജം ഹരണനിയമമായി ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു (ഛേദം പൂജ്യമാകാൻ പാടില്ല)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)\,.-\ f(x)\ \frac{d}{dx}g(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

5. $\frac{d}{dx}k\left[f(x)\right] = k\frac{d}{dx}f(x),\ k \in R$

മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നവയുടെ തെളിവ് ഇവിടെ നൽകുന്നില്ല കാരണം സീമകളുടെ ബീജഗണിതവുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തി നിങ്ങൾക്ക് അവ സ്വയം കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കുന്നതാണ്.

$u = f(x) \quad v = g\ (x)$ എന്നിവയായാൽ

$(uv)' = u'v + uv'$ ആയിരിക്കും. ഇത് ലൈബ്നിറ്റ്സ് ഗുണനനിയമം എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

ഇതുപോലെ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ v \neq 0$ (അവകലനത്തിന്റെ ഹരണനിയമം)

$f(x) = x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം പരിശോധിക്കാം.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 1 = 1\ .$$

ഈ ആശയം ഉപയോഗിച്ച് $f(x) = 10x$ ന്റെ അവകലജം കാണാം.

$f(x) = 10x = x + x + x + \ldots . + x$ (10 പദങ്ങൾ).

$\frac{df(x)}{dx} - \frac{d}{dx}\ (x + x + x + \ldots . + x)$ (10 പദങ്ങൾ)

$$= \frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(x)+\ldots\ldots+\frac{d}{dx}(x) \text{ (10 പദങ്ങൾ)}$$

$$= 1+1+1+\ldots+1 \text{ (10 പദങ്ങൾ)}$$

$$= 10.$$

ഗുണനഫലത്തിന്റെ അവകലജം കാണുന്ന രീതി ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$f(x) = 10x = uv,\ u = 10,\ v = x$$

$$f'(x) = (10x)' = (uv)' = u'v + uv' = 0.x + 10.1 = 10$$

ഇതുപോലെ $f(x) = x^2$ എന്നതിന്റെ അവകലജം കാണാം.

$f(x) = x^2 = x\ .x$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x.x) = \frac{d}{dx}(x).x + x.\frac{d}{dx}(x)$$

$$= 1.x + x.1 = 2x\ .$$

സിദ്ധാന്തം 6 :

ഏകദം $f(x) - x^n$, $n \in N$ ന്റെ അവകലജം nx^{n-1} ആകുന്നു.

തെളിവ്

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\left(x^n + nx^{n-1}h + {}^nC_2 xn^{-2}h^2 + \ldots\ldots + h^n - x^n\right)}{h}$$

$$- \lim_{h\to 0}\frac{\left(nx^{n-1}h + {}^nC_2 x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n\right)}{h}$$

$$- \lim_{h\to 0}\frac{\left(nx^{n-1}h + {}^nC_2 x^{n-2}h^2 + \ldots + h^{n-1}\right)}{h}$$

$$- \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + n_2 x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right)$$

$$= nx^{n\ 1}$$

മറ്റൊരുതരത്തിൽ ആഗമനരീതി ഉപയോഗിച്ചും x^n ന്റെ അവകലജം കാണാം.

$n = 1$ ആയാൽ $\frac{d}{dx}(x) - 1 = 1 \,.\, x^{1-1}$

$$\frac{d}{dx}\left(x^k\right) - kx^{k\ 1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{k\ 1}\right) = \frac{d}{dx}(x).\left(x^k\right) + x.\frac{d}{dx}\left(x^k\right) \text{ (ഗുണനനിയമം അനുസരിച്ച്)}$$

$$= 1.x^k + x.kx^{k\ 1}$$

$$= x^k + k.x^k = (k+1)x^k$$

☛ **കുറിപ്പ്**

മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന സിദ്ധാന്തത്തിൽ n ഏതൊരു രേഖീയ സംഖ്യയുമാകാം (ഇവിടെ അത് തെളിയിക്കുന്നില്ല എന്നു മാത്രം)

13.5.2 ബഹുപദങ്ങളുടെയും ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെയും അവകലജ സിദ്ധാന്തം

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$, എന്ന ബഹുപദം പരിഗണിച്ചാൽ

$$\frac{df(x)}{dx} = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{x-2} + ... + \ 2a_2 x + a_1 .$$

(സിദ്ധാന്തം 5 ഭാഗം 1, സിദ്ധാന്തം 6 ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കാൻ സാധിക്കും)

ഉദാഹരണം 13

$6x^{100} - x^{55} + x$ ന്റെ അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

$$f(x) = 6x^{100} - x^{55} + x$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = 6 \times \frac{d}{dx}^{(x^{100})} - \frac{dx}{dx}^{(55)} + \frac{d(x)}{dx}$$

$$= 6 \times 100 x^{99} - 55x^{54} + 1$$

$$= 600x^{99} - 55x^{54} + 1$$

ഉദാഹരണം : 14

$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{50}$ ന്റെ $x = 1$ ലെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\frac{d}{dx}f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 50x^{49}$$

$$\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]_{x=1} = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + 50$$

$$= \frac{50(51)}{2} = 1275$$

ഉദാഹരണം : 15

$f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ ന്റെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ അവകലനത്തിന്റെ ഹരണനിയമം ഉപയോഗിക്കാം.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$= \frac{x\frac{d}{dx}(x+1) - (x+1)\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x.1 - (x+1).1}{x^2} = \frac{x - x - 1}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

ഉദാഹരണം : 16

$f(x) = \sin x$ ന്റെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(x + h) = \sin(x + h)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]\times\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\left[\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}\right]$$

$$= \cos x\times 1 = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}[sinx] = cosx$$

ഉദാഹരണം : 17

$f(x) = \tan x$ ന്റെ അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = \tan x \Rightarrow f(x + h) = \tan(x+h)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} . \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1 . \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \; .$$

ഉദാഹരണം : 18

$f(x) = \sin^2 x$ ന്റെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \sin x)$$

$$= (\sin x)' \sin x + \sin x (\sin x)'$$

$$= (\cos x)\sin x + \sin x(\cos x)$$

$$= 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 13.2

1. $x^2 - 2$ ന്റെ $x = 10$ ലുള്ള അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.
2. $99x$ ന്റെ $x = 100$ ലുള്ള അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.
3. $x = 1$ ലുള്ള x ന്റെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.
4. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജം ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) $x^3 - 27$ (ii) $(x-1)(x-2)$

   (iii) $\frac{1}{x^2}$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

5. $f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x + 1$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. $f'(1) = 100 f'(0)$ എന്നു തെളിയിക്കുക.
6. a ഒരു സ്ഥിരരേഖീയസംഖ്യയായാൽ $x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n$ ന്റെ അവകലജം കാണുക.

7. a യും b യും സ്ഥിരസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ ചുവടെ പറയുന്നവയുടെ അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

(i) $(x-a)(x-b)$ (ii) $(ax^2+b)^2$ (iii) $\dfrac{x-a}{x-b}$

8. a ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായാൽ $\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ യുടെ അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

9. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

(i) $2x-\dfrac{3}{4}$ (ii) $(5x^3+3x-1)(x-1)$

(iii) $x^{-3}(5+3x)$ (iv) $x^5(3-6x^{-9})$

(v) $x^{4}(3-4x^{5})$ (vi) $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{x^2}{3x-1}$

10. $\cos x$ ന്റെ അവകലജം ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

11. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\sin x \cos x$ (ii) $\sec x$ (iii) $5\sec x+4\cos x$

(iv) $\operatorname{cosec} x$ (v) $3\cot x+5\operatorname{cosec} x$

(vi) $5\sin x-6\cos x+7$ (vii) $2\tan x-7\sec x$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 19

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അവകലജങ്ങൾ ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$, $x\neq 2$, (ii) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

പരിഹാരം

(i) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$, $x\neq 2$, $f(x+h)=\dfrac{2(x+h)+3}{(x+h)-2}$, $x+h\neq 2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2(x+h)+3}{x+h-2}-\dfrac{2x+3}{x-2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2x+2h+3)(x-2)-(2x+3)(x+h-2)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2x+3)(x-2)+2h(x-2)-(2x+3)(x-2)-h(2x+3)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-7}{(x-2)\,(x+h-2)} = -\frac{7}{(x-2)^2}$$

$f'(x)$ എന്ന ഏകദം $x - 2$ ൽ നിർവചിക്കാൻ സാധ്യമല്ല എന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുമല്ലോ.

(ii) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(x+h+\frac{1}{x+h}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h+\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h+\frac{x-x-h}{x(x+h)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h\left(1-\frac{1}{x(x+h)}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[1-\frac{1}{x(x+h)}\right] = 1-\frac{1}{x^2}$$

$f'(x)$ എന്ന ഈ ഏകദം $x = 0$ ത്തിൽ നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കുകയില്ല.

ഉദാഹരണം : 20

ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\sin x + \cos x$ (ii) $x \sin x$

പരിഹാരം

(i) $f(x) = \sin x + \cos x$, $f(x+h) = \sin(x+h) + \cos(x+h)$

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)+\cos(x+h)-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h+\cos x\cos h-\sin x\sin h-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h(\cos x-\sin x)+\sin x(\cos h-1)+\cos x(\cos h-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}(\cos x-\sin x)+\lim_{h\to 0}\sin x\frac{(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\frac{(\cos h-1)}{h}$$

$$= \cos x-\sin x$$

(ii) $f(x) = x\sin x,\ f(x+h) = (x+h)\sin(x+h)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\sin(x+h)-x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(\sin x\cos h+\sin h\cos x)-x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1)+x\cos x\sin h+h(\sin x\cos h+\sin h\cos x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0}x\cos x\frac{\sin h}{h}+\lim_{h\to 0}(\sin x\cos h+\sin h\cos x)$$

$$= x\cos x+\sin x$$

ഉദാഹരണം : 21

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

(i) $f(x) = \sin 2x$ (ii) $g(x) = \cot x$

പരിഹാരം

(i) $f(x) = \sin 2x$

$$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin x\cos x) = 2\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)$$

$$= 2\left[(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'\right]$$

$$= 2\left[(\cos x)\cos x+\sin x(-\sin x)\right]$$

$$= 2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right) = 2\cos 2x$$

(ii) $g(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dx}=\frac{d}{dx}(\cot x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) \text{ ; } \sin x \neq 0.$$

$$= \frac{(\cos x)'(\sin x)-(\cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(-\sin x)(\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$= -\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x$$

ഉദാഹരണം : 22

(i) $\frac{x^5-\cos x}{\sin x}$ (ii) $\frac{x+\cos x}{\tan x}$

എന്നീ ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

(i) $h(x)=\frac{x^5-\cos x}{\sin x}$, $\sin x \neq 0$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{(x^5-\cos x)'\sin x-(x^5-\cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(5x^4+\sin x)\sin x-(x^5-\cos x)\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-x^5\cos x+5x^4\sin x+1}{(\sin x)^2}$$

(ii) $g\,(x) = \frac{x+\cos x}{\tan x}$, $\tan x \neq 0$

$$h'(x)=\frac{(x+\cos x)'\tan x-(x+\cos x)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sin x)\tan x-(x+\cos x)\sec^2 x}{(\tan x)^2}$$

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. ആദ്യതത്വം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജം കണ്ടെത്തുക.

(i) $-x$ (ii) $(-x)^{-1}$ (iii) $\sin(x+1)$ (iv) $\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$

a, b, c, d, p, z, r, s എന്നിവ പൂജ്യമല്ലാത്ത സ്ഥിരരേഖീയസംഖ്യകളും, m, n എന്നിവ പൂർണസംഖ്യകളുമായാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

2. $(x-a)$

3. $(px+q)\left(\frac{r}{x}+s\right)$

4. $(ax+b)(cx+d)^2$

5. $\frac{ax+b}{cx+d}$

6. $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

7. $\frac{1}{ax^2+bx+c}$

8. $\frac{ax+b}{px^2+qx+r}$

9. $\frac{px^2+qx+r}{ax+b}$

10. $\frac{a}{x^4}-\frac{b}{x^2}+\cos x$

11. $4\sqrt{x}-2$

12. $(ax+b)^n$

13. $(ax+b)^n(cx+d)^m$

14. $\sin(x-a)$

15. $\operatorname{cosec} x \cot x$

16. $\frac{\cos x}{1+\sin x}$

7. $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

18. $\frac{\sec x-1}{\sec x+1}$

19. $\sin^n x$

20. $\frac{a+b\sin x}{c+d\cos x}$

21. $\frac{\sin(x+a)}{\cos x}$

22. $x^4(5\sin x-3\cos x)$

23. $(x^2+1)\cos x$

24. $(ax^2+\sin x)(p+q\cos x)$

25. $(x+\cos x)(x-\tan x)$

26. $\frac{4x+5\sin x}{3x+7\cos x}$

27. $\frac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$

28. $\frac{x}{1+\tan x}$

29. $(x+\sec x)(x-\tan x)$

30. $\frac{x}{\sin^n x}$

സംഗ്രഹം

- ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ ഇടതുവശത്തു നിന്നും ബിന്ദുവിലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഏകദത്തിന്റെ വില ഏകദത്തിന്റെ ആ ബിന്ദുവിലെ ഇടതുസീമയെ നൽകുന്നു. സമാനമായി ബിന്ദുവിലെ വലതുസീമയും നിർവചിക്കാം.
- ഒരു ബിന്ദുവിലുള്ള ഇടതു സീമയും വലതുസീമയും തുല്യമായാൽ ആ ബിന്ദുവിൽ ഏകദത്തിന് സീമ ഉണ്ട് എന്നു പറയാം.
- $f(x)$ എന്ന ഏകദത്തിന് a യിലുള്ള സീമ നിർണയിക്കാൻ a എന്നത് $f(x)$ ന്റെ മണ്ഡലത്തിലുണ്ടാവണമെന്നില്ല. പക്ഷെ $f(x)$ ന് a യിലുള്ള അവകലജം കാണണമെങ്കിൽ $f(x)$ ന്റെ മണ്ഡലത്തിൽ a ഉണ്ടായിരിക്കണം.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ന്റെ വിലയും $f(a)$ യുടെ വിലയും എല്ലായ്പ്പോഴും തുല്യമാകണമെന്നില്ല.
- f, g എന്നിവ ഏകദങ്ങളായാൽ, താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നിയമങ്ങൾ പാലിക്കപ്പെടും.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

- പ്രാമാണിക സീമകൾ

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

- ഏകദം f ന്റെ ബിന്ദു a യിലെ അവകലജം താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ നിർവചിക്കാം.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- f എന്ന ഏകദത്തിന്റെ x എന്ന പൊതുബിന്ദുവിലുള്ള അവകലജത്ത

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ എന്ന് നിർവചിക്കാം

- u, v യും ഏകദങ്ങളായാൽ,

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad v \neq 0$$

- പ്രാമാണിക അവകലജങ്ങൾ

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ഗണിതചരിത്രത്തിൽ കലനത്തിന്റെ കണ്ടുപിടുത്തത്തിന്റെ അംഗീകാരം പങ്കിട്ടത് ഐസക് ന്യൂട്ടൺ, (1642 – 1727) ജി.ഡബ്ല്യു. ലൈബ്നിറ്റ്സ് (1646 – 1717) എന്നീ പ്രശസ്ത ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരാണ്. 17–ാം നൂറ്റാണ്ടിനോടടുപ്പിച്ച് രണ്ടുപേരും സ്വതന്ത്രമായിട്ടാണ് കലനം കണ്ടുപിടിച്ചത്. കലനത്തിന്റെ ആവിർഭാവത്തിനു ശേഷം ധാരാളം ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർ ഇതിന്റെ പുരോഗതിക്ക് സംഭാവനകൾ നൽകിയിട്ടുണ്ട്. കലനത്തിന് യുക്തിഭദ്രമായ അടിത്തറ പാകുന്നതിൽ മുഖ്യമായ പങ്കുവഹിച്ചത് എ.എൽ. കോഷി, ജെ.എൽ. ലഗ്രാങ്ഷ്,

കാൾ വയർസ്ട്രാസ് എന്നീ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരാണ്. ഒരു ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ദ ലാങ്ബർ (d' Alembert) സീമാസങ്കല്പമാണ് കോഷി ഉപയോഗിച്ചത്.

1900 നു മുമ്പ് കലനം പഠിപ്പിക്കുവാൻ പ്രയാസമായിരുന്നു. അതുകൊണ്ട് കലനം യുവാക്കൾക്ക് എത്തിപ്പെടാൻ കഴിയാത്ത മേഖലയായി നിലനിന്നു. എന്നാൽ 1900–ൽ ജോൺ പെറിയുടെ നേതൃത്വത്തിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിൽ സ്കൂൾ കുട്ടികൾക്കു പോലും മനസ്സിലാകുന്ന തരത്തിൽ കലനത്തിന്റെ വിവിധ ആശയങ്ങൾ വളരെ ലളിതമായി പ്രചരിപ്പിച്ചു. എഫ്. എൽ ഗ്രിഫിൻ ഒന്നാംവർഷ കുട്ടികൾക്ക് കലനത്തെ സംബന്ധിച്ച് വിദഗ്ദ്ധമായ അധ്യാപനം നിർവഹിച്ചു. ഇത് ആ കാലയളവിലെ ഏറ്റവും ധീരമായ ഒരു ചുവടുവയ്പായിരുന്നു.

ഇന്ന് ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ മാത്രമല്ല, ഭൗതികശാസ്ത്രം, രസതന്ത്രം, സാമ്പത്തികശാസ്ത്രം, ജീവശാസ്ത്രം തുടങ്ങിയ ശാസ്ത്രങ്ങളിലെല്ലാം കലനത്തിന്റെ മാധുര്യം അനുഭവിക്കാൻ കഴിയും.

A8P8Q3

അധ്യായം 14

ഗണിത യുക്തി
(MATHEMATICAL REASONING)

❖ *ഗണിതയുക്തിക്കു വഴങ്ങാത്തതായി നമുക്കറിയുന്ന കാര്യങ്ങൾ കുറയും. ഇവ ഗണിതയുക്തിക്കു വഴങ്ങുന്നില്ലെന്നതു നമുക്ക് അവയെപ്പറ്റിയുള്ള അറിവ് പരിമിതമാണെന്നും അവ്യക്തമാണെന്നുമുള്ളതിന്റെ അടയാളങ്ങളാണ്. ഗണിതയുക്തി സാധ്യമായ സന്ദർഭങ്ങളിൽ മറ്റൊരു രീതി ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്നത് വിഡ്ഢിത്തമാണ് – നമ്മുടെ പക്കൽ മെഴുകുതിരിയുള്ളപ്പോൾ ഇരുട്ടിൽ തപ്പുന്നതുപോലെ – ജോൺ അർതെൻബോട്* ❖

14.1 ആമുഖം

ജോർജ് ബൂൾ
(1815 - 1864)

ഗണിതശാസ്ത്രം ഒരു ഭാഷയായി പരിഗണിച്ചാൽ യുക്തി ശാസ്ത്രം (Logic) അതിന്റെ വ്യാകരണമാണ്. യുക്തിചിന്തയാണ് മനുഷ്യനെ മറ്റുള്ള ജീവികളിൽ നിന്നും ഉന്നതിയിൽ എത്തിച്ചത്. ഈ കഴിവ് ഓരോ മനുഷ്യനിലും വ്യത്യസ്തമാണ്. ആധുനിക മന:ശാസ്ത്രജ്ഞൻമാർ യുക്തിചിന്തയെ "മൾട്ടിപ്പിൾ ഇന്റലിജൻസിൽ" ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. തുടർച്ചയായ പഠനവും പരിശീലനവും കൊണ്ട് ഏതൊരു വ്യക്തിക്കും യുക്തിചിന്ത വർദ്ധിപ്പിക്കാം. യുക്തിചിന്തയെക്കുറിച്ച് ആദ്യത്തെ ആധികാരിക ഗ്രന്ഥം രചിച്ചത് അരിസ്റ്റോട്ടിൽ (384 BC - 322 BC) ആണ്. നിഗമനരീതിയിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില നിയമങ്ങളെക്കുറിച്ചായിരുന്നു അതിൽ പ്രതിപാദിച്ചിരിക്കുന്നത്. പിന്നീട് 17-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ കലനശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഉപജ്ഞാതാക്കളിൽ ഒരാളും ജർമ്മൻ ശാസ്ത്രജ്ഞനുമായ G.W. ലൈബ്നിറ്റ്സ് (1646 - 1716) നിഗമനരീതിയിൽ ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുത്തി. അദ്ദേഹത്തിന്റെ ആശയത്തിന് പത്തൊമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിലെ പ്രഗത്ഭരായ ഇംഗ്ലീഷ് ശാസ്ത്രജ്ഞൻമാരായ ജോർജ് ബൂൾ (1815 - 1864), അഗസ്തസ് ദ് മോർഗൺ (1806 - 1871) എന്നിവർ കൂടുതൽ വെളിച്ചം നൽകി "Symbolic Logic" എന്ന ശാഖ വികസിപ്പിച്ചു. ജോർജ് ബൂളിന്റെ ഗ്രന്ഥമായ "The Law of Thoughts" ലാണ് യുക്തിചിന്തയെ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് വിശദമായി ചർച്ചചെയ്തിട്ടുള്ളത്.

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന യുക്തിയെ പ്രധാനമായും രണ്ടായി തരം തിരിക്കാം.

i) ആഗമനരീതി (Inductive method)

ii) നിഗമനരീതി (Deductive method)

ആഗമനരീതിയെ കുറിച്ച് ഗണിതാഗമന രീതി എന്ന അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ഈ അധ്യായത്തിൽ നിഗമനരീതിയെ കുറിച്ച് ചർച്ചചെയ്യാം

14.2 ഗണിത പ്രസ്താവനയും, സത്യമൂല്യവും (Mathematical statement and Truth value)

ഗണിത യുക്തിയുടെ അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങളാണ് ഗണിതപ്രസ്താവനകൾ. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന വാക്യങ്ങൾ പരിശോധിക്കുക.

1) 2003 ൽ ഇന്ത്യയുടെ പ്രധാനമന്ത്രി ഒരു വനിതയായിരുന്നു

2) മനുഷ്യനെക്കാൾ ഭാരം കൂടുതൽ ആനയ്ക്കാണ്.

ഇതിൽ ഒന്നാമത്തെ വാക്യം തെറ്റാണ് (False). രണ്ടാമത്തെ വാക്യം ശരിയാണ് (True). അതുകൊണ്ട് ഇവ രണ്ടും പ്രസ്താവനകളാണ്.

ഒരു വാക്യം എല്ലായ്പ്പോഴും ശരിയാകുകയോ അല്ലെങ്കിൽ എല്ലായ്പ്പോഴും തെറ്റാകുകയോ ചെയ്താൽ അത്തരം പ്രസ്താവനയെ ഗണിത പ്രസ്താവനയായി പരിഗണിക്കാം.

ഒരു ഗണിത പ്രസ്താവന ശരിയാണെങ്കിൽ ആ പ്രസ്താവനയുടെ സത്യമൂല്യം 'ശരി' (T) എന്നും പ്രസ്താവന തെറ്റാണെങ്കിൽ അതിന്റെ സത്യമൂല്യം 'തെറ്റ്' (F) എന്നും പറയാം.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടി പരിശോധിക്കാം.

1. രണ്ടിനോടു രണ്ടു കൂട്ടിയാൽ നാലാണ്
2. എല്ലാ അഭാജ്യസംഖ്യകളും ഒറ്റസംഖ്യകളാണ്.
3. 6 ന് മൂന്നു ഘടകങ്ങളുണ്ട്.
4. x, y എന്നീ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക പൂജ്യത്തെക്കാൾ വലുതാണ്.
5. x, y എന്നീ സംഖ്യകളുടെ തുക പൂജ്യത്തെക്കാൾ വലുതാണ്.

ഇവിടെ 1, 3, 4 എന്നീ ഉദാഹരണങ്ങൾ ശരിയായ വാക്യങ്ങളാണ്. ഉദാഹരണം 2 തെറ്റായ വാക്യമാണ്. എന്നാൽ ഉദാഹരണം 5 ൽ x, y എന്നിവയുടെ വില അറിയില്ല. അതുകൊണ്ട് ഈ വാക്യം ശരിയാണോ തെറ്റാണോ എന്നു പറയാൻ സാധിക്കില്ല. അതുകൊണ്ട് ഇത് ഗണിത പ്രസ്താവനയായി പരിഗണിക്കാൻ സാധിക്കില്ല.

ഗണിത പ്രസ്താവനയായി പരിഗണിക്കാൻ സാധിക്കാത്ത ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കുക.

1. എത്ര മനോഹരം!
2. നിങ്ങൾ എവിടെ പോകുന്നു?
3. നാളെ വെള്ളിയാഴ്ചയാണ്.
4. ന്യൂഡൽഹി ഇവിടെ നിന്നും വളരെ അകലെയാണ്.

ഒന്നാമത്തെ ഉദാഹരണം ആശ്ചര്യമാണ്. രണ്ടാമത്തേത് ചോദ്യം ആണ്. മൂന്ന്, നാല് എന്നിവയിൽ 'നാളെ', 'ഇവിടെ' തുടങ്ങിയ പദങ്ങൾ കൃത്യമായി നിർവചിച്ചിട്ടില്ല.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടി നോക്കാം.

1. ഒരു മാസത്തിൽ 40 ദിവസങ്ങൾ ഉണ്ട്.
2. 2 നേക്കാൾ വലിയ എല്ലാ ഇരട്ടസംഖ്യകളെയും രണ്ട് അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ തുകയായി എഴുതാം.

ഏതു മാസം എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചിട്ടെല്ലെങ്കിലും ഒരു മാസത്തിനും 31 ൽ കൂടുതൽ ദിവസങ്ങൾ ഇല്ല എന്നു നമുക്കറിയാം. അതു കൊണ്ട് ഒന്നാമത്തെ വാക്യത്തിന്റെ സത്യമൂല്യം തെറ്റ് ആണ്. ഇതൊരു ഗണിത പ്രസ്താവനയാണ്.

ഉദാഹരണം 2 വളരെ പ്രസിദ്ധമായ ഗോൾഡ് ബാക്ക് സമസ്യയാണ്. ഈ വാക്യം ഇതുവരെ ആരും ശരിയാണ് എന്നോ, തെറ്റാണ് എന്നോ തെളിയിച്ചിട്ടില്ല. അതു കൊണ്ട് സത്യമൂല്യം അറിയില്ല. അതിനാൽ ഗണിത പ്രസ്താവനയായി പരിഗണിക്കാൻ ഇപ്പോൾ സാധ്യമല്ല.

പ്രസ്താവനകൾ കൈകാര്യം ചെയ്യാനും തിരിച്ചറിയുവാനുമുള്ള സൗകര്യത്തിനു വേണ്ടി അവയെ ഇംഗ്ലീഷിലെ ചെറിയ അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ടാണു സൂചിപ്പിക്കാറ്.

ഉദാഹരണം : p : സൂര്യൻ ഒരു നക്ഷത്രമാണ്.

q: അധിവർഷത്തിൽ 368 ദിവസങ്ങൾ ഉണ്ട്.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 14.1

1. തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഗണിത പ്രസ്താവനകൾ ഏതെല്ലാം? എന്തുകൊണ്ട്?

   i) ഒരു മാസത്തിൽ 35 ദിവസങ്ങൾ ഉണ്ട്.

   ii) ഗണിതശാസ്ത്രം ബുദ്ധിമുട്ടുള്ളതാണ്.

   iii) 5 ന്റെയും 7 ന്റെയും തുക 10 നേക്കാൾ കൂടുതൽ ആണ്.

   iv) ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗം ഇരട്ടസംഖ്യയായിരിക്കും.

   v) ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്ക് തുല്യനീളമാണ്.

   vi) ഈ ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം എഴുതുക.

   vii) –1 ന്റെയും 8 ന്റെയും ഗുണനഫലം 8 ആയിരിക്കും.

viii) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ആന്തരകോണുകളുടെ തുക $180°$ യാകുന്നു.

ix) ഇന്ന് കാറ്റുള്ള ദിവസമാണ്.

x) എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യകളും സമ്മിശ്രസംഖ്യകളാണ്.

2. ഗണിത പ്രസ്താവനകൾ അല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് ഉദാഹരണങ്ങൾ എഴുതുക. കാരണം വിശദമാക്കുക.

14.3 പഴയ പ്രസ്താവനയിൽ നിന്നും പുതിയ പ്രസ്താവന

നിലവിലുള്ള ഗണിതപ്രസ്താവനകളിൽ നിന്നും പുതിയ പ്രസ്താവനകൾ രൂപപ്പെടുത്തുന്നതിനെക്കുറിച്ച് ജോർജ് ബുൾ എന്ന ആംഗലേയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ 1854 ലെ The laws of thought എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിൽ പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്. പ്രധാനമായും രണ്ട് രീതിയാണുള്ളത്. ഒന്ന്, ഒരു പ്രസ്താവനയുടെ സത്യമൂല്യം ശരിയാകുമ്പോൾ അത് എന്താണ് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത് എന്നും മറ്റൊന്ന് അതിന്റെ സത്യമൂല്യം തെറ്റാകുമ്പോൾ എന്താണ് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത് എന്നും.

14.3.1 നിഷേധം (Negation)

ഒരു പ്രസ്താവനയുടെ സത്യമൂല്യത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി രൂപീകരിക്കുന്ന എതിർ പ്രസ്താവനയാണ് ആ പ്രസ്താവനയുടെ "നിഷേധം"

ഇവിടെ പ്രസ്താവനയെ p എന്നു സൂചിപ്പിച്ചാൽ നിഷേധ പ്രസ്താവനയെ $\sim p$ എന്ന് ചിഹ്നംകൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം.

ഉദാഹരണം p : ന്യൂഡൽഹി ഒരു നഗരമാണ്.

നിഷേധം $\sim p$: ന്യൂഡൽഹി ഒരു നഗരമല്ല.

അല്ലെങ്കിൽ

$\sim p$: ന്യൂഡൽഹി ഒരു നഗരമാണ് എന്ന പ്രസ്താവന ശരിയല്ല.

ഇവിടെ സത്യമൂല്യത്തിൽ വന്ന വ്യത്യാസം നോക്കാം.

p എന്നത് ശരിയായ പ്രസ്താവന. ആയിരുന്നു എന്നാൽ $\sim p$ എന്നത് തെറ്റ് ആയ പ്രസ്താവന ആയി മാറി.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടി നോക്കാം.

1. $p:\sqrt{7}$ ഒരു അഭിന്നകമാണ്.
2. q : എല്ലാ എണ്ണൽ സംഖ്യകളും പൂജ്യത്തേക്കാൾ വലുതാണ്.
3. r : 3 ന്റെയും 4 ന്റെയും തുക 8 ആകുന്നു.

നിഷേധം

1) $\sim p$: $\sqrt{7}$ ഒരു അഭിന്നക സംഖ്യയല്ല.

2) $\sim q$: എല്ലാ എണ്ണൽ സംഖ്യകളും പൂജ്യത്തേക്കാൾ വലുതല്ല.

3) $\sim r$: 3 ന്റെയും നാലിന്റെയും തുക 8 അല്ല.

14.3.2 സംയുക്ത പ്രസ്താവനകൾ (Compound statements)

രണ്ടോ അതിൽ കൂടുതലോ ലഘു പ്രസ്താവനകളെ കൂടാതെ/ഉം (and) അല്ലെങ്കിൽ (or) എങ്കിൽ (if, then), എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം (if and only if) തുടങ്ങിയവ ഉപയോഗിച്ച് ബന്ധിപ്പിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്ന വലിയ പ്രസ്താവനകളാണ് സംയുക്ത പ്രസ്താവനകൾ. അതുകൊണ്ട് കൂടാതെ, എങ്കിൽ, അല്ലെങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം തുടങ്ങിയ പദങ്ങളെ സംയോജക പദങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 1

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സംയുക്ത പ്രസ്താവനകളിൽ നിന്നും ലഘു പ്രസ്താവനകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. സംയോജക പദം എഴുതുക, ലഘു പ്രസ്താവനകളുടെ സത്യമൂല്യം കാണുക.

(i) ഒരു സമചതുരം ചതുരമാണ്, കൂടാതെ അതിന്റെ നാലു വശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

(ii) എല്ലാ അഭാജ്യസംഖ്യകളും ഒന്നുകിൽ ഇരട്ടസംഖ്യയാണ് അല്ലെങ്കിൽ ഒറ്റസംഖ്യയാണ്.

(iii) ഗണിതശാസ്ത്രം അല്ലെങ്കിൽ കമ്പ്യൂട്ടർ സയൻസ് പഠിച്ച വ്യക്തിക്ക് M.C.A. യ്ക്ക് പോകാം.

(iv) ചാണ്ഡിഗഢ് ഹരിയാനയുടെയും കൂടാതെ U.P യുടെയും തലസ്ഥാനമാണ്.

(v) $\sqrt{2}$ ഒരു ഭിന്നകസംഖ്യ അല്ലെങ്കിൽ അഭിന്നക സംഖ്യ ആണ്.

(vi) 2, 4, 8 ഇവയുടെ എല്ലാം ഒരു ഗുണിതമാണ് 24.

