ഭൗതികശാസ്ത്രം

പാർട്ട് 1

XI

കേരളസർക്കാർ

പൊതുവിദ്യാഭ്യാസ വകുപ്പ്

തയാറാക്കിയത്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT), കേരളം

2019

Prepared by: State Council of Educational Research & Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram -12, Kerala.
E-mail:scertkerala@gmail.com
Type setting by: SCERT Computer Lab.
©
Government of Kerala
Education Department
2019

ആമുഖം

ഏതു വിജ്ഞാനവും മാതൃഭാഷയിൽ പഠിക്കാനും പ്രകാശനം ചെയ്യാനും സാധിക്കും. അതിനുള്ള അവസരം പഠിതാക്കൾക്ക് ഒരുക്കേണ്ടത്, ഏതൊരു പഠന സമ്പ്രദായത്തിന്റെയും അനിവാര്യതയാണ്. അതിന്റെ തുടക്കമെന്ന നിലയ്ക്കാണ് ഹയർസെക്കന്ററി തലത്തിൽ ഭാഷേതര വിഷയങ്ങളിലെ പാഠപുസ്തകങ്ങൾ മലയാളത്തിൽ പ്രസിദ്ധീകരിക്കുന്നത്.

മാതൃഭാഷയിലൂടെയുള്ള വിദ്യാഭ്യാസം, ജ്ഞാനസമ്പാദനത്തിനുള്ള സുഗമ മാർഗം എന്നതിനോടൊപ്പം സാംസ്കാരികതത്തനിമയുടെ തിരിച്ചറിയൽ കൂടിയാണ്. അതുകൊണ്ടാണ് വികസിതരാജ്യങ്ങൾ മാതൃഭാഷയെ മുഖ്യ ബോധന മാധ്യമമായി സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇന്ത്യയിലാകട്ടെ, ദേശീയതലത്തിലുള്ള പ്രധാന പരീക്ഷകളെല്ലാം പ്രാദേശിക ഭാഷകളിൽക്കൂടി നടത്തുന്നതിനുള്ള സംവിധാനവും ഉണ്ടായി വരികയാണ്. ഈയൊരു സാഹചര്യത്തിൽ നമ്മുടെ കുട്ടികളും മാതൃഭാഷയുടെ ശക്തിസൗന്ദര്യങ്ങൾ തിരിച്ചറിഞ്ഞ് വിവിധ വിഷയങ്ങളിൽ ജ്ഞാനനിർമിതിയിൽ ഏർപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്. അതിന് അവരെ സജ്ജരാക്കുകയാണ് ഈ പാഠപുസ്തകങ്ങളുടെ മുഖ്യ ലക്ഷ്യം.

പരിഭാഷപ്പെടുത്തിയ പുസ്തകങ്ങളിൽ അതത് വിഷയങ്ങളിലെ സാങ്കേതിക പദങ്ങൾ പരമാവധി മലയാളത്തിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. നമ്മുടെ ഭാഷയിൽ ചിരപരിചിതമായ ഇംഗ്ലീഷ് പദങ്ങളെ അതേപടി സ്വീകരിച്ചിട്ടുമുണ്ട്. വിവർത്തനത്തിന് തീർത്തും വഴങ്ങാത്ത പദങ്ങളെ അതേരീതിയിൽ തന്നെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു. മാതൃഭാഷയിൽ പഠിക്കുന്നവർക്ക് ആശയഗ്രഹണം സുഗമമാക്കുന്ന വിധത്തിലാണ് പാഠപുസ്തകരചന നടത്തിയിരിക്കുന്നത്. അതോടൊപ്പം മലയാളഭാഷയുടെ വളർച്ചയ്ക്കും ഈ പ്രവർത്തനം സഹായകമാകുമെന്ന് കരുതുന്നു.

പാഠപുസ്തകവിവർത്തന രംഗത്ത് നമ്മുടെ രാജ്യത്ത് നടന്ന വലിയൊരു കാൽവെപ്പാണ് ഇത്. പ്രഥമ സംരംഭമെന്നനിലയിൽ പല പരിമിതികളും പരിഭാഷയിൽ വന്നിട്ടുണ്ടാകാം. ക്ലാസ്മുറിയിൽ പ്രയോഗത്തിൽ വരുമ്പോഴാണ് അവയെല്ലാം കൂടുതൽ ബോധ്യപ്പെടുക. തുടർന്ന് വരുന്ന ഘട്ടങ്ങളിൽ അവയൊക്കെ പരിഹരിക്കുന്നതിന് എല്ലാ അഭ്യുദയകാംക്ഷികളിൽ നിന്നും വിശിഷ്യ അധ്യാപകർ, വിദ്യാർത്ഥികൾ എന്നിവരിൽ നിന്നും അഭിപ്രായങ്ങളും നിർദേശങ്ങളും പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു.

ഡോ.ജെ. പ്രസാദ്

ഡയറക്ടർ,

എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി. കേരളം

FOREWORD

The National Curriculum Framework (NCF), 2005 recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor A.W. Joshi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group for Textbooks in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, Chairman, Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

A.W. Joshi, *Professor*, Honorary Visiting Scientist, NCRA, Pune (Formerly at Department of Physics, University of Pune)

Members

Anuradha Mathur, *PGT* , Modern School, Vasant Vihar, New Delhi

Chitra Goel, *PGT*, Rajkiya Pratibha Vikas Vidyalaya, Tyagraj Nagar, Lodhi Road, New Delhi

Gagan Gupta, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

H.C. Pradhan, *Professor*, Homi Bhabha Centre of Science Education, Tata Institute of Fundamental Research, V.N. Purav Marg, Mankhurd, Mumbai

N. Panchapakesan, *Professor* (Retd.), Department of Physics and Astrophysics, University of Delhi, Delhi

P.K. Srivastava, *Professor* (Retd.), Director, CSEC, University of Delhi, Delhi

P.K. Mohanty, *PGT*, Sainik School, Bhubaneswar

P.C. Agarwal, *Reader*, Regional Institute of Education, NCERT, Sachivalaya Marg, Bhubaneswar

R. Joshi, *Lecturer* (S.G.), DESM, NCERT, New Delhi

S. Rai Choudhary, *Professor*, Department of Physics and Astrophysics, University of Delhi, Delhi

S.K. Dash, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

Sher Singh, *PGT*, NDMC Navyug School, Lodhi Road, New Delhi

S.N. Prabhakara, *PGT*, DM School, Regional Institute of Education, NCERT, Mysore

Thiyam Jekendra Singh, *Professor*, Department of Physics, University of Manipur, Imphal

V.P. Srivastava, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

Member-Coordinator

B.K. Sharma, *Professor*, DESM, NCERT, New Delhi

ശിൽപ്പശാലയിൽ പങ്കെടുത്തവർ

1. **ജയകുമാർ എം.ജി.**
   എൻ.വി.റ്റി ഫിസിക്സ്, എസ്.എൻ.വി
   വി.എച്ച്.എസ്.എസ് അങ്ങാടിക്കൽ സൗത്ത്
   കോടുമൺ, പത്തനംതിട്ട.

2. **സാവിയോ ഓസ്റ്റിൻ**
   എച്ച്.എസ്.എസ്.റ്റി ഫിസിക്സ്,
   എസ്.കെ.എം.ജെ.എച്ച്.എസ്.എസ്.
   കൽപ്പറ്റ, വയനാട്.

3. **ജഫീഷ് ജെ.**
   എൻ.വി.റ്റി ഫിസിക്സ്, ജി.വി.എച്ച്.എസ്.എസ്.,
   കരകുളം, തിരുവനന്തപുരം.

4. **മുഹമ്മദ് ഷെറീഫ്**
   എച്ച്.എസ്.എസ്.റ്റി. ഫിസിക്സ്,
   ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്., ഇരിമ്പിളിയം,
   മലപ്പുറം.

5. **മുഹമ്മദ് റഫീക്ക് ഇ.കെ**
   എച്ച്.എസ്.എസ്.റ്റി. ഫിസിക്സ്,
   ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. പട്ടാമ്പി, പാലക്കാട്.

6. **അനൂപ് കെ.എസ്.**
   എച്ച്.എസ്.എസ്.റ്റി. ഫിസിക്സ്,
   പി.എം.എസ്.എ.എം.എ.എച്ച്.എസ്.എസ്.
   ചെമ്മൻകടവ്, മലപ്പുറം.

7. **രാജലക്ഷ്മി എം.**
   എച്ച്.എസ്.എസ്.റ്റി. ഫിസിക്സ്,
   അളഗപ്പനഗർ പഞ്ചായത്ത് എച്ച്.എസ്.എസ്.
   അളഗപ്പനഗർ, തൃശൂർ.

8. **ജൂലി. എസ്.എ**
   എച്ച്.എസ്.എസ്.റ്റി. ഫിസിക്സ്,
   ജി.എച്ച്.എസ്.എസ് പഴന്തോട്ടം,
   എറണാകുളം.

9. **ശാലിനി എസ്.**
   എച്ച്.എസ്.എസ്.റ്റി. ഫിസിക്സ്,
   ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. അയ്യൻകോയിക്കൽ
   കൊല്ലം.

10. **ഹരികുമാർ കെ.**
   എച്ച്.എസ്.എസ്.റ്റി. ഫിസിക്സ്,
   ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. പാലപ്പെട്ടി
   മലപ്പുറം.

11. **ശ്രീജു എസ്.**
   എച്ച്.എസ്.എസ്.റ്റി. ഫിസിക്സ്,
   ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. നാവായികുളം,
   തിരുവനന്തപുരം.

12 **രവീന്ദ്രൻ കെ.പി.**
   മലയാള ട്രാൻസിലേറ്റർ
   പയ്യന്നൂർ, കണ്ണൂർ

വിദഗ്ധർ

പ്രൊഫ. കെ. പാപ്പൂട്ടി
മുൻ ഡയറക്ടർ,
കേരള സംസ്ഥാന സർവവിജ്ഞാനകോശം

ഡോ. പി.എസ്. ശോഭൻ
റിട്ട. അസോസിയേറ്റ് പ്രൊഫസർ
മഹാരാജാസ് കോളേജ്, എറണാകുളം.

ഡോ. എൻ. ഷാജി
റിട്ട. അസോസിയേറ്റ് പ്രൊഫസർ
മഹാരാജാസ് കോളേജ്, എറണാകുളം.

ഡോ. മുഹമ്മദ് അബ്ദുൾ ജമാൽ
റിട്ട. പ്രിൻസിപ്പാൾ, ഗവ. കോളേജ്,
മൊകേരി, കോഴിക്കോട്.

ഡോ. ജിജോ പി.യു
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫസർ
ഗവ. കോളേജ്, കാസർകോട്

ഡോ. സുരേഷ് പുത്തൻപറമ്പിൽ
അസി. പ്രൊഫസർ, മലയാള വിഭാഗം,
മലബാർ ക്രിസ്ത്യൻ കോളേജ്, കോഴിക്കോട്

അക്കാദമിക് കോ-ഓർഡിനേറ്റർ
ഡോ. ആൻസി വറുഗീസ്
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി

ഉള്ളടക്കം

അധ്യായം 1 ഭൗതികലോകം 9

അധ്യായം 2 യൂണിറ്റുകളും അളവുകളും 26

അധ്യായം 3 നേർരേഖാചലനം 52

അധ്യായം 4 പ്രതലത്തിലെ ചലനം 82

അധ്യായം 5 ചലനനിയമങ്ങൾ 112

അധ്യായം 6 പ്രവൃത്തി, ഊർജം, പവർ 143

അധ്യായം 7 കണികാ വ്യവസ്ഥകളും ഭ്രമണ ചലനവും 170

അധ്യായം 8 ഗുരുത്വാകർഷണം 218

F9M6Z4

അധ്യായം 1

ഭൗതികലോകം (PHYSICAL WORLD)

1.1 എന്താണ് ഭൗതികശാസ്ത്രം?

1.2 ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ സാധ്യതകളും വിസ്മയങ്ങളും

1.3 ഭൗതികശാസ്ത്രവും സാങ്കേതിക വിദ്യയും സമൂഹവും

1.4 പ്രകൃതിയിലെ അടിസ്ഥാനബലങ്ങൾ

1.5 ഭൗതികനിയമങ്ങളുടെ സ്വഭാവം

സംഗ്രഹം

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1.1 എന്താണ് ഭൗതികശാസ്ത്രം? (What is Physics ?)

ചുറ്റുപാടുകളെക്കുറിച്ചറിയാനുള്ള മനുഷ്യരുടെ ആകാംക്ഷ എല്ലാ കാലത്തുമുള്ളതാണ്. രാത്രിയിൽ ആകാശത്തു തെളിയുന്ന എണ്ണിയാലൊടുങ്ങാത്ത ജ്യോതിർഗോളങ്ങൾ അനാദികാലം മുതൽ തന്നെ മനുഷ്യർക്ക് അദ്ഭുതമുളവാക്കുന്നതായിരുന്നു. രാപകലുകൾ മാറിവരുന്നതിലെ കൃത്യത, ഋതുഭേദങ്ങളുടെ ചാക്രികത, ഗ്രഹണങ്ങൾ, വേലിയേറ്റവും ഇറക്കവും, അഗ്നിപർവതങ്ങൾ, മഴവില്ല് എന്നിങ്ങനെ അനേകമനേകം അദ്ഭുതപ്രതിഭാസങ്ങളാണ് ചുറ്റിലും. ഭൂമുഖത്തു കാണപ്പെടുന്ന പദാർഥങ്ങളുടെ ആശ്ചര്യകരമായ വൈവിധ്യവും ജീവ ജാതികളുടെ നിലനിൽപ്പിലും പെരുമാറ്റങ്ങളിലുമുള്ള വൈചിത്ര്യവും അമ്പരിപ്പിക്കുന്നതാണ്. ഇതൊക്കെ കണ്ടറിയുമ്പോഴും ചുറ്റുപാടുകളെക്കുറിച്ച് അന്വേഷിക്കുമ്പോഴും സമീപിക്കുമ്പോഴും ഭാവന ചെയ്യുമ്പോഴുമാണ് മനുഷ്യമനസ്സുകളിൽ വിസ്മയങ്ങളുണ്ടാവുന്നത്. ശ്രദ്ധാപൂർവമായ നിരീക്ഷണത്തിലൂടെ പ്രകൃതിപ്രതിഭാസങ്ങളിലെ പരസ്പരാശ്രിതത്വവും അർഥപൂർണമായ ബന്ധങ്ങളും മനസ്സിലാക്കിയെടുക്കുകയും അതിനനുസൃതമായി പ്രകൃതിയോട് ഇടപെടാനുതകുന്ന പുതിയ ഉപായങ്ങൾ മെനഞ്ഞെടുക്കുകയും ചെയ്യുന്നത് പണ്ടേ തുടർന്നുവരുന്ന ഒരു രീതിയാണ്. നിതാന്തമായ ഇത്തരം പരിശ്രമങ്ങൾ മനുഷ്യവംശത്തെ ക്രമേണ ആധുനികശാസ്ത്രത്തിലേക്കും സാങ്കേതികവിദ്യകളിലേക്കും നയിച്ചു.

ശാസ്ത്രം *(science)* എന്ന പദത്തിന്റെ ഉൽപ്പത്തി ലാറ്റിൻ ക്രിയാപദമായ *scientia- (അറിയുക)* എന്നതിൽനിന്നാണ്. സംസ്കൃതത്തിലെ *വിജ്ഞാൻ*, അറബിയിലെ *ഇൽമ്* എന്നീ പദങ്ങളും അറിവ് എന്നർഥമുള്ളവയാണ്. വിശാലമായ അർഥത്തിൽ ശാസ്ത്രത്തിന് മനുഷ്യവംശത്തോളംതന്നെ പഴക്കമുണ്ട്. ഈജിപ്ത്, ഇന്ത്യ, ചൈന, ഗ്രീസ്, മെസൊപ്പൊട്ടേമിയ എന്നിവപോലുള്ള ലോകത്തിലെ പൗരാണിക സംസ്കൃതികൾ ശാസ്ത്രത്തിന്റെ വികാസത്തിനു വിലപ്പെട്ട സംഭാവനകൾ നൽകിയിട്ടുണ്ട്. പതിനാറാം നൂറ്റാണ്ടോടുകൂടി യൂറോപ്പിലാകമാനം ശാസ്ത്രീയ മുന്നേറ്റങ്ങൾക്ക് വലിയ ഉണർവുണ്ടായി. അങ്ങനെ ഇരുപതാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ പകുതിയോടുകൂടി ശാസ്ത്രം സാർവത്രികമാവുകയും ലോകവ്യാപകമായ പ്രസ്ഥാനമായിത്തീരുകയും വിവിധ രാജ്യങ്ങളും സംസ്കാരങ്ങളും അതിന്റെ വളർച്ചയെ ത്വരിതഗതിയിലാക്കുകയും ചെയ്തു.

ശാസ്ത്രം, ശാസ്ത്രീയരീതി എന്നിവ എന്താണെന്നു മനസ്സിലാക്കേണ്ടതുണ്ട്. പ്രകൃതിപ്രതിഭാസങ്ങളെ കഴിയുന്നത്ര സമഗ്രതയിലും ആഴ

ത്തിലും മനസ്സിലാക്കാനുള്ള ക്രമാനുഗതമായ പരിശ്രമമാണ് ശാസ്ത്ര പ്രവർത്തനം, അതിലൂടെ ലഭിക്കുന്ന അറിവിനെ *ശാസ്ത്ര*മെന്നു പറയാം, അതിന്റെ വെളിച്ചത്തിൽ ചില കാര്യങ്ങൾ മുൻകൂട്ടി പ്രവചിക്കാനും ചിലതിൽ മാറ്റം വരുത്താനും നിയന്ത്രിക്കാനും സാധിക്കണം. ശാസ്ത്രം പര്യവേക്ഷണമാണ്, പരീക്ഷണമാണ്, ചുറ്റും കാണുന്നവയിൽനിന്ന് ദീർഘദർശനം ചെയ്യാനുള്ള പ്രചോദനവുമാണ്. ലോകത്തെക്കുറിച്ച് അറിയാനുള്ള അതിയായ ആഗ്രഹത്തിൽനിന്ന് രൂപംകൊണ്ട ആദ്യത്തെ കാൽവയ്പ്പാണ് ശാസ്ത്രീയ കണ്ടുപിടുത്തങ്ങൾ. ശാസ്ത്രീയരീതിയെന്നു പറയുമ്പോൾ അതിൽ പരസ്പരബന്ധിതമായ അനേകം ചുവടുകൾ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു- ചിട്ടയായ നിരീക്ഷണം, നിയന്ത്രിതമായ പരീക്ഷണം, കാര്യകാരണ വിചിന്തനത്തിലെ ഉയർന്ന നിലവാരം, ഗണിത മാതൃകാവൽക്കരണം, അനേക സാധ്യതകളിലേക്കുള്ള ഉപാധികൾ, സിദ്ധാന്തം വിശ്വാസയോഗ്യമാക്കാനുതകുന്ന പരിശോധനാസാധ്യതകൾ എന്നിവയൊക്കെയാണവ. കൂടാതെ ഒരു സിദ്ധാന്തത്തെ മുൻനിർത്തി നിരവധി സങ്കൽപ്പനങ്ങളെ മുന്നോട്ടുവയ്ക്കാനും വിഭാവന ചെയ്യാനും സാധിക്കണം. ആത്യന്തികമായി ഒരു ശാസ്ത്രീയസിദ്ധാന്തം എല്ലാ കാലത്തേക്കും സ്വീകാര്യമാവുന്ന വിധത്തിൽ നിരന്തരമായ നിരീക്ഷണങ്ങളെയും പരിശോധനകളെയും അതിജീവിക്കുന്നതുമായിരിക്കണം. പ്രകൃതിയുടെ തനിമയും ശാസ്ത്രീയരീതികളും തമ്മിൽ നിലനിൽക്കുന്ന നിരവധി ഭിന്നാഭിപ്രായങ്ങളെക്കുറിച്ച് കൂടുതലായൊന്നും ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യാൻ ഉദ്ദേശിക്കുന്നില്ല.

ശാസ്ത്രീയസിദ്ധാന്തത്തിന്റെയും നിരീക്ഷണത്തിന്റെയും *(അല്ലെങ്കിൽ പരീക്ഷണത്തിന്റെയും)* പാരസ്പര്യമാണ് ശാസ്ത്രപുരോഗതിയുടെ അടിസ്ഥാനം. ശാസ്ത്രം ചലനാത്മകവും മുന്നോട്ടു പോയ്ക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതുമായ പ്രക്രിയയാണ്. ഒരു ശാസ്ത്രസിദ്ധാന്തവും ആ വിഷയത്തിൽ *അവസാന വാക്ക്* അല്ല, ശാസ്ത്രജ്ഞർക്കിടയിൽ ചോദ്യംചെയ്തുകൂടാത്ത ഒരധികാര കേന്ദ്രവുമില്ല. പരീക്ഷണ-നിരീക്ഷണ-വിശകലനങ്ങൾ പുരോഗമിക്കുന്ന മുറയ്ക്ക് പുതിയ സാഹചര്യങ്ങളിൽ ലഭിക്കുന്ന ഫലങ്ങളുടെ വെളിച്ചത്തിൽ അന്വേഷണ വിഷയമായ ശാസ്ത്രസിദ്ധാന്തത്തിൽ തിരുത്തലുകൾ നിർദേശിക്കപ്പെടാവുന്നതാണ്. ഇത്തരം തിരുത്തലുകൾ കൂടുതൽ ഗൗരവതരമല്ലെങ്കിൽ നിലവിലുള്ള സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ചട്ടക്കൂടിനകത്ത് അതും നിലനിൽക്കും. ഉദാഹരണത്തിന്, നിക്കോളസ് കോപ്പർനിക്കസ് (1473-1543) വിഭാവനം ചെയ്ത സൗരയൂഥസിദ്ധാന്തപ്രകാരം (*solar system*) സൂര്യനെ കേന്ദ്രമാക്കി (*helio-centric*) ഗ്രഹങ്ങൾ പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നുവെന്നത് ടൈകൊ ബ്രേ (*Tycho Brahe 1546-1601*) നിരീക്ഷിച്ചുറപ്പിച്ചുവെങ്കിലും, ഗ്രഹങ്ങളുടെ പരിക്രമണപഥം വൃത്താകാരമല്ലെന്നും ദീർഘവൃത്താകാര പഥമാണെന്നുമുള്ള ജൊഹനസ് കെപ്ലർ (1571–1630) പിന്നീട് നൽകിയ നിർദേശമാണ് സൗരയൂഥ മാതൃകയ്ക്ക് കൂടുതൽ അനുയോജ്യമെന്ന് ശാസ്ത്രലോകം അംഗീകരിച്ചു. പുതിയ നിരീക്ഷണഫലങ്ങളെ വിശദീകരിക്കാൻ അശക്തമാകുന്ന വിധത്തിൽ പഴയ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ വഴിമുട്ടിനിൽക്കുമ്പോൾ ശാസ്ത്രചരിത്രത്തിൽ വലിയ പ്രതിസന്ധികളുണ്ടായിട്ടുണ്ട്. ഇരുപതാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ പകുതിവരെ സമസ്ത മേഖലകളിലും സ്വീകാര്യമായി തുടർന്നിരുന്ന ന്യൂട്ടോണിയൻ ബലതന്ത്രം (*Newtonian mechanics*) ശാസ്ത്രത്തിലെ ചില സുപ്രധാന പ്രതിഭാസങ്ങളെ വിശദീകരിക്കാൻ അപര്യാപ്തമാണെന്ന് മനസ്സിലായി. അതുപോലെ നൂറ്റാണ്ടുകളായി പ്രയോഗത്തിലുണ്ടായിരുന്ന പ്രകാശത്തിന്റെ തരംഗസിദ്ധാന്തത്തിന് പ്രകാശവൈദ്യുതപ്രഭാവത്തിന്റെ (*photoelectric effect*) ഗുണവിശേഷങ്ങളെ വിശദീകരിക്കാൻ സാധിക്കാതെവന്നു. ഈ അവസാനവിശേഷം, ഭൗതികശാസ്ത്രത്തെ തളർത്തുകയല്ല, പ്രതിസന്ധികളെ മറികടന്നുകൊണ്ട് പരമാണു പഠനത്തിനും തന്മാത്രാപഠനത്തിനും അവയുടെ പ്രവർത്തനങ്ങളെ വിശദീകരിക്കുന്നതിനും ഉതകുന്ന വിധത്തിൽ പുതിയ മൗലികസിദ്ധാന്തമായ ക്വാണ്ടം ബലതന്ത്രം (*Quantum mechanics*) വികസിച്ചുവരാനിടയാക്കുകയാണു ചെയ്തത്.

പുതിയ പരീക്ഷണരീതിക്ക് ഒരുപക്ഷേ ഒരു ശാസ്ത്രസിദ്ധാന്തത്തെ മറ്റൊരു വിധത്തിൽ നിർദേശിക്കാനായേക്കാം, ഒരു സൈദ്ധാന്തികമുന്നേറ്റത്തിന് ഏതെങ്കിലും പരീക്ഷണത്തിൽ കണ്ടെത്തേണ്ടതിനെ നിർദേശിക്കാനുമായേക്കും. അത്തരത്തിൽ 1911ൽ പ്രമുഖ ബ്രിട്ടിഷ് ഭൗതികശാസ്ത്രജ്ഞനായ ***ഏണസ്റ്റ് റൂഥർഫോഡ്*** (1871-1937) അത്യന്തം നേർത്ത ഒരു സ്വർണത്തകിടിൽക്കൂടി ആൽഫാകിരണങ്ങൾ (*α-particles*) പായിച്ചപ്പോൾ ഉണ്ടായ ഫലസിദ്ധി, പരമാണു മാതൃക (*nuclear model*) സ്ഥാപിച്ചെടുക്കാനും പിന്നീട് ഹൈഡ്രജൻ അണുവിന്റെ കണ ഭൗതികമാതൃക വിഭാവനം ചെയ്യാനും ക്വാണ്ടം സിദ്ധാന്തത്തിന് അടിത്തറ പാകാനും 1913ൽ നോബെൽ സമ്മാനാർഹനായ ***നീൽസ് ബോർ*** (*Niels Bohr.1885-1962*) ന് പ്രചോദനമായിത്തീർന്നു. മറ്റൊരു വഴിക്ക്, 1930 ൽ ***പോൾ ഡിറാക്ക്*** (1902-1982) എന്ന സൈദ്ധാന്തിക ഭൗതികജ്ഞൻ പ്രതികണങ്ങളുടെ (*antiparticles*) സാധ്യത പ്രവചിക്കുകയും അത് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിച്ചുകൊണ്ട് രണ്ടു വർഷത്തിനു ശേഷം പരീക്ഷണശാലയിൽ പോസിറ്റീവ് ഇലക്ട്രോൺ (പോസിട്രോൺ- *positron*) എന്ന ഊർജകണത്തെ ***കാൾ ആന്റേഴ്സൺ*** കണ്ടെത്തുകയും ചെയ്തു.

സാമാന്യശാസ്ത്രത്തിലെ ഒരു പ്രധാന പഠനശാഖയാണ് ഭൗതികശാസ്ത്രം. രസതന്ത്രവും ജീവശാസ്ത്രവുമെക്കെ മറ്റുള്ള പഠനശാഖകളാണ്. പ്രകൃതി എന്നർഥമുള്ള ഗ്രീക്ക് പദത്തിൽനിന്നാണ് ഭൗതികശാസ്ത്രം (*Physics*) എന്ന പദം ഉണ്ടായത്. ഇതിനു സമാനമായി സംസ്കൃതത്തിൽ ഭൗതികലോകത്തെക്കുറിച്ചുള്ള പഠ

നത്തിന് *ഭൗതിക്* എന്നു പറയുന്നു. ഇതിൽ കൂടുതൽ സൂക്ഷ്മമായ ഒരു നിർവചനം ഇതിനുവേണ്ടി സാധ്യമല്ലാത്തതും ആവശ്യമില്ലാത്തതുമാണ്. വിശാലമായ അർഥത്തിൽ മൂലപ്രകൃതിയുടെ അടിസ്ഥാനനിയമങ്ങളെക്കുറിച്ചു പഠിക്കുകയും അത്തരം പ്രതിഭാസങ്ങളെ വിവിധ രീതികളിൽ ആവിഷ്കരിക്കുകയും ചെയ്യുന്ന ധർമമാണ് ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റേത്. അതിന്റെ വിശദമായ പ്രവർത്തനങ്ങളെക്കുറിച്ച് ഇനിവരുന്ന ഭാഗങ്ങളിൽ വിവരിക്കുന്നുണ്ട്. ഭൗതികശാസ്ത്രം നേരിടുന്ന രണ്ടു പ്രധാന വെല്ലുവിളികളെക്കുറിച്ചാണ് ഇനി സൂചിപ്പിക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്നത്: ഏകീകരണവും (*unification*) ന്യൂനീകരണവും (*reduction*).

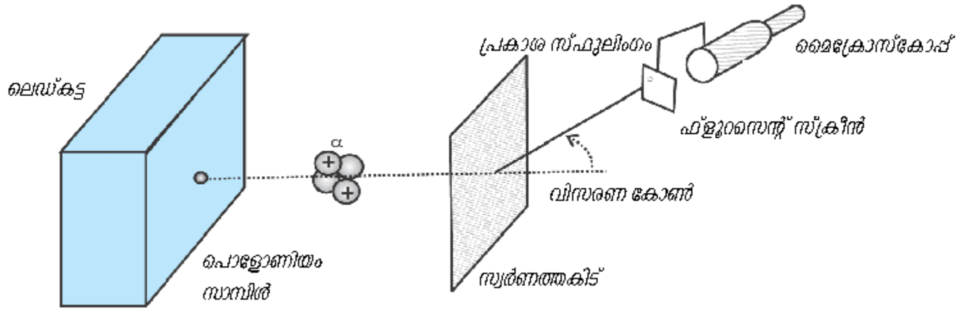
ഏതാനും ധാരണകളുടെയും കുറച്ചു സിദ്ധാന്തങ്ങളുടെയും പിൻബലത്തിലാണ് വൈവിധ്യപൂർണമായ ഭൗതികപ്രതിഭാസങ്ങൾ വിശദീകരിക്കാൻ ഭൗതികശാസ്ത്രം ശ്രമിക്കുന്നത്. വ്യത്യസ്ത മണ്ഡലങ്ങളിലും വ്യവസ്ഥകളിലുമായി വ്യാപരിക്കുന്ന ഏതാനും സാർവത്രികസിദ്ധാന്തങ്ങളുടെ ആവിഷ്കാരമെന്ന നിലയിലാണ് ഭൗതികശാസ്ത്രം ലോകത്തെ നോക്കിക്കാണാൻ ശ്രമിക്കുന്നത്. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു ആപ്പിൾ ഭൂമിയിലേക്കു വീഴുന്നതും ചന്ദ്രൻ ഭൂമിയെ ചുറ്റിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതും സൗരയൂഥഗ്രഹങ്ങൾ സൂര്യനെ പരിക്രമണം ചെയ്തുകൊണ്ടിരിക്കുന്നതുമൊക്കെ വിശദീകരിക്കപ്പെടുന്നത് ഐസക് ന്യൂട്ടൺ ആവിഷ്കരിച്ച ഗുരുത്വാകർഷണസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ്. അതുപോലെ ***ജെയിംസ് ക്ലാർക്ക് മാക്സ്‌വെൽ*** വൈദ്യുതിയെയും കാന്തികതയെയും യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് രണ്ടുമേഖലകളെയും ഉൾക്കൊള്ളാനുതകുന്ന വിധത്തിൽ വൈദ്യുതകാന്തികസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ (*electro-magnetism*) സമീകരണങ്ങൾ ആവിഷ്കരിച്ചു. പ്രകൃതിയിലെ അടിസ്ഥാനബലങ്ങളെ ഏകീകരിക്കാനുള്ള ശ്രമത്തിലും *(ഭാഗം1-4)* ഇതുപോലുള്ള അന്വേഷണങ്ങളാണ് നടന്നുകൊണ്ടിരിക്കുന്നത്.

ഒരു ചെറിയ വസ്തുതയിൽനിന്നോ അതിന്റെ പ്രവർത്തന സ്വഭാവങ്ങളിൽനിന്നോ അതിന്റെ തന്നെ വലിയതും സങ്കീർണവുമായ വ്യവസ്ഥയുടെ ഗുണവിശേഷത്തെ വിശകലനം ചെയ്യുകയെന്നത് അതീവ ശ്രമകരമാണ്. ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഹൃദയമെന്ന് പറയാവുന്ന ഈ സമീപനത്തെയാണ് ***ന്യൂനീകരണത്വം*** *(reductionism)* എന്നു പറയുന്നത്. ഉദാഹരണത്തിന്, താപഗതികം (*Thermodynamics*) എന്ന വിഷയം ഉടലെടുക്കുന്നത് പത്തൊമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടോടുകൂടിയാണ്. അത് കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നത് സ്ഥൂലവ്യവസ്ഥയിൽ (*bulk system*) സ്ഥൂലപരിമാണങ്ങളായി പെരുമാറുന്ന താപം, ആന്തരികോർജം, എൻട്രോപ്പി *(ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെ ക്രമരാഹിത്യത്തിന്റെ അളവ്)* എന്നിവയെയാണ്. പിന്നീട് ഈ പരിമാണങ്ങളിലേക്ക് ഗതികനിയമത്തിന്റെയും സ്ഥിതിവിവര സങ്കേതികതയുടെയും സ്വാധീനം കടന്നുവരുന്നതോടുകൂടി ആ സ്ഥൂല വ്യവസ്ഥയാകെത്തന്നെ മൂലപദാർഥത്തിന്റെ തന്മാത്രാ തലത്തിൽ വ്യവഹരിക്കപ്പെടാനിടയാവുന്നു. വിശേഷിച്ച്, താപം എന്നത് ഒരു വ്യവസ്ഥയിലെ തന്മാത്രകളുടെ ഗതികോർജത്തിന്റെ ശരാശരിയായിട്ടാണ് കണക്കാക്കുന്നത്.

1.2 ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ സാധ്യതയും വിസ്മയവും (Scope and excitement of physics)

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഉപവിഭാഗങ്ങളിലേക്ക് എത്തുമ്പോൾതന്നെ അതിനെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു കാഴ്ചപ്പാട് രൂപപ്പെടാനിടയുണ്ട്. അടിസ്ഥാനപരമായി ഇവിടെ പരിഗണിക്കേണ്ട രണ്ടു പ്രമുഖ മണ്ഡലങ്ങളുണ്ട്: സ്ഥൂലവും (*macroscopic*) സൂക്ഷ്മവും (*microscopic*). സ്ഥൂലമണ്ഡലം എന്നത് പരീക്ഷണശാല, ഭൂമി തുടങ്ങി ജ്യോതിർഗോളങ്ങൾ വരെയുള്ള പരിമാണങ്ങളിലേക്കു വ്യാപിച്ചുകിടക്കുന്നു. സൂക്ഷ്മ മണ്ഡലമാകട്ടെ-ആറ്റങ്ങൾ, തന്മാത്രകൾ, ആണവ പ്രതിഭാസങ്ങൾ എന്നിവയെ ഉൾക്കൊള്ളുന്നതാണ്.* ക്ലാസിക്കൽ ഭൗതികം (*Classical Physics*) പ്രധാനമായും കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നത് സ്ഥൂലപ്രതിഭാസങ്ങളെയാണ്. ബലതന്ത്രം (*mechanics*), താപഗതികം (*Thermodynamics*), വൈദ്യുതഗതികം (*Electrodynamics*), പ്രകാശശാസ്ത്രം (*Optics*) എന്നിവകളൊക്കെ അതിൽ വിഷയമായി വരുന്നു. ന്യൂട്ടന്റെ ചലനനിയമങ്ങളും ഗുരുത്വാകർഷണസിദ്ധാന്തവും ആധാരമാക്കിയുള്ള ബലതന്ത്രം കണങ്ങളുടെയും മറ്റു വിവിധ പദാർഥരൂപങ്ങളുടെയും, ചലനാവസ്ഥകളെയും സന്തുലനാവസ്ഥകളെയും കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നു. ഒരു റോക്കറ്റ് ജെറ്റ് കുഴലിൽക്കൂടി വാതകം ചീറ്റുമ്പോഴുള്ള തള്ളൽശക്തി, വെള്ളത്തിലും വായുവിലും തരംഗങ്ങൾ രൂപപ്പെട്ടുവരുന്നത്, ഒരു വലിയ ഭാരം താങ്ങുന്ന വളഞ്ഞ ദണ്ഡിന്റെ സന്തുലിതാവസ്ഥ തുടങ്ങിയവയൊക്കെ ബലതന്ത്രത്തിന്റെ പ്രശ്നങ്ങളാണ്. ചാർജിതവും കാന്തീകൃതവുമായ വസ്തുക്കളുടെ വൈദ്യുതവും കാന്തികവുമായ പ്രതിഭാസങ്ങളെയാണ് വൈദ്യുതഗതികം പ്രതിപാദിക്കുന്നത്. ഇതിന്റെ അടിസ്ഥാനനിയമങ്ങൾ ആവിഷ്കരിച്ചിട്ടുള്ളത് കൂളോം, ഏഴ്സ്റ്റഡ്, ആമ്പിയർ, ഫാരഡേ എന്നീ ശാസ്ത്രജ്ഞരും. ഈ നിയമങ്ങളുടെ സത്തകളെല്ലാം ഒരു ചട്ടക്കൂടിലാക്കിയത് മാക്സ്‌വെൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ വിഖ്യാതമായ വൈദ്യുതകാന്തിക സമവാക്യങ്ങളിലൂടെയുമാണ്. കാന്തികമണ്ഡലത്തിലെ വൈദ്യുതി വഹിക്കുന്ന ഒരു ചാലകത്തിന്റെ ചലനാവസ്ഥ, ഒരു എ.സി. വോൾട്ടത (സിഗ്നൽ)യിൽ കാണിക്കുന്ന വൈദ്യുത സെർക്കീട്ടിന്റെ (*circuit*) പ്രതികരണം, ആന്റിനയുടെ പ്രവർത്തനം, അയണോസ്ഫിയറിൽ റേഡിയോതരംഗങ്ങളുടെ പ്രേഷണം എന്നിങ്ങനെയുള്ളവ വൈദ്യുതഗതികത്തിലുൾപ്പെടുന്നു. ഒപ്റ്റിക്സ്-അഥവാ പ്രകാശശാസ്ത്രം ഉൾക്കൊള്ളുന്നത് പ്രധാനമായും പ്രകാശം ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രതിഭാസങ്ങളെയാണ്. ടെലിസ്കോപ്പ്, മൈക്രോസ്കോപ്പ് തുടങ്ങിയ പ്രകാശ ഉപകരണങ്ങളിലെ പ്രവർത്തനം, നേരിയ സ്തരങ്ങളു

* *സ്ഥൂലമണ്ഡലത്തിനും സൂക്ഷ്മമണ്ഡലത്തിനും മധ്യവർത്തിയായി- ഏതാനും (പത്തോ നൂറോ) ആറ്റങ്ങളെക്കുറിച്ചു മാത്രം പ്രതിപാദിക്കുന്ന മീസോസ്കോപിക് (Mesoscopic) മണ്ഡലത്തിന്റെ പഠനങ്ങൾ ഇപ്പോൾ ശാസ്ത്രഗവേഷണരംഗത്ത് പുതിയ വാതായനങ്ങൾ തുറന്നിട്ടുണ്ട്.*



ചിത്രം 1.1 പരീക്ഷണ-നിരീക്ഷണങ്ങളും സിദ്ധാന്തങ്ങളും ശാസ്ത്രവികാസത്തിനു പരസ്പരപൂരകങ്ങളായി വർത്തിക്കുന്നു. ആറ്റങ്ങളുടെ അണുകേന്ദ്ര മാതൃകയിലേക്കു നയിച്ച റൂഥർഫോഡിന്റെ ആൽഫാ വികിരണ വിസരണ പരീക്ഷണം.

ണ്ടാക്കുന്ന നിറങ്ങൾ മുതലായവ ഒപ്റ്റിക്സിൽ ഉൾപ്പെടുന്നു. താപഗതികമാവട്ടെ, ബലതന്ത്രത്തിൽ നിന്നു വ്യത്യസ്തമായി വസ്തുക്കളുടെ മൊത്തം ചലനങ്ങളിൽ ഇടപെടുന്നില്ല, മറിച്ച് സ്ഥൂലവ്യവസ്ഥകളെ സംതുലനാവസ്ഥക്ക് മാറ്റം വരുത്തുന്ന ആന്തരികോർജം, താപം, അവ്യവസ്ഥ അഥവാ എൻട്രോപ്പി മുതലായ പ്രതിഭാസങ്ങളിലും താപപ്രേഷണത്തിലും അത് ഇടപെടുന്നു. പ്രായോഗിക പ്രവർത്തനങ്ങളായി താപയന്ത്രങ്ങളുടെയും ശീതീകരണയന്ത്രങ്ങളുടെയും കാര്യക്ഷമത, ഭൗതികവും രാസികവുമായ പ്രവർത്തനങ്ങളെ നിയന്ത്രിക്കൽ എന്നിങ്ങനെയുള്ളവ താപഗതികത്തിന്റെ പരിഗണനയിൽ വരുന്നു.

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ സൂക്ഷ്മമണ്ഡലം ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്, ദ്രവ്യത്തിന്റെ അതിസൂക്ഷ്മതലങ്ങളിൽ വ്യാപരിക്കുന്ന ഇലക്ട്രോൺ, പ്രോട്ടോൺ (അതിലും ചെറിയ കണങ്ങളും) തുടങ്ങിയ അടിസ്ഥാനകണങ്ങളും അവ ചേർന്നു രൂപപ്പെടുന്ന ആറ്റങ്ങൾ, തന്മാത്രകൾ പോലുള്ളവയുടെ പരസ്പര ബന്ധവും പ്രവർത്തനവും ആണ്. ക്ലാസിക്കൽ ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ ഇത്രയും സൂക്ഷ്മതലത്തിലുള്ള പ്രവർത്തനങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാനുള്ള ഉപാധികൾ ഇല്ലാത്തതിനാൽ ക്വാണ്ടം സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് സൂക്ഷ്മമണ്ഡല പ്രതിഭാസങ്ങൾ വിശകലനം ചെയ്യാനും വിശദീകരിക്കാനും ശ്രമിക്കുന്നത്. മൊത്തത്തിൽ ഭൗതികശാസ്ത്രമെന്ന സുന്ദരസൗധം ആസ്വാദ്യവും ആനന്ദകരവുമാണ്. താൽപ്പര്യപൂർവം അതിലേക്ക് കയറിപ്പോവുകയാണ് വേണ്ടത്.

അതിവിശാലമാണ് ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ സാധ്യതയെന്ന് നിങ്ങൾക്കിപ്പോൾ മനസ്സിലായിട്ടുണ്ടാകും. അത് ഭൗതിക അളവുകളായ നീളം, മാസ്, സമയം, ഊർജം എന്നിങ്ങനെ നിരവധി തരത്തിലും തോതിലുമുള്ള അളവുകളെ ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്. അതിസൂക്ഷ്മ കണങ്ങളുടെ-ഉദാ: ഇലക്ട്രോൺ, പ്രോട്ടോൺ – വലുപ്പമായ $10^{-14}m$ ൽ തുടങ്ങി പ്രപഞ്ചപ്രതിഭാസങ്ങളെയും താരാപഥങ്ങളെയും വർണിക്കാൻ ആവശ്യമായ 10^{26}m വരെ ആണ് വലുപ്പത്തിന്റെ പരിധി. ഈ രണ്ടു സ്ഥലപരിമാണങ്ങളും തമ്മിൽ 10^{40} ന്റെ വ്യത്യാസമാണുള്ളത്. ഈ അളവുകളെ പ്രകാശവേഗം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ സമയപരിമാണങ്ങളായി യഥാക്രമം 10^{-22}-*s*, 10^{18}*s*. എന്നിങ്ങനെ ലഭിക്കുന്നു. അതുപോലെ പരാമർശിക്കപ്പെട്ട മാസുകളുടെ അളവുകളെടുത്താൽ 10^{-30}*kg*.(*ഇലക്ട്രോൺ വിരാമ മാസ്*) മുതൽ 10^{55}*kg*. (*ദൃശ്യപ്രപഞ്ചത്തിന്റെ (Galaxy) ശരാശരി മാസ്*) വരെയാണ്. നമുക്ക് പരിചിതങ്ങളായ ഭൗമ പരിമാണങ്ങൾ ഇവകൾക്കിടയിൽ എവിടെയെങ്കിലുമായിരിക്കും.

ഭൗതികശാസ്ത്രം നാനാവഴികളിലൂടെ ആവേശകരമായി മുന്നേറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നു. ചിലയാളുകൾക്ക് അതിന്റെ അടിസ്ഥാനസിദ്ധാന്തങ്ങളുടെ ലാളിത്യവും വശ്യതയും, അദ്ഭുതകരമായി തോന്നുന്നത് അതിന്റെ സാർവത്രികതകൊണ്ടാണ്. അതായത് ചുരുക്കം ചില അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തങ്ങളും അതിന്മേൽ പടുത്തുയർത്തിയ സങ്കൽപ്പങ്ങളും നിഗമനങ്ങളും ചേർന്നു നൽകുന്ന പിൻബലമാണ് അതിവിശാല മേഖലകളിൽ വ്യാപിച്ചുകിടക്കുന്ന ഭൗതികപ്രതിഭാസങ്ങളെ വിശദീകരിക്കാനും വിശകലനം നടത്താനും ഭൗതികശാസ്ത്രത്തെ പ്രാപ്തമാക്കുന്നത്. സ്വപ്നതുല്യമായ ഭാവനകൾ പ്രാവർത്തികമാക്കിക്കൊണ്ട് ഭൗതികശാസ്ത്രം പുതിയ പരീക്ഷണങ്ങളിലേക്കും പ്രകൃതിരഹസ്യങ്ങൾ അനാവരണം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള ഉപാധികളിലേക്കും സിദ്ധാന്തങ്ങളുടെ കണിശതയും നിലനിൽപ്പും പരിശോധിക്കുന്നതിലേക്കുമൊക്കെ വ്യാപരിക്കുന്നതാണ് മറ്റൊരു കൂട്ടരെ ആവേശം കൊള്ളിക്കുന്നത്. പ്രായോഗിക ഭൗതികവും ഇതേപോലെ പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്ന ഒന്നാണ്. ഭൗതികനിയമങ്ങൾ സ്വായത്തമാക്കിയും പ്രയോഗിച്ചും അനേകതരം ഉപകരണങ്ങളുടെ സൃഷ്ടിയും അവയിലൂടെ ലഭിക്കുന്ന വിസ്മയാവഹമായ നേട്ടവുമാണ് അത്യന്തം ആവേശകരമായിത്തീരുന്ന മറ്റൊരു കാര്യം.

കഴിഞ്ഞ ഏതാനും നൂറ്റാണ്ടുകളിൽ ഭൗതികശാസ്ത്രം കൈവരിച്ച നേട്ടങ്ങൾക്ക് പിന്നിൽ പ്രവർത്തിച്ചതെന്താണ്? ലോകത്താകമാനമുള്ള മനുഷ്യർക്ക് അവരുടെ ചുറ്റുപാടുകളെക്കുറിച്ചുണ്ടായ ധാരണകളിൽ വന്ന അടിസ്ഥാനപരമായ മാറ്റമാണ് പുരോഗതിയിലേക്ക് നയിച്ചത്. ശ്രേഷ്ഠമായ ചിന്താപദ്ധതികൾക്ക് ശാസ്ത്രത്തിൽ മുന്തിയ പരിഗണനയുണ്ടെങ്കിലും, ശാസ്ത്രീയപുരോഗ

തിക്ക് അതുമാത്രമുണ്ടായാൽ പോരെന്ന് വിലയിരുത്തപ്പെട്ടു. ജാഗ്രതയോടുകൂടിയുള്ള പരിമാണനിർണയം മുഖ്യസ്ഥാനത്തു നിൽക്കുന്ന ഒരു പ്രക്രിയയാണ്, പ്രത്യേകിച്ച് ഭൗതിക ശാസ്ത്രത്തിൽ. കാരണം, പ്രകൃതി നിയമങ്ങൾ ആവിഷ്കരിക്കേണ്ടിവരുന്നത് പ്രധാനമായും ഗണിതസമവാക്യങ്ങളിലൂടെയായിരിക്കും. കൂടാതെ ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനതത്വങ്ങളെല്ലാം തന്നെ സാർവത്രികമായ കാഴ്ചപ്പാടോടുകൂടിയതാണ്. ഒരു സിദ്ധാന്തം തന്നെ വിവിധ സന്ദർഭങ്ങളിൽ നിരവധി മേഖലകളിലേക്കു പ്രയോഗിക്കാൻ കഴിയും. ഏകദേശനത്തിന്റെ (approximation) പ്രാധാന്യം തിരിച്ചറിഞ്ഞതാണ് മറ്റൊരു കാര്യം. നാം നിത്യവും കാണുന്ന പ്രതിഭാസങ്ങളിലേറെയും ലളിതമായ ഭൗതിക നിയമങ്ങളുടെ സങ്കീർണമായ ചേരുവകളാണ്. അതിൽ ഏറ്റവും മൗലികമായത് ഏത്, എന്ത്, എന്ന് കണ്ടെത്തലാണ് പ്രധാനം. ഒരു പ്രതിഭാസത്തിന്റെ സങ്കീർണതകളെയെല്ലാം പരിഗണിക്കുകയല്ല. ഒരു പ്രതിഭാസത്തിലുൾപ്പെടുന്ന അടിസ്ഥാനകാര്യം തിരിച്ചറിഞ്ഞ്, പിന്നീട് കൂടുതൽ തെളിവാർന്ന സിദ്ധാന്തങ്ങളിലേക്ക് എത്തിച്ചേരുക എന്നതാണ് ഇതുകൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്. ഉദാഹരണത്തിന്, ഉയരത്തിൽ നിന്ന് ഒരു കല്ലും തൂവലും ഒരേസമയത്ത് താഴേക്കിട്ടാൽ നമുക്കറിയാവുന്നതുപോലെ കല്ല് ആദ്യം നിലം തൊടും. ഗുരുത്വബലം എല്ലാ വസ്തുക്കളേയും ഒരുപോലെ സ്വാധീനിക്കുന്നു എന്ന തത്വത്തിന്റെയടിസ്ഥാനത്തിലുള്ള വസ്തുക്കളുടെ സ്വതന്ത്ര പതനം (*free fall*) എന്ന പ്രതിഭാസമാണിത്. പക്ഷേ, വായുരോധം തൂവലിന്റെ ഗതിയെ തടയുന്നു. സ്വതന്ത്ര പതനത്തിന്റെ വസ്തുത മനസ്സിലാക്കാൻ വായു നീക്കം ചെയ്തിട്ടുള്ള ഒരു സംവിധാനത്തിൽ പരീക്ഷണം ആവർത്തിക്കണം. ലംബദിശയിലിരിക്കുന്ന വായു നീക്കം ചെയ്ത കുഴലിൽക്കൂടി കല്ലും തൂവലും ഒരേ വേഗത്തിൽത്തന്നെ വീഴുന്നതു കാണാം. ഗുരുത്വത്വരണം മാസിൽനിന്ന് മുക്തമാണെന്നിത് തെളിയിക്കുന്നു. ഈ അടിസ്ഥാനതത്വത്തിൽനിന്നു വായുരോധം സംബന്ധിച്ച ചില ധാരണകളിലെത്തിച്ചേരാനും നിലവിലുള്ള സിദ്ധാന്തം പരിഷ്കരിക്കാനും ഗുരുത്വാകർഷണം മൂലമുള്ള വീഴ്ചയുടെ കാര്യത്തിൽ പുതിയ സിദ്ധാന്തങ്ങളിലേക്ക് എത്തിച്ചേരാനും സാധിക്കുന്നു.

1.3 ഭൗതികശാസ്ത്രവും സാങ്കേതികവിദ്യയും സമൂഹവും (Physics, Technology and Society)

ഭൗതികശാസ്ത്രവും സാങ്കേതികവിദ്യയും സമൂഹവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം വ്യക്തമാക്കുന്ന നിരവധി ഉദാഹരണങ്ങളുണ്ട്. വിവിധ ആവശ്യങ്ങൾ മുൻനിർത്തി താപയന്ത്രങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാനും അവ പരിഷ്കരിക്കാനും ഇടവന്നത് താപഗതികത്തിന്റെ വികാസത്തിന് കാരണമായി. നിങ്ങൾക്കറിയാവുന്നതുപോലെ പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിലുണ്ടായ വ്യാവസായികവിപ്ലവത്തിൽ പ്രധാന പങ്കുവഹിച്ചത് ആവിയന്ത്രത്തിന്റെ ഉപയോഗമാണ്. മാനവസംസ്കാരത്തിന് അതുമൂലമുണ്ടായ നേട്ടം മഹത്തരമാണ്. ചിലപ്പോൾ സാങ്കേതിക വിദ്യ

പരികൽപനകളും സങ്കൽപ്പങ്ങളും മോഡലുകളും (Hypothesis, Axioms and Models)

എല്ലാ കാര്യങ്ങളും ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെയും ഗണിതത്തിന്റെയും സഹായത്തോടെ തെളിയിക്കാനും വിശദീകരിക്കാനും സാധിക്കുമെന്ന് ആരും കരുതാനിടയില്ല. ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലെ മാത്രമല്ല, ഗണിതത്തിലെയും ഒട്ടുമിക്ക കാര്യങ്ങളുടെയും അടിസ്ഥാനം സാധ്യതയെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള ഊഹങ്ങളാണ് (assumptions) സങ്കൽപ്പങ്ങളെന്നോ അനുമാനങ്ങളെന്നോ പരികൽപനകളെന്നോ അതിനെ വിളിക്കാം.

ഉദാഹരണത്തിന്, ഗുരുത്വാകർഷണമെന്ന സാർവിക സിദ്ധാന്തം ന്യൂട്ടൺ സ്വന്തം അനുമാനത്തിൽനിന്ന് നിർദേശിച്ചതാണ്. അത്തരം ഒരു ധൈഷണികത അദ്ദേഹത്തിനുണ്ടായിരുന്നു എന്നർഥം. അതിനു മുമ്പും പലരും പല നിരീക്ഷണങ്ങളും നടത്തിയിരുന്നു. ഗ്രഹങ്ങൾ സൂര്യനെ ചുറ്റുന്നതും ഭൂമിക്ക് ചുറ്റും ചന്ദ്രന്റെ പരിക്രമണവും പെൻഡുലങ്ങളുടെ ആന്ദോളനങ്ങളും വസ്തുക്കൾ ഭൂമിയിലേക്കു പതിക്കുന്നതും എല്ലാം നിരീക്ഷിക്കുകയും വിവരശേഖരണങ്ങൾ നടത്തുകയും ചെയ്തിരുന്നതാണ്. ഓരോന്നിനും വെവ്വേറെ വിശദീകരണം നൽകാനും ശ്രമിച്ചിരുന്നു. സാർവിക ഗുരുത്വാകർഷണ സിദ്ധാന്തം എന്താണ് ചെയ്തത്? ഇത്രമാത്രം: പ്രപഞ്ചത്തിൽ എവിടെയും രണ്ടു വസ്തുക്കൾ പരസ്പരം ആകർഷിക്കുന്നത് അവയുടെ മാസിന്റെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ നേർ അനുപാതത്തിലും അവ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന്റെ വർഗത്തിന് **വിപരീതാനുപാതത്തിലുമായിരിക്കും**. ഈയൊരു കാഴ്ചപ്പാടു വരുമ്പോഴേക്കും മുമ്പു പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങളൊക്കെ ഒറ്റയടിക്ക് വിശദീകരണത്തിലേക്കെത്തുന്നു. ഇക്കാര്യം മാത്രമല്ല വിശദീകരിക്കാനുതകുക, ഭാവിയിൽ വരുന്ന ഒരുപാടു പരീക്ഷണഫലങ്ങളെ മുൻകൂട്ടി കാണാനും പ്രവചിക്കാനും അതു നമ്മളെ പ്രാപ്തരാക്കുന്നു.

ഒരു പരികല്പന രൂപപ്പെടുന്നത് അത് സത്യമാണ് എന്ന നിഗമനത്തിൽ പൂർണമായി എത്തിയ ശേഷമാവണമെന്നില്ല, അതിനുള്ള സാധ്യതയുണ്ടായിരിക്കും. ഗുരുത്വാകർഷണസിദ്ധാന്തം തെളിയിക്കാൻ ആവശ്യപ്പെടുന്നത് ഉചിതമല്ല, കാരണം, തെളിയിക്കാൻ സാധ്യമാവാത്തതാണ് അതിന്റെ ആലോചനാപദ്ധതിതന്നെ. അതിൻമേൽ പരിശോധന നടത്തുകയും പരീക്ഷണ-നിരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെ അത് വിമർശനത്തിനോ തിരുത്തലിനോ വിധേയമാക്കുകയും ചെയ്യാം.

സങ്കൽപം എന്നത് സ്വയം ബോധ്യമുള്ള ഒരു കാര്യവും മാതൃക അല്ലെങ്കിൽ മോഡൽ എന്നത് നിരീക്ഷിച്ച പ്രതിഭാസത്തെ വിശദീകരിക്കേണ്ടുന്നതിലേക്ക് നിർദേശിക്കുന്ന ഒരു സിദ്ധാന്തവുമാണ്. ഈ പറയുന്ന കാര്യങ്ങളിൽ നിങ്ങൾ വ്യാകുലചിത്തരാ

കേണ്ടതില്ല. ഉദാഹരണത്തിന്, അടുത്ത വർഷം നിങ്ങൾക്ക് ഹൈഡ്രജന്റെ ബോർമാതൃക പഠിക്കാനുള്ളതാണ്. അതിൽ ബോർ അനുമാനിക്കുന്നത് ഹൈഡ്രജൻ അണുവിലെ ഇലക്ട്രോൺ കൃത്യമായ ഒരു നിയമം അനുസരിക്കുന്നുണ്ടെന്നാണ്. അദ്ദേഹം എന്തുകൊണ്ടാണങ്ങനെ ചെയ്തത്? മുന്നിലുണ്ടായിരുന്ന വർണരാജികളുടെ നിരവധി സറിതിവിവരങ്ങളിൽനിന്ന് മറ്റൊരു സാധ്യതയിലേക്ക് എത്തപ്പെടാനാവില്ലെന്ന് അദ്ദേഹത്തിന് ബോധ്യമായി. അതുകൊണ്ടാണ് നിഗമനം സ്വീകാര്യമാവുമെങ്കിൽ അണുവിന്റെ സ്വഭാവം സംബന്ധിച്ച കാര്യങ്ങളിലെല്ലാം വിശദീകരണം സാധ്യമാവുമെന്ന് അദ്ദേഹം പറഞ്ഞത്.

ഐൻസ്റ്റൈന്റെ സവിശേഷ ആപേക്ഷികസിദ്ധാന്തം (special theory of relativity) രണ്ടുതരം നിഗമനങ്ങൾ ആസ്പദമാക്കിയുള്ളതാണ്. വൈദ്യുത-കാന്തിക വികിരണങ്ങളുടെ വേഗസറിരത സംബന്ധിച്ചും ഭൗതികനിയമങ്ങളെല്ലാം ജഡത്വാവലംബകങ്ങളിൽ (inertial frame of reference) സാധുവായിരിക്കും എന്നതു എല്ലാ ഭൗതിക നിയമങ്ങളുടെയും സാധുത സംബന്ധിച്ചും നിരീക്ഷകനിൽനിന്നോ സ്രോതസ്സിൽനിന്നോ സ്വതന്ത്രമായി, ശൂന്യസ്ഥലത്തുകൂടിയുള്ള പ്രകാശത്തിന്റെ പ്രവേഗം സറിരമാണെന്നത് തെളിയിക്കാൻ ആവശ്യപ്പെടുന്നതു യുക്തമല്ല.

ഗണിതത്തിലും എല്ലാ ഘട്ടങ്ങളിലും സങ്കൽപ്പങ്ങളും നിഗമനങ്ങളും വന്നുകൊണ്ടേയിരിക്കും. യൂക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതിപ്രകാരം രണ്ട് സമാന്തരരേഖകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്നില്ല. അതൊരു സങ്കൽപ്പമാണ്. ആ പ്രസ്താവന വിശ്വാസത്തിലെടുക്കുകയാണെങ്കിൽ അതിന്മേൽ നമുക്കാ നേർരേഖയുടെ ഒരുപാട് സാധ്യതകളെയും രണ്ടോ മൂന്നോ മാനങ്ങളുള്ള രൂപങ്ങളുടെ ഗുണവിശേഷങ്ങളെയും വിശദീകരിക്കാൻ കഴിയും. എന്നാൽ ആ സങ്കൽപ്പത്തെ ഉൾക്കൊള്ളുന്നില്ലെങ്കിൽ മറ്റൊരു പരികൽപനയിലേക്കോ പുതിയ രീതിയിലുള്ള ജ്യാമിതിയിലേക്കോ നിങ്ങൾക്ക് പോകേണ്ടിവരും. അത്തരം രീതികൾ കഴിഞ്ഞ ഏതാനും നൂറ്റാണ്ടുകളിലും ദശകങ്ങളിലുമായി സംഭവിച്ചുകഴിഞ്ഞിട്ടുണ്ട്.

കളും ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ മുന്നേറ്റങ്ങൾക്ക് കളമൊരുക്കാറുണ്ട്.

ഭൗതികശാസ്ത്രം പുതിയ സാങ്കേതികവിദ്യക്ക് എപ്പോഴും പ്രചോദനമാണ്. അതിനുള്ള ഉദാഹരണമാണ് പത്തൊമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ കണ്ടെത്തിയ വൈദ്യുതിയുടെയും കാന്തികതയുടെയും അടിസ്ഥാനതത്വങ്ങളിൽനിന്ന് കമ്പിയില്ലാക്കമ്പി (wireless) യെന്ന സാങ്കേതികവിദ്യ വികസിച്ചുവന്നത്. ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ പ്രായോഗികപദ്ധതികളെ മൊത്തമായി പലപ്പോഴും മുൻകൂട്ടി കാണാനാവില്ല. ഉദാഹരണമായി, പ്രശസ്ത ഭൗതികജ്ഞൻ ഏണസ്റ്റ് റൂഥർഫോഡ് ആറ്റങ്ങളിൽനിന്ന് ഊർജം ഉൽപ്പാദിക്കാമെന്ന ആശയം തള്ളിക്കളഞ്ഞതു 1933ലാണ്. എന്നാൽ കുറച്ചു വർഷങ്ങൾക്ക് ശേഷം 1938ൽ ന്യൂട്രോൺ പ്രേരണയാൽ യുറേനിയത്തിന്റെ അണുവിഘടനപ്രതിഭാസം മൂലമുള്ള ഊർജോൽപ്പാദനം സാധ്യമാണെന്ന് *ഹാൻ, മൈറ്റ്നർ* എന്നിവർ കണ്ടെത്തി. ഈ കണ്ടെത്തലിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് ആണവവൈദ്യുതനിലയങ്ങളും ആണവായുധങ്ങളും സാധ്യമായത്. സാങ്കേതികവിദ്യയുടെ ഉയർച്ചയെ ഭൗതിക ശാസ്ത്രം പിന്തുണച്ച മറ്റൊരുദാഹരണമാണ് സിലിക്കൺ ചിപ്പി (chip)ന്റെ കണ്ടുപിടുത്തം. അത് കഴിഞ്ഞ മൂന്നു പതിറ്റാണ്ടുകളായി കമ്പ്യൂട്ടർവിപ്ലവത്തിനു വഴിവച്ചു.

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ ശ്രദ്ധപതിഞ്ഞിട്ടുള്ളതും കാര്യമായ ഗവേഷണങ്ങൾ തുടരേണ്ടതുമായ ഒരു മേഖലയാണ് പാരമ്പര്യേതര ഊർജസ്രോതസ്സുകളുടേത് (alternative energy sources). അതിന്റെ സാധ്യതകൾ വികസിപ്പിക്കുകയും പ്രയോഗത്തിൽ വരുത്തുകയും ചെയ്യേണ്ടത് മനുഷ്യജീവിതത്തെ സംബന്ധിച്ച് അത്യാവശ്യമാണ്. ഗ്രഹത്തിലെ ഫോസിൽ ഇന്ധനങ്ങളുടെ ഉറവകൾ അതിവേഗം വറ്റിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്ന സാഹചര്യത്തിൽ പരമ്പരാഗതമാർഗങ്ങൾക്കു പകരം, ഊർജാവശ്യങ്ങൾക്ക് മറ്റുമാർഗങ്ങൾ കണ്ടെത്തേണ്ടതുണ്ട്. സൗരോർജവും ഭൗമതാപവും ഉപയോഗിക്കുന്ന വിധത്തിലുള്ള വൈദ്യുതിനിർമാണം ആ ദിശയിൽ ചിന്തിക്കുമ്പോൾ പരിഗണിക്കാവുന്ന സാധ്യതകളാണ്. ഇക്കാര്യങ്ങളിൽ ഗവേഷണങ്ങൾ നടക്കുന്നുണ്ടെങ്കിലും ഇനിയുമെത്രയോ കൂടുതൽ മുന്നോട്ടു പോകേണ്ടതുണ്ട്.