പരിഹാരം

ലഘുപ്രസ്താവനകൾ ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

i) p : ഒരു സമചതുരം ചതുരമാണ്.

q : ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നാലു വശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

ഇവിടെ രണ്ട് പ്രസ്താവനകളും 'ശരിയാണ്' ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന സംയോജക പദം 'കൂടാതെ' ആണ്.

ii) p : എല്ലാ അഭാജ്യസംഖ്യകളും ഇരട്ടസംഖ്യകളാകുന്നു.

q : എല്ലാ അഭാജ്യസംഖ്യകളും ഒറ്റസംഖ്യകളാകുന്നു.

ഇവിടെ രണ്ട് പ്രസ്താവനകളും തെറ്റാണ്. ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന സംയോജക പദം 'അല്ലെങ്കിൽ' ആകുന്നു.

iii) p : ഗണിതശാസ്ത്രം പഠിച്ച വ്യക്തിക്ക് M.C.A യ്ക്ക് പോകാം

q : കമ്പ്യൂട്ടർസയൻസ് പഠിച്ച വ്യക്തിക്ക് M.C.A യ്ക്ക് പോകാം.

രണ്ട് പ്രസ്താവനകളും ശരിയാണ്. ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന സംയോജക പദം 'അല്ലെങ്കിൽ' ആണ്.

iv) p : ചാണ്ഡിഗഢ് ഹരിയാനയുടെ തലസ്ഥാനമാണ്.

q : ചാണ്ഡിഗഢ് U.P യുടെ തലസ്ഥാനമാണ്.

ഇവിടെ p ശരിയായതും q തെറ്റായതുമായ പ്രസ്താവനകളാണ് ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന സംയോജകപദം 'കൂടാതെ' ആണ്.

vi) p : 24 എന്ന സംഖ്യ 2 ന്റെ ഗുണിതമാണ്.

q : 24 എന്ന സംഖ്യ 4 ന്റെ ഗുണിതമാണ്.

r : 24 എന്ന സംഖ്യ 8 ന്റെ ഗുണിതമാണ്.

മൂന്ന് പ്രസ്താവനകളും ശരിയാണ്. ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന സംയോജകപദം 'കൂടാതെ' ആണ്.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 14.2

1. തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളുടെ നിഷേധം എഴുതുക.
   i) ചെന്നൈ തമിഴ്നാടിന്റെ തലസ്ഥാനമാണ്.
   ii) $\sqrt{2}$ ഒരു സമ്മിശ്ര സംഖ്യയല്ല.
   iii) എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളും സമഭുജത്രികോണങ്ങളല്ല.
   iv) 2 എന്ന സംഖ്യ 7 നേക്കാൾ വലുതാണ്.
   v) എല്ലാ എണ്ണൽ സംഖ്യകളും പൂർണസംഖ്യകളാണ്.
2. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഓരോ ജോടി പ്രസ്താവനകളിലും ഒന്ന് മറ്റേതിന്റെ നിഷേധമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.
   i) x എന്ന സംഖ്യ ഭിന്നകസംഖ്യയല്ല.
   x എന്ന സംഖ്യ അഭിന്നക സംഖ്യയല്ല.
   ii) x എന്ന സംഖ്യ ഭിന്നകസംഖ്യയാണ്.
   x എന്ന സംഖ്യ അഭിന്നകസംഖ്യാണ്.
3. തന്നിരിക്കുന്ന സംയുക്ത പ്രസ്താവനയിൽ നിന്നും ലഘു പ്രസ്താവനകൾ എഴുതുക. അവയുടെ സത്യമൂല്യങ്ങൾ കാണുക.
   1) 3 അഭാജ്യസംഖ്യയാണ് അല്ലെങ്കിൽ ഒറ്റസംഖ്യയാണ്.
   2) എല്ലാ പൂർണസംഖ്യകളും അധിസംഖ്യയാണ് അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനസംഖ്യയാണ്.
   3) 100 നെ 3, 11, 5 എന്നീ സംഖ്യകൾ കൊണ്ടു ഹരിക്കാം.

14.4 സംയോജക പദം 'ഉം/കൂടാതെ' (The Word 'And')

രണ്ട് പ്രസ്താവനകളെ 'കൂടാതെ' ഉപയോഗിച്ച് ബന്ധിപ്പിക്കാം. p, q എന്നിവ രണ്ടു പ്രസ്താവനകളാണെങ്കിൽ സംയുക്ത പ്രസ്താവന p കൂടാതെ q ആയിരിക്കും. ഇതിനെ $p \wedge q$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 2

p : ആകാശം നീലയാണ്

q : പുല്ല് പച്ചയാണ്

സംയുക്ത പ്രസ്താവന:

r : ആകാശം നീലയും പുല്ല് പച്ചയുമാണ്

ഒരു സംയുക്തപ്രസ്താവന **ഉം/കൂടാതെ** ഉപയോഗിച്ചു തന്നാൽ അവയിൽ നിന്നും ലഘു പ്രസ്താവനകൾ എഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 3

12 നെ 3 കൊണ്ടും 4 കൊണ്ടും നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം.

ലഘുപ്രസ്താവനകൾ : p : 12 നെ 3 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം.

q : 12 നെ 4 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം.

ഇനി **ഉം/കൂടാതെ** ഉപയോഗിച്ച് ഒരു സംയുക്ത പ്രസ്താവന നിർമിച്ചാൽ അതിന്റെ സത്യമൂല്യം കണക്കാക്കുന്ന രീതി താഴെ പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു.

p	q	$p \wedge q$
ശരി	ശരി	ശരി
ശരി	തെറ്റ്	തെറ്റ്
തെറ്റ്	ശരി	തെറ്റ്
തെറ്റ്	തെറ്റ്	തെറ്റ്

കുറിപ്പ്

ലഘുപ്രസ്താവനകളായ p യും q യും രണ്ടും ശരി ആണെങ്കിൽ മാത്രമേ സംയുക്ത പ്രസ്താവന ശരി ആകുന്നുള്ളൂ.

ഉദാഹരണം : 4

“24 എന്ന സംഖ്യ 4 ന്റെയും 5 ന്റെയും ഗുണിതമാണ്” ഈ പ്രസ്താവനയുടെ സത്യമൂല്യം കണക്കാക്കുക.

ഇത് ഒരു ഉം/കൂടാതെ ഉപയോഗിച്ച് സംയുക്ത പ്രസ്താവനയാണല്ലോ. ലഘു പ്രസ്താവനകൾ നോക്കാം.

p : 24 എന്ന സംഖ്യ 4 ന്റെ ഗുണിതമാണ്.

q : 24 എന്ന സംഖ്യ 5 ന്റെ ഗുണിതമാണ്.

ഇവിടെ p എന്നത് ശരിയും q എന്നത് തെറ്റും ആണല്ലോ അതുകൊണ്ട് പട്ടിക പ്രകാരം സംയുക്ത പ്രസ്താവന തെറ്റ് ആണ്.

തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളുടെ സത്യമൂല്യം കാണാൻ ശ്രമിക്കുക.

i) 4 ഉം 6 ഉം 12 ന്റെ ഘടകമാണ്.

ii) 10 നെ 4 കൊണ്ടും 5 കൊണ്ടും നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം.

iii) 0 എല്ലാ പൂർണഅധിസംഖ്യകളെകാളും എല്ലാ പൂർണന്യൂനസംഖ്യ യെക്കാളും ചെറുതാണ്.

iv) എല്ലാ ജീവികൾക്കും 2 കാലുകളും 2 കണ്ണുകളും ഉണ്ട്.

v) ഡൽഹി ഇന്ത്യയിലാണ്. കൂടാതെ $2 + 2 = 4$

14.4.1 സംയോജക പദം 'അല്ലെങ്കിൽ'

രണ്ട് പ്രസ്താവനകളെ 'അല്ലെങ്കിൽ' ഉപയോഗിച്ച് ബന്ധിപ്പിക്കാം.

p യും q യും രണ്ടു ലഘുപ്രസ്താവനകൾ ആണെങ്കിൽ സംയുക്ത പ്രസ്താവന "p **അല്ലെങ്കിൽ** q" എന്നായിരിക്കും. ഇതിനെ $p \vee q$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 5

P : 10 എന്നത് 5 ന്റെ ഗുണിതമാണ്

q : 10 എന്നത് 4 ന്റെ ഗുണിതമാണ്

ആയാൽ സംയുക്ത പ്രസ്താവന.

r : 10 എന്നത് 5 ന്റെ ഗുണിതമാണ് അല്ലെങ്കിൽ 4 ന്റെ ഗുണിതമാണ്.

അല്ലെങ്കിൽ ഉപയോഗിച്ച് നിർമിച്ച ഒരു സംയുക്ത പ്രസ്താവനയുടെ സത്യമൂല്യം താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് മനസ്സിലാക്കാം.

P	q	സംയുക്ത പ്രസ്താവന
ശരി	ശരി	ശരി
ശരി	തെറ്റ്	ശരി
തെറ്റ്	ശരി	ശരി
തെറ്റ്	തെറ്റ്	തെറ്റ്

☛ കുറിപ്പ് 1

ഇവിടെ ലഘുപ്രസ്താവനകൾ രണ്ടും തെറ്റ് ആണെങ്കിൽ മാത്രമെ സംയുക്ത പ്രസ്താവന തെറ്റ് ആകുന്നുള്ളൂ. ഒന്നോ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടു പ്രസ്താവനകളോ ശരിയായാൽ സംയുക്ത പ്രസ്താവന ശരിയാകും.

ഉദാഹരണം : 6

ഡൽഹി ഇന്ത്യയിലാണ് അല്ലെങ്കിൽ $2 + 3 = 4$. ഈ പ്രസ്താവനയുടെ സത്യമൂല്യം കണക്കാക്കാം.

ഇവിടെ ലഘുപ്രസ്താവനകൾ

p : ഡൽഹി ഇന്ത്യയിലാണ്. q : $2 + 3 = 4$

p എന്നത് ശരിയും q എന്നത് തെറ്റും ആണ്. അതുകൊണ്ട് p അല്ലെങ്കിൽ q എന്നത് ശരിയാകും.

തന്നിരിക്കുന്ന സംയുക്ത പ്രസ്താവനയുടെ സത്യമൂല്യം കണ്ടാൻ ശ്രമിക്കുക.

(i) $\sqrt{2}$ അഭിന്നകമാണ് അല്ലെങ്കിൽ ഭിന്നകമാണ്.

(ii) ഒരു പൂർണസംഖ്യ അധിസംഖ്യ അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനസംഖ്യ ആയിരിക്കും.

(iii) 100 എന്നത് 10 ന്റെ ഗുണിതമാണ് അല്ലെങ്കിൽ 20 ന്റെ ഗുണിതമാണ്.

നിരീക്ഷണങ്ങൾ

'അല്ലെങ്കിൽ' എന്നത് രണ്ടു രീതിയിൽ ഉപയോഗിക്കാം.

(i) ഉൾപ്പെടുന്ന 'അല്ലെങ്കിൽ' [inclusive "or"]

(ii) ഉൾപ്പെടാത്ത 'അല്ലെങ്കിൽ' [exclusive "or"]

ഉദാഹരണം : 7

(i) $\sqrt{3}$ ഭിന്നസംഖ്യയാണ്. അല്ലെങ്കിൽ അഭിന്നകസംഖ്യയാണ്.

(ii) 2 അഭാജ്യസംഖ്യയാണ്. അല്ലെങ്കിൽ ഇരട്ട സംഖ്യയാണ്.

(iii) അവധി ദിവസമോ അല്ലെങ്കിൽ ഞായറാഴ്ചയോ ആണെങ്കിൽ സ്കൂൾ അടച്ചിടും.

(iv) വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് രണ്ടാം ഭാഷയായി മലയാളം അല്ലെങ്കിൽ ഹിന്ദിയോ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

(v) ഒരു തലത്തിലെ രണ്ട് രേഖകൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കും അല്ലെങ്കിൽ അവ സമാന്തരമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം (i) $\sqrt{3}$ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയാണ്; അല്ലെങ്കിൽ അഭിന്നകമാണ്. ഏതെങ്കിലും ഒന്നു മാത്രമെ സാധ്യമാകൂ.

ഉദാഹരണം : – (iv), (v) അത് പോലെയാണ് ഇത്തരം 'അല്ലെങ്കിൽ' **ഉൾപ്പെടാത്ത അല്ലെങ്കിൽ** എന്ന് വിളിക്കും.

ഉദാഹരണം: (ii) ൽ രണ്ട് ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയോ അല്ലെങ്കിൽ ഇരട്ടസംഖ്യയൊ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടുമോ ആയിരിക്കും. ഉദാഹരണം (iii) ഇതുപോലെയാണ്. ഇത്തരം 'അല്ലെങ്കിൽ' **ഉൾപ്പെടുന്ന അല്ലെങ്കിൽ** എന്നു പറയപ്പെടുന്നു.

14.4.2 നിർണായകങ്ങൾ (Quantifiers)

ചില പ്രസ്താവനകളിൽ ഉപയോഗിക്കാവുന്ന വാക്കുകളായ "There exists", "For all", "Every" തുടങ്ങിയവയെയാണ് നിർണായകങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കുന്നത്.

"There exists a rectangle all of whose sides are equal "

ഇതിന്റെ അർത്ഥം ചതുരങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിൽ ഒരു ചതുരത്തിനെങ്കിലും നാല് വശങ്ങളും തുല്യങ്ങളാണ്.

"For every prime number p, $\sqrt{p}$ is irrational.

എല്ലാ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെയും വർഗമൂലം അഭിന്നകമാണ്.

ഇത്തരം വാക്കുകൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളുടെ നിഷേധം താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന രീതിയിലും എഴുതാം.

$\sim$(For every $x \in$M, p) $\equiv$ (There exists $x \in$M, $\sim p$)

$\sim$(There exists $x \in$M, p) $\equiv$ (For every $x \in$M, $\sim p$)

ഉദാഹരണം : 8

തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളുടെ നിഷേധം എഴുതുക.

i) Every one in Germany speaks German.

ജർമനിയിലുള്ള എല്ലാവരും ജൻമൻ ഭാഷാ സംസാരിക്കും.

ii) There exists a prime number which is not odd.

ഒറ്റസംഖ്യയല്ലാത്ത ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ ഉണ്ട്.

പരിഹാരം

(i) There exists a person in Germany who does not speak German.

ജൻമൻ ഭാഷ സംസാരിക്കാത്ത ഒരാൾ ജൻമനിയിലുണ്ട്.

(ii) Every prime number is odd.

എല്ലാ അഭാജ്യസംഖ്യകളും ഒറ്റയാണ്.

നിർണായകങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന സറലങ്ങൾക്കും പ്രത്യേകതകൾ ഉണ്ട്. തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ടു പ്രസ്താവനകൾ പരിശോധിച്ച് അവയുടെ സത്യമൂല്യം കണക്കാക്കാം.

(i) For every positive number x, there exists a positive number y such that $y < x$.

(ii) There exists a positive number y such that for every positive number x, we have $y < x$.

i) ഓരോ അധിസംഖ്യ x നും, $y < x$ ആകത്തക്കവിധം ഒരു അധിസംഖ്യ y ഉണ്ട്.

ii) എല്ലാ അധിസംഖ്യ x നും $y < x$ ആകത്തക്കവിധം ഒരു അധിസംഖ്യ y ഉണ്ട്

പ്രസ്താവനകൾ രണ്ടും ഒരു പോലെ തോന്നുന്നു എങ്കിലും ഇവിടെ ആദ്യ പ്രസ്താവന ശരിയും രണ്ടാമത്തേത് തെറ്റുമാണല്ലോ. അതുകൊണ്ട് തന്നെ ഗണിത പ്രസ്താവനകളെ വിശകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ വളരെ ശ്രദ്ധ ആവശ്യമാണ്. ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ ചില സിദ്ധാന്തങ്ങൾ തെളിയിക്കുവാൻ നാമം ചെയ്യേണ്ട രീതികളെ കുറിച്ച് ചർച്ചയാവാം. ഒരു പ്രസ്താവന ശരിയാണ്. അല്ലെങ്കിൽ തെറ്റാണ്

എന്ന് പറയാൻ ആദ്യം ആ പ്രസ്താവനയുടെ അർത്ഥം മനസ്സിലാക്കേണ്ടതുണ്ട്, എപ്പോഴൊക്കെ പ്രസ്താവന ശരിയാവാം, അല്ലെങ്കിൽ തെറ്റാവാം എന്നും മനസ്സിലാക്കണം. ഇത് ആ പ്രസ്താവനകളിൽ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന and, or, if... then, if and only if, There exists, for every തുടങ്ങിയ വാക്കുകളെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കാം. ഇത്തരം വാക്കുകൾ വന്നാൽ ഒരു പ്രസതാവന ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുന്ന ചില രീതികളെക്കുറിച്ച് ഭാഗം 14.6 ൽ മനസ്സിലാക്കാം.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 14.3

1. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സംയുക്ത പ്രസ്താവനകളിൽ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന സംയോജകപദം കണ്ടെത്തുക കൂടാതെ ലഘു പ്രസ്താവനകളാക്കുക.
   i) എല്ലാ ഭിന്നകസംഖ്യകളും രേഖീയസംഖ്യകളാണ് കൂടാതെ എല്ലാ രേഖീയ സംഖ്യകളും സമ്മിശ്രസംഖ്യയല്ല.
   ii) ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം അധിസംഖ്യ അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനസംഖ്യ യാണ്.
   iii) മണൽ വെയിലത്ത് പെട്ടെന്ന് ചൂടാവുന്നു കൂടാതെ രാത്രിയിൽ പെട്ടെന്ന് തണുക്കുന്നില്ല.
   iv) $x = 2$ ഉം $x = 3$ ഇവ $3x^2 - x - 10 = 0$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരമാണ്.
2. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന നിർണായകങ്ങൾ കണ്ടെത്തുകയും നിഷേധപ്രസ്താവന എഴുതുകയും ചെയ്യുക.
   (i) There exists a number which is equal to its square.
   (ii) For every real number x, x is less than $x + 1$.
   (iii) There exists a capital for every state in India.
3. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഒരു ജോടി പ്രസ്താവനകൾ ഒന്ന് മറ്റൊന്നിന്റെ നിഷേധമാണോ? കാരണം എഴുതുക.
   (i) $x + y = y + x$ എന്ന സമവാക്യം x, y എന്നീ എല്ലാ രേഖീയ സംഖ്യകൾക്കും ശരിയാണ്.
   (ii) $x + y = y + x$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്ന x, y എന്നീ രേഖീയ സംഖ്യ കൾ ഉണ്ട്.
4. തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളിൽ ഉപയോഗിച്ചിരുന്ന 'അല്ലെങ്കിൽ' എന്നത് 'ഉൾപ്പെടുന്നത്' 'ഉൾപ്പെടാത്തത്' എന്ന് തരം തിരിക്കുക.
   (i) സൂര്യൻ ഉദിക്കുന്നു അല്ലെങ്കിൽ ചന്ദ്രൻ അസ്തമിക്കുന്നു.
   (ii) ഡ്രൈവിങ് ലൈസൻസിന് അപേക്ഷിക്കാൻ നിങ്ങൾക്ക് റേഷൻ കാർഡോ അല്ലെങ്കിൽ പാസ്പോർട്ടോ വേണം.
   (iii) എല്ലാ പൂർണ്ണസംഖ്യകളും അധിസംഖ്യയോ - അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനസംഖ്യയോ ആണ്.

14.5. സംയോജക പദം 'എങ്കിൽ'

രണ്ടു ലഘുപ്രസ്താവനകളാണ് p യും q യും എങ്കിൽ ഉപയോഗിച്ച് p എങ്കിൽ q എന്ന സംയുക്ത പ്രസ്താവന ഉണ്ടാക്കാം. ഇതിനെ $p \Rightarrow q$ (p എങ്കിൽ q) എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 9

p : താങ്കൾ ഒരു രാജ്യത്ത് ജനിച്ചു.

q : താങ്കൾ ഒരു രാജ്യത്തെ പൗരനാണ്. ഇവയെ ബന്ധിപ്പിച്ച് ഇങ്ങനെ പറയാം. താങ്കൾ ഒരു രാജ്യത്ത് ജനിച്ചെങ്കിൽ താങ്കൾ ആ രാജ്യത്തെ പൗരനായിരിക്കും. p എങ്കിൽ q എന്ന പ്രസ്താവനയിൽ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ട പ്രധാനകാര്യം. p എന്ന പ്രസ്താവന തെറ്റാണ് എങ്കിൽ അത് q എന്ന പ്രസ്താവനയെ ബാധിക്കുന്നില്ല. അതായത് "താങ്കൾ ഒരു രാജ്യത്ത് ജനിച്ചില്ല" എന്നതിൽ നിന്നും താങ്കൾ ആ രാജ്യത്തെ പൗരനല്ല എന്നോ പൗരനാണ് എന്നോ കൃത്യമായി പറയുവാൻ സാധിക്കില്ല. ചുരുക്കത്തിൽ p എന്ന പ്രസ്താവന സംഭവിക്കാത്തത് q എന്ന പ്രസ്താവനയെ ബാധിക്കില്ല.

$p \Rightarrow q$ എന്ന സംയുക്ത പ്രസ്താവനയുടെ സത്യമൂല്യം താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ നിന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

p	q	$p \Rightarrow q$
ശരി	ശരി	ശരി
ശരി	തെറ്റ്	തെറ്റ്
തെറ്റ്	ശരി	ശരി
തെറ്റ്	തെറ്റ്	ശരി

$p \Rightarrow q$ എന്ന സംയുക്ത പ്രസ്താവനയിൽ p എന്നതിനെ പരികല്പന എന്നും q എന്നതിനെ നിഗമനം എന്നും പറയാം.

പട്ടികയിൽ നിന്നും പരികല്പന ശരി ആകുകയും നിഗമനം തെറ്റാകുകയും ചെയ്യുന്ന അവസരത്തിൽ മാത്രമേ p എങ്കിൽ q എന്നത് തെറ്റാകുകയുള്ളൂ.

നിരീക്ഷണം

'p എങ്കിൽ q' എന്ന പ്രസ്താവനയെ പല രീതിയിലും സന്ദർഭമനുസരിച്ച് എഴുതാം. ചില രീതികൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

i) q വിന് മതിയായ (പര്യാപ്തമായ) നിബന്ധനയാണ് p

ii) p യ്ക്ക് അനിവാര്യമായ നിബന്ധനയാണ് q

iii) q എങ്കിൽ മാത്രം p

iv) q എപ്പോഴെല്ലാം അപ്പോൾ p

v) നിഷേധം q നിഷേധം p യിലേക്ക് നയിക്കുന്നു

ഉദാഹരണം : 10

i) ഒരു അധിസംഖ്യയ്ക്ക് ആ സംഖ്യയോ ഒന്നോ അല്ലാത്തതോ ആയ ഘടകങ്ങൾ ഇല്ലെങ്കിൽ മാത്രം അത് അഭാജ്യസംഖ്യയാണ്.

ii) വെയിലുള്ള ദിവസങ്ങളിലൊക്കെ ഞാൻ കടൽത്തീരത്തുപോകും.

ഈ രണ്ട് പ്രസ്താവനകളേയും **എങ്കിൽ** ഉപയോഗിച്ച് എഴുതുക.

പരിഹാരം

i) ഒരു അധിസംഖ്യയ്ക്ക് ആ സംഖ്യയോ ഒന്നോ അല്ലാത്തതോ ആയ ഘടകങ്ങൾ ഇല്ലെങ്കിൽ അത് അഭാജ്യ സംഖ്യയായിരിക്കും.

ii) വെയിലുള്ള ദിവസമാണെങ്കിൽ ഞാൻ കടൽത്തീരത്തു പോകും.

സംയോജക പദം 'if and only if' (എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം)

p, q എന്നീ ലഘുപ്രസ്താവനകളിൽ നിന്നും 'p എങ്കിൽ q' (if p then q) എന്നതും 'q എങ്കിൽ p' (if q then p) എന്നതും ഒരേ സമയം ഒന്നിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് വേണ്ടിയാണ് എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം (if and only if) ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഇതിനെ "$p \Leftrightarrow q$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

ഉദാഹരണത്തിന് A, B എന്നിവ വിയുക്ത ഗണങ്ങൾ എങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം $A \cap B = \phi$ ആയിരിക്കും.

ഈ സംയുക്ത പ്രസ്താവന താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ടു പ്രസ്താവനകൾ ചേർന്നതാണ്.

1) A, B എന്നിവ വിയുക്ത ഗണങ്ങളാണെങ്കിൽ $A \cap B = \phi$ ആയിരിക്കും.

2. $A \cap B = \phi$ ആയാൽ A, B എന്നിവ വിയുക്തഗണങ്ങൾ ആയിരിക്കും.

$p \Leftrightarrow q$ എന്ന പ്രസ്താവനയുടെ സത്യമൂല്യം താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ നിന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
ശരി	ശരി	ശരി
ശരി	തെറ്റ്	തെറ്റ്
തെറ്റ്	ശരി	തെറ്റ്
തെറ്റ്	തെറ്റ്	ശരി

ഉദാഹരണം : 11

തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് എഴുതുക.

i) p : ഒരു ചതുരം സമചതുരമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ നാലു വശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

q : ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നാലു വശങ്ങളും തുല്യമാണെങ്കിൽ അത് ഒരു സമചതുരമായിരിക്കും.

ii) p : സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുകയെ 3 കൊണ്ടു ഹരിക്കാമെങ്കിൽ ആ സംഖ്യയെ 3 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം.

q : ഒരു സംഖ്യയെ 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കാമെങ്കിൽ അതിന്റെ അക്കങ്ങളുടെ തുകയെ 3 കൊണ്ടു നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം.

iii) p : ഒരു ത്രികോണം സമപാർശ്വത്രികോണമാണെങ്കിൽ അത് സമഭുജത്രികോണമായിരിക്കും.

q : ഒരു ത്രികോണം സമഭുജത്രികോണമാണെങ്കിൽ അത് സമപാർശ്വത്രി കോണമായിരിക്കും.

പരിഹാരം

i) ഒരു ചതുരം സമചതുരമാണ് എങ്കിൽ, എങ്കിൽമാത്രം അതിന്റെ നാല് വശ ങ്ങളും തുല്യമാണ്.

ii) ഒരു സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുകയെ 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കാമെങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം സംഖ്യയെ 3 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം.

iii) ഒരു ത്രികോണം സമഭുജത്രികോണമാണെങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം അത് സമ പാർശ്വത്രികോണമായിരിക്കും.

ക്രമ നമ്പർ	പ്രസ്താവന ക്രിയകൾ	ചിഹ്നം	വിഭാഗം	എഴുതുന്നരീതി
1	അല്ല (not)	~	നിഷേധം (Negation)	~p
2	ഉം (and)	$\wedge$	സംയോജനം (Conjunction)	$p \wedge q$
3	അല്ലെങ്കിൽ (or)	$\vee$	വിയോജനം (Disjunction)	$p \vee q$
4	എങ്കിൽ (if....Then)	$\Rightarrow$	സോപാധികം (implication) (Conditional)	$p \Rightarrow q$
5	എങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം (If and only if)	$\Leftrightarrow$	ഉഭയസോപാധികം (Biconditional)	$p \Leftrightarrow q$

14.5.1 വിപരീത പ്രസ്താവനയും എതിർ നിഷേധാനുകൂല പ്രസ്താവനയും (Converse and contrapositive statement)

'p എങ്കിൽ q' (If p then q) എന്ന സംയുക്ത പ്രസ്താവനയുടെ വിപരീത പ്രസ്താവന q എങ്കിൽ p (Converse : if q then p) എന്നും എതിർ നിഷേധാനുകൂലം എന്നത് q ശരിയല്ലെങ്കിൽ p ശരിയല്ല (Contrapositive : if not q then not p).

ഉദാഹരണം : 12

ഒരു സംഖ്യയെ 9 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാമെങ്കിൽ അതിനെ 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കാം. ഈ സംയുക്ത പ്രസ്താവന പിരിച്ചെഴുതിയാൽ.

p : ഒരു സംഖ്യയെ 9 കൊണ്ട് ഹരിക്കാം.

q : ഒരു സംഖ്യയെ 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കാം.

ഇതിന്റെ വിപരീതം 'q എങ്കിൽ p' എന്നാണ്.

ഒരു സംഖ്യയെ 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കാമെങ്കിൽ അതിനെ 9 കൊണ്ടും ഹരിക്കാം.

എതിർ അനുകൂല പ്രസ്താവന q ശരിയല്ലെങ്കിൽ p ശരിയല്ല എന്നാണ്.

ഒരു സഖ്യയെ 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കാൻ സാധിക്കില്ലെങ്കിൽ അതിനെ 9 കൊണ്ടും ഹരിക്കാൻ സാധിക്കില്ല.

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളുടെ വിപരീതവും, എതിർ നിഷേധാനുകൂല പ്രസ്താവനയും എഴുതുക.

1. നിങ്ങൾ ഇന്ത്യയിലാണ് ജനിച്ചതെങ്കിൽ ഇന്ത്യൻ പൗരനാണ്.
2. ഒരു ത്രികോണം സമഭുജ ത്രികോണമെങ്കിൽ അത് സമപാർശ്വത്രികോണ മായിരിക്കും
3. n എന്ന സംഖ്യ ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ n^2 ഇരട്ടസംഖ്യയായിരിക്കും.
4. a, b ഇവ പൂർണ്ണസംഖ്യകളാണ് $a > b$, ആണെങ്കിൽ $a - b$ എല്ലായി പ്പോഴും അധിസംഖ്യ ആയിരിക്കും.

പരിഹാരം

1. i. നിങ്ങൾ ഇന്ത്യൻ പൗരനാണെങ്കിൽ നിങ്ങൾ ജനിച്ചത് ഇന്ത്യയിലാണ് (വിപ രീതം).

   ii. നിങ്ങൾ ഇന്ത്യൻ പൗരനല്ലെങ്കിൽ നിങ്ങൾ ഇന്ത്യയിലല്ല ജനിച്ചത് (എതിർ നിഷേധാനുകൂലം).

2. i. ത്രികോണം സമപാർശ്വത്രികോണമാണെങ്കിൽ അത് സമഭുജത്രികോണ മായിരിക്കും (വിപരീതം).

   ii. ത്രികോണം സമപാർശ്വത്രികോണമല്ലെങ്കിൽ അത് സമഭുജത്രികോണമല്ല (എതിർ നിഷേധാനുകൂലം).

3. i. n^2 ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ n ഇരട്ടസംഖ്യയായിരിക്കും (വിപരീതം).
   ii. n^2 ഇരട്ടസംഖ്യയല്ലെങ്കിൽ n ഇരട്ടസംഖ്യയല്ല (എതിർ നിഷേധാനുകൂലം).
4. i. a, b ഇവ പൂർണസംഖ്യകളാണ്, $a - b$ എല്ലായിപ്പോഴും അധിസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ $a > b$ ആയിരിക്കും (വിപരീതം).
   ii. a, b ഇവ പൂർണസംഖ്യകളാണ്, $a - b$ എല്ലായിപ്പോഴും അധിസംഖ്യ അല്ലെങ്കിൽ $a > b$ ആയിരിക്കില്ല (എതിർ നിഷേധാനുകൂലം).

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 14.4

1. എങ്കിൽ (*If then*) ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനയെ അർത്ഥവ്യത്യാസം വരാതെ അഞ്ച് വ്യത്യസ്ത രീതിയിൽ മാറ്റി എഴുതുക.

   "ഒരു നിസർഗസംഖ്യ ഒറ്റ സംഖ്യയാണെങ്കിൽ അതിന്റെ വർഗവും ഒറ്റ സംഖ്യയായിരിക്കും".

2. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനയുടെ "എതിർ നിഷേധാനുകൂലവും" "വിപരീതവും" എഴുതുക.
   (i) x അഭാജ്യസംഖ്യയാണെങ്കിൽ x ഒറ്റ സംഖ്യയായിരിക്കും.
   (ii) രണ്ടു രേഖകൾ സമാന്തരങ്ങളാണെങ്കിൽ അവ ഒരു തലത്തിൽ സംഗമിക്കുന്നില്ല.
   (iii) തണുപ്പനുഭവപ്പെടുന്നുണ്ട് എങ്കിൽ ഊഷ്മാവ് കുറവായിരിക്കും.
   (iv) നിങ്ങൾക്ക് ജ്യാമിതി മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കുന്നില്ല എങ്കിൽ നിങ്ങൾക്ക് നിഗമനരീതിയെക്കുറിച്ച് അറിയില്ല.
   (v) x ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ x നെ 4 കൊണ്ട് ഹരിക്കാം.

3. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഓരോ പ്രസ്താവനയും 'എങ്കിൽ' ഉപയോഗിച്ച് എഴുതുക.
   (i) നിങ്ങൾക്ക് ജോലി ലഭിച്ചാൽ നിങ്ങളുടെ യോഗ്യതാപത്രം നന്നായിരുന്നു എന്ന് അർത്ഥം.
   (ii) ഒരു മാസം ചൂട് ലഭിച്ചാൽ വാഴകുലക്കും.
   (iii) ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്താൽ അതൊരു സാമാന്തരികമാകും.
   (iv) ക്ലാസിൽ A^+ ലഭിക്കാൻ പുസ്തകത്തിലെ എല്ലാ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങളും ഒരാൾ ചെയ്യേണ്ടത് അനിവാര്യമാണ്.