പട്ടിക 1-1 ൽ ചില മഹാശാസ്ത്രജ്ഞരുടെ പേരുകളും അവരുടെ സംഭാവനകളും ജന്മദേശവും കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ലോകത്തിലെ മുഴുവൻ ജനങ്ങൾക്കുമായി ശാസ്ത്രീയമായ കണ്ടെത്തലുകൾക്കുള്ള ശ്രമങ്ങൾ സംസ്കാരങ്ങളെയും രാജ്യാതിർത്തികളെയും മറികടക്കുന്നതായി ഈ പട്ടികനോക്കുമ്പോൾ നിങ്ങൾക്കു ബോധ്യമാവും.

പട്ടിക 1-2 ൽ പ്രധാനപ്പെട്ട സാങ്കേതികവിദ്യകളും അവ ഉൾപ്പെടുന്ന ശാസ്ത്രസിദ്ധാന്തവും കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഇത്തരത്തിൽ പല വിവരങ്ങളും അധ്യാപകരുടെയും നല്ല ശാസ്ത്ര പുസ്തകങ്ങളുടെയും വെബ്സൈറ്റുകളുടെയും സഹായത്തോടുകൂടി നിങ്ങൾക്കുതന്നെ ഇതിൽ ഉൾപ്പെടുത്താനാവും. ഇത്തരം ശ്രമങ്ങൾ പര്യാലോചനകൾ ആനന്ദകരവും ശാസ്ത്രപുരോഗതിപോലെത്തന്നെ അവസാനിക്കാത്തതുമാണ്. പ്രകൃതിയെക്കുറിച്ചും പ്രപഞ്ച പ്രതിഭാസങ്ങളെക്കുറിച്ചുമുള്ള പഠനശാഖയാണ് ഭൗതികശാസ്ത്രമെന്നു നമുക്കറിയാം. പരീക്ഷണ-നിരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെ കണ്ടെത്തുകയും വിശകലനത്തിലൂടെ അംഗീകരിക്കപ്പെടുകയും ചെയ്തിട്ടുള്ള ഭൗതിക നിയമങ്ങളും സിദ്ധാന്തങ്ങളും ഒക്കെത്തന്നെ പ്രവർത്തിക്കുന്നത് പ്രപഞ്ചത്തെ മനസ്സിലാക്കാനുള്ള ഉപാധികൾ എന്ന നിലയിലാണ്. ഓരോ ഭൗതിക

പട്ടിക 1.1 വ്യത്യസ്ത രാജ്യങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള ഭൗതികശാസ്ത്രജ്ഞരും അവരുടെ പ്രധാന സംഭാവനകളും

പേര്	പ്രധാന സംഭാവനകൾ/കണ്ടെത്തലുകൾ	ജന്മരാജ്യം
ആർക്കിമെഡീസ്	പ്ലവനതത്ത്വങ്ങൾ, ഉത്തോലകതത്ത്വങ്ങൾ	ഗ്രീസ്
ഗലീലിയോ ഗലീലി	ജഡത്വനിയമങ്ങൾ	ഇറ്റലി
ക്രിസ്റ്റ്യൻ ഹൈഗൻസ്	പ്രകാശത്തിന്റെ തരംഗസിദ്ധാന്തം	ഹോളണ്ട്
ഐസക് ന്യൂട്ടൺ	ഗുരുത്വാകർഷണസിദ്ധാന്തം, ചലനനിയമങ്ങൾ, പ്രതിഫലന ദൂരദർശിനി	ഇംഗ്ലണ്ട്
മൈക്കൽ ഫാരഡേ	വൈദ്യുതകാന്തികപ്രേരണനിയമം	ഇംഗ്ലണ്ട്
ജെയിംസ് ക്ലർക്ക് മാക്സ്വൽ	വൈദ്യുതകാന്തികസിദ്ധാന്തം, പ്രകാശം ഒരു വൈദ്യുതകാന്തികതരംഗം	ഇംഗ്ലണ്ട്
ഹൈൻറിഷ് റുഡോൾഫ് ഹെർട്സ്	വൈദ്യുതകാന്തികതരംഗ ഉൽപ്പാദനം	ജർമനി
ജെ.സി.ബോസ്	ഏറ്റവും ചെറിയ തരംഗദൈർഘ്യമുള്ള റേഡിയോതരംഗം	ഇന്ത്യ
ഡബ്ല്യു.കെ.റോൺജൻ	എക്സ് - റേ	ജർമനി
ജെ.ജെ.തോംസൺ	ഇലക്ട്രോൺ	ഇംഗ്ലണ്ട്
മേരി സ്ക്ലോഡോസ്കാ ക്യൂറി	റേഡിയം, പ്ലൂട്ടോണിയം, റേഡിയോ വികിരണപഠനം	പോളണ്ട്
ആൽബർട്ട് ഐൻസ്റ്റൈൻ	പ്രകാശവൈദ്യുതപ്രതിഭാസം, ആപേക്ഷികസിദ്ധാന്തങ്ങൾ	ജർമനി
വിക്ടർ ഫ്രാൻസിസ് ഹെസ്സ്	കോസ്മിക്കിരണങ്ങൾ	ആസ്ട്രേലിയ
ആർ.എ.മില്ലിക്കൻ	ഇലക്ട്രോണിന്റെ ചാർജ്നിർണയം	അമേരിക്ക
ഏണസ്റ്റ് റൂഥർഫോഡ്	ആറ്റത്തിന്റെ ഘടന	ന്യൂസിലാന്റ്
നീൽസ് ബോർ	ഹൈഡ്രജൻ ആറ്റത്തിന്റെ ക്വാണ്ടം രൂപഘടന	ഡെൻമാർക്ക്
സി.വി.രാമൻ	തന്മാത്രകൾക്കിടയിലെ സൂക്ഷ്മപ്രകാശവിസരണം, രാമൻപ്രഭാവം	ഇന്ത്യ
ലൂയി വിക്തർ ദി ബ്രോയ്	ദ്രവ്യത്തിന്റെ തരംഗസ്വഭാവം	ഫ്രാൻസ്
എം.എൻ.സാഹ	താപീയ അയണീകരണം	ഇന്ത്യ
എസ്.എൻ.ബോസ്	ക്വാണ്ടം സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ്	ഇന്ത്യ
വുൾഫ്ഗാങ് പൗളി	ഒഴിവാക്കൽനിയമം	ഓസ്ട്രിയ
എൻറിക്കോ ഫെർമി	നിയന്ത്രിത അണുഭേദനം	ഇറ്റലി
വെർണർ ഹൈസൻബർഗ്	ക്വാണ്ടം ബലതന്ത്രം, അനിശ്ചിതത്വസിദ്ധാന്തം	ജർമനി
പോൾ ഡിറാക്ക്	ഇലക്ട്രോണിന്റെ ആപേക്ഷികതാ നിയമം, ക്വാണ്ടം സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ്	ഇംഗ്ലണ്ട്
എഡ്വിൻ ഹബ്ബിൾ	പ്രപഞ്ചവികാസസിദ്ധാന്തം	അമേരിക്ക
ഏണസ്റ്റ് ഒർലാൺഡോ ലോറൻസ്	സൈക്ലോട്രോൺ	അമേരിക്ക
ജെയിംസ് ചാഡ്വിക്ക്	ന്യൂട്രോൺ	ഇംഗ്ലണ്ട്
ഹിദെക്കി യുക്കാവ	അണുകേന്ദ്രബലനിയമം	ജപ്പാൻ
ഹോമി ജഹാംഗിർ ഭാഭാ	കോസ്മിക് വികിരണധാര	ഇന്ത്യ
ലെഫ് ഡെവിഡോവിച്ച് ലന്താവു	ദ്രവസാന്ദ്രീകരണനിയമം, ദ്രവഹീലിയം	റഷ്യ
സുബ്രഹ്മണ്യം ചന്ദ്രശേഖർ	ചന്ദ്രശേഖർ പരിധി, നക്ഷത്രഘടനയും പരിണാമവും	ഇന്ത്യ
ജോൺ ബാർഡീൻ	ട്രാൻസിസ്റ്റർ, അതിചാലകതാനിയമം	അമേരിക്ക
സി.എച്ച്. ടൗൺസ്	മേസർ, ലേസർ	അമേരിക്ക
അബ്ദുൽസലാം	വൈദ്യുതകാന്തികബലം, ക്ഷീണ ആണവബലം എന്നിവയുടെ സംയോജനം	പാകിസ്ഥാൻ

പട്ടിക 1.2 ഭൗതികശാസ്ത്രവും സാങ്കേതികവിദ്യയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

സാങ്കേതികവിദ്യ	ശാസ്ത്രീയസിദ്ധാന്തങ്ങൾ
ആവിയന്ത്രം	താപഗതികസിദ്ധാന്തങ്ങൾ
ആണവനിലയം	നിയന്ത്രിത അണുവിഘടനം
റേഡിയോ, ടെലിവിഷൻ	വൈദ്യുതകാന്തികതരംഗത്തിന്റെ ഉൽപ്പാദനം, വിതരണം,സ്വീകരണം
കമ്പ്യൂട്ടർ	ഡിജിറ്റൽ ലോജിക് (digital logic)
ലേസർ	അനുവർധിത വികിരണംകൊണ്ടുള്ള പ്രകാശപ്രവർധനം
അത്യുന്നത കാന്തികക്ഷേത്രനിർമിതി	അതിചാലകത (superconductivity)
റോക്കറ്റ് ചലനം	ന്യൂട്ടന്റെ ചലനനിയമങ്ങൾ
ജനറേറ്റർ	ഫാരഡേയുടെ വൈദ്യുതകാന്തിക പ്രേരണനിയമങ്ങൾ
ജലവൈദ്യുതശക്തി	ഗുരുത്വാകർഷണ സ്ഥിതികോർജത്തെ വൈദ്യുതോർജമായി മാറ്റുന്നു.
വിമാനം	ബർണൗളിയുടെ ദ്രവഗതികസിദ്ധാന്തങ്ങൾ
കണികാത്വരിത്രം (ആക്സിലറേറ്റുകൾ)	വൈദ്യുതകാന്തികക്ഷേത്രത്തിലൂടെയുള്ള ചാർജിതകണങ്ങളുടെ ചലനം
സോനാർ	അൾട്രാസോണിക് തരംഗങ്ങളുടെ പ്രതിഫലനം
ഒപ്റ്റിക്കൽ ഫൈബർ	പ്രകാശത്തിന്റെ പൂർണആന്തരിക പ്രതിഫലനം
പ്രതിപതനരോധ പൂശലുകൾ	നേരിയ ഇന്റർഫറൻസ് സ്തരങ്ങൾ
ഇലക്ട്രോൺ മൈക്രോസ്കോപ്പ്	ഇലക്ട്രോണുകളുടെ തരംഗസ്വഭാവം
ഫോട്ടോസെൽ	ഫോട്ടോ ഇലക്ട്രിക് പ്രഭാവം
ഫ്യൂഷൻ ടെസ്റ്റ് റിയാക്ടർ (ടോക്കാമാക്ക്)	കൃത്രിമ പ്ലാസ്മാവസ്ഥ സംരക്ഷിച്ചു നിർത്തൽ.
ജയന്റ് മീറ്റർവേവ് റേഡിയോ ടെലസ്കോപ്പ് (GMRT)	റേഡിയോ തരംഗങ്ങളെ പിടിച്ചെടുക്കൽ/സ്വീകരിക്കൽ
ബോസ്-ഐൻസ്റ്റൈൻ കണ്ടൻസേറ്റ്	ലേസർരശ്മിയും കാന്തികക്ഷേത്രവും ഉപയോഗിച്ച് ആറ്റങ്ങളെ വളരെ താഴ്ന്ന താപനിലയിലേക്കു തണുപ്പിച്ചെടുക്കൽ.

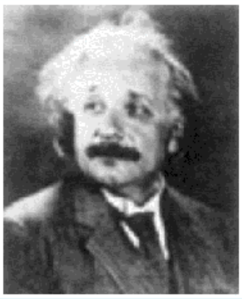
പ്രവർത്തനവും വിശകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ അടിസ്ഥാനപരമായി പലവിധത്തിലുള്ള ബലങ്ങൾ (forces) അവയിലൊക്കെ പ്രവർത്തിക്കുന്നുണ്ടെന്നു കാണാം. ഏതൊക്കെയാണ് ആ ബലങ്ങൾ? അതു മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് പ്രാപഞ്ചിക ശക്തികളായി വർത്തിക്കുന്ന അടിസ്ഥാന ബലങ്ങൾ, അഥവാ പ്രാഥമികബലങ്ങൾ എന്തൊക്കെയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കാം.

1.4 പ്രകൃതിയിലെ അടിസ്ഥാനബലങ്ങൾ (Fundamental forces in Nature*)

ദൈനംദിനജീവിതത്തിൽ നമ്മെ ഏതൊക്കെയോ ബലങ്ങൾ സ്വാധീനിക്കുന്നുവെന്ന് തോന്നാറുണ്ട്. എല്ലാതരം പ്രവർത്തനങ്ങൾക്കും ബലം വേണമെന്ന് നമുക്കറിയാം. വസ്തുവിനെ തള്ളിമാറ്റാനും ദൂരേക്ക് വലിച്ചെറിയാനും പിളർക്കാനും തകർക്കാനുമൊക്കെ ബലം വേണം. അതുപോലെ നമുക്കെതിരെ വരുന്ന വസ്തു നമ്മുടെ ദേഹത്തുതട്ടിയാലും നമ്മൾ സ്വയം കറങ്ങിക്കൊണ്ടേയിരുന്നാലും ഉണ്ടാവുന്ന ശാരീരികാനുഭവം നമുക്കറിയാം. ഇത്തരം അനുഭവങ്ങളിലുൾപ്പെടുന്നതും അല്ലാത്തതുമായ ബലങ്ങളെക്കുറിച്ച് ശാസ്ത്രീയമായി വിശകലനം ചെയ്താൽ ബലമെന്നത് കേവലം നിസ്സാരമോ ബാലിശമോ ആയ കാര്യമല്ലെന്ന് ബോധ്യമാവും. പൗരാണിക ചിന്തകരായിരുന്ന അരിസ്റ്റോട്ടിൽ പോലുള്ളവർക്കുപോലും ഇക്കാര്യത്തിൽ ശരിയായ കാഴ്ചപ്പാടുകൾ ഉണ്ടാക്കിയെടുക്കാൻ കഴിഞ്ഞിരുന്നില്ല. ബലം എന്ന പ്രതിഭാസത്തെക്കുറിച്ച് പ്രാഥമികമായ ഒരു കാഴ്ചപ്പാടുണ്ടാക്കിയെടുക്കാൻതന്നെ ഐസക് ന്യൂട്ടൻ ചലനനിയമങ്ങൾ (Laws of motion) ആവിഷ്കരിക്കുന്ന കാലം വരെ മനുഷ്യരാശിക്ക് കാത്തിരിക്കേണ്ടിവന്നു. രണ്ടു വസ്തുക്കൾക്കിടയിലെ ഗുരുത്വാകർഷണത്തിന് അദ്ദേഹം കൃത്യമായ രൂപം നൽകി. (ഇനി വരുന്ന ഭാഗങ്ങളിൽ ഇക്കാര്യം കൂടുതൽ പഠിക്കാനുണ്ട്.)

സ്ഥൂല പ്രപഞ്ചത്തിൽ ഗുരുത്വാകർഷണബലത്തിന് പുറമേ മറ്റനേകം ബലങ്ങളെയും നമുക്ക് അഭിമുഖീകരിക്കേണ്ടിവരുന്നുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന് പേശീബലം, രണ്ടു വസ്തുക്കളുടെ സമ്പർക്കം മൂലമുണ്ടാവുന്ന ബലം, ഘർഷണ ബലം (friction -*ഇത് രണ്ടു പ്രതലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള സമ്പർക്കം മൂലമുണ്ടാവുന്ന ബലം തന്നെ*), വലിവുബലം (tension), ദ്രാവകസമ്പർക്കത്തിലുണ്ടാവുന്ന പ്ലവന ബലം (force of buoyancy). വിസ്കസ് ബലം (viscous force), ദ്രവങ്ങളുടെ മർദ്ദം (pressure), ദ്രാവകത്തിന്റ പ്രതലബലം (surface tension) എന്നിങ്ങനെ നിരവധിയെണ്ണം. ചാർജിതവസ്തുക്കളുടെയും കാന്തികവസ്തുക്കളുടെയും ബലങ്ങൾകൂടി ഇതിൽ ഉൾപ്പെടാനുണ്ട്. സൂക്ഷ്മമണ്ഡലത്തിലാണെങ്കിൽ, വൈദ്യുതബലവും കാന്തികബലവും, ഇലക്ട്രോൺ, പ്രോട്ടോൺ മുതലായവയുൾപ്പെടുന്ന ആണവബലവും ഒക്കെയായി ബലങ്ങളുടെ പട്ടിക നീണ്ടുപോ

* *Sections 1.4 and 1.5 contain several ideas that you may not grasp fully in your first reading. However, we advise you to read them carefully to develop a feel for some basic aspects of physics. These are some of the areas which continue to occupy the physicists today.*



ആൽബർട്ട് ഐൻസ്റ്റൈൻ (1879 – 1955)

ആൽബർട്ട് ഐൻസ്റ്റൈൻ 1879 ൽ ജർമനിയിലെ ഉൽമ് എന്ന സ്ഥലത്തു ജനിച്ചു. ലോകം മുഴുവൻ ആദരിക്കുന്ന മഹാനായ ശാസ്ത്രജ്ഞൻ. ആശ്ചര്യകരമായ രീതിയിലായിരുന്നു അദ്ദേഹത്തിന്റെ ശാസ്ത്രപ്രവേശം. 1905ൽ ഒരു ശാസ്ത്രമാസികയിൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ചുവന്ന, പതിവുരീതികളിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമായ അദ്ദേഹത്തിന്റെ മൂന്നു പ്രബന്ധങ്ങളോടുകൂടിയാണ് അത് തുടങ്ങുന്നത്. പ്രബന്ധങ്ങളിലൊന്നിൽ പ്രകാശ ക്വാണ്ടത്തെ (light quanta - പിൽക്കാലത്ത് photon എന്നറിയപ്പെട്ട ഊർജകണം) ക്കുറിച്ചുള്ള ആശയം അവതരിപ്പിക്കുകയും പ്രകാശവൈദ്യുത പ്രഭാവത്തിന്റെ (photoelectric effect) സ്വഭാവങ്ങൾ വിവരിക്കാൻ ശ്രമിക്കുകയും ചെയ്തു. എന്നാൽ അന്നുവരെ പ്രകാശത്തിന്റെയും വികിരണത്തിന്റെയും തനതു സ്വഭാവമായി ക്ലാസിക്കൽ ഭൗതികം സ്വീകരിച്ചുപോന്ന തരംഗസിദ്ധാന്തത്തിന് നിരക്കുന്നതായിരുന്നില്ല അത്. രണ്ടാമത്തെ പ്രബന്ധം ബ്രൗണിയൻ ചലനങ്ങളെ (Brownian motion) വിശദീകരിക്കുന്നതാണ്. ഇക്കാര്യത്തെക്കുറിച്ച് പിന്നീടു നടന്ന പരീക്ഷണം പ്രബന്ധത്തിലെ ആശയങ്ങളെ ശരിവക്കുന്നതരത്തിൽ ദ്രവ്യത്തിലെ തന്മാത്ര (അണു) സാന്നിധ്യത്തിന് വിശ്വസനീയമായ തെളിവു ലഭിക്കുകയും ചെയ്തു. മൂന്നാമത്തെ ലേഖനത്തിലാണ് ഐൻസ്റ്റൈനെ ഇതിഹാസതുല്യനായ ശാസ്ത്രജ്ഞനാക്കിയ സവിശേഷ ആപേക്ഷികതാസിദ്ധാന്തം (special theory of relativity) പിറവിയെടുക്കുന്നത്. അതേത്തുടർന്ന് $E=mc^2$ എന്ന വിഖ്യാതമായ ഊർജസമവാക്യത്തിന്റെ പര്യാലോചനകൾ നടത്തി. പിന്നീടാണ് ആപേക്ഷികസിദ്ധാന്തത്തെ ജഡത്വത്തിന്റെ (inertia) ചട്ടക്കൂടിലേക്ക് കൊണ്ടുവന്ന് അതിന് ഒരു പൊതു അവബോധമുണ്ടാക്കിയെടുത്തുകൊണ്ട് സാമാന്യ ആപേക്ഷികസിദ്ധാന്തം (General theory of relativity) ആവിഷ്കരിക്കുന്നത്. ഇതിലൂടെ ഗുരുത്വാകർഷണത്തെ മറ്റൊരു വീക്ഷണകോണിലൂടെ നോക്കിക്കാണാൻ അദ്ദേഹം പ്രേരിപ്പിക്കുന്നു. ഐൻസ്റ്റൈന്റെ പ്രധാനപ്പെട്ട പിൽക്കാല സംഭാവനകൾ: മാക്സ് പ്ലാങ്കിന്റെ തമോവസ്തു വികിരണനിയമത്തിന്റെ (blackbody radiation law) വ്യുൽപത്തിയിൽനിന്ന് വ്യത്യസ്തമായി ഒരു ഉത്തേജിത ഉൽസർജനത്തിന്റെ (stimulated emission) സങ്കൽപം മുന്നോട്ടു വച്ചു. ആധുനിക പ്രപഞ്ചവിജ്ഞാനത്തിന് പ്രേരണയാകുന്നത് പ്രപഞ്ചത്തിന്റെ സ്ഥിരതാ (static universe) മാതൃക ഒരു വാതകത്തിന്റെ ഘടന, ഭാരിച്ച ബോസോണുകളുടെ (massive bosons) ക്വാണ്ടം സ്ഥിതികാവസ്ഥ, ക്വാണ്ടം ബലതന്ത്രത്തിന്റെ ആവിഷ്കാരത്തിലുള്ള വിമർശനാത്മകമായ വിശകലനം എന്നിവയൊക്കെയാണ്. അന്താരാഷ്ട്ര ഭൗതികശാസ്ത്ര വർഷമായി 2005 പ്രഖ്യാപിച്ചത്, ആപേക്ഷികസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ നൂറാം വർഷം എന്ന പരിഗണനയിലും ഐൻസ്റ്റൈൻ എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞനോടുള്ള ലോകത്തിന്റെ ആദരസൂചകവുമായിട്ടാണ്. 1905 ലായിരുന്നല്ലോ സാമ്പ്രദായിക ചിന്താപദ്ധതികളെ മുഴുവൻ തകിടംമറിക്കുകയും ലോകത്തെ മറ്റൊരു കാഴ്ചപ്പാടിലൂടെ നോക്കിക്കാണാൻ പ്രേരിപ്പിക്കുകയും ചെയ്ത ആപേക്ഷിക സിദ്ധാന്തത്തിന് ആൽബർട്ട് ഐൻസ്റ്റൈൻ എന്ന മഹാപ്രതിഭ ജന്മം നൽകിയത്.

കുന്നു. എന്നാൽ നമുക്ക് പരിചിതങ്ങളായ ബലങ്ങളെല്ലാംതന്നെ സ്വതന്ത്രമായ നിലകളിൽ ഉള്ളവയാകണമെന്നില്ല. ബലങ്ങളുടെ പൊതുവായ ചില സ്വഭാവങ്ങളുസരിച്ച് നമുക്ക് അവയെ ചുരുക്കം ചില ശീർഷകങ്ങളിലേക്ക് ക്രോഡീകരിക്കാനാവും. അത്തരത്തിൽ തരംതിരിക്കുമ്പോഴും ക്രോഡീകരിക്കുമ്പോഴും അടിസ്ഥാനപരമായി വേറിട്ടുനിൽക്കുന്നവ നാലു ബലങ്ങൾ മാത്രമാണെന്നു ബോധ്യമാവും. അവയാണ് അടിസ്ഥാന പ്രകൃതിബലങ്ങൾ എന്നറിയപ്പെടുന്നത്, നിരവധിയായ സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന അനേകം ബലങ്ങൾ പരിചിതമാണെങ്കിലും ഇരുപതാം നൂറ്റാണ്ടിലെ ഭൗതികശാസ്ത്ര കാഴ്ചപ്പാടിൽ അടിസ്ഥാന പ്രകൃതിബലങ്ങൾ നാലെണ്ണം മാത്രമേയുള്ളൂ. അവയെക്കുറിച്ച് ഇനി വരുന്ന ഭാഗങ്ങളിൽ ചുരുക്കി വിവരിക്കുന്നു.

1.4.1 ഗുരുത്വബലം (Gravitational Force)

രണ്ടു വസ്തുക്കൾ തമ്മിൽ അവയുടെ മാസുകളുടെ തോതനുസരിച്ച് അന്യോന്യം ചെലുത്തുന്ന ബലമാണ് ഗുരുത്വബലം. ഇത് സർവവ്യാപിയായ ബലമാണ്. പ്രപഞ്ചത്തിലെ എല്ലാ വസ്തുക്കളും മറ്റെല്ലാ വസ്തുക്കളുമായും ഈ ബലം പരസ്പരം ചെലുത്തുന്നു. (മാസിനും അകലത്തിനും അനുസരിച്ചുള്ള ഏറ്റക്കുറച്ചിലുകൾ ഉണ്ടാകും). ഭൂമിയിലുള്ളതും സമീപസ്ഥവുമായ എല്ലാ വസ്തുക്കളെയും ഭൂമി അതിലേക്ക് ആകർഷിക്കുന്നു *(ഇതുകൊണ്ടാണ് വസ്തുക്കൾക്ക് ഭാരം അനുഭവപ്പെടുന്നത്)*. ഇതേ ഗുരുത്വബലം തന്നെയാണ് മുകളിൽനിന്നുള്ള വസ്തുക്കൾ താഴേക്ക് വീഴുന്നതിനും ചന്ദ്രൻ ഭൂമിയെ ചുറ്റിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതിനും *(അല്ലെങ്കിൽ ഭൂമിയിലേക്ക് വീണുകൊണ്ടിരിക്കുന്നതിനും)* ഗ്രഹങ്ങളെല്ലാം സൂര്യനെ പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നതിനും ഹേതുവായിട്ടുള്ളത്. പ്രപഞ്ചത്തിലെ ബൃഹത്തായ പ്രവർത്തനങ്ങളിലും പ്രതിഭാസങ്ങളിലും, (ഉദാഹരണത്തിന് നക്ഷത്രങ്ങളുടെയും ഗാലക്സികളുടെയും ഗാലക്സിവ്യൂഹങ്ങളുടെയും ജനനനത്തിലും പരിണാമപ്രക്രിയകളിലും) ഗുരുത്വബലം പ്രധാന പങ്കുവഹിക്കുന്നു.

1.4.2 വൈദ്യുതകാന്തികബലം (Electromagnetic Force)

ചാർജിത കണങ്ങൾക്കിടയിലെ ബലമാണ് വൈദ്യുതകാന്തികബലം. ചാർജുകൾ സ്ഥിരാവസ്ഥയിലാ (rest) ണെന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ കൂളോം നിയമം (Coulomb's Law) അനുസരിച്ച്: *വിരുദ്ധ ചാർജുകൾ തമ്മിൽ ആകർഷണത്തിലും സമാന ചാർജുകൾ തമ്മിൽ വികർഷണത്തിലും ആയിരിക്കും.* ചലനത്തിലുള്ള ചാർജ് ഒരു കാന്തികപ്രതിഭാസത്തിനു കാരണമാവുകയും ഒരു വസ്തുവിനോ കണത്തിനോ ചുറ്റുമായി അതൊരു കാന്തികമണ്ഡലമുണ്ടാക്കുകയും ആയത് ചലിത വസ്തുവിന്മേൽ ഒരു ബലമുണ്ടാക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. വൈദ്യുതപരവും കാന്തികവുമായ പ്രതിഭാസങ്ങളെ വേർതിരിക്കാൻ പൊതുവേ സാധിക്കില്ല. അതുകൊ

സത്യേന്ദ്രനാഥ് ബോസ് (1894 – 1974)

1894 ൽ കൽക്കത്തയിലാണ് സത്യേന്ദ്രനാഥ് ബോസ് (Sayendra Nath Bose) ജനിച്ചത്. ഇരുപതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഭൗതികശാസ്ത്ര പുരോഗതിക്ക് അടിസ്ഥാനപരമായ സംഭാവനകൾ നൽകിയ ഇന്ത്യൻ ശാസ്ത്രജ്ഞരിൽ അദ്ദേഹം പ്രമുഖസ്ഥാനം വഹിക്കുന്നു. ഒരു വിദ്യർഥിയായിരുന്ന ബോസ് വിദ്യാഭ്യാസത്തിനു ശേഷം 1916 ൽ കൽക്കത്താ സർവകലാശാലയിൽ ഭൗതികശാസ്ത്ര അധ്യാപകനായിച്ചേർന്നു. അഞ്ചു വർഷത്തിനു ശേഷം അദ്ദേഹം ധാക്ക യൂണിവേഴ്സിറ്റിയിലേക്ക് മാറി. അവിടെ വെച്ച് 1924 ൽ പ്ലാങ്ക് സിദ്ധാന്തത്തിന് ഒരു പുതിയ നിർധാരണം കണ്ടെത്തി. പ്രകാശകണ (photon) സഞ്ചയത്തെ ഒരു വാതക വ്യൂഹമായി പരിഗണിച്ച് സാംഖ്യകനിയമങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചായിരുന്നു നിർധാരണം. ഇത് ഒരു ചെറിയ പ്രബന്ധമായി അദ്ദേഹം ഐൻസ്റ്റൈന് എഴുതുകയും അദ്ദേഹം ഇതിന്റെ സാധ്യത പെട്ടെന്നു മനസ്സിലാക്കുകയും ഉടൻ തന്നെ അത് ജർമൻ ഭാഷയിൽ വിവർത്തനം ചെയ്ത് പ്രസിദ്ധീകരിക്കുകയും ചെയ്തു. ഐൻസ്റ്റൈൻ പിന്നീട് ഇതേ മാതൃക തന്മാത്രകളുടെ സഞ്ചയത്തിൽ പ്രയോഗിച്ചു. ഫോട്ടോൺ വ്യൂഹത്തെ വാതകാവസ്ഥയിലുള്ള കണികകളായി പരിഗണിച്ചുകൊണ്ട് ഇത്തരം കണികകളുടെ എണ്ണം നിർണയിക്കാനാകും എന്ന് അദ്ദേഹം സമർഥിച്ചു.

ഇത് അതുവരെ ശാസ്ത്രലോകം കണികകളെക്കുറിച്ച് ധരിച്ചുവച്ചിരുന്ന മാക്സ്വെൽ - ബോൾട്സ്മാൻ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് നിബന്ധനകളിൽ നിന്നുള്ള വ്യക്തമായ വ്യതിചലനമായിരുന്നു. ബോസിന്റെ പരികല്പനയിൽ നിന്നു രൂപീകൃതമായ ബോസ് - ഐൻസ്റ്റൈൻ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റികസ് പൂർണസംഖ്യാസ്പിൻ കാണിക്കുന്ന കണികകൾ പാലിക്കുന്നുവെന്ന് ബോധ്യമായി. പോളിയുടെ നിയമം അനുസരിക്കുന്ന അർധ സ്പിൻ കണികകളുടെ സ്വഭാവങ്ങളെ നിർണയിക്കാനുള്ള ഫെർമി - ഡിറാക് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പരികല്പനയുടെ ആവശ്യകതയിലേക്ക് ഭൗതികശാസ്ത്രത്തെ ഇത് കൊണ്ടെത്തിച്ചു. പൂർണസംഖ്യാസ്പിൻ പരിമാണങ്ങളുള്ള കണങ്ങളെ ബോസിന്റെ ബഹുമാനാർഥം ബോസോണുകളെന്നു വിളിക്കുന്നു.

ഒരു തന്മാത്രാസഞ്ചയത്തിന്റെ താപനില വളരെ താഴ്ന്നതലത്തിലെത്തുമ്പോൾ തന്മാത്രാസഞ്ചയത്തിലെ ബഹുഭൂരിപക്ഷം തന്മാത്രകളും ഏറ്റവും താഴ്ന്ന ഒരു ഊർജനിലയിലേക്ക് മാറുന്ന തരത്തിലുള്ള അവസ്ഥാപരിണാമം (Phase change) (ബോസ് - ഐൻസ്റ്റൈൻ കണ്ടൻസേറ്റ്) നടക്കുമെന്ന് ബോസ് - ഐൻസ്റ്റൈൻ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലൂടെ പ്രവചിച്ചിരുന്നു. എന്നാൽ എഴുപതോളം വർഷങ്ങൾ കഴിഞ്ഞപ്പോഴാണ് ശാസ്ത്രീയമായി ഈ അവസ്ഥാപരിണാമത്തെ കണ്ടെത്താൻ കഴിഞ്ഞത്.

ണ്ടാണ് വൈദ്യുതകാന്തികത എന്നുവിളിക്കുന്നത്. ഗുരുത്വബലം പോലെത്തന്നെ വൈദ്യുതകാന്തികബലവും സർവവ്യാപിയും മാധ്യമത്തിന്റെ ആവശ്യമില്ലാത്തതുമാണ്. അത് ഗുരുത്വാകർഷണത്തെ അപേക്ഷിച്ച് ശക്തി കൂടിയതാണ്. ഏത് അകലത്തിലായാലും രണ്ടു പ്രോട്ടോണുകൾക്കിടയിലെ വൈദ്യുത ബലം അവ തമ്മിലുള്ള ഗുരുത്വബലത്തേക്കാൾ 10^{36} മടങ്ങാണ്. നമുക്കറിയാവുന്നതുപോലെ ദ്രവ്യത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന ഘടകങ്ങൾ ഇലക്ട്രോൺ, പ്രോട്ടോൺ തുടങ്ങിയ കണങ്ങളാണ്. വൈദ്യുതകാന്തികബലം ഗുരുത്വാകർഷണത്തേക്കാൾ ശക്തിയുള്ളതായതിനാൽ അത് അറ്റോമികതലത്തിലും തന്മാത്രാതലത്തിലുമുള്ള എല്ലാ പ്രതിഭാസങ്ങളെയും നിയന്ത്രിക്കുന്നു. (മറ്റു രണ്ടു ബലങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാൻ പോകുന്നതുപോലെ അണുവിനകത്ത് മാത്രം പ്രവർത്തിക്കുന്നു.) അങ്ങനെ, വൈദ്യുതകാന്തികബലം ആറ്റങ്ങളുടെയും തന്മാത്രകളുടെയും ഘടനയെ നിയന്ത്രിക്കുകയും രാസപ്രവർത്തനത്തിന്റെ ഗതി, ദ്രവ്യത്തിന്റെ ബലതന്ത്രം, താപീയപ്രവർത്തനങ്ങൾ എന്നിവകളിൽ ഫലപ്രദമായി ഇടപെടുകയും ചെയ്യുന്നു. അത് സന്തുലബലങ്ങളായ വലിവുബലം, ഘർഷണബലം, ലംബബലം, സ്പ്രിങ് ബലം എന്നിവകൾക്കു പിന്നിൽ പ്രവർത്തിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

ആകർഷിക്കുക എന്നതാണ് ഗുരുത്വബലത്തിന്റെ പൊതുസ്വഭാവം. അതേസമയം വൈദ്യുതകാന്തികബലം ആകർഷണസ്വഭാവവും വികർഷണസ്വഭാവവും പ്രകടിപ്പിക്കുന്നുണ്ട്. മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ മാസ് ഒരു തരത്തിൽ മാത്രമേയുള്ളൂ (നെഗറ്റീവ് (–) മാസ് നിലവിലില്ല). എന്നാൽ ചാർജുകൾ രണ്ടു വിധമുണ്ട്–പോസിറ്റീവ് ചാർജും (+) നെഗറ്റീവ് ചാർജും (–). ഇതാണ് രണ്ടു ബലങ്ങളും തമ്മിലുള്ള പ്രധാന വ്യത്യാസം. ദ്രവ്യം പൊതുവേ വൈദ്യുതപരമായി ഉദാസീനമാണ് (neutral). അപ്പോൾ ആപേക്ഷികമായി നിശ്ചലവസ്തുക്കൾ വൈദ്യുതനിരപേക്ഷമായതിനാൽ ഭൗമതലത്തിൽ ഗുരുത്വാകർഷണത്തിന് പ്രാമുഖ്യം കിട്ടുന്നു. വൈദ്യുതബലം വാസ്തവത്തിൽ അന്തരീക്ഷത്തിൽ നിലനിൽക്കുന്നുണ്ട്, ആറ്റങ്ങൾ അയോണീകരിക്കപ്പെട്ട് ഒത്തുകൂടുമ്പോഴാണ് മിന്നൽ പോലുള്ള പ്രതിഭാസങ്ങളുണ്ടാവുന്നത്.

ഗുരുത്വബലത്തേക്കാൾ എത്രയോ ശക്തമായ ബലമാണ് വൈദ്യുതകാന്തികബലമെന്ന് നമുക്കു ചുറ്റുമുള്ള കാര്യങ്ങളെ ശരിയായി മനസ്സിലാക്കിയാൽ ബോധ്യപ്പെടും. പരസ്പരവികർഷണം മൂലം തന്മാത്രകൾ അവയുടെ വലുപ്പത്തിന്റെ എത്രയോ മടങ്ങ് അകലങ്ങളിലായാണ് സഗിതിചെയ്യുന്നത് *(വായു തന്മാത്രകൾ അവയുടെ വലുപ്പത്തിന്റെ 10 മടങ്ങ് ഇടവിട്ട് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു- അവഗാഡ്രോ തത്വം.)*. അങ്ങനെയല്ലായിരുന്നെങ്കിൽ വസ്തുക്കളും ജീവശരീരങ്ങളും ഗുരുത്വാകർഷണം മൂലം ഞെരിഞ്ഞമർന്നുപോകുമായിരുന്നു.

1.4.3 പ്രബല ആണവബലം (Strong Nuclear Force)

അണുകേന്ദ്രത്തിലെ (Nucleus) പോസിറ്റീവ് ചാർജുള്ള പ്രോട്ടോണിനെയും ശൂന്യചാർജുള്ള ന്യൂട്രോണിനെയും ഒരുമിച്ചുനിർത്തുന്ന ബലമാണ് പ്രബല ആണവ ബലം. അത്തരം ഒരു ബലം പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ലെങ്കിൽ പ്രോട്ടോണുകൾ പരസ്പരം വികർഷിച്ച് അണുകേന്ദ്രം ശിഥിലമാവുമായിരുന്നു. അണുകേന്ദ്രത്തിലെ രണ്ടു പ്രധാന കണങ്ങൾ പരസ്പരം യോജിച്ചുനിൽക്കുന്നത് ഗുരുത്വാകർഷണം മൂലമാവാനിടയില്ല. കാരണം, അണുകണങ്ങളുടെ വലുപ്പവും അവ തമ്മിലുള്ള അകലവും ഗുരുത്വബലത്തിന്റെ സമീകരണത്തിന് വഴങ്ങുന്നതല്ല, മാത്രമല്ല, വൈദ്യുതബലത്തെ മറികടന്ന് ഗുരുത്വബലത്തിന് അണുകേന്ദ്രത്തിൽ ഒന്നും ചെയ്യാനാവില്ല. അതുകൊണ്ട് ഗുരുത്വാകർഷണബലത്തിൽ നിന്നു ഭിന്നമായ ഒരു ബലം അവിടെ തീർച്ചയായും പ്രവർത്തിക്കുന്നുണ്ട്. അതാണ് പ്രബല ആണവബലം. ഈ ബലം അടിസ്ഥാന പ്രകൃതിബലങ്ങളിൽ ഏറ്റവും ശക്തിയുള്ളതാണ്. വൈദ്യുതകാന്തികബലത്തെ അപേക്ഷിച്ച് 100 ഇരട്ടി ശക്തി അതിനുണ്ട്. പ്രോട്ടോണും പ്രോട്ടോണും തമ്മിലും ന്യൂട്രോണും ന്യൂട്രോണും തമ്മിലും പ്രോട്ടോണും ന്യൂട്രോണും തമ്മിലും നിശ്ചിത സ്ഥാനങ്ങളിൽ നിലനിർത്തുന്നതിന് ഈ ബലം പ്രവർത്തിക്കുന്നു. ഈ ബലത്തിന്റെ സ്വാധീനം അണുകേന്ദ്രത്തിനകത്ത് ഏകദേശം $10^{-15}m$. പരിധിയിൽ മാത്രം ഒതുങ്ങുന്നതാണ്.

പ്രോട്ടോണും ന്യൂട്രോണും അടിസ്ഥാനകണങ്ങളല്ലെന്നും അവ നിർമിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത് ക്വാർക്കുകൾ (quarks) എന്ന കൂടുതൽ മൗലികമായ കണങ്ങൾ ചേർന്നാണെന്നും സ്ഥിരീകരിക്കപ്പെട്ടത് അണുഭൗതികത്തെ അന്വേഷണത്തിന്റെ പുതിയ മേഖലകളിലെത്തിക്കുന്നു.

1.4.4 ക്ഷീണ ആണവബലം (Weak Nuclear Force)

ചില പ്രത്യേകതരം ആണവപ്രക്രിയകളിൽ, അതായത് അണുഭാരം കൂടുതലുള്ള വസ്തുക്കളിൽ ബീറ്റാശോഷണം (β-decay) എന്ന പ്രതിഭാസം സംഭവിക്കുന്നിടത്താണ് ക്ഷീണ ആണവബലം പ്രവർത്തിക്കുന്നത്. ബീറ്റാശോഷണത്തിൽ അണുകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഒരു ഇലക്ട്രോണും ഒരു പ്രതി-ന്യൂട്രിനോ (anti-neutrino) എന്ന ഉദാസീന കണവും അണു പുറത്തേക്ക് ഉൽസർജിക്കപ്പെടുന്നു. പേരു സൂചിപ്പിക്കുംപോലെ ഈ ബലം അത്ര ക്ഷീണിതമൊന്നുമല്ല, ഗുരുത്വബലത്തേക്കാൾ ശക്തി കൂടിയതും മറ്റു രണ്ടു ബലത്തേക്കാൾ ശക്തി കുറഞ്ഞതുമാണ്. $10^{-16}m$ മാത്രമാണ് അതിന്റെ പ്രവർത്തനസീമ.

1.4.5 പ്രകൃതിബലങ്ങളുടെ ഏകീകരണം (Unification of Forces)

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ പ്രകൃതിബലങ്ങളുടെ ഏകീകരണമെന്ന കാഴ്ചപ്പാടിനും അതിനുള്ള അന്വേഷണത്തിനും പ്രമുഖ സ്ഥാനമാണുള്ളത്. ഇതര മണ്ഡലങ്ങളിലും വ്യത്യസ്തമായ സിദ്ധാന്തങ്ങൾക്കു കീഴിൽ മുൻപുണ്ടായിരുന്ന ബലങ്ങളെ പലകാലങ്ങളിലായി ഏകീകരണത്തിനു വിധേയമാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ഭൗമമണ്ഡലത്തിലും ആകാശ മണ്ഡലത്തിലുമുള്ളവയെ ന്യൂട്ടൻ ഗുരുത്വബലമെന്ന പൊതു നിയമത്തിൻ കീഴിലാക്കി. ഏഴ്സ്റ്റഡിന്റെയും ഫാരഡേയുടെയും പരീക്ഷണ ഫലമായി വൈദ്യുതിയും കാന്തികതയും പൊതുവേ വിഭജനാതീതമാണെന്ന കാഴ്ചപ്പാടിലെത്തിച്ചു. പ്രകാശം ഒരു വൈദ്യുതകാന്തികതരംഗമാണെന്ന് സ്ഥാപിച്ചതിലൂടെ വൈദ്യുതകാന്തികതയെയും പ്രകാശശാസ്ത്രത്തെയും മാക്സ്‌വെൽ ഏകീകരിച്ചു. ഐൻസ്റ്റൈൻ ഗുരുത്വത്തെയും വൈദ്യുതകാന്തികതയെയും യോജിപ്പിക്കാൻ ശ്രമിച്ചെങ്കിലും ആ ഉദ്യമം വിജയിച്ചില്ല. എന്നാൽ ഇതൊന്നും ഭൗതികത്തെ ഏകീകരണമെന്ന ലക്ഷ്യത്തിൽനിന്നു പിന്നോട്ടുപോവാൻ ഇടയാക്കിയില്ല.

ഈയടുത്ത ദശകങ്ങളിൽ ഈ മുന്നേറ്റം കുറച്ച് പുരോഗതിയിലേക്കു പോകുന്നതായി കാണുന്നു. വൈദ്യുതകാന്തികബലവും ക്ഷീണ ആണവബലവും ഏകീകരിച്ചുകൊണ്ട് വൈദ്യുത-ക്ഷീണബലമെന്ന (electro-weak force) ഒറ്റ കാഴ്ചപ്പാടിലേക്കു കൊണ്ടുവരാൻ കഴിഞ്ഞിരിക്കുന്നു. ഈ ഏകീകരണപ്രക്രിയയുടെ വിശദാംശങ്ങൾ ഇവിടെ വിവരിക്കാൻ സാധിക്കാത്തതാണെങ്കിലും അതിനെ തുടർന്ന് വൈദ്യുത-ക്ഷീണബലത്തേയും പ്രബലബലത്തേയും തമ്മിൽ സംയോജിപ്പിക്കുന്നതിനും കൂടാതെ മറ്റു അടിസ്ഥാനബലങ്ങളുമായി ഗുരുത്വബലത്തെ സംയോജിപ്പിക്കുന്നതിനുമുള്ള ശ്രമങ്ങൾ ഇപ്പോഴും തുടരുന്നുണ്ട്. എന്നാൽ ഇത് അത്ര എളുപ്പമല്ല. ഇതു സംബന്ധിച്ച ആശയങ്ങളും പ്രതീക്ഷകളും എവിടെയുമെത്താറായിട്ടുമില്ല. പട്ടിക 1.4 ൽ ഏകീകരണത്തിന്റെ പുരോഗതിയുടെ നാഴികക്കല്ലുകൾ ചുരുക്കി വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്.

1.5 ഭൗതികനിയമങ്ങളുടെ സ്വഭാവം (Nature of physical laws)

പ്രപഞ്ചവിശാലതയിലേക്കുള്ള അന്വേഷണമാണ് ശാസ്ത്രജ്ഞർ നടത്തുന്നത്. ശാസ്ത്രീയപ്രക്രിയകളിലൂടെ മുന്നേറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്ന അന്വേഷണത്തിന്റെ പരിധിയിൽ അണുവിനേക്കാൾ ചെറുതായ ഊർജകണങ്ങളും അതിവിദൂരതയിലുള്ള നക്ഷത്രമണ്ഡലങ്ങളും ഉൾപ്പെടും. നിരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെയും പരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെയും വസ്തുതകൾ കണ്ടെത്തുക മാത്രമല്ല, രൂപപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ള നിഗമനങ്ങളെ ക്രോഡീകരിച്ച് മിക്കപ്പോഴും ഗണിതത്തിന്റെ പിൻബലത്തോടെ ഒരു സിദ്ധാന്തമായി അവതരിപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുക എന്നതാണ് ഒരു ശാസ്ത്രജ്ഞന്റെ ശ്രമകരമായ പ്രവർത്തനം.

പട്ടിക 1.3 പ്രകൃതിയിലെ അടിസ്ഥാനബലങ്ങൾ

പേര്	ആപേക്ഷികശക്തി	സ്വാധീനപരിധി	സ്വാധീനമേഖല
ഗുരുത്വബലം	10^{39}	അനന്തം	എല്ലാ പ്രപഞ്ച വസ്തുക്കളിലും
ക്ഷീണ ആണവബലം	10^{13}	അതിസൂക്ഷ്മം, അണുകേന്ദ്ര വലുപ്പം ($\sim 10^{-16}$മീ.)	ചില പ്രാഥമികകണങ്ങൾ – പ്രത്യേകിച്ച് ഇലക്ട്രോൺ, ന്യൂട്രിനോകൾ
വൈദ്യുതകാന്തികബലം	10^{-2}	അനന്തം	ചാർജിത കണങ്ങൾ
പ്രബല ആണവബലം	1	സൂക്ഷ്മം, അണുകേന്ദ്ര വലുപ്പം ($\sim 10^{-15}$മീ.)	ന്യൂക്ലിയോണുകൾ, ഭാരമേറിയ പ്രാഥമികകണങ്ങൾ.

വ്യത്യസ്ത ബലങ്ങളാൽ നിയന്ത്രിക്കപ്പെടുന്ന ഭൗതിക പ്രതിഭാസങ്ങളിൽ സമയാനുസൃതമായി വ്യത്യാസപ്പെടുന്ന വിവിധതരം അളവുകൾ ഉണ്ടാകും. എന്നാൽ ചില പ്രത്യേക ഭൗതിക അളവുകൾ എല്ലായ്പ്പോഴും സ്ഥിരമായി നിലനിൽക്കുന്നതായി കാണാം. ഇവ പ്രകൃത്യാ തന്നെ സംരക്ഷിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഭൗതിക പ്രതിഭാസങ്ങളാണ്. ഇത്തരം സംരക്ഷണനിയമങ്ങൾ മനസ്സിലാവുമ്പോഴാണ് നിരീക്ഷണവിവരങ്ങളിൽ അവശ്യം ഉണ്ടായിരിക്കേണ്ട അളവുകളുടെ കൃത്യത ബോധ്യപ്പെടുക.

ബാഹ്യസംരക്ഷിതബലത്തിനു കീഴിലുള്ള ഒരു ചലിത വസ്തുവിനെ സംബന്ധിച്ച് മൊത്തം യാന്ത്രികോർജം, അതായത് ഗതികോർജത്തിന്റെയും സ്ഥിതികോർജത്തിന്റെയും തുക സ്ഥിരമായിരിക്കും. പരിചിതമായ ഉദാഹരണം ഗുരുത്വാകർഷണത്തിനുകീഴിൽ ഒരു വസ്തുവിന്റെ വെറും വീഴ്ചതന്നെയാണ്. വീഴ്ചയുടെ സമയവർധനയനുസരിച്ച് അതിന്റെ ഗതികോർജത്തിലും സ്ഥിതികോർജത്തിലും ആനുപാതികമായ മാറ്റങ്ങളുണ്ടാകും. എന്നാൽ ഊർജത്തിന്റെ തുക നിശ്ചിതമായിരിക്കും. വിരാമത്തിൽനിന്നു പുറപ്പെടുന്ന വസ്തുവാണെങ്കിൽ അതിന്റെ പ്രാരംഭസ്ഥിതികോർജം ഭൂമിയിൽ പതിക്കുമ്പോഴേക്കും മൊത്തമായി ഗതികോർജമായി മാറ്റപ്പെട്ടിരിക്കും. ഈ തത്വം സംരക്ഷിതബലത്തിനുമാത്രമായി പരിമിതപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ളതാണ്. ഒറ്റപ്പെട്ട വ്യവസ്ഥകളെ പൊതുഊർജ സംരക്ഷണനിയമമായി ഇതിനെ തെറ്റിദ്ധരിക്കേണ്ടതില്ല. (അത് താപഗതികത്തിന്റെ ഒന്നാം നിയമത്തെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ളതാണ്).

ഊർജത്തെക്കുറിച്ചുള്ള കാഴ്ചപ്പാട് ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ മുഖ്യസ്ഥാനത്തുള്ളതും ഊർജത്തിന്റെ ആവിഷ്കാരം ഭൗതികത്തിന്റെ എല്ലാ വ്യവസ്ഥകളിലും കുറിക്കാനാവുന്നതുമാണ്. എല്ലാ ഊർജരൂപങ്ങളും അതായത് താപം, വൈദ്യുതോർജം, യാന്ത്രികോർജം മുതലായവ പരിഗണിക്കുമ്പോൾ ഊർജം സംരക്ഷിതമാണ്. ഊർജസംരക്ഷണനിയമം എല്ലാതരം ബലങ്ങളെയും സംബന്ധിച്ച് യഥാർഥവും ഏതുതരം ഊർജവിനിമയത്തിലും ബാധകവുമാണ്. വെറും വീഴ്ചയിലുൾപ്പെടുന്ന വസ്തുതന്നെ ഉദാഹരണമാക്കിയാൽ വീഴുന്ന വസ്തുവിന്മേലുള്ള വായുരോധം ഉൾപ്പെട്ട നിലയിൽ വസ്തു തറയിൽ എത്തിയശേഷം വീക്ഷിക്കുകയാണെങ്കിൽ മൊത്തം യാന്ത്രികോർജം സംരക്ഷിക്കപ്പെട്ടില്ലെന്നു വ്യക്തമാവുന്നു. പക്ഷേ സാമാന്യ ഊർജസംരക്ഷണനിയമം ഇതിനു ബാധകമാവേണ്ടതാണ്. ഇവിടെ, വസ്തുവിന്റെ പ്രാരംഭ സ്ഥിതികോർജം വിവിധ ഘട്ടങ്ങളിലായി മറ്റ് ഊർജരൂപങ്ങളായി മാറ്റപ്പെടുന്നുണ്ട്– താപം, ശബ്ദം എന്നിങ്ങനെ (ശബ്ദം പിന്നീട് താപോർജമായി പരിണമിക്കും). അങ്ങനെയാവുമ്പോൾ മൊത്തം വ്യവസ്ഥയുടെ ഊർജം (വസ്തു, ചുറ്റുപാടുകൾ എന്നിവകളിലായി) മാറ്റമില്ലാതെ നിലനിൽക്കുമെന്നു പറയാം.

പട്ടിക 1.4 ഏകീകരണപ്രക്രിയ കൈവരിച്ച പ്രകൃതിയിലെ വിവിധ ബലങ്ങൾ/മേഖലകൾ

ശാസ്ത്രജ്ഞർ	വർഷം	ഏകീകരണത്തിലെ മുന്നേറ്റങ്ങൾ
ഐസക് ന്യൂട്ടൺ	1687	ആകാശത്തും ഭൂമിയിലുമുളള വസ്തുക്കളുടെ ചലനപ്രതിഭാസങ്ങളെ ഏകോപിപ്പിച്ച് ഇരുമണ്ഡലങ്ങളിലുമുള്ള ചലനനിയമങ്ങൾ ഒന്നുതന്നെയാണെന്നു തെളിയിച്ചു.
ഹാൻ ക്രിസ്റ്റ്യൻ എഴ്സ്റ്റഡ് മൈക്കൽ ഫാരഡേ	1820 1830	വൈദ്യുതിയും കാന്തികതയും വിഭജിക്കാനാകാത്തവിധം കൂടിച്ചേർന്ന പ്രതിഭാസങ്ങളാണെന്നും ഇവ രണ്ടും ഒരു ഏകീകൃത മണ്ഡലത്തിന്റെ ഭാഗമാണെന്നും തെളിയിച്ചു.
ജെയിംസ് ക്ലാർക്ക് മാക്സ്‌വെൽ	1873	വൈദ്യുതിയെയും കാന്തികതയെയും പ്രകാശ ഊർജത്തെയും ഏകീകരിച്ചു. പ്രകാശം ഒരു വൈദ്യുതകാന്തികതരംഗമാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.
ഷെൽഡൺ ഗ്ലാഷോവ് അബ്ദുൽസലാം, സ്റ്റീവൻ വൈൻബർഗ്	1979	പ്രപഞ്ചത്തിലെ നാല് അടിസ്ഥാനബലങ്ങളിൽപ്പെട്ട ക്ഷീണ ആണവബലവും വൈദ്യുതകാന്തികബലവും ഏകോപിപ്പിച്ചു, അവ രണ്ടും ക്ഷീണ ആണവബലത്തിന്റെ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത സ്വഭാവമാണെന്നു തെളിയിച്ചു.
കാർലോ റൂബിയ, സൈമൺ വേന്റർ മീർ	1984	ക്ഷീണ ആണവബലത്തെക്കുറിച്ചുള്ള മേൽ പ്രവചനം ശരിയാണെന്നു പരീക്ഷണത്തിലൂടെ കണ്ടെത്തി.

ഊർജസംരക്ഷണനിയമം പ്രകൃതിയിലെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും (സൂക്ഷ്മമണ്ഡലമായാലും സ്ഥൂലമണ്ഡലമായാലും) ഒരുപോലെ ബാധകമാണ്. കണഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലും (Atomic Physics) ആണവശാസ്ത്രത്തിലും (Nuclear Physics) അടിസ്ഥാന ഊർജകണങ്ങളുടെ വ്യവഹാരങ്ങളിലും അത് നിരന്തരം പ്രയോഗിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നതാണ്. പ്രകൃതിയിൽ ധാരാളം പ്രക്ഷുബ്ധപ്രവർത്തനങ്ങൾ നടന്നുകൊണ്ടേയിരിക്കുന്നുണ്ട്. എന്നാലും പ്രകൃതിയിലെ മൊത്തം ഊർജാവസ്ഥ (സാധ്യമായത്ര ഭിന്നവ്യവസ്ഥകളിലും) മാറ്റമില്ലാതെ നിലനിൽക്കുന്നതായി കരുതുന്നു.

ഐൻസ്റ്റൈന്റെ ആപേക്ഷികസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ആവിർഭാവം വരെ, ദ്രവ്യത്തിന്റെ അല്ലെങ്കിൽ മാസിന്റെ സംരക്ഷണനിയമം (Law of conservation of mass) പ്രകൃതിയിലെ ഒരു അടിസ്ഥാനതത്വമാണെന്ന് കരുതിപ്പോന്നിരുന്നു. ദ്രവ്യത്തിന് നാശമില്ലെന്നത് ശാസ്ത്രീയമായിത്തന്നെ കരുതിയിരുന്നു. രാസപ്രവർത്തന വിശകലനത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിരുന്ന (ഇപ്പോഴും ഉപയോഗിക്കുന്ന) ഒരു പ്രധാന തത്വവും ഇതുതന്നെയാണ്. രാസപ്രവർത്തനമെന്നത്, വിവിധ തന്മാത്രകൾക്കിടയിൽ നിന്നു പുറത്തേക്കും അകത്തേക്കും വന്നു പോകുന്ന അണുകണങ്ങളുടെ താൽക്കാലികമായ ഒരു പുനക്രമീകരണമാണ്. രാസപ്രവർത്തനത്തിൽ പങ്കെടുക്കേണ്ടുന്ന മൊത്തം തന്മാത്രകളുടെ ബന്ധനോർജം (binding energy) രാസ ഉൽപ്പന്നത്തിലുൾപ്പെടുന്ന തന്മാത്രകളുടെ ബന്ധനോർജത്തേക്കാൾ കുറവാണ് എന്നു കാണുന്നുവെങ്കിൽ, പ്രതിപ്രവർത്തനം താപമോചകമാണ് (exothermic) എന്നും നേരെ മറിച്ചാണെങ്കിൽ താപാഗിരണപ്രക്രിയ അല്ലെങ്കിൽ താപശോഷക (endothermic) മാണെന്നും പറയുന്നു. രാസപ്രവർത്തനത്തിലേതായാലും തന്മാത്രകളും അണുക്കളും പുതിയൊരു ക്രമീകരണത്തിലേക്കു വരുന്നുവെന്നല്ലാതെ നശിപ്പിക്കപ്പെടുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് വസ്തുക്കളുടെയും പ്രതിപ്രവർത്തന ഉൽപ്പന്നങ്ങളുടെയും പിണ്ഡങ്ങൾ രാസപ്രവർത്തനാനന്തരം ഒന്നുതന്നെയായിരിക്കും. ബന്ധനോർജത്തിനായി മാറ്റപ്പെടുന്ന മാസിന്റെയോ ഊർജത്തിന്റെയോ അളവുകൾ അതിസൂക്ഷ്മമായതിനാൽ മാസ് വ്യത്യാസം കാണിക്കാൻ മാത്രം പര്യാപ്തമല്ല.

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലെ സംരക്ഷണനിയമങ്ങൾ (Conservation Laws in Physics)

ഊർജം, ആവേഗം, കോണീയ ആക്കം, ചാർജ് എന്നിവയുടെ സംരക്ഷിത നിയമങ്ങളാണ് ഭൗതികത്തിൽ അടിസ്ഥാനനിയമങ്ങളായി പരിഗണിക്കപ്പെടുന്നത്. എന്നാൽ അനേകം സംരക്ഷണനിയമങ്ങൾ നിലനിൽക്കുന്നുണ്ട്. മേൽപ്പറഞ്ഞവയിൽനിന്ന് വ്യത്യസ്തമായി അണുഭൗതികത്തിന്റെയും കണഭൗതികത്തിന്റെയും തലങ്ങളിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നവയായി നിരവധി നിയമങ്ങളുണ്ട്. ചില സംരക്ഷിത പരിമാണങ്ങളായി ഭ്രമണം (spin), ബാരിയോൺ സംഖ്യ (baryon number), വൈചിത്ര്യങ്ങൾ (strangeness, singularity), വർധിത ചാർജുകൾ (hyper charges) എന്നിവയൊക്കെ പ്രവർത്തിക്കുന്നുണ്ട്.

സംരക്ഷിതനിയമങ്ങളായി, നിരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെയും പരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെയും ലഭ്യമായിട്ടുള്ളത് ചില സങ്കൽപ്പങ്ങളാണ്; സംരക്ഷണനിയമങ്ങൾ തെളിയിക്കാനാവാത്തവയാണ്. പക്ഷേ, പരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെ അത് പരിശോധിക്കുകയോ തള്ളിക്കളയുകയോ ആവാം.

അനേക നൂറ്റാണ്ടുകളായി നമ്മുടെ അനുഭവങ്ങളിൽനിന്ന് ഉരുത്തിരിഞ്ഞുവന്നിട്ടുള്ള ചില ധാരണകളാണവ. മാത്രമല്ല, വിവിധ പരിശോധനകളിൽനിന്ന് അവ സാധുതയുള്ളവയാണെന്നു തെളിഞ്ഞിട്ടുമുണ്ട്. ബലതന്ത്രം, താപഗതികം, വൈദ്യുതകാന്തികത, പ്രകാശശാസ്ത്രം എന്നിങ്ങനെ പല പ്രതിഭാസങ്ങളിലുമുള്ള പ്രായോഗികപരീക്ഷണങ്ങളെ അതിജീവിച്ചവയുമാണ് സംരക്ഷണനിയമങ്ങൾ.

ചില വിദ്യാർഥികൾക്കെങ്കിലും ഗുരുത്വാകർഷണത്തിലുൾപ്പെട്ട ഒരു വസ്തുവിന്റെ വെറും വീഴ്ചയിലെ യാന്ത്രികോർജത്തിന്റെ സംരക്ഷിതാവസ്ഥ തെളിയിക്കാനാവുമെന്ന് തോന്നിയിട്ടുണ്ടാവാം. ഏതെങ്കിലും ഒരു സന്ദർഭത്തിലെ ഗതികോർജവും സ്ഥിതികോർജവും ചേർത്ത് മൊത്തം ഊർജാവസ്ഥ സ്ഥിരമാണെന്ന് കണ്ടെത്താനായേക്കും. പക്ഷേ, ഇത് സംരക്ഷണ നിയമത്തിന്റെ ഒരു പരിശോധന മാത്രമാണ്.

ഐൻസ്റ്റീന്റെ സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് m എന്ന മാസും E എന്ന ഊർജവും തമ്മിൽ $E = mc^2$ എന്ന സമവാക്യമുപയോഗിച്ച് ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ c എന്നത് പ്രകാശത്തിന്റെ ശൂന്യതയിലുള്ള പ്രവേഗമാണ്. അണുകേന്ദ്ര പ്രവർത്തനങ്ങളിലും മാസ് ഊർജമായും (തിരിച്ചും) രൂപമാറ്റം ചെയ്യപ്പെടുന്നുണ്ട്. ഈ ഊർജമാണ് ആണവ വൈദ്യുത ഉൽപാദനത്തിലും അണുവിസ്ഫോടനങ്ങളിലും പ്രയോജനപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നത്.

ഊർജം ഒരു അദിശ (scalar - ദിശ സൂചിപ്പിക്കേണ്ടാത്ത) പരിമാണമാണ്. പക്ഷേ, എല്ലാ സംരക്ഷിതോർജപരിമാണങ്ങളും അദിശമാകണമെന്നില്ല. രേഖീയ ആക്കത്തിന്റെയും (linear momentum) കോണീയ ആക്കത്തിന്റെയും (angular momentum) സൂചനകൾ സദിശവും (vectors) വേറിട്ട വ്യവസ്ഥകളിൽ നിലനിൽക്കുന്ന സംരക്ഷിത പരിമാണങ്ങളുമാണ്. ഈ തത്വങ്ങൾ ന്യൂട്ടന്റെ ചലനനിയമങ്ങളിലെ ബലതന്ത്രത്തിൽനിന്ന് നിഷ്പാദിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്. പക്ഷേ, അവയുടെ പ്രാവർത്തികവും പ്രായോഗികവുമായ മേഖലകൾ ബലതന്ത്രത്തിന്റെ നിയന്ത്രണങ്ങൾക്കും അപ്പുറത്താണ്. എന്നാൽ ഇവ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും വ്യാപരിക്കുന്ന പ്രകൃതിയിലെ അടിസ്ഥാന സംരക്ഷണനിയമങ്ങളിൽ ഉൾപ്പെടുന്നതും ന്യൂട്ടന്റെ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ സാധുവല്ലാത്തിടത്തു പ്രബലമാവുന്ന ബലങ്ങളുമാണ്.