4. തന്നിരിക്കുന്ന (a), (b) എന്നീ പ്രസ്താവനകൾക്ക് അവയോടൊപ്പം തന്ന പ്രസ്താവനകളിൽ നിന്നും എതിർ അനുകൂല പ്രസ്താവന, വിപരീത പ്രസ്താവന ഇവ തിരിച്ചറിയുക.

   a) നിങ്ങൾ ഡൽഹിയിലാണ് ജീവിക്കുന്നതെങ്കിൽ നിങ്ങളുടെ കൈവശം ശൈത്യകാല വസ്ത്രങ്ങളുണ്ട്.

      i) നിങ്ങളുടെ കൈവശം ശൈത്യകാല വസ്ത്രങ്ങളില്ലെങ്കിൽ നിങ്ങൾ ഡൽഹിയിലല്ല ജീവിക്കുന്നത്.

      ii) നിങ്ങളുടെ കൈവശം ശൈത്യകാല വസ്ത്രങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ നിങ്ങൾ ഡൽഹിയിൽ ജീവിക്കുന്നു.

   b) ഒരു ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.

      i) ചതുർഭുജത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യുന്നില്ല എങ്കിൽ അതൊരു സാമാന്തരികമല്ല.

      ii) ചതുർഭുജത്തിന്റെ വികർണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ അതൊരു സാമാന്തരികമായിരിക്കും.

തുല്യപ്രസ്താവനകൾ

ഒരേ അർത്ഥം നൽകുന്ന രണ്ട് പ്രസ്താവനകളെ തുല്യപ്രസ്താവനകൾ എന്ന് h rf η nw p എന്ന പ്രസ്താവനയും ~ (~p) എന്ന പ്രസ്താവനയും പരിഗണിച്ചാൽ അവ രണ്ടും തുല്യമാണെന്ന് കാണാം.
ഇതേപോലെ തുല്യമാകുന്ന പ്രസ്താവനയാണ് p എങ്കിൽ q ($p \Rightarrow q$) എന്നതും അതിന്റെ എതിർ അനുകൂല പ്രസ്താവനയായ 'q ശരിയല്ലെങ്കിൽ p ശരിയല്ല' ($\sim q \Rightarrow \sim p$) എന്നതും.

ഗണിതത്തിൽ ധാരാളം p എങ്കിൽ q എന്ന പ്രസ്താവനകൾ അഥവാ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ തെളിയിക്കേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്. അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ അവയുടെ എതിർ അനുകൂലം തെളിയിച്ചാൽ മതിയാകും.

ഇതുപോലെ ചില സംയുക്ത പ്രസ്താവനകളുടെ നിഷേധം പരിശോധിച്ചാൽ അവ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് ശരിയാക്കുന്നതായി കാണാം.

$$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$$

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\sim q)$$

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge (\sim q)) \wedge (q \wedge (\sim p))$$

ഇതിൽ നിന്നും അല്ലെങ്കിൽ, ഉം, എങ്കിൽ, എങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം തുടങ്ങിയ സംയുക്ത പ്രസ്താവനകളുടെ നിഷേധം എഴുതുന്നതു മനസ്സിലാക്കാം.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 14.5

1. p: x ഒരു രേഖീയ സംഖ്യയും $x^3 + 4x = 0$ ആണെങ്കിൽ $x = 0$ ആയിരിക്കും. എന്ന പ്രസ്താവന ശരിയാണ് എന്നത്
   (i) നേർ രീതി (direct method)
   (ii) വൈരുധ്യരീതി (method of contradiction)
   (iii) എതിർ നിഷേധാനുകൂല രീതി (method of contrapositive) ഉപയോഗിച്ചു തെളിയിക്കുക.
2. 'a, b എന്നിവ രേഖീയസംഖ്യകളും $a^2 = b^2$ ഉം ആണെങ്കിൽ $a = b$ ആയിരിക്കും'. ഈ പ്രസ്താവന തെറ്റാണെന്ന് 'എതിർ ഉദാഹരണം' നൽകി തെളിയിക്കുക.
3. p: "x ഒരു പൂർണസംഖ്യയും x^2 ഇരട്ടസംഖ്യയും ആണെങ്കിൽ x ഇരട്ടസംഖ്യയായിരിക്കും" ഈ പ്രസ്താവന ശരിയാണെന്ന്
4. വിപരീത ഉദാഹരണങ്ങൾ നൽകി താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ തെറ്റാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
   (i) p: ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ കോണുകളും തുല്യമാണെങ്കിൽ, അത് ഒരു ബൃഹത് ത്രികോണമായിരിക്കും.
   (ii) q: $x^2 - 1 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് 0 ത്തിനും 2 നുമിടയിൽ പരിഹാരമൂല്യമില്ല
5. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളിൽ 'ശരിയേത്' 'തെറ്റേത്'? ഓരോന്നിനും മതിയായ കാരണം നൽകുക.
   (i) p: ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഓരോ ആരവും ഓരോ ഞാണാണ്.
   (ii) q: വൃത്തകേന്ദ്രം ഓരോ ഞാണിനെയും തുല്യമായി വിഭജിക്കുന്നു.
   (iii) r: ന്യൂന വക്രത്തിന്റെ (ellipse) ഒരു പ്രത്യേകരൂപമാണ് വൃത്തം.
   (iv) s: x ഉം y യും പൂർണസംഖ്യകളാണ്, കൂടാതെ $x > y$, എങ്കിൽ $-x < -y$ ആയിരിക്കും.
   (v) t : $\sqrt{11}$ ഒരു ഭിന്നകസംഖ്യയാണ്.

14.6 ഗണിത പ്രസ്താവനകളുടെ സാധുത പരിശോധിക്കുന്ന രീതികൾ

നിയമം 1 – p, q ഇവ രണ്ടു ഗണിത പ്രസ്താവനകളാണ് എന്നിരിക്കട്ടെ.

'p ഉം q' എന്ന പ്രസ്താവന ശരിയാണ് എന്നു തെളിയിക്കാൻ

ഘട്ടം : 1 p ശരിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഘട്ടം : 2 q ശരിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

നിയമം 2 – p യും q യും രണ്ട് ഗണിത പ്രസ്താവനകളാണ് എന്നിരിക്കട്ടെ.

'p അല്ലെങ്കിൽ q' എന്ന പ്രസ്താവന ശരിയാണ് എന്നു തെളിയിക്കാൻ തന്നിരിക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും രീതി ഉപയോഗിക്കാം.

രീതി : 1 – p തെറ്റാണെന്ന് സങ്കല്പിച്ച് q ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

രീതി : 2 – q തെറ്റാണെന്ന് സങ്കല്പിച്ച് p ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിയമം 3 – 'p എങ്കിൽ q' എന്ന പ്രസ്താവന തെളിയിക്കാൻ.

താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു രീതി മതിയാകും.

രീതി : 1 – p ശരിയാണെന്നു സങ്കല്പിച്ച് q ശരിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക. (Direct)

രീതി : 2 – q തെറ്റാണെന്ന് സങ്കല്പിച്ച് p തെറ്റാണെന്നു തെളിയിക്കുക. (Contrapositive method)

രീതി : 3 – p ശരിയും q തെറ്റുമാണെന്ന് സങ്കല്പിക്കുക. ശേഷം പരസ്പര വിരുദ്ധമായ (Contradiction) പ്രസ്താവനയിൽ എത്തിച്ചേരുക.

രീതി : 4 – യോജിച്ച ഉദാഹരണം നൽകി, പ്രസ്താവന ശരിയല്ല. എന്ന നിഗമനത്തിൽ എത്താം. എതിർ ഉദാഹരണ രീതി (Counter example)

നിയമം. 4 - "p എങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം q" എന്ന പ്രസ്താവന തെളിയിക്കാൻ 'p എങ്കിൽ q' എന്നും 'q എങ്കിൽ p' എന്നുമുള്ള രണ്ട് പ്രസ്താവനകളും തെളിയിക്കുക.

ഉദാഹരണം : 13

x, y എന്നിവ ഒറ്റ പൂർണ്ണ സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ xy ഒറ്റസംഖ്യയായിരിക്കും എന്ന പ്രസ്താവന

1) നേരിട്ടുള്ള രീതി (Direct)
2) എതിർ നിഷേധാനുകൂല രീതി (Contrapositive)
3) വൈരുദ്ധ്യരീതി (Contradiction)

ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

1) ഇവിടെ നിയമം 3 ലെ ഒന്നാമത്തെ രീതി ഉപയോഗിക്കാം (Direct).

ഇവിടെ p : x, y എന്നിവ ഒറ്റ പൂർണ്ണസംഖ്യകളാണ്. q : x,y ഒറ്റസംഖ്യാണ്.

p ശരിയാണെന്നു വിചാരിക്കുക.

അപ്പോൾ $x, y \in Z$. കൂടാതെ x, y എന്നിവ രണ്ടും ഒറ്റ സംഖ്യകളാണ്.

$x = 2m + 1$ കൂടാതെ $y = 2n + 1$ എന്ന് എഴുതാം. $m, n \in Z$

അതുകൊണ്ട് $xy = (2m + 1)(2n + 1)$

$\Rightarrow xy = 2(2mn + m + n) + 1$

$\Rightarrow xy =$ ഒറ്റസഖ്യയായിരിക്കാം.

$\therefore q$ ശരിയായിരിക്കും.

പ്രസ്താവന തെളിയിച്ചു കഴിഞ്ഞു.

2) ഇനി നിയമം 3 ലെ രണ്ടാമത്തെ രീതി ഉപയോഗിക്കാം. (Contrapositive)

q തെറ്റാണെന്ന് വിചാരിക്കുക.

xy എന്നത് ഒറ്റസംഖ്യയല്ല.

അതുകൊണ്ട് xy ഇരട്ടസംഖ്യയായിരിക്കും.

ഗുണനഫലം ഇരട്ടസംഖ്യയായതുകൊണ്ട് ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയെങ്കിലും ഇരട്ടസംഖ്യയായിരിക്കണം.

x ഇരട്ടസംഖ്യയായിരിക്കും അല്ലെങ്കിൽ y ഇരട്ടസംഖ്യയായിരിക്കും.

x ഒറ്റസംഖ്യയല്ല. അല്ലെങ്കിൽ y ഒറ്റസംഖ്യയല്ല.

അതുകൊണ്ട് p തെറ്റാണ് എന്ന് ലഭിക്കും

പ്രസ്താവന തെളിയിച്ചു കഴിഞ്ഞു.

3) നിയമം 3 ലെ മൂന്നാമത്തെ രീതി നോക്കാം.

p ശരിയും q തെറ്റും ആണ് എന്ന് വിചാരിക്കാം

x, y എന്നിവ രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യയാണ് പക്ഷേ xy ഒറ്റസംഖ്യയല്ല.

x, y എന്നിവ രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യകളായിരിക്കണം. കൂടാതെ xy ഒറ്റസംഖ്യയല്ല. ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം എല്ലായ്പ്പോഴും ഒറ്റ സംഖ്യയായിരിക്കാം. എന്നറിയാം. അതുകൊണ്ട് തന്നെ x, y ഒറ്റസംഖ്യയായിരിക്കാം. കൂടാതെ xy ഒറ്റസംഖ്യയല്ല.

ഇതു പരസ്പര വിരുദ്ധമാണ്.

അതുകൊണ്ടു നമ്മൾ ആദ്യം സങ്കല്പിച്ച പ്രസ്താവന തെറ്റാണ്.

പ്രസ്താവന തെളിയിച്ചു കഴിഞ്ഞു.

ഉദാഹരണം : 14

n^2 ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ n ഇരട്ടസംഖ്യയായിരിക്കും എന്ന പ്രസ്താവന തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ഈ പ്രസ്താവന നേരിട്ടുള്ള രീതിയിൽ (നിയമം 3 രീതി 1) തെളിയിക്കാൻ പ്രയാസമാണ്. അതുകൊണ്ടു നമുക്ക് എതിർ നിഷേധാനുകൂല പ്രസ്താവനാ രീതിയിൽ (നിയമം 3 രീതി 2) തെളിയിക്കാം.

p: n^2 ഇരട്ട സംഖ്യാണ്. q : n ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്.

q ശരിയല്ല എന്നു വിചാരിക്കുക.

അതുകൊണ്ട് n ഇരട്ട സംഖ്യയല്ല

n ഒറ്റസംഖ്യയായിരിക്കും.

$n = 2k + 1$

$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

$n^2 =$ ഒറ്റസംഖ്യയായിരിക്കും.

$n^2 =$ എന്നത് ഇരട്ടസംഖ്യയല്ല.

p ശരിയല്ല എന്ന് ലഭിക്കും.

പ്രസ്താവന തെളിയിച്ചു കഴിഞ്ഞു.

കുറിപ്പ്

ഇതേ രീതിയിൽ നമുക്ക് പ്രസ്താവന വിപുലീകരിച്ച് തെളിയിക്കാൻ സാധിക്കും. "n^2 എന്നത് k യുടെ ഗുണിതമാണെങ്കിൽ n ഉം k യുടെ ഗുണിതമായിരിക്കും".

ഉദാഹരണം : 15

പരസ്പര വിരുദ്ധ പ്രസ്താവനാരീതി ഉപയോഗിച്ച് "$\sqrt{7}$ അഭിന്നകമായിരിക്കും" എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ആദ്യമയി പ്രസ്താവന ശരിയല്ല എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക.

$\sqrt{7}$ അഭിന്നകമല്ല എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക.

അതുകൊണ്ട് $\sqrt{7}$ ഭിന്നകം ആയിരിക്കാം.

$\sqrt{7} = \dfrac{a}{b}$ എന്നെഴുതാം, a, b എന്നിവ പൊതു ഘടകം

1 മാത്രമായ പൂർണസംഖ്യകളാണ്- - - - - - - - - (1)

വർഗം കണ്ടാൽ $7 = \dfrac{a^2}{b^2}$

$a^2 = 7b^2$ - - - - - - - - - (2)

അതുകൊണ്ട് $a^2 = 7$ ന്റെ ഗുണിതമായിരിക്കും

അതുകൊണ്ട് $a = 7$ ന്റെ ഗുണിതമായിരിക്കും

$a = 7k$ എന്ന് എഴുതാം.

ഇത് (2) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$49k^2 = 7b^2$ എന്ന് ലഭിക്കും.

$b^2 = 7k^2$

$b^2 = 7$ ന്റെ ഗുണിതമായിരിക്കും

b, 7 ന്റെ ഗുണിതമായിരിക്കും $b = 7k'$

a, b എന്നിവയ്ക്ക് 7 പൊതുഘടകം ആണ്. ഇത് (1) ന് വിരുദ്ധമാണ്. അതുകൊണ്ട് നാം ആദ്യം സങ്കല്പിച്ച '$\sqrt{7}$ അഭിന്നകമല്ല' എന്ന പ്രസ്താവന ശരിയല്ല. അതുകൊണ്ട് $\sqrt{7}$ അഭിന്നകമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 16

"എല്ലാ അഭാജ്യസംഖ്യകളും ഒറ്റയാണ്". ഈ പ്രസ്താവന തെറ്റാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഇവിടെ നിയമം 3 ലെ രീതി 4 ഉപയോഗിക്കുക. 2 എന്ന സംഖ്യ പരിശോധിച്ചാൽ ആ സംഖ്യ അഭാജ്യമാണ് പക്ഷെ ഒറ്റസംഖ്യയല്ല എന്നു ലഭിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവന തെറ്റാണ്.

കുറിപ്പ്

ഗണിതത്തിൽ എതിർ ഉദാഹരണം നൽകി ഒരു പ്രസ്താവന തെറ്റാണ് എന്ന് തെളിയിക്കാം. പക്ഷെ പ്രസ്താവന ശരിയാകുന്ന ഉദാഹരണം നൽകി പ്രസ്താവന ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കാൻ പറ്റില്ല.

ഉദാഹരണം : 17

"n ഒറ്റ സംഖ്യയാണ് എങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം n^2 ഒറ്റ സംഖ്യയായിരിക്കും" ഈ പ്രസ്താവന തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

p : n ഒറ്റസംഖ്യയാണ്

q : n^2 ഒറ്റസംഖ്യയാണ്

ഇവിടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവന $p \Leftrightarrow q$ ആണ്. ഇതു തെളയിക്കാൻ നമ്മൾ $p \Rightarrow q$യും $q \Rightarrow p$ ഇവ രണ്ടും തെളിയിക്കേണ്ടതാണ്.

ആദ്യമായി $p \Rightarrow q$ തെളിയിക്കാം

n ഒറ്റ സംഖ്യയാണെങ്കിൽ n^2 ഒറ്റസംഖ്യയായിരിക്കും

n ഒറ്റ സംഖ്യയാണെന്നു വിചാരിക്കുക

$\Rightarrow n = 2k + 1$ എന്നാണല്ലോ

$\Rightarrow n^2 = 2\ (2k^2 + 2k)+1$

$n^2 =$ ഒറ്റസംഖ്യാണ്.

അതുകൊണ്ട് $p \Rightarrow q$ തെളിയിച്ചു.

ഇനി $q \Rightarrow p$ തെളിയിക്കാം

"n^2 ഒറ്റസംഖ്യയാണെങ്കിൽ n ഒറ്റസംഖ്യയായിരിക്കും".

ഈ പ്രസ്താവനയുടെ എതിർ അനുകൂല പ്രസ്താവന തെളിയിക്കുന്നതാണ് കൂടുതൽ ഉചിതം.

"n ഒറ്റസംഖ്യയല്ലെങ്കിൽ n^2 ഒറ്റസംഖ്യയല്ല".

n ഒറ്റസംഖ്യയല്ല എന്നു വിചാരിക്കുക

$n = 2k$ എന്നെഴുതാം.

$\Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2.(2k^2)$

$\therefore$ n^2 ഇരട്ടസംഖ്യ

അതായത്, n^2 ഒറ്റസംഖ്യയല്ല.

എതിർ അനുകൂലം തെളിയിച്ചല്ലോ. അതുകൊണ്ട് $q \Rightarrow p$ തെളിയിച്ചു.

അങ്ങനെ $q \Leftrightarrow p$

ഉദാഹരണം : 18

1. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സംയുക്ത പ്രസ്താവനയിൽ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന 'അല്ലെങ്കിൽ' 'ഉൾപ്പെടുന്ന അല്ലെങ്കിൽ' 'ഉൾപ്പെടാത്ത അല്ലെങ്കിൽ' എന്ന് കണ്ടെത്തുക. കൂടാതെ ലഘു പ്രസ്താവന എഴുതി സത്യമൂല്യം കാണുക.

   t : നിങ്ങൾ നനഞ്ഞിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ, നിങ്ങൾ മഴയിലോ പുഴയിലോ ആയിരിക്കും.

പരിഹാരം

ഇവിടെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന 'അല്ലെങ്കിൽ' 'ഉൾപ്പെടുന്നതല്ലെങ്കിൽ' ആണ്. ലഘു പ്രസ്താവനകൾ:

p : മഴയത്ത് നിങ്ങൾ നനയും

q : പുഴയിലാണെങ്കിൽ നിങ്ങൾ നനയും

ഇവിടെ p യും q യും ശരിയാണ് അതുകൊണ്ട് t ശരിയാണ്.

ഉദാഹരണം : 19

2. തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളുടെ നിഷേധം എഴുതുക.

   i. p : എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യകളായ x നും $x^2 > x$ ആയിരിക്കും.

   ii. q : $x^2 = 2$ ആയ x എന്ന ഒരു ഭിന്നകസംഖ്യയുണ്ട്.

   iii. r : എല്ലാ പക്ഷികൾക്കും ചിറകുകളുണ്ട്.

   iv. s : എല്ലാ വിദ്യാർത്ഥികളും പ്രാഥമികതലത്തിൽ ഗണിതശാസ്ത്രം പഠിക്കുന്നു.

പരിഹാരം

i. $\sim p : x^2 > x$ ആകാത്ത ഒരു രേഖീയ സംഖ്യ എങ്കിലും ഉണ്ടായിരിക്കും.

ii. $\sim q : x^2 = 2$ ശരിയാകുന്ന ഒരു ഭിന്നകസംഖ്യ x ഉണ്ടാവില്ല. (എല്ലാ ഭിന്നക സംഖ്യകൾ x നും $x^2 \neq 2$ ആണ്.)

iii. $\sim r$: ചിറകില്ലാത്ത ഒരു പക്ഷിയെങ്കിലും ഉണ്ട്.

iv. $\sim s$: പ്രാഥമികതലത്തിൽ ഗണിതശാസ്ത്രം പഠിക്കാത്ത ഒരു കുട്ടിയെങ്കിലും ഉണ്ട്.

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 20

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളുടെ നിഷേധം എഴുതുക.

i) 7 ഒറ്റസംഖ്യയും അഭാജ്യസംഖ്യയുമാണ്.

ii) 3 അല്ലെങ്കിൽ 4 ഇവ 8 ന്റെ ഘടകമാണ്.

iii) 12 നെ 6 കൊണ്ട് ഹരിക്കാമെങ്കിൽ 6 നെ 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കാം.

iv) $x^2 = 25$ എങ്കിൽ $x = \pm 5$ ആയിരിക്കും

പരിഹാരം

i) 7 ഒറ്റസംഖ്യയും അഭാജ്യസംഖ്യയുമല്ല.

ii) 3 8 ന്റെ ഘടകമല്ല കൂടാതെ 4 8 ന്റെ ഘടകമല്ല.

iii) 12 നെ 6 കൊണ്ട് ഹരിക്കാം. കൂടാതെ 6 നെ 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കാൻ സാധിക്കില്ല.

iv) $x^2 = 25$ കൂടാതെ $x \neq +5$ കൂടാതെ $x \neq -5$

ഉദാഹരണം : 21

x, y ഇവ പൂർണസംഖ്യകളാണ്. ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ x ഉം y യും ഒറ്റ സംഖ്യകളായിരിക്കും എന്നത് എതിർ നിഷേധാനുകൂല രീതി ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$p : xy$ ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യയാണ്

$q : x$ ഉം y യും ഒറ്റസംഖ്യകളാണ്.

$p \Rightarrow q$ എന്ന് തെളിയിക്കാൻ അതിന്റെ എതിർ നിഷേധാനുകൂല പ്രസ്താവനയായ $\sim q \Rightarrow \sim p$ തെളിയിച്ചാൽ മതി.

$\sim q : x, y$ ഇവയിൽ ഒന്നെങ്കിലും ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്.

x ഇരട്ട സംഖ്യയാണെന്ന് എടുത്താൽ

$x = 2n, n \in Z$

$xy = 2ny$ എന്നത് ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യയാണ്.

ഇത് $\sim p$ യാണ്.

അതായത് $\sim q \Rightarrow \sim p$

പ്രസാവന തെളിയിച്ചു കഴിഞ്ഞു.

ഉദാഹരണം : 22

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനയിൽ നിന്നും ആവശ്യമായതും പര്യാപ്തമായ തുമായ നിബന്ധനകൾ കണ്ടെത്തുക.

t : മണിക്കൂറിൽ 80 കിലോമീറ്ററിൽ കൂടുതൽ വേഗതയിൽ വാഹനമോടിച്ചാൽ നിങ്ങൾക്ക് പിഴ ലഭിക്കും.

പരിഹാരം

p : നിങ്ങൾ 80 കിലോമീറ്ററിൽ കൂടുതൽ വേഗതയിൽ വാഹനമോടിക്കുക.

q : നിങ്ങൾക്ക് പിഴ ലഭിക്കും

ഇവിടെ p പര്യാപ്തമായ നിബന്ധനയും q ആവശ്യമായ നിബന്ധനയുമാണ്.

കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളുടെ 'നിഷേധം' എഴുതുക.
   (i) p: എല്ലാ രേഖീയഅധിസംഖ്യകൾ x നും $x - 1$ അധിസംഖ്യയായിരിക്കും.
   (ii) q: എല്ലാ പൂച്ചകളും മാന്തും
   (iii) r: എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യകൾ x നും ഒന്നുകിൽ $x > 1$ അല്ലെങ്കിൽ $x < 1$ ആയിരിക്കും.
   (iv) ഒരു രേഖീയസംഖ്യ x എങ്ങനെയെന്നാൽ അത് $0 < x < 1$ ആണ്.
2. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളുടെ വിപരീതവും എതിർ അനുകൂലവും എഴുതുക.
   (i) p: ഒരു അധിസംഖ്യ അഭാജ്യസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ മാത്രമെ അതിന് ഒന്നും ആ സംഖ്യയും ഒഴികെ മറ്റ് ഘടകങ്ങൾ ഉണ്ടാകില്ല.
   (ii) q: വെയിലുള്ള ദിവസങ്ങളിലെല്ലാം ഞാൻ ബീച്ചിൽ പോകാറുണ്ട്.
   (iii) r: പുറത്ത് ചൂടുണ്ടെങ്കിൽ നിങ്ങൾക്ക് ദാഹം അനുഭവപ്പെടും.

3. തന്നിരിക്കുന്ന ഓരോ പ്രസ്താവനയെയും p എങ്കിൽ q എന്ന രീതിയിൽ മാറ്റി എഴുതുക.
   (i) p: സർവറിലേക്ക് ലോഗ് ഓൺ ചെയ്യാൻ പാസ്‌വേഡ് വേണം.
   (ii) q: ഗതാഗതക്കുരുക്കുള്ളപ്പോഴെല്ലാം മഴയാണ്.
   (iii) r: വരിസംഖ്യനൽകുകയാണെങ്കിൽ മാത്രമേ നിങ്ങൾക്ക് വെബ്സൈറ്റിൽ പ്രവേശിക്കാൻ കഴിയൂ.
4. തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനയെ "p എങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം q" എന്ന രീതിയിൽ മാറ്റി എഴുതുക.
   (i) p: നിങ്ങൾ ടെലിവിഷൻ കാണുകയാണെങ്കിൽ നിങ്ങളുടെ മനസ് ശാന്തമായിരിക്കും കൂടാതെ നിങ്ങളുടെ മനസ് ശാന്തമാണെങ്കിൽ നിങ്ങൾക്ക് ടെലിവിഷൻ കാണാം.
   (ii) q: A ഗ്രേഡ് ലഭിക്കാൻ നിങ്ങൾ പതിവായി എല്ലാ ഗൃഹപാഠവും ചെയ്യേണ്ടത് അനിവാര്യവും പര്യാപ്തവുമായ കാര്യമാണ് (necessary and sufficient)
   (iii) r: ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ അതൊരു ചതുരമായിരികും കൂടാതെ ഒരു ചതുർഭുജം ചതുരമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ എല്ലാ കോണളവും തുല്യമായിരിക്കും.
5. തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളെ "അല്ലെങ്കിൽ", ഉം/കൂടാതെ ഉപയോഗിച്ച് സംയുക്തപ്രസ്താവനയായി മാറ്റി എഴുതുക. സത്യമൂല്യം പരിശോധിക്കുക.

   p : *5* ന്റെ ഗുണിതമാണ് *25*.

   q : *8* ന്റെ ഗുണിതമാണ് *25*.
6. തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനയുടെ സാധുത പരിശോധിക്കുക (വൈരുദ്ധ്യരീതിയിൽ)
   (i) p: ഒരു ഭിന്നകത്തിന്റെയും അഭിന്നകത്തിന്റെയും തുക അഭിന്നകമായിരിക്കും.
   (ii) q: n ഒരു രേഖീയസംഖ്യയും $n > 3$, ആയാൽ $n^2 > 9$ ആയിരിക്കും.
7. അർഥവ്യത്യാസം വരാതെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനയെ 5 വ്യത്യസ്തരീതിയിൽ മാറ്റി എഴുതുക.

   p: ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ തുല്യങ്ങളാണെങ്കിൽ അത് ഒരു ബൃഹത് ത്രികോണമായിരിക്കും.

സംഗ്രഹം

- ഒരു പ്രസ്താവന എല്ലായിപ്പോഴും ശരിയാവുകയോ അല്ലെങ്കിൽ എല്ലായിപ്പോഴും തെറ്റാവുകയോ ചെയ്താൽ അത്തരം പ്രസ്താവനയെ ഗണിത പ്രസ്താവനയായി പരിഗണിക്കാം.

- ഒരു പ്രസ്താവനയുടെ നിഷേധം

– p: എന്നത് ഒരു പ്രസ്താവയായാൽ അതിന്റെ നിഷേധ പ്രസ്താവനയെ $\sim p$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

– സംയുക്ത പ്രസ്താവനകളും ലഘു പ്രസ്താവനകളും രണ്ടോ അതിൽ കൂടുതലോ ലഘുപ്രസ്താവനകളെ ഉപയോഗിച്ച് നിർമ്മിച്ചിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനയാണ് സംയുക്ത പ്രസ്താന.

– സംയുക്ത പ്രസ്താവനയിൽ 'അല്ലെങ്കിൽ', ഉം, "There exists", "For every" തുടങ്ങിയവയുടെ പ്രാധാന്യം.

– എങ്കിൽ, എങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം തുടങ്ങിയവയുടെ പ്രാധാന്യം

p എങ്കിൽ q എന്ന പ്രസ്താവനയെ പലരീതികളിലും എഴുതാം.

– q വിന് പര്യാപ്തമായ നിബന്ധനയാണ് p

– p യ്ക്ക് അനിവാര്യമായ നിബന്ധനയാണ് q

– q എങ്കിൽ മാത്രം p

– q എപ്പോഴെല്ലാം അപ്പോൾ p

– നിഷേധം q നിഷേധം p യിലേക്ക് നയിക്കുന്നു.

– p എങ്കിൽ q എന്നതിന്റെ എതിർ നിഷേധാനുകൂലം $\sim q$ എങ്കിൽ $\sim p$.

p എങ്കിൽ q എന്നതിന്റെ വിപരീതം q എങ്കിൽ p.

- ഒരു പ്രസ്താവനയുടെ സാധ്യതയെ തെളിയിക്കാൻ താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും രീതി ഉപയോഗിക്കാം.

  (i) നേർ രീതി

  (ii) എതിർ നിഷേധാനുകൂല രീതി

  (iii) വൈരുദ്ധ്യ രീതി

  (iv) മറിച്ചുള്ള ഉദാഹരണ രീതി

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

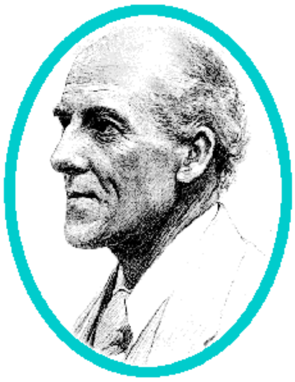
ഗണിതയുക്തിയെക്കുറിച്ച് ആദ്യമായി വ്യക്തമായ പഠനം നടത്തിയത് അരിസ്റ്റോട്ടിൽ (B.C.384 -322) ആണ്. നിഗമനരീതിയിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില നിയമങ്ങളെക്കുറിച്ചായിരുന്നു അതിൽ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ളത്. പിന്നീട് 17-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ലിബ്നിറ്റ്സ് എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനാണ് നിഗമനരീതിയിൽ ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുത്തി പഠനം നടത്തിയത്. അദ്ദേഹത്തിന്റെ ആശയങ്ങൾക്ക് കൂടുതൽ വെളിച്ചം പകർന്നത് 19-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ പ്രഗൽഭരായ ഇംഗ്ലീഷ് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരായ ജോർജ് ബുൾ (1815 - 1864), അഗസ്തസ് ഡി മോർഗൻ (1806 - 1871) ഇവർ ചേർന്നാണ്.

അധ്യായം 15

സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക് (STATISTICS)

❖ *ശരാശരികളുടെയും അവയുടെ മതിപ്പുകളുടെയും ശാസ്ത്രമാണ് സാംഖ്യകമെന്ന് പറയുന്നത് ഉചിതമാണ് –എ.എൽ. ബൗലി, എ.എൽ ബോസിംഗ്ടൺ* ❖

15.1. ആമുഖം



കാൾപീയേഴ്സൺ
(1857-1936)

ഒരു പ്രത്യേക ആവശ്യത്തിന് സ്വരൂപിക്കുന്ന ദത്തങ്ങളുടെ വിശകലനവും വ്യാഖ്യാനവും ആണ് സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക് എന്ന പാഠഭാഗത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. ഒരു കൂട്ടം ദത്തങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള അളവുകളായ മാധ്യം, മധ്യമം, മഹിതം എന്നിവ മുൻക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഒരു ഉദാഹരണം പരിഗണിക്കാം.

രണ്ടു ബാറ്റ്സ്മാൻമാരുടെ കഴിഞ്ഞ 10 ഇന്നിങ്സിലെ സ്കോറുകൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ബാറ്റ്സ്മാൻ A :30, 91, 0, 64, 42, 80, 30, 5, 117, 71

ബാറ്റ്സ്മാൻ B :53, 46, 48, 50, 53, 53, 58, 60, 57, 52

ഇവരുടെ ശരാശരി സ്കോർ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് മുൻ ക്ലാസുകളിൽ പഠിച്ച മാധ്യവും മധ്യമവും ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് സംഖ്യകളുടെ തുകയെ അവയുടെ എണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്.