സംരക്ഷിതനിയമങ്ങൾ, അവയുടെ ലാളിത്യത്തിനും സ്വീകാര്യതയ്ക്കുമപ്പുറം, പ്രായോഗികമായി വളരെ ഉപയോഗപ്രദമാണ്. വ്യത്യസ്തകണങ്ങളും ബലങ്ങളും ഉൾപ്പെട്ടുവരുന്ന പരിപൂർണ്ണ ഗതികത്തിന്റെ സങ്കീർണമായ പ്രശ്നങ്ങളിൽ പരിഹാരം ലഭ്യമാകാത്ത ഒട്ടേറെ സന്ദർഭങ്ങളുണ്ടാവാറുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന്, രണ്ടു വാഹനങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടിയിടിക്കുമ്പോൾ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ബലങ്ങളുടെ സങ്കീർണാവസ്ഥയോ അതിലുൾപ്പെടുന്ന തത്വങ്ങളോ പരിമാണങ്ങളോ കണ്ടെത്തുക പ്രയാസകരമാണ്. എന്നാൽ ആക്കസംരക്ഷണനിയമത്തിന്റെ സഹായത്താൽ കൂട്ടിയിടിക്കലിന്റെ വിഷമാവസ്ഥയെ മറികടന്നുകൊണ്ട് ആവശ്യമായ പരിമാണങ്ങൾ കണ്ടെത്താനാവുന്നു. ആണവപ്രതിഭാസങ്ങളുടെയും അടിസ്ഥാന ഊർജകണങ്ങളുടെയും പ്രവർത്തന വിശകലനത്തിനുകൂടി സംരക്ഷണനിയമം പ്രയോജനകരമാണ്. തീർച്ചയായും ഇത്തരത്തിലുള്ള സാധ്യതയിൽ നിന്നുകൊണ്ടാണ് ബീറ്റാശോഷണം സംബന്ധിച്ചുള്ള ഊർജാവസ്ഥയും ആക്കവും കണക്കാക്കി ഊർജസംരക്ഷണ നിയമത്തിന്റെ പ്രയോഗത്തിലൂടെയും വിശകലനത്തിലൂടെയും വൂൾഫ്ഗാങ് പോളി (1900 - 1958) വളരെ കൃത്യമായി 1931ൽ പുതിയതരം ഊർജകണങ്ങൾ ഉൽസർജിക്കുന്ന കാര്യം പ്രവചിച്ചത്. (ഇലക്ട്രോണും ആൻറി ന്യൂട്രിനോ എന്ന കണവും)

സമമിതി (symmetry) യുമായി സംരക്ഷണ നിയമങ്ങൾക്കു വളരെ ആഴത്തിലുള്ള ബന്ധമാണുള്ളതെന്ന് തുടർന്നുള്ള ഭൗതികപഠനത്തിൽ നിങ്ങൾക്ക് ബോധ്യമാവും. ഉദാഹരണത്തിന്, പ്രകൃതിനിയമങ്ങളൊന്നുംതന്നെ സമയത്തിനൊപ്പം വ്യതിയാനത്തിന് വിധേയമാവുന്നില്ല എന്ന സുപ്രധാന കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതാണ്. ഏതെങ്കിലും ഒരു പ്രതിഭാസത്തിന്മേൽ പരീക്ഷണശാലയിൽ ഒരു ഫലം കണ്ടെത്തി പിന്നീട് വളരെക്കാലം കഴിഞ്ഞും ആ പരീക്ഷണം ആവർത്തിച്ചാൽ അതേ ഫലം തന്നെ ലഭിക്കുന്നു. കാലസ്ഥാനാന്തരം സമമിതി കാത്തുസൂക്ഷിക്കുന്നു എന്നതിന് തുല്യമാണ് ഊർജസംരക്ഷണനിയമം. അതേസമയത്തുതന്നെ സ്ഥലം (spacc)ഏകസമാനമാണെന്നതിനാൽ, മറ്റൊന്നിനെയും ആശ്രയിക്കാതെ കേവല സ്ഥലത്ത് ഒരു സ്ഥാനനിർണയം അസാധ്യവുമാണ്. വ്യക്തമായിപ്പറഞ്ഞാൽ പ്രപഞ്ചത്തിലെവിടെയും പ്രകൃതിനിയമങ്ങൾ ഒന്നുതന്നെയാണ്. (ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത്: വിവിധ സ്ഥലങ്ങളിൽ വ്യത്യസ്ത സാഹചര്യത്തിൽ ഇത് പ്രത്യക്ഷത്തിൽ ഒരുപോലെയല്ലെന്ന് തോന്നാവുന്നതാണ്. ഉദാഹരണത്തിന്, ചന്ദ്രനിലെ ഗുരുത്വാകർഷണബലം ഭൂമിയിലുള്ളതിന്റെ ആറിലൊന്നാണ്. എന്നാൽ ഗുരുത്വാകർഷണനിയമം ഭൂമിയിലും ചന്ദ്രനിലും പ്രവർത്തിക്കുന്നത് ഒരുപോലെയാണ്. സ്ഥാനചലനങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന സ്ഥലവിശാലതയിലെ പ്രകൃതിനിയമങ്ങളുടെ ഈ സമമിതി രേഖീയ ആക്കത്തിന്റെ സംരക്ഷണമായി പ്രത്യക്ഷപ്പെടുന്നു. അതേസമയം സ്ഥലത്തിന്റെ സമദൈശികത (isotropy) സ്ഥലത്തിന് എല്ലാ ദിശകളും ഒരു പോലെയാണ്. കോണീയ ആവേഗ സംരക്ഷണനിയമത്തെ പിന്താങ്ങുന്നു. ചാർജിതവും അല്ലാത്തതുമായ അടിസ്ഥാനകണങ്ങളും മറ്റും ഉൾപ്പെടുന്ന വിശാലമായ ബഹുമണ്ഡലത്തിലെ സംരക്ഷണനിയമം അമൂർത്തവും സവിശേഷവുമായ സമമിതിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ടുകിടക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ സ്ഥലത്തിന്റെയും സമയത്തിന്റെയും സമമിതികളും അടിസ്ഥാന ബലങ്ങളെ സംബന്ധിച്ച ആധുനിക സിദ്ധാന്തങ്ങളിൽ പ്രമുഖ പങ്ക് വഹിക്കുന്നു.

സർ സി. വി. രാമൻ (1888 – 1970)

ചന്ദ്രശേഖര വെങ്കിട്ടരാമൻ 1888 നവംബർ 8ന് തിരുവനൈക്കോവിൽ ജനിച്ചു. അദ്ദേഹം സ്കൂൾ വിദ്യാഭ്യാസം 11-ാം വയസ്സിൽത്തന്നെ പൂർത്തിയാക്കി. മദിരാശി പ്രസിഡൻസി കോളേജിലെ ബിരുദ പഠനത്തിനു ശേഷം സർക്കാർ വകുപ്പിൽ ധനകാര്യ രംഗത്ത് പ്രവർത്തിച്ചു.

പിന്നീടദ്ദേഹം കൽക്കത്തയിലായിരുന്നപ്പോൾ, ഡോ.മഹേന്ദ്രലാൽ സർക്കർ സ്ഥാപിച്ച പ്രസിദ്ധ ശാസ്ത്രഗവേഷണ സ്ഥാപനമായ ഇന്ത്യൻ അസോസിയേഷൻ ഫോർ ദി കൾട്ടിവേഷൻ ഓഫ് സയൻസ് എന്ന സ്ഥാപനത്തിൽ സായാഹ്ന ഗവേഷണത്തിലേർപ്പെട്ടു. കമ്പനങ്ങൾ, സംഗീതോപകരണങ്ങളിലെ ശ്രുതിവ്യത്യാസം, അൾട്രാസോണികം, വ്യതികരണം എന്നീ വിഷയങ്ങളിൽ അദ്ദേഹം പഠനം നടത്തി.

1917 ൽ അദ്ദേഹത്തിന് കൽക്കത്താ സർവകലാശാലയിൽ പ്രൊഫസർ പദവി വാഗ്ദാനം ചെയ്യപ്പെട്ടു. 1924 ൽ അദ്ദേഹത്തെ ലണ്ടനിലെ റോയൽ സൊസൈറ്റിയിൽ അംഗമാക്കി. 1930 ൽ പ്രകാശസംബന്ധമായ അദ്ദേഹത്തിന്റെ മൗലിക കണ്ടെത്തലായ രാമൻപ്രഭാവം (Raman effect) നോബൽ സമ്മാനാർഹമാവുകയും ചെയ്തു.

രാമൻപ്രഭാവം കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നത് ഉത്തേജിത തന്മാത്രകളുടെ സാന്നിധ്യത്തിൽ പ്രകാശതരംഗത്തിനുണ്ടാവുന്ന വിസരണത്തെക്കുറിച്ചാണ്. പിന്നീടുള്ള വർഷങ്ങളിൽ ഈ കണ്ടെത്തൽ ഗവേഷണത്തിനുള്ള വലിയ പന്ഥാവുതന്നെ വെട്ടിത്തുറന്നു.

അദ്ദേഹത്തിന്റെ അവസാനനാളുകൾ ബാംഗ്ലൂരിൽ ഇന്ത്യൻ ഇൻസ്റ്റിട്യൂട്ട് ഓഫ് സയൻസിലും, പിന്നീട് രാമൻ റിസർച്ച് ഇൻസ്റ്റിട്യൂട്ടിലും ചെലവഴിച്ചു. അദേഹത്തിന്റ പ്രവർത്തനങ്ങൾ പുതിയ തലമുറകൾക്ക് ശാസ്ത്രമേഖലയിൽ പ്രചോദനമായിത്തീരുകയും ചെയ്തു.

സംഗ്രഹം

1. ഭൗതികശാസ്ത്രമെന്നത്, അടിസ്ഥാന പ്രകൃതിനിയമങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനവും വിവിധ പ്രതിഭാസങ്ങളിൽ അവയുടെ സാക്ഷാൽക്കാരവുമാണ്. അടിസ്ഥാന ഭൗതികനിയമങ്ങൾ സാർവത്രികവും വ്യത്യസ്ത സന്ദർഭങ്ങളിലും അവസ്ഥകളിലും പ്രായോഗികവുമാണ്.
2. ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ സാധ്യത അതിവിശാലമാണ്. ഭൗതികരാശികളുടെ അതിവിപുലമായ സീമകൾ ഉൾക്കൊള്ളാൻ അതിനു സാധിക്കുന്നു.
3. ഭൗതികശാസ്ത്രവും സാങ്കേതികവിദ്യയും പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ടുകിടക്കുന്നു. ചിലപ്പോൾ സാങ്കേതികവിദ്യ പുതിയ ഭൗതിക ശാസ്ത്രത്തിനും മറ്റു ചിലപ്പോൾ ഭൗതികശാസ്ത്രം പുതിയ സാങ്കേതികവിദ്യകൾക്കും പ്രചോദനമാകുന്നു. രണ്ടിനും സമൂഹത്തിൽ നേരിട്ട് സ്വാധീനംചെലുത്താൻ കഴിയുന്നു.
4. സ്ഥൂലമണ്ഡലത്തിലെയും സൂക്ഷ്മമണ്ഡലത്തിലെയും വിവിധ പ്രതിഭാസങ്ങളെ ആധാരമാക്കി നാല് അടിസ്ഥാനബലങ്ങളാണ് പ്രകൃതിയിലുള്ളത്. ഗുരുത്വബലം, വൈദ്യുതകാന്തികബലം, പ്രബല ആണവബലം, ക്ഷീണ ആണവബലം എന്നിവയാണവ. പ്രകൃതിയിലെ ബലങ്ങളെയും ഏകീകരിക്കുകയെന്നത് ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ പ്രധാന ലക്ഷ്യങ്ങളിലൊന്നാണ്.
5. ഏതു പ്രക്രിയയിലും മാറ്റമില്ലാതെ നിൽക്കുന്ന അളവുകളാണ് സംരക്ഷിത പരിമാണങ്ങൾ. പ്രകൃതിയിലെ ചില സാമാന്യ സംരക്ഷിതനിയമങ്ങളാണ് മാസ്, ഊർജം, രേഖീയആവേഗം, കോണീയആവേഗം, ചാർജ്. എന്നീ സംരക്ഷിത അളവുകളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടവ. അടിസ്ഥാനബലങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് പാലിക്കുന്ന സംരക്ഷണനിയമം മറ്റുബലങ്ങൾ പാലിക്കണമെന്നില്ല.
6. പ്രകൃതിയിലെ സമമിതിയുമായി അഭേദ്യമായ ബന്ധമാണ് സംരക്ഷിതനിയമങ്ങൾക്കുള്ളത്. സ്ഥലകാല സമമിതി, മറ്റുവിധത്തിലുള്ള സമമിതികൾ എന്നിവ പ്രകൃതിയിലെ അടിസ്ഥാനബലങ്ങളെ സംബന്ധിച്ച സിദ്ധാന്തങ്ങളിൽ പ്രമുഖമായ പങ്ക് വഹിക്കുന്നു.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

വിദ്യാർഥികൾക്കുള്ള കുറിപ്പ്

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ, ശാസ്ത്രീയവും സാങ്കേതികവും സാമൂഹികവുമായ പ്രശ്നസമീപനങ്ങളിൽ നിങ്ങളുടെ അവബോധത്തെ ഉയർത്തുന്നതിനും അവയെക്കുറിച്ചുള്ള നിങ്ങളുടെ ചിന്തകളെയും കാഴ്ചപ്പാടുകളെയും ബലപ്പെടുത്തുന്നതിനും ഉദ്ദേശിച്ചുള്ളതുമാണ്. ഈ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് വ്യക്തതയുള്ള ശരി ഉത്തരങ്ങൾ ഉണ്ടായേക്കില്ല.

അധ്യാപകർക്കുള്ള കുറിപ്പ്

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങളെന്ന രീതിയിൽ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചോദ്യങ്ങൾ പരീക്ഷകൾക്കുള്ള ചോദ്യമായി പരിഗണിക്കേണ്ടതില്ല.

1.1 ലോകത്തിലെ എക്കാലത്തെയും പ്രമുഖ ശാസ്ത്രജ്ഞരിൽ ഒരാളായ ആൽബർട്ട് ഐൻസ്റ്റൈന്റെ ശ്രദ്ധേയമായ പ്രസ്താവനകളിലൊന്നാണ് ഇതോടൊപ്പം ചേർക്കുന്നത്. ഇതു പറയുമ്പോൾ അദ്ദേഹം ഉദ്ദേശിച്ചതെന്താണെന്ന് നിങ്ങൾക്ക് വിലയിരുത്താമോ? "ഈ ലോകത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ഏറ്റവും ദുർഗ്രഹമായ കാര്യം അത് സുഗ്രഹമാണ് എന്നതാണ്."

1.2. "മിക്കവാറും എല്ലാ പ്രമുഖ ഭൗതികസിദ്ധാന്തങ്ങളും പരമ്പരാഗത ചിന്തയെതിർത്തുകൊണ്ട് ഒരു ചോദ്യം ചെയ്യലായി (heresy) ആരംഭിക്കുകയും ഒരു ശാഠ്യമായി (dogma) അവസാനിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു". കുറച്ച് അലോസരപ്പെടുത്തുന്ന ഈ അഭിപ്രായത്തെ സാധൂകരിക്കുന്ന എന്തെങ്കിലും ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ ശാസ്ത്രചരിത്രത്തിൽ നിന്നു കണ്ടെത്തിയെഴുതുക.

1.3. "രാഷ്ട്രീയം സാധ്യതയുടെ കലയാണ്. " അതുപോലെ " ശാസ്ത്രം ഉത്തരം കണ്ടെത്തലിന്റെയും". മനോഹരമായ ഈ സൂക്തങ്ങളെ ശാസ്ത്രത്തിന്റെ പ്രയോഗവും സ്വഭാവവും കണക്കിലെടുത്ത് വിശദീകരിക്കുക.

1.4. ഇന്ത്യ ഇന്ന് ശാസ്ത്രസാങ്കേതികരംഗത്ത് നല്ല അടിത്തറയുള്ളതും വേഗത്തിൽ ആ രംഗത്തു വികസിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നതുമായ രാജ്യമാണെങ്കിലും, ശാസ്ത്രരംഗത്ത് ലോകത്തിന്റെ നേതൃ നിരയിലെത്താൻ ഇനിയും ബഹുദൂരം സഞ്ചരിക്കേണ്ടതായുണ്ട്. ഇതിന്റെ പ്രധാന കാരണങ്ങൾ ചൂണ്ടിക്കാണിക്കുക. ഇന്ത്യശാസ്ത്രപുരോഗതിയിൽ പിന്നിലാവുന്നതിന്റെ കാരണങ്ങളെപ്പറ്റി നിങ്ങളുടെ അഭിപ്രായം രേഖപ്പെടുത്തുക.

1.5. ഒരു ഭൗതികജ്ഞനും ഒരിക്കലും ഒരു ഇലക്ട്രോൺ കണ്ടിട്ടില്ല. പക്ഷേ, എല്ലാ ഭൗതികശാസ്ത്രജ്ഞരും ഇലക്ട്രോൺ ഉള്ളതാണെന്ന് കരുതി പ്രവർത്തിക്കുന്നു. എന്നാൽ അതിസമർഥനായ ഒരു അന്ധവിശ്വാസി വാദിക്കുന്നത്, പ്രേതങ്ങളെ ആരും കാണുന്നില്ലെങ്കിലും അത് വിശ്വസിക്കണമെന്നാണ്. ഇതിനോട് നിങ്ങൾ എങ്ങനെ പ്രതികരിക്കും?

1.6. ജപ്പാനിലെ ചില തീരങ്ങളിൽ കാണുന്ന ഒരുതരം ഞണ്ടുകളുടെ പുറംതോട് ജപ്പാൻ പാരമ്പര്യയോദ്ധാക്കളായ *സമുറായി*യുടെ മുഖത്തോട് വളരെ സാദൃശ്യമുള്ളതാണ്. നിരീക്ഷിക്കപ്പെട്ട ഈ വസ്തുതകളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ രണ്ടു വിശദീകരണങ്ങൾ താഴെ കൊടുക്കുന്നു. ഒരു ശാസ്ത്രീയ വിശദീകരണമായി നിങ്ങൾക്ക് സ്വീകരിക്കാനാവുന്നത് തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

a) നൂറ്റാണ്ടുകൾക്കു മുമ്പ് കപ്പൽഛേദത്തെത്തുടർന്ന് ഒരു യുവ സമുറായി യോദ്ധാവ് കടലിൽ മുങ്ങിത്താണു. അസാമാന്യധൈര്യത്തെ മുൻനിർത്തി പ്രകൃതിതന്നെ അവന്റെ സ്മരണ നിലനിർത്താൻ ആ പ്രദേശത്തെ ഞണ്ടുകളുടെ പുറംതോടിൽ അവന്റെ മുഖം മുദ്രണം ചെയ്തു.

b) കപ്പലപകടത്തിനു ശേഷം യുവയോദ്ധാവിനോടുള്ള ആദരസൂചകമായി ആ പ്രദേശത്തെ മത്സ്യത്തൊഴിലാളികൾ, പിടിയിലാകുന്ന സമുറായി മുഖരൂപമുള്ള ഞണ്ടുകളെ സ്വതന്ത്രരാക്കി. അതിനാൽ അത്തരം ഞണ്ടുകളുടെ വർഗം അവയോടൊപ്പമുണ്ടായിരുന്ന ജീവിവർഗത്തെ അപേക്ഷിച്ച് യാതൊരുവിധ നാശത്തെയും അഭിമുഖീകരിക്കാതെ പെറ്റുപെരുകി. പരിണാമപ്രക്രിയയിലെ കൃത്രിമനിർധാരണത്തിനൊരുദാഹരണമാണിത്.

(ഈ വിവരണം പ്രസിദ്ധ ശാസ്ത്രജ്ഞനായ കാൾ സാഗന്റെ 'കോസ്മോസ്'എന്ന കൃതിയിൽനിന്നുള്ളതാണ്. അപ്രതീക്ഷിതമായി ചിലപ്പോൾ ചില കാര്യങ്ങൾ അലൗകികമായി തോന്നിയേക്കാം. പക്ഷേ, ശാസ്ത്രീയമായ ആലോചനകളിൽ അവയൊക്കെ വിശദീകരണത്തിന് സാധ്യമാവുകയും ചെയ്യുന്നു. ഇതുപോലുള്ള മറ്റുദാഹരണങ്ങൾ ആലോചനയ്ക്കെടുക്കുക.)

1.7. രണ്ട് നൂറ്റാണ്ടുകൾക്ക് മുമ്പ് ഇംഗ്ലണ്ടിലും പശ്ചിമ യൂറോപ്പിലുമുണ്ടായ വ്യാവസായികവിപ്ലവത്തിന് തുടക്കം കുറിച്ചത് പ്രധാനപ്പെട്ട ചില ശാസ്ത്രീയകണ്ടെത്തലുകളും സാങ്കേതികവിദ്യകളുമാണ്. ഏതൊക്കെയാണ് ഇവ?

1.8. സമൂഹത്തെയാകമാനം സമഗ്രമാറ്റത്തിലേക്കു നയിച്ച ആദ്യ വ്യാവസായികവിപ്ലവത്തെപ്പോലെ ലോകം ഇപ്പോൾ ഒരു രണ്ടാം വ്യവസായവിപ്ലവത്തിനു സാക്ഷ്യം വഹിക്കുകയാണെന്ന് പറയപ്പെടുന്നു. ഉദ്ദേശിക്കുന്ന മാറ്റത്തിന് പ്രേരകമായിട്ടുള്ള സമകാലീന ശാസ്ത്രനേട്ടങ്ങളിലും സാങ്കേതിക നേട്ടങ്ങളിലും പ്രധാനപ്പെട്ടവ ഏതൊക്കെയാണ്?

1.9. ഇരുപത്തിരണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിലെ ശാസ്ത്ര-സാങ്കേതികനേട്ടങ്ങളുടെ പശ്ചാത്തലം വിഭാവനം ചെയ്തുകൊണ്ട് ആയിരം വാക്കിൽ ഒതുങ്ങുന്ന ഒരു സാങ്കൽപികകഥ എഴുതുക.

1.10. ശാസ്ത്രത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങളിൽ നിങ്ങളുടെ ധാർമിക കാഴ്ചപ്പാട് രൂപീകരിക്കാൻ ശ്രമിക്കുക. ഉദാഹരണത്തിന്, നിങ്ങൾ ശ്രദ്ധേയമായ ഒരു ശാസ്ത്രീയ കണ്ടെത്തൽ നടത്തുകയും അത് ശ്രദ്ധിക്കപ്പെടുകയും ചെയ്തു. അതിന്റെ പ്രയോഗം മനുഷ്യസമൂഹത്തിന് ഭീകരമായ പ്രത്യാഘാതങ്ങളുണ്ടാക്കുമെന്ന് നിങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കുന്നു. നിങ്ങളുടെ ധർമസങ്കടത്തെ എങ്ങനെ മറികടക്കും?

1.11. ശാസ്ത്രം മറ്റേതൊരു വിജ്ഞാനവും പോലെത്തന്നെ നന്മക്കും തിന്മക്കും വേണ്ടി പ്രയോഗിക്കാം. അത് കൈയാളുന്നവനെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കും. താഴെ കുറച്ച് ശാസ്ത്രീയ പ്രയോഗങ്ങൾ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. അവയിൽ നല്ലതെന്നോ ചീത്തയെന്നോ ഇവ രണ്ടും കൃത്യമായി വേർതിരിച്ചറിയാനാവാത്തതെന്നോ ഉള്ളവ കണ്ടെത്തുക.

a) ഗോവസൂരിക്കെതിരെ മുഴുവൻ ജനങ്ങൾക്കും കുത്തിവയ്പെടുക്കുന്നത് രോഗപ്രതിരോധത്തിനും ഈ വ്യാധിയെ ഭൂമുഖത്തുനിന്ന് തുടച്ചുമാറ്റുന്നതിനും സഹായിക്കുന്നു. (ഇത് ഇന്ത്യയിൽ വിജയകരമായി നിർവഹിച്ചതാണ്).

b) ടെലിവിഷൻ, നിരക്ഷരതാ നിർമാർജനത്തിനും വാർത്തയുടെയും ആശയത്തിന്റെയും വ്യാപകമായ പ്രചാരണത്തിനും വേണ്ടിയാണ്.

c) ഗർഭസ്ഥശിശുവിന്റെ ലിംഗനിർണയം

d) ജോലിയിൽ കാര്യക്ഷമത വർധിപ്പിക്കാനാണ് കമ്പ്യൂട്ടർ.

e) ഭൂമിയുടെ ഭ്രമണപഥത്തിലേക്ക് കൃത്രിമ ഉപഗ്രഹങ്ങൾ അയക്കുന്നത്.

f) ആണവായുധങ്ങളുടെ വികസനം.

g) പുതിയതും ശക്തവുമായ രാസായുധങ്ങൾ, ജൈവായുധങ്ങൾ എന്നിവയുടെ വികസനം.

h) കുടിവെള്ളശുദ്ധീകരണം

i) പ്ലാസ്റ്റിക് സർജറി

j) ക്ലോണിങ്

1.12. ഇന്ത്യക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലും ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രത്തിലും ഭാഷാപ്രയോഗത്തിലും തർക്കം, മീമാംസ തുടങ്ങിയ വിഷയങ്ങളിലും മഹാപണ്ഡിതരും മഹത്തായ പാരമ്പര്യവുമുണ്ട്. അതേസമയം തന്നെ അന്ധവിശ്വാസങ്ങളും ദുരാചാരങ്ങളും വിജ്ഞാനവിരോധ ചിന്താഗതികളും സമൂഹത്തിൽ നിലനിന്നിരുന്നുവെന്ന് മാത്രമല്ല, അവ തുടർന്നുകൊണ്ടിരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഇത്തരക്കാരുടെ കൂട്ടത്തിൽ നല്ല വിദ്യാഭ്യാസപശ്ചാത്തലമുള്ളവരും ഉൾപ്പെടുന്നുവെന്നത് അദ്ഭുതകരമാണ്. നിങ്ങളുടെ ശാസ്ത്രവിജ്ഞാനത്തെ ഇത്തരം പ്രവണതകൾക്കെതിരായി എങ്ങനെ പ്രയോജനപ്പെടുത്താനാവുമെന്ന് ആലോചിക്കുക.

1.13. നിയമം സ്ത്രീകൾക്ക് ഇന്ത്യയിൽ തുല്യത നൽകുന്നുണ്ടെങ്കിലും ധാരാളം ആളുകൾ സ്ത്രീകളുടെ തനതു സ്വഭാവവും കഴിവും ബുദ്ധിശക്തിയും സംബന്ധിച്ച് അശാസ്ത്രീയ നിലപാടുകൾ കൈക്കൊള്ളുന്നവരാണ്. അവർക്ക് പ്രായോഗികമായി രണ്ടാം സ്ഥാനമേ അക്കൂട്ടർ കല്പിക്കുന്നുള്ളൂ. ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ അശാസ്ത്രീയമായ ഇത്തരം ചിന്താഗതികളെ തകർക്കാനും മനുഷ്യരെന്ന നിലയിൽ സ്ത്രീകളും പുരുഷന്മാരും തുല്യരാണെന്നും അവസരം നൽകിയാൽ എല്ലാ കാര്യങ്ങളിലും പുരുഷന്മാരോടൊപ്പം തുല്യരായി തീരുമെന്നും ശാസ്ത്രത്തിലും മറ്റു രംഗങ്ങളിലുമുള്ള മഹതികളുടെ ഉദാഹരണങ്ങൾ നിരത്തി സ്ഥാപിക്കുക. ഇത്തരം ഒരു ബോധം നിങ്ങളിലും സമൂഹത്തിലും ഉണ്ടാവാനുള്ള വിചിന്തനം നടത്തുക.

1–14. "ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലെ സമവാക്യങ്ങൾക്ക്, അവ പരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെ സാധൂകരിക്കപ്പെടുന്നു എന്നതിനപ്പുറം സൗന്ദര്യമുണ്ടായിരിക്കണമെന്നത് കൂടുതൽ പ്രധാനമാണ്"–പ്രമുഖ ബ്രിട്ടീഷ് ഭൗതികജ്ഞൻ പി.എ.എം. ഡിറാക്കിന്റെ വാക്കുകളാണിവ. ഈ പ്രസ്താവന വിശകലനം ചെയ്യുക. ഈ പുസ്തകത്തിലെ ചില സമവാക്യങ്ങൾ ഉദാഹരണമായെടുത്തുകൊണ്ട് നിങ്ങളെ ആകർഷിച്ച സുന്ദരമായ സമവാക്യങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക.

1–15. മുകളിൽ കൊടുത്ത പ്രസ്താവനതന്നെ ഒരു വിവാദമായേക്കാം. മിക്ക ഭൗതികജ്ഞരും കരുതുന്നത് ഭൗതികത്തിലെ പ്രമുഖ സിദ്ധാന്തങ്ങളെല്ലാംതന്നെ ഒറ്റനോട്ടത്തിൽ ലളിതവും സുന്ദരവുമാണെന്നാണ്. ഡിറാക്കിനെ കൂടാതെ ഇതേ അഭിപ്രായം പങ്കുവക്കുന്നവരാണ് ഐൻസ്റ്റൈൻ, ബോർ, ഹൈസൻബർഗ്, ചന്ദ്രശേഖർ, ഫെയൻമാൻ മുതലായവർ. ഈ കൂട്ടത്തിൽപ്പെടുന്നവരോ മറ്റുള്ളവരോ ആയ മഹാശാസ്ത്രജ്ഞരുടെ പുസ്തകങ്ങൾ അന്വേഷിച്ച് കണ്ടെത്തി വായിക്കാൻ നിങ്ങൾ പ്രത്യേകം താൽപ്പര്യമെടുക്കേണ്ടതാണ്. ആവേശകരങ്ങളാണവ! (ഈ പുസ്തകത്തിന്റെ അവസാനം പുസ്തകങ്ങളുടെ പട്ടിക കൊടുത്തിട്ടുണ്ട് കാണുക).

1–16. ശാസ്ത്രവിഷയങ്ങളിലുള്ള പാഠപുസ്തകങ്ങൾ വായിച്ച് ഒരുപക്ഷേ നിങ്ങൾക്ക് മടുപ്പു തോന്നിയിട്ടുണ്ടാവാം. ഇത്രയും ഗഹനമായ കാര്യങ്ങൾ ചിന്തിച്ചും പ്രവർത്തിച്ചും കഴിയുന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞർ അരസികരും ഉൾവലിഞ്ഞ് ജീവിക്കുന്നവരും ചിരിക്കുകയോ സന്തോഷിക്കുകയോ ചെയ്യാത്തവരും ആണെന്ന് നിങ്ങൾ കരുതുന്നുണ്ടാവും. ശാസ്ത്രത്തെപ്പറ്റിയും ശാസ്ത്രജ്ഞരെപ്പറ്റിയുമുള്ള ഈയൊരു ധാരണ തെറ്റാണെന്നു മാത്രമല്ല, എല്ലാ മനുഷ്യരെപ്പോലെയും ആഹ്ലാദത്തോടെയും സഹവർത്തിത്വത്തോടെയും, തമാശകളും സാഹസികതകളും ആസ്വദിച്ചും ജീവിക്കുന്നവരാണ് അവരും. ജോർജ് ഗാമോ, ഫെയ്ൻമാൻ എന്നീ പ്രസിദ്ധ ശാസ്ത്രജ്ഞർ പറയുകയോ എഴുതുകയോ ചെയ്യുന്ന ഓരോ വാക്കിലും നർമം കരുതിവെക്കുന്നവരാണ്. ഇവരുടെയൊക്കെ പുസ്തകങ്ങൾ അതു നമ്മെ ബോധ്യപ്പെടുത്തും.

അധ്യായം 2

H2V7Q6

യൂണിറ്റുകളും അളവുകളും (UNITS AND MEASUREMENT)

2.1 ആമുഖം
2.2 യൂണിറ്റുകളുടെ അന്തർദേശീയ വ്യവസ്ഥ
2.3 നീളത്തിന്റെ നിർണയം
2.4 മാസിന്റെ നിർണയം
2.5 സമയനിർണയം
2.6 ഉപകരണങ്ങളിലെ കൃത്യതയും സൂക്ഷ്മതയും അളവുകളിലെ പിശകും
2.7 സാർഥക അക്കങ്ങൾ
2.8 ഭൗതിക അളവുകളുടെ ഡൈമെൻഷനുകൾ
2.9 ഡൈമെൻഷണൽ ഫോർമുലയും സമവാക്യവും
2.10 ഡൈമെൻഷണൽ വിശകലനവും പ്രായോഗികതയും
സംഗ്രഹം
പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ
അധിക പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

2.1 ആമുഖം

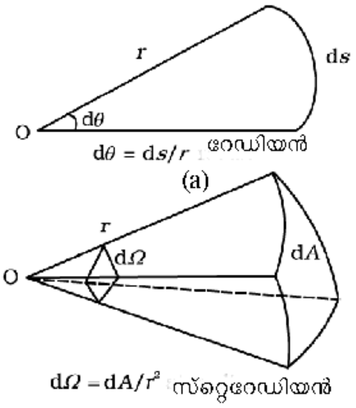
ഏതൊരു ഭൗതിക അളവും നിർണയിക്കുന്നത് അന്തർദേശീയമായി അംഗീകരിക്കപ്പെട്ടതും സൗകര്യപൂർവം തിരഞ്ഞെടുക്കാവുന്നതുമായ ഒരു അടിസ്ഥാന മാനദണ്ഡവുമായി താരതമ്യം ചെയ്തുകൊണ്ടാണ്. ഈ അടിസ്ഥാനസൂചകത്തെ യൂണിറ്റ് (unit) എന്നു പറയുന്നു. ഏതു ഭൗതിക അളവിനെയും ഒരു സംഖ്യയും യൂണിറ്റും ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാം. ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ നാം അനവധി ഭൗതിക അളവുകൾ (Physical quantities) ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്. എന്നാൽ അവയിൽ പലതും പരസ്പരം ബന്ധിതമായതുകൊണ്ട്, പരിമിത എണ്ണം യൂണിറ്റുകൾ ഉപയോഗിച്ച് അവയെ എല്ലാം എഴുതാനാകും. തിരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട ഏതാനും ഭൗതിക അളവുകൾ ഉപയോഗിച്ച് മറ്റുള്ള എല്ലാ ഭൗതിക അളവുകളെയും നിർവചിക്കാം. തിരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട ഈ ഭൗതിക അളവുകളെ അടിസ്ഥാന ഭൗതിക അളവുകൾ (Fundamental physical quantities) അഥവാ ബെയ്സ് അളവുകൾ എന്നും അവയുടെ യൂണിറ്റുകളെ അടിസ്ഥാന യൂണിറ്റുകൾ (Fundamental units) അഥവാ ബെയ്സ് യൂണിറ്റുകൾ (base units) എന്നും പറയുന്നു. ബെയ്സ് യൂണിറ്റുകളെ സംയോജിപ്പിച്ച് മറ്റെല്ലാ ഭൗതിക അളവുകളുടെയും യൂണിറ്റുകൾ രൂപപ്പെടുത്താൻ കഴിയും. ഇപ്രകാരം രൂപപ്പെടുത്തുന്ന യൂണിറ്റുകളെ വ്യുൽപ്പന്നയൂണിറ്റുകൾ (derived units) എന്നു പറയുന്നു. അടിസ്ഥാനയൂണിറ്റുകളും വ്യുൽപ്പന്നയൂണിറ്റുകളും ചേരുന്നതാണ് 'യൂണിറ്റുകളുടെ വ്യവസ്ഥ' (System of units).

2.2 യൂണിറ്റുകളുടെ അന്തർദേശീയ വ്യവസ്ഥ (The International System of Units)

മുൻകാലങ്ങളിൽ വിവിധ രാജ്യങ്ങളിലെ ശാസ്ത്രജ്ഞർ അളവുകൾക്കായി വ്യത്യസ്ത വ്യവസ്ഥകൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. അടുത്തകാലം വരെ വ്യാപകമായി ഉപയോഗിച്ച അത്തരം മൂന്ന് പദ്ധതികളാണ് CGS, FPS (ബ്രിട്ടിഷ്), MKS എന്നിവ. നീളം, മാസ്, സമയം എന്നിവയുടെ അടിസ്ഥാന യൂണിറ്റുകൾ ഇവയിൽ താഴെ പറയുംവിധം ആയിരുന്നു.

- CGS വ്യവസ്ഥയിൽ ഇവ സെന്റിമീറ്റർ, ഗ്രാം, സെക്കന്റ് എന്നിവയാണ്.
- FPS വ്യവസ്ഥയിൽ ഇവ ഫൂട്ട് (foot), പൗണ്ട് (pound), സെക്കന്റ് എന്നിങ്ങനെയാണ്.
- MKS വ്യവസ്ഥയിൽ ഇവ മീറ്റർ, കിലോഗ്രാം, സെക്കന്റ് എന്നിവയാണ്.

'സിസ്റ്റം ഇന്റർനാഷണൽ ഡി യൂണിറ്റ്സ്'(System international d unites) (ഇത് ഇന്റർനാഷണൽ സിസ്റ്റം ഓഫ് യൂണിറ്റ്സ് എന്നതിന്റെ ഫ്രഞ്ച് പേരാണ്) ഇന്ന് അന്തർദേശീയമായി ഉപയോഗിക്കുന്ന യൂണിറ്റ് സമ്പ്രദായമാണ്. ഇതിനെ SI യൂണിറ്റുകൾ എന്നു ചുരുക്കി എഴുതുന്നു. ശാസ്ത്ര, സാങ്കേതിക, വ്യവസായിക, വാണിജ്യമേഖലകളിൽ ഇന്ന് ലോകമെമ്പാടും ഉപയോഗിക്കുന്നത്, 1971 ലെ അളവുകളുടെയും തൂക്കങ്ങളുടെയും അന്താരാഷ്ട്ര പൊതുസമ്മേളനത്തിൽ വികസിപ്പിച്ച് ശുപാർശ ചെയ്ത ഈ സമ്പ്രദായത്തിലെ യൂണിറ്റുകളും പ്രതീകങ്ങളും ചുരുക്കെഴുത്തുകളുമാണ്. ദശാംശസമ്പ്രദായം ഉപയോഗിക്കുന്ന തിനാൽ ഈ പദ്ധതിയിലെ യൂണിറ്റുകളെ ലളിതമായും സൗകര്യ പ്രദമായും ചെറുതും വലുതുമായ യൂണിറ്റുകളായി പരസ്പരം മാറ്റാവുന്നതാണ്. ഈ പുസ്തകത്തിൽ SI യൂണിറ്റുകളാണ് ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നത്.



ചിത്രം 2.1 (a) പ്രതല കോൺ (dθ)
(b) ഘനകോൺ (solid angle dΩ)

SI സമ്പ്രദായത്തിൽ ഏഴ് അടിസ്ഥാന യൂണിറ്റുകളുണ്ട്. അവ പട്ടിക 2.1ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഇവ കൂടാതെ ഈ പദ്ധതിയിൽ രണ്ടു പൂരകയൂണിറ്റുകളും (supplementary units) ഉണ്ട്. അവ (a) പ്രതലകോണിന്റെ (plane angle) യൂണിറ്റായ റേഡിയൻ (radian), (b) ഘനകോണിന്റെ (solid angle) യൂണിറ്റായ സ്റ്റെറേഡിയൻ (steradian) എന്നിവയാണ്. പ്രതലകോൺ (dθ), ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളവും (ds) ആരവും (r) തമ്മിലുള്ള അനുപാതമാണ്. ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദു (O) കേന്ദ്രമായി രൂപീകരിക്കപ്പെട്ട ഗോളോപരിതലത്തിലെ പ്രതലപരപ്പ ളവും (dA) ആരത്തിന്റെ (r) വർഗവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതമാണ് ഘനകോൺ (dΩ). ഈ രണ്ട് അളവുകൾക്കും ഡൈമെൻഷനുകളില്ല. പ്രതലകോണിന്റെ യൂണിറ്റായ റേഡിയന്റെ പ്രതീകം rad എന്നും ഘനകോണിന്റെ യൂണി റ്റായ സ്റ്റെറേഡിയന്റെ പ്രതീകം sr എന്നുമാണ്.

പട്ടിക 2.1 SI സമ്പ്രദായത്തിലെ അടിസ്ഥാന അളവുകളും യൂണിറ്റുകളും

അടിസ്ഥാന അളവ്	SI യൂണിറ്റുകൾ		
	പേര്	പ്രതീകം	നിർവചനം
നീളം (Length)	മീറ്റർ (metre)	m	1/299792458 സെക്കന്റിൽ പ്രകാശം ശൂന്യതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരമാണ് ഒരു മീറ്റർ
മാസ് (Mass)	*കിലോഗ്രാം*	*kg*	*പാരിസിലെ അളവുകളുടെയും തൂക്കങ്ങളുടെയും അന്താരാഷ്ട്ര കാര്യാലയത്തിൽ സ്ഥാപിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു പ്ലാറ്റിനം ഇറിഡിയം സിലിണ്ടറിന്റെ മാസിനു തുല്യമാണ് ഒരു കിലോഗ്രാം.*
സമയം (Time)	*സെക്കന്റ്*	*s*	*സീസിയം 133 ആറ്റത്തിന്റെ ഏറ്റവും താഴ്ന്ന ഊർജനിലയിലെ രണ്ടു ഹൈപ്പർ ഫൈൻ ലെവലുകൾക്കിടയിലുള്ള ഇലക്ട്രോൺ കൈമാറ്റം കൊണ്ട് ഉണ്ടാകുന്ന വികിരണത്തിന്റെ 9192631770 ദോലനങ്ങൾക്കാവശ്യമായ സമയമാണ് ഒരു സെക്കന്റ്.*
വൈദ്യുതപ്രവാഹതീവ്രത	*ആംപിയർ*	*A*	*ഒരു മീറ്റർ അകലത്തിൽ ശൂന്യതയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന അനന്തമായി നീളമുള്ളതും നിസ്സാര ഛേദതല പരപ്പളവുള്ളതുമായ രണ്ട് സമാന്തര വൈദ്യുതക്കമ്പികളിൽ കൂടി തുല്യ വൈദ്യുതി പ്രവഹിക്കുമ്പോൾ അവയുടെ ഓരോ മീറ്റർ നീളത്തിലും അനുഭവപ്പെടുന്ന ബലം 2×10^{-7} N ആണെങ്കിൽ വൈദ്യുതിയുടെ അളവ് ഒരു ആംപിയർ ആയിരിക്കും.*
തെർമോ ഡൈനാമിക് താപനില (Thermodynamic temperature)	*കെൽവിൻ (kelvin)*	*K*	*ജലത്തിന്റെ ട്രിപ്പിൾ പോയിന്റിന്റെ 1/273.16 ആണ് ഒരു കെൽവിൻ.*
ദ്രവ്യത്തിന്റെ അളവ്	*മോൾ (mole)*	*mol*	*0.012kg കാർബൺ C-12 ലുള്ള ആറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന് തുല്യ എണ്ണം കണികകളുള്ള ദ്രവ്യത്തിന്റെ അളവ്.*
പ്രകാശതീവ്രത (Luminous intensity)	*കാൻഡെല (candela)*	*cd*	*ഒരു കാൻഡെല എന്നത്, ഒരു നിശ്ചിത ദിശയിൽ 540×10^{12} Hz ആവൃത്തിയുള്ള 1/683 വാട്ട്/സ്റ്റെറേഡിയൻ തീവ്രതയുള്ള ഏകവർണ പ്രകാശത്തിന്റെ പ്രകാശതീവ്രതയാണ്. (1979)*

ഈ പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്ന വിലകൾ ഓർത്തുവയ്ക്കേണ്ടതോ പരീക്ഷകൾക്ക് ചോദിക്കപ്പെടുന്നതോ അല്ല. ഇവയുടെ നിർണ്ണയത്തിലെ കൃത്യതയുടെ സൂചകമായി മാത്രമാണ് ഇവ നൽകിയിരിക്കുന്നത്. സാങ്കേതിക വിദ്യയുടെ വളർച്ചയോടെ നിർണ്ണയോപാധികൾ മെച്ചപ്പെടുകയും സൂക്ഷ്മതയേറിയ അളവുകൾ സാധ്യമാകുകയും ചെയ്തു. ഈ വളർച്ചയോടൊപ്പം അടിസ്ഥാന യൂണിറ്റുകൾ പുനർനിർവചിക്കപ്പെടുന്നുണ്ട്.

പട്ടിക 2.2 സാധാരണ ഉപയോഗത്തിലുള്ള ചില യൂണിറ്റുകൾ (ടകഅല്ല)

പേര്	പ്രതീകം	SI യൂണിറ്റിലെ വില
മിനിറ്റ്	min	60 s
മണിക്കൂർ	h	60 min = 3600 s
ദിവസം	d	24 h = 86400 s
വർഷം	y	365.25d = 3.165×10^{7} s
ഡിഗ്രി	^{0}	$1^{0}=(\pi/180)$rad
ലിറ്റർ	L	1 $dm^{3}=10^{-3}m^{3}$
ടൺ	t	10^{3} kg
കാരറ്റ്	c	200 mg
ബാർ	bar	0.1 MPa=10^{5} Pa
ക്യൂറി	Ci	$3.7\times10^{10}s^{-1}$
റോൺട്ജൻ	R	2.58×10^{-4}C/kg
ക്വിന്റൽ	q	100 kg
ബാൺ	b	100 $fm^{2}=10^{-28}m^{2}$
ആർ	a	1dam^{2}=100m^{2}
ഹെക്ടർ	ha	1$hm^{2}=10^{4}m^{2}$
അടിസ്ഥാന അന്തരീക്ഷമർദ്ദം	atm	1.013×10^{5}Pa

mole എന്ന യൂണിറ്റ് ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ അടിസ്ഥാന കണങ്ങൾ ഏതെന്നു വ്യക്തമാക്കിയിരിക്കണം. ഈ കണങ്ങൾ ആറ്റങ്ങളോ അയോണുകളോ ഇലക്ട്രോണുകളോ അതുപോലെയുള്ള മറ്റു കണികാഗണങ്ങളോ ആകാം.

SI ലെ ഏഴു അടിസ്ഥാന അളവുകളുപയോഗിച്ചു രൂപീകരിക്കാവുന്ന മറ്റ് അളവുകൾ (അനുബന്ധം A6) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ചില വ്യുൽപ്പന്ന യൂണിറ്റുകൾ അടിസ്ഥാന യൂണിറ്റുകളിൽ (അനുബന്ധം A6.1) ൽ തന്നിട്ടുണ്ട്. പ്രത്യേകം പേരുകളുള്ള വ്യുൽപ്പന്ന യൂണിറ്റുകൾ (അനുബന്ധം A6.2) ൽ നൽകിയിട്ടുണ്ട്. ചില വ്യുൽപ്പന്ന യൂണിറ്റുകൾ ഇവ ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്നുണ്ട്. അത്തരം യൂണിറ്റുകൾ അനുബന്ധം A6.2, A6.3 എന്നിവയിൽ ചേർത്തിട്ടുണ്ട്. സാധാരണ ഉപയോഗത്തിലുള്ള മറ്റു യൂണിറ്റുകൾ പട്ടിക 2.2 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. സാധാരണ ഉപയോഗിക്കുന്ന SI ഗുണിതങ്ങളും അവയുടെ പ്രതീകങ്ങളും അനുബന്ധം A7 ൽ നൽകിയിട്ടുണ്ട്. ഭൗതിക അളവുകളുടെയും രാസമൂലകങ്ങളുടെയും പ്രതീകങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗരേഖ അനുബന്ധം A8 ൽ നൽകിയിട്ടുണ്ട്.

2.3 നീള നിർണയം (Measurement of length)

നീളം നേരിട്ട് അളക്കുന്നതിനുള്ള ചില രീതികൾ നമുക്കു പരിചിതമാണ്. ഉദാഹരണമായി, ഒരു മീറ്റർ സ്കെയിൽ ഉപയോഗിച്ച് 1 mm മുതൽ ഏകദേശം 100 m വരെയുള്ള നീളം സൗകര്യപ്രദമായി അളക്കാം. 10^{-4} m കൃത്യത വരെ നീളം അളക്കാൻ വെർണിയർ കാലിപ്പേർസ് എന്ന ഉപകരണവും 10^{-5} m കൃത്യതക്ക് സ്ക്രൂഗേജ് സ്ഫെറോമീറ്റർ ഇവയോ ഉപയോഗിക്കാം. ഈ പരിധിക്കു പുറത്തു വരുന്ന ദൂരമളക്കാൻ പരോക്ഷമായ ചില രീതികൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

2.3.1 വലിയ ദൂരങ്ങൾ അളക്കുന്ന വിധം (Measurement of large distances)

ഭൂമിയിൽനിന്നു മറ്റു ഗ്രഹങ്ങളിലേക്കോ നക്ഷത്രങ്ങളിലേക്കോ ഉള്ള ദൂരം ഒരു മീറ്റർ സ്കെയിൽ ഉപയോഗിച്ച് നേരിട്ട് അളക്കാൻ കഴിയുകയില്ല. അത്തരം ദൂരങ്ങൾ നിർണയിക്കുന്നതിനുള്ള ഒരു പ്രധാന മാർഗമാണ് ലംബനരീതി (parallax method).

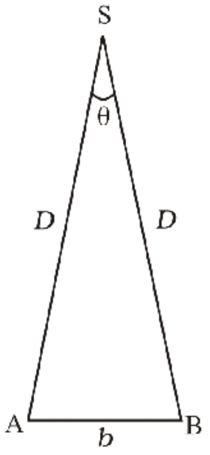
ലംബനരീതി എന്താണെന്നു മനസ്സിലാക്കാൻ താഴെ പറയുന്ന പരീക്ഷണം ചെയ്തുനോക്കുക. നിങ്ങളുടെ കണ്ണിനു മുന്നിൽ ഒരു പെൻസിൽ അതിന്റെ പശ്ചാത്തലത്തിലുള്ള ഭിത്തിയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി നോക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ പിടിക്കുക. ഇടതുകണ്ണ് അടച്ചുകൊണ്ടു പെൻസിലിലേക്കു നോക്കുക. ഇനി വലതുകണ്ണ് അടച്ചുകൊണ്ട് പെൻസിലിലേക്കു നോക്കുക. പെൻസിലിന്റെ സ്ഥാനത്തിനു പിന്നിലെ ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി വ്യത്യാസം വരുന്നതായി നിങ്ങൾക്കു തോന്നും. ഇതിനെയാണ് ലംബനം എന്നു പറയുന്നത്. നിരീക്ഷണബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലെ ദൂരത്തെ ബേസിസ് എന്നു പറയുന്നു. ഇവിടെ നിരീക്ഷണബിന്ദുക്ക

ളായ രണ്ടു കണ്ണുകൾക്കിടയിൽ വരുന്ന ദൂരമാണ് ബേസിസ്.

വിദൂരമായ ഒരു ഗ്രഹത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം ലംബന രീതിയിലൂടെ അളക്കാൻ, അതിനെ ഭൂമിയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽനിന്നും ഒരേസമയം നിരീക്ഷിക്കുന്നു. ചിത്രം 2.2ൽ S എന്നത് വിദൂരഗ്രഹവും A, B എന്നിവ നിരീക്ഷണകേന്ദ്രങ്ങളും ആണെന്നു കരുതുക. നിരീക്ഷണ കേന്ദ്രങ്ങൾക്കിടയിലെ ദൂരം AB = b എന്നിരിക്കട്ടെ. നിരീക്ഷണദിശകൾക്കിടയിൽ വരുന്ന കോണിനെ ($ASB = \theta$) ലംബനകോൺ (parallax angle അഥവാ parallactic angle) എന്നു പറയുന്നു.

ഗ്രഹത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം (D) വളരെ കൂടുതലായതിനാൽ $b/D \ll 1$ ആയിരിക്കും. അതിനാൽ θ വളരെ ചെറിയ കോൺ ആയിരിക്കുകയും ചെയ്യും. ഇവിടെ AB എന്നത് S കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചാപമായി അനുമാനിക്കാം. അപ്പോൾ $\theta = AB/D = b/D$

$$D = b/\theta \qquad (2.1)$$



ചിത്രം 2.2 ലംബന രീതി (parallax method)

ഇപ്രകാരം ഗ്രഹത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം കണക്കാക്കാം. ലംബനകോൺ റേഡിയൻ യൂണിറ്റിൽ അളക്കണം എന്നത് പ്രത്യേകം ഓർക്കുക.

ഗ്രഹത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം കണക്കാക്കിയ ശേഷം ഇതേ മാർഗത്തിലൂടെ ഗ്രഹത്തിന്റെ കോണീയവ്യാസം നിർണയിക്കാം. ഗ്രഹത്തിന്റെ വ്യാസം d യും ഗ്രഹത്തിന്റെ കോണീയ വലുപ്പം (α) വും ആയാൽ

$$\alpha = d/D \qquad (2.2)$$

α എന്ന കോൺ ഭൂമിയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സ്ഥാനത്തു നിന്നുകൊണ്ട് നിർണയിക്കാം. ഭൂമിയിലെ ഒരു നിരീക്ഷണകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു ഗ്രഹത്തിന്റെ രണ്ടു വ്യാസാഗ്ര ബിന്ദുക്കൾ ഒരു ടെലസ്കോപ്പ് ഉപയോഗിച്ച് ഒരേസമയം നിരീക്ഷിക്കുന്നു എന്നു കരുതുക. നിരീക്ഷണദിശകൾക്കിടയിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോണളവാണ് (α) ഗ്രഹത്തിന്റെ കോണീയവ്യാസം. ഗ്രഹത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം (D) അറിയാമെങ്കിൽ ഗ്രഹത്തിന്റെ വ്യാസം (d) സമവാക്യം (2.2) ഉപയോഗിച്ച് നിർണയിക്കാം.

ഉദാഹരണം 2.1 താഴെ പറയുന്ന കോണുകൾ റേഡിയൻ യൂണിറ്റിൽ കണക്കാക്കുക.

(a) $1°$ (b) $1'$ (c) $1''$

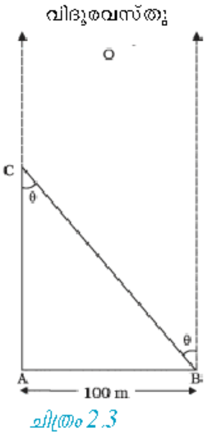
ഉത്തരം

(a) $360° = 2\pi$ rad എന്നറിയാം
അതിനാൽ $1° = (\pi/180)$ rad $= 1.745\times10^{-2}$ rad

(b) $1° = 60' = 1.745\times10^{-2}$ rad
$1' = 2.908\times10^{-4}$ rad 2.91×10^{-4} rad

(c) $1' = 60'' = 2.908\times10^{-4}$ rad
$1'' = 4.847\times10^{-6}$ rad 4.85×10^{-6} rad

ഉദാഹരണം 2.2 ഒരാൾ സമീപത്തുള്ള ഒരു ഗോപുരത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം അളക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്നു. ഇതിനായി അദ്ദേഹം ഗോപുരത്തിന്റെ മുന്നിലുള്ള A എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നു ഗോപുരത്തിലെ C എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കു നോക്കുന്നു. അപ്പോൾ AC എന്ന കാഴ്ചരേഖയിൽ ഗോപുരത്തിനു പിന്നിൽ വളരെ ദൂരെയായി സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന O എന്ന വസ്തുവിനെ കാണുന്നു. അതിനുശേഷം അയാൾ AC ക്ക് ലംബദിശയിൽ B വരെ 100m നടക്കുന്നു. എന്നിട്ട് O യിലേക്കും C യിലേക്കും നോക്കുന്നു. O വളരെ വിദൂരമായതിനാൽ BO എന്ന ദിശ പ്രായോഗികമായി AO തന്നെ ആയിരിക്കും. പക്ഷേ, കാഴ്ചരേഖ $\theta = 40°$ വ്യതിചലിച്ചതായി കാണുന്നു. ഇതാണ് ലംബനകോൺ. ആദ്യസ്ഥാനമായ A യിൽ നിന്ന് ഗോപുരത്തിലെ C എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ദൂരം കണക്കാക്കുക.



ചിത്രം 2.3

ഉത്തരം : ലംബനകോൺ $\theta = 40°$

ചിത്രം 2.3 അനുസരിച്ച് AB = ACδtanθ

$AC = AB/\tan\theta = 100$ m/tan $40°$

$= 100$ m/0.8391 $= 119$ m

> ▶ **ഉദാഹരണം 2.3** ഭൂമിയുടെ വ്യാസാഗ്രബിന്ദുക്കളായ A യിൽനിന്നും B യിൽനിന്നും ചന്ദ്രനെ നിരീക്ഷിക്കുന്നു. ഈ രണ്ടു നിരീക്ഷണദിശകൾ ചന്ദ്രനിൽ രൂപീകരിക്കുന്ന കോൺ $1^0 54'$ ആണ്. ഭൂമിയുടെ വ്യാസം ഏകദേശം 1.276×10^7 m ആയാൽ, ഭൂമിയിൽ നിന്നു ചന്ദ്രനിലേക്കുള്ള ദൂരം കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം : ഇവിടെ $\theta = 1^\circ 54' = 114'$

$$(114 \times 60)'' \times (4.85 \times 10^{-6}) \text{ rad}$$

$$= 3.32 \times 10^{2} \text{ rad},$$

കാരണം, $1'' \quad 4.85 \times 10^{6} rad.$

$$b \quad AB = 1.276 \times 10^7 \text{ m}$$

$$D = b / \theta$$

$$= \frac{1.276 \times 10^7}{3.32 \times 10^{-2}}$$

$$3.84 \times 10^8 \text{ m}$$ ◀

> ▶ **ഉദാഹരണം 2.4** സൂര്യന്റെ കോണീയവ്യാസം 1920" ആണ്. ഭൂമിയിൽനിന്നു സൂര്യനിലേക്കുള്ള അകലം D, 1.496×10^{11} m ആയാൽ സൂര്യന്റെ വ്യാസം എത്ര?

ഉത്തരം : സൂര്യന്റെ കോണീയവ്യാസം $= 1920''$

$$= 1920 \times 4.85 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$= 9.31 \times 10^{3} \text{ rad}$$

സൂര്യന്റെ വ്യാസം

$$d - \alpha D$$

$$= (9.31 \times 10^{-3}) \times (1.496 \times 10^{11}) \text{ m}$$

$$= 1.39 \times 10^9 \text{ m}$$ ◀

2.3.2 വളരെ ചെറിയ ദൂരങ്ങൾ കണക്കാക്കൽ : ഒരു തന്മാത്രയുടെ വലുപ്പം (Estimation of very small distances: size of a molecule)

ഒരു തന്മാത്രയുടെ വലുപ്പം പോലെയുള്ള വളരെ ചെറിയ ദൂരങ്ങൾ അളക്കാൻ (10^{-8} m മുതൽ 10^{-10} m വരെ) ചില സവിശേഷരീതികൾ ഉപയോഗിക്കേണ്ടി വരും. സ്ക്രൂഗേജ് പോലുള്ള ഉപകരണങ്ങൾ ഇവിടെ ഉപയോഗിക്കാൻ കഴിയില്ല. ഇത്തരം അളവുകളുടെ കാര്യത്തിൽ സൂക്ഷ്മദർശിനിക്കുപോലും ചില പരിമിതികളുണ്ട്. ഒരു പ്രാകാശിക സൂക്ഷ്മദർശിനി ദൃശ്യപ്രകാശമുപയോഗിച്ചാണ് വസ്തുക്കളെ 'ദർശിക്കുന്നത്'. പ്രകാശത്തിന്റെ തരംഗസ്വഭാവംമൂലം ഒരു സൂക്ഷ്മദർശിനിക്ക് വിഭേദനം ചെയ്യാൻ കഴിയുന്ന ദൂരത്തിന് ഒരു പരിധിയുണ്ട്. ഇത് പ്രകാശതരംഗദൈർഘ്യത്തിനടുത്തായിരിക്കും. (ഇതിന്റെ വിശദീകരണം ക്ലാസ് XII ഭൗതികശാസ്ത്ര പുസ്തകത്തിൽ കാണാം.) ദൃശ്യപ്രകാശത്തിന്റെ തരംഗദൈർഘ്യവ്യാപ്തി ഏകദേശം 4000 A^0 മുതൽ 7000A^0 വരെ ആണ്. (1 ആങ്സ്ട്രം = 1 $A^0 = 10^{-10}$m). അതിനാൽ ഒരു പ്രാകാശിക സൂക്ഷ്മദർശിനിക്ക് ഇതിനേക്കാളും വലുപ്പം കുറഞ്ഞ വസ്തുക്കളെ വിഭേദനം ചെയ്യാൻ കഴിയില്ല. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ദൃശ്യപ്രകാശത്തിനു പകരം ഒരു ഇലക്ട്രോൺ ബീം ഉപയോഗിക്കാം. ഇലക്ട്രോൺ ബീമിനെ കേന്ദ്രീകരിക്കാൻ അനുയോജ്യമായി രൂപകൽപനചെയ്ത വൈദ്യുതകാന്തികമണ്ഡലങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം. അത്തരം സൂക്ഷ്മദർശിനികളുടെ വിശ്ലേഷണപരിധി ഇലക്ട്രോണുകൾ തരംഗസ്വഭാവം പ്രദർശിക്കുന്നതിനാൽ ഇലക്ട്രോണിന്റെ തരംഗദൈർഘ്യത്തിനു തുല്യമാണ്. (ഇതിനെക്കുറിച്ച് കൂടുതൽ നിങ്ങൾ ക്ലാസ് XII ൽ പഠിക്കും). ഇലക്ട്രോണിന്റെ തരംഗദൈർഘ്യം ഒരു ആങ്സ്ട്രോമിന്റെ വളരെ ചെറിയ ഒരു അംശത്തോളമേ വരൂ. 0.6A^0 വിഭേദന പരിധിയുള്ള ഇലക്ട്രോൺ സൂക്ഷ്മദർശിനികൾ നിർമിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. ഒരു വസ്തുവിലെ ആറ്റങ്ങളെയും തന്മാത്രകളെയും വിഭേദനം ചെയ്യാൻ അവക്ക് കഴിയും. ആധുനിക കാലത്തുപയോഗിക്കുന്ന ടണലിൽ സൂക്ഷ്മ ദർശിനികളുടെ വിഭേദന പരിധി 1A^0 ത്തിനേക്കാൾ ചെറുതാണ്. ഇവ ഉപയോഗിച്ച് തന്മാത്രകളുടെ വലുപ്പം കണക്കാക്കാം.

ഓലിക് ആസിഡ് തന്മാത്രകളുടെ വലുപ്പം കണക്കാക്കാനുള്ള ഒരു ലളിതമായ രീതി താഴെ വിശദീകരിക്കുന്നു. ഓലിക് ആസിഡ് സോപ്പ്ലായനി പോലെയുള്ള ഒരു ദ്രാവകമാണ്. അതിന്റെ തന്മാത്രകളുടെ വലുപ്പത്തിന്റെ പരിമാണഘാതം 10^{-9} m ആണ്. ജലോപരിതലത്തിൽ ഓലിക് ആസിഡിന്റെ ഒരു ഏക തന്മാത്രാപ്പാട രൂപീകരിക്കുന്നു. ഇതിനായി 1cm^3 ഓലിക് ആസിഡ് ആൽക്കഹോളിൽ ലയിപ്പിച്ച് 20 cm^3 ലായനി നിർമിക്കുന്നു. ഈ ലായനിയിൽനിന്ന് 1cm^3 എടുത്ത് ആൽക്കഹോൾ ഉപയോഗിച്ച് വീണ്ടും 20cm^3 ആയി നേർപ്പിക്കുന്നു. ഈ ലായനിയുടെ ഗാഢത, 1cm^3 ലായനിയിൽ $\left(\frac{1}{20 \times 20}\right) cm^3$ ഓലിക് ആസിഡ് ആകുന്നു. പരന്ന ഒരു

പാത്രത്തിൽ എടുത്ത ജലത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിൽ അൽപ്പം ലൈക്കോപോഡിയം പൊടി വിതറുക. ഇതിലേക്ക് തയാറാക്കി വച്ചിരിക്കുന്ന ലായനിയിൽനിന്ന് ഒരു തുള്ളി ഒഴിക്കുക. ജലോപരിതലത്തിൽ ഓലിക് ആസിഡിന്റെ, വളരെ കനം കുറഞ്ഞ വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു തന്മാത്രാപ്രതലം രൂപപ്പെടുന്നു. പ്രതലത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുന്നതിനായി വളരെ പെട്ടെന്ന് ഈ പ്രതലത്തിന്റെ വ്യാസം നിർണയിക്കുക. ജലോപരിതലത്തിലേക്ക് ഓലിക് ആസിഡിന്റെ n തുള്ളികൾ ഒഴിച്ചിട്ടുണ്ടെന്നു കരുതുക. ഒരു തുള്ളിയുടെ ഏകദേശ വ്യാപ്തം ($V\ cm^3$) അളക്കുക.

ലായനിയുടെ n തുള്ളികളുടെ വ്യാപ്തം = $nV\ cm^3$

ഈ ലായനിയിലെ ഓലിക് ആസിഡിന്റെ വ്യാപ്തം =

$$nV \times \frac{1}{20\times20}\ cm^3$$

ഓലിക് ആസിഡ്‌ലായനി ജലോപരിതലത്തിൽ വളരെപ്പെട്ടെന്നു വ്യാപിച്ച് 't' കനമുള്ള ഒരു പ്രതലം രൂപപ്പെടുന്നുവെന്നു കരുതുക. രൂപപ്പെടുന്ന ആസിഡ് പാടയുടെ പരപ്പളവ് $A\ cm^2$ ആയാൽ,

$$t = \frac{\text{പാടയുടെ വ്യാപ്തം}}{\text{പാടയുടെ പരപ്പളവ്}}$$

$$t = \frac{nV}{20\times 20 A}\ cm \qquad (2.3)$$

പ്രതലത്തിന് ഒരു തന്മാത്രയുടെ കനമേയുള്ളുവെന്നു കരുതിയാൽ, ഇത് ഓലിക് ആസിഡ്തന്മാത്രയുടെ കനത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും. ഈ കനത്തിന്റെ പരിമാണഘാതം 10^{-9} m ആണ്.

> ▶ **ഉദാഹരണം 2.5** ഒരു ന്യൂക്ലിയസിന്റെ വലുപ്പം (വ്യാസം 10^{-15} m മുതൽ 10^{-14} mവരെ) ഒരു പിന്നിന്റെ കൂർത്ത അഗ്രത്തിനു തുല്യമെന്ന് സങ്കൽപിച്ചാൽ ഒരു ആറ്റത്തിന്റെ ഏകദേശ വലുപ്പം കണക്കാക്കുക. പിന്നിന്റെ അഗ്രവലുപ്പത്തിന്റെ വ്യാപ്തി 10^{-5} m മുതൽ 10^{-1}m വരെ ആണെന്നു കരുതുക.

ഉത്തരം : ഒരു ന്യൂക്ലിയസിന്റെ വലുപ്പത്തിന്റെ വ്യാപ്തി 10^{-15}m മുതൽ 10^{-14}m വരെ ആകുന്നു. ഒരു പിന്നിന്റെ കൂർത്ത അഗ്രവലുപ്പത്തിന്റെ വ്യാപ്തി 10^{-5}m മുതൽ 10^{-1}m വരെ ആണെന്നും കരുതുക. അതായത് ഇവിടത്തെ തോത് 10^{10}ആണ്. ഒരു ആറ്റത്തിന്റെ ഏകദേശ വലുപ്പം 10^{-10}m ആണ്. അതായത് ആറ്റത്തിന്റെ വലുപ്പം 1m ആയി കണക്കാക്കേണ്ടി വരും. ◀

2.3.3 ദൂരങ്ങളുടെ വ്യാപ്തി (Range of lengths)

പ്രകൃതിയിൽ നാം കാണുന്ന ദൂരങ്ങളുടെ വ്യാപ്തി വളരെ വലുതാണ്. ഈ ദൂരങ്ങൾ ഒരു ന്യൂക്ലിയസിന്റെ വലുപ്പത്തിന്റെ പരിമാണഘാതമായ 10^{-14}m മുതൽ നമുക്ക് നിരീക്ഷിക്കാവുന്ന പ്രപഞ്ചത്തിന്റെ വലുപ്പത്തിന്റെ പരിമാണഘാതമായ 10^{-26}m വരെ വിന്യസിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഈ ദൂരവ്യാപ്തി പട്ടിക 2.3 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

വസ്തുക്കളുടെ വലുപ്പം അഥവാ ദൂരം	നീളം (m)
പ്രോട്ടോണിന്റെ വലുപ്പം	$10^{\ 15}$
ആറ്റോമിക ന്യൂക്ലിയസിന്റെ വലുപ്പം	$10^{\ 14}$
ഹൈഡ്രജൻ ആറ്റത്തിന്റെ വലുപ്പം	$10^{\ 10}$
പ്രകാശത്തിന്റെ തരംഗദൈർഘ്യം	$10^{\ 7}$
ചുവന്ന രക്താണുവിന്റെ വലുപ്പം	$10^{\ 5}$
ഒരു പേപ്പറിന്റെ കനം	$10^{\ 4}$
സമുദ്രനിരപ്പിൽനിന്നുള്ള എവറസ്റ്റിന്റെ ഉയരം	10^{4}
ഭൂമിയുടെ ആരം	10^{7}
ഭൂമിയിൽ നിന്നു ചന്ദ്രനിലേക്കുള്ള ദൂരം	10^{8}
ഭൂമിയിൽ നിന്നു സൂര്യനിലേക്കുള്ള ദൂരം	10^{11}
പ്ലൂട്ടോയിൽനിന്നു സൂര്യനിലേക്കുള്ള ദൂരം	10^{13}
നമ്മുടെ ഗാലക്സിയുടെ വലുപ്പം	10^{21}
ആൻഡ്രോമെഡോ ഗാലക്സിയിലേക്കുള്ള ദൂരം	10^{22}
ദൃശ്യമായ പ്രപഞ്ചത്തിന്റെ അതിർത്തി	10^{26}

പട്ടിക 2.3 ദൂരങ്ങളുടെ വ്യാപ്തി

വളരെ വലുതും ചെറുതുമായ ദൂരങ്ങളുടെ ചില പ്രത്യേക യൂണിറ്റുകൾ നാം ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്. അവയിൽ ചിലത്:

- 1 ഫെർമി (f) , 1 f = 10^{-15} m
- 1 ആങ്സ്ട്രം = 1 Å = 10^{-10} m
- 1 അസ്ട്രോണമിക്കൽ യൂണിറ്റ് = 1 AU = സൂര്യനും ഭൂമിക്കും ഇടയിലുള്ള ശരാശരി ദൂരം = 1.496×10^{11} m
- 1 പ്രകാശവർഷം (1 ly) (light year) = 3×10^{8} m s^{-1} എന്ന വേഗത്തിൽ ഒരുവർഷംകൊണ്ട് പ്രകാശം സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം =9.46×10^{15} m
- 1 പാർസെക് (parsec) =3.08×10^{16} m ഭൂമിയുടെ ഭ്രമണ പഥത്തിന്റെ ശരാശരി ആരം ചാപത്തിന്റെ ഒരു സെക്കന്റ് (1" of an arc) എന്ന കോൺ രൂപപ്പെടുത്തുന്ന അകലം.

2.4 മാസിന്റെ നിർണയം (Measurement of mass)

ദ്രവ്യത്തിന്റെ ഒരു അടിസ്ഥാന സ്വഭാവമാണ് മാസ്. ഇത് ബാഹ്യഘടകങ്ങളായ താപനില, മർദ്ദം, സ്ഥാനം തുടങ്ങിയവയെ ഒന്നും ആശ്രയിക്കുന്നില്ല. മാസിന്റെ യൂണിറ്റ് കിലോഗ്രാം (kg) ആണ്. അളവുതൂക്കങ്ങൾക്കായുള്ള അന്താരാഷ്ട്ര കാര്യാലയം (International Bureau of Weights and Measures - BIPM) നിർദേശിച്ചിട്ടുള്ള കിലോഗ്രാം എന്ന യൂണിറ്റിന്റെ മാതൃകകൾ (Prototypes) മിക്ക രാജ്യങ്ങളിലെ ലബോറട്ടറികളിലും ലഭ്യമാണ്. ഇന്ത്യയിൽ ന്യൂഡൽഹിയിലെ നാഷണൽ ഫിസിക്കൽ ലബോറട്ടറിയി (NPL) ലാണുള്ളത്.

ആറ്റം, തന്മാത്ര തുടങ്ങിയവയുടെ മാസ് സൂചിപ്പിക്കാൻ കിലോഗ്രാം എന്നത് അനുയോജ്യമായ ഒരു യൂണിറ്റല്ല. ഇത്തരം ആവശ്യങ്ങൾക്കായി ഉപയോഗിക്കുന്ന യൂണിറ്റാണ് യൂണിഫൈഡ് മാസ് യൂണിറ്റ് (u).

1u=1/12×ഇലക്ട്രോണുകളുൾപ്പെടെയുള്ള കാർബൺ-12 ആറ്റത്തിന്റെ മാസ്

1u =1.66 ×x 10^{-27} kg

സാധാരണ ലഭ്യമാകുന്ന വസ്തുക്കളുടെ മാസ് ഒരു പലചരക്കു കടയിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന തരത്തിലുള്ള ഒരു ത്രാസ് (common balance) ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം. ന്യൂട്ടന്റെ ഗുരുത്വനിയമം പ്രയോജനപ്പെടുത്തി ഗ്രഹങ്ങൾ, നക്ഷത്രങ്ങൾ തുടങ്ങിയവയുടെ മാസ് കണ്ടെത്താൻ കഴിയും. (അധ്യായം 8 കാണുക). ആറ്റോമിക്, സബ് ആറ്റോമിക് കണികകൾ തുടങ്ങി വളരെ ലഘുവായ കണികകളുടെ മാസ് നിർണയിക്കാൻ മാസ് സ്പെക്ട്രോഗ്രാഫ് ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരു വൈദ്യുതകാന്തികമണ്ഡലത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന കണികകളുടെ വൃത്താകാരപാതയുടെ ആരവും കണികകളുടെ മാസും നേർ അനുപാതത്തിൽ ആയിരിക്കും എന്നതാണ് ഇവിടെ ഉപയോഗിക്കുന്ന തത്വം.

2.4.1 മാസിന്റെ വ്യാപ്തി (Range of masses)

പ്രപഞ്ചത്തിൽ കാണുന്ന വസ്തുക്കളുടെ മാസിന്റെ വ്യാപ്തി വളരെ വലുതാണ്. ഇത് ഇലക്ട്രോണിന്റെ മാസിന്റെ പരിമാണഘാതമായ 10^{-30} kg മുതൽ അറിയപ്പെടുന്ന പ്രപഞ്ചത്തിന്റെ മാസ് ആയ 10^{55} kg വരെ വിന്യസിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഇത് പട്ടിക 2.4 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

പട്ടിക 2.4 മാസിന്റെ വ്യാപ്തി

വസ്തു	മാസ് (kg)
ഇലക്ട്രോൺ	10^{-30}
പ്രോട്ടോൺ	10^{-27}
യുറേനിയം ആറ്റം	10^{-25}
ചുവന്ന രക്താണു	10^{-13}
പൊടിപടലം	10^{-9}
മഴത്തുള്ളി	10^{-6}
കൊതുക്	10^{-5}
മുന്തിരി	10^{-3}
മനുഷ്യൻ	10^{2}
വാഹനം	10^{3}
ബോയിങ് 747 വിമാനം	10^{8}
ചന്ദ്രൻ	10^{23}
ഭൂമി	10^{25}
സൂര്യൻ	10^{30}
ക്ഷീരപഥം	10^{41}
ദൃശ്യമായ പ്രപഞ്ചം	10^{55}

2.5 സമയനിർണയം (Measurement of time)

ഏത് ഇടവേള നിർണയിക്കാനും ഒരു ക്ലോക്ക് ആവശ്യമാണ്. ഇന്ന് നമ്മൾ സമയത്തിന്റെ ആറ്റോമിക മാനദണ്ഡമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഇത് സീസിയം ആറ്റത്തിന്റെ അറ്റോമിക് ക്രമാവർത്തന കമ്പനങ്ങളെ (atomic periodic vibration) അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ് സീസിയം ക്ലോക്ക് അഥവാ ആറ്റോമിക ക്ലോക്ക് പ്രവർത്തിക്കുന്നത്. സമയത്തിന്റെ ദേശീയ മാനദണ്ഡം രൂപകൽപന ചെയ്തിരിക്കുന്നത് സീസിയം ക്ലോക്കിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ്. അത്തരം ക്ലോക്കുകൾ പല പരീക്ഷണ ശാലകളിലും ലഭ്യമാണ്. ദേശീയമാനദണ്ഡമായ സീസിയം ആറ്റോമിക ക്ലോക്കിൽ, സീസിയം 133 ആറ്റത്തിന്റെ ഗ്രൗണ്ട് സ്റ്റേറ്റിലെ രണ്ടു ഹൈപ്പർ ഫൈൻ ലെവലുകൾക്കിടയിലുള്ള ട്രാൻസിഷൻകൊണ്ട് ഉണ്ടാകുന്ന

വികിരണങ്ങളുടെ 9192631770 ദോലനങ്ങൾക്കാവശ്യമായ സമയമാണ് ഒരു സെക്കന്റ്. ഒരു ക്വാർട്സ് വാച്ചിനെ ഒരു ക്വാർട്സ് ക്രിസ്റ്റലിന്റെ കമ്പനങ്ങൾ നിയന്ത്രിക്കുന്നതു പോലെയും, ഒരു സാധാരണ വാച്ചിനെ ബാലൻസ് വീലിന്റെ ക്രമാവർത്തന ചലനം നിയന്ത്രിക്കുന്നതു പോലെയും സീസിയം ആറ്റത്തിലെ കമ്പനങ്ങൾ ആറ്റോമിക ക്ലോക്കിനെ നിയന്ത്രിക്കുന്നു.

സീസിയം ആറ്റോമിക ക്ലോക്കുകൾ ഉയർന്ന കൃത്യതയുള്ളവയാണ്. തത്വത്തിൽ ഇവ കൊണ്ടു നടക്കാവുന്ന മാനദണ്ഡമാണ്. നാല് സീസിയം ആറ്റോമിക ക്ലോക്കുകൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് സമയത്തിന്റെ ദേശീയ മാനദണ്ഡമായ 'സെക്കന്റ്' രൂപകൽപന ചെയ്തിട്ടുള്ളത്.

ന്യൂഡൽഹിയിലെ നാഷണൽ ഫിസിക്കൽ ലബോറട്ടറിയിൽ സ്ഥാപിച്ചിട്ടുള്ള അറ്റോമിക് സീസിയം ക്ലോക്കുകളാണ് ഇന്ത്യൻ സമയത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനം. സമയം, ആവൃത്തി തുടങ്ങിയവയുടെ യൂണിറ്റുകളുടെ പരിപാലനവും മെച്ചപ്പെടുത്തലും ഇന്ത്യയിൽ നാഷണൽ ഫിസിക്കൽ ലബോറട്ടറിയുടെ (NPL) ഉത്തരവാദിത്തമാണ്. ഇന്ത്യൻ സ്റ്റാൻഡേർഡ് സമയം ഈ ആറ്റോമിക ക്ലോക്കുകളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഈ ക്ലോക്കുകൾ ഉപയോഗിച്ച് അളക്കുന്ന സമയ ഇടവേളകളിൽ വരാവുന്ന അനിശ്ചിതത്വം 10^{-13} s, അതായത് ഒരു സെക്കന്റിന്റെ 10^{13} ൽ ഒരു ഭാഗമാണ്. ഇത് ഇത്തരം ക്ലോക്കുകളുടെ ഉയർന്ന കാര്യക്ഷമതയും സൂക്ഷ്മതയും കാണിക്കുന്നു. അതായത് ഒരുവർഷ ഇടവേളയിൽ വരാവുന്ന പരമാവധി അനിശ്ചിതത്വം 3μs ആണ്. സമയ നിർണയത്തിലെ ഈ അത്യധികം ഉയർന്ന കൃത്യത മൂലമാണ്, ദൂരത്തിന്റെ SI യൂണിറ്റ് 1/1/299,792,458 സെക്കന്റ് എന്ന സമയ ഇടവേളയിൽ പ്രകാശം സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരമായി നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് (പട്ടിക 2.1).

പ്രകൃതിയിൽ നാം അഭിമുഖീകരിക്കുന്ന സമയ ഇടവേളകളുടെ വിന്യാസം വളരെ വലുതാണ്. പട്ടിക 2.5 ൽ ചില സമയ ഇടവേളകളുടെ വ്യാപ്തിയും പരിമാണഘാതവും ഉൾപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.

(പട്ടിക 2.5 സമയ ഇടവേളകളുടെ വ്യാപ്തിയും പരിമാണഘാതവും)

സംഭവം	സമയ ഇടവേള (s)
ഏറ്റവും അസ്ഥിരമായ കണികയുടെ ആയുസ്സ്	10^{-24}
ന്യൂക്ലിയർ ദൂരങ്ങൾ സഞ്ചരിക്കാൻ പ്രകാശത്തിനാവശ്യമായ സമയം	10^{22}
X കിരണങ്ങളുടെ പീരീഡ്	10^{19}
ആറ്റോമിക കമ്പനങ്ങളുടെ പിരീഡ്	10^{15}
പ്രകാശതരംഗത്തിന്റെ പിരീഡ് (ആവർത്തനകാലം)	10^{15}
ഒരു ആറ്റത്തിന്റെ ഉത്തേജിത അവസ്ഥയുടെ ആയുസ്സ്	10^{-8}
റേഡിയോതരംഗത്തിന്റെ പിരീഡ്	10^{-6}
ശബ്ദതരംഗത്തിന്റെ പിരീഡ്	10^{-3}
കണ്ണിന്റെ ഇമവെട്ടൽ	10^{1}
അടുത്തടുത്ത ഹൃദയമിടിപ്പുകൾക്കിടയിലെ സമയം	10^{0}
ചന്ദ്രനിൽ നിന്നു പ്രകാശം ഭൂമിയിലെത്താനാവശ്യമായ സമയം	10^{0}
സൂര്യനിൽ നിന്നു പ്രകാശം ഭൂമിയിലെത്താനാവശ്യമായ സമയം	10^{2}
ഒരു ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ പിരീഡ്	10^{4}
ഭൂമിയുടെ ഭ്രമണകാലം	10^{5}
ചന്ദ്രന്റെ ഭ്രമണ-പരിക്രമണ കാലങ്ങൾ	10^{6}
ഭൂമിയുടെ പരിക്രമണകാലം	10^{7}
ഏറ്റവും അടുത്ത നക്ഷത്രത്തിൽ നിന്നു പ്രകാശം ഭൂമിയിലെത്താനാവശ്യമായ സമയം	10^{8}
ശരാശരി മനുഷ്യജീവിത കാലയളവ്	10^{9}
ഈജിപ്ഷ്യൻ പിരമിഡുകളുടെ കാലപ്പഴക്കം	10^{11}
ഡൈനസറുകളുടെ വംശനാശത്തിന് ശേഷമുള്ള സമയം	10^{15}
പ്രപഞ്ചത്തിന്റെ പ്രായം	10^{17}

പട്ടിക 2.3 ലെയും പട്ടിക 2.5 ലെയും സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ രസകരമായ ഒരു യാദൃച്ഛികത കാണാൻ കഴിയും. പ്രപഞ്ചത്തിലെ ഏറ്റവും വലിയ നീളവും ഏറ്റവും ചെറിയ നീളവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതം ഏകദേശം 10^{41} ആണ്. പ്രപഞ്ചത്തിലെ പ്രതിഭാസങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഏറ്റവും ഉയർന്ന സമയ ഇടവേളയും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ സമയ ഇടവേളയും തമ്മിലുള്ള അനുപാതവും ഏകദേശം 10^{41} തന്നെയാണ്. വസ്തുക്കളുടെ മാസുകൾ ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ള പട്ടിക 2.4ലും 10^{41}എന്ന സംഖ്യ കാണാൻ കഴിയും. നമ്മുടെ പ്രപഞ്ചത്തിലെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന മാസും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മാസും തമ്മിലുള്ള അനുപാതം ഏകദേശം $(10^{41})^2$ ആണ്. ഈ ജിജ്ഞാസ വെറും ആകസ്മികമാണോ?

2.6 ഉപകരണങ്ങളിലെ കൃത്യതയും സൂക്ഷ്മതയും അളവുകളിലെ പിശകും (Accuracy and Precision of instruments and Errors in measurement)

അളക്കൽ (measurement) ശാസ്ത്ര-സാങ്കേതിക മേഖലയിലെ അടിസ്ഥാനപ്രവർത്തനങ്ങളിൽ ഒന്നാണ്. അളവുപകരണങ്ങളിൽ നിന്നു ലഭിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങളിൽ അനിശ്ചിതത്വം (uncertainty) ഉണ്ടായിരിക്കും. ഈ അനിശ്ചിതത്വം പിശക് (error) എന്നറിയപ്പെടുന്നു. അളവുകളിൽനിന്നു ലഭിച്ച മൂല്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കുന്ന അളവുകളിലും പിശകുകൾ ഉണ്ടാകും. കൃത്യത (accuracy), സൂക്ഷ്മത (precision) എന്നീ പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ഇവിടെ വ്യക്തമാക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഒരു ഭൗതിക രാശിയുടെ അളവിലൂടെ ലഭിച്ച മൂല്യം അതിന്റെ യഥാർഥ മൂല്യത്തോട് എത്ര അടുത്തു നിൽക്കുന്നുവെന്നത് കൃത്യതയെ കാണിക്കുന്നു. ഒരു അളവിന്റെ വിഭേദനപരിധിയുടെ അളവാണ് സൂക്ഷ്മത.

ഒരു അളവിലെ കൃത്യത അളവുപകരണത്തിന്റെ വിഭേദനപരിധി ഉൾപ്പെടെ പല ഘടകങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി, ഒരു വസ്തുവിന്റെ യഥാർഥ നീളം 3.678 cm ആണെന്നു കരുതുക. വിഭേദനപരിധി 0.1cm ഉള്ള ഒരു ഉപകരണം കൊണ്ട് ഈ വസ്തുവിന്റെ നീളം 3.5 എന്ന് അളക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നാൽ വിഭേദനപരിധി 0.01 cm ഉള്ള മറ്റൊരുപകരണം കൊണ്ട് ഈ വസ്തുവിന്റെ നീളം 3.38 cm എന്നും അളന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. ആദ്യ അളവായ 3.5 cm ന് കൃത്യത കൂടുതലാണ്. ഇത് യഥാർഥ വിലയോട് അടുത്തു നിൽക്കുന്നതാണ് ഇതിനു കാരണം. പക്ഷേ, ഇതിലെ സൂക്ഷ്മത കുറവാണ്. വിഭേദനം 0.1 cm മാത്രമേയുള്ളൂ. രണ്ടാമത്തെ അളവായ 3.38 cm ന് കൃത്യത കുറവും സൂക്ഷ്മത കൂടുതലുമാണ്. അതായത് അളവുകളിലെ പിശകുമൂലം എല്ലാ അളവുകളും ഏകദേശം മാത്രമാണ്. അളവുകളിലെ പിശകുകളെ പൊതുവായി രണ്ടായി വിഭജിക്കാം.

- ക്രമപ്പിശക് (Systematic Errors)
- ക്രമരഹിതപ്പിശക് (Random Errors)

ക്രമപ്പിശക് (Systematic Errors)

എല്ലായ്പ്പോഴും ഒരേ രീതിയിൽ സംഭവിക്കുന്ന പിശകുകളാണ് ക്രമപ്പിശകുകൾ. ഇത്തരം പിശകുകൾ എല്ലാം ഒന്നുകിൽ പോസിറ്റീവ് അല്ലെങ്കിൽ നെഗറ്റീവ് ആയിരിക്കും. ക്രമരഹിതപ്പിശകുകളുടെ ചില സ്രോതസ്സുകൾ താഴെ വിശദമാക്കുന്നു.

(a) ഉപകരണപ്പിശക് (Instrumental Error)

അളവുപകരണങ്ങളുടെ രൂപകൽപനയിൽ വന്ന തകരാർ അങ്കനം ചെയ്തിരിക്കുന്നതിലെ പിശകുമൂലമോ പൂജ്യ പിശകു മുതലായവ മൂലമോ ഉണ്ടാകുന്ന പിശകുകളാണിവ. ഉദാഹരണമായി ഒരു തെർമോമീറ്ററിലെ താപനില അങ്കനം ചെയ്തിരിക്കുന്നത് ശരിയാകാതെ വരാം (ഉദാഹരണത്തിന് STP യിലെ ജലത്തിന്റെ തിളനില 100^0C എന്നതിനു പകരം 104^0C എന്ന് തെർമോമീറ്റർ കാണിക്കാം. ഒരു വെർണിയർ കാലിപേർസിലെ വെർണിയർ സ്കെയിലിലെ പൂജ്യം, മെയിൻ സ്കെയിലിലെ പൂജ്യവുമായി ചേർന്ന് വരാതിരിക്കാം. ഒരു സാധാരണ മീറ്റർ സ്കെയിലിന്റെ ഒരഗ്രം പൊട്ടിപ്പോയിരിക്കാം. ഇത്തരം പിശകുകൾ സക്രമപ്പിശകുകളാണ്.

(b) പരീക്ഷണസങ്കേതത്തിലോ പ്രവർത്തനത്തിലോ ഉണ്ടാകുന്ന കൃത്യതയില്ലായ്മ (Imperfection in experimental technique or procedure)

മനുഷ്യശരീരത്തിന്റെ താപനില നിർണയിക്കാൻ ഒരു തെർമോമീറ്റർ കക്ഷത്തിൽ വെയ്ക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന താപനില എല്ലായ്പ്പോഴും യഥാർഥ മൂല്യത്തേക്കാൾ കുറവായിരിക്കും. പരീക്ഷണസമയത്തെ ബാഹ്യ ഘടകങ്ങളായ താപനിലയിലെ വ്യത്യാസം, ആർദ്രത, കാറ്റ് തുടങ്ങിയവ പരീക്ഷണഫലത്തെ ക്രമമായി ബാധിക്കാം.

(c) വ്യക്തിഗതപ്പിശക് (Personal Error)

വ്യക്ത്യാധിഷ്ഠിത പ്രശ്നങ്ങൾ മൂലമോ വ്യക്തിഗത പ്രവണതമൂലമോ ശരിയായ പരീക്ഷണക്രമീകരണത്തിന്റെ അഭാവം മൂലമോ അശ്രദ്ധമൂലമോ അനുയോജ്യ മുൻകരുതലുകൾ ഇല്ലാത്തതുകൊണ്ടോ വരുന്ന പിശകുകളാണ് വ്യക്തിഗതപ്പിശകുകൾ. ഉദാഹരണമായി, തല എല്ലായ്പ്പോഴും വലതു വശത്തേക്ക് അൽപ്പം ചരിച്ചു പിടിക്കുന്ന സ്വഭാവമുള്ള ഒരാൾ ഒരു മീറ്ററിലെ സൂചിയുടെ സ്ഥാനമളക്കുമ്പോൾ സ്വാഭാവികമായി ഉണ്ടാകുന്ന പിശകാണ് ലംബനപിശക് (parallax error).

ക്രമപ്പിശക് ലഘൂകരിക്കാനുള്ള ചില മാർഗങ്ങളാണ് പരീക്ഷണസങ്കേതങ്ങൾ മെച്ചപ്പെടുത്തുക, മെച്ചപ്പെട്ട ഉപകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുക, വ്യക്തിപരമായ ചായ്വുകൾ കഴിയുന്നതും ഒഴിവാക്കുക തുടങ്ങിയവ. ഒരു പരീക്ഷണത്തിൽ ഇത്തരം പിശകുകൾ ഏകദേശം കണക്കാക്കാനും ആവശ്യമെങ്കിൽ തിരുത്തലുകൾ വരുത്താനും കഴിയും.

ക്രമരഹിതപ്പിശക് (Random Errors)

ക്രമരഹിതമായി സംഭവിക്കുന്നതും അതിനാൽ അളവിലും ദിശയിലും ആകസ്മികമായി വരുന്നതുമായ പിശകുകളാണ് ക്രമരഹിതപ്പിശകുകൾ. പരീക്ഷണാ

വസ്ഥകളിലുണ്ടാകുന്ന ക്രമരഹിതവും പ്രവചനാതീതവുമായ ഏറ്റക്കുറച്ചിലുകൾ (ഉദാഹരണമായി വോൾട്ടതയിലോ താപനിലയിലോ ഉണ്ടാകുന്ന അപ്രതീക്ഷിത വ്യതിയാനങ്ങൾ, പരീക്ഷണസജ്ജീകരണങ്ങളിൽ ഉണ്ടാകാവുന്ന കമ്പനങ്ങൾ തുടങ്ങിയവ), വ്യക്തിഗതപ്പിശകുകൾ (ഉദാഹരണമായി ഒരേ വ്യക്തി തന്നെ ഒരു പരീക്ഷണം ആവർത്തിക്കുമ്പോൾ വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കാം) തുടങ്ങിയവ ഇത്തരം പിശകുകൾക്കു കാരണമാകുന്നു.

കൊച്ചളവുപിശക് (Least count error)

ഒരു അളവുപകരണംകൊണ്ട് അളക്കാവുന്ന ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യമാണ് അതിന്റെ കൊച്ചളവ് (least count). ഈ ഉപകരണത്തിൽനിന്നു ലഭിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങൾ ഈ വില വരെ മാത്രമേ സൂക്ഷ്മമാവുകയുള്ളൂ. കൊച്ചളവ് പിശക് ഉപകരണത്തിന്റെ വിഭേദനപരിധിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി, ഒരു വെർണിയർ കാലിപേർസിന്റെ കൊച്ചളവ് 0.01 cm ഉം ഒരു സ്ഫിറോമീറ്ററിന്റേത് 0.001 cm ഉം ആകാം. ഒരു പരിധി വരെ ഇത്തരം പിശകുകൾ ക്രമരഹിതപ്പിശകുകളുടെ വിഭാഗത്തിൽപ്പെടുന്നു. ക്രമപ്പിശകുകളോടൊപ്പവും ക്രമരഹിതപ്പിശകുകളോടൊപ്പവും ഇത്തരം പിശകുകൾ വരാവുന്നതാണ്.

ഉയർന്ന സൂക്ഷ്മതയുള്ള ഉപകരണങ്ങളിലൂടെയും പരീക്ഷണസജ്ജീകരണങ്ങൾ മെച്ചപ്പെടുത്തിയും ഇത്തരം പിശകുകൾ കുറയ്ക്കാനാവും. പരീക്ഷണം അനവധി പ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ ശരാശരി മൂല്യം, യഥാർഥ മൂല്യത്തോടു വളരെ അടുത്തായിരിക്കും.

2.6.1 കേവലപിശക് (Absolute Error) ആപേക്ഷികപിശക് (Relative Error) ശതമാനപ്പിശക് (Percentage Error).

(a) $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ എന്നിവ വിവിധ നിരീക്ഷണങ്ങളിൽ നിന്നു ലഭിച്ച ഒരു അളവിന്റെ പല മൂല്യങ്ങളാണെന്നു കരുതുക. ഈ പരീക്ഷണത്തിൽ ഏറ്റവും അനുയോജ്യ മൂല്യമായി പരിഗണിക്കാവുന്നത് ഇവയുടെ ശരാശരി മൂല്യമാണ്.

$$a_{mean} = (a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)/n \qquad (2.4)$$

അഥവാ,

$$a_{mean} = \sum_{i=1}^{n} a_i / n \qquad (2.5)$$

ഒരു അളവും അതിന്റെ യഥാർഥ മൂല്യവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന്റെ പരിമാണമാണ് ആ അളവിലെ കേവലപിശക്. ഇതിനെ $|\Delta a|$ എന്നു പ്രതിനിധീകരിക്കാം. യഥാർഥ വിലയറിയാൻ മറ്റു മാർഗങ്ങൾ ഇല്ലാത്ത അവസരങ്ങളിൽ ശരാശരി വിലയെ യഥാർഥ വിലയായി പരിഗണിക്കുന്നു. ഓരോ വിലയിലുമുണ്ടാകുന്ന കേവലപിശക് താഴെപ്പറയുംവിധം കണക്കാക്കാം.

$$\Delta a_1 = a_1 - a_{mean},$$
$$\Delta a_2 = a_2 - a_{mean},$$
....
....
$$\Delta a_n = a_n - a_{mean}$$

ഇപ്രകാരം ലഭിക്കുന്ന Δa പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ ആകാം. പക്ഷേ, കേവലപിശക് $|\Delta a|$ എല്ലായ്പ്പോഴും പോസിറ്റീവ് ആയിരിക്കും.

(b) എല്ലാ കേവലപിശകുകളുടെയും ശരാശരി വിലയാണ് ആ ഭൗതിക അളവിലെ ശരാശരി കേവലപിശക്. ഇതിനെ Δa_{mean} എന്ന് പ്രതിനിധീകരിക്കാം .

$$\Delta a_{mean} = (|\Delta a_1|+|\Delta a_2|+|\Delta a_3|+\ldots+|\Delta a_n|)/n \qquad (2.6)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\Delta a_i|/n \qquad (2.7)$$

ഒരു പ്രാവശ്യം മാത്രം നിരീക്ഷണം നടത്തിയാൽ ലഭിക്കുന്ന വില $a_{mean} \pm \Delta a_{mean}$ എന്ന സീമയ്ക്കുള്ളിലായിരിക്കുമെന്ന് കരുതാം.

അതായത് $a = a_{mean} \pm \Delta a_{mean}$

അഥവാ

$$a_{mean} - \Delta a_{mean} \le a \le a_{mean} + \Delta a_{mean} \qquad (2.8)$$

ഇതിനർഥം a എന്ന ഭൗതിക അളവിന്റെ ഏതു വിലയും $(a_{mean} + \Delta a_{mean})$ നും $(a_{mean} - \Delta a_{mean})$ നും ഇടയ്ക്കായിരിക്കും എന്നാണ്.

(c) കേവലപിശകിനു പകരം സാധാരണ നമ്മൾ ആപേക്ഷികപിശകോ ശതമാനപ്പിശകോ ആണ് (δa) ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ആപേക്ഷികപിശക് എന്നത് ശരാശരി കേവലപിശകിന്റെയും Δa_{mean} ഭൗതിക അളവിന്റെ ശരാശരി വിലയുടെയും a_{mean} അനുപാതമാണ്. അതായത്

$$\text{ആപേക്ഷികപിശക്.} = \Delta a_{mean}/a_{mean} \qquad (2.9)$$

ആപേക്ഷികപിശക് ശതമാനത്തിൽ പ്രകടിപ്പിക്കുമ്പോൾ അതിനെ ശതമാനപ്പിശക് (δa) എന്നു പറയുന്നു.

$$\delta a = (\Delta a_{mean}/a_{mean}) \times 100\% \qquad (2.10)$$

▶ **ഉദാഹരണം 2.6** ദേശീയ പരീക്ഷണശാലയിൽ സ്ഥാപിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു അടിസ്ഥാന ക്ലോക്കുമായി താരതമ്യം ചെയ്തുകൊണ്ട് രണ്ടു ക്ലോക്കുകൾ പരിശോധിക്കപ്പെടുന്നു. ഉച്ചയ്ക്ക് 12:00:00എന്ന സമയം അടിസ്ഥാന ക്ലോക്ക് രേഖപ്പെടുത്തുമ്പോൾ മറ്റു രണ്ടു ക്ലോക്കുകളിലെ സമയം താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

	ക്ലോക്ക് 1	ക്ലോക്ക് 2
തിങ്കൾ	12:00:05	10:15:06
ചൊവ്വ	12:01:15	10:14:59
ബുധൻ	1:59:08	10:15:18
വ്യാഴം	12:01:50	10:15:07
വെള്ളി	11:59:15	10:14:53
ശനി	12:01:30	10:15:24
ഞായർ	12:01:19	10:15:11

സമയ ഇടവേളകളുടെ സൂക്ഷ്മനിർണയമാവശ്യമായ ഒരു പരീക്ഷണത്തിന് ഇതിൽ ഏതു ക്ലോക്ക് നിങ്ങൾ തിരഞ്ഞെടുക്കും?

ഉത്തരം: ഏഴു ദിവസം തുടർച്ചയായി പ്രവർത്തിച്ചപ്പോൾ ഉണ്ടായ സമയവ്യത്യാസം ക്ലോക്ക് 1 ൽ 162s ഉം ക്ലോക്ക് 2 ൽ 31s മാണ്. ക്ലോക്ക് 1 കാണിക്കുന്ന സമയം അടിസ്ഥാനസമയവുമായി ക്ലോക്ക് 2 ന്റേതിനേക്കാൾ അടുത്തതാണ്. സമയ ഇടവേളകൾ നിർണയിക്കുമ്പോൾ ക്ലോക്കിന്റെ പൂജ്യപിശക് (zero error) പ്രസക്തമല്ല. ഇത്തരം പിശകുകൾ അനായാസം തിരുത്താൻ കഴിയുമെന്നതാണ് ഇതിനു കാരണം. അതിനാൽ ക്ലോക്ക് 2 ആണ് അനുയോജ്യം.

▶ **ഉദാഹരണം 2.7** ഒരു സിമ്പിൾ പെൻഡുലത്തിന്റെ ആവർത്തനകാലം അളന്നപ്പോൾ ലഭിച്ച വിവിധ വിലകൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. 2.63s, 2.56s, 2.42s, 2.71s, 2.80s ഓരോ വിലയിലെയും കേവല പിശക്, ആപേക്ഷിക പിശക്, ശതമാനപ്പിശക് എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം : ശരാശരി ആവർത്തനകാലം

$$T = \frac{(2.63 + 2.56 + 2.42 + 2.71 + 2.80)s}{5}$$

$$= \frac{13.12}{5} s$$

$$= 2.624 \text{ s}$$

$$= 2.62 \text{ s}$$

ആവർത്തനകാലം അളന്നിരിക്കുന്നതിന്റെ വിഭേദനം 0.01s ആയതിനാലും ആവർത്തനകാലങ്ങളിൽ രണ്ട ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ ഉള്ളതിനാലും ശരാശരിവിലയിൽ രണ്ട് ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ മതിയാകും.

ഓരോ അളവിലെയും കേവലപിശക്

$2.63 \text{ s} - 2.62 \text{ s} = 0.01 \text{ s}$

$2.56 \text{ s} - 2.62 \text{ s} = -0.06 \text{ s}$

$2.42 \text{ s} - 2.62 \text{ s} = -0.20 \text{ s}$

$2.71 \text{ s} - 2.62 \text{ s} = 0.09 \text{ s}$

$2.80 \text{ s} - 2.62 \text{ s} = 0.18 \text{ s}$

ഭൗതിക അളവിന്റെ യൂണിറ്റ് തന്നെയാണ് കേവല പിശകിന്റെയും യൂണിറ്റ് എന്ന വസ്തുത ശ്രദ്ധിക്കുക.

എല്ലാ കേവലപിശകുകളുടെയും ശരാശരി (പരിമാണം മാത്രം)

$$\Delta T_{mean} = [(0.01 + 0.06 + 0.20 + 0.09 + 0.18)s]/5$$

$$= 0.54 \text{ s}/5$$

$$= 0.11 \text{ s}$$

ഈ സിമ്പിൾ പെൻഡുലത്തിന്റെ ആവർത്തനകാലം (2.62±0.11) s ആകുന്നു. അതായത് ആവർത്തനകാലം (2.62+0.11) s നും (2.62-0.11) s നും അഥവാ 2.73s നും 2.51s നും ഇടക്കാണ്. എല്ലാ കേവലപിശകുകളുടെയും ശരാശരി 0.11s ആയതിനാൽ പത്തിൽ ഒന്ന് സെക്കന്റിന്റെ പിശക് വന്നുകഴിഞ്ഞു. അതിനാൽ നൂറിൽ ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനവില നൽകുന്നതിൽ അർഥമില്ല. അതിനാൽ കൂടുതൽ അനുയോജ്യം T =2.6 ±0.1 s എന്ന് എഴുതുന്നതാണ്.

6 എന്ന അവസാന അക്കം വിശ്വസനീയമല്ല. കാരണം അത് 5 മുതൽ 7 വരെ ഏതുമാകാം. ഇതിൽ രണ്ട് സാർഥക അക്കങ്ങളുണ്ട് എന്ന് പ്രസ്താവിച്ചുകൊണ്ട് ഇത് നമുക്കു സൂചിപ്പിക്കാം. ഇവിടെ സാർഥക അക്കങ്ങൾ 2ഉം പിശക് ഉൾപ്പെടുന്ന 6ഉം ആകുന്നു. സാർഥക അക്കങ്ങൾ വിശദമായി ഭാഗം 2.7ൽ പഠിക്കാം.

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ ശതമാനപ്പിശക്

$$\delta a = \frac{0.1}{2.6} \times 100 = 4\,\% \quad ◀$$

2.6.2 പിശകുകളുടെ സംയോജനം (Combination of Errors)

അനവധി അളവുകൾ ഉൾപ്പെടുന്ന പരീക്ഷണങ്ങൾ ചെയ്യുമ്പോൾ പിശകുകളുടെ സംയോജനം നാം അറിഞ്ഞിരിക്കണം. ഉദാഹരണമായി സാന്ദ്രത എന്നത് ഒരു വസ്തുവിന്റെ മാസും വ്യാപ്തവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതമാണല്ലോ. വസ്തുവിന്റെ മാസ് നിർണയിക്കുന്നതിലോ വലുപ്പം നിർണയിക്കുന്നതിലോ ഉണ്ടാകാവുന്ന പിശകുകൾ മൂലം സാന്ദ്രതയിലുണ്ടാകുന്ന പിശക് കണക്കാക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഇത്തരം കണക്കുകൂട്ടലുകൾക്ക് പിശകുകളുടെ സംയോജനം പഠിക്കേണ്ടത് അത്യാവശ്യമാണ്.

(a) തുകയിലോ വ്യത്യാസത്തിലോ ഉണ്ടാകുന്ന പിശക് (Error of a sum or a difference)

A, B എന്നീ രണ്ട് ഭൗതിക അളവുകൾ A±ΔA, B±ΔB എന്നിങ്ങനെ നിർണയിച്ചു എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇതിൽ ΔA,ΔB എന്നിവ യഥാക്രമം A, B എന്നീ അളവുകളിലെ കേവല പിശകുകളാണ്. ഇവയുടെ തുകയായ Z ലെ കേവല പിശക് കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിക്കാം.

$Z = A + B.$

$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B).$

Z ലെ പരമാവധി പിശക്

$\Delta Z = \Delta A + \Delta B$

വ്യവകലനത്തിന്

$Z = A - B$

$$Z \pm \Delta Z \quad (A \pm \Delta A) - (B \pm \Delta B)$$
$$= (A - B) \pm \Delta A \pm \Delta B$$

$\pm \Delta Z \quad = \pm \Delta A \pm \Delta B$

Z ലെ പരമാവധി പിശക്

$\Delta Z = \Delta A + \Delta B$

അതായത്, രണ്ട് അളവുകൾ തമ്മിൽ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യുമ്പോൾ, തുകയിലോ വ്യത്യാസത്തിലോ ഉണ്ടാകുന്ന കേവലപിശക് ഓരോ അളവിലെയും കേവലപിശകുകളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമായിരിക്കും.

▶ ഉദാഹരണം 2.8 രണ്ടു വസ്തുക്കളുടെ താപനില തെർമോമീറ്ററുകൾ ഉപയോഗിച്ച് t_1 = 20 °C ± 0.5 °C, t_2 = 50 °C ± 0.5 °C എന്നിങ്ങനെ അളക്കുന്നു. ഈ താപനിലകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസവും അതിലെ പിശകും കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം: $t' = t_2 - t_1$ = (50 °C±0.5 °C)– (20°C±0.5 °C)

t' = 30 °C ± 1 °C ◀

(b) ഗുണനഫലത്തിലോ ഹരണഫലത്തിലോ ഉള്ള പിശക് (Error of a product or a quotient)

Z=AB ആണെന്നും A,B എന്നിവ നിർണയിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത് (A±ΔA), (B±ΔB) എന്നിങ്ങനെ ആണെന്നും കരുതുക.

$$Z \pm \Delta Z = (A \pm \Delta A)\ (B \pm \Delta B)$$
$$= AB \pm B\,\Delta A \pm A\,\Delta B \pm \Delta A\,\Delta B.$$

LHS നെ Z കൊണ്ടും RHS നെ AB കൊണ്ടും ഹരിക്കുമ്പോൾ

$1 \pm (\Delta Z/Z) = 1 \pm (\Delta A/A) \pm (\Delta B/B) \pm (\Delta A/A)(\Delta B/B).$

ΔA, ΔB എന്നിവ വളരെ ചെറുതായതിനാൽ അവയുടെ ഗുണനഫലം അവഗണിക്കാം. അതിനാൽ പരമാവധി ആപേക്ഷികപിശക്

$\Delta Z/\ Z = (\Delta A/A) + (\Delta B/B)$

ഹരണത്തിനും ഈ ഫലം ശരിയാണെന്ന് അനായാസം തെളിയിക്കാൻ കഴിയും. രണ്ട് അളവുകൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ ചെയ്യുമ്പോൾ ഫലത്തിലുണ്ടാകുന്ന ആപേക്ഷിക പിശക് അളവുകളിലെ ആപേക്ഷികപിശകുകളുടെ തുകക്ക് തുല്യമായിരിക്കും.

▶ ഉദാഹരണം 2.9 പ്രതിരോധം $R = V/I$, ഇവിടെ V = (100 ± 5)V ഉം, I = (10 ± 0.2)A ഉം ആകുന്നു. R ലെ ശതമാനപ്പിശക് കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉത്തരം : V യിലെ ശതമാനപ്പിശക് 5%വും I ലേത് 2%വും ആണ്. അതിനാൽ R ലെ ശതമാനപ്പിശക് 5% + 2% = 7 % ആകുന്നു.

▶ ഉദാഹരണം 2.10 R_1=100±3 Ω –O, R_2=200 ± 4Ω എന്നീ രണ്ട് പ്രതിരോധകങ്ങൾ താഴെ പറയും വിധം ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

(a) ശ്രേണി, (b) സമാന്തരം. ഈ രണ്ടു രീതികളിലെയും സഫലപ്രതിരോധം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഭാഗം (a) യ്ക്ക് $R=R_1+R_2$ എന്ന സമവാക്യവും ഭാഗം (b) യ്ക്ക് $\frac{1}{R'}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$, $\frac{\Delta R'}{R'^2}=\frac{\Delta R_1}{R_1^2}+\frac{\Delta R_2}{R_2^2}$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങളും ഉപയോഗിക്കുക.

ഉത്തരം:

(a) ശ്രേണീ രീതിയിലെ സഫലപ്രതിരോധം

$$R \quad R_1 + R_2 = (100 \pm 3)\ \text{ohm} + (200 \pm 4)\ \text{ohm}$$
$$= 300 \pm 7\ \text{ohm}.$$

സമാന്തരരീതിയിലെ സഫലപ്രതിരോധം

$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{200}{3} = 66.7 \text{ ohm}$$

$$\frac{\Delta R'}{R'^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1^{\,2}} + \frac{\Delta R_2}{R_2^{\,2}}$$

$$\Delta R' = \left(R'^2\right)\frac{\Delta R_1}{R_1^{\,2}} + \left(R'^2\right)\frac{\Delta R_2}{R_2^{\,2}}$$

$$= \left(\frac{66.7}{100}\right)^2 3 + \left(\frac{66.7}{200}\right)^2 4$$

$$= 1.8$$

$$R' = 66.7 \pm 1.8 \text{ ohm}$$

(c) ഒരു ഉയർന്ന പവറിലുള്ള അളവിൽ വരുന്ന പിശക് (Error of a measured quantity raised to a power)

$Z=A^2$ ആണെന്നു കരുതുക. അപ്പോൾ

$\Delta Z/Z = (\Delta A/A) + (\Delta A/A) = 2\ (\Delta A/A).$

അതായത് A^2ലെ ആപേക്ഷികപിശക് Aലെ ആപേക്ഷിക പിശകിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായിരിക്കും. പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ $Z=(A^p\, B^q)/C^r$ ആയാൽ

$\Delta Z/Z = p\ (\Delta A/A) + q\ (\Delta B/B) + r\ (\Delta C/C).$

k എന്ന പവറിലേക്ക് ഉയർത്തപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു ഭൗതിക അളവിലുണ്ടാകുന്ന ആപേക്ഷികപിശക് അളവിലെ ആപേക്ഷികപിശകിന്റെ k മടങ്ങായിരിക്കും.

▶ ഉദാഹരണം 2.11 $Z = A^4 B^{1/3}/CD^{3/2}$ ആയാൽ Z ലെ ആപേക്ഷികപിശക് കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം: $\Delta Z/Z = 4(\Delta A/A) + (1/3)\ (\Delta B/B) + (\Delta C/C) + (3/2)\ (\Delta D/D).$

▶ ഉദാഹരണം 2.12 ഒരു സിമ്പിൾ പെൻഡുലത്തിന്റെ ആവർത്തനകാലത്തിന്റെ സമവാക്യം $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ എന്നാണ്. L ന്റെ വില 1 mm കൃത്യതയിൽ 20.0 cm ആയി അളന്നിരിക്കുന്നു. 100 ദോലനങ്ങൾക്കാവശ്യമായ സമയം 90s ആയി, 1s വിഭേദന പരിധിയുള്ള വാച്ചുപയോഗിച്ചു നിർണയിച്ചിരിക്കുന്നു. g യുടെ നിർണയത്തിലെ കൃത്യത കണക്കാക്കുക.

$g = 4\pi^2 L/T^2$

$$T = \frac{t}{n},\ \Delta T = \frac{\Delta t}{n}.$$

അതുകൊണ്ട്, $\dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{\Delta T}{T}$

ഇവിടെ L ലും t യിലും ഉണ്ടാകുന്നത് കൊച്ചളവ് പിശക് (Least count errors) മാത്രമാണ്. അതിനാൽ

$(\Delta g/g) = (\Delta L/L) + 2(\Delta T/T)$

$$= \frac{0.1}{20.0} + 2\left(\frac{1}{90}\right) = 0.027$$

g യിലെ ശതമാനപ്പിശക്

$100\,(\Delta g/g) = 100(\Delta L/L) + 2 \times 100\,(\Delta T/T)$

$= 3\%$

2.7 സാർഥക അക്കങ്ങൾ (Significant figures)

എല്ലാ അളവുകളിലും പിശകുകൾ ഉണ്ടാവാം. അതിനാൽ ഒരു അളവിലെ സൂക്ഷ്മതകൂടി സൂചിപ്പിക്കത്തക്ക വിധമാണ് അളവുകൾ പ്രസ്താവിക്കേണ്ടത്. സാധാരണ, അളവുകൾ പ്രസ്താവിക്കാനുപയോഗിക്കുന്ന സംഖ്യയിൽ വിശ്വസനീയമായ എല്ലാ അക്കങ്ങളും അനിശ്ചിതത്വമുള്ള ആദ്യ അക്കവും ഉണ്ടാകും. വിശ്വസനീയമായ അക്കങ്ങളും അനിശ്ചിതത്വമുള്ള ആദ്യ അക്കവും സാർഥക അക്കങ്ങൾ എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ഒരു സിമ്പിൾ പെൻഡുലത്തിന്റെ ആവർത്തന കാലം 1.62s എന്നു പറയുമ്പോൾ, 1, 6 സെ എന്നീ അക്കങ്ങൾ വിശ്വസനീയവും നിശ്ചിതവുമാണ്. എന്നാൽ 2 എന്ന അക്കം അനിശ്ചിതമാണ്. അതായത് ഈ അളവിൽ 3 സാർഥക അക്കങ്ങളുണ്ട്. ഒരു വസ്തുവിന്റെ നീളം അളന്ന് 287.5 cm എന്നു പ്രസ്താവിക്കുമ്പോൾ അതിൽ 4 സാർഥക അക്കങ്ങളുണ്ട്. 2, 8, 7 എന്നീ അക്കങ്ങൾ നിശ്ചിതവും 5 അനിശ്ചിതവും ആകുന്നു. സാർഥക അക്കങ്ങളില്ലാത്ത അക്കങ്ങൾ അധികമായി ഉൾപ്പെടുത്തി അളവുകൾ പ്രസ്താവിക്കുന്നത് അളവിലെ സൂക്ഷ്മതയെക്കുറിച്ച് അബദ്ധധാരണകൾ ജനിപ്പിക്കും. അതിനാൽ ഇത് ഒഴിവാക്കേണ്ടതാണ്.

ഒരു അളവിലെ സാർഥക അക്കങ്ങൾ കണക്കാക്കാനുള്ള നിയമങ്ങൾ ഇനി പറയുന്നു. ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ ഇത് വിശദമാക്കാം. മുൻപ് സൂചിപ്പിച്ചതുപോലെ, ഒരു അളവിലെ സാർഥക അക്കങ്ങൾ അളവിലെ സൂക്ഷ്മതയെ കാണിക്കുന്നതിനാൽ ഇത് ഉപകരണത്തിന്റെ കൊച്ചളവിനെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. ഒരേ അളവ് വിവിധ യൂണിറ്റുകളിൽ പ്രകടിപ്പിച്ചാൽ അവയിലെ സാർഥക അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിൽ വ്യത്യാസം വരില്ല. ഈ പ്രസ്താവന താഴെ പറയുന്ന നിരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെ വ്യക്തമാക്കുന്നു.

(1) ഉദാഹരണമായി, 2.308 cm എന്ന നീളത്തിൽ നാല് സാർഥക അക്കങ്ങളുണ്ട്. പക്ഷേ, ഇതേ അളവ് മറ്റു യൂണിറ്റുകളിൽ 0.02308 m എന്നോ 23.08 mm എന്നോ 23080 μm എന്നോ എഴുതാം. ഈ എല്ലാ അളവുകളിലും നാല് സാർഥക അക്കങ്ങളാണുള്ളത് (2, 3,

0, 8 എന്നീ അക്കങ്ങൾ). അതായത് ദശാംശ ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം സാർഥക അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണം നിശ്ചയിക്കുമ്പോൾ പരിഗണിക്കേണ്ടതില്ല.

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽനിന്നു താഴെ പറയുന്ന നിയമങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാം.

- പൂജ്യമല്ലാത്ത എല്ലാ അക്കങ്ങളും സാർഥകമാണ്.
- പൂജ്യമല്ലാത്ത രണ്ട് അക്കങ്ങൾക്കിടയിൽ വരുന്ന പൂജ്യം സാർഥകമായിരിക്കും, ഇവിടെ ദശാംശ ബിന്ദു ഉണ്ടോ എന്നു പരിഗണിക്കേണ്ടതില്ല.
- ഒന്നിനേക്കാളും കുറഞ്ഞ സംഖ്യകളിൽ, ദശാംശ ബിന്ദുവിന് വലതുഭാഗത്തും, പൂജ്യമല്ലാത്ത ആദ്യ അക്കത്തിന് ഇടതുഭാഗത്തും വരുന്ന പൂജ്യമോ പൂജ്യങ്ങളോ സാർഥകമല്ല. 0.002308 എന്ന സംഖ്യയിൽ അടിവരയിട്ട പൂജ്യങ്ങൾ സാർഥകമല്ല.
- ദശാംശബിന്ദുവില്ലാത്ത ഒരു സംഖ്യയിലെ ഏറ്റവും വലതുഭാഗത്തുവരുന്ന പൂജ്യങ്ങൾ സാർഥകമല്ല. [അതിനാൽ 123 m, 12300 cm, 123000 mm എന്നീ അളവുകളിലെല്ലാം മൂന്ന് സാർഥക അക്കങ്ങൾ വീതമാണുള്ളത്.] എങ്കിലും താഴെ പറയുന്ന നിരീക്ഷണംകൂടി ശ്രദ്ധിക്കുക.
- ദശാംശബിന്ദുവുള്ള ഒരു സംഖ്യയിലെ ഏറ്റവും വലതുഭാഗത്തുവരുന്ന പൂജ്യങ്ങൾ സാർഥകമാണ്. [3.500, 0.06900 എന്നീ സംഖ്യകളിൽ നാല് സാർഥക അക്കങ്ങൾ വീതമുണ്ട്].

(2) ഏറ്റവും വലതുഭാഗത്തു വരുന്ന പൂജ്യങ്ങളിൽ ചില സംശയങ്ങൾ ഉണ്ടാകാം. ഒരു വസ്തുവിന്റെ നീളം 4.700 m എന്നു പ്രസ്താവിച്ചുവെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇതിലെ പൂജ്യങ്ങൾ അളവിലെ സൂക്ഷ്മതയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിനാൽ സാർഥകമാണ്. അങ്ങനെ അല്ലായിരുന്നുവെങ്കിൽ വസ്തുവിന്റെ നീളം 4.7 m ആണെന്ന് പ്രസ്താവിച്ചാൽ മതിയായിരുന്നു. ഈ നീളത്തിന്റെ യൂണിറ്റുകൾ വ്യത്യാസപ്പെടുത്തി എന്ന് കരുതുക.

4.700 m= 470.0 cm = 4700 mm = 0.004700 km

4700 mm ഒഴികെ

ഈ എല്ലാ അളവുകളിലും 4 സാർഥക അക്കങ്ങൾ ഉണ്ട്. 4700 mm എന്ന അളവിൽ രണ്ട് സാർഥക അക്കങ്ങൾ മാത്രമാണുള്ളത്.

(3) സാർഥക അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണം തീരുമാനിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ഇത്തരം അവ്യക്തതകൾ ഒഴിവാക്കാൻ, ഏറ്റവും യോജ്യമായ മാർഗം അളവുകളെ ശാസ്ത്രീയ പ്രതീകങ്ങൾ (പത്തിന്റെ പവർ ആയി) ഉപയോഗിച്ച് എഴുതുക എന്നതാണ്. ഈ രീതിയിൽ ഏതൊരു സംഖ്യയെയും $a \times 10^b$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാം. ഇവിടെ a എന്നത് 1നും 10 നും ഇടയിലുള്ള ഏതൊരു സംഖ്യയുമാകാം. b എന്നത് 10 ന്റെ പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ ആയ പവറാണ്. സംഖ്യയെക്കുറിച്ച് ഏകദേശധാരണ ലഭിക്കാൻ, $a \le 5$ ആയാൽ a=1 എന്നും $5 < a \le 10$ ആയാൽ a = 10 എന്നും കരുതുന്നു. അപ്പോൾ അളവിനെ 10^b എന്ന രൂപത്തിലെഴുതാം. ഇവിടെ പത്തിന്റെ പവറായ b ആ ഭൗതിക അളവിന്റെ പരിമാണഘാതം (order of magnitude) എന്നറിയപ്പെടുന്നു. അളവിന്റെ ഒരു ഏകദേശധാരണമാത്രം മതിയാകുന്ന അവസരങ്ങളിൽ അളവിന്റെ പരിമാണഘാതം 10^b ആണെന്ന് പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി, ഭൂമിയുടെ വ്യാസം (1.28×10^7 m) 10^7 m ന്റെ ഓർഡറിലും പരിമാണഘാതം 7 ഉം ആണ്. ഹൈഡ്രജൻ ആറ്റത്തിന്റെ വ്യാസം (1.06×10^{-10} m) 10^{-10} m ന്റെ പരിമാണഘാതം 10 മാണ്. അതായത്, ഭൂമിയുടെ വ്യാസം ഹൈഡ്രജൻ ആറ്റത്തിന്റെ വ്യാസത്തേക്കാൾ 17 പരിമാണഘാതം വലുതാണ്.

സാധാരണ ആദ്യ അക്കത്തിനു ശേഷമാണ് ദശാംശ ബിന്ദു എഴുതാറ്. ഇതിലൂടെ മുകളിൽ (a) വിഭാഗത്തിൽ ഉടലെടുത്ത സംശയം ദൂരീകരിക്കാം.

4.700 m = 4.700×10^2 cm
= 4.700×10^3 mm = 4.700×10^{-3} km

സാർഥക അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണം നിശ്ചയിക്കുമ്പോൾ പത്തിന്റെ പവറായി വരുന്ന സംഖ്യ അപ്രസക്തമാണ്. എങ്കിലും, ശാസ്ത്രീയമായ എഴുത്തു രീതിയാണ് (Scientific notation) അടിസ്ഥാനസംഖ്യയിൽ വരുന്ന പൂജ്യങ്ങൾ സാർഥകമാണ്. മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ എല്ലാ അളവുകളിലും നാല് സാർഥക അക്കങ്ങൾ വീതമുണ്ട്.

ഇപ്രകാരം സയന്റിഫിക് നൊട്ടേഷനിൽ, അടിസ്ഥാന സംഖ്യയിലെ ഏറ്റവും വലതുഭാഗത്തെ പൂജ്യങ്ങളെക്കുറിച്ച് ഒരു സംശയവും ജനിക്കുന്നില്ല. അവ എല്ലായ്പ്പോഴും സാർഥകമായിരിക്കും.

(4) സയന്റിഫിക് നൊട്ടേഷനാണ് അളവുകൾ പ്രസ്താവിക്കുന്നതിന് ഏറ്റവും അനുയോജ്യം. പക്ഷേ, ഇത് പിന്തുടരുന്നില്ലെങ്കിൽ മുൻ ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്നു ലഭിച്ച നിയമങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

- ദശാംശബിന്ദുവില്ലാത്ത ഒന്നിനേക്കാളും കൂടിയ സംഖ്യകളിൽ, ഏറ്റവും വലതുഭാഗത്തു വരുന്ന പൂജ്യങ്ങൾ സാർഥകമല്ല.
- ദശാംശബിന്ദുവുള്ള സംഖ്യകളിൽ, ഏറ്റവും വലതുഭാഗത്തു വരുന്ന പൂജ്യങ്ങൾ സാർഥകമാണ്.

(5) ഒന്നിനേക്കാൾ ചെറിയ സംഖ്യകളിൽ, ദശാംശ ബിന്ദുവിന്റെ ഇടതുഭാഗത്തു സൗകര്യാർഥമെഴുതുന്ന പൂജ്യം (ഉദാഹരണമായി 0.1250) ഒരിക്കലും സാർഥകമല്ല. പക്ഷേ, അത്തരം സംഖ്യകളിൽ ഏറ്റവും അവസാനം വരുന്ന പൂജ്യങ്ങൾ സാർഥകമാണ്.

(6) അളവുകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കാത്ത, ഗുണിക്കാനോ ഹരിക്കാനോ ഉപയോഗിക്കുന്ന കൃത്യ സംഖ്യകൾക്ക് അനന്തമായ എണ്ണം സാർഥക അക്കങ്ങളുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന്, $r = \frac{d}{2}$,$s = 2\pi r$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങളിൽ 2 എന്നത് കൃത്യമായ സംഖ്യയാണ്. ഇതിനെ 2.0, 2.00, 2.0000 എന്നിങ്ങനെ ആവശ്യാർഥമെഴുതാം. അതുപോലെ $T = \frac{t}{n}$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ n ഒരു കൃത്യസംഖ്യ ആകുന്നു.

2.7.1 സാർഥക അക്കങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ഗണിതക്രിയാനിയമങ്ങൾ (Rules for arithmetic operations with significant figures)

ഏകദേശ അളവുകൾ (പരിമിതമായ എണ്ണം സാർഥക അക്കങ്ങളുള്ള അളവുകൾ) ഉപയോഗിച്ചു ക്രിയചെയ്തു ലഭിക്കുന്ന ഫലം തീർച്ചയായും അനിശ്ചിതത്വം പ്രകടിപ്പിക്കണം. ഈ ഗണിത ഫലത്തിന് അത് കണക്കാക്കാനുപയോഗിച്ച അളവുകളേക്കാൾ കൂടുതൽ കൃത്യത പ്രദർശിപ്പിക്കാനാവില്ല. കൃത്യമായി പറഞ്ഞാൽ, ഒരു ഫലത്തിൽ അത് ലഭിക്കാനുപയോഗിച്ച അളവുകളിൽ ഉള്ളതിനേക്കാൾ കൂടുതൽ എണ്ണം സാർഥക അക്കങ്ങൾ ഉണ്ടാകാൻ പാടില്ല. ഒരു വസ്തുവിന്റെ മാസ് 4.237 g (4 സാർഥക അക്കങ്ങൾ) എന്നും വ്യാപ്തം 2.52 cm^3 (3 സാർഥക അക്കങ്ങൾ) എന്നും നിർണയിച്ചു എന്നു കരുതുക. സാധാരണ ഗണിതക്രിയ വഴി ലഭിക്കുന്ന വസ്തുവിന്റെ സാന്ദ്രത, 11 ദശാംശസ്ഥാനങ്ങളിൽ 1.68804780876 $g cm^{-3}$ എന്നായിരിക്കും. സാന്ദ്രത കണക്കാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച അളവുകളിലെ സൂക്ഷ്മത വളരെ കുറവായിരിക്കുമ്പോൾ, സാന്ദ്രത ഇത്രയും ഉയർന്ന സൂക്ഷ്മതയിൽ പ്രസ്താവിക്കുന്നത് അപ്രസക്തവും യുക്തിരഹിതവുമാണ്. ഒരു ഗണിതക്രിയാ ഫലത്തിലെ സൂക്ഷ്മതയും ക്രിയകൾക്കുപയോഗിച്ച അളവുകളിലെ സൂക്ഷ്മതയും യോജിക്കുന്നതിനായി താഴെ പറയുന്ന നിയമങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

(1)ഗുണനത്തിനും ഹരണത്തിനും ഉപയോഗിച്ച അളവുകളിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ എണ്ണം സാർഥക അക്കങ്ങൾ എത്രയാണോ, അത്രയും എണ്ണം സാർഥക അക്കങ്ങളേ അന്തിമഫലത്തിൽ ഉണ്ടാകാവൂ.

അതായത്, മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ സാന്ദ്രത മൂന്ന് സാർഥക അക്കങ്ങളിൽ പ്രസ്താവിക്കണം.

$$\text{സാന്ദ്രത} = \frac{4.237\,g}{2.51\ cm^3} = 1.69\ g\ cm^{-3}$$

സമാനമായി, പ്രകാശപ്രവേഗം $3.00\times10^8 ms^{-1}$ (3 സാർഥക അക്കങ്ങൾ) എന്നും ഒരു വർഷത്തിൽ (1 വർഷം = 365.25ദിവസം) $3.1557 x 10^7$ s (5 സാർഥക അക്കങ്ങൾ) ഉണ്ടെന്നും തന്നിരുന്നാൽ ഒരു പ്രകാശ വർഷം $9.47 x 10^{15}$ m (3 സാർഥക അക്കങ്ങൾ) ആയിരിക്കും.

(2)സങ്കലനത്തിനും വ്യവകലനത്തിനും ഉപയോഗിച്ച അളവുകളിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ എണ്ണം ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾ എത്രയാണോ, അത്രയും എണ്ണം ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങളേ അന്തിമ ഫലത്തിലുണ്ടാകാവൂ.