അതായത്, മാധ്യം $(\bar{x}) = \dfrac{\text{ദത്തങ്ങളുടെ തുക}}{\text{ദത്തങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$

അല്ലെങ്കിൽ $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

ബാറ്റ്സ്മാൻ A യുടെ മാധ്യം $= \dfrac{30+91+0+64+42+80+30+5+117+71}{10} = 53$

ബാറ്റ്സ്മാൻ B യുടെ മാധ്യം $= \dfrac{53+46+48+50+53+53+58+60+57+52}{10} = 53$

അതുപോലെ മധ്യമം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ദത്തങ്ങളെ വലുപ്പക്രമത്തിലെഴുതി മധ്യസ്ഥാനത്ത് വരുന്ന സംഖ്യ കാണുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്. ദത്തങ്ങളുടെ എണ്ണം ഇരട്ട

സംഖ്യയാണെങ്കിൽ മധ്യത്തിൽ രണ്ടു സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകുമല്ലോ. അങ്ങനെയെ ങ്കിൽ മധ്യമം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് അവയുടെ തുകയുടെ പകുതി കണ്ടാൽ മതി.
ബാറ്റ്സ്മാൻ A : 0, 5, 30, 30, 42, 64, 71, 80, 91, 117

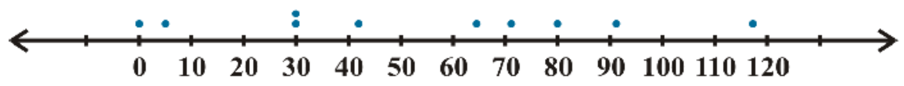
ബാറ്റ്സ്മാൻ A യുടെ മധ്യമം $= \dfrac{42+64}{2} = \dfrac{106}{2} = 53$

ബാറ്റ്സ്മാൻ B : 46, 48, 50, 52, 53, 53, 53, 57, 58, 60

ബാറ്റ്സ്മാൻ B യുടെ മധ്യമം $= \dfrac{53+53}{2} = \dfrac{106}{2} = 53$

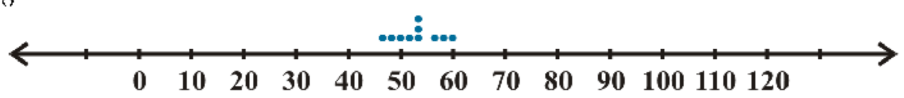
ഇവരുടെ സ്കോർ സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കാം.

ബാറ്റ്സ്മാൻ A



ചിത്രം 15.1

ബാറ്റ്സ്മാൻ B



ചിത്രം 15.2

മാധ്യം, മധ്യമം എന്നീ സംഖ്യകൾ ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളുടെ പൊതുസ്വഭാവം പ്രദർശി പ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളാണ്. ഇവയെ ശരാശരി (Average) അല്ലെങ്കിൽ കേന്ദ്രപ്രവ ണതാ മാനം (measure of central tendency) എന്നു വിളിക്കുന്നു.

ഇവിടെ രണ്ടു ബാറ്റ്സ്മാൻമാരുടെയും മാധ്യങ്ങളും മധ്യമങ്ങളും തുല്യമാണ് എന്നു കണ്ടുകഴിഞ്ഞു. എന്നാൽ രണ്ടുപേരും ഒരേ നിലവാരം പുലർത്തുന്നവരാണ് എന്നു പറയാൻ കഴിയുമോ? ഇവരുടെ പ്രകടനം (നിലവാരം) വിലയിരുത്തുന്നതിന് ശരാ ശരി മാത്രം മതിയോ?

ഒറ്റ നോട്ടത്തിൽ തന്നെ A എന്ന ബാറ്റ്സ്മാന്റെ സ്കോറുകൾ തമ്മിൽ വലിയ അന്തരം ഉണ്ടെന്നും B എന്ന ബാറ്റ്സ്മാന്റെ സ്കോറുകൾ തമ്മിൽ അന്തരം കുറവാ ണെന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

അതായത് ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളെപ്പറ്റിയുള്ള പൂർണമായ വിവരങ്ങൾ നൽകുവാൻ മാധ്യം, മധ്യമം എന്നിവ പോലുള്ള ശരാശരികൾ പര്യാപ്തമല്ല എന്നു മനസ്സിലാ ക്കാം. തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ ശരാശരി കണ്ടുപിടിക്കുന്നതുപോലെ അവ തമ്മിലുള്ള വ്യതിയാനത്തെപ്പറ്റിയും അറിയേണ്ടത് അത്യാവശ്യമാണ്.

15.2 വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവുകൾ (Measures of dispersion)

ഒരു കൂട്ടം ദത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രപ്രവണതാ അളവുകളിൽ നിന്നും സംഖ്യകൾ എത്ര അകലത്തിലാണ് എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്ന അളവുകോലാണ് വ്യതിയാന അളവുകൾ. കേന്ദ്രപ്രവണതാ അളവുകൾ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യയാണെന്ന് നമുക്കറിയാം. അതു പോലെ സംഖ്യകളുടെ വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവും ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യയാണ്.
ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളുടെ വ്യതിയാനം ആ സംഖ്യകളെയും അവയുടെ വിവിധ തരത്തിലുള്ള ശരാശരികളെയും (മാധ്യം, മധ്യമം) അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയാണ് കണക്കാക്കുന്നത്.
വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവുകൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

(i) പരിധി (Range)
(ii) ചതുർത്ഥാംശ വ്യതിയാനം (Quartile deviation)
(iii) മാധ്യ വ്യതിയാനം (Mean deviation)
(iv) മാനക വ്യതിയാനം (Standard deviation)

ചതുർത്ഥാംശ വ്യതിയാനം ഒഴികെയുള്ള വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവുകളെപ്പറ്റിയാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.

15.3 പരിധി (Range)

തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവ് മനസിലാക്കുന്നതിനുള്ള ഏറ്റവും ലളിതമായ അളവാണ് പരിധി.
ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളിൽ ഏറ്റവും വലുതിൽ നിന്നും ഏറ്റവും ചെറുത് കുറയ്ക്കുമ്പോൾ പരിധി ലഭിക്കുന്നു.
ഉദാഹരണത്തിന്, ബാറ്റ്സ്മാൻ Aയുടെ പരിധി = 117 – 0 = 117 ആണെന്ന് പറയാം
ബാറ്റ്സ്മാൻ B യുടെ പരിധി = 60 – 46 = 14 ആണ്.
അതായത് പരിധി = ഏറ്റവും വലിയ വില - ഏറ്റവും ചെറിയ വില
ഇനി ഒരു ഉദാഹരണം കൂടി പരിശോധിക്കാം.
100, 43, 41, 45, 48, 44, 2 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ പരിധി എന്താണ്?
പരിധി = 100 – 2 = 98 ആണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.
ഇവിടെ രണ്ടു സംഖ്യകൾ (100, 2) ഒഴികെ മറ്റെല്ലാ സംഖ്യകളും കൂടുതൽ വ്യതിയാനമുള്ള സംഖ്യകളല്ല. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ പരിധി ശരിയായ വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവായി പരിഗണിക്കാൻ സാധിക്കുകയില്ല. അതിനാൽ കുറച്ചു കൂടി മെച്ചപ്പെട്ട വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവുകൾ കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്. അതിനുവേണ്ടി സംഖ്യകളുടെ കേന്ദ്രപ്രവണതയിൽ നിന്നുള്ള വ്യത്യാസങ്ങളുടെ അളവായി വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവുകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയും. അത്തരത്തിലുള്ള വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവുകളാണ് മാധ്യവ്യതിയാനം, മാനക വ്യതിയാനം എന്നിവ.

15.4 മാധ്യ വ്യതിയാനം (Mean Deviation)

കൂടുതൽ ഉചിതമായ വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവു കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനായി ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളുടെ കേന്ദ്രപ്രവണതാ അളവിൽ നിന്നും മറ്റ് സംഖ്യകൾ ശരാശരി

എത്ര അകലത്തിലാണ് എന്ന് കണക്കാക്കുന്നത് നന്നാവും. ഉദാഹരണത്തിന് 2, 4, 6, 8, 10 എന്നീ സംഖ്യകൾ പരിഗണിക്കുക. ഇവയുടെ മാധ്യം 6 ആണ്.
സംഖ്യകളും മാധ്യവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസങ്ങൾ 2-6, 4-6, 6-6, 8-6, 10-6 അതായത് , 4, 2, 0, 2, 4 ഇവ ആയിരിക്കും
ഈ വ്യത്യാസങ്ങളുടെ ശരാശരി, വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവായി പരിഗണിച്ചാൽ,

$$\text{വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ശരാശരി} = \frac{\text{വ്യതിയാനങ്ങളുടെ തുക}}{\text{വ്യതിയാനങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{0}{5} = 0$$

എന്നു ലഭിക്കും.
കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിശോധിച്ചാലും വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ശരാശരി 0 ആണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.
അതിനാൽ വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് മറ്റു മാർഗ്ഗങ്ങൾ തേടാം. സംഖ്യാരേഖയിൽ രണ്ടു സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണുന്നതിന് അവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന്റെ കേവലവില കാണണമെന്ന് നമുക്കറിയാം. അതായത് വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവു കാണുന്നതിന് സംഖ്യകൾക്ക് കേന്ദ്രപ്രവണതയുമായുള്ള വ്യത്യാസങ്ങൾ കാണുക. തുടർന്ന് അവയുടെ കേവലവിലകളുടെ ശരാശരി കാണുക. ഇത്തരം വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവിനെ മാധ്യവ്യതിയാനം എന്നു പറയാം. 'a' എന്ന കേന്ദ്രപ്രവണതയിൽ നിന്നുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനത്തെ MD(a) എന്ന് ചുരുക്കി എഴുതിയാൽ,

$$\text{MD}(a) = \frac{a \text{ യിൽ നിന്നുള്ള വ്യത്യാസങ്ങളുടെ കേവലവിലകളുടെ തുക}}{\text{സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}}$$

പ്രധാനമായും മാധ്യം അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനവും മധ്യമം അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനവുമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

15.4.1 തരംതിരിക്കാത്ത ദത്തങ്ങളുടെ മാധ്യവ്യതിയാനം (Mean Deviation for Ungrouped Data)

x_1 , x_2 , ...x_n എന്നീ n സംഖ്യകളുടെ മാധ്യവ്യതിയാനം കാണുന്നതെങ്ങനെയാണെന്നു നോക്കാം.

ഘട്ടം 1 : മാധ്യവ്യതിയാനം കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് ഏത് മധ്യപ്രവണതയെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണോ അത് കാണുക.

ഘട്ടം 2 : കണ്ടുപിടിച്ച മധ്യപ്രവണത 'a' ആണെങ്കിൽ എല്ലാ സംഖ്യകളിൽ നിന്നും 'a' കുറയ്ക്കുക. അതായത് $x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, \ldots, x_n - a$ ഇവ കാണുക.

ഘട്ടം 3 : വ്യത്യാസങ്ങളുടെ കേവലവിലകൾ കാണുക.

അതായത്, $|x_1 - a|, |x_2 - a|, |x_3 - a|, \ldots, |x_n - a|$ എന്നിവ കാണുക.

ഘട്ടം 4 : വ്യത്യാസങ്ങളുടെ കേവലവിലകളുടെ ശരാശരി കാണുക. ഇതാണ് 'a' എന്ന കേന്ദ്രപ്രവണതയെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം

അതായത്, $$\mathrm{M.D}(a) = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - a|}{n}$$

അതുകൊണ്ട് , $\mathrm{M.D}\ (\ \bar{x}\ ) = \frac{1}{n}\ \sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$, $\bar{x}$ = മാധ്യം

$$\mathrm{M.D\ (M)} = \frac{1}{n}\ \sum_{i=1}^{n}|x_i - \mathrm{M}|;\ \mathrm{M} = \text{മധ്യമം}$$

ഇനി ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിശോധിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 1

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ദത്തങ്ങളുടെ മാധ്യത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യ വ്യതിയാനം കണ്ടുപിടിക്കുക.

6,7,10,12,13,4,8,12

പരിഹാരം

ഘട്ടം 1 : തന്നിരിക്കുന്ന ദത്തങ്ങളുടെ മാധ്യം

$$\bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = \frac{72}{8} = 9$$

ഘട്ടം 2 : സംഖ്യകളിൽ നിന്ന് മാധ്യം കുറയ്ക്കുന്നു ($x_i - \bar{x}$ കാണുന്നു)

$$6-9,\ 7-9,\ 10-9,\ 12-9,\ 13-9,\ 4-9,\ 8-9,\ 12-9,$$

അതായത് $-3, -2, 1, 3, 4, -5, -1, 3$

ഘട്ടം 3 : വ്യത്യാസങ്ങളുടെ കേവലവിലകൾ കാണുന്നു ($|x_i - \bar{x}|$ കാണുന്നു)

$$3, 2, 1, 3, 4, 5, 1, 3$$

ഘട്ടം 4 : കേവലവിലകളുടെ ശരാശരി കാണുന്നു.

മാധ്യത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം

$$\text{M.D}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{8}|x_i - \bar{x}|}{n}$$

$$= \frac{3+2+1+3+4+5+1+3}{8} = \frac{22}{8} = 2.75$$

ഇനി ഘട്ടങ്ങൾ ഒഴിവാക്കി ഉദാഹരണങ്ങൾ ചെയ്തു നോക്കാം.

ഉദാഹരണം : 2

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ മാധ്യത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യ വ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുക.

12, 3, 18, 17, 4, 9, 17, 19, 20, 15, 8, 17, 2, 3, 16, 11, 3, 1, 0, 5

പരിഹാരം

മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{200}{20} = 10$$

സംഖ്യകളിൽ നിന്നുള്ള മാധ്യത്തിന്റെ വ്യത്യാസങ്ങളുടെ കേവലവിലകൾ ($|x_i - \bar{x}|$)
2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5, 2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5 എന്നിവയാണ്

അതുകൊണ്ട് $\sum_{i=1}^{20}|x_i - \bar{x}| = 124$

$$\text{M.D.}\ (\bar{x}) = \frac{124}{20} = 6.2$$

ഉദാഹരണം : 3

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ മധ്യമത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യ വ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുക.

3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21

പരിഹാരം

മധ്യമം കണ്ടു പിടിക്കുന്നതിനായി സംഖ്യകളെ ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതുക.

3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 18, 19, 21

ഇവയിൽ മധ്യത്തുള്ള സംഖ്യയായ 9 ആണ് മധ്യമം. മധ്യമത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യത്യാസങ്ങളുടെ കേവലവിലകൾ $(|x_i - \text{M}|)$ 6, 6, 5, 4, 2, 0, 1, 3, 9, 10, 12 എന്നിവയാണ്.

അതുകൊണ്ട്

$$\sum_{i=1}^{11} |x_i - M| = 58$$

$$M.D.(M) = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} |x_i - M| = \frac{1}{11} \times 58 = 5.27$$

15.4.2 തരംതിരിച്ച സംഖ്യകളുടെ മാധ്യവ്യതിയാനം (Mean Deviation for Grouped Data)

തരംതിരിച്ച ദത്തങ്ങൾ രണ്ടു തരത്തിലുണ്ട്.

(a) വിവിക്ത ആവൃത്തിപ്പട്ടിക (Discrete frequency distribution)

(b) തുടർച്ചയുള്ള ആവൃത്തിപ്പട്ടിക (Continuous frequency distribution)

ഈ രണ്ടു വിധത്തിലുള്ള ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിലും മാധ്യവ്യതിയാനം കാണുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

(a) വിവിക്ത ആവൃത്തിപ്പട്ടിക (Discrete Frequency Distribution)

ഇത്തരം ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിൽ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്നിങ്ങനെ 'n' വ്യത്യസ്തവിലകളും അവയുടെ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ മുതലായ ആവൃത്തികളും ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇത് ചുവടെ പറയുന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം.

$$\begin{array}{llll} x: x_1 & x_2 & x_3 \ldots x_n \\ f: f_1 & f_2 & f_3 \ldots f_n \end{array}$$

(i) മാധ്യത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം

തന്നിരിക്കുന്ന ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിലെ സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം കാണുക. മാധ്യം കാണുന്ന രീതി മുൻ ക്ലാസുകളിൽ നാം പഠിച്ചിട്ടുള്ളതാണല്ലോ.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i,$$

ഇവിടെ, $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ സംഖ്യകളുടെയും അവയുടെ ആവൃത്തികളുടെയും ഗുണനഫലങ്ങളുടെ തുകയാണ്. $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ ആവൃത്തികളുടെ തുകയാണ്.

മാധ്യം കണ്ടുപിടിച്ചശേഷം സംഖ്യകളെ മാധ്യത്തിൽ നിന്ന് കുറയ്ക്കുകയും അവയുടെ കേവലവിലകൾ കാണുകയും ചെയ്യുക. $|x_i - \bar{x}|$ $i = 1, 2, \ldots, n$ തുടർന്ന് കേവലവിലകളുടെ ശരാശരി കാണുക.

അതായത്, $\text{M.D.}(\bar{x}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|$

(ii) മധ്യമത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം

മധ്യമത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി മാധ്യവ്യതിയാനം കാണുന്നതിന് ആദ്യമായി മധ്യമം കണ്ടുപിടിക്കണം. സംഖ്യകളെ ആരോഹണ ക്രമത്തിലാക്കി ആവൃത്തിപ്പട്ടിക എഴുതുകയും തുടർന്ന് അവയുടെ സഞ്ചിതാവൃത്തി (cumulative frequency) കാണുകയുമാണ് ആദ്യം ചെയ്യുന്നത്. തുടർന്ന് ആവൃത്തികളുടെ തുകയുടെ പകുതിയോ അതിനു മുകളിലോ വരുന്ന സഞ്ചിതാവൃത്തി കാണുക. അതിനു നേരെയുള്ള സംഖ്യയാണ് (M) മധ്യമം

തുടർന്ന്, $\text{M.D.}(M) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|$ എന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് മാധ്യവ്യതിയാനം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 4

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ആവൃത്തിപ്പട്ടികയുടെ മാധ്യത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുക.

x_i	2	5	6	8	10	12
f_i	2	8	10	7	8	5

പരിഹാരം

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക 15.1 നെ അടിസ്ഥാനമാക്കി മാധ്യ വ്യതിയാനം കണ്ടെത്താം.

പട്ടിക 15.1

x_i	f_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert$
2	2	4	5.5	11
5	8	40	2.5	20
6	10	60	1.5	15
8	7	56	0.5	3.5
10	8	80	2.5	20
12	5	60	4.5	22.5
	40	300		92

$$\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{6} f_i = 40\,, \quad \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = 300\,, \quad \sum_{i=1}^{6} f_i |x_i - \bar{x}| = 92$$

അതുകൊണ്ട് $\bar{x} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = \frac{1}{40} \times 300 = 7.5$

മാധ്യവ്യതിയാനം $(\bar{x}) = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{6} f_i \; |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{40} \times 92 = 2.3$

ഉദാഹരണം : 5

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ആവൃത്തിപ്പട്ടികയുടെ മധ്യമത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുക.

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ ആരോഹണ ക്രമത്തിലായതിനാൽ സഞ്ചിതാവൃത്തികൾ (cumulative frequency) കാണാവുന്നതാണ്. (പട്ടിക 15.2)

പട്ടിക 15.2

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$c.f.$	3	7	12	14	18	23	27	30

15, 16 നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ ശരാശരിയാണ് മധ്യമം. രണ്ടു നിരീക്ഷണങ്ങളും സഞ്ചിതാവൃത്തി 18 ലാണ്. ഇതിന് 13 ആകുന്നു.
അതുകൊണ്ട് മധ്യമം

$$M = \frac{15 \text{ ാമത്തെ നിരീക്ഷണം} + 16 \text{ ാമത്തെ നിരീക്ഷണം}}{2} = \frac{13+13}{2} = 13$$

മധ്യമത്തിൽ നിന്നുള്ള കേവലവില $|x_i - \mathrm{M}|$ പട്ടിക 15.3 ൽ നല്കിയിരിക്കുന്നു.

പട്ടിക 15.3

$\|x_i - \mathrm{M}\|$	10	7	4	1	0	2	8	9
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$f_i\|x_i - \mathrm{M}\|$	30	28	20	2	0	10	32	27

$$\sum_{i=1}^{8} f_i = 30, \quad \sum_{i=1}^{8} f_i \left|x_i - \mathrm{M}\right| = 149$$

അതുകൊണ്ട് മാധ്യമവ്യതിയാനം $\mathrm{M.D.(M)} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{8} f_i \left|x_i - \mathrm{M}\right|$

$$= \frac{1}{30} \times 149 = 4.97$$

(b) തുടർച്ചയുള്ള ആവൃത്തിപട്ടിക (Continuous Frequency Distribution)

(i) മാധ്യം അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം

ഒരു തുടർച്ചയുള്ള ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിൽ ഓരോ ക്ലാസിന്റെയും പ്രാതിനിധ്യ സ്വഭാവമുള്ള സംഖ്യയായി അതിന്റെ മധ്യബിന്ദു (മധ്യാങ്കം)വിനെ തെരഞ്ഞെടുത്തുകൊണ്ടാണ് മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്. അതുപോലെ ഓരോ ക്ലാസിന്റെയും മധ്യാങ്കം എഴുതി വിവിക്ത ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിൽ ചെയ്യുന്നതുപോലെ മാധ്യവ്യതിയാനം കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം : 6

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിൽ മാധ്യം അടിസറാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുക.

മാർക്ക്	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	2	3	8	14	8	3	2

പരിഹാരം

പട്ടിക 15.4 തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് രൂപീകരിക്കാം.

പട്ടിക 15.4

മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	മധ്യാങ്കങ്ങൾ	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
	f_i	x_i			
10-20	2	15	30	30	60
20-30	3	25	75	20	60
30-40	8	35	280	10	80
40-50	14	45	630	0	0
50-60	8	55	440	10	80
60-70	3	65	195	20	60
70-80	2	75	150	30	60
	40		1800		400

$$\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{7} f_i = 40, \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 1800, \sum_{i=1}^{7} f_i |x_i - \bar{x}| = 400$$

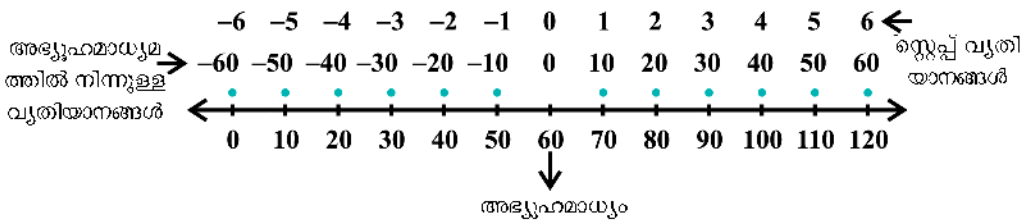
അതുകൊണ്ട് $\bar{x} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{1800}{40} = 45$

$$\therefore \quad \mathrm{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{7} f_i |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{40} \times 400 = 10$$

മാധ്യം അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം കാണുന്നതിനുള്ള എളുപ്പ വഴി

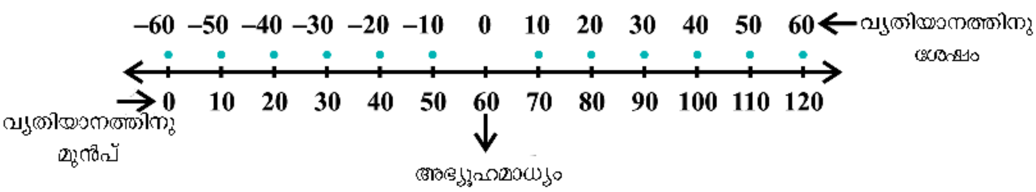
മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള കണക്കുകൂട്ടലുകൾ സാധാരണയായി അല്പം പ്രയാസമാണ്. ഒരു എളുപ്പവഴിയിലൂടെ കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയും. അതിനായി പട്ടികയിലെ ഏകദേശം മധ്യഭാഗത്തായി വരുന്ന ഒരു മധ്യാങ്കം (അഭ്യൂഹമാധ്യം) തെരഞ്ഞെടുക്കുക. അതിനുശേഷം മധ്യാങ്കങ്ങളെ അഭ്യൂഹമാധ്യത്തിൽ നിന്നും കുറച്ചെഴുതുക.

ഇത് സംഖ്യാരേഖയിൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ സൂചിപ്പിക്കാം. (ചിത്രം 15.3)



ചിത്രം 15.3

ഈ വ്യത്യാസങ്ങൾക്ക് പൊതുഘടകം ഉണ്ടെങ്കിൽ ആ പൊതുഘടകം കൊണ്ട് വ്യത്യാസങ്ങളെ ഹരിക്കുക. ഇവയെ സ്റ്റെപ്പ് വ്യതിയാനങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കാം. സ്റ്റെപ്പ് വ്യതിയാനങ്ങൾ ചിത്രം 15.4 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 15.4

വ്യതിയാനങ്ങളും സ്റ്റെപ്പ് വ്യതിയാനങ്ങളും ഉപയോഗിച്ച് കൂടുതൽ എളുപ്പത്തിൽ മാധ്യം കണ്ടെത്താനാകും. ഇവിടെ മധ്യാങ്കങ്ങൾക്ക് (x_i) പകരം സ്റ്റെപ്പ് വ്യതിയാനങ്ങൾ $\left(d_i = \frac{x_i - a}{h}\right)$ ആണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. 'a' അഭ്യൂഹമാധ്യവും 'h' പൊതുഘടകവും ആണ്.

സ്റ്റെപ്പ് വ്യതിയാനരീതിയിലൂടെ മാധ്യം കണക്കാക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \, d_i}{\text{N}} \times h$$

ഉദാഹരണം 6- ൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന ചോദ്യം സ്റ്റെപ്പ് വ്യതിയാനരീതി ഉപയോഗിച്ച് ചെയ്യുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

അഭ്യൂഹമാധ്യമായി 45 (a = 45), പൊതുഘടകമായി 10 (h = 10) എന്നിവ എടുക്കാം. പട്ടിക 15.5 നോക്കുക.

പട്ടിക 15.5

കിട്ടിയ മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	മധ്യാങ്കങ്ങൾ	$d_i = \frac{x_i - 45}{10}$	$f_i d_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert$
	f_i	x_i				
10-20	2	15	– 3	– 6	30	60
20-30	3	25	– 2	– 6	20	60
30-40	8	35	– 1	– 8	10	80
40-50	14	45	0	0	0	0
50-60	8	55	1	8	10	80
60-70	3	65	2	6	20	60
70-80	2	75	3	6	30	60
	40			0		400

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i \, d_i}{\text{N}} \times h$$

$$= 45 + \frac{0}{40} \times 10 = 45$$

$$\text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{1}{\text{N}} \sum_{i=1}^{7} f_i \left| x_i - \bar{x} \right| = \frac{400}{40} = 10$$

(ii) മധ്യമം അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം

തുടർച്ചയുള്ള ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിൽ മാധ്യം അടിസ്ഥാനമാക്കി കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിൽ മാധ്യത്തിനു പകരം മധ്യമം കണ്ടുപിടിക്കണം എന്നതു മാത്രമാണ് വ്യത്യാസം. ക്ലാസുകളെ ആരോഹണക്രമത്തിലാക്കിയതിനുശേഷം മധ്യമം ഉൾപ്പെടുന്ന ക്ലാസ് കണ്ടുപിടിക്കണം. തുടർന്ന് ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് മധ്യമം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$\text{മധ്യമം} = l + \frac{\frac{\text{N}}{2} - \text{C}}{f} \times h$$

ഇവിടെ l മധ്യമം ഉൾപ്പെടുന്ന ക്ലാസിന്റെ നീചപരിധി (lower limit) ആണ്. f മധ്യമം ഉൾപ്പെടുന്ന ക്ലാസിന്റെ ആവൃത്തിയും, h ക്ലാസ് അന്തരവും, C മധ്യമം ഉൾപ്പെടുന്ന ക്ലാസിന് തൊട്ടുമുകളിലെ ക്ലാസിന്റെ സഞ്ചിതാവൃത്തിയാണ്. N എന്നത് ആവൃത്തികളുടെ തുകയാണ്.

മധ്യമം കണ്ടുപിടിച്ചശേഷം ഓരോ മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നും മധ്യമം കുറയ്ക്കുകയും തുടർന്ന് അവയുടെ കേവലവിലകൾ $|x_i - \text{M}|$ കാണുകയും ചെയ്യുന്നു. ഈ കേവല വിലകളുടെ ശരാശരിയാണ് മാധ്യവ്യതിയാനം.

അതായത് $\text{M.D. (M)} = \dfrac{1}{\text{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i \left| x_i - \text{M} \right|$

ഉദാഹരണം : 7

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ആവൃത്തിപ്പട്ടികയുടെ മധ്യമത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുക.

ക്ലാസ്	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ആവൃത്തി	6	7	15	16	4	2

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പട്ടിക 15.6 പൂർത്തിയാക്കാം.

പട്ടിക 15.6

ക്ലാസ്	ആവൃത്തി	സഞ്ചിതാവൃത്തി	മധ്യാങ്കങ്ങൾ	$\lvert x_i - M \rvert$	$f_i \lvert x_i - M \rvert$
	f_i	$(c.f.)$	x_i		
0-10	6	6	5	23	138
10-20	7	13	15	13	91
20-30	15	28	25	3	45
30-40	16	44	35	7	112
40-50	4	48	45	17	68
50-60	2	50	55	27	54
	50				508

$$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$\therefore$ 25 -ാമത്തെ സംഖ്യ ഉൾപ്പെടുന്ന ക്ലാസ് ആണ് മധ്യമം ഉൾപ്പെടുന്ന ക്ലാസ്. അതായത് 20-30 ആണ് മധ്യമം ഉൾപ്പെടുന്ന ക്ലാസ്

$$\therefore \text{ മധ്യമം, } M = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

ഇവിടെ $l = 20$, $C = 13$, $f = 15$, $h = 10$, $N = 50$ ആണ്.

അതുകൊണ്ട്, മധ്യമം $= 20 + \frac{25 - 13}{15} \times 10 = 20 + 8 = 28$

$\therefore$ മധ്യമം അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം

$$M.D\ (M) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{6} f_i \lvert x_i - M \rvert = \frac{1}{50} \times 508 = 10.16$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 15.1

1, 2 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് മാധ്യം അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുക.

1. 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17
2. 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44

3, 4 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് മധ്യമം അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുക.

3. 13, 17, 16, 14, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17
4. 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49

5, 6 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് മാധ്യം അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുക.

5.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	7	4	6	3	5

6.

x_i	10	30	50	70	90
f_i	4	24	28	16	8

7, 8 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് മധ്യമം അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുക.

7.

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

8.

x_i	15	21	27	30	35
f_i	3	5	6	7	8

9, 10 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് മാധ്യത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുക.

9.

ദിവസ വരുമാനം	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
ആളുകളുടെ എണ്ണം	4	8	9	10	7	5	4	3

10.

ഉയരം(സെ.മി)	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	9	13	26	30	12	10

11. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിൽ മധ്യമം അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുക.

മാർക്ക്	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം	6	8	14	16	4	2

12. 100 ആളുകളുടെ പ്രായത്തിന്റെ വിവരണമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. മധ്യമം അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുക.

പ്രായം	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
എണ്ണം	5	6	12	14	26	12	16	9

[സൂചന: ഓരോ നീചപരിധിയിൽ നിന്നും 0.5 കുറയ്ക്കുകയും ഉച്ചപരിധിയോട് 0.5 കൂട്ടുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ ഇതിനെ ഒരു തുടർച്ചയുള്ള ആവൃത്തിപ്പട്ടികയാക്കി മാറ്റാൻ കഴിയും]

15.4.3 മാധ്യവ്യതിയാനത്തിന്റെ പരിമിതികൾ

തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം വളരെ കൂടുതലാണെങ്കിൽ മധ്യമത്തെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം വിശ്വാസ്യമല്ല.

മാധ്യം അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള വ്യത്യാസങ്ങളുടെ കേവലവിലകളുടെ തുക മധ്യമം അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള തുകയേക്കാൾ എപ്പോഴും കൂടുതലായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് പലപ്പോഴും മാധ്യവ്യതിയാനം തൃപ്തികരമല്ല. മാധ്യവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്നതിന് വ്യത്യാസങ്ങളുടെ കേവലവിലകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതു കൊണ്ട് ഗണിതപരമായ തുടർപ്രക്രിയകൾക്ക് വിധേയമാക്കാൻ കഴിയില്ല.

അതിനാൽ മാധ്യവ്യതിയാനത്തേക്കാൾ കൂടുതൽ വിശ്വാസ്യതയുള്ള മാനകവ്യതിയാനം എന്ന വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവിനെപ്പറ്റി ചർച്ച ചെയ്യാം.

15.5 വേരിയൻസും മാനകവ്യതിയാനവും (Variance and Standard Deviation)

മാധ്യം അടിസ്ഥാനമാക്കിയും മധ്യമം അടിസ്ഥാനമാക്കിയും ഉള്ള മാധ്യവ്യതിയാനം കണ്ടുപിടിക്കാൻ വ്യത്യാസങ്ങളുടെ കേവലവിലകളാണ് നാം പരിഗണിക്കുന്നത്, ഇവിടെ വ്യത്യാസങ്ങളുടെ വർഗങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം. വർഗങ്ങൾ എപ്പോഴും അധിസംഖ്യ ആയിരിക്കും.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ എന്നിവ 'n' സംഖ്യകളും $\bar{x}$ അവയുടെ മാധ്യവും ആണെങ്കിൽ വ്യത്യാസങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിധത്തിൽ എഴുതാം.

$$(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots\ldots + (x_n-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 .$$

ഈ തുക പൂജ്യമായാൽ ഓരോ $(x_i - \bar{x})$ ന്റെ വിലയും പൂജ്യമാകണം. അതായത് എല്ലാ വിലകളും മാധ്യത്തിന് തുല്യമാകും. അങ്ങനെയായാൽ സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ വ്യതിയാനം ഇല്ല എന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ എന്ന തുക ചെറുതാണെങ്കിൽ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ എന്നീ സംഖ്യകൾ മാധ്യത്തോട് വളരെ അടുത്താണെന്നു പറയാൻ കഴിയും. അതായത് വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവ് കുറവായിരിക്കും. എന്നാൽ പ്രസ്തുത തുക വലുതാണെങ്കിൽ സംഖ്യകൾക്ക് മാധ്യവുമായുള്ള വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവ് കൂടുതലായിരിക്കും. അങ്ങനെയെങ്കിൽ
$\sum_{i=1}(x_i - \bar{x})^2$ ഒരു നല്ല വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവാണെന്ന് പറയാൻ കഴിയുമോ?

നമുക്ക് 6 സംഖ്യകളുള്ള (സെറ്റ് A) ഒരു ഉദാഹരണം പരിശോധിക്കാം. 5, 15, 25, 35, 45, 55 എന്നിവയാണ് സംഖ്യകൾ. മാധ്യം $\bar{x} = 30$ ആണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.
ഈ സംഖ്യകളുടെ മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യത്യാസങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക,

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2 = (5-30)^2 + (15-30)^2 + (25-30)^2 + (35-30)^2 + (45-30)^2 + (55-30)^2$$
$$= 625 + 225 + 25 + 25 + 225 + 625 = 1750$$

31 സംഖ്യകളുടെ (സെറ്റ് B) മറ്റൊരു ഉദാഹരണം കൂടി പരിശോധിക്കാം, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45 എന്നിവയാണ് സംഖ്യകൾ.

ഇവയുടെ മാധ്യം $\bar{y} = 30$ ആണെന്ന് കണ്ടെത്താം. ഇവിടെ സെറ്റ് A യുടെയും സെറ്റ് B യുടെയും മാധ്യം ഒന്നു തന്നെയാണ്.

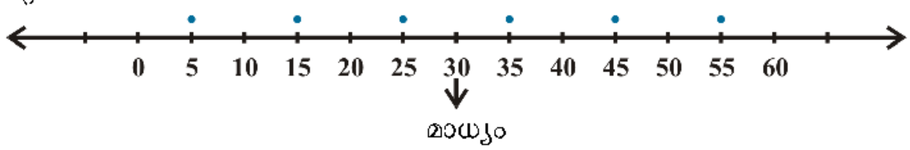
സെറ്റ് Bയിലെ സംഖ്യകളുടെ മാധ്യത്തിൽനിന്നുള്ള വ്യത്യാസങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$\sum_{i=1}^{31}(y_i - \bar{y})^2 = (15-30)^2 + (16-30)^2 + (17-30)^2 + \ldots + (44-30)^2 + (45-30)^2$$
$$= (-15)^2 + (-14)^2 + \ldots + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 14^2 + 15^2$$
$$= 2\,[15^2 + 14^2 + \ldots + 1^2]$$
$$= 2 \times \frac{15 \times (15+1)\,(30+1)}{6} = 5 \times 16 \times 31 = 2480$$

(ആദ്യത്തെ 'n' എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക = $\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ ആണ്. ഇവിടെ $n = 15$ ആണ്)

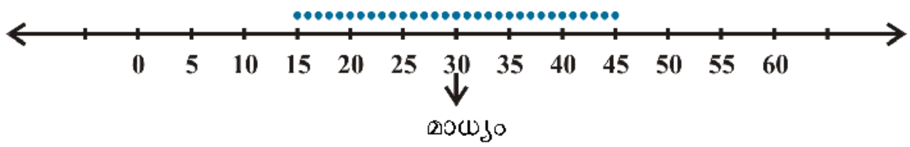
സെറ്റ് B യിലെ 6 സംഖ്യകളുടെ വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവ് സെറ്റ് B യിലെ 31 സംഖ്യകളുടെ വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവിനെക്കാൾ കുറവാണ്. എന്നാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന (ചിത്രം 15.5, 15.6) ചിത്രങ്ങൾ പരിശോധിച്ചാൽ ആദ്യത്തെ സെറ്റിലെ വ്യതിയാനം രണ്ടാമത്തേതിനേക്കാൾ കൂടുതലാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

സെറ്റ് A



ചിത്രം 15.5

സെറ്റ് B



ചിത്രം 15.6

ആയതിനാൽ മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള സംഖ്യകളുടെ വ്യതിയാനവർഗങ്ങളുടെ തുക ഒരു വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവാണെന്ന് പറയാൻ കഴിയില്ല. അതുകൊണ്ട് പ്രസ്തുത വർഗങ്ങളുടെ ശരാശരി കണ്ടുനോക്കാം. അതായത് $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ കണ്ടുപിടിക്കാം.

സെറ്റ് A യിലെ പ്രസ്തുത ശരാശരി $= \frac{1}{6}\times 1750 = 291.67$ ഉം

സെറ്റ് Bയിൽ $= \frac{1}{31}\times 2480 = 80$ ആണെന്ന് കാണാവുന്നതാണ്.

ഇപ്പോൾ ലഭിച്ചിരിക്കുന്ന വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവുകൾ ചിത്രങ്ങൾ (15.5, 15.6) പരിശോധിക്കുമ്പോൾ ശരിയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയും. അതായത് $\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$ ഒരു ശരിയായ വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവാണെന്നു പറയാൻ കഴിയും.

മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗങ്ങളുടെ ഈ ശരാശരിയെ വേരിയൻസ് എന്നു വിളിക്കാം. വേരിയൻസിനെ 'σ^2' എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം.

അതുകൊണ്ട് $x_1, x_2,\ldots, x_n$ എന്നീ n സംഖ്യകളുടെ വേരിയൻസ്

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

15.5.1 മാനകവ്യതിയാനം (Standard Deviation)

വേരിയൻസ് കണക്കുകൂട്ടുമ്പോൾ സംഖ്യകളുടെയും (x_i) മാധ്യത്തിന്റെയും $(\bar{x})$ യൂണിറ്റിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമാണ് വ്യത്യാസങ്ങളുടെ $(x_i - \bar{x})$ വർഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ യൂണിറ്റ്. വേരിയൻസിന്റെ അധിസംഖ്യാ വർഗമൂലമെടുത്താൽ ഈ പ്രശ്നം പരിഹരിക്കാനാകും. വേരിയൻസിന്റെ അധിസംഖ്യാ വർഗമൂലത്തെയാണ് മാനകവ്യതിയാനം എന്നു വിളിക്കുന്നത്. ഇതിനെ σ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

അതായത് $$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ വേരിയൻസും മാനകവ്യതിയാനവും കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

ഉദാഹരണം: 8

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ദത്തങ്ങളുടെ വേരിയൻസ് കണ്ടെത്തുക.
6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന ദത്തങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പട്ടിക 15.7 പൂർത്തിയാക്കാം. സ്റ്റെപ്പ് - വ്യതിയാന രീതി ഉപയോഗിച്ച് അഭ്യൂഹമാധ്യം 14 സ്വീകരിച്ചുകൊണ്ട് മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കാം. n = 10 ആണെന്നു മനസിലാക്കാം.

പട്ടിക 15.7

x_i	$d_i = \frac{x_i - 14}{2}$	മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യത്യാസം $(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
6	–4	–9	81
8	–3	–7	49
10	–2	–5	25
12	–1	–3	9
14	0	–1	1
16	1	1	1
18	2	3	9

20	3	5	25
22	4	7	49
24	5	9	81
	5		330

$$\therefore \text{ മാധ്യം } \bar{x} = \text{അഭ്യൂഹമാധ്യം} + \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \times h$$

$$= 14 + \frac{5}{10} \times 2 = 15$$

അതുപോലെ, വേരിയൻസ്, $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{10} \times 330 = 33$

അതുകൊണ്ട്, മാനകവ്യതിയാനം, $\sigma = \sqrt{33} = 5.74$

വിവിക്ത ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിലെ മാനകവ്യതിയാനം

$x_1, \ x_2, \ x_3, \ldots, x_n$ എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ആവൃത്തികൾ $f_1, \ f_2, \ f_3, \ldots, f_n$ എന്നിവ ആണെങ്കിൽ

മാനകവ്യതിയാനം, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}$ ആയിരിക്കും. ഇവിടെ $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

ഉദാഹരണം: 9

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിലെ വേരിയൻസും മാനകവ്യതിയാനവും കണ്ടെത്തുക.

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

പരിഹാരം

ദത്തങ്ങൾ പട്ടിക 15.8 ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാം.

പട്ടിക 15.8

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
4	3	12	–10	100	300
8	5	40	–6	36	180
11	9	99	–3	9	81
17	5	85	3	9	45
20	4	80	6	36	144
24	3	72	10	100	300
32	1	32	18	324	324
	30	420			1374

$$N = 30,\ \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 420,\ \sum_{i=1}^{7} f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 1374$$

അതുകൊണ്ട്
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{N} = \frac{1}{30} \times 420 = 14$$

അതുകൊണ്ട് വേരിയൻസ്, $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{30} \times 1374 = 45.8$$

മാനകവ്യതിയാനം, $\sigma = \sqrt{45.8} = 6.77$

15.5.3 തുടർച്ചയുള്ള ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിൽ മാനകവ്യതിയാനം

തുടർച്ചയുള്ള ആവൃത്തിപ്പട്ടികയെ ക്ലാസുകളുടെ മാധ്യാങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വിവിക്ത ആവൃത്തിപ്പട്ടികയാക്കി മാറ്റാം. തുടർന്ന് വിവിക്ത ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിലെ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ചു മാനകവ്യതിയാനം കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}$$

ഇവിടെ $\bar{x}$ മാധ്യവും $\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{n} f_i$ ആവൃത്തികളുടെ ആകെ തുകയുമാണ്.

മാനകവ്യതിയാനം കാണാൻ മറ്റൊരു രീതി

വേരിയൻസ്, σ^2

$$= \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}\, x_i)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}} \left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 f_i - \sum_{i=1}^{n} 2\bar{x}\, f_i x_i \right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}} \left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^{n} f_i - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i . f_i \right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}} \left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i + \bar{x}^2\, \mathrm{N} - 2\bar{x}\, .\, \mathrm{N}\, \bar{x} \right]$$

[ഇവിടെ $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i . f_i = \bar{x}$ അല്ലെങ്കിൽ $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = N\bar{x}$]

$$= \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}^2 = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

അല്ലെങ്കിൽ

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i-1}^{n} f_i x_i}{\mathrm{N}} \right)^2 = \frac{1}{\mathrm{N}^2} \left[\mathrm{N} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i-1}^{n} f_i x_i \right)^2 \right]$$

അതുകൊണ്ട്, മാനകവ്യതിയാനം $\sigma = \frac{1}{\mathrm{N}} \sqrt{\mathrm{N} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i \right)^2}$

ഉദാഹരണം 10

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ നിന്നും മാധ്യം, വേരിയൻസ്, മാനകവ്യതിയാനം എന്നിവ കണ്ടെത്തുക.

ക്ലാസ്	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ആവൃത്തി	3	7	12	15	8	3	2

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ പട്ടികപ്പെടുത്താം (പട്ടിക 15.9)

പട്ടിക 15.9

ക്ലാസ്സ്	ആവൃത്തി (f_i)	മധ്യാങ്കം (x_i)	$f_i x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
30-40	3	35	105	729	2187
40-50	7	45	315	289	2023
50-60	12	55	660	49	588
60-70	15	65	975	9	135
70-80	8	75	600	169	1352
80-90	3	85	255	529	1587
90-100	2	95	190	1089	2178
	50		3100		10050

മാധ്യം $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{3100}{50} = 62$

വേരിയൻസ്, $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i(x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{50} \times 10050 = 201$$

മാനകവ്യതിയാനം, $(\sigma) = \sqrt{201} = 14.18$

ഉദാഹരണം: 11

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ നിന്നു മാനകവ്യതിയാനം കണ്ടെത്തുക.

x_i	3	8	13	18	23
f_i	7	10	15	10	6

പരിഹാരം

പട്ടിക 15.10 രൂപീകരിക്കാം

പട്ടിക 15.10

x_i	f_i	f_ix_i	x_i^2	$f_ix_i^2$
3	7	21	9	63
8	10	80	64	640
13	15	195	169	2535
18	10	180	324	3240
23	6	138	529	3174
	48	614		9652

3-ാമത്തെ സൂത്രവാക്യമുപയോഗിച്ച്

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum f_ix_i^2 - \left(\sum f_ix_i\right)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{48\times 9652 - (614)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{463296 - 376996}$$

$$= \frac{1}{48}\times 293.77 = 6.12$$

അതുകൊണ്ട് മാനകവ്യതിയാനം, $\sigma = 6.12$

15.5.4. വേരിയൻസും മാനകവ്യതിയാനവും കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള എളുപ്പവഴി

വിവിക്ത ആവൃത്തിപ്പട്ടികയായാലും തുടർച്ചയുള്ള ആവൃത്തിപട്ടികയായാലും സംഖ്യ l Ä (x_i) വലുതാണെങ്കിൽ മാധ്യവും വേരിയൻസും കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് കൂടുതൽ പ്രയാസമാണ്.

എന്നാൽ സ്റ്റെപ്പ് – വ്യതിയാന രീതി ഉപയോഗിച്ച് കുറെക്കൂടി ലളിതമായി മാധ്യവും വേരിയൻസും കണ്ടുപിടിക്കാം.
അഭ്യൂഹമാധ്യം 'A' യും ക്ലാസ്സ് അന്തരം 'h' ആണെങ്കിൽ സ്റ്റെപ്പ് – വ്യതിയാനങ്ങൾ y_i ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം.

$y_i = \dfrac{x_i - \mathrm{A}}{h}$ അല്ലെങ്കിൽ $x_i = \mathrm{A} + hy_i$ ... (1)

$\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\mathrm{N}}$ ആണെന്നു നമുക്കറിയാം ... (2)

സമവാക്യം (2) ൽ സമവാക്യം (1) ലെ x_i യുടെ വിലനൽകിയാൽ,

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathrm{A} + hy_i)}{\mathrm{N}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\mathrm{A} + \sum_{i=1}^{n} h\, f_i y_i\right) = \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\mathrm{A}\sum_{i=1}^{n} f_i + h\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)$$

$$= \mathrm{A}\cdot\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}} + h\,\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i y_i}{\mathrm{N}} \qquad \left(\because \sum_{i=1}^{n} f_i = \mathrm{N}\right)$$

$\therefore\ \overline{x} = \mathrm{A} + h\ \overline{y}$ ... (3)

അതുപോലെ, വേരിയൻസ് $\sigma_x{}^2 = \dfrac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2$

$= \dfrac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(\mathrm{A} + hy_i - \mathrm{A} - h\,\overline{y})^2$ (സമവാക്യം (1), (3) ഉപയോഗിച്ച്)

$= \dfrac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n} f_i\, h^2\,(y_i - \overline{y})^2$

$= \dfrac{h^2}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(y_i - \overline{y})^2 = h^2 \times y_i$ യുടെ വേരിയൻസ്.

അതായത് $\sigma_x{}^2 = h^2\sigma_y{}^2$

അല്ലെങ്കിൽ $\sigma_x = h\sigma_y$ .... (4)

(3), (4) പരിഗണിച്ചാൽ

$$\sigma_x = \frac{h}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)^2} \quad \ldots (5)$$

ഉദാഹരണം 11 സമവാക്യം (5) ഉപയോഗിച്ച് എളുപ്പവഴിയിൽ ചെയ്യുക.

ഉദാഹരണം: 12

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ നിന്നും മാധ്യം, വേരിയൻസ്, മാനകവ്യതിയാനം ഇവ കണ്ടെത്തുക.

ക്ലാസ്	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ആവൃത്തി	3	7	12	15	8	3	2

പരിഹാരം

അഭ്യൂഹമാധ്യം A = 65 പരിഗണിക്കാം, ഇവിടെ $h = 10$ ആണ്. ലഭിച്ച വിവരങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ പട്ടിക 15.11 പൂർത്തിയാക്കാം.

പട്ടിക 15.11

ക്ലാസ്	ആവൃത്തി	മധ്യാങ്കം	$y_i = \frac{x_i - 65}{10}$	y_i^2	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
	f_i	x_i				
30-40	3	35	– 3	9	– 9	27
40-50	7	45	– 2	4	– 14	28
50-60	12	55	– 1	1	– 12	12
60-70	15	65	0	0	0	0
70-80	8	75	1	1	8	8
80-90	3	85	2	4	6	12
9 0-100	2	95	3	9	6	18
	N=50				– 15	105

അതുകൊണ്ട്, $\bar{x} = A + \frac{\sum f_i y_i}{50} \times h = 65 - \frac{15}{50} \times 10 = 62$

വേരിയൻസ്, $\sigma^2 = \frac{h^2}{N^2}\left[N\Sigma f_i y_i^2 - \left(\Sigma f_i y_i\right)^2\right]$

$$= \frac{(10)^2}{(50)^2}\left[50 \times 105 - (-15)^2\right]$$

$$= \frac{1}{25}[5250 - 225] = 201$$

മാനകവ്യതിയാനം, $\sigma = \sqrt{201} = 14.18$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 15.2

1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് മാധ്യവും വേരിയൻസും കണ്ടെത്തുക.

1. 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12
2. ആദ്യത്തെ n എണ്ണൽസംഖ്യകൾ
3. 3 ന്റെ ആദ്യത്തെ 10 ഗുണിതങ്ങൾ
4.

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

5.

x_i	92	93	97	98	102	104	109
f_i	3	2	3	2	6	3	3

6. എളുപ്പവഴി ഉപയോഗിച്ച് മാധ്യവും മാനകവ്യതിയാനവും കണ്ടെത്തുക.

x_i	60	61	62	63	64	65	66	67	68
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

7,8 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് മാധ്യവും മാനകവ്യതിയാനവും കാണുക.

7.

ക്ലാസ്	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180	180-210
ആവൃത്തി	2	3	5	10	3	5	2

8.

ക്ലാസ്	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ആവൃത്തി	5	8	15	16	6

9. എളുപ്പവഴി ഉപയോഗിച്ച് മാധ്യം, വേരിയൻസ്, മാനകവ്യതിയാനം ഇവ കണ്ടെത്തുക.

ഉയരം സെ.മീ	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95	95-100	100-105	105-110	110-115
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	3	4	7	7	15	9	6	6	3

10. ഒരു രൂപത്തിൽ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസങ്ങൾ (മി.മീറ്ററിൽ) വരച്ചിരിക്കുന്ന അളവുകൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

വ്യാസം	33-36	37-40	41-44	45-48	49-52
വൃത്തങ്ങളുടെ എണ്ണം	15	17	21	22	25

വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസത്തിന്റെ മാധ്യവും മാനകവ്യതിയാനവും കണ്ടെത്തുക.
(സൂചന : സന്തത ആവൃത്തിപ്പട്ടികയുടെ സാധാരണ രൂപത്തിലാക്കുന്നതിന് ഓരോ ക്ലാസ്സിന്റെയും നീചപരിധിയോട് 0.5 കുറയ്ക്കുകയും ഉച്ചപരിധിയോട് 0.5 കൂട്ടുകയും ചെയ്യുക)

15.6 ആവൃത്തിവിതരണത്തിന്റെ വിശകലനം (Analysis of Frequency Distribution)

ഈ അധ്യായത്തിൽ ചില വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവുകളെപ്പറ്റി നാം പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകൾ ഏതു യൂണിറ്റിലാണോ അതേ യൂണിറ്റിൽ തന്നെയാണ് മാധ്യവ്യതിയാനവും മാനകവ്യതിയാനവും ലഭിക്കുന്നത്. അതുകൊണ്ടുതന്നെ മാധ്യം തുല്യമായ, വ്യത്യസ്ത യൂണിറ്റുകളുള്ള രണ്ടു കൂട്ടം സംഖ്യകളുടെ വ്യതിയാനം താരതമ്യം ചെയ്യാൻ യൂണിറ്റുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന മേൽപ്പറഞ്ഞ വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവുകൾ പര്യാപ്തമല്ല. അതിനാൽ യൂണിറ്റുമായി ബന്ധമില്ലാത്ത ഒരു അളവിനു മാത്രമേ രണ്ടു കൂട്ടം സംഖ്യകളുടെ വ്യതിയാനം താരതമ്യം ചെയ്യാൻ കഴിയൂ. അത്തരത്തിലുള്ള ഒരു അളവാണ് വ്യതിയാനഗുണകം (coefficient of variation)

$$\mathrm{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 \quad , \bar{x} \neq 0 ,$$

ഇവിടെ σ , $\bar{x}$ എന്നിവ യഥാക്രമം മാനകവ്യതിയാനം, മാധ്യം എന്നിവയാണ്.

രണ്ടു വ്യത്യസ്ത അളവുകളുടെ വ്യതിയാനം താരതമ്യം ചെയ്യാൻ ഓരോന്നിന്റെയും വ്യതിയാനഗുണകം കണ്ടുപിടിക്കുകയും വ്യതിയാനഗുണകം കൂടിയ നിര കൂടുതൽ വിന്യസിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു (scattered) എന്നും കുറവുള്ളത് കൂടുതൽ സ്ഥിരത (consistent) യുള്ളതാണെന്നും കാണാൻ കഴിയും.

15.6.1 മാധ്യം തുല്യമായ ആവൃത്തി വിതരണങ്ങളുടെ താരതമ്യം

രണ്ട് ആവൃത്തി വിതരണങ്ങളിൽ $\bar{x}_1$,σ_1 എന്നിവ യഥാക്രമം ഒന്നാമത്തേതിന്റെ മാധ്യവും മാനകവ്യതിയാനവും $\bar{x}_2$,σ_2 എന്നിവ രണ്ടാമത്തേതിന്റെ മാധ്യവും മാനക വ്യതിയാനവും ആണെങ്കിൽ,

$$\text{C.V. (ഒന്നാമത്തെ വിതരണം)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$$

$$\text{C.V. (രണ്ടാമത്തെ വിതരണം)} = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$$

ഇവിടെ മാധ്യങ്ങൾ തുല്യമായതിനാൽ $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$ എന്നു പറയാം

അതുകൊണ്ട് $$\text{C.V. (ഒന്നാമത്തെ വിതരണം)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}} \times 100 \qquad \dots (1)$$

$$\text{C.V. (രണ്ടാമത്തെ വിതരണം)} = \frac{\sigma_2}{\bar{x}} \times 100 \qquad \dots (2)$$

സമവാക്യങ്ങൾ (1), (2) എന്നിവ പരിഗണിച്ചാൽ, മാനകവ്യതിയാനങ്ങൾ (σ_1, σ_2) മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് താരതമ്യം ചെയ്യാവുന്നതാണ് എന്ന് മനസിലാക്കാം.
അതായത് തുല്യമാധ്യമുള്ള രണ്ട് അളവുകളിൽ മാനകവ്യതിയാനം കൂടിയ അളവു കൾക്ക് കൂടുതൽ വ്യതിയാനം എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. രണ്ട് നിരകളിൽ കുറഞ്ഞ മാനകവ്യതിയാനം ഉള്ളത് കൂടുതൽ സ്ഥിരതയുള്ളതാണെന്നു പറയാം.
ഇനി ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിശോധിക്കാം.

ഉദാഹരണം 13

ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ A,B എന്നീ പ്ലാന്റുകളിലെ ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണത്തെയും അവ രുടെ ശമ്പളത്തെയും സംബന്ധിച്ച വിവരങ്ങൾ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

	A	B
ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	5000	6000
ശരാശരി ശമ്പളം	₹ 2500	₹ 2500
വേരിയൻസ്	81	100

ഏതു പ്ലാന്റിലെ ജീവനക്കാരുടെ ശമ്പളത്തിന്റെ വിതരണത്തിനാണ് കൂടുതൽ വ്യതി യാനമുള്ളത്?

പരിഹാരം

പ്ലാന്റ് A യുടെ ജോലിക്കാരുടെ ശമ്പളത്തിന്റെ വേരിയൻസ് $\sigma_1^2 = 81$

അതുകൊണ്ട്, പ്ലാന്റ് A യുടെ ശമ്പളത്തിന്റെ മാനകവ്യതിയാനം $\sigma_1 = 9$

പ്ലാന്റ് B യുടെ ജോലിക്കാരുടെ ശമ്പളത്തിന്റെ വേരിയൻസ് $\sigma_2^2 = 100$

അതുകൊണ്ട്, പ്ലാന്റ് A യുടെ ശമ്പളത്തിന്റെ മാനകവ്യതിയാനം $\sigma_2 = 10$

അതുപോലെ ശരാശരി പ്രതിമാസ ശമ്പളം രണ്ടു പ്ലാന്റിലും 2500 വീതമാണ്

അതായത് $\bar{x} = \bar{x}_2 = \bar{x} = 2500$

മാധ്യം തുല്യമായതിനാൽ കൂടുതൽ മാനക വ്യതിയാനമുള്ള പ്ലാന്റിനാണ് കൂടുതൽ വ്യതിയാനമുള്ളത്. അതായത് ജോലിക്കാരുടെ ശമ്പളത്തിന്റെ വ്യതിയാനം കൂടുതലുള്ളത് പ്ലാന്റ് B യിലാണ്

ഉദാഹരണം : 14

രണ്ടു വിതരണങ്ങളുടെ (distributions) വ്യതിയാനഗുണകങ്ങൾ യഥാക്രമം 60, 70 എന്നിവയാണ്. അവയുടെ മാനകവ്യതിയാനം 21,16 എന്നിവയാണ്. അവയുടെ മാധ്യം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

C.V.1 = 60, $\sigma_1 = 21$ (∴ C.V.1 ഒന്നാമത്തെ വിതരണത്തിന്റെ വ്യതിയാന ഗുണകമാണ്)

C.V.2 = = 70, $\sigma_2 = 16$ (∴ C.V.2 രണ്ടാമത്തെ വിതരണത്തിന്റെ വ്യതിയാന ഗുണകമാണ്)

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ എന്നിവ ഒന്നാമത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യങ്ങളാണ് എങ്കിൽ

$$\text{C.V. 1} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$$

$$\therefore 60 = \frac{21}{\bar{x}_1} \times 100$$

അതായത്, $$\bar{x}_1 = \frac{21}{60} \times 100 = 35$$

$$\text{C.V.}2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$$

$$70 = \frac{16}{\bar{x}_2} \times 100$$

$$\bar{x}_2 = \frac{16}{70} \times 100 = 22.85$$

ഉദാഹരണം 15

പതിനൊന്നാം ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ ഉയരത്തെയും ഭാരത്തെയും സംബന്ധിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

	ഉയരം	ഭാരം
മാധ്യം	162.6 സെ.മീ	52.36 കി.ഗ്രാം
വേരിയൻസ്	127.69 ച.സെ.മീ	23.1361 ച.കി.ഗ്രാം

ഭാരത്തിന് ഉയരത്തേക്കാൾ കൂടുതൽ വ്യതിയാനം ഉണ്ട് എന്ന് പറയാൻ കഴിയുമോ?

പരിഹാരം

വ്യതിയാനം താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിന് വ്യതിയാനഗുണകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കണം.
ഉയരത്തിന്റെ വേരിയൻസ് = 127.69 സെ.മീ

അതുകൊണ്ട്, ഉയരത്തിന്റെ മാനകവ്യതിയാനം $= \sqrt{127.69} = 11.3$ സെ.മീ.

അതുപോലെ, ഭാരത്തിന്റെ വേരിയൻസ് $= 23.1361$ (കി.ഗ്രാം)^2

അതുകൊണ്ട് ഭാരത്തിന്റെ മാനകവ്യതിയാനം $= \sqrt{23.1361} = 4.81$ കി.ഗ്രാം

ഇനി വ്യതിയാനഗുണകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$\text{ഉയരത്തിന്റ C.V.} = \frac{\text{മാനക വ്യതിയാനം}}{\text{മാധ്യം}} \times 100$$

$$= \frac{11.3}{162.6} \times 100 = 6.95$$

$$\text{ഭാരത്തിന്റ C.V.} = \frac{4.81}{52.36} \times 100 = 9.18$$

ഭാരത്തിന്റെ വ്യതിയാനഗുണകമാണ് ഉയരത്തിന്റേതിനേക്കാൾ കൂടുതൽ എന്ന് മനസിലാക്കാം. അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഭാരത്തിന് ഉയരത്തേക്കാൾ കൂടുതൽ വ്യതിയാനം ഉണ്ട്.

പരിശീലന ചോദ്യങ്ങൾ 15.3

1. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഗ്രൂപ്പ് A ആണോ ഗ്രൂപ്പ് B ആണോ കൂടുതൽ വ്യതിയാനമുള്ളത്?

മാർക്ക്	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ഗ്രൂപ്പ് A	9	17	32	33	40	10	9
ഗ്രൂപ്പ് B	10	20	30	25	43	15	7

2. X, Y എന്നീ ഷെയറുകളുടെ വിലകളിൽ നിന്ന് ഏതാണ് കൂടുതൽ സ്ഥിരത പുലർത്തുന്നതെന്നു കണ്ടെത്തുക.

X	35	54	52	53	56	58	52	50	51	49
Y	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

3. ഒരേ വ്യവസായ മേഖലയിലുള്ള A, B എന്നീ കമ്പനികളിലെ ജോലിക്കാരുടെ മാസവേതനത്തിന്റെ വിശകലനമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

	കമ്പനി A	കമ്പനി B
ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	586	648
മാസവേതനത്തിന്റെ ശരാശരി	₹ 5253	₹ 5253
വേതനത്തിന്റെ വേരിയൻസ്	100	121

(i) ഏറ്റവും കൂടുതൽ പ്രതിമാസവേതനം നൽകുന്ന കമ്പനി ഏതാണ്?

(ii) പ്രതിമാസവേതനത്തിൽ കൂടുതൽ വ്യതിയാനം ഏതു കമ്പനിക്കാണ്?

4. ഒരു ഫുട്ബാൾ സെഷനിൽ ടീം A യുടെ റെക്കോർഡ് ചെയ്യപ്പെട്ട ഗോളുകളുടെ വിവരങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

സ്കോർ ചെയ്ത ഗോളുകൾ	0	1	2	3	4
കളികളുടെ എണ്ണം	1	9	7	5	3

ടീം B യുടെ ശരാശരി ഗോളുകളുടെ എണ്ണം 2 ആണ്. ടീം B യുടെ ഗോളുകളുടെ മാനക വ്യതിയാനം 1.25 ആണ്. ഏത് ടീമാണ് കൂതൽ സ്ഥിരത പുലർത്തുന്നത്?

5. ഒരു പ്ലാന്റിലെ 50 ഉത്പന്നങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെയും (x സെ.മീ) ഭാരത്തിന്റെയും (y ഗ്രാമിൽ) തുക, വർഗങ്ങളുടെ തുക, വർഗങ്ങളുടെ തുക എന്നിവ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 212, \quad \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 902.8, \quad \sum_{i=1}^{50} y_i = 261, \quad \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 1457.6$$

നീളത്തിനാണോ ഭാരത്തിനാണോ കൂടുതൽ വ്യതിയാനം എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക?

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം: 16

20 സംഖ്യകളുടെ വേരിയൻസ് 5 ആണ്. ഓരോ സംഖ്യയേയും 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ വേരിയൻസ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

സംഖ്യകൾ $x_1, x_2, ..., x_{20}$ എന്നും അവയുടെ മാധ്യം $\bar{x}$ എന്നും പരിഗണിക്കാം. തന്നിരിക്കുന്ന വേരിയൻസ് 5, n = 20 എന്നിവ ആണ്.

$$\text{വേരിയൻസ് } \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2, \text{ i.e., } 5 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2$$

അതായത്
$$\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = 100 \qquad ... (1)$$

ഓരോ സംഖ്യ(x_i)യെയും 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയെ y_i എന്നെടുത്താൽ $y_i = 2x_i$ അല്ലെങ്കിൽ $x_i = \frac{1}{2}y_i$ എന്നു പറയാം

അതുകൊണ്ട്
$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} y_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} 2x_i = 2\cdot\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

അതായത്,
$$\bar{y} = 2\,\bar{x} \quad \text{or} \quad \bar{x} = \frac{1}{2}\bar{y}$$

1-ാമത്തെ സമവാക്യത്തിൽ x_i യുടെയും $\bar{x}$ ന്റെയും വിലകൾ നൽകിയാൽ,

$$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}\bar{y}\right)^2 = 100, \text{ i.e., } \sum_{i=1}^{20}(y_i - \bar{y})^2 = 400 \text{ ആയിരിക്കും}$$

അതുകൊണ്ട് പുതിയ സംഖ്യകളുടെ (y_i) വേരിയൻസ്= $\frac{1}{20} \times 400 = 20 = 2^2 \times 5$ ആയിരിക്കും

> **കുറിപ്പ്**
>
> ഓരോ സംഖ്യകളെയും k കൊണ്ട് ഗുണിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ വേരിയൻസ് ആദ്യ വേരിയൻസിന്റെ k^2മടങ്ങായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 17

5 സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം 4.4, വേരിയൻസ് 8.24 ആണ്. ഇതിൽ മൂന്ന് സംഖ്യകൾ 1, 2, 6 ഇവയാണെങ്കിൽ മറ്റു രണ്ട് സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക?