ഉദാഹരണമായി, 436.32 g, 227.2 g, 0.301 g എന്നീ അളവുകളുടെ കേവല ഗണിതപരമായ തുക 663.821g ആകുന്നു. പക്ഷേ, ഏറ്റവും കൃത്യത കുറഞ്ഞ അളവിൽ (227.2 g) ഒരു ദശാംശസ്ഥാനമേ ഉള്ളൂ. അതിനാൽ അന്തിമഫലം 663.8 g എന്ന് റൗണ്ട് ഓഫ് ചെയ്യേണ്ടതുണ്ട്.

ഇതിനു സമാനമായി 0.307m, 0.304m എന്നീ നീളങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം 0.003 m ആണ്.

$0.307\ m - 0.304\ m = 0.003\ m = 3 \times 10^{-3}\ m.$

നിയമം (1) ഗുണനത്തിനും ഹരണത്തിനും ബാധകമാണ് എന്ന് ഓർക്കുക. മുകളിൽ പറഞ്ഞ സങ്കലനത്തിന്റെ ഉദാഹരണത്തിൽ അന്തിമഫലം 664 g എന്നും വ്യവകലനത്തിന്റെ ഉദാഹരണത്തിൽ അന്തിമഫലം $3.00 x 10^{-3}$m എന്നുമെഴുതുമ്പോൾ അവ അളവിലെ സൂക്ഷ്മത എന്ന ആശയം ഉചിതമായി വഹിക്കുന്നില്ല. സങ്കലനത്തിനും വ്യവകലനത്തിനും ഈ നിയമം ദശാംശസ്ഥാനങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ് എന്നും ഓർക്കുക.

2.7.2 അനിശ്ചിത അക്കങ്ങൾ ക്രമീകരിക്കുന്ന വിധം (Rounding off the uncertain digits)

ഏകദേശ അളവുകളുടെ ക്രിയകളിലൂടെ ലഭിക്കുന്ന അന്തിമഫലത്തിൽ ഒന്നിലധികം അനിശ്ചിത അക്കങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ അവ ക്രമീകരിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഉചിതമായ എണ്ണം സാർഥക അക്കങ്ങളിലേക്ക് റൗണ്ട് ഓഫ് ചെയ്യാനുള്ള നിയമങ്ങൾ വളരെ വ്യക്തമായി അറിഞ്ഞിരിക്കണം. 2.746 എന്ന സംഖ്യ മൂന്ന് സാർഥക അക്കങ്ങളി

ലേക്ക് ക്രമീകരിക്കുമ്പോൾ 2.75 എന്നും 2.743 എന്നത് 2.74 എന്നും മാറുന്നു. ഉപേക്ഷിക്കേണ്ട അപ്രധാനമായ അക്കം (ഉദാഹരണത്തിൽ അടി വരയിട്ട അക്കം) 5ൽ കൂടുതലാണെങ്കിൽ, അതിന് മുൻപിലുള്ള അക്കം ഒന്ന് കൂട്ടുകയും ഉപേക്ഷിക്കേണ്ട അക്കം 5ൽ കുറവാണെങ്കിൽ മുൻപിലുള്ള അക്കം വ്യത്യാസപ്പെടുത്താതിരിക്കുകയും ചെയ്യണം. 2.745 ലേതു പോലെ ഉപേക്ഷിക്കേണ്ട അപ്രധാനമായ അക്കം 5 ആണെങ്കിൽ എന്താണ് ചെയ്യേണ്ടത്? അഞ്ച് എന്ന അക്കം ഉപേക്ഷിക്കുമ്പോൾ, അഞ്ചിന് മുൻപിലുള്ള അക്കം ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ അത് മാറ്റമില്ലാതെനിലനിർത്തുകയും ഒറ്റസംഖ്യയാണെങ്കിൽ ഒന്ന് കൂട്ടുകയും ചെയ്യണം. 2.745 മൂന്ന് സാർഥക അക്കങ്ങളിലേക്ക് ക്രമീകരിക്കുമ്പോൾ 2.74 എന്നായി മാറുന്നു. എന്നാൽ 2.735 മൂന്ന് സാർഥക അക്കങ്ങളിലേക്ക് റൗണ്ട്ഓഫ് ചെയ്യുമ്പോൾ 2.74 എന്നും മാറുന്നു. അഞ്ചിനു മുൻപിലുള്ള അക്കം ഒറ്റ സംഖ്യയായതിനാലാണ് ഇത്.

അനവധി ഘട്ടങ്ങളുള്ള ഗണിതക്രിയകളിൽ ഇടക്കുള്ള ക്രിയകളിലെല്ലാം ആവശ്യമുള്ള സാർഥക അക്കങ്ങളേക്കാൾ ഒന്ന് അധികമായി നിലനിർത്തുകയും അന്തിമ ഫലം ആവശ്യാനുസരണം ക്രമീകരിക്കാം. പ്രകാശ പ്രവേഗമായ 2.99792458×10^8 m/s ലേതു പോലെ അനവധി സാർഥക അക്കങ്ങളുള്ള സംഖ്യകൾ 3×10^8 m/s എന്നു ക്രിയകളിൽ ക്രമീകരിക്കുന്നു. $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, എന്ന സമവാക്യത്തിലെ 2 π പോലെയുള്ള കൃത്യസംഖ്യകളിൽ അനന്തമായ എണ്ണം സാർഥക അക്കങ്ങളുണ്ട്. πയുടെ മൂല്യത്തിലും അനേകം സാർഥക അക്കങ്ങളുണ്ട് (π = 3.1415926), പരിമിതമായ എണ്ണം സാർഥക അക്കങ്ങളിൽ π യുടെ മൂല്യം 3.142 എന്നോ 3.14 എന്നോ അവസരത്തിനനുസരിച്ച് ഉപയോഗിക്കാം.

> ▶ ഉദാഹരണം 2.13: ഒരു ക്യൂബിന്റെ ഓരോ വശത്തിന്റെയും നീളം 7.203m ആണെന്ന് അളന്നിരിക്കുന്നു. ക്യൂബിന്റെ ആകെ പരപ്പളവും ഉള്ളളവും അനുയോജ്യമായ സാർഥക അക്കങ്ങളിൽ കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം

അളന്നിരിക്കുന്ന നീളത്തിൽ നാലു സാർഥക അക്കങ്ങളുണ്ട്. കണക്കാക്കപ്പെടുന്ന പരപ്പളവും ഉള്ളളവും നാല് സാർഥക അക്കങ്ങളിലേക്ക് ക്രമീകരിക്കുകയും ചെയ്യണം.

ക്യൂബിന്റെ പരപ്പളവ് $= 6(7.203)^2\ m^2$

$= 311.299254\ m^2$

$= 311.3\ m^2$

ക്യൂബിന്റെ വ്യാപ്തം $= (7.203)^3\ m^3$

$= 373.714754\ m^3$

$= 373.7\ m^3$

> ▶ ഉദാഹരണം 2.14: 5.74 g മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഉള്ളളവ് 1.2 cm^3 ആണ്. സാർഥക അക്കങ്ങൾ എന്ന ആശയത്തിന്റെ വെളിച്ചത്തിൽ വസ്തുവിന്റെ സാന്ദ്രത കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം : മാസിന്റെ അളവിൽ 3 സാർഥക അക്കങ്ങളും ഉള്ളളവിൽ 2 സാർഥക അക്കങ്ങളുമാണുള്ളത്. അതിനാൽ സാന്ദ്രത രണ്ടു സാർഥക അക്കങ്ങളിലേക്കു ക്രമീകരിക്കുകയും ചെയ്യണം.

$$\text{സാന്ദ്രത} = \frac{5.74}{1.2}\ g\ cm^{-3}$$

$$= 4.8\ g\ cm^{-3}.$$ ◀

2.7.3 ഗണിതക്രിയാഫലത്തിലെ അനിശ്ചിതത്വം നിർണയിക്കുന്നതിനുള്ള നിയമങ്ങൾ (Rules for determining the uncertainty in the results of arithmetic calculations)

ഗണിതക്രിയകളിലെ ഒരു സംഖ്യയിലോ അളവിലോ ഉള്ള അനിശ്ചിതത്വം നിർണയിക്കുന്നതിനുള്ള നിയമങ്ങൾ താഴെ പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ മനസ്സിലാക്കാം.

മീറ്റർ സ്കെയിലുപയോഗിച്ച് ഒരു ദീർഘ ചതുരാകൃതിയിലുള്ള തകിടിന്റെ നീളവും വീതിയും യഥാക്രമം 16.2 cm, 10.1 cm എന്ന് അളന്നിരിക്കുന്നു. ഓരോ അളവിലും 3 സാർഥക അക്കങ്ങളുണ്ട്. ഇതിനർഥം വസ്തുവിന്റെ നീളം (l)

$$l = 16.2 \pm 0.1\ cm$$

$$= 16.2\ cm \pm 0.6\ \%.$$

എന്നെഴുതാമെന്നാണ്.

ഇതിനു സമാനമായി വസ്തുവിന്റെ വീതി (b)

$$b = 10.1 \pm 0.1\ cm$$

$$= 10.1\ cm \pm 1\ \%$$

എന്നുമെഴുതാം.

രണ്ടോ അതിലധികമോ അളവുകളുടെ ഗുണനഫലത്തിലുണ്ടാകുന്ന പിശക്, പിശകുകളുടെ സംയോജന നിയമമനുസരിച്ച്

$lb = 163.62\ cm^2 \pm 1.6\%$

$= 163.62 \pm 2.6\ cm^2$

ഇതിൽ നിന്നു ലഭിക്കുന്ന അന്തിമഫലം

$lb = 164 \pm 3\ cm^2$

$3cm^2$ ആണ് ദീർഘചതുര തകിടിന്റെ പരപ്പളവിലെ അനിശ്ചിതത്വം അഥവാ പിശക്.

(2) ഒരു കൂട്ടം പരീക്ഷണവിവരങ്ങളിൽ n സാർഥക അക്കങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ, അവ സംയോജിപ്പിക്കുന്നതിലൂടെ ലഭിക്കുന്ന അന്തിമഫലത്തിലും n സാർഥക അക്കങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കണം.

പൊതുനിയമം ഇതാണെങ്കിലും രണ്ട് അളവുകൾ വ്യവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ സാർഥക അക്കങ്ങൾ കുറയാം. ഉദാഹരണമായി 12.9 g – 7.06 g എന്നത് പരിഗണിക്കുക. രണ്ട് അളവുകളിലും 3 സാർഥക അക്കങ്ങളുണ്ട്. എന്നാൽ ഇവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 5.84 g എന്നെഴുതാൻ കഴിയില്ല, 5.8 g എന്നേ എഴുതാൻ കഴിയൂ. (സാർഥക അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിനുപരിയായി ദശാംശസ്ഥാനങ്ങളുടെ എണ്ണമാണ് സങ്കലനത്തിലും വ്യവകലനത്തിലും പരിഗണിക്കുന്നത്).

(3) ഒരു സംഖ്യയിലെ ആപേക്ഷികപിശക് അതിലെ സാർഥക അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ മാത്രമല്ല, ആ സംഖ്യയേയും ആശ്രയിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, 1.02 g എന്ന മാസ് നിർണയിച്ചിരിക്കുന്നതിലെ കൃത്യത ± 0.01 g ആണ്. 9.89 g എന്ന അളവും വളരെ കൃത്യമാണ്.

1.02g ലെ ആപേക്ഷികപിശക്

$= (\pm 0.01/1.02) \times 100\ \%$
$= \pm 1\%$

സമാനമായി 9.89g ലെ ആപേക്ഷികപിശക്

$= (\pm 0.01/9.89) \times 100\ \%$
$= \pm 0.1\ \%$

വിവിധ ഘട്ടങ്ങളുള്ള ഗണിതക്രിയകളിൽ ഇടക്ക് ലഭിക്കുന്ന ഫലങ്ങളിൽ ഏറ്റവും കൃത്യത കുറഞ്ഞ അളവിലുള്ളതിനേക്കാൾ ഒരു സാർഥക അക്കം കൂടുതലുണ്ടായിരിക്കണം. ഇല്ലെങ്കിൽ റൗണ്ടിങ് പിശക് വർധിക്കും. ഉദാഹരണമായി, 9.58 ന്റെ (3 സാർഥക അക്കങ്ങൾ) വ്യുൽക്രമം 3 സാർഥക അക്കങ്ങളിൽ കണക്കാക്കുമ്പോൾ 0.104 എന്നു ലഭിക്കുന്നു. എന്നാൽ 0.104 ന്റെ വ്യുൽക്രമം 3 സാർഥക അക്കങ്ങളിൽ കണക്കാക്കുമ്പോൾ 9.62 എന്നാണു ലഭിക്കുന്നത്.

എന്നാൽ $\frac{1}{9.58} = 0.1044$ എന്ന് എഴുതിയിട്ടാണ് വ്യുൽക്രമം കണ്ട് 3 സാർത്ഥക അക്കങ്ങൾക്ക് കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നതെങ്കിൽ 9.58 എന്ന സംഖ്യ തന്നെ കിട്ടുമായിരുന്നു.

സംഖ്യകളിലെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ സാർഥക അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണത്തേക്കാൾ ഒരു അക്കം ഇടക്കുള്ള ഫലങ്ങളിൽ കൂടുതൽ ഉണ്ടെങ്കിൽ വിവിധ പടികളുള്ള ഗണിതക്രിയകളിലെ പിശക് കുറക്കാനാവും എന്ന ആശയം ഈ ഉദാഹരണം സാധൂകരിക്കുന്നു.

2.8 ഭൗതിക അളവുകളുടെ ഡൈമെൻഷനുകൾ (Dimensions of Physical Quantities)

ഭൗതിക അളവുകളുടെ സ്വഭാവം വിവരിക്കാൻ അവയുടെ ഡൈമെൻഷനുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. എല്ലാ അളവുകളെയും അവയുടെ യൂണി റ്റുകളെയും അടിസ്ഥാന അളവുകളുടെയും യൂണിറ്റുകളുടെയും സംയോഗമായി എഴുതാവുന്നതാണ്. ഈ അടിസ്ഥാന അളവുകളെ ഭൗതികലോകത്തിലെ ഏഴു ഡൈമെൻഷനുകൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഇവയെ സ്ക്വയർ ബ്രാക്കറ്റുകൾ [ ] ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. നീളത്തിന്റെ ഡൈമെൻഷൻ [L], മാസ് [M], സമയം [T], വൈദ്യുതതീവ്രത [A], തെർമോഡയനാമിക് താപനില [K], പ്രകാശതീവ്രത [cd] ദ്രവ്യത്തിന്റെ അളവ് [mol] എന്നിങ്ങനെ ഒരു ഭൗതിക അളവിന്റെ ഡയമെൻഷൻ എന്നത് ആ അളവിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ അടിസ്ഥാന അളവുകൾ ഉയർത്തപ്പെടേണ്ട പവറുകളാണ്. സ്ക്വയർ ബ്രാക്കറ്റിനുള്ളിൽ ഒരു ഭൗതിക അളവ് എഴുതുമ്പോൾ ആ അളവിന്റെ ഡൈമെൻഷനുകളെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ബലതന്ത്രത്തിലെ എല്ലാ ഭൗതിക അളവുകളും [M], [L], [T] എന്നീ ഡൈമെൻഷനുകളുപയോഗിച്ച് എഴുതാൻ കഴിയും. ഉദാഹരണമായി, ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഉള്ളളവ് അതിന്റെ നീളം, വീതി, കനം അഥവാ മൂന്ന് നീളങ്ങളിലൂടെ പ്രകടിപ്പിക്കാനാകും. അതിനാൽ ഉള്ളളവിന്റെ ഡൈമെൻഷൻ $[L]\times[L]\times[L] = [L^3]$ ആകുന്നു. ഉള്ളളവ് മാസിനെയോ സമയത്തെയോ ആശ്രയിക്കാത്തതിനാൽ ഉള്ളളവിന് മാസിന്റെ പൂജ്യം ഡൈമെൻഷനും, സമയത്തിന്റെ പൂജ്യം ഡൈമെൻഷനും, നീളത്തിന്റെ മൂന്നു ഡൈമെൻഷനും ഉണ്ട്. അതുപോലെ ബലം മാസിന്റെയും ത്വരണത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമായതിനാൽ

ബലം = മാസ് x ത്വരണം

ബലം = മാസ് x നീളം/(സമയം)^2

ബലത്തിന്റെ ഡൈമെൻഷൻ $[M \times L/T^2 = MLT^{-2}]$ ആകുന്നു. ബലത്തിന് മാസിന്റെ ഒരു ഡൈമെൻഷനും സമയത്തിന്റെ -2 ഡൈമൻഷനും നീളത്തിന്റെ ഒരു ഡൈമെൻഷനുമുണ്ട്. മറ്റ് എല്ലാ അടിസ്ഥാന അളവുകളിലും ബലത്തിന് പൂജ്യം ഡൈമെൻഷനുകൾ ആണുള്ളത്.

ഇത്തരം പ്രതിപാദനത്തിൽ അളവുകളുടെ പരിമാണം പരിഗണിക്കപ്പെടുന്നില്ല. ഭൗതിക അളവ് ഏതു തരത്തിൽ ഉള്ളതാണെന്നു മാത്രമേ സൂചിപ്പിക്കുന്നുള്ളൂ. അതിനാൽ പ്രവേഗവ്യത്യാസം, ആദ്യപ്രവേഗം, അന്ത്യ പ്രവേഗം, ശരാശരി പ്രവേഗം, വേഗം എന്നിവയെല്ലാം ഈ സന്ദർഭത്തിൽ സമാനമാണ്. ഈ എല്ലാ അളവുകളുടെയും ഡൈമെൻഷനുകൾ $[M^0LT^{-1}]$ എന്നാണ്.

2.9 ഡൈമെൻഷണൽ സൂത്രവാക്യവും സമവാക്യവും (Dimensional formulae and Dimensional Equations)

അടിസ്ഥാന അളവുകളിലൂടെ ഒരു ഭൗതിക അളവിനെ പ്രകടിപ്പിക്കുന്ന രീതിയാണ് അതിന്റെ ഡൈമെൻഷണൽ ഫോർമുല. ഉദാഹരണമായി ഉള്ളളവിന്റെ ഡൈമെൻഷനൽ ഫോർമുല $[L^3]$ യും വേഗം അഥവാ പ്രവേഗത്തിന്റേത് $[LT^{-1}]$ യും ത്വരണത്തിന്റേതു $[LT^{-2}]$ യും സാന്ദ്രതയുടേത് $[M L^{-3}]$ യുമാണ്.

ഒരു ഭൗതിക അളവ് അതിന്റെ ഡൈമെൻഷനൽ സൂത്രവാക്യവുമായി തുലനം ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന സമവാക്യം ആ ഭൗതികഅളവിന്റെ ഡൈമെൻഷനൽ സമവാക്യം എന്നറിയപ്പെടുന്നു. അതായത് ഡൈമെൻഷനൽ സമവാക്യങ്ങൾ ഒരു ഭൗതിക അളവിനെ അടിസ്ഥാന അളവുകളിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി വ്യാപ്തം, വേഗം ബലം, സാന്ദ്രത എന്നിവയുടെ ഡൈമെൻഷണൽ സമവാക്യങ്ങൾ താഴെ പറയുന്നു.

$$[V] = [M^0\, L^3\, T^0]$$
$$[v] = [M^0\, L\, T^{-1}]$$
$$[F] = [M\, L\, T^{-2}]$$
$$[\rho] = [M\, L^{-3}\, T^0]$$

ഭൗതിക അളവുകളുടെ പരസ്പരബന്ധത്തിൽ നിന്നു ഡൈമെൻഷണൽ സമവാക്യം രൂപീകരിക്കാം. സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന വിവിധങ്ങളായ ഭൗതിക അളവുകളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ അനുബന്ധം 9 ൽ നൽകിയിട്ടുണ്ട്.

2.10 ഡൈമെൻഷണൽ വിശകലനവും അതിന്റെ ഉപയോഗവും (Dimensional analysis and its applications)

സമാന ഡൈമെൻഷനുള്ള അളവുകൾ തമ്മിലേ സങ്കലനം ചെയ്യാനും വ്യവകലനം ചെയ്യാനും സാധ്യമാകൂ. വസ്തുക്കളുടെ ഭൗതികസ്വഭാവം വിശദീകരിക്കുന്നതിൽ ഡൈമെൻഷനുകളുടെ തിരിച്ചറിവ് അതിപ്രധാനമാണ്. വിവിധ ഭൗതിക അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം രൂപീകരിക്കാനും അവയുടെ സാധുത പരിശോധിക്കാനും ഡൈമെൻഷനുകളെക്കുറിച്ചുള്ള ധാരണ അനിവാര്യമാണ്. രണ്ടോ അതിലധികമോ ഭൗതിക അളവുകളുടെ പരിമാണങ്ങൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ അവയുടെ യൂണിറ്റുകൾ സാധാരണ ബീജഗണിതപ്രതീകങ്ങൾ പോലെ പരിഗണിക്കണം. അംശത്തിലും ഛേദത്തിലും ഒരുപോലെയുള്ള യൂണിറ്റുകൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ അവ റദ്ദു ചെയ്യാം. ഇത് ഡൈമെൻഷനുകൾക്കും ബാധകമാണ്. ഒരു ഗണിത സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുഭാഗത്തുമുള്ള പ്രതീകങ്ങൾ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഭൗതിക അളവുകൾക്ക് ഒരേ ഡൈമെൻഷനുകൾ ആയിരിക്കണം.

2.10.1 ഒരു സമവാക്യത്തിന്റെ ഡൈമെൻഷണൽ സമാനത പരിശോധിക്കൽ (Checking the dimensional consistency of equations)

ഒരേ ഡൈമെൻഷനുള്ള അളവുകൾ തമ്മിലേ സങ്കലനം ചെയ്യാനും വ്യവകലനം ചെയ്യാനും വ്യവസ്ഥയുള്ളൂ. അതായത് സമാന ഭൗതികഅളവുകൾ തമ്മിലേ കൂട്ടാനോ കുറക്കാനോ കഴിയൂ. ഉദാഹരണത്തിന്, വേഗവും ബലവും തമ്മിൽ കൂട്ടാനോ, കുറക്കാനോ സാധ്യമല്ല. അല്ലെങ്കിൽ വൈദ്യുതപ്രവാഹതീവ്രത തെർമോഡയനാമിക് താപനിലയിൽനിന്നു കുറക്കാൻ കഴിയില്ല. ഈ ലളിതമായ തത്വം ഡൈമെൻഷണൽ ഏകാത്മകതാ തത്വം (Principle of homogenity of dimensions) എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ഒരു സമവാക്യം ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കാൻ ഈ തത്വം വളരെ പ്രയോജനകരമാണ്. ഒരു സമവാക്യത്തിൽ എല്ലാ പദങ്ങൾക്കും ഒരേ ഡൈമെൻഷൻ ഇല്ലെങ്കിൽ ആ സമവാക്യം തീർച്ചയായും തെറ്റായിരിക്കും. നമ്മൾ നീളത്തിന്റെ അഥവാ ദൂരത്തിന്റെ സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. നീളത്തിന്റെ ഗണിതസമവാക്യത്തിൽ വരുന്ന പ്രതീകങ്ങൾ എന്തുതന്നെയായാലും, ഓരോ പദത്തിന്റെയും ഡൈമെൻഷനുകൾ ലഘൂകരിക്കുമ്പോൾ അവ നീളത്തിന്റെ ഡൈമെൻഷനായി മാറണം. സമാനമായി വേഗത്തിന്റെ സമവാക്യത്തിൽ ഇരുഭാഗത്തെയും അളവുകളുടെ ഡൈമെൻഷനുകൾ ലഘൂകരിക്കുമ്പോൾ അത് $[LT^{-1}]$ എന്നാകണം.

ഒരു സമവാക്യം ശരിയാണോ എന്ന സംശയം വന്നാൽ സ്വാഭാവികമായും, ഡൈമെൻഷനുകളാണ് പ്രാഥമിക പരിശോധനോപാധിയായി ഉപയോഗിക്കുന്നത്. എങ്കിലും ഡൈമെൻഷണൽ സമാനത ഒരു സമവാക്യം പൂർണമായും ശരിയാണ് എന്ന് ഉറപ്പുനൽകുന്നില്ല. ഡൈമെൻഷനുകൾ ഇല്ലാത്ത അളവുകളുടെയും ഫലനങ്ങളു

ടെയും വൈപുല്യം അനിശ്ചിതമായി തുടരുന്നു. ത്രികോണമിതീയ ഫലനങ്ങൾ, എക്സ്പോണൻഷ്യൽ ഫലനങ്ങൾ, ലോഗരിത ഫലനങ്ങൾ തുടങ്ങിയവയുടെ വാദങ്ങൾക്ക് ഡൈമെൻഷൻനുകൾ ഇല്ല. കേവലസംഖ്യ, സമാനമായ ഭൗതിക അളവുകളുടെ അംശബന്ധമായ കോൺ (നീളം/നീളം), അപവർത്തനാങ്കം (ശൂന്യതയിലെ പ്രകാശപ്രവേഗം/മാധ്യമത്തിലെ പ്രകാശപ്രവേഗം) തുടങ്ങിയവക്കും ഡൈമെൻഷനുകളില്ല.

താഴെ കൊടുത്ത സമവാക്യത്തിന്റെ ഡൈമെൻഷണൽ സാധുത അഥവാ സമാനത പരിശോധിക്കാം

$$x = x_0 + v_0 t + (1/2)\, a\, t^2$$

ഇവിടെ x എന്നത് t=0 മുതൽ t=t വരെയുള്ള സമയ ഇടവേളയിൽ വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരവും x_0 വസ്തുവിന്റെ ആദ്യ സ്ഥാനവും v_0 വസ്തുവിന്റെ ആദ്യപ്രവേഗവും a സഞ്ചാര ദിശയിലുള്ള സമാനത്വരണവുമാകുന്നു.

ഓരോ പദത്തിന്റെയും ഡൈമെൻഷനുകൾ പരിശോധിച്ചാൽ

$$[x] = [L]$$
$$[x_0] = [L]$$
$$[v_0 t] = [L\,T^{-1}]\,[T] = [L]$$
$$[(1/2)\, a\, t^2] = [L\,T^{-2}]\,[T^2] = [L]$$

സമവാക്യത്തിലെ ഇരുഭാഗത്തുമുള്ള എല്ലാ പദങ്ങളുടെയും ഡൈമെൻഷനുകൾ ഒന്നുതന്നെ ആയതിനാൽ (നീളത്തിന്റെ ഡൈമെൻഷൻ) തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം ഡൈമെൻഷനൽ തത്വപ്രകാരം ശരിയാണ്.

ഡൈമെൻഷനുകളുടെ സാധുതാ പരിശോധനയിൽ നിന്നു ലഭിക്കുന്ന ഫലത്തിന് യൂണിറ്റുകളുടെ സാധുതാ പരിശോധനയിൽനിന്നു ലഭിക്കുന്നതിനേക്കാൾ ഒട്ടും തന്നെ മേന്മ കൂടുതലോ കുറവോ ഇല്ല. പക്ഷേ, സാധുത പരിശോധനക്കായി ഡൈമെൻഷനുകൾ ഉപയോഗിച്ചാൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു പ്രത്യേക പദ്ധതിയിലെ യൂണിറ്റ് തന്നെ ഉപയോഗിക്കണമെന്നില്ല എന്ന നേട്ടമുണ്ട്. കൂടാതെ യൂണിറ്റുകളെ അവയുടെ ഗുണിതങ്ങളിലേക്കു പരിവർത്തനം ചെയ്യേണ്ടതുമില്ല. ഒരു സമവാക്യം ഡൈമെൻഷനൽ സമാനതാ പരിശോധനയിൽ പരാജയപ്പെട്ടാൽ ആ സമവാക്യം തെറ്റാണ് എന്ന് ഉറപ്പിക്കാം. എന്നാൽ വിജയിച്ചതുകൊണ്ടു മാത്രം ആ സമവാക്യം ശരിയാണ് എന്ന് പൂർണമായും ഉറപ്പിക്കാൻ കഴിയില്ല. അതായത് ഡൈമെൻഷൻ പ്രകാരം ശരിയാണെന്നു തെളിഞ്ഞാൽ സമവാക്യം പൂർണമായും ശരിയാവണമെന്നില്ല. എന്നാൽ ഡൈമെൻഷൻ പ്രകാരം സമവാക്യം തെറ്റാണെന്നു തെളിഞ്ഞാൽ ആ സമവാക്യം എല്ലാ അർഥത്തിലും തെറ്റായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 2.15 : $\frac{1}{2} mv^2 = mgh$ എന്ന സമവാക്യം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ m വസ്തുവിന്റെ മാസ്, v പ്രവേഗം, g ഭൂഗുരുത്വത്വരണം, h ഉയരം എന്നിവയാണ്. ഈ സമവാക്യം ഡൈമെൻഷൻ പ്രകാരം ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

ഉത്തരം: ഇടതുവശത്തെ പദത്തിന്റെ ഡൈമെൻഷൻ

$$[M]\,[L\,T^{-1}]^2 = [M]\,[L^2\,T^{-2}] = [M\,L^2\,T^{-2}]$$

ഇടതുവശത്തെ പദത്തിന്റെ ഡൈമെൻഷൻ

$$[M][L\,T^{-2}]\,[L] = [M][L^2\,T^{-2}] = [M\,L^2\,T^{-2}]$$

ഉദാഹരണം 2.16: ഊർജത്തിന്റെ SI യൂണിറ്റ് $J = kgm^2s^{-2}$ വേഗത (v) യുടേത് ms^{-1} ത്വരണം (a) യുടേത് ms^{-1} എന്നിവയാണ്. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഐച്ഛികങ്ങളിൽ നിന്നു ഗതികോർജത്തിന്റെ സമവാക്യം ഡൈമെൻഷനൽ തത്വപ്രകാരം കണ്ടെത്തുക.

(a) $K = m^2 v^3$
(b) $K = (1/2)mv^2$
(c) $K = ma$
(d) $K = (3/16)mv^2$
(c) $K \quad (1/2)mv^2 + ma$

ഉത്തരം

ശരിയായ ഒരു സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുഭാഗത്തുമുള്ള എല്ലാ പദങ്ങൾക്കും ഒരേ ഡൈമെൻഷനുകൾ ആയിരിക്കും. കൂടാതെ ഒരേ ഡൈമെൻഷനുകളുള്ള അളവുകൾ തമ്മിലേ കൂട്ടാനോ കുറക്കാനോ കഴിയൂ.

(a) എന്ന ഐച്ഛികത്തിൽ വലതു ഭാഗത്തെ അളവിന്റെ ഡൈമെൻഷൻ $[M^2\,L^3\,T^{-3}]$ ആണ്.

(b) (d) എന്നീ ഐച്ഛികങ്ങളിൽ വലതുഭാഗത്തെ അളവിന്റെ ഡൈമെൻഷൻ $[ML^2\,T^{-2}]$ ആണ്.

(c) എന്ന ഐച്ഛികത്തിൽ വലതുഭാഗത്തെ അളവിന്റെ ഡൈമെൻഷൻ $[MLT^{-2}]$ ആണ്.

(c) എന്ന ഐച്ഛികത്തിൽ വലതുഭാഗത്ത് സങ്കലനം ചെയ്തിരിക്കുന്ന രണ്ട് അളവുകൾക്ക് വ്യത്യസ്ത ഡൈമെൻഷനുകളാണ്. അതിനാൽ വലതുഭാഗത്തിന് ശരിയായ ഡൈമെൻഷനില്ല.

ഗതികോർജത്തിന്റെ (K) ഡൈമെൻഷൻ $[ML^2T^{-2}]$ ആകുന്നു. അതിനാൽ (a), (c), (c) എന്നീ ഐച്ഛികങ്ങൾ തെറ്റാണ്. ഡൈമെൻഷൻ തത്വപ്രകാരം (b), (d) എന്നീ ഐച്ഛികങ്ങൾ ശരിയാണ്. ഇവയിൽ ശരിയായ സമവാക്യം ഏതാണ് എന്നത് ഡൈമെൻഷൻ വിശകലനത്തിലൂടെ കണ്ടെത്തുവാൻ കഴിയില്ല.

അതിനായി ഗതികോർജത്തിന്റെ നിർവചനം മനസ്സിലാക്കണം. (അധ്യായം 6 കാണുക). ഐച്ഛികം (b) ആണ് ഗതികോർജത്തിന്റെ ശരിയായ സമവാക്യം.

2.10.2 ഭൗതിക അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം രൂപീകരിക്കൽ (Deducing relation among the physical quantities)

ഭൗതിക അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടെത്താൻ ഡൈമെൻഷൻ മാർഗങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. ഇതിനായി ഒരു ഭൗതിക അളവ് മറ്റ് ഏതെല്ലാം അളവുകളെ ആശ്രയിക്കുന്നുവെന്ന് അറിഞ്ഞിരിക്കണം. പരമാവധി മൂന്നു ഭൗതിക അളവുകളേ ഉണ്ടാകാവൂ എന്നു മാത്രമല്ല അവ തമ്മിൽ ഗുണനഫല രൂപത്തിൽ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുകയും വേണം. നമുക്ക് ഒരു ഉദാഹരണം പരിഗണിക്കാം.

ഉദാഹരണം 2.17: ഗുരുത്വബലത്തിന്റെ ഫലമായി ദോലനം ചെയ്യുന്ന ഒരു സിമ്പിൾ പെൻഡുലം (ഒരു നൂലിന്റെ അഗ്രത്ത് ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്ന ബോബ്) പരിഗണിക്കുക. പെൻഡുലത്തിന്റെ ആവർത്തനകാലം, അതിന്റെ നീളത്തെയും (l) ബോബിന്റെ മാസിനെയും (m) ഭൂഗുരുത്വത്വരണത്തെയും (g) ആശ്രയിച്ചിരുന്നാൽ ഡൈമെൻഷനൽ മാർഗം ഉപയോഗിച്ച് ആവർത്തനകാലത്തിന്റെ സമവാക്യം രൂപപ്പെടുത്തുക.

ഉത്തരം

ആവർത്തനകാലം ആശ്രയിക്കുന്ന അളവുകളായ l,m,g എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലമായി ആവർത്തനകാലത്തെ പ്രകടിപ്പിക്കാം.

അതായത് $T \quad k\, l^x g^y m^z$

ഇവിടെ k എന്നത് ഡൈമെൻഷനില്ലാത്ത ഒരു സ്ഥിരാങ്കവും x,y,z എന്നിവ ഘാതങ്ങളുമാണ്. സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുവശത്തെയും ഡൈമെൻഷനുകൾ പരിഗണിച്ചാൽ

$$[L^0 M^0 T^1] = [L^1]^x [L^1 T^{-2}]^y [M^1]^z$$

$$= L^{x+y} T^{-2y} M^z$$

ഇരുഭാഗത്തെയും ഡൈമെൻഷനുകൾ തുലനം ചെയ്താൽ

$$x + y = 0;\ -2y = 1;\ \text{and } z = 0$$

$$x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = 0$$

$$T = k\, l^{1/2} g^{-1/2}$$

$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ഡൈമെൻഷനൽ മാർഗം ഉപയോഗിച്ച് k യുടെ മൂല്യം നിർണയിക്കാൻ സാധ്യമല്ല.

യഥാർഥത്തിൽ $k = 2\pi$ ആണ്.

അതിനാൽ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

സ്വതന്ത്ര ഭൗതിക അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം രൂപീകരിക്കാൻ ഡൈമെൻഷനൽ മാർഗം വളരെ പ്രയോജനകരമാണ്. പക്ഷേ, ഈ മാർഗത്തിലൂടെ ഡൈമെൻഷനുകളില്ലാത്ത സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ കണ്ടെത്താൻ കഴിയില്ല. ഈ മാർഗത്തിലൂടെ ബന്ധങ്ങളുടെ ഡയമെൻഷനൽ സാധുത പരിശോധിക്കാൻ കഴിയും. എന്നാൽ ഒരു സമവാക്യത്തിലെ ഭൗതിക അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള യഥാർഥ ബന്ധം രൂപീകരിക്കാൻ കഴിയില്ല. ഒരേ ഡൈമെൻഷനുകളുള്ള അളവുകളെ വേർതിരിക്കാനും ഈ മാർഗത്തിൽ കഴിയില്ല.

ഈ അധ്യായത്തിന്റെ അവസാനം നൽകിയിരിക്കുന്ന പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ ഡൈമെൻഷനൽ മാർഗങ്ങളിൽ നൈപുണി നേടാൻ നിങ്ങളെ സഹായിക്കും.

സംഗ്രഹം

1. ഭൗതിക അളവുകളുടെ നിർണയത്തിലധിഷ്ഠിതമായ ഒരു പാരിമാണിക ശാസ്ത്രശാഖയാണ് ഭൗതിക ശാസ്ത്രം. നീളം, മാസ്, സമയം, വൈദ്യുതപ്രവാഹ തീവ്രത, തെർമോഡൈനാമിക് താപനില, ദ്രവ്യത്തിന്റെ അളവ്, പ്രകാശതീവ്രത എന്നീ അളവുകളെ അടിസ്ഥാന അളവുകൾ അഥവാ ബെയ്സ് അളവുകളായി തിരഞ്ഞെടുത്തിരിക്കുന്നു.

2. ഏതൊരു ഭൗതിക അളവിനെ സൗകര്യപ്രദമായി തിരഞ്ഞെടുത്തിട്ടുള്ള ഒരു പ്രാമാണിക അടിസ്ഥാന മാനദണ്ഡവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യാം. ഈ അടിസ്ഥാനസൂചകമാണ് യൂണിറ്റ്. മീറ്റർ, കിലോഗ്രാം, സെക്കന്റ്, ആംപിയർ, കെൽവിൻ, കാൻഡെല തുടങ്ങിയവ യൂണിറ്റുകൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. അടിസ്ഥാന അളവുകളുടെ അഥവാ ബെയ്സ് അളവുകളുടെ യൂണിറ്റുകൾ അടിസ്ഥാന യൂണിറ്റുകൾ അഥവാ ബെയ്സ് യൂണിറ്റുകൾ എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

3. ബെയ്സ് അളവുകൾ സംയോജിപ്പിച്ച് രൂപീകരിക്കുന്ന മറ്റു അളവുകളെ വ്യുൽപന്ന അളവുകളെന്നും അവയുടെ യൂണിറ്റുകളെ വ്യുൽപന്ന യൂണിറ്റുകളെന്നും പറയുന്നു. അടിസ്ഥാന യൂണിറ്റുകളും വ്യുൽപന്ന യൂണിറ്റുകളും ചേരുന്നതാണ് ഒരു യൂണിറ്റ് സിസ്റ്റം.

4. ഇന്നു ലോകമെമ്പാടും പ്രയോഗത്തിലുള്ള അന്താരാഷ്ട്ര യൂണിറ്റ് പദ്ധതിയിൽ ഏഴ് അടിസ്ഥാന യൂണിറ്റുകളാണുള്ളത്.

5. അടിസ്ഥാന അളവുകളും അവ ഉപയോഗിച്ച് രൂപീകരിച്ചിരിക്കുന്ന അളവുകളും അളക്കുമ്പോൾ SI യൂണിറ്റുകളാണ് ഉപയോഗിക്കേണ്ടത്. ചില വ്യുൽപന്ന യൂണിറ്റുകൾ അന്താരാഷ്ട്ര യൂണിറ്റ് പദ്ധതിയിൽ പ്രത്യേക പേരുകളിൽ അറിയപ്പെടുന്നു. ജൂൾ, ന്യൂട്ടൺ, വാട്ട് തുടങ്ങിയവ ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

6. യൂണിറ്റുകൾക്ക് അന്തർദേശീയമായി അംഗീകരിക്കപ്പെട്ടതും നന്നായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടതുമായ പ്രതീകങ്ങളുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, മീറ്ററിന് m, കിലോഗ്രാമിന് kg, സെക്കന്റിന് s, ആംപിയറിന് A, ന്യൂട്ടന് N തുടങ്ങിയവ.

7. സാധാരണയായി വളരെ വലുതും ചെറുതുമായ ഭൗതിക അളവുകൾ ശാസ്ത്രീയപ്രതീകങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് (പത്തിന്റെ പവർ ആയി) പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഇത് സൂക്ഷ്മതയെ സൂചിപ്പിച്ചുകൊണ്ട് അളവുകളുടെ വില ലഘുവായി ചിത്രീകരിക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു.

8. ഭൗതിക അളവുകൾക്കും SI യൂണിറ്റുകൾക്കും പ്രതീകങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ ചില നിയമങ്ങളും മാർഗനിർദേശങ്ങളും പാലിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

9. ഒരു ഭൗതിക അളവുകൾ കണക്കാക്കുമ്പോൾ, ബന്ധങ്ങളിൽ ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുള്ള വ്യുൽപന്ന അളവുകളുടെ യൂണിറ്റുകൾ അന്തിമ യൂണിറ്റ് ലഭിക്കുന്നതു വരെ ബീജഗണിതരാശികളെപ്പോലെ പരിഗണിക്കാവുന്നതാണ്.

10. വിവിധ ഭൗതികഅളവുകൾ അളക്കുന്നതിന് നേരിട്ടും അല്ലാതെയുമുള്ള മാർഗങ്ങൾ ഉപയോഗപ്പെടുത്താം. ഭൗതികരാശികളുടെ അളവുകൾ പ്രകടിപ്പിക്കുമ്പോൾ അളവുപകരണത്തിന്റെ കൃത്യതയും സൂക്ഷ്മതയും അന്തിമഫലത്തിലെ പിശകും പരിഗണിച്ചിരിക്കണം.

11. അളവുകളിൽനിന്നും ഗണിതക്രിയകളിൽനിന്നും ലഭിക്കുന്ന വിലകൾ അനുയോജ്യ എണ്ണം സാർഥക അക്കങ്ങളിലേക്ക് പരിമിതപ്പെടുത്തണം. ഇതിനായി സാർഥക അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള നിയമങ്ങൾ, സാർഥക അക്കങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ഗണിതക്രിയാ നിയമങ്ങൾ, അനിശ്ചിത അക്കങ്ങൾ റൗണ്ട് ഓഫ് ചെയ്യുന്നതിനുള്ള നിയമങ്ങൾ എന്നിവ പാലിക്കണം.

12. അടിസ്ഥാനഅളവുകളുടെ ഡൈമെൻഷനുകളും അവയുടെ സംയോജനങ്ങളും ഒരു ഭൗതിക അളവിന്റെ സ്വഭാവങ്ങൾ വ്യക്തമാക്കുന്നു. സമവാക്യങ്ങളുടെ ഡൈമെൻഷനൽ സാധുത പരിശോധിക്കാനും ഭൗതിക അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാനും ഡൈമെൻഷനൽ വിശകലനം ഉപയോഗപ്പെടുത്താം.

13. ഡൈമെൻഷൻ പ്രകാരം ശരിയാണെന്നു കാണുന്ന സമവാക്യം പൂർണമായും ശരിയാവണമെന്നില്ല. എന്നാൽ ഡൈമെൻഷൻ പ്രകാരം സമവാക്യം തെറ്റാണെന്നു തെളിഞ്ഞാൽ ആ സമവാക്യം പൂർണമായും തെറ്റായിരിക്കും.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

കുറിപ്പ് : സംഖ്യാപരമായ ഉത്തരങ്ങൾ എഴുതുമ്പോൾ സാർഥക അക്കങ്ങൾ എന്ന ആശയം ഓർക്കുക.

2.1 വിട്ടുപോയ ഭാഗം പൂരിപ്പിക്കുക.

(a) 1 cm വശമുള്ള ഒരു ക്യൂബിന്റെ വ്യാപ്തം .... m^3 ആണ്.

(b) 2.0 cm ആരവും 10.0 cm ഉയരവുമുള്ള ഖര സിലിണ്ടറിന്റെ പരപ്പളവ്.................. mm^2 ആണ്.

(c) 18 km/h വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വാഹനം 1 s ൽ .... m ദൂരം സഞ്ചരിക്കും.

(d) ഈയത്തിന്റെ ആപേക്ഷികസാന്ദ്രത 11.3 ആണ്. ഈയത്തിന്റെ സാന്ദ്രത .... g cm^{3} അല്ലെങ്കിൽ .... kgm^{3} ആണ്.

2.2 വിട്ടുപോയ ഭാഗം ഉചിതമായി പൂരിപ്പിക്കുക.

(a) $1\ kg\ m^2 s^{-2}$ = ...$g\ cm^2 s^{-2}$

(b) 1 m – ..... ly

(c) 3.0 $m\ s^{2}$ – .... $km\ h^{2}$

(d) $G - 6.67 \times 10^{-11}\ N\ m^2\ (kg)^{-2}$ – .... $(cm)^3\ s^{-2}\ g^{-1}$.

2.3 കലോറി എന്നത് താപത്തിന്റെ അഥവാ ഊർജത്തിന്റെ ഒരു യൂണിറ്റാണ്. ഒരു കലോറി ഏകദേശം 4.2J ആണ്. ($1J = 1\ kg\ m^2 s^{2}$). നമ്മൾ യൂണിറ്റുകളുടെ ഒരു പുതിയ സിസ്റ്റം രൂപീകരിക്കുന്നുവെന്നു കരുതുക. ഈ സിസ്റ്റത്തിൽ മാസിന്റെ യൂണിറ്റ് α kg, നീളത്തിന്റെ യൂണിറ്റ് ß m, സമയത്തിന്റെ യൂണിറ്റ് γ s എന്നിങ്ങനെയാണെന്നും കരുതുക. പുതിയ സിസ്റ്റത്തിൽ ഒരു കലോറി $4.2\ \alpha^{1} ß^{2} \gamma^{2}$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

2.4 "ഒരു അടിസ്ഥാനവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യാതെ, ഒരു ഭൗതിക അളവിനെ ചെറുതെന്നോ വലുതെന്നോ പറയുന്നത് അർഥശൂന്യമാണ്"- ഈ കാഴ്ചപ്പാടിൽ താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ആവശ്യമെങ്കിൽ പുനർനിർവചനം ചെയ്യുക.

(a) ആറ്റം വളരെ ചെറിയ വസ്തുവാണ്

(b) ജെറ്റ് വിമാനങ്ങൾ ഉയർന്ന വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു.

(c) വ്യാഴത്തിന്റെ മാസ് വളെരെ വലുതാണ്.

(d) ഈ മുറിയിലെ വായുതന്മാത്രകളുടെ എണ്ണം വളരെ കൂടുതലാണ്.

(c) ഒരു പ്രോട്ടോണിന്റെ മാസ് ഇലക്ട്രോണിന്റേതിനേക്കാൾ വളരെ കൂടുതലാണ്.

(f) ശബ്ദത്തിന്റെ പ്രവേഗം പ്രകാശത്തിന്റേതിനേക്കാൾ വളരെ കുറവാണ്.

2.5 ശൂന്യതയിലെ പ്രകാശപ്രവേഗം 1 ആണെന്ന അടിസ്ഥാനത്തിൽ നീളത്തിന് ഒരു പുതിയ യൂണിറ്റ് രൂപീകരിച്ചെന്നിരിക്കട്ടെ. സൂര്യനിൽനിന്നുള്ള പ്രകാശം 8 മിനിറ്റും 20 സെക്കന്റുംകൊണ്ട് ഭൂമിയിൽ എത്തുന്നുവെങ്കിൽ പുതിയ സിസ്റ്റത്തിൽ ഭൂമിക്കും സൂര്യനും ഇടയിലുള്ള ദൂരം കണക്കാക്കുക.

2.6 താഴെ പറയുന്നവയിൽ ഏറ്റവും കൃത്യമായി ദൂരം അളക്കാവുന്ന ഉപകരണം ഏതാണ്?

(a) ചലിക്കുന്ന സ്കെയിലിൽ 20 ഡിവിഷനുകളുള്ള വെർണിയർ കാലിപ്പേഴ്സ്.

(b) വൃത്താകാര സ്കെയിലിൽ 100 ഡിവിഷനുകളും 1mm പിരിയുമുള്ള (pitch) സ്ക്രൂഗേജ്.

(c) പ്രകാശത്തിന്റെ തരംഗദൈർഘ്യത്തിനു സമാനമായ ദൂരമളക്കാൻ കഴിയുന്ന ഒരു പ്രാകാശിക ഉപകരണം.

2.7 ആവർധനം (magnification) 100 ഉള്ള ഒരു സൂക്ഷ്മദർശിനിയിലൂടെ (microscope) ഒരു മുടി നിരീക്ഷിച്ചുകൊണ്ട് കുട്ടി അതിന്റെ കനം അളക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്നു. 20 നിരീക്ഷണങ്ങളിൽനിന്നും മുടിയുടെ ശരാശരി കനം സൂക്ഷ്മദർശിനിയിൽ 3.5 mm ആണെന്നു കണ്ടെത്തുന്നു. മുടിയുടെ ഏകദേശ കനം എത്ര?

2.8 ഉത്തരമെഴുതുക.

(a) നിങ്ങൾക്ക് ഒരു നൂലും മീറ്റർ സ്കെയിലും തന്നിട്ടുണ്ട്. നൂലിന്റെ ഏകദേശ വ്യാസം എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം?

(b) 1.00 mm പിരിയുള്ള (pitch) ഒരു സ്ക്രൂഗേജിന്റെ വൃത്താകാര സ്കെയിലിൽ 200 ഡിവിഷനുകളുണ്ട്. ഈ സ്കെയിലിലെ ഡിവിഷനുകളുടെ എണ്ണം വർധിപ്പിച്ചുകൊണ്ടു സ്ക്രൂഗേജിന്റെ കൃത്യത വർധിപ്പിക്കാൻ കഴിയുമോ?

(c) ഒരു പിത്തളദണ്ഡിന്റെ ശരാശരി വ്യാസം വെർണിയർ കാലിപ്പേർസ് ഉപയോഗിച്ചു നിർണയിക്കേണ്ടതുണ്ട്. നൂറ് നിരീക്ഷണങ്ങളിൽനിന്നു ലഭിക്കുന്ന ശരാശരി മൂല്യം വെറും അഞ്ച് നിരീക്ഷണങ്ങളിൽനിന്നു ലഭിക്കുന്ന ശരാശരി മൂല്യത്തേക്കാൾ വിശ്വസനീയമായിരിക്കും. എന്തുകൊണ്ട്?

2.9 ഒരു 35 mm സ്ലൈഡിൽ ഒരു വീടിന്റെ ചിത്രത്തിന് 1.75 cm^2 പരപ്പളവുണ്ട്. ഈ സ്ലൈഡിന്റെ പ്രതിബിംബം സ്ക്രീനിൽ പതിക്കുമ്പോൾ സ്ക്രീനിലെ ചിത്രത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 1.55 m^2 ആണ്. ഈ സംവിധാനത്തിന്റെ ആവർധനം എത്ര?

2.10 താഴെ പറയുന്നവയിൽ സാർഥക അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണം എഴുതുക.

(a) 0.007 m^2

(b) 2.64 x× 10^{24} kg

(c) 0.2370 g cm^{-3}

(d) 6.320 J

(e) 6.032 N m^{-2}

(f) 0.0006032 m^2

2.11 ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ലോഹത്തകിടിന്റെ നീളം, വീതി, കനം എന്നിവ യഥാക്രമം 4.234 m, 1.005 m, 2.01cm ആണ്. ഈ തകിടിന്റെ പരപ്പളവ്, വ്യാപ്തം എന്നിവ സാർഥക അക്കങ്ങൾ അടിസ്ഥാനമാക്കി കണക്കാക്കുക.

2.12 പലചരക്കു വ്യാപാരിയുടെ ത്രാസ് ഉപയോഗിച്ച് ഒരു പെട്ടിയുടെ മാസ് 2.300 kg ആണെന്ന് നിർണയിച്ചിരിക്കുന്നു. 20.15 g, 20.17 g എന്നീ മാസുള്ള രണ്ട് സ്വർണത്തകിടുകൾ ഈ പെട്ടിക്കുള്ളിൽ വക്കുന്നു.

(a) പെട്ടിയുടെ അകെ മാസ് എത്ര?

(b) സാർഥക അക്കങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി രണ്ടു തകിടുകളുടെ മാസുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കണ്ടുപിടിക്കുക.

2.13 P എന്ന ഭൗതിക അളവ് a, b, c, d എന്നീ അളവുകളുമായി $P = a^3b^2/\left(\sqrt{c}\,d\right)$ എന്ന വിധത്തിൽ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. a, b, c, d എന്നീ അളവുകളിലെ ശതമാനപ്പിശക് 1%, 3%, 4%, 2% എന്നിങ്ങനെ ആയാൽ P യുടെ അളവിലെ ശതമാനപ്പിശക് എത്രയായിരിക്കും?

2.14 അനവധി അച്ചടിപ്പിശകുകളുള്ള ഒരു പുസ്തകത്തിൽ ക്രമാവർത്തനചലനത്തിലെ സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ നാലു സമവാക്യങ്ങൾ താഴെപ്പറയും വിധം നൽകിയിരിക്കുന്നു.

(a) $y = a \sin 2\pi\ t/T$

(b) $y = a \sin vt$

(c) $y = (a/T) \sin t/a$

(d) $y = (a\sqrt{2})\,(\sin 2\pi t/T \quad \cos 2\pi t/T)$

(a = സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരമാവധി വില, v = കണികയുടെ വേഗം, T =ചലനത്തിന്റെ ആവർത്തനകാലം) ഡൈമെൻഷനൽ തത്വം ഉപയോഗിച്ച് തെറ്റായ സമവാക്യങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക.

2.15 ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലെ പ്രശസ്തമായ ഒരു സമവാക്യം, ചലിക്കുമ്പോഴുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ മാസും (m), സറിരാവസറയിലുള്ള മാസും (m_0) തമ്മിൽ വസ്തുവിന്റെ വേഗത്തിലൂടെയും (v) പ്രകാശ പ്രവേഗത്തിലൂടെയും (c) ബന്ധിപ്പിക്കുന്നു (ആൽബർട്ട് ഐൻസ്റ്റൈന്റെ ആപേക്ഷികസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ഒരു ഫലമാണ് ഈ സമവാക്യം). ഒരു കുട്ടി ഈ സമവാക്യം ഏകദേശം ശരിയായി $m = \frac{m_0}{\left(1 - v^2\right)^{1/2}}$ എന്ന് ഓർത്തെടുക്കുന്നു. പക്ഷേ, കുട്ടി 'c' എഴുതാൻ മറന്നുപോയി. സമവാക്യത്തിൽ 'c' എവിടെ എഴുതണമെന്ന് അനുമാനിക്കുക.

2.16 ആറ്റോമിക തോതുകളിലെ നീളത്തിന്റെ അനുയോജ്യ യൂണിറ്റാണ് ആങ്സ്ട്രോം (1 $A^0 = 10^{-10}$ m). ഹൈഡ്രജൻ ആറ്റത്തിന്റെ വലുപ്പം 0.5 A^0 (ഏകദേശം) ആണ്. ഒരു മോൾ ഹൈഡ്രജൻ ആറ്റത്തിന്റെ ആകെ വ്യാപ്തം എത്ര m^3 ആയിരിക്കും?

2.17 അടിസറാന താപനിലയിലും മർദ്ദത്തിലും ഒരു മോൾ ഐഡിയൽ വാതകത്തിന്റെ വ്യാപ്തം 22.4 ലിറ്റർ (മോളാർവ്യാപ്തം) ആണ്. ഒരു മോൾ ഹൈഡ്രജൻ വാതകത്തിന്റെ, മോളാർവ്യാപ്തവും ആറ്റോമിക വ്യാപ്തവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതം എത്ര? ഹൈഡ്രജൻ തന്മാത്രയുടെ വലുപ്പം 1 A^0 ആണെന്ന് കരുതുക. ഈ അനുപാതം ഇത്രയും വലുതാകാൻ കാരണമെന്ത്?

2.18 അതിവേഗം ചലിക്കുന്ന ട്രെയിനിന്റെ ജാലകത്തിലൂടെ പുറത്തേക്കു നോക്കുമ്പോൾ, സമീപത്തുള്ള വൃക്ഷങ്ങൾ, കെട്ടിടങ്ങൾ തുടങ്ങിയവ ട്രെയിനിന്റെ വിപരീതദിശയിൽ അതിവേഗം ചലിക്കുന്നതായി തോന്നുന്നു. എന്നാൽ ദൂരെയുള്ള കുന്നുകൾ, ചന്ദ്രൻ, നക്ഷത്രങ്ങൾ തുടങ്ങിയവ സ്ഥിരാവസ്ഥയിലാണെന്നും തോന്നുന്നു (യഥാർഥത്തിൽ നാം ചലിക്കുന്നതായി നമുക്കറിയാവുന്നതിനാൽ ഇവ നമ്മോടൊപ്പം ചലിക്കുന്നതായി തോന്നുന്നു). ഈ നിരീക്ഷണം വിശദീകരിക്കുക.

2.19 ഭാഗം 2.3.1ൽ പ്രതിപാദിച്ചിരിക്കുന്ന ലംബനരീതി വിദൂരനക്ഷത്രങ്ങളിലേക്കുള്ള ദൂരം കണക്കാക്കാൻ ഉപയോഗിക്കാം. AB എന്ന അടിസറാനരേഖ, സൂര്യനു ചുറ്റുമുള്ള ഭൂമിയുടെ ഭ്രമണപഥത്തിലെ ആറു മാസ ഇടവേളയിലെ ഭൂമിയുടെ രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങൾ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്നു. അതായത് ഈ രേഖയുടെ നീളം ഭൂമിയുടെ ഭ്രമണപഥത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന് ഏകദേശം തുല്യമാണ് ($\approx 3 \times 10^{11}$ m). ഭൂമിക്ക് ഏറ്റവും അടുത്തുള്ള നക്ഷത്രങ്ങൾക്കു പോലും, ഇത്രയും നീളമുള്ള അടിസ്ഥാനരേഖ 1" (1 സെക്കന്റ്) എന്ന വളരെ ചെറിയ ലംബനകോൺ രൂപീകരിക്കുംവിധം അകലെയാണ്. പാർസെക് എന്നതാണ് ബഹിരാകാശ തോതിൽ ഉപയോഗിക്കാവുന്ന ദൂരത്തിന്റെ അനുയോജ്യ യൂണിറ്റ്. ഭൂമിക്കും സൂര്യനും ഇടയിലുള്ള ദൂരത്തിനു തുല്യമായ അടിസ്ഥാന രേഖ ഒരു സെക്കന്റ് (1 second of an arc) എന്ന ലംബനകോൺ രൂപീകരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ദൂരമാണ് ഒരു പാർസെക്. ഒരു പാർസെക് എത്ര മീറ്ററാണ്?

2.20 സൗരയൂഥത്തിന് ഏറ്റവും അടുത്ത നക്ഷത്രം ആൽഫാ സെന്റോറി 4.29 പ്രകാശവർഷം അകലെയാണ്. ഈ ദൂരം എത്ര പാർസെക്ആണ്? ആറുമാസ ഇടവേളയിലെ ഭൂമിയുടെ രണ്ടു സറാനങ്ങളിൽ നിന്നും ഈ നക്ഷത്രത്തെ (ആൽഫാ സെന്റോറി) നിരീക്ഷിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന ലംബനകോൺ എത്രയായിരിക്കും?

2.21 ഭൗതിക അളവുകളുടെ സൂക്ഷ്മനിർണയം ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഒരു ആവശ്യകതയാണ്. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു വിമാനത്തിന്റെ വേഗം അളക്കുന്നതിന് വളരെ ചെറിയ ഇടവേളകളിൽ അതിന്റെ സ്ഥാനം നിർണയിക്കാനുള്ള കൃത്യമായ സംവിധാനം ഉണ്ടാകണം. രണ്ടാം ലോകയുദ്ധകാലത്ത് റഡാറിന്റെ കണ്ടുപിടിത്തത്തിനു പ്രചോദനം ഇതായിരുന്നു. ആധുനികശാസ്ത്രത്തിൽ നീളം, മാസ്, സമയം എന്നിവയുടെ സൂക്ഷ്മനിർണയം ആവശ്യമായിവരുന്ന സന്ദർഭങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക. കഴിയുമെങ്കിൽ പരിമാണം വ്യക്തമാക്കുക.

2.22 സൂക്ഷ്മനിർണയം പോലെ ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ പ്രാധാന്യമുള്ളതാണ് സാധാരണ നിരീക്ഷണങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയ ഏകദേശനിർണയം. താഴെ പറയുന്നവയുടെ ഏകദേശവില കണക്കാക്കുക (ഏകദേശ വില കിട്ടാൻ പ്രയാസമുള്ള അവസരങ്ങളിൽ അളവിന്റെ ഉയർന്ന വില കിട്ടാൻ ശ്രമിക്കുക).

(a) വർഷകാലത്തു ഇന്ത്യക്ക് മുകളിലെത്തുന്ന മഴമേഘങ്ങളുടെ മാസ്.

(b) ഒരു കൊടുങ്കാറ്റിന്റെ വേഗം.

(c) നിങ്ങളുടെ തലയിലെ മുടികളുടെ എണ്ണം.

(d) ക്ലാസ്മുറിയിലെ വാതകതന്മാത്രകളുടെ എണ്ണം.

2.23 സൂര്യൻ അയോണിക ദ്രവ്യാവസ്ഥയിലാണ് (പ്ലാസ്മ). സൂര്യന്റെ ആന്തരിക താപനില 10^7 K യിലധികവും ഉപരിതല/താപനില 6000 K യിലുമാണ്. ഈ താപനിലയിൽ ഒരു പദാർഥത്തിനും ഖരാവസ്ഥയിലോ ദ്രാവകാവസ്ഥയിലോ സ്ഥിതിചെയ്യാൻ കഴിയില്ല. സൂര്യന്റെ സാന്ദ്രതയുടെ വ്യാപ്തി ഖരവസ്തുക്കളുടേതാണോ, ദ്രാവകങ്ങളുടേതാണോ, വാതകങ്ങളുടേതാണോ? നിങ്ങളുടെ അനുമാനം ശരിയാണോ എന്ന് താഴെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങളുപയോഗിച്ചു പരിശോധിക്കുക. സൂര്യന്റെ മാസ് 2.0×10^{30} kg, സൂര്യന്റെ ആരം 7.0×10^8 m

2.24 ഭൂമിയിൽനിന്ന് 824.7 മില്യൺ കിലോമീറ്റർ ദൂരത്തായിരിക്കുമ്പോൾ വ്യാഴത്തിന്റെ കോണീയവ്യാസം 35.72″ ആയാൽ, അതിന്റെ വ്യാസം കണക്കാക്കുക.

അധിക പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

2.25 മഴയത്തു നടക്കുന്ന ഒരാൾ, മഴ നനയാതിരിക്കാൻ കുട മുന്നിലേക്ക് ചരിച്ചുപിടിക്കേണ്ടതുണ്ട്. നടക്കുന്ന ആളിന്റെ വേഗവും (v), ലംബദിശയിൽനിന്നുള്ള കുടയുടെ ചരിവുകോണും (θ) തമ്മിൽ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന സമവാക്യം ഒരു കുട്ടി $\tan\theta = v$ എന്ന് രൂപീകരിക്കുന്നു. $v \to 0$ആകുമ്പോൾ നമ്മൾ പ്രതീക്ഷിക്കുന്നതുപോലെ $\theta \to 0$ ആകുന്നതിനാൽ സമവാക്യം സാധുവാണെന്ന് കുട്ടി കരുതുന്നു. (ശക്തമായ കാറ്റ് ഇല്ലെന്നും അതിനാൽ മഴ ലംബമായി പതിക്കുന്നുവെന്നും കരുതുക). ഈ സമവാക്യം ശരിയാണെന്നു നിങ്ങൾ കരുതുന്നുണ്ടോ? ഇല്ലെങ്കിൽ ശരിയായ സമവാക്യം അനുമാനിക്കുക.

2.26 ബാഹ്യ ഇടപെടലുകൾ ഇല്ലെങ്കിൽ രണ്ട് സീസിയം ക്ലോക്കുകൾ തുടർച്ചയായി ആയിരം വർഷങ്ങൾ പ്രവർത്തിക്കുമ്പോൾ, അവ തമ്മിലുണ്ടാവുന്ന സമയവ്യത്യാസം കേവലം 0.02 s ആയിരിക്കുമെന്ന് അവകാശപ്പെടുന്നു.1 s എന്ന ഇടവേള അളക്കുന്നതിൽ സീസിയം ക്ലോക്കുകളുടെ കൃത്യതയെക്കുറിച്ച് ഇതിൽനിന്ന് എന്ത് മനസ്സിലാക്കാം?

2.27 സോഡിയം ആറ്റത്തിന്റെ ശരാശരി സാന്ദ്രത കണക്കാക്കുക. ആറ്റത്തിന്റെ വലുപ്പം 2.5 A^0ആണെന്നു കരുതുക. (അവോഗാഡ്രോ സംഖ്യ, സോഡിയത്തിന്റെ ആറ്റോമിക മാസ് എന്നിവയുടെ വിലകൾ ഉപയോഗിക്കുക). സോഡിയം ക്രിസ്റ്റലിന്റെ സാന്ദ്രതയുമായി (970 kg m^{-3}) ഇത് താരതമ്യം ചെയ്യുക. രണ്ട് അളവുകളുടെയും പരിമാണഘാതം ഒന്നു തന്നെയാണോ? ആണെങ്കിൽ എന്തുകൊണ്ട്?