പരിഹാരം

രണ്ടു സംഖ്യകൾ x, y എന്നിരിക്കട്ടെ

മാധ്യം $\bar{x} = 4.4 = \frac{1+2+6+x+y}{5}$

$22 = 9 + x + y$

അതുകൊണ്ട്, $x + y = 13 \quad \ldots (1)$

കൂടാതെ, വേരിയൻസ് $= 8.24 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2$

അതായത്

$$8.24 = \frac{1}{5}\left[(3.4)^2 + (2.4)^2 + (1.6)^2 + x^2 + y^2 - 2 \times 4.4\,(x+y) + 2 \times (4.4)^2\right]$$

$$8.24 = \frac{1}{5}\left[(3.4)^2 + (2.4)^2 + (1.6)^2 + x^2 + y^2 - 2 \times 4.4\,(x+y) + 2 \times (4.4)^2\right]$$

$41.20 = 11.56 + 5.76 + 2.56 + x^2 + y^2 - 8.8 \times 13 + 38.72$

അതുകൊണ്ട് $x^2 + y^2 = 97 \quad \ldots (2)$

സമവാക്യം (1) ന്റെ ഇരുവശവും വർഗം കണ്ടാൽ,

$x^2 + y^2 + 2xy = 169 \quad \ldots (3)$

സമവാക്യം (2), (3) എന്നിവയിൽ നിന്നും $2xy = 72$ ലഭിക്കും $\quad \ldots (4)$

സമവാക്യം (2) ൽ നിന്ന് (4) കുറച്ചാൽ,

$x^2 + y^2 - 2xy = 97 - 72$

$(x - y)^2 = 25$

$x - y = \pm 5 \quad \ldots (5)$

സമവാക്യം (1), (5) എന്നിവയിൽ നിന്നും

$x = 9, \quad y = 4$ അല്ലെങ്കിൽ
$x = 4, \quad y = 9$ എന്നു ലഭിക്കും

അതുകൊണ്ട് മറ്റു രണ്ടു സംഖ്യകൾ 4, 9 എന്നിവയായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 18

$x_1, x_2, ...x_n$ എന്നീ സംഖ്യകളോട് a എന്ന സംഖ്യ (അധിസംഖ്യയോ, ന്യൂനസംഖ്യയോ ആകാം) കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ വേരിയൻസിന് മാറ്റമുണ്ടാകുകയില്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$x_1, x_2, ...x_n$ എന്നീ സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം $\bar{x}$ ആയാൽ

വേരിയൻസ് $\sigma_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ ആയിരിക്കും

ഈ സംഖ്യകളോട് a കൂട്ടിയാൽ പുതിയ സംഖ്യകൾ

$y_i = x_i + a$ ... (1) എന്ന് എഴുതാം

പുതിയ സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം $\bar{y}$ ആയാൽ

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} a\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{na}{n} = \bar{x} + a$$

അതായത് $\bar{y} = \bar{x} + a$ ആയിരിക്കും ... (2)

അതിനാൽ പുതിയ സംഖ്യകളുടെയും (y_i) വേരിയൻസ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാം

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a - \bar{x} - a)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sigma_1^2$$

ഇതിൽ നിന്നും വേരിയൻസ് ഒന്നു തന്നെയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

കുറിപ്പ്

ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളോട് ഒരു അധിസംഖ്യ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്താൽ അവയുടെ വേരിയൻസിനെ അത് ബാധിക്കുകയില്ല.

ഉദാഹരണം: 19

ഒരു കുട്ടി അബദ്ധത്തിൽ 40 നുപകരം 50 എടുത്തു കണക്കു കൂട്ടിയപ്പോൾ 100 സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം, മാനകവ്യതിയാനം ഇവ യഥാക്രമം 40, 5.1 എന്നിങ്ങനെ കിട്ടി. എന്നാൽ യഥാർത്ഥ മാധ്യവും മാനകവ്യതിയാനവും എന്താണ്?

പരിഹാരം

സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $n - 100$

തെറ്റായ മാധ്യം $\bar{x} = 40,$

തെറ്റായ മാനകവ്യതിയാനം $\sigma = 5.1$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ ആണ്.}$$

അതായത്, $$40 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i\,, \quad \sum_{i=1}^{100} x_i = 4000$$

തെറ്റായ (സംഖ്യകളുടെ) തുക $= 4000$

സംഖ്യകളുടെ ശരിയായ തുക $=$ തെറ്റായ തുക $- 50 + 40$

$= 4000 - 50 + 40 = 3990$

അതിനാൽ, ശരിയായ മാധ്യം $= \dfrac{3990}{100} = 39.9$

മാനകവ്യതിയാനം, $$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i\ 1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2}$$

അതായത്, $$5.1 = \sqrt{\frac{1}{100} \times \text{തെറ്റായ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (40)^2}$$

$$26.01 = \frac{1}{100} \times \text{തെറ്റായ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1600$$

തെറ്റായ $$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 100\,(26.01 + 1600) = 162601$$

n

$$\text{ശരിയായ } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \text{തെറ്റായ } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (50)^2 + (40)^2$$

$$= 162601 - 2500 + 1600 = 161701$$

അതുകൊണ്ട് ശരിയായ മാനകവ്യതിയാനം

$$= \sqrt{\frac{\text{ശരിയായ } \sum x_i^2}{n} - (\text{ശരിയായ മാധ്യം})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{161701}{100} - (39.9)^2}$$

$$= \sqrt{1617.01 - 1592.01} = \sqrt{25} = 5$$

കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. എട്ട് സംഖ്യകളുടെ മാധ്യവും വേരിയൻസും യഥാക്രമം 9, 9.25 എന്നിവയാണ്. ഇതിൽ 6 എണ്ണം 6, 7, 10, 12, 12, 13 എന്നിവയാണ് എങ്കിൽ ബാക്കിയുള്ള 2 സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.

2. ഏഴ് സംഖ്യകളുടെ മാധ്യവും വേരിയൻസും യഥാക്രമം 8, 16 എന്നിവയാണ്. ഇതിൽ 5 എണ്ണം 2, 4, 10, 12, 14 എന്നിവയാണ്, ബാക്കിയുള്ള 2 സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.

3. ആറ് സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം, മാനകവ്യതിയാനം എന്നിവ യഥാക്രമം 8,4 ഇവയാണ്. ഓരോ സംഖ്യയെയും 3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ മാധ്യവും മാനകവ്യതിയാനവും കണ്ടെത്തുക.

4. $x_1, x_2, ..., x_n$ എന്നീ n സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം, വേരിയൻസ് എന്നിവ യഥാക്രമം $\bar{x}$, σ^2 ആയാൽ $ax_1, ax_2, ax_3, ..., ax_n$ എന്നീ സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം, വേരിയൻസ് എന്നിവ യഥാക്രമം $a\bar{x}$, $a^2\sigma^2$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക. ($a \neq 0$)

5. 20 സംഖ്യകളുടെ മാധ്യവും മാനകവ്യതിയാനവും യഥാക്രമം 10, 2 എന്നിവയാണ്. സൂക്ഷ്മ പരിശോധന നടത്തിയപ്പോൾ 8 എന്ന സംഖ്യ തെറ്റായി ഉൾപ്പെടുത്തിയിരിക്കുകയാണ് എന്നു കണ്ടു. എന്നാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിധങ്ങളിൽ ശരിയായ മാധ്യവും മാനകവ്യതിയാനവും കണ്ടെത്തുക.

   (i) തെറ്റായ സംഖ്യ ഒഴിവാക്കുക (ii) തെറ്റായ സംഖ്യയ്ക്കു പകരം 12 ഉൾപ്പെടുത്തുക.

6. 50 കുട്ടികളുടെ ഗണിതം, ഫിസിക്സ്, കെമിസ്ട്രി എന്നീ വിഷയങ്ങളിലെ മാർക്കുകളുടെ മാധ്യവും മാനകവ്യതിയാനവും ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

വിഷയം	ഗണിതം	ഫിസിക്സ്	കെമിസ്ട്രി
മാധ്യം	42	32	40.9
മാനക വ്യതിയാനം	12	15	20

ഏതു വിഷയത്തിനാണ് മാർക്കുകളിൽ കൂടുതൽ വ്യതിയാനമുള്ളത്? ഏതു വിഷയത്തിനാണ് ഏറ്റവും കുറവ് വ്യതിയാനം?

7. 100 സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം, മാനകവ്യതിയാനം എന്നിവ യഥാക്രമം 20, 3 ആണ്. പിന്നീട് 21, 21, 18 എന്നീ 3 സംഖ്യകൾ തെറ്റായി ഉൾപ്പെടുത്തപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്ന് കണ്ടെത്തി. തെറ്റായി ഉൾപ്പെടുത്തപ്പെട്ട സംഖ്യകൾ ഒഴിവാക്കിയാൽ ബാക്കിയുള്ള സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം, മാനകവ്യതിയാനം എന്നിവ കണ്ടെത്തുക.

സംഗ്രഹം

- വ്യതിയാനങ്ങളുടെ അളവുകൾ

  പരിധി, ചതുർത്ഥാംശവ്യതിയാനം, മാധ്യവ്യതിയാനം, വേരിയൻസ്, മാനകവ്യതിയാനം.

  പരിധി = ഏറ്റവും വലിയ വില – ഏറ്റവും ചെറിയ വില

- തരംതിരിക്കാത്ത ദത്തങ്ങളുടെ മാധ്യവ്യതിയാനം

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}, \quad \text{M.D. (M)} = \frac{\sum |x_i - \text{M}|}{n}$$

- തരംതിരിച്ച ദത്തങ്ങളുടെ മാധ്യവ്യതിയാനം

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\text{N}}, \quad \text{M.D. (M)} = \frac{\sum f_i |x_i - \text{M}|}{\text{N}}, \text{N} = \sum f_i$$

- തരംതിരിക്കാത്ത ദത്തങ്ങളുടെ വേരിയൻസ് മാനകവ്യതിയാനം

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i \quad \bar{x})^2, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

- വിവിക്ത ആവൃത്തിവിതരണത്തിന്റെ വേരിയൻസും മാനകവ്യതിയാനവും

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2}$$

- തുടർച്ചയുള്ള ആവൃത്തിവിതരണത്തിന്റെ വേരിയൻസും മാനകവ്യതിയാനവും

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \frac{1}{N} \sqrt{N \sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

- വേരിയൻസും മാനകവ്യതിയാനവും കാണാനുള്ള എളുപ്പ വഴി.

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{N^2} \left[N \sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2 \right], \quad \sigma = \frac{h}{N} \sqrt{N \sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2},$$

ഇവിടെ $y_i = \dfrac{x_i - A}{h}$

- വ്യതിയാന ഗുണകം $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100, \bar{x} \neq 0.$

ഒരേ മാധ്യമുള്ള രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ദത്തങ്ങളിൽ മാനകവ്യതിയാനം കുറവുള്ളവ കൂടുതൽ സ്ഥിരതയുള്ളതോ അഥവാ കുറച്ചുമാത്രം വിന്യസിക്കപ്പെട്ടതോ ആയിരിക്കും.

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

'രാഷ്ട്രം' എന്നർത്ഥം വരുന്ന 'സ്റ്റാറ്റസ്' എന്ന ലാറ്റിൻ പദത്തിൽ നിന്നാണ് 'സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ്' എന്ന വാക്കുണ്ടായത്. ഇതിൽ നിന്നും മനുഷ്യന്റെ സംസ്കാരത്തോളം തന്നെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന് പഴക്കം ഉണ്ടെന്നു പറയാം. ബി.സി. 3050 ൽ ഈജിപ്തിൽ ആദ്യമായി സെൻസസ് നടന്നു. 324-300 ബി.സി.യിൽ ചന്ദ്രഗുപ്തമൗര്യന്റെ ഭരണകാലത്ത് ഭരണപരമായ സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക് എടുക്കുന്നതിനു സംവിധാനമുണ്ടായിരുന്നു. 300 ബി.സി.യിൽ കൗടില്യന്റെ അർത്ഥശാസ്ത്രം എന്ന കൃതിയിൽ ജനനമരണങ്ങളുടെ വിവരശേഖരണത്തിന് ഒരു ക്രമീകരണം ഉണ്ടായിരുന്നതായി പറയുന്നു. അക്ബർ ചക്രവർത്തിയുടെ ഭരണകാലത്ത് ഭരണപരമായ സർവേകൾ നടത്തിയിരുന്നതായി അബുൽ ഫസലിന്റെ 'ഐൻ-ഇ-അക്ബരി' എന്ന കൃതിയിൽ പരാമർശിക്കുന്നുണ്ട്.

I4K2Y6

അധ്യായം 16

സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം (PROBABILITY)

❖ *ഗണിതയുക്തി സാധ്യമായ സന്ദർഭങ്ങളിൽ മറ്റൊരു രീതി ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്നത് വിഡ്ഢിത്തമാണ്. നമ്മുടെ പക്കൽ മെഴുകുതിരിയുള്ളപ്പോൾ ഇരുട്ടിൽ തപ്പുന്നതുപോലെ - ജോൺ അർബുത്നോട്* ❖

16.1 ആമുഖം

കോൾമൊഗൊറോവ്
(1903-1987)

മുൻ ക്ലാസിൽ സാധ്യതകളുടെ ഗണിതത്തെപ്പറ്റി ചർച്ച ചെയ്തിട്ടുണ്ടല്ലോ? ഉദാഹരണത്തിന് നിങ്ങൾ ഏണിയും പാമ്പും കളിയിൽ ഏർപ്പെട്ടു എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ ചതുരക്കട്ട എറിയുമ്പോൾ 4 എന്ന മുഖം വരാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? സമചതുരക്കട്ട എറിയുമ്പോൾ ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യ രേഖപ്പെടുത്തിയ മുഖം വരാനുള്ള സാധ്യതയെപ്പറ്റി ചിന്തിച്ചിട്ടുണ്ടോ? സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ഇതിനൊക്കെ ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. ഈ അധ്യായത്തിൽ അതേക്കുറിച്ച് കൂടുതൽ ചർച്ച ചെയ്യാം.

മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഒന്നാമത്തെ ഉദാഹരണം പരിശോധിക്കാം. ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുമ്പോൾ 6 വ്യത്യസ്ത ഫലങ്ങളാണ് ലഭിക്കുന്നത്, അവ 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നീ അക്കങ്ങൾ രേഖപ്പെടുത്തിയ മുഖങ്ങളാണ്. സമചതുരക്കട്ട ഒരു പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോൾ 4 എന്ന മുഖം ലഭിക്കുകയോ ലഭിക്കാതിരിക്കുകയോ ചെയ്യാം. അതായത് 4 എന്ന മുഖം ലഭിക്കുന്നതിന് അനുകൂലമായ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം 1 ആണ്. അതിനാൽ 4 എന്ന മുഖം ലഭിക്കാനുള്ള സാധ്യത ആറിൽ ഒന്ന് $\left(\frac{1}{6}\right)$ ആണ്. ഇതിൽ 1 അനുകൂല ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണവും 6 ആകെയുള്ള ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണവും ആണ്. ഇതേപോലെ ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യ രേഖപ്പെടുത്തിയ മുഖം ലഭിക്കാനുള്ള സാധ്യത ആറിൽ മൂന്നാണ് $\left(\frac{3}{6}\right)$.

(ഇവിടെ 3 അനുകൂല ഫലങ്ങളാണുള്ളത്, അവ 2, 4, 6 എന്നീ മുഖങ്ങളാണ്.) പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ ഒരു സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യത എന്നത് ആ സംഭവത്തിന് അനുകൂലമായ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണവും ആകെയുള്ള തുല്യ പ്രാധാന്യമുള്ള ഫല ങ്ങളുടെ എണ്ണവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധമാണ്. ഇതിനെ സാധ്യതകളുടെ ശ്രേഷ്ഠ സിദ്ധാന്തം (Classical Theory of Probability) എന്നു പറയുന്നു.

സാധ്യതയെ നിരീക്ഷണങ്ങളുടേയും വസ്തുതകളുടേയും അടിസ്ഥാനത്തിൽ വിശ ദീകരിക്കുന്നതിനെ സാധ്യതയുടെ സാംഖ്യകസമീപനം എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഈ രണ്ടു സിദ്ധാന്തങ്ങൾക്കും അതിന്റേതായ പരിമിതികൾ ഉണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന് ഒരു പരീക്ഷണത്തിന് അനന്തം എണ്ണം പരിണതഫലങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ ഈ സിദ്ധാ ന്തങ്ങൾ പ്രാവർത്തികമാക്കാൻ സാധിക്കുകയില്ല. ശ്രേഷ്ഠസാധ്യതാസിദ്ധാന്തത്തിൽ എല്ലാ പരിണതഫലങ്ങൾക്കും തുല്യ പ്രാധാന്യം നൽകുന്നു. അതായത് എല്ലാ പരിണതഫലങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നതിനും തുല്യ അവസരം ആണുള്ളത്. ഇത് യുക്തിപ രമായി ശരിയായ ഒരു നിർവചനം അല്ല. അതിനാൽ എ.എൻ. കോൾമോഗൊറോവ് എന്ന റഷ്യൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ 1933 ൽ സാധ്യതയുടെ ഒരു പുതിയ സിദ്ധാന്തം വികസിപ്പിച്ചെടുത്തു. അതിനായി അദ്ദേഹം 'ഫൗണ്ടേഷൻ ഓഫ് പ്രോബബിലിറ്റി' എന്ന പുസ്തകത്തിൽ സാധ്യതയെക്കുറിച്ച് സ്വയംപ്രമാണങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ വിശദീകരിച്ചു. ഈ സമീപനത്തെ സാധ്യതയുടെ സ്വയംപ്രമാണ സമീപനം എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഈ അധ്യായത്തിൽ ഈ സമീപനത്തെക്കുറിച്ച് വിശദമായി ചർച്ച ചെയ്യുന്നുണ്ട്.

16.2 പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണം (Random Experiments)

നിത്യജീവിതത്തിൽ നാം കൈകാര്യം ചെയ്യുന്ന ചില പരീക്ഷണങ്ങളുടെ ഫലം പ്രവചിക്കാൻ സാധിക്കുന്നവയും മറ്റു ചിലത് പ്രവചിക്കാൻ സാധിക്കാത്തവയുമാണ്. ഫലം പ്രവചിക്കാൻ സാധിക്കാത്ത പരീക്ഷണങ്ങളെ പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണം എന്നു പറയുന്നു. ഒരു നാണയം എറിയുന്ന പരീക്ഷണം, ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറി യുന്ന പരീക്ഷണം എന്നിവ ഇതിന് ഉദാഹരണമാണ്. ഇത്തരത്തിലുള്ള പരീക്ഷണ ങ്ങൾ കണ്ടെത്തി കൂട്ടുകാരുമായി ചർച്ച ചെയ്യൂ.

ഒരു പരീക്ഷണത്തെ പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണം എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ.

i. ഇതിന് ഒന്നിൽ കൂടുതൽ പരിണതഫലങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കണം.

ii. ഇതിന്റെ പരിണതഫലം പ്രവചിക്കുവാൻ സാധിക്കുകയില്ല.

ഈ അധ്യായത്തിൽ പരീക്ഷണം എന്നതുകൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത് പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണം എന്നാണ്.

16.2.1 പരിണതഫലങ്ങളും സാധ്യതാഗണവും (Outcomes and Sample Space)

ഒരു പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണത്തിനൊടുവിൽ ലഭിക്കുന്ന ഏതൊരു ഫലത്തേയും പരിണതഫലം എന്നു വിളിക്കാം.

ഒരു ക്രിക്കറ്റ് മത്സരം തുടങ്ങുന്നതിനു മുമ്പ് ഇരു ക്യാപ്റ്റന്മാരും ഗ്രൗണ്ടിൽ ഒരു നാണയം എറിയുന്നത് ശ്രദ്ധിച്ചിട്ടുണ്ടോ? ഇങ്ങനെ ഒരു നാണയം എറിയുമ്പോൾ ഏതൊക്കെ പരിണതഫലങ്ങൾ ലഭിക്കാം? ഇങ്ങനെ ലഭിക്കുന്ന ആകെ പരിണത ഫലങ്ങളുടെ ഗണത്തെ സാധ്യതാഗണം (Sample space) എന്നും പറയുന്നു. ഈ സാധ്യതാഗണത്തിലെ ഓരോ പരിണതഫലത്തേയും സാധ്യതാബിന്ദു (Sample point) എന്നും വിളിക്കാം. എങ്കിൽ ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന സാധ്യതാഗണം എന്താകും? വിവിധ പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണങ്ങളുടെ സാധ്യതാ ഗണങ്ങൾ കണ്ടെത്തൂ.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടി പരിശോധിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 1

ഒരേ സമയം രണ്ട് നാണയങ്ങൾ (ഒന്ന് ഒരു രൂപാ നാണയവും മറ്റേത് രണ്ടു രൂപാ നാണയവും) എറിയുന്നു. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ രണ്ട് നാണയങ്ങൾ ഉള്ളതിനാൽ അവയെ ഒന്നാമത്തെ നാണയം, രണ്ടാമത്തെ നാണയം എന്നിങ്ങനെ വിളിക്കാം. ഒരു നാണയത്തിന് തല (Head), വാൽ (Tail) എന്നീ രണ്ട് മുഖങ്ങളാണുള്ളത് ഇവ യഥാക്രമം, H, T എന്നിവകൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം. സാധ്യമായ പരിണതഫലങ്ങൾ ചുവടെ പറയുന്നു.

2 നാണയങ്ങളിലും **H** കിട്ടാം; ആദ്യത്തെ നാണയത്തിൽ H, രണ്ടാമത്തെ നാണയത്തിൽ T; ആദ്യത്തെ നാണയത്തിൽ T, രണ്ടാമത്തെ നാണയത്തിൽ H; 2 നാണയങ്ങളിലും T. ഇങ്ങനെ നാല് പരിണത ഫലങ്ങളാണുള്ളത്. അതിനാൽ സാധ്യതാഗണം, S = {HH, HT, TH, TT}.

ഉദാഹരണം : 2

ഒരു ജോടി സമചതുരക്കട്ടകൾ (ഒന്ന് നീലയും മറ്റേത് ചുവപ്പും) എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക. ഈ സാധ്യതാഗണത്തിൽ എത്ര അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടെന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

നീല സമചതുരക്കട്ടയിൽ 1 എന്ന സംഖ്യയും ചുവന്ന സമചതുരക്കട്ടയിൽ 2 എന്ന സംഖ്യയും കിട്ടുന്നു എന്ന് വിചാരിക്കുക. ഇതിനെ (1, 2) എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ ഈ പരിണതഫലങ്ങളെ (x, y) കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം. x എന്നത് നീല ചതുരക്കട്ടയിൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയും y എന്നത് ചുവന്ന സമചതുരക്കട്ടയിൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയും ആണ്. അതുകൊണ്ട് S = {(x, y): x നീല സമചതുരക്കട്ടയിലെ സംഖ്യ, y ചുവന്ന സമചതുരക്കട്ടയിലെ സംഖ്യ}

സാധ്യതാഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം $6 \times 6 = 36$ ആണ്. സാധ്യതാഗണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\\ &(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\\ &(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}\end{aligned}$$

കുറിപ്പ്

ഒരു സമചതുരക്കട്ട n പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോൾ സാധ്യതാഗണത്തിൽ 6^n പരിണതഫലങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇവിടെ 6 എന്നത് സമചതുരക്കട്ടയുടെ മുഖങ്ങളുടെ എണ്ണമാണ്. അതുപോലെ ഒരു നാണയം n പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോൾ സാധ്യതാഗണത്തിൽ 2^n പരിണതഫലങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇവിടെ 2 എന്നത് നാണയത്തിന്റെ മുഖങ്ങളുടെ എണ്ണം ആണ്.

ഉദാഹരണം : 3

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പരീക്ഷണങ്ങൾക്ക് ഉചിതമായ സാധ്യതാഗണങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

i. ഒരു ആൺകുട്ടിയുടെ പോക്കറ്റിൽ ഒരു 1 രൂപാ നാണയം, ഒരു 2 രൂപാ നാണയം, ഒരു 5 രൂപാ നാണയം എന്നിവ ഉണ്ട്. ഈ കുട്ടി പോക്കറ്റിൽ നിന്നും 2 നാണയങ്ങൾ ഒന്നിനു പുറകേ ഒന്നായി പുറത്തെടുക്കുന്നു.

ii. തിരക്കുള്ള ഒരു ഹൈവേയിൽ ഒരു വർഷം ഉണ്ടാകാവുന്ന അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒരാൾ രേഖപ്പെടുത്തുന്നു.

പരിഹാരം

i. ഒരു രൂപാ നാണയത്തെ Q എന്നും 2 രൂപാ നാണയത്തെ H എന്നും 5 രൂപാ നാണയത്തെ R എന്നും വിളിക്കാം. അയാൾ ആദ്യം എടുക്കുന്ന നാണയം ഈ മൂന്ന് നാണയങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നാകാം. H അല്ലെങ്കിൽ Q അല്ലെങ്കിൽ R. ആദ്യം Q എന്ന നാണയമാണ് എടുത്തതെങ്കിൽ രണ്ടാമത് എടുക്കുന്ന നാണയം H അല്ലെങ്കിൽ R ആകാം. ഇതിന്റെ പരിണത ഫലങ്ങൾ QH, QR

എന്നിവയാണ്. ആദ്യം എടുക്കുന്ന നാണയം H ആണെങ്കിൽ രണ്ടാമത് എടുക്കുന്ന നാണയം Q അല്ലെങ്കിൽ R ആകാം. ഇതിന്റെ പരിണത ഫലങ്ങൾ HQ, HR എന്നിവയാണ്. ഇതേ പോലെ ആദ്യം എടുക്കുന്ന നാണയം R ആയാൽ രണ്ടാമത് എടുക്കുന്ന നാണയം Q അല്ലെങ്കിൽ H ആകാം. ഇതിന്റെ പരിണത ഫലങ്ങൾ RQ, RH എന്നിവയാണ്.

അതായത് S = {QH, QR, HQ, HR, RQ, RH}

ii. തിരക്കുള്ള ഹൈവേയിൽ ഒരു വർഷം അപകടങ്ങൾ സംഭവിക്കാതിരിക്കാം. അപ്പോൾ അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം '0' ആയിരിക്കും. അതുപോലെ അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം 1 ആകാം, 2 ആകാം ഇങ്ങനെ ഏത് അഖണ്ഡസംഖ്യയുമാകാം. അതിനാൽ S = {0, 1, 2, ...}

ഉദാഹരണം : 4

ഒരു നാണയം എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. നാണയത്തിൽ തല (H) ആണ് ലഭിക്കുന്നതെങ്കിൽ 3 നീല പന്തുകളും 4 വെളുത്ത പന്തുകളും ഉള്ള ഒരു ബാഗിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് എടുക്കുന്നു. നാണയത്തിൽ വാൽ (T) ആണ് ലഭിക്കുന്നതെങ്കിൽ ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.

പരിഹാരം

നീല പന്തുകളെ B_1, B_2, B_3 എന്നും വെളുത്ത പന്തുകളെ W_1, W_2, W_3, W_4 എന്നും കരുതാം.

$$S = \{HB_1, HB_2, HB_3, HW_1, HW_2, HW_3, HW_4, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$$

ഇവിടെ HB_i അർത്ഥമാക്കുന്നത് നാണയത്തിൽ H ലഭിക്കുമ്പോൾ B_i എന്ന പന്ത് എടുക്കുന്നു. HW_i അർത്ഥമാക്കുന്നത് നാണയത്തിൽ H ലഭിക്കുമ്പോൾ W_i എന്ന പന്ത് എടുക്കുന്നു. Ti അർത്ഥമാക്കുന്നത് നാണയത്തിൽ T കിട്ടുമ്പോൾ സമചതുരക്കട്ടയിൽ 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നീ മുഖങ്ങൾ ലഭിക്കാം എന്നാണ്.

ഉദാഹരണം : 5

ഒരു നാണയം ഒരു H കിട്ടുന്നതുവരെ തുടർച്ചയായി എറിയുന്നു. ഇതിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.

പരിഹാരം

നാണയം ആദ്യം എറിയുമ്പോൾത്തന്നെ H കിട്ടാം. അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടാം പ്രാവശ്യം H കിട്ടാം. അതുമല്ലെങ്കിൽ 3-ാം പ്രാവശ്യം H കിട്ടാം, അങ്ങനെ തുടർന്നാൽ,

$$S = \{H, TH, TTH, ...\}$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 16.1

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പരീക്ഷണങ്ങളുടെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.

1. ഒരു നാണയം 3 പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു.
2. ഒരു സമചതുരക്കട്ട 2 പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു.
3. ഒരു നാണയം 4 പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു.
4. ഒരു നാണയവും ഒരു സമചതുരക്കട്ടയും എറിയുന്നു.
5. ഒരു നാണയം എറിയുന്നു. നാണയത്തിൽ തല (H) ആണ് പരിണതഫലമെങ്കിൽ ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു.
6. X എന്ന മുറിയിൽ 2 ആൺകുട്ടികളും 2 പെൺകുട്ടികളും ഉണ്ട്. Y എന്ന മുറിയിൽ 1 ആൺകുട്ടിയും 3 പെൺകുട്ടികളും ഉണ്ട്. ആദ്യം ഒരു മുറി തെരഞ്ഞെടുത്തതിനുശേഷം ഒരു കുട്ടിയെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.
7. ഒരു ബാഗിൽ ചുവപ്പു നിറത്തിലുള്ള ഒരു സമചതുരക്കട്ടയും വെളുത്ത നിറത്തിലുള്ള ഒരു സമചതുരക്കട്ടയും നീലനിറത്തിലുള്ള ഒരു സമചതുരക്കട്ടയും ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു സമചതുരക്കട്ട പ്രവചനാതീതമായി എടുത്തതിനു ശേഷം എറിയുന്നു. ഇതിന്റെ നിറവും മുകളിൽ കാണുന്ന മുഖത്തിലെ സംഖ്യയും രേഖപ്പെടുത്തുന്നു. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.
8. 2 കുട്ടികൾ ഉള്ള കുടുംബങ്ങളിലെ ആൺ-പെൺ വിശദാംശം രേഖപ്പെടുത്തുന്നു.
   i. ജനിച്ചതിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ, ആദ്യത്തെ കുട്ടി ആണാണോ പെണ്ണാണോ എന്ന് രേഖപ്പെടുത്തുന്ന പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.
   ii. കുടുംബത്തിലെ പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം രേഖപ്പെടുത്തുന്ന പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.
9. ഒരു പെട്ടിയിൽ ഒരു ചുവപ്പും ഒരേ പോലുള്ള 3 വെളുത്ത പന്തുകളും ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും 2 പന്തുകൾ തുടർച്ചയായി എടുക്കുന്നു. ഈ പന്തുകൾ തിരികെ പെട്ടിയിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നില്ല. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.
10. ഒരു നാണയം എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. ആദ്യം തല (H) ആണ് ലഭിക്കുന്നതെങ്കിൽ അതേ നാണയം വീണ്ടും എറിയുന്നു. ആദ്യം വാൽ (T) ആണ് ലഭിക്കുന്നതെങ്കിൽ ഒരു സമചതുരക്കട്ട ഒരു പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.

11. ഒരു പെട്ടിയിൽ നിന്നും 3 ബൾബുകൾ എടുക്കുന്നു. അവ ഓരോന്നും പരിശോധിച്ചശേഷം കേടായത് (D) എന്നും കേടാവാത്തത് (N) എന്നും തരം തിരിക്കുന്നു. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.

12. ഒരു നാണയം എറിയുന്നു. ഇതിന്റെ പരിണതഫലം തല (H) ആണെങ്കിൽ ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു. ഈ സമചതുരക്കട്ടയിൽ പരിണതഫലം ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ ആ സമചതുരക്കട്ട വീണ്ടും എറിയുന്നു. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.

13. നാല് കടലാസുകഷണങ്ങളിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നീ സംഖ്യകൾ എഴുതിയിരിക്കുന്നു. ഈ നാലു കഷണങ്ങളും ഒരു പെട്ടിയിൽ ഇട്ട് നല്ലതുപോലെ ഇടകലർത്തുന്നു. ഒരാൾ ഈ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഒന്നിനു പിറകേ ഒന്നായി രണ്ടു കടലാസ് കഷണങ്ങൾ എടുക്കുന്നു. എടുക്കുന്ന കടലാസ് കഷണം തിരികെ പെട്ടിയിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നില്ല. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.

14. ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു. സമചതുരക്കട്ടയിലെ പരിണതഫലം ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യയായാൽ ഒരു നാണയം എറിയുന്നു. സമചതുരക്കട്ടയിലെ പരിണതഫലം ഒരു ഒറ്റസംഖ്യയായാൽ ആ നാണയം രണ്ട് പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.

15. ഒരു നാണയം എറിയുന്നു. പരിണതഫലം വാൽ (T) ആണെങ്കിൽ 2 ചുവപ്പും 3 കറുപ്പും പന്തുകൾ ഉള്ള ഒരു പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് എടുക്കുന്നു. പരിണതഫലം തല (H) ആണെങ്കിൽ ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.