2.28 ആണവതലത്തിൽ അനുയോജ്യമായ നീളത്തിന്റെ യൂണിറ്റാണ് ഫെർമി (1 f = 10^{-15} m). ന്യൂക്ലിയാർ വലുപ്പങ്ങൾക്ക് $r = r_0 A^{1/3}$എന്ന പ്രയോഗാധിഷ്ഠിത സമവാക്യം ഏകദേശം സാധുവാണ്. ഇതിലെ r എന്നത് ന്യൂക്ലിയസിന്റെ ആരവും A മാസ് നമ്പറും r_0 എന്നത് ഒരു സ്ഥിരാങ്കവുമാണ്. r_0=1.2f ഈ നിയമപ്രകാരം ന്യൂക്ലിയർ സാന്ദ്രത എല്ലാ ന്യൂക്ലിയസുകൾക്കും ഏകദേശം സ്ഥിരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. സോഡിയം ന്യൂക്ലിയസിന്റെ സാന്ദ്രത കണക്കാക്കുക. പരിശീലനപ്രശ്നം 2.27 ൽ ലഭിച്ച സോഡിയത്തിന്റെ സാന്ദ്രതയുടെ വിലയുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുക.

2.29 തീവ്രമായ ഏകവർണ (monochromatic), ഏകദിശീയ (unidirectional) പ്രകാശത്തിന്റെ സ്രോതസ്സാണ് ലേസർ (LASER). പ്രകാശത്തിന്റെ ഈ സ്വഭാവങ്ങൾ ദൂരം അളക്കാൻ പ്രയോജനപ്പെടുത്താം. ഭൂമിയ്ക്കും ചന്ദ്രനും ഇടക്കുള്ള ദൂരം വളരെ സൂക്ഷ്മമായി ലേസർ ഉപയോഗിച്ച് നിർണയിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഭൂമിയിൽ നിന്നു ചന്ദ്രനിലേക്കയക്കുന്ന ലേസർബീം, ചന്ദ്രോപരിതലത്തിൽ പ്രതിഫലിച്ച് 2.56 s ൽ ഭൂമിയിൽ തിരികെയെത്തുന്നു. ഭൂമിക്ക് ചുറ്റുമുള്ള ചന്ദ്രന്റെ ഭ്രമണപഥത്തിന്റെ ആരം കണക്കാക്കുക.

2.30 ജലത്തിനടിയിലുള്ള വസ്തുക്കളെ കണ്ടെത്താനും അവയുടെ സ്ഥാനം നിർണയിക്കാനും സോനാറിൽ (SONAR) അൾട്രാ സോണിക് തരംഗങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരു അന്തർവാഹിനിയിൽ സജ്ജീകരി

ച്ചിരിക്കുന്ന SONAR ൽ നിന്ന് ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കപ്പെട്ട തരംഗങ്ങൾ ഒരു ശത്രുഅന്തർവാഹിനിയിൽനിന്നു പ്രതിഫലിച്ചു 77.0 സെക്കന്റിൽ തിരികെയെത്തുന്നു. ശത്രുഅന്തർവാഹിനിയിലേക്കുള്ള ദൂരമെത്ര? (ജലത്തിലൂടെയുള്ള ശബ്ദത്തിന്റെ വേഗം 1450 m/s).

2.31 ആധുനിക ബഹിരാകാശശാസ്ത്രജ്ഞർ കണ്ടെത്തിയിട്ടുള്ള, പ്രപഞ്ചത്തിലെ പല വസ്തുക്കളും അതിവിദൂരങ്ങളായതിനാൽ അവയിൽനിന്നു പ്രകാശം ഭൂമിയിലെത്തുന്നത് ലക്ഷക്കണക്കിനു വർഷങ്ങൾ കൊണ്ടാണ്. ക്വാസറുകൾ എന്നറിയപ്പെടുന്ന ഇവയുടെ പല സ്വഭാവങ്ങളും തൃപ്തികരമായി വിശദീകരിക്കാൻ നമുക്ക് കഴിഞ്ഞിട്ടില്ല. ഒരു ക്വാസറിൽ നിന്ന് പ്രകാശം 3.0 ബില്യൺ വർഷങ്ങൾകൊണ്ട് ഭൂമിയിലെത്തുന്നുവെങ്കിൽ ആ ക്വാസറിലേക്ക് ഭൂമിയിൽനിന്നുള്ള ദൂരം എത്ര കി.മീ. ആയിരിക്കും?

2.32 പൂർണ സൂര്യഗ്രഹണസമയത്ത് ചന്ദ്രബിംബം സൂര്യനെ പൂർണമായും മറക്കുന്നു എന്ന വസ്തുത നമുക്കേവർക്കും അറിയാവുന്നതാണ്. ഈ വസ്തുതയുടെയും ഉദാഹരണം 2.3, 2.4 എന്നിവയിൽനിന്നു ലഭിക്കുന്ന വിവരങ്ങളുടെയും അടിസ്ഥാനത്തിൽ ചന്ദ്രന്റെ ഏകദേശ വ്യാസം നിർണയിക്കുക.

2.33 പ്രപഞ്ചത്തിലെ അടിസ്ഥാനസ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കളികളിൽ ഏർപ്പെടുക എന്നത്, പി.എ.എം. ഡിറാക് എന്ന, ഈ നൂറ്റാണ്ടിലെ പ്രശസ്തനായ ശാസ്ത്രകാരന്റെ വിനോദമായിരുന്നു. ഇത് ഒരു രസകരമായ നിരീക്ഷണത്തിലേക്ക് അദ്ദേഹത്തെ നയിച്ചു. ആറ്റോമിക ഫിസിക്സിലെ അടിസ്ഥാന സ്ഥിരാങ്കങ്ങളായ c,e, ഇലക്ട്രോണിന്റെ മാസ്, പ്രോട്ടോണിന്റെ മാസ് എന്നിവയും ഭൂഗുരുത്വസ്ഥിരാങ്കവും (G) ഉൾപ്പെടുത്തി സമയത്തിന്റെ ഡൈമെൻഷനുള്ള ഒരു സംഖ്യ രൂപീകരിക്കാൻ അദ്ദേഹത്തിനു കഴിഞ്ഞു. കൂടാതെ, ഈ സംഖ്യയുടെ പരിമാണം പ്രപഞ്ചത്തിന്റെ ഇന്നു കണക്കാക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന പ്രായത്തോട് (~15 ബില്യൺ വർഷങ്ങൾ) വളരെ അടുത്താണെന്നും അദ്ദേഹം കണ്ടു. ഈ പുസ്തകത്തിൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന അടിസ്ഥാന സ്ഥിരാങ്കങ്ങളുടെ പട്ടികയിൽനിന്ന് ഈ സംഖ്യ (അല്ലെങ്കിൽ മറ്റേതെങ്കിലും രസകരമായ ഒരു സംഖ്യ) കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിക്കുക. ഈ സംഖ്യയുടെ പ്രപഞ്ചത്തിന്റെ പ്രായവുമായുള്ള സാദൃശ്യം സാർഥകമാണെങ്കിൽ, അതിൽനിന്ന് അടിസ്ഥാന സ്ഥിരാങ്കങ്ങളുടെ സ്ഥിരതയെക്കുറിച്ച് എന്തു സൂചന ലഭിക്കും?

അധ്യായം 3

Y7F6K2

നേർരേഖാചലനം (MOTION IN A STRAIGHT LINE)

3.1 ആമുഖം

3.2 സ്ഥാനം, പാതദൈർഘ്യം, സ്ഥാനാന്തരം

3.3 ശരാശരി പ്രവേഗവും ശരാശരി വേഗവും

3.4 തൽക്ഷണപ്രവേഗവും തൽക്ഷണവേഗവും

3.5 ത്വരണം

3.6 സമചലനത്തിന്റെ ഗതിക സമവാക്യങ്ങൾ

3.7 ആപേക്ഷികപ്രവേഗം

സംഗ്രഹം

വിചിന്തനവിഷയങ്ങൾ

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

അധിക പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

അനുബന്ധം 3.1

3.1 ആമുഖം

പ്രപഞ്ചത്തിലുളള എല്ലാറ്റിലും ചലനം സർവസാധാരണമാണ്. നമ്മൾ നടക്കുന്നതും ഓടുന്നതും സൈക്കിൾസവാരി നടത്തുന്നതും ചലനങ്ങളാണ്. ഉറങ്ങുമ്പോൾ പോലും വായു നമ്മുടെ ശ്വാസകോശത്തിനകത്തേക്കും പുറത്തേക്കും ചലിക്കുകയും ധമനികളിലൂടെയും സിരകളിലൂടെയും രക്തം ഒഴുകുകയും ചെയ്യുന്നു. മരങ്ങളിൽ നിന്ന് ഇലകൾ പൊഴിയുന്നതും അണക്കെട്ടിൽനിന്നു വെള്ളം താഴേക്ക് ഒഴുകുന്നതും കാണാറുണ്ടല്ലോ. ആളുകളെ ഒരിടത്തുനിന്നു മറ്റൊരിടത്തേക്ക് വഹിച്ചുകൊണ്ടുപോകുന്ന വാഹനങ്ങളും വിമാനങ്ങളും ചലനത്തിലാണ്. ഭൂമി ഓരോ ഇരുപത്തിനാലു മണിക്കൂറിലും ഒരു പ്രാവശ്യം സ്വയം ഭ്രമണം ചെയ്യുന്നു. സൂര്യനു ചുറ്റും വർഷത്തിലൊരിക്കൽ പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നതോടൊപ്പം സൂര്യൻ ആകാശഗംഗയിലൂടെ സ്വയം ചലിക്കുകയും ആകാശഗംഗ മറ്റു ഗാലക്സികളുടെ കൂട്ടത്തിനുള്ളിൽ ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുകയുമാണ്.

സമയത്തിനനുസരിച്ച് ഒരു വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന സ്ഥാനമാറ്റമാണ് ചലനം. സമയത്തിനനുസരിച്ചു സ്ഥാനം മാറുന്നതെങ്ങനെയാണ്? ഈ അധ്യായത്തിൽ, ചലനത്തെ വിശദീകരിക്കുന്നതെങ്ങനെയാണെന്ന് നമുക്ക് പഠിക്കാം. ഇതിനായി, പ്രവേഗത്തിന്റെയും ത്വരണത്തിന്റെയും ആശയങ്ങൾ വികസിപ്പിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

ഈ അധ്യായത്തിൽ നമ്മുടെ പഠനം വസ്തുക്കളുടെ നേർരേഖാചലനമെന്നറിയപ്പെടുന്ന നേർവരയിലൂടെയുള്ള ചലനത്തിലേക്ക് പരിമിതപ്പെടുത്തുന്നു. സമത്വരണത്തോടെയുള്ള നേർരേഖാചലനത്തിൽ, ഒരു കൂട്ടം ലളിതമായ സമവാക്യങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാൻ കഴിയും. ചലനത്തിന്റെ ആപേക്ഷിക സ്വഭാവം മനസ്സിലാക്കാൻ ആപേക്ഷികപ്രവേഗം എന്ന ആശയവും ഇവിടെ പരിചയപ്പെടുന്നു.

നമ്മുടെ ചർച്ചകളിൽ എല്ലാം ചലനത്തിലുള്ള വസ്തുക്കളെ പോയിന്റ് വസ്തുക്കളായി പരിഗണിക്കാം. വസ്തുവിന്റെ വലുപ്പം ഒരു ഉചിതമായ കാലയളവിൽ അത് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ വളരെ ചെറുതായിരുന്നാൽ മാത്രമേ ഈ പരിഗണന സാധുവാകുകയുള്ളൂ. നിത്യജീവിതത്തിലെ ധാരാളം സന്ദർഭങ്ങളിൽ വസ്തുക്കളുടെ വലുപ്പത്തെ അവഗണിച്ച് വലിയ പിശകു വരാതെ പോയിൻറ് വസ്തുക്കളായി പരിഗണിക്കാം.

ചലനപഠനത്തിൽ (Kinematics) ചലനത്തിനു നിദാനമായ കാരണങ്ങളെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിക്കാതെ ചലനത്തെ വിവരിക്കാനുള്ള മാർഗങ്ങളെപ്പറ്റി പഠിക്കുന്നു. നിത്യജീവിതത്തിൽ നാം കാണുന്ന മിക്ക ചലനങ്ങളെയും ചലിക്കുന്ന വസ്തുവിന്റെ വലുപ്പത്തെ അവഗണിച്ച് ഓരോ ബിന്ദുക്കളുടെ ചലനമായി സങ്കൽപ്പിക്കാൻ കഴിയും.

3.2 സ്ഥാനം, പാതദൈർഘ്യം, സ്ഥാനാന്തരം (Position, Pathlength, Displacement)

ചലനമെന്നത് സമയത്തിനനുസരിച്ചുള്ള സ്ഥാനമാറ്റമാണെന്നു നിങ്ങൾക്കറിയാമല്ലോ? സ്ഥാനം വ്യക്തമാക്കാൻ ഒരു ആധാരബിന്ദുവും അത് കേന്ദ്രമായുള്ള ഒരു കൂട്ടം അക്ഷങ്ങളും ആവശ്യമാണ്. ഇതിനായി പരസ്പരം ലംബമായ X, Y, Z എന്ന് രേഖപ്പെടുത്തിയ അക്ഷങ്ങളുള്ള ഒരു നിർദേശാങ്കവ്യവസ്ഥ (rectangular co-ordinates system) വിഭാവനം ചെയ്യുന്നതാണ് ഏറ്റവും സൗകര്യപ്രദം. ഈ മൂന്ന് അക്ഷങ്ങളും കൂടിച്ചേരുന്ന ബിന്ദുവാണ് ഈ അവലംബകത്തിന്റെ മൂലബിന്ദു, O (origin). ഈ അവലംബകത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള നിർദേശാങ്കങ്ങൾ (co-ordinates) (x, y, z) ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം നിർണയിക്കുന്നു. സമയം അളക്കുന്നതിനായി ഒരു ക്ലോക്കിനെ ഈ വ്യവസ്ഥയിൽ ഉൾപ്പെടുത്തുന്നു. ക്ലോക്കുൾപ്പെട്ട *x, y, z* അക്ഷങ്ങളുടെ ഈ വ്യവസ്ഥയാണ് അവലംബകം (frame of reference) ആയി പരിഗണിക്കുന്നത്.

ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഒന്നോ അതിലധികമോ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ സമയം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് മാറിയാൽ, ആ വസ്തു ചലനത്തിലാണ്. ഇവ മാറുന്നില്ലെങ്കിൽ വസ്തു ആ അവലംബകത്തിൽ സ്ഥിരാവസ്ഥയിലാണെന്നു പറയാം.

അവലംബകത്തിലെ ഒരു കൂട്ടം അക്ഷരങ്ങൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നത് സാഹചര്യങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചാണ്. ഉദാഹരണമായി, ഒരു ഏകമാന ചലനം വിവരിക്കാൻ, നമുക്ക് ഒരു അക്ഷം മാത്രമേ ആവശ്യമുള്ളൂ. എന്നാൽ രണ്ടോ മൂന്നോ മാനങ്ങളുള്ള ചലനം വിവരിക്കാൻ രണ്ടോ മൂന്നോ അക്ഷങ്ങൾ ആവശ്യമായി വരുന്നു.

ഒരു വസ്തുവിന്റെ അവസ്ഥയുടെ വിവരണം അതിനു വേണ്ടി തിരഞ്ഞെടുത്തിരിക്കുന്ന അവലംബകത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി, റോഡിലൂടെ ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന കാറിന്റെ ചലനം വിവരിക്കുന്നത് നിങ്ങളുമായോ തറനിരപ്പുമായോ ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു അവലംബകത്തിന് അനുസൃതമായാണ്. പക്ഷേ, കാറിനകത്തിരിക്കുന്ന ഒരാളുമായി ബന്ധിച്ചിട്ടുള്ള അവലംബകത്തിനനുസരിച്ച്, ആ കാർ സ്ഥിരാവസ്ഥയിലാണ്.

നേർരേഖാചലനം വിവരിക്കാൻ വസ്തുവിന്റെ പാതയുമായി ചേർന്നിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ നമുക്ക് ഒരു അക്ഷം (ഉദാഹരണം x അക്ഷം) സ്വീകരിക്കാം. പിന്നീട് ചിത്രം 3.1 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ആ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം സൗകര്യപ്രദമായി തിരഞ്ഞെടുത്ത ഒരു മൂലബിന്ദു (ഉദാഹരണം O) ആധാരമാക്കി അളക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ വലതുവശത്തുള്ള സ്ഥാനങ്ങൾ പോസിറ്റീവായും ഇടതുവശത്തുള്ള സ്ഥാനങ്ങൾ നെഗറ്റീവായും പരിഗണിക്കും. ഈ രീതിയനുസരിച്ച് ചിത്രം 3.1 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന P, Q എന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനത്തിന്റെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ ചിത്രം 3.1 ൽ തന്നിരിക്കുന്നത് +360 m, +240 m എന്നിങ്ങനെയാണ്.

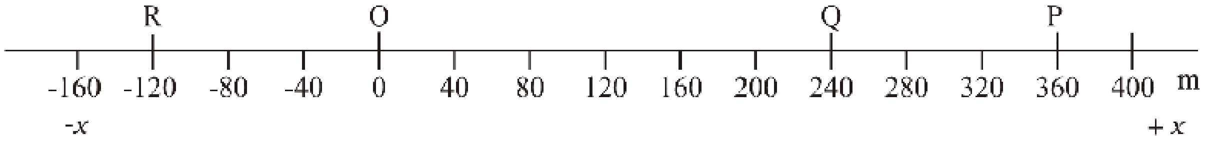
ഇതുപോലെ R എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനനിർദേശാങ്കം എന്നത് -120 m ആകുന്നു.

പാതദൈർഘ്യം (Path length)

കാറിന്റെ നേർരേഖാചലനം പരിഗണിക്കുക. കാറിന്റെ ചലനപാത x അക്ഷമായും അത് സഞ്ചരിക്കാൻ തുടങ്ങുന്ന ബിന്ദുവിനെ മൂലബിന്ദുവായും പരിഗണിക്കാം. അതായത്, t = 0 ആയിരുന്നപ്പോൾ കാറിന്റെ സ്ഥാനം x = 0 ആയിരുന്നു (ചിത്രം3.1). P,Q,R എന്നിവ കാറിന്റെ പല ക്ഷണങ്ങളിലുള്ള സ്ഥാനങ്ങളെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു. ചലനത്തിന്റെ രണ്ട് സന്ദർഭങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം. ആദ്യത്തെ സന്ദർഭത്തിൽ, കാർ O യിൽ നിന്നു P വരെ സഞ്ചരിക്കുന്നു. അപ്പോൾ കാർ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം OP = +360 മീറ്ററാണ്. ഈ ദൂരത്തെ കാർ സഞ്ചരിച്ച പാതദൈർഘ്യം എന്നു വിളിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തെ സന്ദർഭത്തിൽ കാർ O യിൽ നിന്നു P വരെ സഞ്ചരിക്കുകയും അവിടെനിന്നു Q യിലെത്തുകയും ചെയ്യുന്നു. ഈ ഘട്ടത്തിൽ സഞ്ചരിച്ച പാതദൈർഘ്യം OP + PQ = +360 മീറ്റർ + (+120 മീറ്റർ) = +480 മീറ്റർ ആകുന്നു. പാതദൈർഘ്യം പരിമാണം മാത്രമുള്ളതും ദിശയില്ലാത്തതുമായ ഒരു അദിശ അളവാണ് (അധ്യായം 4 കാണുക).

സ്ഥാനാന്തരം (Displacement)

മറ്റൊരു അളവായ സ്ഥാനാന്തരത്തെ സ്ഥാനത്തിലുള്ള മാറ്റമായി നിർവചിക്കുന്നത് ഉചിതമാണ്. x_1, x_2 എന്നത് യഥാക്രമം t_1, t_2 എന്നീ സമയങ്ങളിലുള്ള



ചിത്രം 3.1 x അക്ഷം, മൂലബിന്ദു ഇവ ഉൾപ്പെടെ വ്യത്യസ്തസമയങ്ങളിലുള്ള ഒരു കാറിന്റെ സ്ഥാനങ്ങൾ

ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനങ്ങളാണെന്ന് കരുതുക. അപ്പോൾ അതിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം Δx, അവസാനത്തെയും ആദ്യത്തെയും സ്ഥാനങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ്. അതായത്

$$\Delta x = (x_2 - x_1)$$

(ഒരു അളവിലുണ്ടായ വ്യത്യാസത്തെ ഗ്രീക്ക് ലിപിയായ (Δx) ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നു)

$x_2 > x_1$ ആയാൽ Δx പോസിറ്റീവും $x_2 < x_1$ ആയാൽ Δx നെഗറ്റീവും ആകുന്നു.

സ്ഥാനാന്തരത്തിന് പരിമാണവും ദിശയുമുണ്ട്. അങ്ങനെയുള്ള അളവുകളെ സദിശങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. സദിശങ്ങളെക്കുറിച്ച് അടുത്ത അധ്യായത്തിൽ വിശദീകരിക്കും. ഇവിടെ പ്രതിപാദിക്കുന്നത് നേർരേഖയിലൂടെയുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനമാണ്. ഇതിനെ നേർരേഖാചലനം (rectilinear motion) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഏകമാനചലനത്തിൽ ഒരു വസ്തുവിന് രണ്ടു ദിശകളിൽ മാത്രമേ ചലിക്കാൻ സാധിക്കുകയുള്ളൂ (പിന്നോട്ടും മുന്നോട്ടും അല്ലെങ്കിൽ, മുകളിലേക്കും താഴേക്കും). ഈ രണ്ട് ദിശകളെയും +, – എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എളുപ്പത്തിൽ വ്യക്തമാക്കാൻ സാധിക്കും. ഉദാഹരണമായി, കാറിന് O യിൽ നിന്നു P വരെ ചലിക്കാനുള്ള സ്ഥാനാന്തരം;

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (+360\ m) - 0\ m = +360\ m$$

360m പരിമാണമുള്ള ഈ സ്ഥാനാന്തരത്തെ പോസിറ്റീവ് x ദിശയിൽ + ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. സമാനമായി, കാറിന്റെ P യിൽനിന്നു Q ലേക്കുള്ള സ്ഥാനാന്തരം 240m – 360m = –120 m ആണ്. നെഗറ്റീവ് ചിഹ്നം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ ദിശയാണ്. അതായത്, വസ്തുക്കളുടെ ഒരു ഏകമാനത്തിലുള്ള ചലനം വിശദമായി പ്രതിപാദിക്കാൻ അവ പ്രത്യേകമായി സദിശമായി അടയാളപ്പെടുത്തേണ്ടതില്ല.

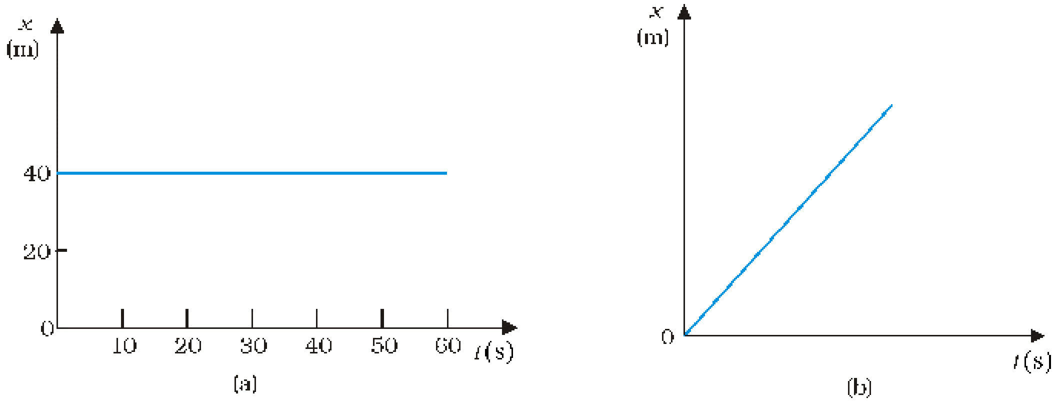
ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണം അതു സഞ്ചരിച്ച പാതദൈർഘ്യത്തിനു തുല്യമാവുകയോ തുല്യമാവാതിരിക്കുകയോ ആവാം. ഉദാഹരണമായി, O യിൽ നിന്നു P വരെയുള്ള കാറിന്റെ ചലനപ്രക്രിയയിൽ പാതദൈർഘ്യവും സ്ഥാനാന്തരവും +360m ആണ്. ഈ സന്ദർഭത്തിൽ സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെയും (360 m) പാതദൈർഘ്യത്തിന്റെയും (360 m) പരിമാണം തുല്യമാണ്. പക്ഷേ, കാറിന്റെ O യിൽ നിന്നു P വരെയും തിരിച്ച് Q വിലേക്കുമുള്ള ചലനം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ പാതദൈർഘ്യം = (+360 m) + (+120 m) = (+480 m) ആണ്. എന്നാൽ സ്ഥാനാന്തരം = 240 m – (0 m) = 240 m ആണ്. അതായത് സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെയും (240 m) പാതദൈർഘ്യത്തിന്റെയും (480 m) പരിമാണം തുല്യമല്ല.

ഒരു ചലനഗതിയിൽ (course of motion) സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണം പൂജ്യമാവാം. എന്നാൽ ഇവിടെയുള്ള പാതദൈർഘ്യം പൂജ്യമാവില്ല. ഉദാഹരണമായി, കാർ O യിൽ നിന്നു ചലനം തുടങ്ങി P യിലെത്തി, O യിലേക്ക് മടങ്ങിവന്നാൽ, അവസാനത്തെയും ആദ്യത്തെയും സ്ഥാനങ്ങൾ യോജിക്കുന്നതിനാൽ സ്ഥാനാന്തരം പൂജ്യമാകുന്നു. പക്ഷേ, ഇവിടെ ഈ യാത്രയുടെ പാതദൈർഘ്യം OP + PO = 360 m + 360 m = 720 m ആണ്.

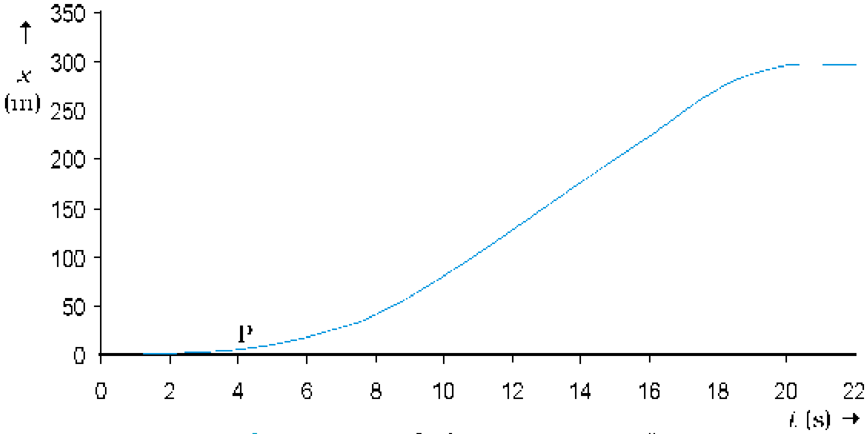
ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാം എന്നു നിങ്ങൾ നേരത്തേ ഗ്രഹിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. അങ്ങനെയുള്ള ഒരു ഗ്രാഫ് വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തെ സൂചിപ്പിക്കാനും വിശകലനം ചെയ്യാനുമുള്ള ശക്തമായ ഒരു ഉപാധിയാണ്. X അക്ഷത്തിലൂടെയുള്ള ഒരു നേർരേഖാചലനത്തിൽ, X നിർദേശാങ്കങ്ങൾ മാത്രമേ സമയാനുസൃതമായി മാറുകയുള്ളൂ. അപ്പോൾ നമുക്കൊരു x-t ഗ്രാഫ് ലഭിക്കുന്നു. ആദ്യം ലളിതമായി സ്ഥിരാവസ്ഥയിലുള്ള ഒരു വസ്തു പരിഗണിക്കാം. ഉദാ. x = 40 m ൽ നിശ്ചലമായി നിൽക്കുന്ന ഒരു കാർ. അതിന്റെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 3.2 (a) യിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ സമയത്തിന്റെ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഒരു നേർവരയാണ്.

നേർരേഖയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു, സമയത്തിന്റെ തുല്യ ഇടവേളകളിൽ തുല്യദൂരങ്ങൾ സഞ്ചരിച്ചാൽ അതിനെ നേർരേഖയിലൂടെയുള്ള സമചലനം (uniform motion along a straight line) എന്നു പറയുന്നു. ചിത്രം 3.2 (b) അങ്ങനെയുള്ള ചലനത്തിന്റെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫാണ്.

t = 0 സമയത്ത് മൂലബിന്ദു O യിൽ സ്ഥിരാവസ്ഥയിലായിരുന്ന ഒരു കാർ ചലിച്ചു t = 10s വരെ അതിന് വേഗം കൂടുകയും തുടർന്ന് സമവേഗത്തിൽ t = 18s വരെ സഞ്ചരിക്കുകയും പിന്നീട് ബ്രേക്ക് ചെയ്തപ്പോൾ t = 20s ൽ x = 296m വരെ സഞ്ചരിച്ച് ചലനം നിലയ്ക്കുകയും ചെയ്തുവെന്നു കരുതുക. ഈ പ്രക്രിയയുടെ സ്ഥാന-സമയഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.3 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഈ ഗ്രാഫിനെ സംബന്ധിച്ച് തുടർന്നുള്ള ഭാഗങ്ങളിൽ പഠിക്കുന്നതാണ്.



ചിത്രം3.2 *a) വിശ്രമാവസ്ഥയിലുള്ള ഒരു വസ്തു, b) സമചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തു എന്നിവയുടെ സ്ഥാന സമയ ഗ്രാഫ്*



ചിത്രം 3.3 ഒരു കാറിന്റെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫ്

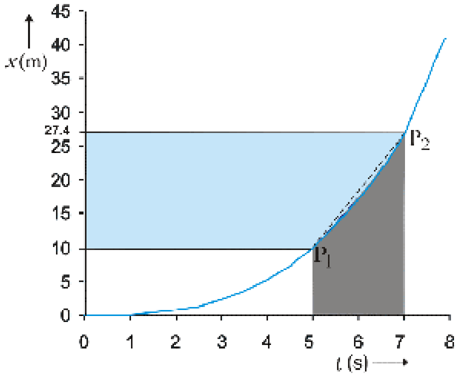
3.3 ശരാശരി പ്രവേഗവും ശരാശരി വേഗവും (Average velocity and average speed)

ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ സ്ഥാനം സമയാനുസൃതമായി മാറുന്നു. പക്ഷേ, എത്ര വേഗത്തിൽ ഏതു ദിശയിലാണ് സ്ഥാനം സമയത്തിനനുസരിച്ചു മാറുന്നത്? ഇത് വിശദമാക്കാനാണ് ശരാശരി പ്രവേഗം എന്ന ഒരു അളവ് നിർവചിക്കുന്നത്. സ്ഥാനാന്തരം (Δx) നെ, സമയഇടവേള(Δt), കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതിനെ ശരാശരി പ്രവേഗം എന്നു നിർവചിക്കുന്നു.

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (3.1)$$

ഇവിടെ x_1, x_2 എന്നിവ യഥാക്രമം t_1, t_2 എന്നീ സമയങ്ങളിൽ ആ വസ്തുവിനുള്ള സ്ഥാനങ്ങളാണ്. ഇവിടെ പ്രവേഗത്തിന്റെ ചിഹ്നത്തിനു മുകളിലുള്ള രേഖ, ശരാശരി അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നു. പ്രവേഗത്തിന്റെ SI യൂണിറ്റ് m/s അല്ലെങ്കിൽ ms^{-1} ആണെങ്കിലും km/hr എന്ന യൂണിറ്റാണ് സാധാരണ ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

സ്ഥാനാന്തരം പോലെ, ശരാശരി പ്രവേഗവും ഒരു സദിശ അളവാണ്. പക്ഷേ, നേരത്തേ വിശദീകരിച്ചതുപോലെ നേർരേഖാചലനത്തിന് സദിശത്തിന്റെ ദിശാസൂചകമായിട്ട് "+" അല്ലെങ്കിൽ "-" അടയാളങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. ഈ അധ്യായത്തിൽ പ്രവേഗത്തിന് സദിശ ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കേണ്ട ആവശ്യമില്ല.



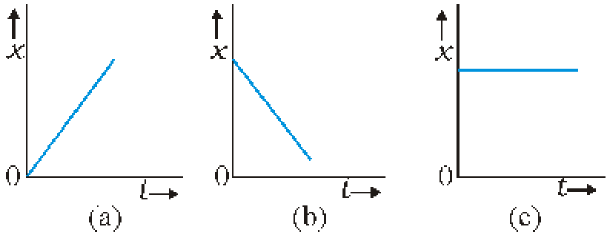
ചിത്രം. 3.4 ശരാശരി പ്രവേഗം വര P_1P_2 ന്റെ ചരിവാണ്.

ചിത്രം 3.3 ൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു കാറിന്റെ ചലനം പരിഗണിക്കുക. സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫിൽ t − 0 സെക്കന്റിനും t − 8 സെക്കന്റിനും ഇടയിലുള്ള ഭാഗത്തെ ചിത്രം 3.4 ൽ വലുതാക്കി കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. പ്ലോട്ടിൽ കാണുന്നതുപോലെ, സമയം t − 5 സെക്കന്റിനും t − 7 സെക്കന്റിനും ഇടയിലുള്ള കാറിന്റെ ശരാശരി പ്രവേഗം എന്നത്:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(27.4 - 10.0)\,\text{m}}{(7 - 5)\,\text{s}} = 8.7\ \text{m s}^{-1}$$

ഇത് ജ്യാമിതീയമായി, ചിത്രം. 3.4 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ആദ്യത്തെ സ്ഥാനം P_1 നെ അവസാനത്തെ സ്ഥാനം P_2 വുമായി ബന്ധിക്കുന്ന P_1P_2 എന്ന നേർവരയുടെ ചരിവാണ്.

സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ ചിഹ്നമനുസരിച്ച് ശരാശരി പ്രവേഗം പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ ആകാം. സ്ഥാനാന്തരം പൂജ്യമായാൽ ശരാശരി പ്രവേഗവും പൂജ്യമായിരിക്കും. ചിത്രം. (3.5 a) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് ഒരു വസ്തു പോസിറ്റീവ് പ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുമ്പോഴും (ചിത്രം. 3.5 b) നെഗറ്റീവ് പ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുമ്പോഴും (ചിത്രം. 3.5 c) സ്ഥിരാവസ്ഥയിൽ ആയിരിക്കുമ്പോഴു മുള്ള ഗ്രാഫുകളാണ്.



ചിത്രം. 3.5 ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫ് a) പോസിറ്റീവ് പ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. b) നെഗറ്റീവ് പ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. c) സ്ഥിരാവസ്ഥയിൽ.

മുകളിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ശരാശരി പ്രവേഗത്തിൽ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം മാത്രമേ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നുള്ളൂ. സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണം ശരിയായ പാതദൈർഘ്യത്തിൽനിന്നു വ്യത്യാസപ്പെടാം എന്നു നാം നേരത്തെ കണ്ടിരുന്നല്ലോ. ശരിയായ പാതയിലൂടെയുള്ള ചലനനിരക്ക് വിവരിക്കാനായി, നമുക്ക് മറ്റൊരു അളവായ ശരാശരി വേഗം പരിചയപ്പെടാം.

ശരാശരി വേഗത്തെ ആകെ സഞ്ചരിച്ച പാതദൈർഘ്യത്തിനെ ചലനം സംഭവിക്കുന്നതിനിടയിൽ എടുത്ത ആകെ സമയംകൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതായി നിർവചിക്കാം. അതായത്

$$\text{ശരാശരിവേഗത} = \frac{\text{ആകെ പാതദൈർഘ്യം}}{\text{ആകെ സമയപരിധി}} \qquad (3.2)$$

ശരാശരി വേഗത്തിന്റെ യൂണിറ്റ് ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ അതേ യൂണിറ്റാണ് (m s^{-1}). ശരാശരി വേഗം നമുക്ക് വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന ചലനദിശയെക്കുറിച്ച് ഒരു അറിവും നൽകുന്നില്ല. അതായത്, ഇത് എല്ലായ്പ്പോഴും പോസിറ്റീവാണ് (ശരാശരി പ്രവേഗം പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ ആകാം). വസ്തുവിന്റെ ചലനം ഒരു നേർവരയിലോ ഒരേ ദിശയിലോ ആയാൽ, സ്ഥാനാന്തരം ആകെ പാതദൈർഘ്യത്തിന് തുല്യമാകും. ആ അവസ്ഥയിൽ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണം ശരാശരി വേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിനു തുല്യമായിരിക്കും. ഇത് എല്ലായ്പ്പോഴും സാധ്യമാകുന്നതല്ല എന്ന് താഴെ പറയുന്ന ഉദാഹരണത്തിലൂടെ കാണാൻ സാധിക്കും.

ഉദാഹരണം 3.1:
ഒരു കാർ OP എന്ന ഒരു നേർവരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നതാണ് ചിത്രം 3.1 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. അത് O യിൽ നിന്നു P വരെ 18 സെക്കന്റിലും തിരിച്ച് P യിൽ നിന്നു Q വരെ 6 സെക്കന്റിലും സഞ്ചരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ a) O യിൽനിന്നു P വരെയും b) O യിൽ നിന്നു P വരെയും തിരിച്ച് Q വരെയും സഞ്ചരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശരാശരി പ്രവേഗവും ശരാശരി വേഗവും എത്രയാണ്?

ഉത്തരം (a)

$$\text{ശരാശരി പ്രവേഗം} = \frac{\text{സ്ഥാനാന്തരം}}{\text{സമയദൈർഘ്യം (ഇടവേള)}}$$

$$\bar{v} = \frac{+\,360\ \text{m}}{18\ \text{s}} = +\,20\ \text{m s}^{-1}$$

$$\text{ശരാശരി വേഗത} = \frac{\text{പാതദൈർഘ്യം}}{\text{സമയദൈർഘ്യം}}$$

$$= \frac{360\ \text{m}}{18\ \text{s}} = 20\ \text{m s}^{-1}$$

അതായത്, ഈ അവസരയിൽ ശരാശരി വേഗം ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിന് തുല്യമാണ്.

b) ഇവിടെ

$$\text{ശരാശരി പ്രവേഗം} = \frac{\text{സ്ഥാനാന്തരം}}{\text{സമയദൈർഘ്യം (ഇടവേള)}}$$

$$= \frac{+240 \text{ m}}{(18+6.0) \text{ s}} = 10 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{ശരാശരി വേഗം} = \frac{\text{പാതദൈർഘ്യം}}{\text{സമയദൈർഘ്യം}} = \frac{OP + PQ}{\Delta t}$$

$$= \frac{(360+120) \text{ m}}{24 \text{ s}} = 20 \text{ m s}^{-1}$$

അതായത്, ഈ സന്ദർഭത്തിൽ ശരാശരി വേഗം ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിന് തുല്യമല്ല. ഇതിനു കാരണം ഇവിടത്തെ ചലനപ്രക്രിയയിൽ ദിശക്കു മാറ്റം സംഭവിക്കുന്നതിനാൽ പാതദൈർഘ്യം സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണത്തേക്കാൾ കൂടുതൽ ആയതാണ്. **പൊതുവായി വേഗം എന്നത് പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തേക്കാൾ കൂടുതലാണെന്നാണിതു സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.** ◀

ഉദാഹരണം 3.1 ൽ കാർ O യിൽ നിന്നു P വരെയും തിരിച്ച് O വരെയും ഒരേ സമയദൈർഘ്യത്തിൽ സഞ്ചരിച്ചാൽ, ശരാശരി വേഗം 20 ms^{-1} ആണ്. പക്ഷേ, ശരാശരി പ്രവേഗം പൂജ്യമായിരിക്കും.

3.4 തൽക്ഷണ പ്രവേഗവും വേഗവും (Instantaneous Velocity and Speed)

ശരാശരി പ്രവേഗം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ഒരു വസ്തു ഒരു പ്രത്യേക ഇടവേളയിൽ എത്ര വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നുവെന്നാണ്. പക്ഷേ, ആ ഇടവേളയിലെ വ്യത്യസ്തക്ഷണങ്ങളിൽ അത് എത്ര വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കും എന്നതിനെപ്പറ്റി ഒന്നുംതന്നെ ഈ പദം സൂചിപ്പിക്കുന്നില്ല. അതിനായി, നമുക്ക് തൽക്ഷണപ്രവേഗം (instantaneous veloctiy) അല്ലെങ്കിൽ Δt എന്ന ക്ഷണത്തിലുള്ള പ്രവേഗം നിർവചിക്കാം.

ഇടവേള, Δt, പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുമ്പോൾ (അതായത് സമയഇടവേള വളരെ വളരെ ചെറുതായിരിക്കുമ്പോൾ), വസ്തുവിന്റെ ശരാശരി പ്രവേഗത്തെ തൽക്ഷണ പ്രവേഗം എന്നു നിർവചിക്കുന്നു. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ,

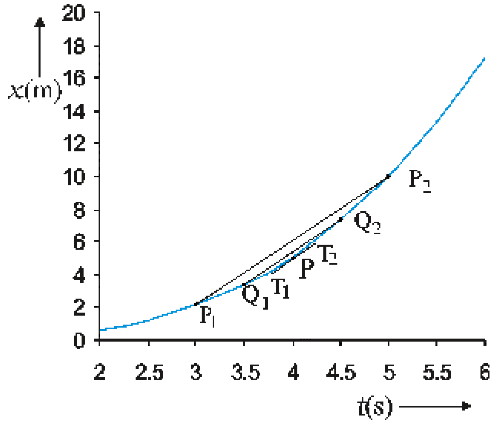
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (3.3a)$$

$$= \frac{dx}{dt} \qquad (3.3b)$$

ഇവിടെ $\lim_{\Delta t \to 0}$ എന്ന ചിഹ്നം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് അതിന്റെ വലതുവശത്തുള്ള അളവിലെ സമയഇടവേള പൂജ്യത്തിനോടടുപ്പിക്കുന്ന പ്രക്രിയയാണ്. ഗണിതഭാഷയിൽ, സമവാക്യം (3.3a) വലതുഭാഗത്തുള്ള അളവ് t യ്ക്ക് അനുസരിച്ചുള്ള x ന്റെ അവകലന ഗുണാങ്കമാണ് (differential coefficient). അതിനെ $\frac{dx}{dt}$ എന്നാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് (അനുബന്ധം 3.1 കാണുക). ഇത് ആ ക്ഷണത്തിലെ സമയത്തിനനുസരിച്ചുള്ള സ്ഥാനമാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണ്.

പ്രവേഗത്തിന്റെ ഒരു പ്രത്യേക ക്ഷണത്തിലുള്ള വില ഗ്രാഫുകൾ ഉപയോഗിച്ചോ സംഖ്യാപരമായോ നിർണയിക്കാൻ സമവാക്യം (3.3a) ഉപയോഗിക്കാം. ചിത്രം 3.3 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന കാറിന്റെ ചലനത്തിൽ, $t = 4$ സെക്കന്റിലെ പ്രവേഗത്തിന്റെ (P എന്ന ബിന്ദു) വില ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കണമെന്ന് കരുതുക. ആ ചിത്രത്തിനെ ചിത്രം 3.6 ൽ വ്യത്യസ്ത തോതുകൾ ഉപയോഗിച്ച് കണക്കുകൂട്ടൽ ലഘുവാക്കാൻ വേണ്ടി വീണ്ടും വരച്ചിരിക്കുന്നു.

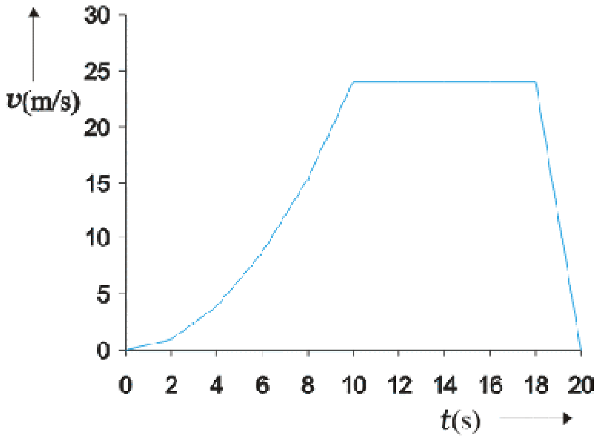
$t = 4$s നെ കേന്ദ്രമാക്കി, $\Delta t = 2$ സെക്കന്റ് പരിഗണിക്കുക. അപ്പോൾ, ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ നിർവചനമനുസരിച്ച് സമയഇടവേള $t = 3$s മുതൽ $t = 5$s വരെയുള്ള ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ വില, രേഖ P_1P_2 വിന്റെ (ചിത്രം 3.6) ചരിവാണ്. ഇനി Δt യുടെ വില 2 സെക്കന്റിൽ നിന്നു ഒരു സെക്കന്റായി കുറക്കുന്നു. അപ്പോൾ



ചിത്രം 3.6 സ്ഥാന-സമയഗ്രാഫിൽ നിന്നു പ്രവേഗം നിർണയിക്കൽ. $t = 4$s ലെ പ്രവേഗം ആ ക്ഷണത്തിലെ ഗ്രാഫിന്റെ തൊടുവരയുടെ ചരിവാണ്.

രേഖ P_1P_2 രേഖ Q_1Q_2 ആവുകയും അതിന്റെ ചരിവ് 3.5 സെക്കന്റ് മുതൽ 4.5 സെക്കന്റ് വരെയുള്ള ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ വിലയായി മാറുന്നു. $\Delta t \to 0$ പരിധിയിൽ, രേഖ P_1P_2 എന്നത് P എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്ഥാന- സമയഗ്രാഫിന്റെ തൊടുവരയാവുകയും, t =4 സെക്കന്റിലെ പ്രവേഗം ആ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് ആവുകയും ചെയ്യും. ഈ പ്രക്രിയയെ ഗ്രാഫുപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എളുപ്പമല്ല. പക്ഷേ, പ്രവേഗത്തിന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കാൻ സംഖ്യാപരമായ രീതി അവലംബിച്ചാൽ, പരിമിതപ്പെടുത്തൽ പ്രക്രിയയുടെ (limiting process) അർഥം വ്യക്തമാകും. ചിത്രം 3.6 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ഗ്രാഫ്, $x = 0.08\,t^3$ ന്റേതാണ് $t = 4$ സെക്കന്റിൽ കേന്ദ്രമാക്കി, $\Delta t = 2.0$ s, 1.0 s, 0.5 s, 0.1 s, 0.01 s എന്നീ സമയ ഇടവേളകളിലുള്ള $\Delta x/\Delta t$ യുടെ വിലകൾ പട്ടിക 3.1 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും നിരകൾ $t_1 = \left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)$, $t_2 = \left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$ എന്നീ വിലകൾ നൽകുന്നു. കൂടാതെ നാലാമത്തെയും അഞ്ചാമത്തെയും നിരകൾ x ന്റെ യോജിച്ച വിലകൾ, *i.e.* $x(t_1) = 0.08\,t_1^3$, $x(t_2) = 0.08\,t_2^3$ എന്നിവ നൽകുന്നു. ആറാമത്തെ നിര $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ വ്യത്യാസത്തിന്റെ പട്ടികയും അവസാനത്തെ നിര Δx, Δt എന്നിവ തമ്മിലുള്ള അനുപാതവും. അതായത് ആദ്യത്തെ നിരയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടികയിലെ Δt യ്ക്ക് യോജിച്ച ശരാശരി പ്രവേഗവും നൽകുന്നു.

പട്ടിക 3.1 ൽ നിന്നു നമ്മൾ കാണുന്നത് Δt യുടെ വിലയെ 2 സെക്കന്റിൽ നിന്നു 0.010 സെക്കന്റിലേക്കു കുറച്ചപ്പോൾ, ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ വിലയുടെ പരിധി 3.84 $m s^{-1}$ നോട് അടുക്കുന്നു. അത് t = 4 സെക്കന്റിൽ ഉള്ള പ്രവേഗത്തിന്റെ വിലയാണ്, അതായത്, t = 4 സെക്കന്റിലെ $\frac{dx}{dt}$ യുടെ വിലയാണ്. ഈ രീതിയിൽ നമുക്ക് ഓരോ ക്ഷണത്തിലെയും കാറിന്റെ പ്രവേഗം കണ്ടുപിടിക്കാം. (ചിത്രം 3.3ൽ തന്നിരിക്കുന്നതുപോലെ). ഈ സന്ദർഭത്തിലെ പ്രവേഗത്തിന്റെ സമയാനുസൃതമായ വ്യതിയാനമാണ് ചിത്രം3.7 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



ചിത്രം 3.7 ചിത്രം 3.3 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ചലനത്തിനനുസൃതമായ ചലനത്തിന്റെ പ്രവേഗ സമയഗ്രാഫ്

തൽക്ഷണപ്രവേഗം കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഗ്രാഫുപയോഗിച്ചുള്ള രീതി (graphical method) ഉപയോഗിക്കുന്നത് എല്ലായ്പ്പോഴും സൗകര്യപ്രദമല്ല. കാരണം ഇതിനായി ശ്രദ്ധയോടെ സ്ഥാന-സമയഗ്രാഫ് വരക്കുകയും Δt ചെറുതായി ചെറുതായി വരുമ്പോഴുള്ള ശരാശരി പ്രവേഗം കണ്ടുപിടിക്കുകയും വേണം. നമുക്ക് വ്യത്യസ്ത ക്ഷണങ്ങളിലുള്ള സ്ഥാനങ്ങളുടെ വിവരങ്ങളോ അല്ലെങ്കിൽ സമയത്തിനനുസരിച്ചുള്ള സ്ഥാനത്തിന്റെ കൃത്യമായ സമവാക്യമോ (expression) ഉണ്ടെങ്കിൽ ആ ക്ഷണങ്ങളിലെ പ്രവേഗം കണ്ടുപിടിക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. അപ്പോൾ നാം പട്ടിക 3.1 ൽ ചെയ്തതുപോലെ, Δt യുടെ വില കുറച്ചുകൊണ്ടു വരുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന അടിസ്ഥാനവിവരങ്ങളിൽ നിന്നും $\Delta x/\Delta t$ നിർണയിക്കു

പട്ടിക 3.1 $t = 4$ s ലുള്ള $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ യുടെ പരിധിമൂല്യം (limiting value)

Δt (s)	t_1 (s)	t_2 (s)	$x(t_1)$ (m)	$x(t_2)$ (m)	Δx (m)	$\Delta x / \Delta t$ ($m s^{-1}$)
2.0	3.0	5.0	2.16	10.0	7.84	3.92
1.0	3.5	4.5	3.43	7.29	3.86	3.86
0.5	3.75	4.25	4.21875	6.14125	1.9225	3.845
0.1	3.95	4.05	4.93039	5.31441	0.38402	3.8402
0.01	3.995	4.005	5.100824	5.139224	0.0384	3.8400

കയും അതിന്റെ വിലയുടെ പരിധി കണ്ടുപിടിക്കുകയും ചെയ്യും. അല്ലെങ്കിൽ അവകലന ഗണിതപ്രകാരമുള്ള (differential calculus) സമവാക്യം ഉപയോഗിക്കുകയും താഴെയുള്ള ഉദാഹരണത്തിൽ ചെയ്യുന്നതുപോലെ പല ക്ഷണങ്ങളിലുള്ള $\frac{dx}{dt}$ കണക്കുകൂട്ടുകയും ചെയ്യും.

> ▶ **ഉദാഹരണം 3.2:** x എന്ന അക്ഷത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം എന്നത് $x = a + bt^2$ ആണ്. അവിടെ $a = 8.5$ m, $b = 2.5$ m s^{-2} എന്നിങ്ങനെയും t യുടെ അളവ് സെക്കന്റിലും ആകുന്നു. ആ വസ്തുവിന് $t = 0$ s, $t = 2.0$ s എന്നീ സമയങ്ങളിൽ എത്ര പ്രവേഗം ഉണ്ടാകും? $t = 2.0$ s, $t = 4.0$ s എന്നീ സമയങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ശരാശരി പ്രവേഗം എത്ര?

ഉത്തരം : അവകലന ഗണിതത്തിന്റെ ആശയത്തിൽ പ്രവേഗം എന്നത്

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a + bt^2\right) = 2b\,t = 5.0\,t \text{ m s}^{-1}$$

$t = 0$ s, ആയിരിക്കുമ്പോൾ $v = 0$ m s^{-1} അതുപോലെ $t = 2.0$ s, ആയിരിക്കുമ്പോൾ $v = 10$ m s^{-1}.

$$\text{ശരാശരി പ്രവേഗം} = \frac{x(4.0) - x(2.0)}{4.0 - 2.0}$$

$$= \frac{a + 16b - a - 4b}{2.0} = 6.0 \times b$$

$$= 6.0 \times 2.5 = 15 \text{ m s}^{-1}$$ ◀

ചിത്രം 3.7 ൽ നിന്ന്, $t = 0$ s മുതൽ $t = 18$ s വരെയുള്ള കാലത്തിനിടയിൽ പ്രവേഗം സ്ഥിരമാണ് എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. $t = 18$ s മുതൽ $t = 20$ s വരെയുള്ള കാലാവധിക്ക് മധ്യേ അത് ഏകതാനമായി കുറയുകയും കൂടാതെ $t = 0$ s മുതൽ $t = 10$ s വരെയുള്ള കാലാവധിയിൽ അത് കൂടുകയും ചെയ്യുന്നു. സമചലനത്തിന് എല്ലാ ക്ഷണത്തിലും പ്രവേഗം ശരാശരിപ്രവേഗത്തിന് തുല്യമായിരിക്കുമെന്നു ശ്രദ്ധിക്കുക.

തൽക്ഷണവേഗം അല്ലെങ്കിൽ വേഗം എന്നത് പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണമാണ്. ഉദാഹരണത്തിന്, പ്രവേഗം +24.0 m s^{-1} ആയാലും -24.0 m s^{-1} ആയാലും രണ്ട് അവസരത്തിലും വേഗം 24.0 m s^{-1} ആണ്. ശരാശരിവേഗം ഒരു നിശ്ചിതസമയ ഇടവേളയിൽ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിനു തുല്യമോ കൂടുതലോ ആയിരുന്നാലും, ഒരു ക്ഷണസമയത്തുള്ള തൽക്ഷണവേഗം ആ സമയത്തെ പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിന് തുല്യമാണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതാണ്. ഇത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

3.5 ത്വരണം (Acceleration)

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗം അതിന്റെ ചലനപുരോഗതിക്കനുസരിച്ച് മാറുന്നു. ഈ മാറ്റത്തെ എങ്ങനെ വിവരിക്കാം? അത് ദൂരത്തിനനുസരിച്ചോ സമയത്തിനനുസരിച്ചോ ഉള്ള പ്രവേഗനിരക്കിലെ വ്യത്യാസമായാണോ പ്രതിപാദിക്കേണ്ടത്? ഗലീലിയോയുടെ കാലഘട്ടത്തിൽപോലും ഇത് ഒരു പ്രശ്നമായിരുന്നു. ഈ മാറ്റത്തെ ദൂരത്തിനനുസരിച്ചുള്ള പ്രവേഗമാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് ആയി വിവരിക്കാൻ കഴിയുമെന്നായിരുന്നു ആദ്യ അനുമാനം. പക്ഷേ, സ്വതന്ത്രമായി വീഴുന്ന വസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തെക്കുറിച്ചും ചരിവുതലത്തിലുള്ള വസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തെക്കുറിച്ചുമുള്ള പഠനത്തിലൂടെ, ഗലീലിയോ പ്രവേഗത്തിന്റെ സമയത്തിനനുസരിച്ചുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് സ്വതന്ത്രമായി വീഴുന്ന എല്ലാ വസ്തുക്കൾക്കും സ്ഥിരമായിരിക്കും എന്ന നിഗമനത്തിലെത്തിച്ചേർന്നു. എന്നാൽ പ്രവേഗമാറ്റം ദൂരത്തിനനുസരിച്ച് സ്ഥിരമല്ല. അത് വീഴ്ചയുടെ ദൂരം കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് കുറയുന്നു. സമയത്തിനനുസരിച്ചുള്ള പ്രവേഗമാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണ് ത്വരണം എന്ന ആശയത്തിലേക്കു ഇത് നയിച്ചു.

ഒരു സമയ ഇടവേളയിലെ ശരാശരി ത്വരണം $\bar{a}$ എന്നത് പ്രവേഗമാറ്റത്തെ സമയ ഇടവേളകൊണ്ട് ഭാഗിക്കുന്നതാണെന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. അതായത്

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (3.4)$$

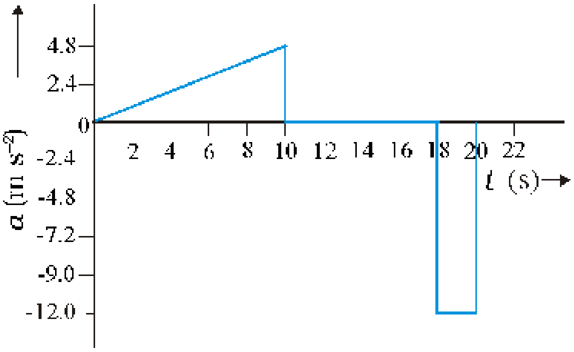
ഇവിടെ v_2, v_1 എന്നത് t_2, t_1 എന്നീ സമയങ്ങളിലുള്ള തൽക്ഷണപ്രവേഗങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ പ്രവേഗങ്ങളാണ്. ഇത് ഒരു യൂണിറ്റ് സമയത്തെ ശരാശരി പ്രവേഗമാറ്റമാണ്. ത്വരണത്തിന്റെ SI യൂണിറ്റ് m s^{-2} ആണ്.

അക്ഷങ്ങളിൽ പ്രവേഗവും സമയവും വരുന്ന ഒരു ഗ്രാഫ് വരച്ചാൽ, ശരാശരി ത്വരണം എന്നത് (v_2, t_2), (v_1, t_1) എന്നീ ബന്ധപ്പെട്ട ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചരിവാണ്. ചിത്രം 3.7 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന പ്രവേഗ-സമയ ഗ്രാഫിന്റെ ശരാശരി ത്വരണം എന്നത് 0s - 10s, 10s - 18s, 18 s - 20s എന്നിങ്ങനെയുള്ള വ്യത്യസ്ത സമയപരിധികളിൽ സൂചിപ്പിച്ചാൽ:

$$0 \text{ s - } 10 \text{ s}, \quad \bar{a} = \frac{(24 - 0)\text{ m s}^{-1}}{(10 - 0)\text{ s}} = 2.4 \text{ m s}^{-2}$$

$$10 \text{ s - } 18 \text{ s}, \quad \bar{a} = \frac{(24 - 24)\text{ m s}^{-1}}{(18 - 10)\text{ s}} = 0 \text{ m s}^{-2}$$

18 s - 20 s , $\bar{a} = \dfrac{(0-24)\,\text{m s}^{-1}}{(20-18)\,\text{s}} = -12\ \text{m s}^{-2}$



ചിത്രം 3.8 : ചിത്രം 3.3ൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ചലനത്തിന്റെ, സമയത്തിനനുസൃതമായ (function of time) ത്വരണം.

തൽക്ഷണ ത്വരണത്തെ തൽക്ഷണ പ്രവേഗത്തിന്റെ അതേ രീതിയിൽ നിർവചിക്കാം:

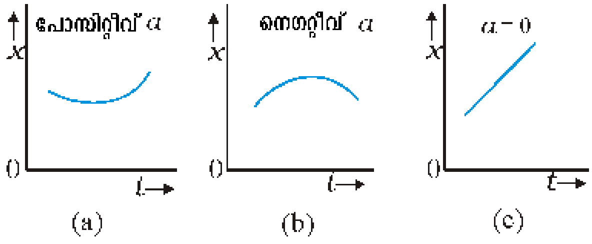
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad (3.5)$$

ഒരു ക്ഷണസമയത്തിലുള്ള ത്വരണമെന്നത് ആ ക്ഷണത്തിലുള്ള $v - t$ ഗ്രാഫിന്റെ തൊടുവരയുടെ ചരിവാണ്. ചിത്രം 3.7 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന $v - t$ ഗ്രാഫിന്, ഓരോ ക്ഷണത്തിലെയും ത്വരണം ലഭിക്കും. തൽഫലമായി ലഭിക്കുന്ന $a - t$ ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.8 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇവിടെ നമുക്ക് ത്വരണം 0 s മുതൽ 10 s വരെയുള്ള സമയപരിധിക്കുള്ളിൽ അസമമാണെന്നു കാണാം. അത് 10 s നും 18 s നും ഇടയിൽ പൂജ്യവും 18 s മുതൽ 20 s വരെ–12 ms^{-2} എന്ന വിലയിൽ സ്ഥിരവുമായിരിക്കും. ത്വരണം സമമായിരിക്കുമ്പോൾ തീർച്ചയായും, അത് ആ പരിധിക്കുള്ളിലെ ശരാശരി ത്വരണത്തിനു തുല്യമായിരിക്കും.

പ്രവേഗം പരിമാണവും ദിശയുമുള്ള ഒരു അളവായതിനാൽ, പ്രവേഗമാറ്റത്തിൽ ഈ ഘടകങ്ങൾ ഒന്നു മാത്രമോ രണ്ടും കൂടിയോ ഉൾപ്പെട്ടേക്കാം. അതുകൊണ്ട് വേഗത്തിലുള്ള വ്യത്യാസം കൊണ്ടോ ദിശയിലുള്ള മാറ്റം അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടിലുമുള്ള മാറ്റംകൊണ്ടോ ത്വരണമുണ്ടാവാം. ത്വരണത്തിന്റെ വില പ്രവേഗത്തിലേപ്പോലെ പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യമോ ആവാം. പോസിറ്റീവ്, നെഗറ്റീവ്, പൂജ്യം എന്നിങ്ങനെ ത്വരണമുള്ള ചലനങ്ങളുടെ സ്ഥാന-സമയഗ്രാഫുകൾ യഥാക്രമം ചിത്രം 3.9 (a), (b), (c) എന്നിവയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. പോസിറ്റീവ് ത്വരണത്തിന് മുകളിലേക്കും, നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തിന് താഴേക്കു വളഞ്ഞും, പൂജ്യം ത്വരണത്തിന് ഒരു നേർരേഖയായും ഇത് കാണപ്പെടുന്നു. ചിത്രം3.3 ൽ ഈ മൂന്ന് സാഹചര്യങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഭാഗങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുക.

ത്വരണത്തിന് സമയത്തിനനുസരിച്ച് മാറാൻ കഴിയുമെങ്കിലും, ഈ അധ്യായത്തിൽ നമ്മുടെ പഠനം സ്ഥിരമായ ത്വരണത്തിലുള്ള ചലനത്തിൽ മാത്രമായി പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഈ അവസ്ഥയിൽ ശരാശരി ത്വരണം ആ കാലയളവിൽ ഉടനീളമുള്ള ത്വരണത്തിന്റെ സ്ഥിരമായ വിലയ്ക്കു തുല്യമാണ്. ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗം $t = 0$ യിൽ v_0 യും സമയം t ആകുമ്പോൾ v യും ആണെങ്കിൽ ലഭിക്കുന്നത്

$$\bar{a} = \frac{v - v_0}{t - 0} \ \text{or,}\ v = v_0 + a\,t \qquad (3.6)$$



ചിത്രം 3.9 : ത്വരണത്തിന്റെ വില a) പോസിറ്റീവ് b) നെഗറ്റീവ് c) പൂജ്യം എന്നിങ്ങനെയാകുമ്പോഴുള്ള ചലനത്തിന്റെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫുകൾ.

ലളിതമായ ചില സാഹചര്യങ്ങൾക്ക് പ്രവേഗ-സമയ ഗ്രാഫ് എങ്ങനെയിരിക്കും എന്ന് നോക്കാം.

താഴെ പറയുന്ന സാഹചര്യങ്ങളിൽ സ്ഥിരത്വരണത്തിലുള്ള ചലനത്തിന്റെ പ്രവേഗ-സമയ ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.10 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

a) ഒരു വസ്തു പോസിറ്റീവ് ദിശയിൽ പോസിറ്റീവ് ത്വരണത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു; ഉദാഹരണമായി ചിത്രം 3.3 ലെ $t = 0$s നും $t = 10$s നും ഇടയിലുള്ള കാറിന്റെ ചലനം.

b) ഒരു വസ്തു നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തിൽ പോസിറ്റീവ് ദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു, ഉദാഹരണമായി ചിത്രം 3.3 ലെ $t = 18$s നും $t = 20$s നും ഇടയിലുള്ള കാറിന്റെ ചലനം.

c) ഒരു വസ്തു നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തിൽ നെഗറ്റീവ് ദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു, ഉദാഹരണമായി ചിത്രം 3.1 ൽ ഉള്ളതുപോലെ നെഗറ്റീവ് x ദിശയിൽ വേഗം

കൂടുന്ന രീതിയിൽ O യിൽ നിന്നുള്ള ഒരു കാറിന്റെ ചലനം.

d) ഒരു വസ്തു പോസിറ്റീവ് ദിശയിൽ സമയം t_1 വരെ സഞ്ചരിക്കുന്നു. എന്നിട്ട് തിരിച്ച് അത്ര തന്നെ നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി ചിത്രം 3.1 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു ബിന്ദു O യിൽനിന്നു മറ്റൊരു ബിന്ദു Q വരെ വേഗം കുറയുന്ന തരത്തിൽ സമയം t_1 ആകുന്നതു വരെയും പിന്നീട് അതേ നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തിൽ തിരിച്ചുമുള്ള ചലനം.