16. ഒരു സമചതുരക്കട്ട 6 എന്ന മുഖം ലഭിക്കുന്നതു വരെ തുടർച്ചയായി എറിയുന്നു. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം എഴുതുക.

16.3 സംഭവങ്ങൾ (Events)

എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെപ്പറ്റി നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. 7 ൽ കുറവായ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ഗണം പരിഗണിക്കുക. ഈ ഗണത്തിന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ സമസ്ത ഗണത്തെപ്പറ്റി ചിന്തിച്ചിട്ടുണ്ടോ? ഈ ഗണം {1, 2, 3, 4, 5, 6} ആണെന്ന് കാണാം. ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം {1, 2, 3, 4, 5, 6} ആണ്. ഈ രണ്ടു ഗണങ്ങളും തുല്യ ഗണങ്ങളാണെന്നു കാണാം. അതായത് ഗണത്തിലെ സമസ്തഗണത്തിന്റെ അതേ പ്രാധാന്യമാണ് സാധ്യതാഗണത്തിന് സാധ്യതകളുടെ ഗണത്തിലുള്ളത്.

ഒരു നാണയം 2 പ്രാവശ്യം എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. ഇതിന്റെ സാധ്യതാഗണം S = {HH, HT, TH, TT} ആണ്.

ഒരു H മാത്രം കിട്ടുന്ന പരിണതഫലങ്ങൾ HT, TH എന്നിവയാണ്. ഇവയെ E = {HT, TH} എന്ന് വിളിക്കാം. E എന്ന ഗണത്തിലെ രണ്ട് അംഗങ്ങളും S ൽ ഉണ്ട്. അതായത് E എന്ന ഗണം S എന്ന ഗണത്തിന്റെ ഒരു ഉപഗണമാണ്. ഇതേപോലെ സംഭവങ്ങളും (events) S ന്റെ ഉപഗണങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ഒരു ബന്ധം നമുക്ക് കണ്ടു പിടിക്കാം.

സംഭവങ്ങൾ	ഈ സംഭവം സൂചിപ്പിക്കുന്ന S ന്റെ ഉപഗണം
കൃത്യം രണ്ട് T	A = { TT}
ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് ഒരു T	B = {HT, TH, TT}
എറ്റവും കൂടിയത് ഒരു H	C = {HT, TH, TT}
രണ്ടാമത്തെ പ്രാവശ്യം H അല്ല	D = {HT, TT}
ഏറ്റവും കൂടിയത് രണ്ട് T	S = {HH, HT, TH, TT}
T കളുടെ എണ്ണം രണ്ടിൽ കൂടുതൽ	ϕ

ഇതിൽ നിന്നും S ന്റെ ഉപഗണങ്ങൾക്കു ഒരു സംഭവവുമായി ബന്ധമുണ്ട് എന്നും ഏതൊരു സംഭവത്തിനും S ന്റെ ഉപഗണവുമായി ബന്ധമുണ്ട് എന്നും മനസ്സിലാക്കാം. അതുകൊണ്ട് ഒരു സംഭവത്തെ ചുവടെ പറയുന്ന രീതിയിൽ നിർവചിക്കാം.

നിർവചനം

സാധ്യതാഗണത്തിന്റെ ഏതൊരു ഉപഗണത്തേയും ഒരു സംഭവം (Event) എന്നു പറയാം.

16.3.1 ഒരു സംഭവം സാധ്യമാകുന്നതെപ്പോൾ?

സാധ്യതാഗണത്തിലെ ഒരു സംഭവം E നടന്നു എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ ആ പരീക്ഷ ണത്തിന്റെ പരിണതഫലമായ ω, E എന്ന സംഭവത്തിലെ അംഗമായിരിക്കണം. അതായത്, $\omega \in E$. ഈ പരിണതഫലം ω, E യിൽ ഇല്ലെങ്കിൽ E എന്ന സംഭവം നട ന്നില്ല എന്നും പറയാം.

16.3.2 വിവിധതരം സംഭവങ്ങൾ (Types of Events)

സംഭവങ്ങളെ അവയുടെ അംഗങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ പലതായി തിരിക്കാം.

1. സാധ്യമല്ലാത്ത സംഭവം (impossible event), തീർച്ചയുള്ള സംഭവം (sure event)

ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന സാധ്യതാഗണം ചുവടെ കൊടുക്കു ന്നു.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

E എന്നത് സമചതുരക്കട്ടയിൽ '7 ന്റെ ഗുണിതം വരുന്ന മുഖം' എന്ന സംഭവമാണ് എന്നിരിക്കട്ടെ.

E എന്ന സംഭവം എഴുതാൻ സാധിക്കുന്നുണ്ടോ?

ഇതിൽ ഒരംഗം പോലുമില്ല എന്ന് കാണാം. അതിനാൽ E എന്ന ഗണം ശൂന്യഗണമാണ്, ഇതിനെ ϕ ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാം.

ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. F എന്നത് സമചതുരക്കട്ടയുടെ മുകളിലത്തെ മുഖത്ത് ഒരു ഒറ്റസംഖ്യയോ ഇരട്ടസംഖ്യയോ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഭവമാണ്. അതായത് $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ എല്ലാ പരിണതഫലങ്ങളും F എന്ന സംഭവം നടക്കുന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് $F = S$ ആണ്. അതിനാൽ F നെ ഒരു തീർച്ചയുള്ള സംഭവം എന്നു പറയുന്നു.

2. ലഘു സംഭവം (Simple event)

E എന്ന ഒരു സംഭവത്തിൽ ഒരംഗം മാത്രമേ ഉള്ളൂ എങ്കിൽ ആ സംഭവത്തെ ലഘു സംഭവം എന്നു പറയുന്നു.

രണ്ടു നാണയങ്ങൾ എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക.

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$.

ഇവിടെ $E_1 = \{HH\}$, $E_2 = \{HT\}$, $E_3 = \{TH\}$, $E_4 = \{TT\}$ എന്നിവ ലഘു സംഭവങ്ങളാണ്.

3. സംയുക്ത സംഭവം (Compound event)

E എന്ന ഒരു സംഭവത്തിൽ ഒന്നിൽ കൂടുതൽ അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ ആ സംഭവത്തെ സംയുക്ത സംഭവം എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു നാണയം 3 തവണ എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക.

E - കൃത്യമായി ഒരു H കിട്ടുന്നു.

F - ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് ഒരു H കിട്ടുന്നു.

G - പരമാവധി ഒരു H കിട്ടുന്നു.

$E = \{HTT, THT, TTH\}$, $F = \{HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}$

$G = \{TTT, THT, HTT, TTH\}$

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ E, F, G എന്നീ എല്ലാ സംഭവങ്ങളിലും ഒന്നിൽ കൂടുതൽ സാധ്യതാബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ട്. അതിനാൽ ഈ സംഭവങ്ങൾ സംയുക്ത സംഭവങ്ങളാണ്.

16.3.3 സംഭവങ്ങളുടെ ക്രിയകൾ (Algebra of Events)

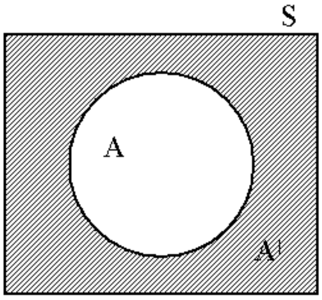
ഗണങ്ങൾ എന്ന അദ്ധ്യായത്തിൽ രണ്ടു ഗണങ്ങളുടെ യോഗം, സംഗമം, വ്യത്യാസം, പൂരകം എന്നീ ക്രിയകൾ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇതേപോലെ ഈ ക്രിയകൾ ഉപയോഗിച്ച് സംഭവങ്ങളെ കൂട്ടിച്ചേർക്കാൻ സാധിക്കും.

1. പൂരകസംഭവങ്ങൾ (Complementary events)

A എന്ന ഏതൊരു സംഭവം പരിഗണിച്ചാലും നമുക്ക് A′ എന്ന മറ്റൊരു സംഭവം കണ്ടുപിടിക്കാം. ഇതിനെ A എന്ന സംഭവത്തിന്റെ പൂരകസംഭവം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ 'A സംഭവിക്കുന്നില്ല' എന്നും പറയാറുണ്ട്.

ഉദാഹരണത്തിന് മൂന്ന് നാണയം എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. ഇതിന്റെ സാധ്യതാഗണം, S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTT, TTH, THT, HTT} എന്നാണ്. ഇവിടെ ഒരു 'T' കിട്ടുന്ന സംഭവം A എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$A = \{HHT, HTH, THH\}$$



ചിത്രം 16.1

ഇവിടെ HHH എന്ന പരിണത ഫലം A എന്ന സംഭവത്തിൽ ലഭിക്കുന്നില്ല. പക്ഷേ 'A ലഭിക്കുന്നില്ല' എന്ന സംഭവം നടന്നതായി നമുക്ക് പറയാം. അതായത് A എന്ന സംഭവത്തിൽ ഇല്ലാത്ത ഏതൊരു പരിണത ഫലത്തിനും 'A ലഭിക്കുന്നില്ല' എന്ന സംഭവം നടന്നു എന്ന് നമുക്ക് പറയാം. അതിനാൽ മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ $A^1 = \{HHH, HTT, THT, TTH, TTT\}$ അതായത് $A^1 = \{\omega : \omega \in S, \omega \notin A\} = S - A$ ആയിരിക്കും.

2. 'A അല്ലെങ്കിൽ B' എന്ന സംഭവം ($A \cup B$)

A, B എന്നിവ S എന്ന സാധ്യതാഗണത്തിലെ രണ്ട് സംഭവങ്ങളാണ്. A, B എന്നീ സംഭവങ്ങളെ കൂട്ടിച്ചേർത്ത് രൂപീകരിക്കുന്ന സംഭവമാണ് $A \cup B$. അതായത് $A \cup B$ എന്ന സംഭവം ഒന്നുകിൽ A, അല്ലെങ്കിൽ B, അല്ലെങ്കിൽ A യും B യും ചേർന്നത് ആയിരിക്കും.

A അല്ലെങ്കിൽ $B = A \cup B = \{\omega : \omega \in A$ അല്ലെങ്കിൽ $\omega \in B\}$

3. A സംഗമം B എന്ന സംഭവം ($A \cap B$)

A, B എന്നീ സംഭവങ്ങളിലെ പൊതുവായ അംഗങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന സംഭവമാണ് 'A സംഗമം B'. ഇത് $A \cap B$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$$\text{അതായത് } A \cap B = \{\omega : \omega \in A \,\&\, \omega \in B\}$$

ഉദാഹരണമായി ഒരു സമചതുരക്കട്ട 2 പ്രാവശ്യം എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കാം. A എന്നത് ആദ്യപ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന മുഖത്തിലെ സംഖ്യ 6 എന്നതും B എന്നത് രണ്ടു പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോൾ ഓരോ മുഖത്തിലേയും സംഖ്യകൾ കൂട്ടുമ്പോൾ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് 11 കിട്ടുന്ന സംഭവവും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ $A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$B = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

അതുകൊണ്ട് $A \cap B = \{(6, 5), (6, 6)\}$

4. A വ്യത്യാസം B

A യും B യും രണ്ട് ഗണങ്ങളായാൽ A - B എന്നത് A യിൽ ഉള്ളതും B യിൽ ഇല്ലാത്തതുമായ അംഗങ്ങളുടെ ഗണമാണ്. ഇതുപോലെ A യും B യും രണ്ട് സംഭവങ്ങളായാൽ A - B എന്നത് A യിൽ ഉള്ളതും എന്നാൽ B യിൽ ഇല്ലാത്തതുമായ പരിണതഫലങ്ങളുടെ ഗണമാണ്. $A - B = A \cap B'$ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 6

ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. A എന്നത് സമചതുരക്കട്ടയുടെ മുഖത്ത് ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ കിട്ടുന്ന സംഭവവും B എന്നത് സമചതുരക്കട്ടയുടെ മുഖത്ത് ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ കിട്ടുന്ന സംഭവവും ആണ്. എങ്കിൽ

(i) A അല്ലെങ്കിൽ B (ii) A സംഗമം B

(iii) A വ്യത്യാസം B (iv) 'A ലഭിക്കുന്നില്ല'

എന്നിവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഗണങ്ങൾ എഴുതുക.

പരിഹാരം

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 3, 5\}, B = \{1, 3, 5\}$

(i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

(ii) $A \cap B = \{3,5\}$

(iii) $A - B = \{2\}$

(iv) $A' = \{1,4,6\}$

16.3.4 പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങൾ (Mutually Exclusive Events)

ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ സാധ്യതാഗണം $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ആണ്. A എന്നത് ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ കിട്ടുന്ന സംഭവവും B എന്നത് ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ കിട്ടുന്ന സംഭവവും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{1, 3, 5\}$$

ഇവിടെ, $A \cap B = \phi$. അതായത് A യും B യും വിയുക്തഗണങ്ങളാണ്. അതായത് A നടക്കുന്നത് B നടക്കുന്നതിനെ തടസ്സപ്പെടുത്തുകയും അതുപോലെ തിരിച്ചും. പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ A, B എന്നീ സംഭവങ്ങളെ പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങൾ എന്നു പറയണമെങ്കിൽ ഒരു സംഭവം നടക്കുന്നത് മറ്റേ സംഭവം നടക്കുന്നതിനെ ഒഴിവാക്കണം. അതായത് ഈ രണ്ടു സംഭവങ്ങളും ഒരേ സമയം സംഭവിക്കുകയില്ല.

ഒരു സാധ്യതാഗണത്തിന്റെ ലഘു സംഭവങ്ങൾ (Simple events) എല്ലായ്പ്പോഴും പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളായിരിക്കും.

16.3.5 സമഗ്ര സംഭവങ്ങൾ (Exhaustive events)

ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. ചുവടെ പറയുന്ന സംഭവങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

A : 4 ൽ കുറവായ ഒരു സംഖ്യ കിട്ടുന്നു

B : 2 നേക്കാൾ കൂടുതലും 5 നേക്കാൾ കുറവായതുമായ സംഖ്യ കിട്ടുന്നു.

C : 4 നേക്കാൾ കൂടുതലായ ഒരു സംഖ്യ ലഭിക്കുന്നു.

$$A = \{1, 2, 3\},\ B = \{3, 4\},\ C = \{5, 6\}$$
$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$$

A, B, C എന്നീ സംഭവങ്ങളെ സമഗ്ര സംഭവങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ, $E_1, E_2, \ldots E_n$ ഇവ സാധ്യതാഗണം S ലെ n സംഭവങ്ങളും, $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$ ആകുകയും ചെയ്താൽ $E_1, E_2, \ldots E_n$ എന്നിവയെ സമഗ്ര സംഭവങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

കൂടാതെ $E_i \cap E_j = \phi,\ i \neq j$ ആയാൽ E_i, E_j ഇവ ജോടികളായി വിയുക്തങ്ങളാകുകയും $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$ ആകുകയും ചെയ്താൽ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ഇവ പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളും സമഗ്ര സംഭവങ്ങളും ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 7

രണ്ടു സമചതുരക്കട്ടകൾ എറിയുന്നു. ഇവയുടെ മുകളിലത്തെ മുഖങ്ങളിൽ വരുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുക പരിഗണിക്കുക. ഈ പരീക്ഷണവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഏതാനും സംഭവങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

A : തുക ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്. B : തുക 3 ന്റെ ഗുണിതമാണ്. C : തുക 4ൽ കുറവാണ്. D : തുക 11 ൽ കൂടുതലാണ്

ഏതെല്ലാം ജോടികളാണ് പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങൾ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$
$$B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)\}$$
$$C = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}, D = \{(6, 6)\}$$

$$A \cap B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\} \neq \phi$$

A യും B യും പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളല്ല.

$A \cap C \neq \phi$, $A \cap D \neq \phi$, $B \cap C \neq \phi$; $B \cap D \neq \phi$. അതുകൊണ്ട് ജോടികൾ (A, C), (A, D), (B, C), (B, D) എന്നിവ പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളല്ല.

$C \cap D = \phi$ ആയതിനാൽ C യും D യും പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്നു.

ഉദാഹരണം : 8

ഒരു നാണയം 3 പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഭവങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

A : ഒരു മുഖം കിട്ടുന്നില്ല. B : കൃത്യം ഒരു H കിട്ടുന്നു.

C : ചുരുങ്ങിയത് രണ്ട്, H കൾ എങ്കിലും കിട്ടുന്നു. ഈ സംഭവങ്ങൾ പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്നതും സമഗ്രവും ആണോ?

പരിഹാരം

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

A = {TTT}, B = {HTT, THT, TTH}, C = {HHT, HTH, THH, HHH}

$A \cup B \cup C = S$

A, B, C എന്നിവ സമഗ്ര സംഭവങ്ങളാണ്.

കൂടാതെ $A \cap B = \phi$, $A \cap C = \phi$, $B \cap C = \phi$

A, B, C എന്നിവ പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളും സമഗ്ര സംഭവങ്ങളും ആണ്.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 16.2

1. ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു. സമചതുരക്കട്ടയിൽ '4' എന്ന മുഖം കാണിക്കുന്ന സംഭവമാണ് E. ചതുരക്കട്ടയിൽ ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ കാണിക്കുന്ന സംഭവമാണ് F എന്നും കരുതുക. E യും F എന്നിവ പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളാണോ?

2. ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഭവങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

   (i) A: 7 ൽ കുറവായ ഒരു സംഖ്യ (ii) B: 7 ൽ കൂടുതലായ ഒരു സംഖ്യ

   (iii) C: 3 ന്റെ ഒരു ഗുണിതം (iv) D: 4 ൽ കുറവായ ഒരു സംഖ്യ

   (v) E: 4 ൽ കൂടുതലായ ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ (vi) F: 3 ൽ കുറയാത്ത ഒരു സംഖ്യ

   $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $E \cup F$, $D \cap E$, $A - C$, $D - E$, $E \cap F'$, F' എന്നിവ കാണുക.

3. രണ്ടു സമചതുരക്കട്ടകൾ എറിയുകയും അവയുടെ മുകളിലത്തെ മുഖത്തിൽ വരുന്ന സംഖ്യ കുറിച്ചെടുക്കുകയും ചെയ്യുന്ന പരീക്ഷണത്തിൽ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സംഭവങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

   A: രണ്ടു മുഖങ്ങളിലേയും സംഖ്യകളുടെ തുക 8 ൽ കൂടുതൽ

   B: രണ്ടിലും 2 എന്ന സംഖ്യ ലഭിക്കുന്നു.

   C: തുക ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് 7 ഉം 3 ന്റെ ഗുണിതവും

   ഇവയിൽ ഏതൊക്കെ ജോടികളാണ് പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളാകുന്നത്?

4. ഒരേ സമയം 3 നാണയങ്ങൾ എറിയുന്നു. മൂന്ന് H ലഭിക്കുന്ന സംഭവമാണ് A, രണ്ട് H ഉം ഒരു T യും ലഭിക്കുന്ന സംഭവമാണ് B, മൂന്ന് T ലഭിക്കുന്ന സംഭവമാണ് C. ഒന്നാമത്തെ നാണയത്തിൽ H ലഭിക്കുന്ന സംഭവമാണ് D. ഇവയിൽ ഏതൊക്കെ സംഭവങ്ങളാണ്

   i. പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങൾ

   ii. ലഘു സംഭവങ്ങൾ

   iii. സംയുക്ത സംഭവങ്ങൾ

5. മൂന്ന് നാണയങ്ങൾ എറിയുന്നു. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ എഴുതുക.

   i. പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ

   ii. പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്നവയും സമഗ്രം ആയതുമായ 3 സംഭവങ്ങൾ

   iii. പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടാത്ത രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ

   iv. പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്നതും എന്നാൽ സമഗ്രം അല്ലാത്തതുമായ രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ

   v. പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്നതും സമഗ്രമല്ലാത്തതുമായ മൂന്ന് സംഭവങ്ങൾ.

6. രണ്ട് സമചതുരക്കട്ടകൾ എറിയുന്നു. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഭവങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

   A - ഒന്നാമത്തെ സമചതുരക്കട്ടയിൽ ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ ലഭിക്കുന്നു.

   B - ഒന്നാമത്തെ സമചതുരക്കട്ടയിൽ ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ ലഭിക്കുന്നു

   C - രണ്ട് സമചതുരക്കട്ടകളിലും ലഭിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുക 5 അല്ലെങ്കിൽ 5 ൽ കുറവ്

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കാണുക.

(i) A' (ii) B ലഭിക്കുന്നില്ല (iii) A അല്ലെങ്കിൽ B

(iv) A യും B യും (v) A ആണ് C അല്ല (vi) B അല്ലെങ്കിൽ C

(vii) B യും C യും (viii) $A \cap B' \cap C'$

7. മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചോദ്യത്തെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തി, (ചോദ്യം 6) ചുവടെ പറയുന്നവ ശരിയോ തെറ്റോ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക. (കാരണം എഴുതുക).

i. A യും B യും പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളാണ്.

ii. A യും B യും പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്നവയും സമഗ്രവും ആണ്.

iii. $A = B'$

iv. A യും C യും പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്നവയാണ്.

v. A യും B' ഉം പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്നവയാണ്.

vi. A', B', C എന്നിവ പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്നവയും സമഗ്രവും ആണ്.

16.4. സ്വയം പ്രമാണ സമീപനം (Axiomatic Approach)

S എന്നത് ഒരു പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണവും A ഒരു സംഭവവുമാണ്. ഈ സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യതയെ P(A) എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. P(A) എന്നത് S ന്റെ ഉപഗണമായ A എന്ന സംഭവത്തോട് ബന്ധമുള്ള ഒരു രേഖീയസംഖ്യാ ഏകദമാണ്. അതായത് P(A) എന്നത് ഒരു സാധ്യതാ ഏകദത്തെ സൂചിപ്പിക്കണമെങ്കിൽ ചുവടെ പറയുന്ന സ്വയംപ്രമാണങ്ങൾ പാലിക്കപ്പെടണം.

സ്വയം പ്രമാണം (1) – S എന്ന സാധ്യതാഗണത്തിന്റെ ഒരു ഉപഗണമാണ് A. അതുകൊണ്ട് $0 \le P(A) \le 1$

സ്വയം പ്രമാണം (2) – $P(S) = 1$

സ്വയം പ്രമാണം (3) – $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_k$ എന്നിവ പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളായാൽ $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$ ആയിരിക്കും.

3 സ്വയംപ്രമാണങ്ങളും S ന്റെ ഉപഗണമായ ഏതൊരു സംഭവത്തിന്റേയും സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് സഹായിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന് ഒരു നാണയം എറിയുന്ന പരീക്ഷണത്തിൽ $\frac{1}{2}$ എന്ന സംഖ്യയെ പരിണതഫലങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തുവാൻ കഴിയും. അതായത്,

$P(H) = \frac{1}{2}, P(T) = \frac{1}{2}$

$P(H) + P(T) = 1$ എന്നും കിട്ടുന്നു. ആയതിനാൽ സ്വയം പ്രമാണങ്ങളും പാലിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം

$S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ എന്ന സാധ്യതാഗണം പരിഗണിക്കുക. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതൊക്കെയാണ് സ്വയം പ്രമാണങ്ങൾ അനുസരിക്കുന്നതെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിണതഫലങ്ങൾ	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
(a)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
(b)	1	0	0	0	0	0
(c)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$
(d)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$
(e)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

പരിഹാരം

(a) (i): ഓരോ സാധ്യതയും അധിസംഖ്യ ആണ്, ഒന്നിനേക്കാൾ കുറവാണ്.

(ii): സാധ്യതകളുടെ തുക $= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = 1$ അതിനാൽ (a) എന്നത് സ്വയംപ്രമാണങ്ങൾ പാലിക്കുന്നു.

(b) (i): ഓരോ സാധ്യതയും 0 അല്ലെങ്കിൽ 1 ആണ്.

(ii) സാധ്യതകളുടെ തുക = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1 ആണ്.

അതിനാൽ (b) സ്വയംപ്രമാണങ്ങൾ പാലിക്കുന്നു.

(c) $P(\omega_5)$, $P(\omega_6)$ എന്നിവ പൂജ്യത്തേക്കാൾ കുറവാണ്. അതിനാൽ (c) സ്വയം പ്രമാണങ്ങൾ പാലിക്കുന്നില്ല.

(d) $P(\omega_6) = \frac{3}{2}$ ഒന്നിനേക്കാൾ കൂടുതലാണ്. അതിനാൽ സ്വയംപ്രമാണങ്ങൾ പാലിക്കുന്നില്ല.

(c) സാധ്യതകളുടെ തുക = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 = 2.1, ഇത് 1 നേക്കാൾ കൂടുതൽ ആയതിനാൽ (c) സ്വയം പ്രമാണങ്ങൾ പാലിക്കുന്നില്ല.

16.4.1 ഒരു സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യത (Probability of an event)

ഒരു കുട്ടയിൽ 3 ആപ്പിളുകൾ ഉണ്ട്. ഇവയെ 'നല്ല ആപ്പിൾ', 'കേടായ ആപ്പിൾ' എന്നിങ്ങനെ തരംതിരിക്കണം. എങ്കിൽ നല്ല ആപ്പിളുകളുടെ എണ്ണം എത്രയൊക്കെ യാവാം? കേടായ ആപ്പിളിന്റെ എണ്ണം 0, 1, 2, 3 എന്നിങ്ങനെയാകാം. കേടായ ആപ്പിളിനെ B എന്നും നല്ല ആപ്പിളിനെ G എന്നും വിളിച്ചാൽ ഇതിന്റെ സാധ്യതാഗണത്തെ ചുവടെ പറയുന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം.

$$S = \{BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG\}$$

ഇതിൽ ഓരോ പരിണതഫലത്തിന്റേയും സാധ്യതയെ ചുവടെ പറയുന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം.

സാധ്യതാ ബിന്ദു :	BBB	BBG	BGB	GBB	BGG	GBG	GGB	GGG
സാധ്യത :	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

A, B എന്നീ സംഭവങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

A - കൃത്യം ഒരു കേടായ ആപ്പിൾ

B - ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് 2 കേടായ ആപ്പിൾ

A = {BGG, GBG, GGB} B = {BBG, BGB, GBB}

അതുകൊണ്ട്

$$P(A) = P(BGG) + P(GBG) + P(GGB)$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

$$P(B) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം പരിഗണിക്കാം.

ഒരു നാണയം 2 പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു.

S = {HH, HT, TH, TT} ഇതിലെ ഓരോ പരിണതഫലത്തിന്റേയും സാധ്യത ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ നിശ്ചയിച്ചിരിക്കുന്നു എന്നു കരുതുക.

$$P(HH) = \frac{1}{4},\ P(HT) = \frac{1}{7},\ P(TH) = \frac{2}{7},\ P(TT) = \frac{9}{28}$$

ഇവ സ്വയംപ്രമാണ സമീപനങ്ങളുടെ എല്ലാ നിബന്ധനകളും പാലിക്കുന്നുണ്ട്.

E എന്ന മറ്റൊരു സംഭവം പരിഗണിക്കുക.

E രണ്ടു പ്രാവശ്യം ഒരേ പരിണതഫലം ലഭിക്കുന്നു.

$E = \{HH, TT\}$

$$P(E) = P(HH) + P(TT)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{9}{28} = \frac{4}{7}$$

F : കൃത്യമായി രണ്ട് H ലഭിക്കുന്നു.

$$P(F) = P(HH) = \frac{1}{4}$$

16.4.2. തുല്യ സാധ്യതയുള്ള പരിണത ഫലങ്ങളുടെ സാധ്യത (Probability of Equally Likely Outcomes)

$S = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots \omega_n\}$ എന്ന സാധ്യതാഗണം പരിഗണിക്കുക.

എല്ലാ പരിണതഫലങ്ങളും തുല്യ സാധ്യതയുള്ളതാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$$P(\omega_i) = p, \; 0 \le p \le 1 \; \omega_i : \in S$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$$

അതായത്, $p + p + \ldots + p = 1$

(n പ്രാവശ്യം)

$$np = 1$$

$$p = \frac{1}{n}$$

S എന്നത് സാധ്യതാഗണവും E എന്നത് ഒരു സംഭവവുമാണ്. കൂടാതെ $n(S) = n$, $n(E) = m$ എന്നിവ ആയാൽ

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{\text{E എന്ന സംഭവത്തിന് അനുകൂലമായ പരിണതഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ പരിണതഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$

16.4.3 A അല്ലെങ്കിൽ B എന്ന സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യത (Probability of the event A or B)

A അല്ലെങ്കിൽ B എന്ന സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യത കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. അതായത് $P(A \cup B)$ കണ്ടുപിടിക്കണം.

ഒരു നാണയം 3 പ്രാവശ്യം എറിയുന്ന ഒരു പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക.

A = {HHT, HTH, THH}, B = {HTH, THH, HHH} എന്നീ സംഭവങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

$A \cup B$ = {HHT, HTH, THH, HHH}

$P(A \cup B) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) + P(HHH)$

A, B എന്നിവയിലെ പരിണതഫലങ്ങൾ തുല്യസാധ്യതയുള്ളവയായാൽ,

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = \frac{3}{8}$$

$$P(B) = P(HTH) + P(THH) + P(HHH) = \frac{3}{8}$$

$P(A) + P(B) = \frac{6}{8} \neq P(A \cup B)$ എന്നു കാണാം.

ഇവിടെ HTH, THH എന്നിവ A എന്ന സംഭവത്തിലും B എന്ന സംഭവത്തിലും പൊതുവായി ഉള്ളതാണ്. P(A) + P(B) കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ $A \cap B$ യിലെ അംഗങ്ങൾ രണ്ടു പ്രാവശ്യം പരിഗണിക്കേണ്ടിവരുന്നു. അതിനാൽ $P(A \cup B)$ കിട്ടുന്നതിനായി $P(A \cap B)$ എന്നത് P(A) + P(B) യിൽ നിന്ന് കുറവു ചെയ്യേണ്ടതാണ്.

അതായത് $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ------(1)

ഇതിനെ മറ്റൊരു രീതിയിൽ തെളിയിക്കാം.

$A \cup B = A \cup (B - A)$, A യും B - A യും പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളാണ്.

3-ാമത്തെ സ്വയം പ്രമാണം ഉപയോഗിച്ച്

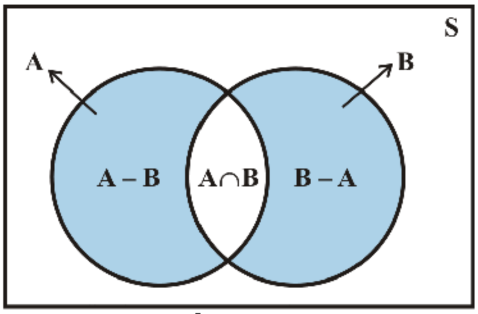
$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$ ------(2)

$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A)$ ---------(3)

(2) - (3) $\Rightarrow$ $P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ഇതിനെ വെൻചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ സൂചിപ്പിക്കാം.



ചിത്രം 16.2

A യും B യും പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളായാൽ $A \cap B = \phi$ ആയിരിക്കും.

$$P(A \cap B) = P(\phi) = 0$$

അതുകൊണ്ട് $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ആയിരിക്കും

ഇത് സ്വയംപ്രമാണ സമീപനങ്ങളുടെ മൂന്നാം നിബന്ധന ആണ്.

16.4.4 പൂരക സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യത (Probability of the event 'not A')

ഒരു പെട്ടിയിൽ, 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എഴുതിയ 10 കാർഡുകൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു കാർഡ് എടുക്കുന്നു. $A = \{2, 4, 6, 8\}$ എന്ന സംഭവം പരിഗണിക്കുക.

ഇവിടെ $S = \{1, 2, ..., 10\}$ ആണ്. ഇവിടെ ഓരോ പരിണതഫലങ്ങളും തുല്യ സാധ്യതയുള്ളതായാൽ ഓരോ പരിണതഫലത്തിന്റേയും സാധ്യത $\frac{1}{10}$ ആണ്.

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P(A') = P(1) + P(3) + P(5) + P(7) + P(9) + P(10) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(A') = \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} = 1 - P(A)$$

A യും A′ ഉം പരസ്പരം ഒഴിവാക്കുപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളാണ്. കൂടാതെ

$A \cup A' = S$ ആണ്.

$$A \cap A' = \phi \text{ and } A \cup A' = S$$

$$P(A \cup A') = P(S) = 1$$

$$P(A) + P(A') = 1, \quad (\text{സ്വയംപ്രമാണം})$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

ഉദാഹരണം : 10

നല്ലതുപോലെ ഇടകലർത്തിയ 52 കാർഡുകളുള്ള ഒരു പായ്ക്കറ്റിൽ നിന്നും ഒരു കാർഡ് എടുക്കുന്നു. ഇതിലെ ഓരോ പരിണതഫലവും തുല്യ സാധ്യതയുള്ളവയാണ്. ചുവടെ പറയുന്ന കാർഡുകളുടെ സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

(i) ഒരു ഡയമണ്ട് കാർഡ്
(ii) ഏയ്സ് അല്ലാത്ത കാർഡ്
(iii) ഒരു കറുപ്പ് കാർഡ്
(iv) ഡയമണ്ട് അല്ലാത്ത ഒരു കാർഡ്
(v) കറുപ്പ് അല്ലാത്ത ഒരു കാർഡ്

പരിഹാരം

ആകെയുള്ള പരിണതഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം 52 ആണ്.

(i) A - കാർഡ് ഡയമണ്ട്

A യിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം = 13

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \quad P(\text{ഡയമണ്ട് കാർഡ്}) = \frac{1}{4}$$

(ii) B - ഒരു ഏയ്സ് കാർഡ്

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{52} = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

(iii) C - കറുപ്പ് കാർഡ്

C യിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം = 26

$$P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(iv) P(ഡയമണ്ട് അല്ലാത്ത കാർഡ്) = 1 – P(ഡയമണ്ട് കാർഡ്)

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(v) P(കറുപ്പ് കാർഡ് അല്ല) = 1 – P(കറുപ്പ് കാർഡ്)

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ഉദാഹരണം : 11

ഒരു ബാഗിൽ 9 ഡിസ്കുകൾ ഉണ്ട്, ഇതിൽ 4 എണ്ണം ചുവപ്പ്, 3 എണ്ണം നീല, 2 എണ്ണം മഞ്ഞ എന്നിവയാണ്. ഈ ഡിസ്കുകൾ ആകൃതിയിലും വലിപ്പത്തിലും ഒരു പോലെയാണ്. ബാഗിൽ നിന്നും ഒരു ഡിസ്ക് എടുക്കുന്നു. ഈ ഡിസ്കിന് ചുവടെ പറയുന്ന നിറങ്ങളാകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

(i) ചുവപ്പ്, (ii) മഞ്ഞ, (iii) നീല, (iv) നീലയല്ല (v) ചുവപ്പ് അല്ലെങ്കിൽ നീല

പരിഹാരം

ഇവിടെ 9 ഡിസ്കുകളാണുള്ളത്. അതിനാൽ ആകെയുള്ള പരിണത ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം 9 ആണ്.

A: എടുക്കുന്ന ഡിസ്ക് ചുവപ്പ്

B: എടുക്കുന്ന ഡിസ്ക് മഞ്ഞ

C: എടുക്കുന്ന ഡിസ്ക് നീല

(i) ചുവപ്പ് ഡിസ്കുകളുടെ എണ്ണം = 4

$$P(A) = \frac{4}{9}$$

(ii) മഞ്ഞ ഡിസ്കുകളുടെ എണ്ണം = 2

$$P(B) = \frac{2}{9}$$

(iii) നീല ഡിസ്കുകളുടെ എണ്ണം = 3,

$$P(C) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(iv) $P(\text{ഡിസ്ക് നീലയല്ല}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(v) $P(\text{ചുവപ്പ് അല്ലെങ്കിൽ നീല}) = P(A \text{ അല്ലെങ്കിൽ } C)$

$$= P(A \cup C)$$

$$= P(A) + P(C) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

ഉദാഹരണം : 12

അനിൽ, ആഷിമ എന്നീ രണ്ടു കുട്ടികൾ ഒരു പരീക്ഷയെ അഭിമുഖീകരിക്കുന്നു എന്നു കരുതുക. അനിൽ ഈ പരീക്ഷയിൽ യോഗ്യത നേടാനുള്ള സാധ്യത 0.05, ആഷിമയ്ക്ക് യോഗ്യത നേടാനുള്ള സാധ്യത 0.10 ആണ്. രണ്ടുപേരും യോഗ്യത നേടാനുള്ള സാധ്യത 0.02 എങ്കിൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

(a) അനിലും ആഷിമയും യോഗ്യത നേടാതിരിക്കുക.

(b) കുറഞ്ഞത് ഒരാളെങ്കിലും യോഗ്യത നേടാതിരിക്കുക.

(c) ഒരാൾ മാത്രം യോഗ്യത നേടുക.

പരിഹാരം

E, F എന്നീ സംഭവങ്ങൾ അനിൽ, ആഷിമ എന്നിവർ പരീക്ഷയിൽ യോഗ്യത നേടുന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$$P(E) = 0.05,\ P(F) = 0.10,\ P(E \cap F) = 0.02.$$

(a) അനിലും ആഷിമയും യോഗ്യത നേടാതിരിക്കാനുള്ള സംഭവം $E' \cap F'$ ആയിരിക്കും

$E' \cap F' = (E \cup F)'$ (ഡീ മോർഗൻസ് നിയമം)

$$\begin{aligned} P(E' \cap F') &= P(E \cup F)' \\ &= 1 - P(E \cup F) \\ &= 1 - [P(E) + P(F) - P(E \cap F)] \\ &= 1 - [0.05 + 0.10 - 0.02] \\ &= 0.87 \end{aligned}$$

(b) P (കുറഞ്ഞത് ഒരാളെങ്കിലും യോഗ്യത നേടാതിരിക്കുന്നു)

= 1 – P(രണ്ടു പേരും യോഗ്യത നേടുന്നു)

$= 1 - 0.02 = 0.98$

(c) ഒരാൾ മാത്രം യോഗ്യത നേടുന്ന സംഭവത്തെ $E' \cap F$ അല്ലെങ്കിൽ $E \cap F'$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

P (ഒരാൾ മാത്രം യോഗ്യത നേടുന്നു) = P($E \cap F'$ അല്ലെങ്കിൽ $E' \cap F$)

$$\begin{aligned} &= P(E \cap F') + P(E' \cap F) \\ &= P(E) - P(E \cap F) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= 0.05 - 0.02 + 0.10 - 0.02 = 0.11 \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം : 13

രണ്ടു പുരുഷന്മാരും രണ്ടു സ്ത്രീകളും ഉള്ള ഒരു ഗ്രൂപ്പിൽ നിന്നും രണ്ടു പേരടങ്ങുന്ന ഒരു കമ്മിറ്റി രൂപീകരിക്കുന്നു. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

(a) രണ്ടും പുരുഷന്മാരല്ല (b) ഒരു പുരുഷൻ (c) രണ്ടു പുരുഷന്മാർ

പരിഹാരം

ആകെയുള്ള ആളുകൾ = 2 + 2 = 4. ഈ നാലു പേരിൽ നിന്നും രണ്ടു പേരെ $^4C_2$ രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

(a) തിരഞ്ഞെടുക്കുന്ന രണ്ടും പുരുഷന്മാരല്ലെങ്കിൽ രണ്ടും സ്ത്രീകളായിരിക്കണം. ഇവരെ $^2C_2$ രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം. $^2C_2 = 1$

$$\text{P(പുരുഷന്മാരല്ല)} = \frac{^2C_2}{^4C_2} = \frac{1\times 2\times 1}{4\times 3} = \frac{1}{6}$$

(b) ഒരു പുരുഷൻ കമ്മിറ്റിയിലുണ്ട് എന്നത് അർത്ഥമാക്കുന്നത് ഒരു പുരുഷനും 1 സ്ത്രീയും ഉണ്ട് എന്നാണ്. ഇവരെ $^2C_1 \times {}^2C_1$ രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

$$\text{P(ഒരു പുരുഷൻ)} = \frac{^2C_1 \times {}^2C_1}{^4C_2} = \frac{2\times 2}{2\times 3} = \frac{2}{3}$$

(c) രണ്ടു പുരുഷന്മാർ, ഇവരെ $^2C_2$ രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

$$\text{P(രണ്ടു പുരുഷന്മാർ)} = \frac{^2C_2}{^4C_2} = \frac{1}{^4C_2} = \frac{1}{6}$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 16.3

1. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതൊക്കെയാണ് സ്വയംപ്രമാണ സമീപനങ്ങളുടെ നിബന്ധന പാലിക്കാത്തതെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക സാധ്യതാഗണം $S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ ആണ്.

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
(a)	0.1	0.01	0.05	0.03	0.01	0.2	0.6
(b)	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
(c)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
(d)	– 0.1	0.2	0.3	0.4	– 0.2	0.1	0.3
(e)	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{15}{14}$

2. ഒരു നാണയം രണ്ടു പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു. ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് ഒരു T കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?
3. ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (i) ഒരു അഭാജ്യ സംഖ്യ കിട്ടുന്നു.
   (ii) 3 അല്ലെങ്കിൽ 3 ൽ കൂടുതൽ ആയ സംഖ്യ കിട്ടുന്നു.
   (iii) 1 അല്ലെങ്കിൽ 1 ൽ കുറഞ്ഞ സംഖ്യ കിട്ടുന്നു.
   (iv) 6 ൽ കൂടുതലായ സംഖ്യ കിട്ടുന്നു.
   (v) 6 ൽ കുറവായ സംഖ്യ കിട്ടുന്നു.
4. 52 കാർഡുകളുള്ള ഒരു പായ്ക്കറ്റിൽ നിന്നും ഒരു കാർഡ് എടുക്കുന്നു.
   (a) ഇതിന്റെ സാധ്യതാഗണത്തിൽ എത്ര അംഗങ്ങളുണ്ട്?
   (b) സ്പേഡ് കാർഡുകളിലെ ഏയ്സ് ലഭിക്കാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?
   (c) (i) ഒരു ഏയ്സ് കാർഡ്
   (ii) ഒരു കറുപ്പ് കാർഡ്
   എന്നിവ ലഭിക്കാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?
5. ഒരു നാണയത്തിന്റെ ഒരു മുഖത്ത് 1 എന്നും മറ്റേ മുഖത്ത് 6 എന്നും രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഈ നാണയവും ഒരു സമചതുരക്കട്ടയും എറിയുന്നു. (i) ഇവയുടെ മുകളിലത്തെ മുഖങ്ങളിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക '3' ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? (ii) തുക 12 ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?
6. സിറ്റി കൗൺസിലിൽ 4 പുരുഷന്മാരും 6 സ്ത്രീകളും ഉണ്ട്. ഇവരിൽ നിന്നും ഒരു കൗൺസിൽ അംഗത്തെ ഒരു കമ്മിറ്റിക്കുവേണ്ടി തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ അംഗം ഒരു സ്ത്രീ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?
7. ഒരു നാണയം 4 പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു. ഓരോ പ്രാവശ്യം H വീഴുമ്പോഴും ഒരാൾക്ക് 1 രൂപാ കിട്ടുന്നു. ഓരോ T വീഴുമ്പോഴും 1.50 രൂപാ നഷ്ടപ്പെടുന്നു. ഇതിന്റെ സാധ്യതാഗണത്തിൽ നിന്നും, 4 പ്രാവശ്യം എറിഞ്ഞു കഴിയുമ്പോൾ എത്ര രൂപ നിങ്ങൾക്ക് കിട്ടിയിട്ടുണ്ട് എന്നും ഈ ഓരോ വ്യത്യസ്തമായ തുകയുടെയും സാധ്യത എത്രയാണെന്നും കണ്ടുപിടിക്കുക.
8. 3 നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയം എറിയുന്നു. ചുവടെ പറയുന്ന സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യത കണക്കാക്കുക.
   (i) മൂന്ന് ഹെഡുകൾ (ii) രണ്ട് ഹെഡുകൾ
   (iii) ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് രണ്ട് ഹെഡുകൾ
   (iv) ഏറ്റവും കൂടിയത് രണ്ട് ഹെഡുകൾ
   (v) ഹെഡ് കിട്ടുന്നില്ല (vi) മൂന്ന് വാലുകൾ
   (vii) കൃത്യം രണ്ട് വാലുകൾ (viii) വാൽ കിട്ടുന്നില്ല

(ix) ഏറ്റവും കൂടിയത് രണ്ട് വാലുകൾ

9. A എന്ന സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യത $\frac{2}{11}$ ആയാൽ 'A അല്ല' എന്ന സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യത എന്താണ്?

10. 'ASSASSINATION' എന്ന വാക്കിൽ നിന്നും ഒരു അക്ഷരം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ അക്ഷരം ഒരു സ്വരാക്ഷരമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? ഒരു വ്യഞ്ജനാക്ഷരമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

11. ഒരു ലോട്ടറിയിൽ ഒരാൾ 1 മുതൽ 20 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ നിന്നും 6 വ്യത്യസ്ത എണ്ണൽസംഖ്യകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ 6 എണ്ണൽസംഖ്യകളും ലോട്ടറി കമ്മിറ്റി തീരുമാനിച്ചുവെച്ചിരിക്കുന്ന 6 സംഖ്യകളുമായി ചേരുകയാണെങ്കിൽ അയാൾക്ക് സമ്മാനം കിട്ടുന്നു. അയാൾക്ക് ഈ കളിയിൽ സമ്മാനം കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? (സംഖ്യകളുടെ ക്രമത്തിന് പ്രസക്തിയില്ല)

12. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന P(A), P(B) എന്നീ സാധ്യതകളുടെ സാധുത പരിശോധിക്കുക.

(i) $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.7,\ P(A \cap B) = 0.6$

(ii) $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.8$

13. വിട്ടുപോയ ഭാഗം പൂരിപ്പിക്കുക.

	P(A)	**P(B)**	**P(A ∩ B)**	**P(A ∪ B)**
(i)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	. . .
(ii)	0.35	. . .	0.25	0.6
(iii)	0.5	0.35	. . .	0.7

14. $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ ആണ്. A യും B യും പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളായാൽ P(A അല്ലെങ്കിൽ B) കാണുക.

15. E, F എന്നിവ രണ്ട് സംഭവങ്ങളാണ്. $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{1}{2}$, P(E സംഗമം F) = $\frac{1}{8}$. എങ്കിൽ (i) $P(E \cup F)$, (ii) $P(E' \cap F')$. എന്നിവ കാണുക.

16. E, F എന്നീ രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്നു. $P(E' \cup F') = 0.25$, E, F ഇവ പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

17. A, B എന്നിവ രണ്ട് സംഭവങ്ങളാണ്. $P(A) = 0.42$, $P(B) = 0.48$, $P(A \cap B) = 0.16$. ആയാൽ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

    (i) P(A അല്ല), (ii) P(B അല്ല) (iii) P(A അല്ലെങ്കിൽ B)

18. ഒരു സ്കൂളിലെ XI -ാം ക്ലാസിലെ കുട്ടികളിൽ 40% കുട്ടികൾ കണക്ക് പഠിക്കുന്നു, 30% കുട്ടികൾ ബയോളജി പഠിക്കുന്നു, 10% കുട്ടികൾ ഈ രണ്ടു വിഷയവും പഠിക്കുന്നു. ഈ ക്ലാസ്സിൽ നിന്നും ഒരു കുട്ടിയെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. എങ്കിൽ ആ കുട്ടി കണക്ക് അല്ലെങ്കിൽ ബയോളജി പഠിക്കാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

19. ഒരു എൻട്രൻസ് പരീക്ഷയിൽ രണ്ട് പരീക്ഷയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് ഗ്രേഡ് കണക്കാക്കുന്നത്. ഒരു കുട്ടിയെ തിരഞ്ഞെടുത്താൽ ആ കുട്ടി ഒന്നാമത്തെ പരീക്ഷയിൽ യോഗ്യത നേടാനുള്ള സാധ്യത 0.8 രണ്ടാമത്തേതിൽ യോഗ്യത നേടാനുള്ള സാധ്യത 0.7 എന്നിവ ആണ്. ഈ രണ്ടു പരീക്ഷയിൽ കുറഞ്ഞത് ഏതെങ്കിലും ഒന്നിൽ യോഗ്യത നേടാനുള്ള സാധ്യത 0.95 ആണ്. ഈ രണ്ട് പരീക്ഷയിലും യോഗ്യത നേടാനുള്ള സാധ്യത കാണുക?

20. ഒരു കുട്ടി അവസാന പരീക്ഷയിൽ ഇംഗ്ലീഷിനും ഹിന്ദിക്കും ജയിക്കാനുള്ള സാധ്യത 0.5 ഉം രണ്ടിലും ജയിക്കാതിരിക്കാനുള്ള സാധ്യത 0.1 ഉം ആണ്. ഇംഗ്ലീഷിൽ ജയിക്കാനുള്ള സാധ്യത 0.75 ആണ്. എങ്കിൽ ഹിന്ദിക്ക് ജയിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

21. ഒരു ക്ലാസിലെ 60 കുട്ടികളിൽ 30 കുട്ടികൾ NCC തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. 32 കുട്ടികൾ NSS തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു, 24 കുട്ടികൾ NCC യും NSS ഉം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു കുട്ടിയെ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

    (i) കുട്ടി NCC അല്ലെങ്കിൽ NSS തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു.

    (ii) കുട്ടി NCC യോ NSS ഓ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നില്ല

    (iii) കുട്ടി NSS തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു പക്ഷേ NCC തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നില്ല.

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 14

ഒരു അവധിക്കാലത്ത് വീണ എന്ന കുട്ടി നാല് പട്ടണങ്ങൾ (A, B, C, D) സന്ദർശിക്കുന്നു. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക. (ക്രമത്തിലാകണമെന്നില്ല)

(i) B യ്ക്ക് മുമ്പായി A സന്ദർശിക്കുന്നു?

(ii) B യ്ക്ക് മുമ്പായി A യും C യ്ക്ക് മുമ്പായി B യും സന്ദർശിക്കുന്നു.

(iii) A ആദ്യവും B അവസാനവും സന്ദർശിക്കുന്നു

(iv) A ഒന്നുകിൽ ആദ്യം അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടാമത് സന്ദർശിക്കുന്നു.

(v) B യ്ക്ക് തൊട്ടുമുമ്പ് A സന്ദർശിക്കുന്നു.

പരിഹാരം

വീണ ക്രമമായി നാല് പട്ടണങ്ങൾ സന്ദർശിക്കുവാനുള്ള സംഭവങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണം 4! ആണ്, അതായത് 24. ഇതിന്റെ സാധ്യതാഗണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

S = {ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB
BACD, BADC, BDAC, BDCA, BCAD, BCDA
CABD, CADB, CBDA, CBAD, CDAB, CDBA
DABC, DACB, DBCA, DBAC, DCAB, DCBA}

(i) B യ്ക്ക് മുമ്പായി A സന്ദർശിക്കുന്ന സംഭവത്തെ E എന്ന് വിളിക്കാം.

E = {ABCD, CABD, DABC, ABDC, CADB, DACB
ACBD, ACDB, ADBC, CDAB, DCAB, ADCB}

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

(ii) B യ്ക്ക് മുമ്പ് A യും C യ്ക്ക് മുമ്പ് B യും സന്ദർശിക്കുന്ന സംഭവത്തെ F എന്ന് വിളിക്കാം.

F = {ABCD, DABC, ABDC, ADBC}

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

(iii) (iv), (v) എന്നീ സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യത ഇതുപോലെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉദാഹരണം : 15

നല്ലതുപോലെ ഇടകലർത്തിയ 52 കാർഡുകളുടെ പായ്ക്കറ്റിൽ നിന്നും 7 കാർഡുകൾ എടുക്കുന്നു. ഈ ഏഴ് കാർഡുകളിൽ ചുവടെ പറയുന്നവ ഉണ്ടാകാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക. (i) എല്ലാം രാജാവ് (ii) മൂന്ന് രാജാവ് (iii) കുറഞ്ഞത് 3 രാജാവ്.

പരിഹാരം

ആകെയുള്ള പരിണതഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം = $^{52}C_7$

(i) P(4 കാർഡും രാജാവ്) $= \dfrac{^4C_4 \times {}^{48}C_3}{^{52}C_7} = \dfrac{1}{7735}$

(ii) P(3 കാർഡ് രാജാവ്) $= \dfrac{{}^{4}C_3 \times {}^{48}C_4}{{}^{52}C_7} = \dfrac{9}{1547}$

(iii) P(കുറഞ്ഞത് 3 രാജാവ്) = P(3 രാജാവ് അല്ലെങ്കിൽ 4 രാജാവ്)

= P(3 രാജാവ്) + P(4 രാജാവ്)

$$= \frac{9}{1547} + \frac{1}{7735} = \frac{46}{7735}$$

ഉദാഹരണം : 16

A, B, C എന്നിവ ഒരു പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട 3 സംഭവങ്ങളാണ്,

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$E = B \cup C$ എന്നു കരുതുക.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup E)$$

$$= P(A) + P(E) - P(A \cap E) \quad \ldots (1)$$

$$P(E) = P(B \cup C)$$

$$= P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$A \cap E = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$P(A \cap E) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[A \cap B \cap C] \quad \ldots (2)$$

(1), (2) എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച്,

$$P[A \cup B \cup C] = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ഉദാഹരണം : 17

ഒരു റിലേ മത്സരത്തിൽ A, B, C, D, E എന്നീ 5 ടീമുകൾ ഉണ്ട്.

(a) A, B, C എന്നീ ടീമുകൾ യഥാക്രമം ഒന്ന്, രണ്ട്, മൂന്ന് സ്ഥാനത്തുവരാനുള്ള സാധ്യത കാണുക.

(b) ആദ്യ മൂന്നു സ്ഥാനങ്ങളിൽ A, B, C (ക്രമത്തിലാകണമെന്നില്ല) വരാനുള്ള സാധ്യത കാണുക.

പരിഹാരം

സാധ്യതാഗണത്തിൽ (ആദ്യത്തെ മൂന്ന് സ്ഥാനങ്ങൾ) ഉള്ള ആകെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം $^5P_3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 60$. ഇവിടെ ഓരോന്നിന്റേയും സാധ്യത $= \dfrac{1}{60}$.

(a) P(A, B, C എന്നിവ ഒന്ന്, രണ്ട്, മൂന്ന് സ്ഥാനത്ത് വരുന്നത്) $= P(ABC) = \dfrac{1}{60}$.

(b) A, B, C ആദ്യത്തെ മൂന്ന് സ്ഥാനത്ത് വരുന്നതിനുള്ള പരിണിതഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം $^3P_3 = 3!$ ആണ്.

$$P\text{ (A, B, C ആദ്യ സ്ഥാനത്ത് വരുക)} = \frac{3!}{60} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$$

കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. ഒരു പെട്ടിയിൽ 10 ചുവപ്പ് മാർബിളുകളും, 20 നീല മാർബിളുകളും, 30 പച്ച മാർബിളുകളും ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും 5 മാർബിളുകൾ എടുക്കുന്നു. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യത കണക്കാക്കുക.
   (i) എല്ലാ മാർബിളുകളും നീല (ii) കുറഞ്ഞത് ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പച്ച.
2. നല്ലതു പോലെ ഇടകലർത്തിയ 52 കാർഡുകളിൽ നിന്ന് 4 കാർഡുകൾ എടുക്കുന്നു. എങ്കിൽ 3 ഡയമണ്ടുകളും ഒരു സ്പേഡും കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.
3. ഒരു സമചതുരക്കട്ടയുടെ 2 മുഖങ്ങളിൽ 1 എന്ന സംഖ്യയും, 3 മുഖങ്ങളിൽ 2 എന്ന സംഖ്യയും ഒരു മുഖത്ത് 3 എന്ന സംഖ്യയുമാണ്. ഈ സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (i) P(2) (ii) P(1 അല്ലെങ്കിൽ 3) (iii) P(3 അല്ല)
4. ഒരു ലോട്ടറിയിൽ 10000 ടിക്കറ്റുകൾ വിൽക്കുന്നു. പത്ത് തുല്യ സമ്മാനങ്ങളാണ് ഉള്ളത്. നിങ്ങൾ (i) 1 ടിക്കറ്റ് (ii) രണ്ട് ടിക്കറ്റുകൾ (iii) 10 ടിക്കറ്റുകൾ എന്നിവ വാങ്ങുമ്പോൾ ഒരു സമ്മാനം കിട്ടാതിരിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.
5. 100 കുട്ടികളെ 40, 60 എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് വിഭാഗങ്ങളായി തിരിക്കുന്നു. ഈ 100 പേരിൽ നിങ്ങളും നിങ്ങളുടെ കൂട്ടുകാരനും ഉൾപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

(a) നിങ്ങൾ രണ്ടു പേരും ഒരേ വിഭാഗത്തിൽ?

(b) നിങ്ങൾ രണ്ടു പേരും വ്യത്യസ്ത വിഭാഗത്തിൽ?

6. മൂന്നു പേർക്ക് എഴുതാൻ മൂന്നു കത്തുകളുടെ വിശദാംശങ്ങൾ പറഞ്ഞുകൊടുത്തു. മൂന്നു പേരുടേയും വിലാസം വെവ്വേറെ കവറുകളിൽ രേഖപ്പെടുത്തി. ഓരോ കത്തും വിലാസം നോക്കാതെ ഓരോ കവറിലിട്ടു. കുറഞ്ഞ പക്ഷം ഒരു കവറിലെങ്കിലും കൃത്യമായ ആൾക്കുള്ള കത്ത് ആകാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. A, B എന്നിവ രണ്ടു സംഭവങ്ങളാണ്. $P(A) = 0.54$, $P(B) = 0.69$, $P(A \cap B) = 0.35$ എന്നിവ ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കാണുക.

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(A' \cap B')$ (iii) $P(A \cap B')$ (iv) $P(B \cap A')$

8. ഒരു കമ്പനി 5 ആളുകളെ അവരുടെ മാനേജിംഗ് കമ്മറ്റിയിലേക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഇവരുടെ വിവരങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

നമ്പർ	പേര്	ആൺ/പെൺ	വയസ്സ്
1.	ഹരീഷ്	ആൺ	30
2.	റോഹൻ	ആൺ	33
3.	ശീതൾ	പെൺ	46
4.	ആലിസ്	പെൺ	28
5.	സലീം	ആൺ	41

ഇതിൽ നിന്നും ഒരാളെ ഒരു വക്താവായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നയാൾ ഒരു ആൺ അല്ലെങ്കിൽ 35 വയസ്സിൽ കൂടിയ ആൾ ആകാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

9. 0, 1, 3, 5, 7 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് 5000 ത്തിനേക്കാൾ വലിയ ഒരു നാലക്ക സംഖ്യ ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഈ സംഖ്യ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വ്യവസ്ഥകൾക്ക് വിധേയമായി 5 കൊണ്ട് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാൻ സാധിക്കുന്ന സംഖ്യ ആയിരിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുമ്പോൾ

(ii) അക്കങ്ങൾ ആവർത്തിക്കാതിരിക്കുമ്പോൾ,

10. ഒരു സ്യൂട്ട്കേസിന്റെ നമ്പർ ലോക്കിന് 4 വീലുകൾ ഉണ്ട്. ഓരോന്നിലും 0 മുതൽ 9 വരെയുള്ള അക്കങ്ങൾ രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഈ ലോക്ക് തുറക്കണമെങ്കിൽ ആവർത്തിക്കാത്ത നാല് അക്കങ്ങൾ അടുത്തടുത്ത് വരണം. ഒരാൾ ഈ സ്യൂട്ട്കേസ് തുറക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്നു. എങ്കിൽ ഈ നാല് അക്കങ്ങളും കൃത്യമായി വരാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

സംഗ്രഹം

സാധ്യതയുടെ സ്വയംപ്രമാണ സമീപനത്തെക്കുറിച്ചാണ് ഈ പാഠഭാഗത്ത് പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുള്ളത്. പ്രധാന വസ്തുതകൾ ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

- **സാധ്യതാഗണം** : പരിണതഫലങ്ങളുടെ ഗണം
- **സാധ്യതാബിന്ദു** : സാധ്യതാഗണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ
- **സംഭവം** : സാധ്യതാഗണത്തിന്റെ ഉപഗണം
- **സാധ്യമല്ലാത്ത സംഭവം** : ശൂന്യഗണം (ϕ)
- **തീർച്ചയുള്ള സംഭവം** : സാധ്യതാഗണം (S)
- **പൂരകസംഭവം അഥവാ സംഭവം അല്ലാത്തത്** : ഗണം A' അല്ലെങ്കിൽ $S - A$
- **A അല്ലെങ്കിൽ B എന്ന സംഭവം** : $A \cup B$
- **A സംഗമം B എന്ന സംഭവം** : $A \cap B$
- **A വ്യത്യാസം B എന്ന സംഭവം** : $A - B$
- **പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങൾ** : A യും B യും പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ $A \cap B = \phi$ ആയിരിക്കും.
- സമഗ്രവും ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്നതുമായ സംഭവങ്ങൾ : $E_1, E_2,..., E_n$ എന്നീ സംഭവങ്ങൾ സമഗ്രവും ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്നതുമാകണമെങ്കിൽ എല്ലാ $i \neq j$ യ്ക്കും $E_i \cap E_j = \phi$ ഉം $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ ഉം ആയിരിക്കണം.
- സാധ്യത : $P(\omega_i)$ എന്ന സംഖ്യയെ ω_i എന്ന പരിണതഫലത്തിന്റെ സാധ്യത എന്നു വിളിക്കണമെങ്കിൽ ചുവടെ പറയുന്ന സ്വയംപ്രമാണങ്ങൾ പാലിക്കണം.
  - (i) $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$
  - (ii) S ലെ എല്ലാ ω_i യ്ക്കും $\sum P(\omega_i) = 1$ ആയിരിക്കും.
  - (iii) എല്ലാ $\omega_i \in A$ യ്ക്കും $P(A) = \sum P(\omega_i)$ ആയിരിക്കും.
- **തുല്യസാധ്യത പരിണതഫലങ്ങൾ** : എല്ലാ പരിണതഫലങ്ങൾക്കും ഒരേ സാധ്യതയായിരിക്കും.
- **ഒരു സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യത** : തുല്യസാധ്യതയുള്ള പരിണതഫലലങ്ങളുള്ള പരിമിതമായ ഒരു സാധ്യതാഗണത്തിൽ A എന്ന ഒരു സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യത $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ആയിരിക്കും. ഇവിടെ $n(A)$ എന്നത്

A എന്ന ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണവും, $n(S)$ എന്നത് സാധ്യതാ ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണവുമാണ്.

- A യും B യും രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ ആയാൽ
  P(A അല്ലെങ്കിൽ B) = P(A) + P(B) – P(A സംഗമം B)
  അതായത് $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- A യും B യും പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ
  P(A അല്ലെങ്കിൽ B) = P(A) + P(B) ആയിരിക്കും.
- A ഏത് സംഭവമായാലും
  P(A അല്ല) = 1 – P(A)

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

സാധ്യതാസിദ്ധാന്തവും മറ്റ് ഗണിതശാസ്ത്രശാഖകളെപോലെ ക്രിയാത്മക ചിന്തയിലൂടെ ആവിഷ്കരിക്കപ്പെട്ട ഒന്നാണ്. 16-ാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ് ഇതിന്റെ ഉത്ഭവം. ഇറ്റാലിയൻ വൈദ്യനും ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനുമായ ജെറോം കാർഡൻ (1501 – 1576) ഈ വിഷയത്തിലെ തന്റെ ആദ്യ പുസ്തകം ബുക്ക് ഓൺ ഗെയിംസ് ഓഫ് ചാൻസ് "Book on Games of Chance" (Biber de Ludo Aleae) 1663 ൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ മരണശേഷമാണ് പ്രസിദ്ധീകരിച്ചത്.

1654 ൽ ഷെവലിയർ ടി മെറ്രേ എന്ന ഒരു ചൂതാട്ടക്കാരൻ അറിയപ്പെടുന്ന ഫ്രഞ്ച് തത്വചിന്തകനും ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനുമായ ബ്ലൈസ് പാസ്കലിനെ (1623 – 1662) ചൂതുകളിയിലെ ചില സംശയങ്ങളുമായി സമീപിച്ചു. പാസ്കലിന് ഇതിൽ താത്പര്യം തോന്നുകയും ഈ കാര്യങ്ങൾ മറ്റൊരു ഫ്രഞ്ച് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ പിയറി ഡി ഫെർമയുമായി (1601 – 1665) ചർച്ച ചെയ്യുകയും ചെയ്തു. രണ്ടുപേരും ഈ പ്രശ്നത്തെ പരാശ്രയം കൂടാതെ പരിഹരിക്കുകയും ചെയ്തു.

പാസ്കലിനെയും ഫെർമയേയും കൂടാതെ സാധ്യതാ പഠനത്തിന് മഹത്തായ സംഭാവന നൽകിയവരാണ് ക്രിസ്റ്റ്യൻ ഹൈജൻസ് (1629 – 1665), ഡച്ചുകാരൻ ജെ. ബെർനോളി (1654 – 1705), ഡി – മൂവിയർ (1667 – 1754), ഫ്രഞ്ച് ശാസ്ത്രജ്ഞൻ പിയറി ലാപ്ലാസ് (1749 – 1827) റഷ്യക്കാരൻ പി. എൽ കെബിഷേവ് (1821 – 1897) എ.എ. മാർക്കോവ് (1856 1922) എ.എൻ. കോൾമൊഗൊറോവ് (1903 – 1987) എന്നിവർ. സ്വയംപ്രമാണരീതിയിലുള്ള സാധ്യതാസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പേരിലാണ് കോൾ മൊഗൊറോവ് അറിയപ്പെടുന്നത്. 1933 ൽ അദ്ദേഹം പ്രസിദ്ധീകരിച്ച "ഫൗണ്ടേഷൻസ് ഓഫ് പ്രൊബബിലിറ്റി" (Foundations of Probability) എന്ന പുസ്തകം വളരെ ശ്രേഷ്ഠമായി കണക്കാക്കപ്പെടുന്നു. ഈ പുസ്തകം സാധ്യതയെ ഒരു ഗണഏകദമായി അവതരിപ്പിച്ചു.