ഏതൊരു ചലിക്കുന്ന വസ്തുവിന്റെയും പ്രവേഗസമയ ഗ്രാഫിനുള്ളിലെ പരപ്പളവ്, തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു സമയ ഇടവേളയിലെ സ്ഥാനാന്തരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു എന്ന താണ് ഈ ഗ്രാഫിന്റെ രസകരമായ ഒരു പ്രത്യേകത. ഈ പ്രസ്താവനയുടെ പൊതുവായ തെളിവിന് അവകലനഗണിതം ആവശ്യമാണ്. എന്നിരുന്നാലും, "u" എന്ന സ്ഥിരപ്രവേഗത്തിൽ ചലിക്കുന്ന ഏതൊരു വസ്തുവിനും ഇത് ശരിയാണെന്ന് കാണാം. അതിന്റെ പ്രവേഗ-സമയഗ്രാഫ് ചിത്രം 3.11 ൽ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയാണ്.

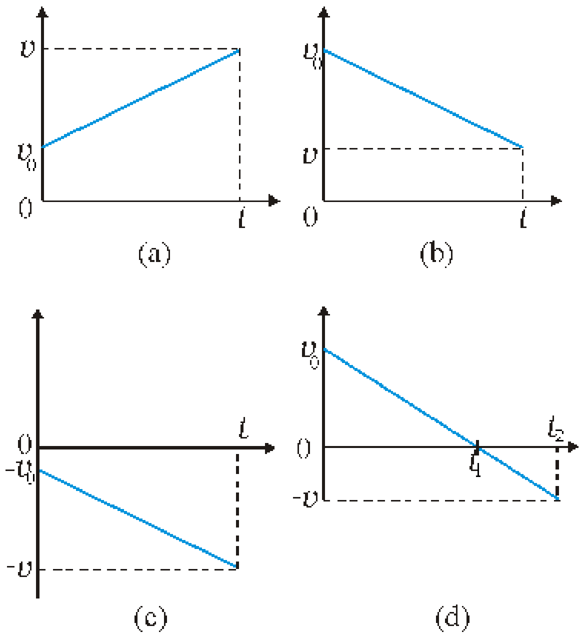
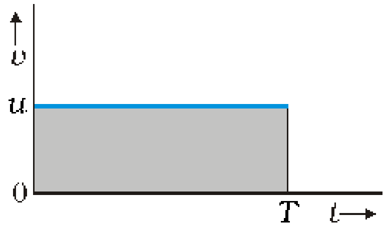


Fig. 3.10 സമത്വരണത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗ-സമയഗ്രാഫ് (a) പോസിറ്റീവ് ദിശയിൽ പോസിറ്റീവ് ത്വരണത്തോടു കൂടിയുള്ള ചലനം. (b) പോസിറ്റീവ് ദിശയിൽ നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തോടു കൂടിയുള്ള ചലനം (c) നെഗറ്റീവ് ദിശയിൽ നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തോടു കൂടിയ ചലനം (d) t_1 സമയത്തിൽ ദിശാമാറ്റം വരുന്ന നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തോടെയുള്ള ചലനം. ഇതിലെ O യ്ക്കും t_1നും ഇടയിൽ ചലനം പോസിറ്റീവ് x ദിശയിലും t_1നും t_2നും ഇടയിൽ വിപരീത ദിശയിലുമാണ്.

ചിത്രം 3.11 v - t ഗ്രാഫിലെ ഷെയ്ഡ് ചെയ്ത ഭാഗത്തിന്റെ



പരപ്പളവ് തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു സമയ ഇടവേളയിലെ സ്ഥാനാന്തരത്തിനുതുല്യമാണ്.

ഈ v - t ഗ്രാഫ് സമയത്തിന്റെ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഒരു നേർരേഖയാണ്. ഇതിന്റെ t =0, t = T എന്നിവക്കിടയിലുള്ള പരപ്പളവ് എന്നത് u ഉയരവും T പാദവുമുള്ള ദീർഘചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ്. അതുകൊണ്ട് പരപ്പളവ് $= u \times T = uT$ എന്നത് ഈ സമയപരിധിക്കുള്ളിലെ സ്ഥാനാന്തരമാണ്. ഇവിടെ പരപ്പളവ് ദൂരത്തിനു തുല്യമായി വരുന്നത് എങ്ങനെയാണെന്നു ചിന്തിക്കൂ! രണ്ട് നിർദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങളിലെയും അളവുകളുടെ മാനങ്ങൾ രേഖപ്പെടുത്തുമ്പോൾ, നിങ്ങൾക്ക് ഇത്തരത്തിൽ എത്തിച്ചേരാം.

ഈ അധ്യായത്തിൽ വിവിധ ചിത്രങ്ങളിലായി കാണിച്ചിരിക്കുന്ന x-t, v-t, a-t ഗ്രാഫുകളിലെ പല ബിന്ദുക്കളിലും ഭംഗുര (sharpkinks) മാകുന്നത് അവിടെ ആ ഫലനങ്ങൾ അവകലനയോഗ്യമല്ലാത്തതിനാലാണ് എന്നു ശ്രദ്ധിക്കുക. ഏതെങ്കിലും യഥാർഥ സാഹചര്യത്തിൽ ആ ഫലനങ്ങൾ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും അവകലനയോഗ്യമായാൽ ഗ്രാഫുകൾ അഭംഗുരമാകുന്നു.

ഭൗതികമായി ഇത് അർഥമാക്കുന്നത് ത്വരണത്തിനും പ്രവേഗത്തിനും ഒരു ക്ഷണത്തിൽ പെട്ടെന്നു മാറാൻ കഴിയില്ലെന്നും മാറ്റങ്ങൾ എപ്പോഴും തുടർച്ചയായി സംഭവിക്കുന്നതാണെന്നുമാണ്.

3.6 സമത്വരണ ചലനത്തിന്റെ ചലന സമവാക്യങ്ങൾ (Kinematic equations for uniformly accelerated motion)

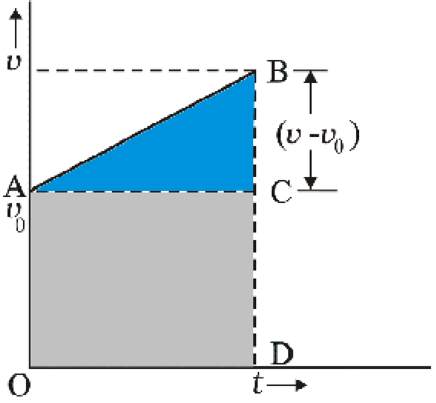
സമത്വരണമുള്ള ചലനത്തിൽ സ്ഥാനാന്തരം (x), എടുത്തസമയം (t), പ്രാരംഭപ്രവേഗം (v_0), അന്ത്യപ്രവേഗം (v),ത്വരണം (a) എന്നിവയെ ബന്ധപ്പെടുത്തുന്ന ചില ലളിതമായ സമവാക്യങ്ങൾ നമുക്കു രൂപീകരിക്കാം. മുൻപു ലഭിച്ച സമവാക്യം (3.6) എന്നത് 'a' എന്ന സമത്വരണ

ത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ അന്ത്യപ്രവേഗം V യും പ്രാരംഭപ്രവേഗം v_0 യും, തമ്മിലുള്ള ഒരു ബന്ധത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$$v = v_0 + at \qquad (3.6)$$

ഈ ബന്ധമാണ് ഗ്രാഫുപയോഗിച്ച് ചിത്രം 3.12ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.
ഈ ഗ്രാഫിന്റെ ഉള്ളിലുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്നത്:
പൂജ്യത്തിനും t ക്കും ഇടയിലുള്ള പരപ്പളവ് = ത്രികോണം ABC യുടെ പരപ്പളവ് + ചതുരം OACD യുടെ പരപ്പളവ് ആയിരിക്കും.

$$= \frac{1}{2}(v - v_0)t + v_0 t$$



ചിത്രം 3.12 സമത്വരണത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ v-t ഗ്രാഫിന്റെ ഉള്ളിലുള്ള പരപ്പളവ്

നേരത്തെ വിശദീകരിച്ചിട്ടുള്ളതുപോലെ v-t ഗ്രാഫിന്റെ ഉള്ളിലുള്ള പരപ്പളവ് സ്ഥാനാന്തരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട്, ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം x എന്നത് :

$$x = \frac{1}{2}(v - v_0)t + v_0 t \qquad (3.7)$$

പക്ഷേ, $v - v_0 = at$

അതിനാൽ, $x = \frac{1}{2}a t^2 + v_0 t$

അല്ലെങ്കിൽ, $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ (3.8)

മറ്റൊരു രീതിയിൽ സമവാക്യം (3.7) നെ എഴുതുന്നത് എങ്ങനെയെന്നാൽ,

$$x = \frac{v + v_0}{2}t = \bar{v}t \qquad (3.9a)$$

ആയിരിക്കും.

ഇവിടെ,

$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$ (സ്ഥിരമായ ത്വരണത്തിനു മാത്രം). (3.9 b)

സമവാക്യങ്ങൾ (3.9 a), (3.9 b) എന്നിവ അർഥമാക്കുന്നത് ആ വസ്തുവിന് ആദ്യപ്രവേഗത്തിന്റെയും അന്ത്യപ്രവേഗത്തിന്റെയും ഗണിതശരാശരിക്കു തുല്യമായ ശരാശരി പ്രവേഗത്തോടെ സ്ഥാനാന്തരം ഉണ്ടാകുന്നു എന്നാണ്.
സമവാക്യം (3.6), ൽ നിന്നു $t = (v - v_0)/a$. എന്നു ലഭിക്കുന്നു. ഇത് സമവാക്യം (3.9a) ൽ നൽകുമ്പോൾ നമുക്ക്

$$x = \bar{v}\,t = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad (3.10)$$

എന്ന സമവാക്യം കിട്ടുന്നു.
സമവാക്യം (3.6) ൽ നിന്നു t യുടെ വില സമവാക്യം (3.8) ൽ നൽകിയാലും ഈ സമവാക്യം ലഭിക്കുന്നതാണ്. അങ്ങനെ, v_0, v, a, t, x എന്നീ അഞ്ച് അളവുകളെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന മൂന്നു പ്രധാനപ്പെട്ട സമവാക്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad (3.11a)$$

ഇവയാണ് സ്ഥിരമായ ത്വരണത്തിലുള്ള നേർരേഖാ ചലനത്തിന്റെ ഗതിക സമവാക്യങ്ങൾ.
(3.11 a) എന്ന സമവാക്യങ്ങളുടെ കൂട്ടം $t = 0$ യിൽ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം $x = 0$ ആണെന്ന സങ്കൽപ്പത്തിൽ നിന്നാണ്. നമുക്ക് കൂടുതൽ പൊതുവായ ഒരു സമവാക്യം ലഭിക്കുന്നത് $t = 0$ യിൽ സ്ഥാനത്തിന്റെ നിർദേശാങ്കം പൂജ്യമല്ല എന്ന് എടുക്കുമ്പോഴാണ് പ്രാരംഭസ്ഥാനം x_0 എന്നു പറയുകയും സമവാക്യം (3.11 a) നെ പരിഷ്കരിക്കുകയും x നു പകരം $(x - x_0)$ ചെയ്താൽ:

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.11b)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (3.11c)$$

ഉദാഹരണം 3.3

അവകലനരീതി ഉപയോഗിച്ച് സ്ഥിര ത്വരണത്തോടുകൂടിയ ചലനസമവാക്യങ്ങൾ രൂപീകരിക്കുക.

ഉത്തരം

ത്വരണത്തിന്റെ നിർവചനമനുസരിച്ച്,

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a\,dt$$

രണ്ടു വശങ്ങളും സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} a\ dt$$

$$= a\int_{0}^{t} dt \quad (a \text{ സ്ഥിരമാണ്})$$

$$v - v_0 = at$$

$$v = v_0 + at$$

കൂടാതെ, $v = \frac{dx}{dt}$

$$dx = v\,dt$$

രണ്ടു വശങ്ങളെയും സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} v\ dt$$

$$= \int_{0}^{t} (v_0 + at)\ dt$$

$$x - x_0 = v_0\ t + \frac{1}{2}a\ t^2$$

$$x = x_0 + v_0\ t + \frac{1}{2}a\ t^2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

or, $v\,dv = a\,dx$ എന്നെഴുതാം.

രണ്ടു വശത്തും സമാകലനം നടത്തിയാൽ,

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = a(x - x_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

ഈ രീതിയുടെ മെച്ചം ഇതിനെ അസമത്വരണമുള്ള ചലനത്തിനും ഉപയോഗിക്കാമെന്നതാണ്.

ഇപ്പോൾ നമുക്ക് ഈ സമവാക്യങ്ങളെ പല പ്രധാനപ്പെട്ട സാഹചര്യങ്ങളിലും ഉപയോഗിക്കാം. ◀

ഉദാഹരണം 3.4

ഒരു പന്ത് $20\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ പ്രവേഗത്തിൽ ഒരു ബഹുനില കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നു ലംബമായി എറിയുന്നു. ആ പന്ത് എറിഞ്ഞ ബിന്ദു വരെ തറനിരപ്പിൽനിന്നുള്ള ഉയരം 25.0 m ആണ്. a) ആ പന്ത് എത്ര ഉയരത്തിൽ സഞ്ചരിക്കും? b) തറയിലെത്താൻ അത് എത്ര സമയമെടുക്കും? $g = 10\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ എന്ന് എടുക്കുക.

ഉത്തരം

ചിത്രം 3.13 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, y അക്ഷത്തിനെ മുകളിലേക്കുള്ള ലംബമായും അതിന്റെ വില തറനിരപ്പിൽ പൂജ്യമായും എടുക്കാം.

അപ്പോൾ $v_o = +20\ \mathrm{m\ s^{-1}}$,

$a = -g = -10\ \mathrm{m\ s^{-2}}$,

$v = 0\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

പന്ത് എറിഞ്ഞ ബിന്ദുവിൽനിന്നു y വരെ ഉയർന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ, എന്നാൽ സമവാക്യം

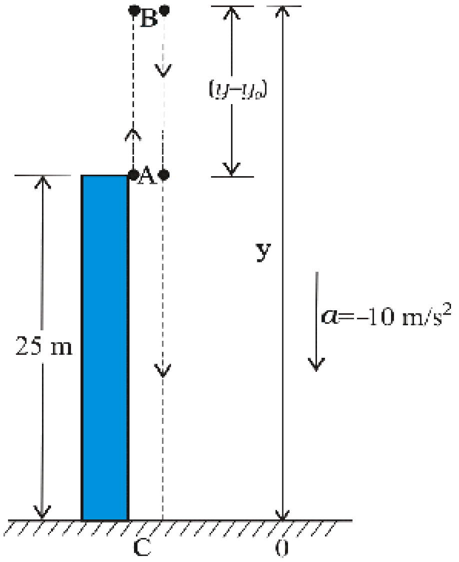
$$v^2 = v_0^2 + 2\,a\,(y - y_0)$$

ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്

$$0 - (20)^2 \quad 2(-10)(y - y_0)$$

ഉത്തരം കണ്ടെത്തുമ്പോൾ $(y - y_o) = 20\ \mathrm{m}$ എന്നു ലഭിക്കും.

(b) പ്രശ്നത്തിന്റെ ഈ ഭാഗത്തിന് രണ്ടു രീതിയിൽ ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാം.



ചിത്രം 3.13

ആദ്യത്തെ രീതി :

ആദ്യത്തെ രീതിയിൽ, പാതയെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളായി തിരിക്കാം. മുകളിലേക്കുള്ള ചലനം (A യിൽനിന്നു B വരെ), താഴേക്കുള്ള ചലനം (B യിൽ നിന്നും C വരെ). ഇവയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട സമയങ്ങൾ t_1, t_2 എന്നിവ യഥാക്രമം കണ്ടുപിടിക്കുക. B യിലെ പ്രവേഗം പൂജ്യമായതുകൊണ്ട്:

$$v = v_o + at$$

$$0 = 20 \quad 10t_1$$

അല്ലെങ്കിൽ, $t_1 = 2$ s എന്നുലഭിക്കും.

ഇതാണ് A യിൽനിന്നു B വരെ പോകാനുള്ള സമയം. B യിൽനിന്നു അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും ഉയരത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിൽനിന്നു, പന്ത് സ്വതന്ത്രമായി ഗുരുത്വാകർഷണ ത്വരണത്തിൽ നെഗറ്റീവ് y ദിശയിൽ വീഴുന്നു. നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന സമവാക്യം,

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \text{ ആണ്.}$$

$y_0 = 45$ m, $y = 0$, $v_o = 0$, $a = g = 10$ms^2 എന്നു നൽകിയാൽ

$$0 = 45 + (½)(-10)\ t_2^2$$

ഉത്തരം കണ്ടെത്തുമ്പോൾ $t_2 = 3$ s എന്നുലഭിക്കും. അതിനാൽ, താഴെയെത്തുന്നതിനു മുൻപു വരെ പന്ത് സഞ്ചരിക്കാനെടുത്ത സമയം $= t_1 + t_2 = 2\text{ s} + 3\text{ s} = 5\text{ s}$.

രണ്ടാമത്തെ രീതി : മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി പന്തിന്റെ ആദ്യവും അവസാനവുമായ സ്ഥാനത്തിന്റെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ രേഖപ്പെടുത്തിയും അത് ആകെ സഞ്ചരിക്കാനെടുത്ത സമയം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$ എന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച്,

ഇപ്പോൾ $y_0 = 25$ m $\quad y = 0$ m

$v_o = 20$ m s^{-1}, $\quad a = -10$m s^{-2}, $\quad t = ?$

$$0 = 25 + 20\,t + (½)\ (-10)\ t^2$$

$$5t^2 - 20t - 25 = 0$$

ഈ വർഗസംഖ്യയുള്ള സമവാക്യത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ

$t = 5$s എന്നു ലഭിക്കും.

ചലനം സ്ഥിരമായ ത്വരണത്തിൽ നടക്കുന്നതിനാൽ ചലനപാതക്ക് പ്രാധാന്യമില്ല. അതുകൊണ്ട് രണ്ടാമത്തെ രീതിയാണ് ഉചിതമെന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക. ◀

▶ ഉദാഹരണം 3.5

(free fall) നിർബാധപതനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തെക്കുറിച്ച് വിശദീകരിക്കുക. വായുവിന്റെ രോധം അവഗണിക്കുക.

ഉത്തരം

ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിനടുത്തു നിന്നു വിട്ടയക്കുന്ന ഏതൊരു വസ്തുവിനും ഗുരുത്വാകർഷണബലത്തിനാൽ താഴേക്ക് ത്വരണമുണ്ടാകുന്നു. ഭൂഗുരുത്വത്വരണത്തിന്റെ പരിമാണം 'g' എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. വായുവിന്റെ ഘർഷണം അവഗണിച്ചാൽ, ആ വസ്തു **നിർബാധപതനത്തിലാണെന്നു** പറയാം. A വസ്തു വീഴുന്ന പൊക്കം ഭൂമിയുടെ ആരവുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ ചെറുതായാൽ g യെ സ്ഥിരമായി എടുക്കാൻ കഴിയും. g എന്നത് 9.8 ms^{-2} ആണ്. നിർബാധപതനം എന്നത് സമത്വരണമുള്ള ഒരു ചലനാവസ്ഥയാണ്.

മുകളിലേക്കുള്ള ദിശ പോസിറ്റീവായി തിരഞ്ഞെടുത്തതുകൊണ്ട് ചലനം y ദിശയിൽ അഥവാ കൂടുതൽ ശരിയായി - y ദിശയിൽ ആയിരിക്കും. ഭൂഗുരുത്വത്വരണം എപ്പോഴും താഴേക്ക് ആയതിനാൽ, അത് നെഗറ്റീവ് ദിശയിലായിരിക്കും. നമുക്കു ലഭിച്ചത്,

$$a = -g = -9.8 \text{ m s}^{2}$$

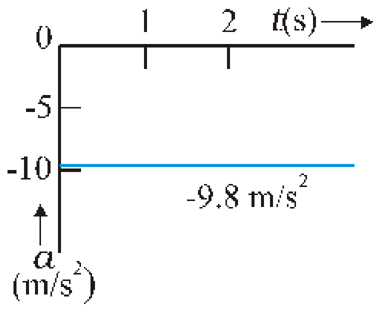
ആ വസ്തുവിനെ നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ $y = 0$ യിൽ നിന്നു വിട്ടയക്കുന്നു. അതിനാൽ $v_o = 0$. അപ്പോൾ ചലനസമവാക്യങ്ങൾ ;

$v = 0 - g\,t = -9.8\ t$ m s^{1}

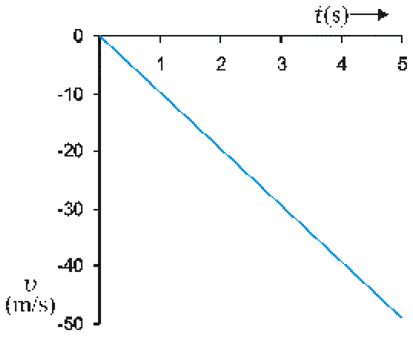
$y = 0 - ½\ g\ t^2 = -4.9\ t^2$ m

$v^2 = 0 - 2\ g\ y = -19.6\ y$ m^2 s^2 എന്നിങ്ങനെ മാറുന്നു.

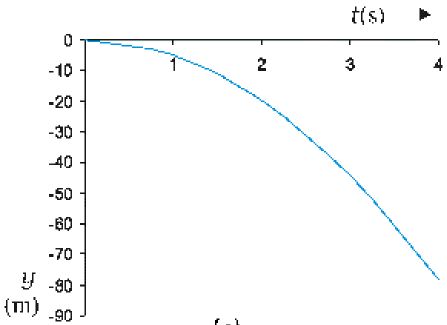
ഈ സമവാക്യങ്ങൾ പ്രവേഗവും സമയത്തിന് അനുസൃതമായി വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരവും നൽകുന്നു. ത്വരണം, പ്രവേഗം, ദൂരം, സമയം എന്നിവയുടെ വ്യതിയാനവും സമയവുമായുള്ള ഗ്രാഫുകൾ ചിത്രം 3.14 (a), (b), (c) എന്നിവയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



(a)



(b)



(c)

ചിത്രം 3.14 : നിർബാധപതനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനം a) സമയത്തിനനുസരിച്ച് ത്വരണത്തിനുള്ള വ്യതിയാനം. b) സമയത്തിനനുസരിച്ച് പ്രവേഗത്തിനുള്ള വ്യതിയാനം. c) സമയത്തിനനുസരിച്ച് ദൂരത്തിനുള്ള വ്യതിയാനം.

ഉദാഹരണം 3.6

ഗലീലിയോയുടെ ഒറ്റ സംഖ്യാ നിയമം: "നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്നും താഴേക്കു പതിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു തുല്യസമയ ഇടവേളകളിൽ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം അന്യോന്യം ഒരേ അനുപാതത്തിൽ ഒന്നിൽ തുടങ്ങി ഒറ്റ അക്കങ്ങളായി നിലകൊള്ളുന്നു. (1:3:5:7.....എന്നിങ്ങനെ) എന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഉത്തരം

നമുക്ക് സ്വതന്ത്രവീഴ്ചയിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തിന്റെ സമയഇടവേളയെ ധാരാളം തുല്യ ഇടവേളകൾ, T ആയി വിഭജിക്കുകയും തുടർച്ചയായ ഇടവേളകളിൽ സഞ്ചരിച്ച ദൂരങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുകയും ചെയ്യാം. പ്രാരംഭ പ്രവേഗം പൂജ്യമായതുകൊണ്ട്

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \text{ എന്ന്.}$$

സമവാക്യമുപയോഗിച്ച് പട്ടിക 3.2 ൽ രണ്ടാമത്തെ നിരയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പോലെ വ്യത്യസ്ത സമയ ഇടവേളകൾ $0, \tau, 2\tau, 3\tau$... കഴിയുമ്പോഴുള്ള വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയും. y_0 എന്നത്, ആദ്യത്തെ സമയ ഇടവേളക്കുശേഷമുള്ള സ്ഥാനത്തിന്റെ നിർദേശാങ്കമാണെന്നെടുത്താൽ മൂന്നാമത്തെ നിരയിൽ y_0 യുടെ യൂണിറ്റിൽ സ്ഥാനങ്ങൾ ലഭിക്കും. നാലാമത്തെ നിര തുടർച്ചയായി സഞ്ചരിച്ച ദൂരങ്ങൾ നൽകുന്നു. ഈ ദൂരങ്ങൾ 1:3:5:7:9:11..... എന്നിങ്ങനെ 3.2 പട്ടികയിലെ അവസാനത്തെ നിരയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, ഒരു ലളിതമായ അനുപാതത്തിലാണെന്നു കാണാം. ഈ നിയമം ആവിഷ്കരിച്ചത് ഗലീലിയോ ഗലീലിയാണ് (1564 -1642). അദ്ദേഹമാണ് ആദ്യമായി സ്വതന്ത്രവീഴ്ചയെക്കുറിച്ചുള്ള പരിമാണിക പഠനങ്ങൾ നടത്തിയത്.

ഉദാഹരണം 3.7 വാഹനങ്ങളുടെ വിരാമദൂരങ്ങൾ (Stopping distances): ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വാഹനം ബ്രേക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ, അതിന്റെ സഞ്ചാരം നിലക്കുന്നതിന് തൊട്ടുമുമ്പ് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരത്തെ വിരാമദൂരം എന്നു പറയുന്നു. റോഡ് സുരക്ഷയുടെ ഒരു പ്രധാനപ്പെട്ട ഘടകമാണിത്. ഇത് ആദ്യപ്രവേഗത്തെയോ(v_0) ബ്രേക്കു ചെയ്യാനുള്ള കഴിവിനേയോ അല്ലെങ്കിൽ അതു സൃഷ്ടിക്കുന്ന മന്ദനത്തേയോ (-a), ആശ്രയിക്കുന്നു. v_0, a ഇവ ഉൾപ്പെടുന്നതരത്തിൽ ഒരു വാഹനത്തിന്റെ വിരാമദൂരം കാണാനുള്ള സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുക.

പട്ടിക 3.2

t	y	y_0 യുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ $y_0 = (-1/2)g\tau^2$	തുടർച്ചയായ ഇടവേളകളിൽ സഞ്ചരിച്ച ദൂരങ്ങൾ	സഞ്ചരിച്ച ദൂരങ്ങളുടെ അനുപാതം
0	0	0		
τ	$-(1/2)g\tau^2$	y_0	y_0	1
2τ	$-4(1/2)g\tau^2$	$4y_0$	$3y_0$	3
3τ	$-9(1/2)g\tau^2$	$9y_0$	$5y_0$	5
4τ	$-16(1/2)g\tau^2$	$16y_0$	$7y_0$	7
5τ	$-25(1/2)g\tau^2$	$25y_0$	$9y_0$	9
6τ	$-36(1/2)g\tau^2$	$36y_0$	$11y_0$	11

ഉത്തരം: വാഹനം നിൽക്കുന്നതിനു മുൻപ് അത് സഞ്ചരിച്ച ദൂരം d_s എന്നിരിക്കട്ടെ. ചലനസമവാക്യം $v^2 = v_0^2 + 2ax$ ഉപയോഗിച്ച് $v = 0$ എന്ന കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കുക. നമുക്ക് വിരാമദൂരം കണ്ടെത്താം.

$$d_s = \frac{-v_0^2}{2a}$$

അതായത് വിരാമദൂരം ആദ്യപ്രവേഗത്തിന്റെ വർഗത്തിന് ആനുപാതികമാണ്. ആദ്യപ്രവേഗം ഇരട്ടിയാകുമ്പോൾ വിരാമദൂരം 4 മടങ്ങാകുന്നു (ഒരേ മന്ദീകരണത്തിന്).

ഒരു പ്രത്യേകനിർമിതിയുള്ള കാറിന്റെ 11, 15, 20, 25 ms^{-1} എന്നീ പ്രവേഗങ്ങൾക്ക് ആനുപാതികമായ വിരാമദൂരങ്ങൾ 10 m, 20 m, 34 m, 50 m എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഈ ബന്ധം മുകളിൽ പറഞ്ഞ സൂത്രവാക്യത്തിനനുസൃതമാണെന്നു കാണാം.

വിരാമദൂരം സ്കൂൾ മേഖലകളിലും മറ്റും വേഗപരിധി നിർണയിക്കാനുള്ള പ്രധാന ഘടകമായി പരിഗണിക്കപ്പെടുന്നു. ◀

▶ **ഉദാഹരണം 3.8**

പ്രതികരണസമയം (Reaction time)

പെട്ടെന്നുള്ള പ്രതികരണം ആവശ്യമായി വരുന്ന ചില സാഹചര്യങ്ങളിൽ, നാം പ്രതികരിക്കാൻ അൽപം സമയം എടുക്കാറുണ്ട്. ഒരു വ്യക്തി നിരീക്ഷിക്കാനും ചിന്തിക്കാനും പിന്നീട് പ്രവർത്തിക്കാനുമെടുക്കുന്ന സമയമാണ് പ്രതികരണസമയം. ഉദാഹരണമായി, ഒരാൾ വാഹനം ഓടിക്കുമ്പോൾ ഒരു കുട്ടിയെ പെട്ടെന്ന് റോഡിൽ കാണുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ അയാൾ ശക്തമായി ബ്രേക്ക് പ്രയോഗിക്കുന്നതിനുമുൻപ് എടുത്ത സമയമാണ് പ്രതികരണസമയം. പ്രതികരണസമയം സാഹചര്യത്തിന്റെ സങ്കീർണതയെയും വ്യക്തിയെയും ആശ്രയിക്കുന്നു.

ഒരു ചെറിയ പരീക്ഷണംകൊണ്ട് നിങ്ങൾക്ക് നിങ്ങളുടെ പ്രതികരണസമയം അളക്കാം. ഒരു റൂളർ എടുത്ത് നിങ്ങളുടെ കൂട്ടുകാരനോട് അത് നിങ്ങളുടെ തള്ളവിരലിന്റെയും ചൂണ്ടുവിരലിന്റെയും ഇടയിലൂടെ ലംബമായി താഴേക്ക് ഇടാൻ പറയുക. (ചിത്രം 3.15) നിങ്ങൾ അത് പിടിച്ച് കഴിയുമ്പോൾ, ആ വടി സഞ്ചരിച്ച ദൂരം d കണ്ടുപിടിക്കുക. ഒരു തവണ d യുടെ വില 21.0 സെ.മീ ആണെങ്കിൽ പ്രതികരണസമയം നിർണയിക്കുക.

ചിത്രം 3.15 *പ്രതികരണസമയം നിർണയിക്കൽ*

ഉത്തരം

റൂളർ നിർബാധമായി താഴേക്ക് വീഴുന്നു. അതുകൊണ്ട്, $v_0 = 0$, കൂടാതെ $a = -g = -9.8\ m\ s^{-2}$ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം d, പ്രതികരണസമയം t_r എന്നിവ തമ്മിൽ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്,

$$d = -\frac{1}{2} g t_r^2$$

അഥവാ, $$t_r = \sqrt{\frac{2d}{g}}\ s$$

തന്നിട്ടുള്ളത്, $d = 21.0$ cm

അപ്പോൾ പ്രതികരണസമയം $t_r = \sqrt{\frac{2 \times 0.21}{9.8}}\ s \simeq 0.2\ s.$

◀

3.7 ആപേക്ഷികപ്രവേഗം (Relative velocity)

ട്രെയിനിൽ യാത്രചെയ്യുമ്പോൾ നിങ്ങൾ സഞ്ചരിക്കുന്ന അതേ ദിശയിൽ മറ്റൊരു ട്രെയിൻ നിങ്ങളെ മറികടന്ന് പോയ അനുഭവം ഉണ്ടായിരിക്കുമല്ലോ. നിങ്ങളെ കടന്നുപോകണമെങ്കിൽ ആ ട്രെയിനിന്റെ വേഗം നിങ്ങളുടേതിനേക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കണം. പുറത്തു നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ ഈ രണ്ടു ട്രെയിനുകളേയും നോക്കിനിൽക്കുമ്പോൾ തോന്നുന്ന വേഗത്തേക്കാൾ കുറവായിരിക്കും നിങ്ങൾക്ക് നിങ്ങളെ മറികടന്നു പോകുന്ന ട്രെയിനിന് ഉള്ളതായി തോന്നുന്നത്. രണ്ടു ട്രെയിനുകൾക്കും തറനിരപ്പുമായി നോക്കുമ്പോൾ ഒരേ പ്രവേഗമാണെങ്കിൽ മറ്റേ ട്രെയിൻ ചലിക്കുന്നതേയില്ല എന്നു തോന്നാം. ഇങ്ങനെയുള്ള നിരീക്ഷണങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാൻ നമ്മൾ ആപേക്ഷികപ്രവേഗം എന്ന ആശയം പരിചയപ്പെടുത്തുന്നു.

ശരാശരി പ്രവേഗങ്ങൾ യഥാക്രമം v_A, v_B ഉള്ള രണ്ടു വസ്തുക്കൾ (*A*, *B* എന്നിവ) ഏകമാനത്തിൽ x

അക്ഷത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നതായി പരിഗണിക്കുക (മറിച്ച് പ്രതിപാദിച്ചില്ലെങ്കിൽ) ഈ അധ്യായത്തിൽ പറയുന്ന പ്രവേഗങ്ങൾ എല്ലാം അളക്കുന്നത് തറനിരപ്പുമായി ബന്ധപ്പെട്ടാണ്) $x_A(0)$, $x_B(0)$ എന്നിവ യഥാക്രമം A, B എന്നിവയുടെ t = 0 സമയത്തുള്ള സ്ഥാനങ്ങളാണെങ്കിൽ അവയുടെ t സമയത്തെ സ്ഥാനങ്ങൾ യഥാക്രമം $x_A(t)$, $x_B(t)$ എന്നിവയാണ്. അതായത്,

$$x_A(t) = x_A(0) + v_A t \quad (3.12a)$$
$$x_B(t) = x_B(0) + v_B t \quad (3.12b)$$

അപ്പോൾ, വസ്തു A യിൽനിന്നു B യിലേക്കുള്ള സ്ഥാനാന്തരം

$$x_{BA}(t) = x_B(t) - x_A(t)$$
$$= [\, x_B(0) - x_A(0) \,] + (v_B - v_A)\, t. \quad (3.13)$$

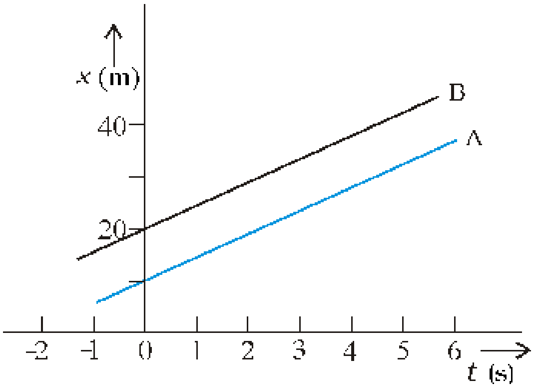
സമവാക്യം (3.13) നെ എളുപ്പത്തിൽ വ്യാഖ്യാനിക്കാൻ സാധിക്കും. വസ്തു A യിൽനിന്നു നോക്കുമ്പോൾ, B ക്ക് $v_B - v_A$ പ്രവേഗമുണ്ട്. കാരണം, A യിൽ നിന്നു B യിലേക്കുള്ള സ്ഥാനാന്തരം സമയത്തിന്റെ ഓരോ യൂണിറ്റിലും സ്ഥിരമായി മാറുന്നത് $(v_B - v_A)$ എന്ന അളവിലാണ്. B എന്ന വസ്തുവിന്റെ A എന്ന വസ്തുവിന് ആപേക്ഷികമായ പ്രവേഗം എന്നത് $v_B - v_A$ ആണ്. അതായത്,

$$v_{BA} = v_B - v_A \quad (3.14a)$$

സമാനമായി A എന്ന വസ്തുവിന് B എന്ന വസ്തുവിന് ആപേക്ഷികമായ പ്രവേഗം

$$v_{AB} = v_A - v_B \quad (3.14b)$$

ആയിരിക്കും.



ചിത്രം 3.16 തുല്യ പ്രവേഗമുള്ള രണ്ടു വസ്തുക്കളുടെ സ്ഥാന– സമയ ഗ്രാഫുകൾ

ഇതുകാണിക്കുന്നത്: $v_{BA} = -v_{AB}$ എന്നാണ്. (3.14c)

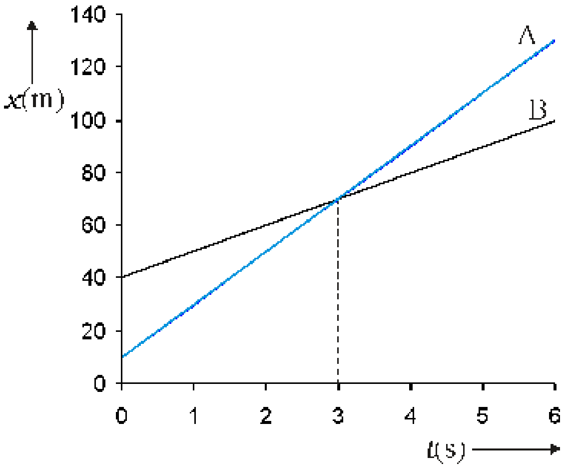
ഇപ്പോൾ നമുക്ക് ചില പ്രത്യേകസാഹചര്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം:

(a) $v_B = v_A$ ആയാൽ $v_B - v_A = 0$ ആകുന്നു. അപ്പോൾ, സമവാക്യം(3.13) ൽ നിന്നു $x_B(t) - x_A(t) = x_B(0) - x_A(0)$ ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട്, രണ്ടു വസ്തുക്കളും സ്ഥിരമായ ദൂരത്തിൽ $(x_B(0) - x_A(0))$ അകന്നിരിക്കുകയും അവയുടെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫുകൾ ചിത്രം (3.16) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ പരസ്പരം സമാന്തരമായ നേർരേഖകളായിരിക്കുകയും ചെയ്യും. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ ആപേക്ഷിക പ്രവേഗം v_{AB} അല്ലെങ്കിൽ v_{BA} പൂജ്യമായിരിക്കും.

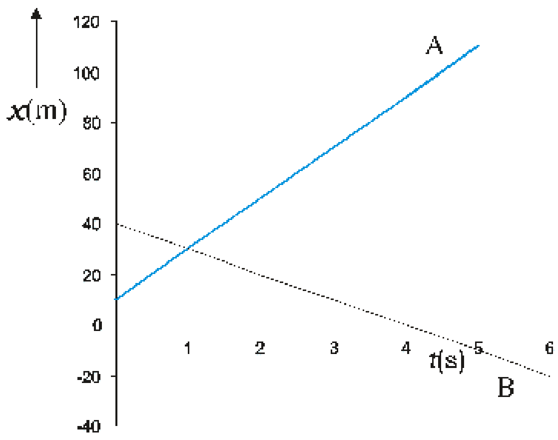
(b) $v_A > v_B$ ആണെങ്കിൽ $v_B - v_A$ നെഗറ്റീവായിരിക്കും. ഒരു ഗ്രാഫ് മറ്റേതിനേക്കാൾ കുത്തനെയുള്ളതായിരിക്കുകയും രണ്ടു ഗ്രാഫുകളും പൊതുവായ ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂടിച്ചേരുകയും ചെയ്യുന്നു. ഉദാഹരണമായി, $v_A = 20\ m\ s^{-1}$, $x_A(0) = 10\ m$, $v_B = 10\ m\ s^{-1}$, $x_B(0) = 40\ m$; എന്നിങ്ങനെയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന സമയം $t = 3\ s$ (ചിത്രം 3.17) ആയിരിക്കും. ഈ ക്ഷണത്തിൽ അവ രണ്ടിന്റെയും സ്ഥാനം $x_A(t) = x_B(t) = 70\ m$ ആണ്. അതായത്, ഈ സമയത്ത് A എന്ന വസ്തുവിനെ B എന്ന വസ്തു മറികടക്കുന്നു. ഈ അവസരത്തിൽ,

$$v_{BA} = 10\ ms^{-1} - 20\ ms^{-1} = -10\ ms^{-1} = -v_{AB}.$$

(c) v_A യ്ക്കും v_B യ്ക്കും വിപരീത ചിഹ്നങ്ങളാണെന്നു കരുതുക. ഉദാഹരണമായി, മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ A എന്ന വസ്തു $x_A(0) = 10\ m$ എന്ന സ്ഥാനത്തുനിന്നു തുടങ്ങി $20\ m\ s^{-1}$ ൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഒപ്പം B എന്ന വസ്തു $x_B(0) = 40\ m$ എന്ന സ്ഥാനത്തുനിന്നു തുടങ്ങി $-10\ m\ s^{-1}$ ൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. അവ രണ്ടും ചിത്രം (3.18) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ $t = 1s$ ൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. B യുടെ A യെ അപേക്ഷിച്ചുള്ള പ്രവേഗം $v_{BA} = [-10-(20)]\ m\ s^{-1} = -30\ m\ s^{-1} = -v_{AB}$ ആകുന്നു. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ v_{BA} അല്ലെങ്കിൽ v_{AB} ($= 30\ m\ s^{-1}$) യുടെ പരിമാണം A യുടെ അല്ലെങ്കിൽ B യുടെ പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തേക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കും. നമ്മൾ പരിഗണിച്ച വസ്തുക്കൾ ട്രെയിനുകളാണെങ്കിൽ, രണ്ടിലേതെങ്കിലും ട്രെയിനിലിരിക്കുന്ന ഒരാൾക്ക് മറ്റേ ട്രെയിൻ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നതായി തോന്നുന്നു. v_A യും v_B യും തൽക്ഷണപ്രവേഗങ്ങളായിരുന്നാലും സമവാക്യം (3.14) സാധുവായിരിക്കും.



ചിത്രം (3.17) തുല്യമല്ലാത്ത പ്രവേഗമുള്ള രണ്ടു വസ്തുക്കളുടെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫുകളും അവ കണ്ടുമുട്ടുന്ന സമയവും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം (3.18) രണ്ടു വസ്തുക്കളുടെ വിപരീതദിശയിലെ പ്രവേഗങ്ങളുടെ സ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫും അവ കുറുകെ കടക്കുന്ന സമയവും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.9

രണ്ടു സമാന്തര റെയിൽവേ ട്രാക്കുകൾ വടക്കു തെക്കു ദിശകളിലുണ്ട്. A എന്ന ട്രെയിൻ വടക്കോട്ട് 54 km h^{-1} വേഗത്തിലും B എന്ന ട്രെയിൻ തെക്കോട്ട് 90 km h^{-1} വേഗത്തിലും ചലിക്കുന്നു. എങ്കിൽ,

a) A യെ അപേക്ഷിച്ച് B യുടെ പ്രവേഗം?

b) B യെ അപേക്ഷിച്ചുള്ള തറയുടെ പ്രവേഗം?

c) ഒരു കുരങ്ങ് A എന്ന ട്രെയിനിന്റെ മുകൾഭാഗത്ത് കൂടി അതിന്റെ ചലനത്തിനെതിരായി (ട്രെയിൻ A യെ അപേക്ഷിച്ച് 18 km h^{-1} പ്രവേഗത്തിൽ) സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ തറയിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ നിരീക്ഷിക്കുന്ന, കുരങ്ങന്റെ പ്രവേഗം എത്രയാണ്?

ഉത്തരം

പോസിറ്റീവ് x അക്ഷത്തെ തെക്കുനിന്നു വടക്കോട്ടുള്ള ദിശയായി സ്വീകരിക്കുക. അപ്പോൾ,

$$v_A = +54 \text{ km h}^{-1} = 15 \text{ m s}^{-1}$$
$$v_B = -90 \text{ km h}^{-1} = -25 \text{ m s}^{-1}$$

A യെ അപേക്ഷിച്ച് B യുടെ ആപേക്ഷികപ്രവേഗം $v_B - v_A = -40 \text{ m s}^{-1}$ ആകുന്നു. അതായത്, B എന്ന ട്രെയിൻ 40 m s^{-1} പ്രവേഗത്തിൽ വടക്കുനിന്നും തെക്കോട്ടു സഞ്ചരിക്കുന്നതായി A എന്ന ട്രെയിനിലെ നിരീക്ഷകന് തോന്നുന്നു. B യെ അപേക്ഷിച്ച് തറയുടെ ആപേക്ഷിക പ്രവേഗം, $= 0 - v_B = 25 \text{ m s}^{-1}$ ആകുന്നു.

തറയെ അപേക്ഷിച്ച് (c) യിൽ കുരങ്ങന്റെ പ്രവേഗം v_M ആണെന്ന് കരുതുക. A യെ അപേക്ഷിച്ച് കുരങ്ങന്റെ ആപേക്ഷിക പ്രവേഗം.

$v_{MA} = v_M - v_A = -18 \text{ km h}^{-1} = -5 \text{ m s}^{-1}$. അതുകൊണ്ട് $v_M = (15 - 5) \text{ m s}^{-1} = 10 \text{ m s}^{-1}$.

സംഗ്രഹം

1. ഒരു വസ്തു ചലനാവസ്ഥയിലാണെന്നു പറയുന്നത് അതിന്റെ സ്ഥാനം സമയത്തിനനുസരിച്ച് മാറുമ്പോഴാണ്. ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം സൗകര്യപ്രദമായി സ്വീകരിച്ച ഒരു മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി വ്യക്തമാക്കാൻ കഴിയും. നേർരേഖാചലനത്തിന്, മൂലബിന്ദുവിന്റെ വലതുവശത്തേക്കുള്ള സ്ഥാനങ്ങൾ പോസിറ്റീവും ഇടതുവശത്തേക്കുള്ളത് നെഗറ്റീവുമായി കരുതുക.

2. പാതദൈർഘ്യം എന്നത് ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ആകെ പാതയുടെ നീളമാണ്.

3. സ്ഥാനത്തിലുള്ള മാറ്റമാണ് സ്ഥാനാന്തരം: $\Delta x = x_2 - x_1$. ഒരേ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണത്തിനു തുല്യമോ കൂടുതലോ ആയിരിക്കും അവിടത്തെ പാതദൈർഘ്യം.

4. ഒരു വസ്തു നേർരേഖയിൽ സമചലനത്തിലാണ് എന്നു പറയണമെങ്കിൽ അതിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം തുല്യസമയ ഇടവേളകളിൽ തുല്യമായിരിക്കണം. അല്ലെങ്കിൽ, ചലനത്തെ അസമചലനം എന്നു പറയുന്നു.

5. ശരാശരിപ്രവേഗമെന്നത് സ്ഥാനാന്തരത്തെ അതു സംഭവിക്കുന്ന സമയ ഇടവേളകൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നതാണ്.

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ഒരു x-t ഗ്രാഫിൽ, ഒരു സമയ ഇടവേളയിലെ ശരാശരിപ്രവേഗം എന്നത് ആ സമയ ഇടവേളയിലെ ആദ്യസ്ഥാനത്തെയും അന്ത്യസ്ഥാനത്തെയും ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചരിവാണ്.

6. ശരാശരി വേഗത എന്നത് ആകെ സഞ്ചരിച്ച പാതദൈർഘ്യവും അതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട സമയ ഇടവേളയും തമ്മിലുള്ള അനുപാതമാണ്. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ശരാശരി വേഗത, തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു സമയ ഇടവേളയിലെ ശരാശരിപ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിന് തുല്യമോ അതിനേക്കാൾ കൂടുതലോ ആയിരിക്കും.

7. Δt എന്ന സമയ ഇടവേള വളരെ ചെറുതാകുമ്പോഴുള്ള ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിധിയെ തൽക്ഷണ പ്രവേഗം അഥവാ പ്രവേഗം എന്ന് നിർവചിക്കാം.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

ഒരു പ്രത്യേക നിമിഷത്തിലെ പ്രവേഗം എന്നത് സ്ഥാന- സമയഗ്രാഫിലെ ആ നിമിഷത്തിലുള്ള തൊടുവരയുടെ ചരിവിനു തുല്യമാണ്.

8. പ്രവേഗ വ്യത്യാസത്തെ ആ വ്യത്യാസമുണ്ടാകാൻ എടുത്ത സമയ ഇടവേളകൊണ്ട് ഭാഗിക്കുന്നതാണ് ശരാശരി ത്വരണം.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

9. തൽക്ഷണ ത്വരണം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് സമയ ഇടവേള Δt പൂജ്യത്തോടടുക്കുമ്പോൾ ഉള്ള ശരാശരി ത്വരണത്തിന്റെ പരിധിയായാണ്.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

ഒരു വസ്തുവിന്റെ, ഒരു പ്രത്യേക സമയത്തെ ത്വരണമെന്നത് ആ ക്ഷണത്തിലെ പ്രവേഗ- സമയ ഗ്രാഫിന്റെ ചരിവാണ്. സമചലനത്തിന്റെ ത്വരണം പൂജ്യമാണ്, ഒപ്പം x -t ഗ്രാഫ് സമയത്തിന്റെ അക്ഷത്തിലേക്ക് ചരിവുള്ള ഒരു നേർരേഖയാണ്. കൂടാതെ v-t ഗ്രാഫ് സമയത്തിന്റെ അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഒരു നേർരേഖയാണ്. സമത്വരണമുള്ള ചലനത്തിന്, x-t ഗ്രാഫ് ഒരു പരാബോളയും v-t ഗ്രാഫ് സമയത്തിന്റെ അക്ഷത്തിലേക്ക് ചരിവുള്ള ഒരു നേർരേഖയുമായിരിക്കും.

10. t_1 , t_2 എന്നീ സമയങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള പ്രവേഗ - സമയ ഗ്രാഫിനു താഴെയുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്നത് ആ വസ്തുവിന്റെ ആ സമയ ഇടവേളക്കിടയിലുള്ള സ്ഥാനാന്തരത്തിനു തുല്യമാണ്.

11. സമത്വരണത്തിൽ നേർരേഖാചലനത്തിലുള്ള വസ്തുക്കളുടെ സ്ഥാനാന്തരം x, എടുത്ത സമയം t, പ്രാരംഭപ്രവേഗം v_0, അന്തിമ പ്രവേഗം v, ത്വരണം a എന്നീ അഞ്ച് അളവുകൾ ഒരു കൂട്ടം ലളിതമായ സമവാക്യങ്ങളാൽ ബന്ധപ്പെട്ടുകിടക്കുന്നു. ഇതിനെ ചലനസമവാക്യങ്ങളെന്നു വിളിക്കുന്നു.

$$v \quad v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം t=0 യിൽ പൂജ്യമാണ്. എന്നാൽ വസ്തു അതിന്റെ ചലനം ആരംഭിക്കുന്നത് $x = x_n$ യിൽ നിന്നായിരിക്കും, മുകളിലുള്ള സമവാക്യത്തിൽ x നു പകരം $x - x_n$ എന്ന് എഴുതേണ്ടിവരും.

ഭൗതിക അളവുകൾ	**പ്രതീകം**	**ഡൈമൻഷണൽ സമവാക്യം**	**ഏകകം**	**പരാമർശം**
പാതദൈർഘ്യം		[L]	മീറ്റർ	
സ്ഥാനാന്തരം	Δx	[L]	മീറ്റർ	ഏകമാനത്തിൽ ഇതിന്റെ ചിഹ്നം ദിശയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.
പ്രവേഗം		$[LT^{-1}]$	മീറ്റർ/ സെക്കന്റ്	
എ) ശരാശരി	$\bar{v}$			$= \frac{\Delta x}{\Delta t}$
ബി) തൽക്ഷണം	v			$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ ഏകമാനത്തിൽ ഇതിന്റെ ചിഹ്നം ദിശയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.
വേഗം		$[LT^{-1}]$	മീറ്റർ/ സെക്കന്റ്	
എ) ശരാശരി				$= \frac{\text{പാതദൈർഘ്യം}}{\text{ഇടവേള}}$
ബി) തൽക്ഷണം				$= \frac{dx}{dt}$
ത്വരണം		$[LT^{-2}]$	മീറ്റർ/ സെക്കന്റ്^{2}	
എ) ശരാശരി	$\bar{a}$			$= \frac{\Delta v}{\Delta t}$
ബി) തൽക്ഷണം	a			$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$ ഏകമാനത്തിൽ ഇതിന്റെ ചിഹ്നം ദിശയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

വിചിന്തന വിഷയങ്ങൾ

1. രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിൽ ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിച്ച പാതദൈർഘ്യം പൊതുവായി, സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണത്തിന് തുല്യമായിരിക്കില്ല. സ്ഥാനാന്തരം അഗ്രബിന്ദുക്കളെ മാത്രം ആശ്രയിക്കുന്നു. പാതദൈർഘ്യം (പേരു സൂചിപ്പിക്കുന്നതുപോലെ) സഞ്ചാരപാതയെ ആശ്രയിക്കും. ഏകമാനത്തിൽ ചലനഗതിയിൽ ആ വസ്തു അതിന്റെ ദിശ മാറ്റുന്നില്ല എങ്കിൽ മാത്രമാണ് ഈ രണ്ട് അളവുകളും സമമാകുന്നത്. മറ്റുള്ള എല്ലാ അവസരങ്ങളിലും പാതദൈർഘ്യം സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണത്തേക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കും.

2. മുകളിലെ പ്രസ്താവന 1 ന്റെ) വീക്ഷണത്തിൽ, ഒരു വസ്തുവിന്റെ ശരാശരി വേഗം തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു സമയ ഇടവേളയിൽ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിനു തുല്യമോ അതിലും കൂടുതലോ ആയിരിക്കും. അവ രണ്ടും തുല്യമാകണമെങ്കിൽ പാതദൈർഘ്യം സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണത്തിനു തുല്യമാകണം.

3. ഒരു അക്ഷത്തിന്റെ മൂലബിന്ദുവും പോസിറ്റീവ് ദിശയും സൗകര്യം പോലെ യഥേഷ്ടം തിരഞ്ഞെടുക്കാവുന്നതാണ്. സ്ഥാനാന്തരം, പ്രവേഗം, ത്വരണം എന്നിവ പോലെയുള്ള അളവുകൾക്ക് ചിഹ്നം നിശ്ചയിക്കുന്നതിനു മുമ്പ് ഈ തിരഞ്ഞെടുപ്പിനെക്കുറിച്ച് വ്യക്തമാക്കണം.

4. ഒരു വസ്തുവിന് വേഗം കൂടുകയാണെങ്കിൽ ത്വരണം പ്രവേഗദിശയിലാണ്. അതിന്റെ വേഗം കുറയുകയാണെങ്കിൽ ത്വരണം പ്രവേഗത്തിന്റെ എതിർദിശയിലാണ്. ഈ പ്രസ്താവന മൂലബിന്ദുവിന്റെയോ അക്ഷത്തിന്റെയോ തിരഞ്ഞെടുപ്പിനെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല.

5. ത്വരണത്തിൻെറ ചിഹ്നം ആ വസ്തുവിന്റെ വേഗം കൂടുകയാണോ കുറയുകയാണോ എന്നതിനേക്കുറിച്ച് ഉൾക്കാഴ്ച തരില്ല. ത്വരണത്തിന്റെ ചിഹ്നം (മൂന്നാമത്തെ പ്രസ്താവനയിലേതുപോലെ) അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് ദിശ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനെ ആശ്രയിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി, മുകളിലേക്ക് ലംബമായുള്ള ദിശയാണ് അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് ദിശയായി എടുക്കുന്നതെങ്കിൽ, ഭൂഗുരുത്വത്വരണം നെഗറ്റീവാണ്. ഒരു വസ്തു ഗുരുത്വാകർഷണത്താൽ വീഴുമ്പോൾ ഈ ത്വരണം നെഗറ്റീവാണെങ്കിൽ കൂടിയും, അതിന്റെ വേഗം കൂടുന്നു. മുകളിലേക്ക് എറിയപ്പെടുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്, ഇതേ നെഗറ്റീവ് ത്വരണത്തിന്റെ (ഗുരുത്വാകർഷണം മൂലമുള്ള) ഫലമായി വേഗം കുറയുന്നു.

6. ഒരു വസ്തുവിന് ഒരു ക്ഷണത്തിൽ പ്രവേഗം പൂജ്യമായാൽ ആ ക്ഷണത്തിൽ അതിന് ത്വരണം പൂജ്യമാണെന്ന് അർഥമാക്കേണ്ടതില്ല. ഒരു വസ്തു നൈമിഷികമായി നിശ്ചലാവസ്ഥയിലാണെങ്കിൽ പോലും അതിന് ത്വരണമുണ്ടാകാം. ഉദാഹരണമായി, മുകളിലേക്കെറിഞ്ഞ ഒരു വസ്തുവിന് ഏറ്റവും മുകളിലുള്ള ബിന്ദുവിൽ പ്രവേഗം പൂജ്യമായിരിക്കും, പക്ഷേ ആ ക്ഷണത്തിലും അതിന്റെ ത്വരണം ഗുരുത്വത്വരണമായിത്തന്നെ തുടരും.

7. ചലന (kinematic) സമവാക്യങ്ങളിൽ, [സമവാക്യം (3.11)] വ്യത്യസ്ത അളവുകൾ ബീജിയമാണ് (algebraic). അതായത്, അവ പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ ആകാം. ആ സമവാക്യങ്ങൾ എല്ലാ സാഹചര്യത്തിലും പ്രയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. (സമ ത്വരണമുള്ളതും ഏകദിശയിലുള്ളതും ആണെങ്കിൽ സമവാക്യത്തിൽ ചേർക്കണം എന്നു മാത്രം.

8. തൽക്ഷണപ്രവേഗത്തിന്റെയും ത്വരണത്തിന്റെയും നിർവചനങ്ങൾ [സമവാക്യം (3.3), (3.5)] എല്ലാം കൃത്യവും എപ്പോഴും ശരിയുമായിരിക്കും. എന്നാൽ സമവാക്യം (3.11)] ചലനഗതിയിൽ ത്വരണത്തിന്റെ പരിമാണവും ദിശയും സ്ഥിരമായി ഇരിക്കുന്ന അവസ്ഥയിൽ മാത്രമേ ശരിയാവുകയുള്ളൂ.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

3.1 താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചലനത്തിന്റെ ഏതൊക്കെ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ, ഒരു വസ്തുവിനെ ഏകദേശം ഒരു പോയിന്റ് വസ്തുവായി പരിഗണിക്കാം?

a) രണ്ടു സ്റ്റേഷനുകൾക്കിടയിൽ തുടർച്ചയില്ലാതെ ചലിക്കുന്ന ഒരു റെയിൽവേകോച്ച് (carriage).

b) ഒരു വൃത്താകാരമായ പാതയിലൂടെ സൈക്കിൾ ചവിട്ടുന്ന ഒരാളുടെ തലയിലിരിക്കുന്ന ഒരു കുരങ്ങൻ.

c) ഭ്രമണം ചെയ്യുന്നതും നിലത്തു പതിക്കുമ്പോൾ പെട്ടെന്നു ഗതിമാറുന്നതുമായ ഒരു ക്രിക്കറ്റ് പന്ത്.

d) ഒരു മേശയുടെ അഗ്രത്തു നിന്നു തെന്നിവീഴുന്ന ഒരു ബീക്കർ.

3.2 A, B എന്നീ രണ്ടു കുട്ടികൾ അവരുടെ സ്കൂളിൽ (O) യിൽ നിന്നു യഥാക്രമം P, Q എന്നിങ്ങനെയുള്ള അവരുടെ വീടുകളിലേക്കു തിരിച്ചുപോകുന്നതിന്റെ സ്ഥാന-സമയ (x-t) ഗ്രാഫുകളാണ് ചിത്രം 3.19 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. താഴെ ബ്രാക്കറ്റിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതിൽ ശരിയായ രേഖപ്പെടുത്തൽ തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

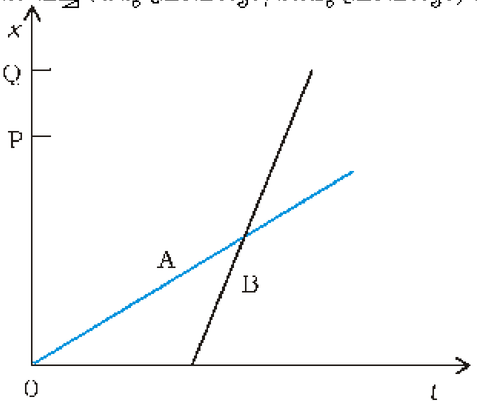
a) (A/B) യേക്കാൾ സ്കൂളിനടുത്തു താമസിക്കുന്നത് (B/A) ആണ്.

b) (A/B) യേക്കാൾ മുമ്പേ സ്കൂളിൽനിന്നു പുറപ്പെടുന്നത് (B/A) ആണ്.

c) (A/B) യേക്കാൾ വേഗത്തിൽ നടക്കുന്നത് (B/A) ആണ്.

d) A യും B യും (ഒരേ/വ്യത്യസ്ത) സമയത്തുവീട്ടിലെത്തുന്നു.

e) (A/B) (B/A) യെ റോഡിൽ വച്ച് (ഒരു പ്രാവശ്യം/രണ്ടു പ്രാവശ്യം) മറികടക്കുന്നു.



ചിത്രം 3.19

3.3 ഒരു സ്ത്രീ രാവിലെ 9 മണിക്ക് വീട്ടിൽ നിന്നു പുറപ്പെടുകയും നേരെയുള്ള ഒരു റോഡിൽ 2.5 കി.മീ അകലെയുള്ള ഓഫീസ് വരെ 5 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗത്തിൽ നടക്കുകയും, ഓഫീസിൽ വൈകുന്നേരം 5 മണി വരെ ഉണ്ടായിരിക്കുകയും ചെയ്യും. അവർ ഒരു ഓട്ടോയിൽ 25 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗത്തിൽ വീട്ടിലേക്ക് തിരിച്ചുപോകുന്നു. അനുയോജ്യമായ രീതിയിലുള്ള സ്കെയിലുകൾ ഉപയോഗിച്ച് അവരുടെ ചലനത്തിന്റെ x-t ഗ്രാഫ് വരക്കുക.

3.4 ഒരു മദ്യപാനി ഇടുങ്ങിയ പാതയിലൂടെ 5 ചുവട് മുമ്പോട്ടും 3 ചുവട് പിറകോട്ടും നടക്കുന്നു. പിന്നീട് വീണ്ടും 5 ചുവട് മുമ്പോട്ടും 3 ചുവട് പിറകോട്ടും നടക്കുന്നു. ഈ ചലനം തുടരുന്നതിന് ഓരോ ചുവടും 1 മീറ്റർ നീളമുള്ളത് 1 സെക്കന്റ് വേണ്ടിവരുന്നതുമാണ്. അയാളുടെ ചലനത്തിന്റെ x-t ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. ഗ്രാഫിൽ നിന്നും അല്ലാതെയും ആ മദ്യപാനി 13 മീറ്റർ അകലെയുള്ള ഒരു കുഴിയിൽ വീഴാൻ അയാൾ ചലനം തുടങ്ങി എത്ര സമയത്തിനുശേഷം അയാൾ 13മീ. അകലെയുള്ള കുഴിയിൽ വീഴുമെന്ന് ഗ്രാഫ് മുഖേനയും അല്ലാതെയും കണക്കാക്കുക.

3.5 500 km h^{-1} വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ജെറ്റ് വിമാനം അതിന്റെ ജ്വലനവസ്തുക്കൾ, ജെറ്റ് വിമാനവുമായി 1500 km h^{-1} ആപേക്ഷിക വേഗതയിൽ പുറന്തള്ളുന്നു. പുറംതള്ളുന്ന ജ്വലന വസ്തുക്കളുടെ വേഗം തറയിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരു നിരീക്ഷകന് ആപേക്ഷികമായി എത്രയാണ്?

3.6. നേരെയുള്ള ഒരു ഹൈവേയിലൂടെ ഒരു കാർ 126 km h^{-1} വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുകയും 200 m ദൂരമെത്തുമ്പോഴേക്കും നിൽക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ആ കാറിന്റെ മന്ദീകരണം (സമമാണെന്നു പരിഗണിച്ചാൽ) എത്ര? കാർ നിൽക്കാൻ എടുത്ത സമയമെത്ര?

3.7. 400 m നീളമുള്ള രണ്ടു ട്രെയിനുകൾ A യും B യും സമാന്തര ട്രാക്കുകളിലൂടെ 72km h^{-1} സമവേഗത്തിൽ ഒരേ ദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. A, B യ്ക്കു മുന്നിലാണ് B യുടെ എൻജിൻ പൈലറ്റ് A യെ മറികടക്കാൻ തീരുമാനിക്കുകയും 1 ms^{-2} ത്വരണമുണ്ടാക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. 50 s കഴിയുമ്പോൾ, B യുടെ ഗാർഡ് A യുടെ എൻജിൻ പൈലറ്റിനെ കടന്നു പോയി എങ്കിൽ അവർ തമ്മിലുള്ള ശരിയായ അകലം തുടക്കത്തിൽ എത്രയായിരുന്നു?

3.8. ഒരു രണ്ടുവരിപ്പാതയിൽ, A എന്ന കാർ 36 km h^{-1} വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. രണ്ടു കാറുകൾ B യും C യും വിപരീതദിശകളിൽനിന്നു 54 km h^{-1} വേഗത്തിൽ A എന്ന കാറിനടുത്തേക്കു വരുന്നു. ദൂരം AB=AC=1 km ആകുന്ന വേളയിൽ B, C യേക്കാൾ മുമ്പേ A യെ മറികടന്നു പോകുവാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. അപകടം കൂടാതെ A യെ മറികടക്കുവാൻ B യ്ക്ക് ലഭിക്കേണ്ട ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ത്വരണം എത്ര?

3.9 A, B എന്ന രണ്ടു പട്ടണങ്ങൾ തുടർച്ചയായ ബസ് ഗതാഗതം വഴി ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇരു ദിശയിലേക്കും ഓരോ T മിനിറ്റിലും ഒരു ബസ് വീതം പുറപ്പെടും. A- യിൽനിന്ന് B യിലേക്ക് 20 km h^{-1} ൽ സൈക്കിൾ ചവിട്ടുന്ന ഒരാൾ കാണുന്നത്, ഒരു ബസ് എല്ലാ 18 മിനിറ്റിലും അയാൾ സഞ്ചരിക്കുന്ന അതേ ദിശയിലും ഒപ്പം ഓരോ 6 മിനിറ്റിലും എതിർദിശയിലും അയാളെ കടന്നുപോകുന്നു എന്നാണ്. ബസ്ഗതാഗതത്തിന്റെ ആവൃത്തികാലം T എത്രയാണ്? കൂടാതെ ഏതു വേഗത്തിൽ (സമമാണെന്നു സങ്കൽപ്പിച്ച്) റോഡിലൂടെ ബസുകൾ സഞ്ചരിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നു?

3.10. ഒരു കളിക്കാരൻ ഒരു പന്ത് മുകളിലേക്ക് 29.4 m/s പ്രാരംഭവേഗത്തിൽ എറിയുന്നു.

a) മുകളിലേക്കുള്ള പന്തിന്റെ ചലനത്തിൽ അതിന്റെ ത്വരണത്തിന്റെ ദിശ ഏതാണ്?

b) അതിന്റെ ചലനപ്രക്രിയയിൽ ഏറ്റവും ഉയരത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിൽ പന്തിനുള്ള പ്രവേഗവും ത്വരണവും എത്ര ?

c) x = 0 m, t = 0 s എന്നിവ പന്തിന്റെ ഏറ്റവും ഉയരത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനമായും സമയമായും താഴേക്ക് ലംബമായുള്ള ദിശ അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് ദിശയായും തിരഞ്ഞെടുക്കുക. പന്തിന്റെ മുകളിലേക്കും താഴേക്കുമുള്ള ചലനത്തിൽ അതിന്റെ സ്ഥാനത്തിന്റെ ചിഹ്നം, പ്രവേഗം, ത്വരണം എന്നിവ നൽകുക.

d) ഈ പന്ത് എത്ര ഉയരം വരെ സഞ്ചരിക്കും? കൂടാതെ എത്ര സമയത്തിനുശേഷമാണ് പന്ത് കളിക്കാരന്റെ കൈകളിൽ തിരിച്ചെത്തുന്നത്? ($g = 9.8\ m/s^2$ എന്നെടുക്കുക. വായുവിന്റെ രോധം അവഗണിക്കുക).

3.11. താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശ്രദ്ധിച്ചു വായിച്ച ശേഷം അവ ശരിയോ തെറ്റോ എന്നു കാരണങ്ങളും ഉദാഹരണങ്ങളും സഹിതം പ്രസ്താവിക്കുക.

ഒരു ഏകമാനചലനത്തിലുള്ള വസ്തു:

a) ഒരു ക്ഷണത്തിലെ വേഗം പൂജ്യത്തോടു കൂടിയതും അതേ ക്ഷണത്തിൽ ത്വരണം പൂജ്യമല്ലാത്തതും.

b) വേഗം പൂജ്യമായതും പ്രവേഗം പൂജ്യമല്ലാത്തതും

c) വേഗം സ്ഥിരമായതും ത്വരണം പൂജ്യമായതും.

d) ത്വരണത്തിന്റെ വില പോസിറ്റീവും വേഗം വർധിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നതും.

3.12. ഒരു പന്ത് 90 മീറ്റർ ഉയരത്തിൽനിന്നു തറയിലേക്ക് ഇടുന്നു. തറയുമായുള്ള ഓരോ കൂട്ടിമുട്ടലിലും പന്തിന്റെ പത്തിലൊന്ന് വേഗം നഷ്ടപ്പെടുന്നു. അതിന്റെ ചലനത്തിന്റെ $t = 0$ മുതൽ $t = 12$ s വരെയുള്ള വേഗ -സമയ ഗ്രാഫ് വരക്കുക.

3.13. താഴെക്കൊടുത്തവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ഉദാഹരണസഹിതം വ്യക്തമാക്കി വിവരിക്കുക.

a) ഒരു ഇടവേളയിലുള്ള സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണവും (ചിലപ്പോൾ ദൂരം എന്നു വിളിക്കുന്നു), അതേ ഇടവേളയിലുള്ള വസ്തു താണ്ടുന്ന പാതയുടെ ആകെ നീളവും.

b) ഒരു സമയ ഇടവേളയിലെ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണവും, അതേ ഇടവേളയിലെ ശരാശരി വേഗം (ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഒരു ഇടവേളയിലെ ശരാശരി വേഗം ആകെ പാതദൈർഘ്യത്തെ ആ ഇട വേളകൊണ്ട് ഭാഗിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നതായി നിർവചിക്കാം). a യിലും b യിലും രണ്ടാമത്തെ അളവ് ആദ്യത്തെ അളവിനേക്കാൾ ഒന്നുകിൽ കൂടുതലോ അല്ലെങ്കിൽ തുല്യമോ ആയിരിക്കും. എപ്പോഴാണ് സമചിഹ്നം സാധുവാകുന്നത്? (ലളിതമായി, ഏകമാന ചലനം മാത്രം പരിഗണിക്കുക).

3.14. ഒരാൾ അയാളുടെ വീട്ടിൽനിന്നു 2.5 km അകലെയുള്ള ചന്തയിലേക്ക് നേരെയുള്ള റോഡിലൂടെ 5 km h^{-1} വേഗത്തിൽ നടക്കുന്നു? ചന്തയിൽ നിന്ന് അപ്പോൾത്തന്നെ അയാൾ തിരിച്ച് 7.5 km h^{-1} വേഗത്തിൽ വീട്ടിലേക്കു നടക്കുകയും ചെയ്തു. എന്താണ്

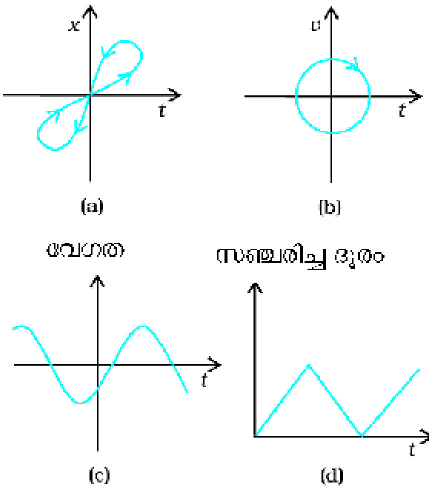
എ) അയാളുടെ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണം?

ബി) താഴെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഇടവേളയിലെ അയാളുടെ ശരാശരി വേഗം?

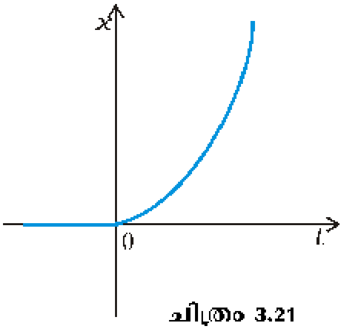
i) 0 മുതൽ 30 മിനിറ്റ്, ii) 0 മുതൽ 50 മിനിറ്റ് iii) 0 മുതൽ 40 മിനിറ്റ് എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇടവേളകളിൽ എത്ര ആയിരിക്കും? (കുറിപ്പ്: ഈ അഭ്യാസത്തിൽനിന്ന് ശരാശരി വേഗത്തെ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണമായല്ല, ആകെ പാതദൈർഘ്യത്തിനെ സമയ ഇടവേളകൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതാണെന്ന നിർവചനമാണ് നല്ലതെന്ന് നിങ്ങൾക്ക് എങ്ങനെ തിരിച്ചറിയാം? നടന്നു ക്ഷീണിച്ച ആ മനുഷ്യനോട് വീട്ടിലെത്തുമ്പോൾ യാത്രയിൽ ശരാശരി വേഗം പൂജ്യമായിരുന്നു എന്നു പറയാൻ നാം താൽപ്പര്യപ്പെടില്ല.)

3.15 അഭ്യാസങ്ങൾ 3.13 ലും 3.14 ലും നമ്മൾ ശ്രദ്ധയോടെ ശരാശരി വേഗത്തേയും ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെയും പരിമാണത്തെ വേർതിരിച്ചറിഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. അങ്ങനെയൊരു വിവേചനം തൽക്ഷണ വേഗവും പ്രവേഗത്തിന്റെ പരിണാമവും പരിഗണിക്കുമ്പോൾ ആവശ്യമില്ല. തൽക്ഷണവേഗം എല്ലായ്പ്പോഴും തൽക്ഷണപ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിനു തുല്യമാണ്. എന്തുകൊണ്ട്?

3.16 (a) മുതൽ (d) വരെ ഗ്രാഫുകൾ (ചിത്രം 3.20) ശ്രദ്ധയോടെ വീക്ഷിക്കുക. ഇതിൽ ഏതൊക്കെ ഗ്രാഫുകളാണ് ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഏകമാനചലനം സൂചിപ്പിക്കാൻ സാധ്യതയില്ലാത്തത് എന്നു കാരണങ്ങൾ സഹിതം പ്രസ്താവിക്കുക.



ചിത്രം 3.20

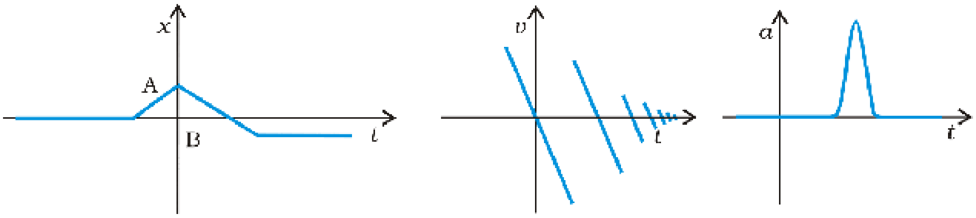


ചിത്രം 3.21

3.17. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഏകമാനചലനത്തിന്റെ x-t ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.21 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഈ ഗ്രാഫിൽനിന്ന് ആ വസ്തു $t < 0$ ൽ നേർവരയിൽ സഞ്ചരിക്കുമെന്നും $t > 0$ പരാബൊളയായിരിക്കുമെന്നും പറയാൻ കഴിയുമോ? പറയുന്നത് ശരിയാവുമോ? അങ്ങനെയല്ലെങ്കിൽ, ഈ ഗ്രാഫിന് യോജിച്ച ഭൗതികസന്ദർഭം നിർദേശിക്കുക.

3.18. ഒരു ഹൈവേയിലൂടെ 30 km h^{-1} വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു പോലീസ്‌വാൻ അതേ ദിശയിൽ 192 km h^{-1} വേഗത്തിൽ അകന്നു പോകുന്ന ഒരു കള്ളന്റെ കാറിലേക്ക് വെടിവയ്ക്കുന്നു. ബുള്ളറ്റിന്റെ മസ്സിൽ വേഗം 150 ms^{-1} ആയാൽ, ആ ബുള്ളറ്റ് കള്ളന്റെ കാറിൽ ഇടിക്കുന്ന വേഗം എത്ര? (കുറിപ്പ് :കള്ളന്റെ കാറിന് കേടുവരുത്താൻ തക്കതായ വേഗം നിർണ്ണയിക്കുക).

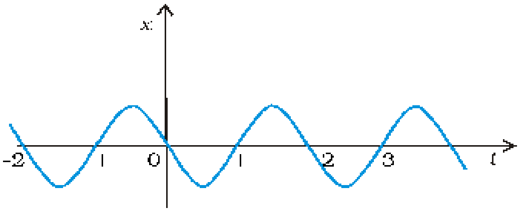
3.19. ചിത്രം 3.22 ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഗ്രാഫുകളിൽ ഓരോ ഗ്രാഫിനും യോജിച്ച ഒരു ഭൗതികസാഹചര്യം നിർദേശിക്കുക.



(a) (b) (c)

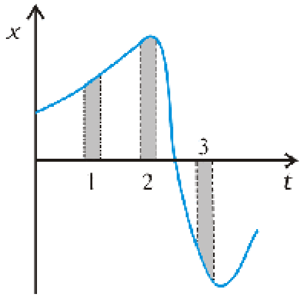
ചിത്രം 3.22

3.20. ഒരു ഏകമാന സരള ഹാർമോണിക ചലനത്തിലുള്ള (One dimensional simple harmonic motion) ഒരു വസ്തുവിന്റെ x-t ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.23 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്നത്. (ഈ ചലനത്തെക്കുറിച്ച് നിങ്ങൾ അധ്യായം 14 ൽ കൂടുതൽ വിശദമായി പഠിക്കും). സ്ഥാനം, പ്രവേഗം, ത്വരണം എന്നിവയുടെ പരിവർത്തിതങ്ങളുടെ (Variables) ചിഹ്നങ്ങൾ t= 0.3 സെക്കന്റ്, 1.2 സെക്കന്റ്, -1.2 സെക്കന്റ് എന്നീ സമയങ്ങളിൽ ഏതായിരിക്കും?

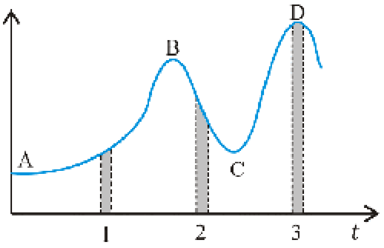


ചിത്രം 3.23

3.21 ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഏകമാനചലനത്തിന്റെ x-t ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.24 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്നത്. മൂന്നു വ്യത്യസ്തമായ തുല്യസമയ ഇടവേളകളാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഏത് ഇടവേളയിലാണ് ശരാശരി വേഗം ഏറ്റവും കൂടുതൽ? ഏതിലാണ് ഏറ്റവും കുറവ് ? ഓരോ ഇടവേളയിലെയും ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ ചിഹ്നം നൽകുക.



3.22 സ്ഥിരമായ ദിശയിൽ ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ വേഗ-സമയ ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.25 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്നത്. മൂന്നു തുല്യ ഇടവേളകളാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഏത് ഇടവേളയിലാണ് ശരാശരി ത്വരണത്തിന്റെ പരിമാണം ഏറ്റവും കൂടുതലാവുന്നത്? ഏത് ഇടവേളയിലാണ് ശരാശരി വേഗം ഏറ്റവും കൂടുതലാവുന്നത്? പോസിറ്റീവ് ദിശ സ്ഥിരമായ ദിശയായി സ്വീകരിച്ചുകൊണ്ട്, മൂന്ന് ഇടവേളകളിലെയും v, a എന്നിവയുടെ ചിഹ്നങ്ങൾ നൽകുക. A,B,C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ ത്വരണങ്ങൾ ഏതൊക്കെ?



ചിത്രം 3.25

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

3.23. ഒരു മൂന്നു ചക്രമുള്ള വണ്ടിക്ക്, നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്നു 10 s സമയം വരെ $1\ ms^{-2}$ ത്വരണമുണ്ടാവുകയും പിന്നീട് അത് സമപ്രവേഗത്തിൽ ചലിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ആ വാഹനം n-ാമത് സെക്കന്റിൽ താണ്ടിയ ദൂരവും n ഉം (n = 1,2,3.............) തമ്മിലുള്ള ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. ത്വരിത ചലനമുണ്ടാകുമ്പോഴുള്ള ഗ്രാഫ് എങ്ങനെയായിരിക്കും എന്നാണ് നിങ്ങൾ പ്രതീക്ഷിക്കുന്നത്? ഒരു നേർരേഖയോ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു പരാബോളയോ?

3.24. നിശ്ചലമായ ഒരു ലിഫ്റ്റിൽ (മുകൾഭാഗം തുറന്നത്) നിൽക്കുന്ന ഒരു ആൺകുട്ടി ഒരു പന്ത് അവന് പ്രദാനം ചെയ്യുവാൻ കഴിയുന്ന പരമാവധി വേഗതയായ $49\ ms^{-1}$ എന്ന പ്രാരംഭ വേഗത്തിൽ മുകളിലേക്ക് എറിയുന്നു. ആ പന്ത് തിരിച്ച് അവന്റെ കൈകളിലെത്താൻ എത്ര സമയമെടുക്കും? ആ ലിഫ്റ്റ് മുകളിലേക്ക് $5\ ms^{-1}$ സമവേഗത്തിൽ ചലിക്കുമ്പോൾ ആ കുട്ടി വീണ്ടും അവന് സാധ്യമായ പരമാവധി വേഗത്തിൽ പന്ത് മുകളിലേക്ക് എറിഞ്ഞാൽ എത്രസമയം കൊണ്ട് പന്ത് അവന്റെ കൈകളിൽ തിരിച്ചെത്തും?

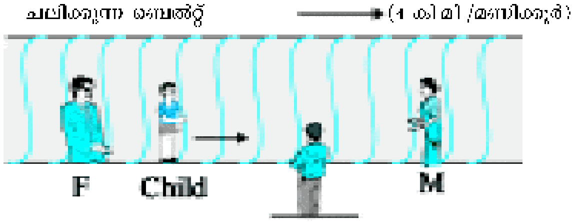
3.25. തിരശ്ചീനമായി ചലിക്കുന്ന നീളമുള്ള ഒരു ബെൽറ്റിൽ (ചിത്രം 3.26) ഒരു കുട്ടി അങ്ങോട്ടും ഇങ്ങോട്ടും $9\ kmh^{-1}$ വേഗത്തിൽ (ബെൽറ്റിനെ അപേക്ഷിച്ച്) ബെൽറ്റിലൂടെ അച്ഛനും അമ്മയ്ക്കും ഇടയിൽ ഓടുന്നു. അച്ഛനും അമ്മയും പരസ്പരം 50m അകലത്തിലാണ്. ആ ബെൽറ്റ് $4\ kmh^{-1}$ വേഗത്തിൽ ചലിക്കുന്നു. പുറത്തുള്ള നിശ്ചലമായ ഒരു പ്ലാറ്റ്ഫോമിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരു നിരീക്ഷകന്;

a) ബെൽറ്റിന്റെ ചലനദിശയിൽ ഓടുന്ന കുട്ടിയുടെ വേഗം?

b) ബെൽറ്റിന്റെ ചലനദിശയുടെ വിപരീതദിശയിൽ ഓടുന്ന കുട്ടിയുടെ വേഗം?

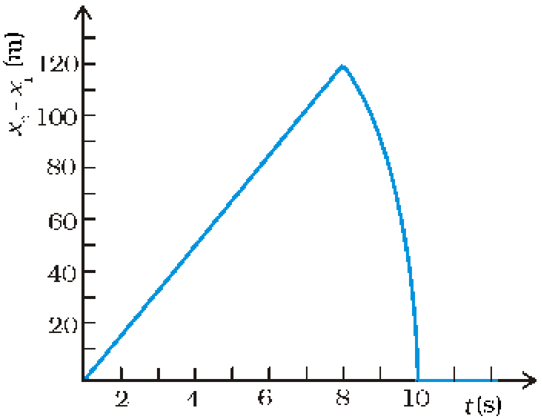
c) (a) യിലും (b) യിലും കുട്ടി എടുക്കുന്ന സമയം എത്രയായിരിക്കും?

മാതാപിതാക്കളിലൊരാൾ ഈ ചലനം കാണുന്നെങ്കിൽ ഏത് ഉത്തരമാണ് വ്യത്യാസപ്പെടുന്നത്?



ചിത്രം 3.26
നിശ്ചലാവസ്ഥയിലുള്ള നിരീക്ഷകൻ

3.26 200 മീറ്റർ പൊക്കമുള്ള കുത്തനെയുള്ള ഒരു പാറയുടെ മുകളിൽ നിന്ന് യഥാക്രമം $15\ ms^{-1}$, $30\ ms^{-1}$ പ്രാരംഭവേഗത്തോടെ രണ്ടു കല്ലുകൾ ഒരേസമയം മുകളിലേക്ക് എറിയുന്നു. ചിത്രം 3.27 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ഗ്രാഫ് രണ്ടാമത്തെ കല്ലിന്റെ ഒന്നാമത്തേതിനെ ആശ്രയിച്ചുള്ള ആപേക്ഷികസ്ഥാന-സമയ ഗ്രാഫാണെന്ന് കാണിക്കുക. വായുവിന്റെ രോധം അവഗണിക്കുക. ഒപ്പം കല്ലുകൾ താഴെ ഇടിച്ചശേഷം തിരിച്ചടിക്കുകയില്ലെന്ന് വിചാരിക്കുക. $g = 10\ ms^{-2}$ എന്നെടുക്കുക. ഗ്രാഫിന്റെ രേഖീയമായതും ഒപ്പം വളഞ്ഞതുമായ ഭാഗങ്ങളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ എഴുതുക.



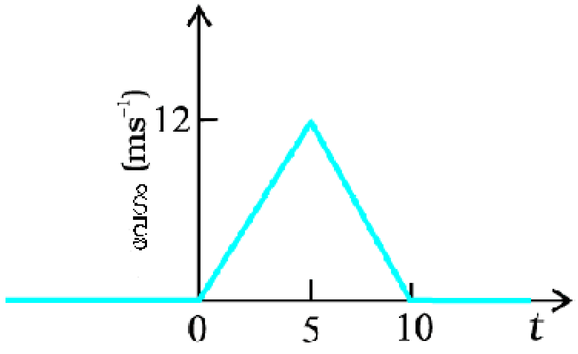
ചിത്രം 3.27

3.27. ഒരു നിശ്ചിത ദിശയിൽ ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ വേഗ - സമയ ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.28 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ആ വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരം നിർണയിക്കുക.

a) t = 0 s മുതൽ 10 s വരെ

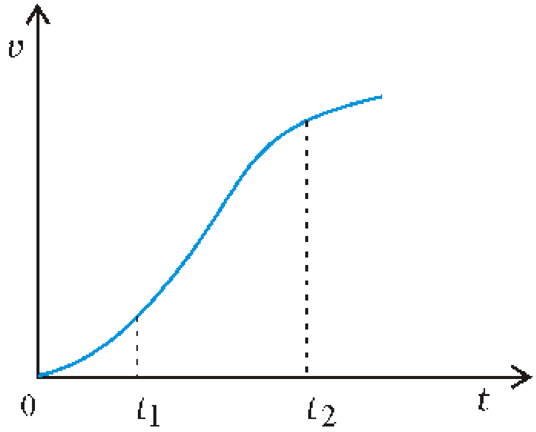
b) t = 2 s മുതൽ 6 s വരെ, ആ വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരം നിർണയിക്കുക.

(a) യിലെയും (b) യിലെയും ഇടവേളകളിലുള്ള ശരാശരി വേഗം എന്താണ്?



ചിത്രം 3.28

3.28. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഏകമാനചലനത്തിന്റെ പ്രവേഗ - സമയ ഗ്രാഫാണ് ചിത്രം 3.29 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ആ വസ്തുവിന്റെ t_1 മുതൽ t_2 വരെയുള്ള ഇടവേളകളിലുള്ള ചലനത്തെ വിവരിക്കാൻ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതിൽ ശരിയായ സൂത്രവാക്യങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?



ചിത്രം 3.29

(a) $x(t_2) = x(t_1) + v(t_1)(t_2 - t_1) + (½)\, a\, (t_2 - t_1)^2$

(b) $v(t_2) = v(t_1) + a\,(t_2 - t_1)$

(c) $v_{\text{ശരാശരി}} = (x(t_2) - x(t_1))/(t_2 - t_1)$

(d) $a_{\text{ശരാശരി}} = (v(t_2) - v(t_1))/(t_2 - t_1)$

(e) $x(t_2) = x(t_1) + v_{\text{ശരാശരി}}(t_2 - t_1) + (½)\, a_{\text{ശരാശരി}}\, (t_2 - t_1)^2$

(f) $x(t_2) - x(t_1)$ = v-t ഗ്രാഫിന്റെ t അക്ഷത്തിനും കുത്തുകളുള്ള ഭാഗങ്ങൾക്കും ഇടയിലുള്ള പരപ്പളവ്.

അനുബന്ധം 3.1 : കാൽക്കുലസിന്റെ അടിസ്ഥാനതത്വങ്ങൾ (Elements of Calculus)

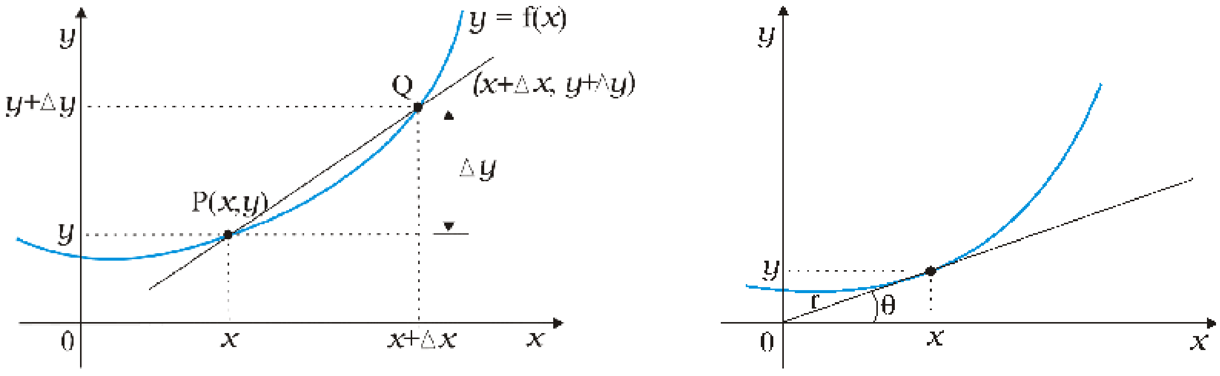
അവകലനഗണിതം (Differential Calculus)

അവകലനഗുണാങ്കം (Differential coefficient) അല്ലെങ്കിൽ ആനുമാനികം (derivative) എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് വളരെ എളുപ്പത്തിൽ പ്രവേഗത്തെയും ത്വരണത്തെയും നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കും. നിങ്ങൾ കണക്കിൽ ആനുമാനികങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുമെങ്കിലും, നാം ഈ ആശയം ചുരുക്കി ഈ അനുബന്ധത്തിലൂടെ പരിചയപ്പെടുന്നു. ചലനത്തിൽ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഭൗതിക അളവുകളെപ്പറ്റിയുള്ള വിവരണം എളുപ്പമാക്കാൻ വേണ്ടിയാണിത്.

നമുക്ക് ഒരു അളവ് y ഉണ്ടെന്നിരിക്കട്ടെ. അതിന്റെ വില x എന്ന ഒറ്റ അസ്ഥിര ഘടകത്തെ മാത്രം ആശ്രയിക്കുന്നു, ഒരു സമവാക്യരൂപത്തിൽ x ന്റെ ചില പ്രത്യേക ഫലനങ്ങളായി ആവിഷ്കരിക്കുന്നു.

അതായത്, $y = f(x)$ (1)

ചിത്രം3.3 (a) യിൽ കാണുന്നതു പോലെ ഈ ബന്ധം ചിത്രീകരിക്കാൻ y= f(x) എന്ന ഫലനത്തിലെ y, x എന്നിവ കാർട്ടീഷ്യൻ നിർദേശാങ്കങ്ങളായി കരുതി ഒരു ഗ്രാഫ് വരക്കാം.



(a) (b)

ചിത്രം. 3.30

$y = f(x)$ എന്ന വക്രരേഖയിലെ (x, y) എന്നീ നിർദേശാങ്കങ്ങളുള്ള P എന്ന ഒരു ബിന്ദുവും $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ ഉള്ള Q എന്ന ബിന്ദുവും പരിഗണിക്കുക. P, Q ഇവയെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്ന രേഖയുടെ ചരിവ് എന്താണ്?

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x} \quad (2)$$

ഇപ്പോൾ Q എന്ന ബിന്ദു വക്രരേഖയിലൂടെ P എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് സഞ്ചരിക്കുന്നതായി സങ്കൽപ്പിക്കുക. ഈ പ്രക്രിയയിൽ, Δy യും Δx ഉം കുറഞ്ഞ് വന്ന് പൂജ്യത്തിനടുത്തെത്തുമെങ്കിലും, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ പൂജ്യമാവണമെന്നില്ല. $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ ആയാൽ PQ എന്ന രേഖക്ക് എന്തു സംഭവിക്കും? ചിത്രം 3.20 (b) യിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഈ രേഖ ആ വക്രരേഖയിലെ P എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്പർശരേഖയായി മാറുന്നത് നിങ്ങൾക്ക് കാണാൻ കഴിയും. $\tan\theta$ യുടെ വില P യിലെ സ്പർശരേഖയുടെ ചരിവിന്റെ വിലയുടെ അടുത്തേക്ക് (m എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം) എത്തുന്നു.

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x} \quad (3)$$

$\Delta y / \Delta x$ എന്ന അനുപാതത്തിലെ Δx പൂജ്യത്തിനടുത്തെത്തുമ്പോളുള്ള പരിധിയെ y യുടെ x നനുസരിച്ചുള്ള

ആനുമാനികം (derivative) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഇതിനെ dy/dx എന്നാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. $y = f(x)$ എന്ന വക്രരേഖയിലെ (x, y) എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്പർശരേഖയുടെ ചരിവാണ് ഇതു സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. $y = f(x)$ കൂടാതെ $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ എന്നിങ്ങനെ ആയതുകൊണ്ട് ആനുമാനികത്തിന്റെ നിർവചനം ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

താഴെ തന്നിരിക്കുന്നത് ഫലനങ്ങളുടെ ആനുമാനികങ്ങളുടെ പ്രാഥമിക സൂത്രവാക്യങ്ങളാണ്. ഇതിൽ u(x), v(x) എന്നിവ x ന്റെ ഫലനങ്ങളാണ്. a, b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. കുറച്ച് സാധാരണ ഫലനങ്ങളുടെ ആനുമാനികങ്ങളും കൂടെ ലിസ്റ്റ് ചെയ്തിട്ടുണ്ട്.

$$\frac{d(au)}{dx} = a\frac{du}{dx} \quad ; \quad \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad ; \quad \frac{d(u/v)}{dx} = \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\mathrm{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \cdot \sec x \quad ; \quad \frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}^2 x) = -\cot x \,\mathrm{cosec}\, x$$

$$\frac{d}{dx}(u)^n = n\,u^{n-1}\frac{du}{dx} \quad ; \quad \frac{d}{du}(\ln u) = \frac{1}{u}$$

$$\frac{d}{du}(e^u) = e^u$$

ആനുമാനികങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തൽക്ഷണപ്രവേഗവും ത്വരണവും ഇങ്ങനെ നിർവചിക്കാം.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

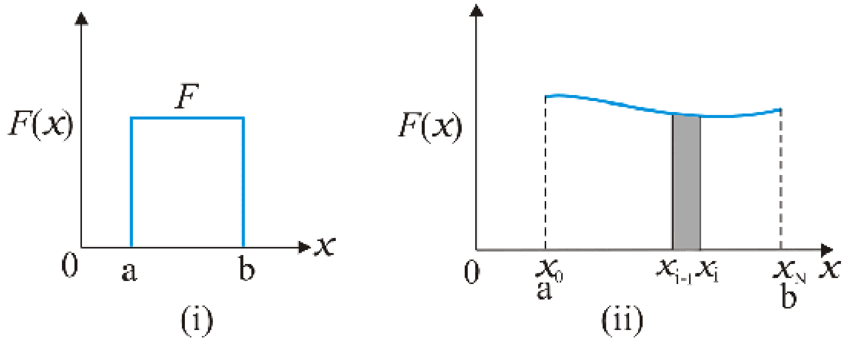
സമാകലന കാൽക്കുലസ് (Integral Calculus)

പരപ്പളവ് എന്ന ആശയം നിങ്ങൾക്കെല്ലാം സുപരിചിതമാണല്ലോ. ലളിതമായ ജ്യാമിതീയചിത്രങ്ങളുടെ പരപ്പളവിനുള്ള സൂത്രവാക്യങ്ങളും നിങ്ങൾക്കറിയാം. ഉദാഹരണമായി, ഒരു ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്നത് നീളം, വീതി എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലവും ത്രികോണത്തിന്റേത് പാദത്തിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയുമാണ്. പക്ഷേ, നമ്മൾ ക്രമരഹിതമായ ഒരു ആകൃതിയുടെ പരപ്പളവ് കാണുന്ന പ്രശ്നം എങ്ങനെ പരിഹരിക്കും? അങ്ങനെയുള്ള പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ഗണിതപരമായ സമാകലനം (integration) എന്ന ആശയം ആവശ്യമാണ്.

പ്രത്യക്ഷമായ ഒരു ഉദാഹരണമെടുക്കാം. ഒരു വസ്തുവിന്റെ x അക്ഷത്തിലൂടെ, x = a യിൽ നിന്ന് x = b വരെ,

ഉള്ള ചലനത്തിൽ $f(x)$ എന്ന അസ്ഥിരമായ ഒരു ബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നുവെന്ന് അനുമാനിക്കാം. ഈ ബലം ആ ചലനത്തിലുടനീളം ആ വസ്തുവിന്മേൽ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി (W) എത്രയാണെന്ന് എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുകയെന്നതാണ് ഇവിടെയുള്ള പ്രശ്നം.

ചിത്രം 3.31 ൽ F(x) ന്റെ വില x-നനുസരിച്ച് എങ്ങനെ വ്യത്യാസപ്പെടുന്നു എന്നു കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ബലം സ്ഥിരമായിരുന്നെങ്കിൽ, പ്രവൃത്തി എന്നത് ലളിതമായി ചിത്രം 3.31(i) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന F(b-a) എന്ന പരപ്പളവാണ്.



പക്ഷേ, പൊതുവായുള്ള സാഹചര്യത്തിൽ ബലം അസ്ഥിരമാണ്.

ഈ വക്രരേഖക്കുള്ളിലുള്ള പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ [ചിത്രം 3.31 (ii)], നമുക്ക് താഴെ പറയുന്ന മാർഗം സ്വീകരിക്കാം. x അക്ഷത്തിലെ a യിൽ നിന്നു b വരെയുള്ള ഇടവേളയെ ധാരാളം (N) ചെറിയ ഇടവേളകളായി വിഭജിക്കുക. $x_0(=a)$ യിൽനിന്ന് x_1 വരെ; x_1 ൽനിന്ന് x_2 വരെ; x_2 ൽനിന്ന് x_3 വരെ; x_{N-1} ൽ നിന്ന് $x_N(=b)$ വരെ. ഈ വക്രരേഖക്കുള്ളിലെ പരപ്പളവ് അതുകൊണ്ട് N ദീർഘഖണ്ഡങ്ങളാകുന്നു. ഓരോ ദീർഘഖണ്ഡത്തിലും $f(x)$ന്റെ വ്യത്യാസം നിസ്സാരമായതുകൊണ്ട് അവയോരോന്നും ഏകദേശം ദീർഘചതുരങ്ങളായിരിക്കും. അതിനാൽ [ചിത്രം 3.31 (ii)] ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന i-ാമത്തെ ഖണ്ഡത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്നത് ഏകദേശം:

$$\Delta A_i = F(x_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i)\Delta x$$

ഇവിടെ Δx എന്നത് എല്ലാ ഖണ്ഡങ്ങൾക്കും ഒരേപോലെ നാം എടുത്ത വീതിയാണ്. മുകളിലത്തെ സമവാക്യത്തിൽ $F(x_{i-1})$ എന്നാണോ അതോ $F(x_i)$ യുടെയും $F(x_i-1)$ ന്റെയും ശരാശരി ആയിട്ടാണോ എടുക്കേണ്ടത് x_i-1 എന്നും സംശയിക്കാം. N എന്നത് വളരെ വളരെ വലുതാക്കിയാൽ ($N\to\infty$), ഇത് ശരിക്കും ബാധിക്കുകയില്ല. അപ്പോൾ ആ ഖണ്ഡം വളരെ ചെറുതാവുകയും $F(x_i)$)യും $F(x_{i-1})$ യും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം പൂജ്യത്തിന്റെയത്രയും ചെറുതാവുകയും ചെയ്യും. ഈ വക്രരേഖയുടെ ഉള്ളിലുള്ള മുഴുവൻ പരപ്പളവ് എന്നത് ഇപ്പോൾ

$$A = \sum_{i=1}^{N} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{N} F(x_i)\Delta x$$

$N\to\infty$ ൽ ഈ തുകയുടെ പരിധിയെയാണ് $F(x)$ ന്റെ x = a മുതൽ x=b വരെയുള്ള സമാകലനം എന്നു പറയുന്നത്. ഇതിന് നൽകുന്ന ഒരു പ്രത്യേക ചിഹ്നം താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

ഈ സമാകലനചിഹ്നം $\int$ വലിച്ചു നീട്ടപ്പെട്ട ഒരു S പോലെ തോന്നിപ്പിക്കുന്നു. അടിസ്ഥാനമായി ഇത് വളരെയധികം ഘടകങ്ങളുടെ തുകയുടെ പരിധിയാണെന്ന് നാം ഓർക്കുക.

വളരെ ശ്രദ്ധേയമായ വസ്തുത, സമാകലനം എന്നത് ഒരർഥത്തിൽ, അവകലനത്തിന്റെ പ്രതിലോമമാണ്. നമുക്ക്

$f(x)$) ന്റെ അവകലനമായ g(x) എന്ന ഒരു ഫലനം ഉണ്ടെന്നിരിക്കട്ടെ, i.e. $f(x) \quad \frac{dg(x)}{dx}$ ഈ ഫലനം g(x), $f(x)$ ന്റെ ക്ലിപ്തമല്ലാത്ത, അപരിമിതമായ ((indefinite)) സമാകലനം എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ ഒരു അടിസ്ഥാനസിദ്ധാന്തം പറയുന്നത്;

$g(x) = \int f(x)dx$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഒരു സമാകലനത്തിൽ താഴത്തെയും മുകളിലത്തെയും പരിധിയുണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ ക്ലിപ്തമായ സമാകലനം എന്നു പറയുന്നു. ഇത് ഒരു ക്ലിപ്തമല്ലാത്ത സമാകലനത്തിന് ഒരു പരിധിയുമില്ല; അത് ഒരു ഫലനം ആണ്.

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ ഒരു അടിസ്ഥാനസിദ്ധാന്തം ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad g(x)\Big|_a^b = g(b) \quad g(a)$$

ഉദാഹരണമായി, $F(x) = x^2$ എന്നിരിക്കട്ടെ. നമ്മൾ x=1 മുതൽ x=2 വരെയുള്ള ക്ലിപ്ത സമാകലനം നിർണയിക്കാനാഗ്രഹിക്കുന്നു. അവകലനം x^2 ആയി വരുന്ന g(x) എന്ന ഫലനം $x^3/3$ ആണ്. അതുകൊണ്ട്

$$\int_1^2 x^2\,dx \quad \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 \quad \frac{8}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{7}{3}$$

വ്യക്തമായി ക്ലിപ്തസമാകലനങ്ങളുടെ മൂല്യം നിർണയിക്കാൻ, നമുക്ക് ബന്ധപ്പെട്ട ക്ലിപ്തമല്ലാത്ത സമാകലനങ്ങൾ അറിയേണ്ട ആവശ്യമുണ്ട്. കുറച്ചു സാധാരണമായ ക്ലിപ്തമല്ലാത്ത സമാകലനങ്ങളാണിത്.

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n \; 1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int (\frac{1}{x})\mathrm{d}x = \ln x \qquad (x > 0)$$

$$\int \sin x \;\mathrm{d}x = -\cos x \qquad \int \cos x \;\mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x$$

അവകലന കാൽക്കുലസിന്റെയും സമാകലന കാൽക്കുലസിന്റെയും ഈ ഉപക്രമം കൃത്യതയുള്ളതല്ല. നിങ്ങൾക്ക് ഗണിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന ആശയം പകർന്നുതരുകയാണിതിന്റെ ഉദ്ദേശ്യം.

അധ്യായം 4

P6B6D3

പ്രതലത്തിലെ ചലനം (MOTION IN A PLANE)

4.1 ആമുഖം
4.2 സദിശങ്ങളും അദിശങ്ങളും
4.3 രേഖീയസംഖ്യകളുമായുള്ള സദിശങ്ങളുടെ ഗുണനം
4.4 സദിശങ്ങളുടെ സങ്കലനവും വ്യവകലനവും- ഗ്രാഫിക്കൽ രീതി
4.5 സദിശങ്ങളുടെ വിശ്ലേഷണം
4.6 സദിശസങ്കലനം
4.7 ഒരു പ്രതലത്തിലെ ചലനം
4.8 സമത്വരണത്തിലുള്ള ചലനം, ഒരു പ്രതലത്തിൽ
4.9 ദ്വിമാനങ്ങളിലെ ആപേക്ഷിക പ്രവേഗം
4.10 പ്രൊജക്ടൈൽ ചലനം
4.11 സമവർത്തുളചലനം
സംഗ്രഹം
വിചിന്തന വിഷയങ്ങൾ
പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ
അധിക പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

4.1 ആമുഖം

നേർരേഖയിൽ ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനം വിവരിക്കാനാവശ്യമായ സ്ഥാനം, സ്ഥാനാന്തരം, പ്രവേഗം, ത്വരണം എന്നീ അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ മുൻപാഠത്തിൽ നാം മനസ്സിലാക്കി. ഏകമാനചലനത്തിൽ രണ്ടു ദിശകൾ മാത്രമേ സാധ്യമാകൂ എന്നതിനാൽ ഭൗതിക അളവുകളുടെ ദിശാസംബന്ധിയായ കാര്യങ്ങൾ + ഉം – ഉം ചിഹ്നങ്ങളുടെ സഹായത്താൽ കൈകാര്യം ചെയ്യാമെന്നും കണ്ടു. എന്നാൽ ദ്വിമാനത്തിലും (പ്രതലം) ത്രിമാനത്തിലും (സ്പേസ്) ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനം വിവരിക്കാൻ, മേൽപ്പറഞ്ഞ ഭൗതിക അളവുകളെ സദിശങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിപാദിക്കണം. അതുകൊണ്ടുതന്നെ സദിശങ്ങളെപ്പറ്റി നന്നായി മനസ്സിലാക്കേണ്ടത് അത്യാവശ്യമാണ്. എന്താണൊരു സദിശം? എങ്ങനെ സദിശങ്ങളെ കൂട്ടുകയും കുറക്കുകയും ഗുണിക്കുകയും ചെയ്യാം? ഒരു രേഖീയസംഖ്യകൊണ്ട് ഒരു സദിശത്തെ ഗുണിച്ചാൽ ഫലമെന്താകും? ഒരു പ്രതലത്തിൽ പ്രവേഗവും ത്വരണവും കൃത്യമായി നിർവചിക്കാനാവുംവിധം സദിശത്തെ ഈ പാഠത്തിൽ നാം മനസ്സിലാക്കും. അതിനുശേഷം, ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രതലത്തിലുള്ള ചലനത്തെപ്പറ്റി ചർച്ച ചെയ്യും. ഒരു പ്രതലത്തിലെ ലഘുവായ ചലനമെന്ന നിലയിൽ സമത്വരണത്തിലുള്ള വസ്തുവിന്റെ ചലനവും പ്രൊജക്ടൈൽ ചലനവും വിശദമായി നാം ചർച്ച ചെയ്യും. നിത്യജീവിതത്തിൽ പ്രത്യേക പ്രാധാന്യമുള്ളതും വളരെ പരിചിതവുമായ ചലനമാണ് വർത്തുളചലനം. സമവർത്തുളചലനത്തെപ്പറ്റിയും ഈ പാഠത്തിൽ പ്രതിപാദിക്കുന്നു.

ഈ പാഠഭാഗത്ത് നാം രൂപീകരിക്കുന്ന ചലനസമവാക്യങ്ങൾ എളുപ്പത്തിൽ ത്രിമാന ഇടത്തിലേക്കും വ്യാപിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.

4.2 സദിശങ്ങളും അദിശങ്ങളും (Scalars and Vectors)

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ, അളവുകളെ അദിശങ്ങൾ എന്നും സദിശങ്ങൾ എന്നും തരംതിരിക്കാവുന്നതാണ്. അടിസ്ഥാനപരമായി സദിശം ദിശയുമായി ബന്ധമുള്ളതും അദിശം ദിശയുമായി ബന്ധമില്ലാത്തതു

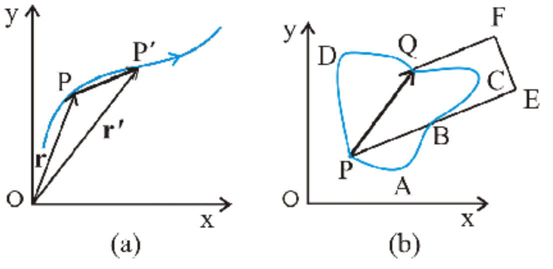
മാകുന്നു. അളവുമാത്രമുള്ള ഭൗതിക അളവിനെയാണ് അദിശം എന്നു വിളിക്കുന്നത്. ഒരു അദിശത്തെ രേഖപ്പെടുത്താൻ അനുയോജ്യമായ യൂണിറ്റോടുകൂടിയ ഒരു സംഖ്യ മാത്രം മതിയാകും. രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലെ ദൂരം, ഒരു വസ്തുവിന്റെ മാസ്, ഒരു വസ്തുവിന്റെ താപനില, ഒരു പ്രത്യേക സംഭവം നടന്ന സമയം തുടങ്ങിയവയെല്ലാം അദിശങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. സാധാരണ ബീജഗണിതത്തിലെ നിയമങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് അദിശങ്ങളെ കൂട്ടിച്ചേർക്കാം. സാധാരണ സംഖ്യകളെപ്പോലെ അദിശങ്ങളെ കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും ഗുണിക്കുകയും ഹരിക്കുകയും ചെയ്യാം*. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും യഥാക്രമം 1.0 m ഉം 0.5m ഉം ആണെങ്കിൽ, അതിന്റെ ചുറ്റളവ് നാലു വശങ്ങളുടെയും നീളങ്ങളുടെ തുകയാണ്. 1.0m+0.5m+ 1.0m+ 0.5m= 3.0 m. ഓരോ വശത്തിന്റെ നീളവും ചുറ്റളവും അദിശ അളവുകളാകുന്നു. നമുക്ക് മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. ഒരു നിശ്ചിത ദിവസത്തെ കൂടിയതും കുറഞ്ഞതുമായ താപനില, യഥാക്രമം 35.6°C ഉം 24.2°C ഉം ആകുന്നു. എങ്കിൽ, രണ്ടു താപനില കളുടെയും വ്യത്യാസം 11.4°Cആണ്. അതുപോലെ, വശങ്ങൾ 10 cm വീതമുള്ള കട്ടിയുള്ള ഒരു അലുമിനിയം ക്യൂബിന്റെ മാസ് 2.7 kg ആയാൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തം (ഉള്ളളവ്) 10^{-3} m^3 (ഒരു അദിശം) ആയിരിക്കും. അതിന്റെ സാന്ദ്രത 2.7x10^3 kg/m^3 (ഒരു അദിശം) ആകുന്നു.

അളവും ദിശയുമുള്ളതും സദിശസങ്കലനത്തിന്റെ ത്രികോണനിയമമോ തത്തുല്യമായ സാമാന്തരിക നിയമമോ അനുസരിക്കുന്നതുമായ ഏതൊരു ഭൗതിക അളവും സദിശമായിരിക്കും. അങ്ങനെ, ഒരു സദിശത്തെ രേഖപ്പെടുത്താൻ അതിന്റെ ദിശയും അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരു സംഖ്യയും നൽകേണ്ടതുണ്ട്. സദിശങ്ങളാൽ പ്രതിപാദിക്കപ്പെടുന്ന ചില ഭൗതിക അളവുകളാണ് സ്ഥാനാന്തരം, പ്രവേഗം, ത്വരണം, ബലം തുടങ്ങിയവ.

കട്ടികൂടിയ അക്ഷരങ്ങൾ (bold) ഉപയോഗിച്ചാണ് ഈ പുസ്തകത്തിൽ ഒരു സദിശത്തെ രേഖപ്പെടുത്തുന്നത്. പ്രവേഗസദിശത്തെ **v** എന്ന ചിഹ്നമുപയോഗിച്ച് എഴുതാവുന്നതാണ്. കൈകൊണ്ട് എഴുതുമ്പോൾ കനത്തിൽ അക്ഷരങ്ങൾ എഴുതാൻ ബുദ്ധിമുട്ടായതുകൊണ്ട് അക്ഷരത്തിനു മുകളിൽ അമ്പടയാളം വരച്ചും സദിശം അടയാളപ്പെടുത്താറുണ്ട്. ഉദാഹരണം: **v**, അതായത്, **v** യും $\vec{v}$ യും പ്രവേഗസദിശത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. സദിശത്തിന്റെ അളവിനെ അതിന്റെ കേവല മൂല്യം (absolute value) എന്നു വിളിക്കുന്നു. |v|= v എന്നാണ് ഇത് അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത്. അങ്ങനെ, കനംകൂടിയ അക്ഷരങ്ങളാൽ സദിശവും ഉദാ: **A, a, p, q, r, ... x, y** കനം കുറഞ്ഞ അക്ഷരങ്ങളാൽ ഓരോന്നിന്റെയും പരിമാണവും. ഉദാ : A, a, p, q, r,... x, y രേഖപ്പെടുത്താം

4.2.1 സ്ഥാനസദിശങ്ങളും സ്ഥാനാന്തര സദിശങ്ങളും (Position and Displacement Vectors)

ഒരു പ്രതലത്തിൽ ചലിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം വിവരിക്കാൻ സൗകര്യപ്രദമായ ഒരു ബിന്ദുവിനെ അവലംബകകേന്ദ്രം O ആയി തിരഞ്ഞെടുക്കണം. t, t' എന്നീ സമയങ്ങളിലെ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനങ്ങൾ യഥാക്രമം P ഉം P^1 ഉം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. [ചിത്രം 4.1(a)]. ഒരു നേർരേഖയാൽ O, P എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്നു. അപ്പോൾ **OP** എന്നത്, t എന്ന സമയത്തുള്ള വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം ആകുന്നു. ഈ രേഖയുടെ ശിരോഭാഗത്ത് ഒരു അമ്പടയാളം രേഖപ്പെടുത്തുന്നു. **r** എന്ന ചിഹ്നം **OP** യെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. അതായത്, **OP= r. P'** എന്ന ബിന്ദുവിനെ **OP'** എന്ന മറ്റൊരു സ്ഥാനസദിശം പ്രതിനിധീകരിക്കുമ്പോൾ, അതിനെ സൂചിപ്പിക്കാനായി **r'** എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കുന്നു. r ന്റെ നീളം അതിന്റെ പരിമാണവും **O** യിൽനിന്നു ദൃശ്യമാകുന്ന P യുടെ ദിശ സദിശത്തിന്റെ ദിശയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. വസ്തു P യിൽ നിന്ന് P' ലേക്കു നീങ്ങുകയാണെന്നിരിക്കട്ടെ, സദിശം **PP'** (വാൽഭാഗം P യിലും തലഭാഗം **P'** ലും) നെ, P എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് (t സമയത്ത്) P' എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് (t' സമയത്ത്) ചലിക്കുന്ന വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരസദിശം എന്നു വിളിക്കാം.



ചിത്രം 4.1 (a) സ്ഥാനസദിശവും സ്ഥാനാന്തരസദിശവും. (b) സ്ഥാനാന്തരസദിശം **PQ** ഉം വ്യത്യസ്ത സഞ്ചാരപാതകളും.

* ഒരേ യൂണിറ്റുകളുള്ള അദിശ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള സങ്കലന-വ്യവകലനക്രിയകൾക്കു മാത്രമാണ് എന്തെങ്കിലും യുക്തിയുള്ളത്. എന്നാൽ, വ്യത്യസ്ത യൂണിറ്റുകളോടു കൂടിയ അദിശങ്ങളെ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ ആവാം.

സ്ഥാനാന്തരസദിശം, വസ്തുവിന്റെ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സ്ഥാനങ്ങളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർ രേഖയാണ് എന്നത് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കണം. മാത്രമല്ല, ഇരു സ്ഥാനങ്ങൾക്കിടയിലും വസ്തു സഞ്ചരിച്ചപാതയെ അത് ആശ്രയിക്കുന്നില്ല. ഉദാഹരണത്തിന്, ചിത്രം 4.1(b) യിൽ, P,Q എന്നിവ യഥാക്രമം ആദ്യസ്ഥാനവും അവസാനസ്ഥാനവുമാകുന്നു. PABCQ, PDQ, PBEFQ എന്നിങ്ങനെ വ്യത്യസ്ത പാതയിൽ സഞ്ചരിക്കുമ്പോഴും വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തര സദിശം **PQ** തന്നെയാണ്. അതുകൊണ്ട്, ഒരു വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന സ്ഥാനാന്തരം, സ്ഥാനങ്ങൾക്കിടയിൽ വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരത്തിനു തുല്യമോ, അതിലും കുറവോ ആവാം. മുൻ പാഠഭാഗത്തും, നേർരേഖയിലൂടെയുള്ള ചലനം ചർച്ച ചെയ്തപ്പോൾ, ഈ വസ്തുത ഊന്നിപ്പറഞ്ഞിരുന്നു.

4.2.2 സദിശങ്ങളുടെ തുല്യത (Equality of vectors)

രണ്ടു സദിശങ്ങൾ **A, B** എന്നിവ സമസദിശങ്ങൾ (equal vectors) ആകണമെങ്കിൽ, തീർച്ചയായും ഇരു സദിശങ്ങൾക്കും ഒരേ അളവും ദിശയുമായിരിക്കണം**

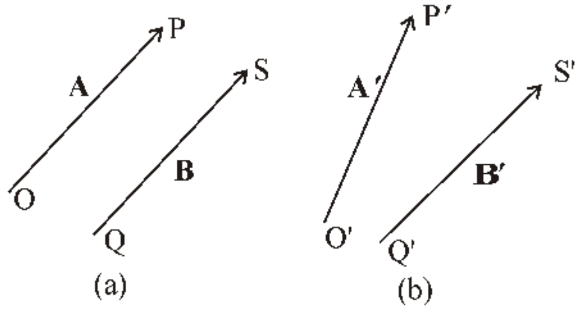
ചിത്രം 4.2(a) യിൽ **A, B** എന്നീ രണ്ടു തുല്യസദിശങ്ങൾ കാണാം. വളരെ എളുപ്പത്തിൽ നമുക്കവയുടെ തുല്യത പരിശോധിക്കാവുന്നതാണ്. സദിശം A യുടെ വാൽഭാഗം O യുമായി ചേർന്നുവരുന്ന രീതിയിൽ സദിശം B അതിനുതന്നെ സമാന്തരമായി നീക്കുന്നു. (O എന്ന ബിന്ദു Q മായി ചേർന്നുവരുന്നു). ഇങ്ങനെ ചെയ്യുമ്പോൾ അവയുടെ അഗ്രഭാഗങ്ങളായ S, P ഈ ബിന്ദുക്കളും ചേർന്നുവരുന്നതിനാൽ, ഇരുസദിശങ്ങളെയും സമസദിശങ്ങളെന്നു വിളിക്കാവുന്നതാണ്. സാമാന്യമായി, ഈ സമതയെ **A = B** എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം. ചിത്രം 4.2(b) യിൽ **A', B'** എന്നീ സദിശങ്ങൾക്ക് ഒരേ അളവാണ്. എങ്കിലും ഇരുസദിശങ്ങൾക്കും വ്യത്യസ്ത ദിശകളായതിനാൽ അവ സമസദിശങ്ങളാവുന്നില്ല. സദിശം **B'** അതിനുതന്നെ സമാന്തരമായി നീക്കി, Q' വിന്റെ വാൽഭാഗം, സദിശം **A'** ന്റെ വാൽ ഭാഗവുമായി ചേർത്തുവച്ചാലും, **B'** ന്റെ അഗ്രഭാഗം S' മായി A' ന്റെ അഗ്രം P' ഒരിക്കലും ചേർന്നുനിൽക്കുന്നില്ല.

4.3 രേഖീയസംഖ്യകളുമായുള്ള സദിശങ്ങളുടെ ഗുണനം (Multiplication of vectors by real numbers)

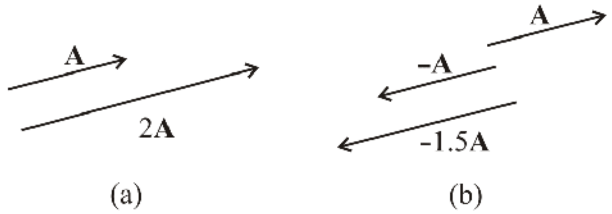
λ എന്ന ഒരു പോസിറ്റീവ് സംഖ്യയുമായി സദിശം **A** യെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ, അതിന്റെ പരിമാണം λ മടങ്ങുള്ളതും *A* യുടെ അതേ ദിശയിലുള്ളതുമായ ഒരു പുതിയ സദിശം നമുക്കു ലഭിക്കുന്നു.

$$|\lambda \mathbf{A}| = \lambda\,|\mathbf{A}|,\ \lambda > 0 \text{ ആയാൽ}$$

ഉദാഹരണത്തിന്, ചിത്രം 4.3(a) യിൽ കാണുന്നതു പോലെ സദിശം A യെ 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ, പരിണിതസദിശം **2A, A** യുടെതന്നെ ദിശയിലും |**A**| യുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് പരിമാണവുമുള്ളതുമായിരിക്കും.



ചിത്രം *4.2* (a) **A, B** എന്നീ സമസദിശങ്ങൾ (b) ഒരേ നീളമുള്ളതെങ്കിലും **A', B'** എന്നീ രണ്ട് സദിശങ്ങൾ അസമസദിശങ്ങളാണ്.



ചിത്രം *4.3* (a) സദിശം **A** യും അതിനെ 2 എന്ന പോസിറ്റീവ് സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോഴുള്ള പരിണത സദിശവും. (b) സദിശം **A** യും അതിനെ -1, -1.5 എന്നീ നെഗറ്റീവ് സംഖ്യകൾകൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോഴുള്ള പരിണത സദിശങ്ങളും

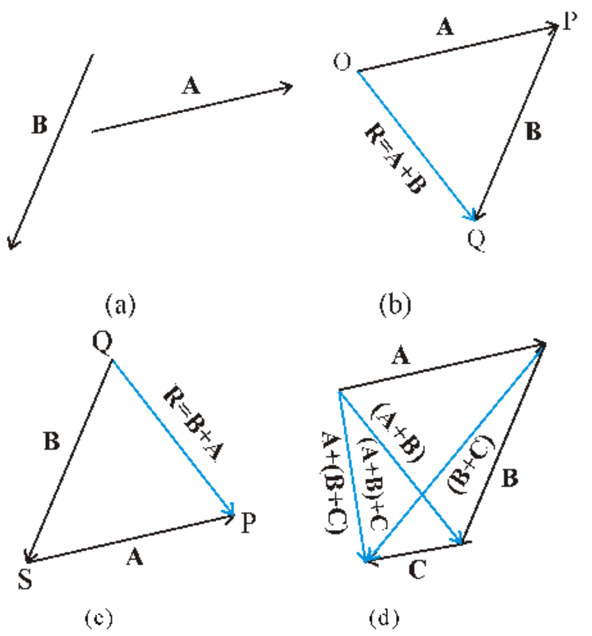
** നമ്മുടെ പഠനത്തിൽ സദിശങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായ സ്ഥാനങ്ങളില്ല. അതുകൊണ്ട്ഒരു സദിശം അതിനുതന്നെ സമാന്തരമായി നീങ്ങുകയാണെങ്കിൽ അതിന്റെ തനതുസ്വഭാവത്തിനു മാറ്റമുണ്ടാവുന്നില്ല. ഇത്തരം സദിശങ്ങളെ സ്വതന്ത്രസദിശങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. എന്നിരുന്നാലും, ചില ഭൗതികപ്രയോഗങ്ങളിൽ സദിശത്തിന്റെ സ്ഥാനവും പ്രയോഗദിശയും പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്നുണ്ട്. അത്തരം സദിശങ്ങളെ ലോക്കലൈസ്ഡ് സദിശങ്ങളെന്നു പറയാം.

ഒരു നെഗറ്റീവ് സംഖ്യയായ λ യുമായി സദിശം A ഗുണിക്കുമ്പോൾ, A യുടെ വിപരീതദിശയും, അളവ് |**A**| യുടെ λ മടങ്ങുമായ $-\lambda$A എന്ന പുതിയ സദിശം ലഭിക്കുന്നു. നെഗറ്റീവ് സംഖ്യകളായ –1, –1.5 എന്നിവയാൽ സദിശം **A** യെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ, ചിത്രം 4.3(b) യിൽ കാണുന്നതുപോലുള്ള പുതിയ സദിശങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

സദിശം **A** യുമായി ഗുണിക്കപ്പെട്ട λ എന്ന ഘടകം തനതായ ഡൈമെൻഷനുകളുള്ള ഒരു അദിശമാകാം. അപ്പോൾ, λ **A** എന്ന സദിശത്തിന്റെ ഡൈമെൻഷൻ, λ യുടെയും **A** യുടെയും ഡൈമെൻഷനുകളുടെ ഗുണന ഫലമായിരിക്കും. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു സ്ഥിരപ്രവേഗ സദിശത്തെ സമയ ഇടവേളകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്നത് സ്ഥാനാന്തര സദിശമായിരിക്കും.

4.4 സദിശങ്ങളുടെ സങ്കലനവും വ്യവകലനവും -ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് (Addition & subtraction of vectors - graphical method)

ഭാഗം 4.2 ൽ പ്രസ്താവിച്ചതുപോലെ, സദിശ സങ്കലനത്തിലെ ത്രികോണനിയമമോ തത്തുല്യമായ സാമാന്തരികനിയമമോ അനുസരിക്കുന്നവയാണ് സദിശങ്ങൾ. ഗ്രാഫിക്കൽരീതി ഉപയോഗിച്ച് സങ്കലന രീതികൾ ഇവിടെ ചർച്ചചെയ്യാം. ചിത്ര 4.4 (a) യിൽ കാണുന്നതുപോലെ, ഒരു പ്രതലത്തിൽ നിൽക്കുന്ന A, B എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങളെ പരിഗണിക്കുക. ഈ സദിശങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡങ്ങളുടെ നീളം അവയുടെ അളവിന് ആനുപാതികമായിരിക്കും. സദിശങ്ങളുടെ തുക **A+B** കണ്ടെത്താനായി, ചിത്രം 4.4(b) ൽ കാണുന്നതുപോലെ സദിശം **A** യുടെ ശിരോഭാഗത്ത് **B** യുടെ വാൽഭാഗം വരുന്ന രീതിയിൽ സദിശം **B** അതിനുതന്നെ സമാന്തരമായി നീക്കുക. ശേഷം, **A** യുടെ വാൽഭാഗം **B** യുടെ ശിരോഭാഗവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്നു. സദിശങ്ങൾ **A, B** എന്നിവയുടെ തുകയായ, സദിശം **R** നെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത് രേഖ OQ ആണ്. ഈ സദിശ സങ്കലന രീതിയിൽ സദിശങ്ങളെ ശിരോഭാഗത്തു നിന്നു വാൽഭാഗത്തേക്കു വരുന്നരീതിയിൽ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നതിനാൽ ഈ ഗ്രാഫിക്കൽ രീതിയെ 'ഹെഡ് ടു ടെയിൽ രീതി' എന്നു വിളിക്കാം. രണ്ടു സദിശങ്ങളും അവയുടെ പരിണതഫലവും ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നുവശങ്ങളാകുന്നതിനാൽ ഈ സങ്കലന രീതിയെ സദിശസങ്കലനത്രികോണരീതി എന്നും പറയാറുണ്ട്.



ചിത്രം *4.4* (a) **A, B** എന്നീ സദിശങ്ങൾ (b) **A, B** എന്നീ സദിശങ്ങൾ ഗ്രാഫിക്കൽരീതിയിൽ കൂട്ടുന്നു. (c) **B, A** എന്നീ സദിശങ്ങൾ ഗ്രാഫിക്കൽ രീതിയിൽ കുടുന്നു. (d) സദിശ സങ്കലനത്തിന്റെ അസോസിയേറ്റീവ് നിയമത്തിന്റെ ചിത്രീകരണം.

ചിത്രം 4.4 (c) യിൽ കാണുന്നതുപോലെ, **B+A** എന്ന പരിണതഫലം **R** എന്ന അതേ സദിശംതന്നെയാണ് നൽകുന്നത്. സദിശസങ്കലനം കമ്മ്യൂട്ടേറ്റീവാണ്.

അതായത്, **A** + **B** = **B** + **A** (4.1)

ചിത്രം 4.4 (d) യിൽ വിശദീകരിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, സദിശസങ്കലനം അസോസിയേറ്റീവ് നിയമവും അനുസരിക്കുന്നു. സദിശങ്ങൾ **A, B** എന്നിവയുടെ തുക ആദ്യം കണ്ടെത്തുകയും അതുമായി സദിശം **C** കൂട്ടുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഫലവും **B** യും **C** യും ആദ്യം കൂട്ടുകയും ഈ തുകയെ സദിശം **A** യുമായി കൂട്ടുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഫലവും തുല്യമായിരിക്കും.

അതായത്, **(A + B) + C = A + (B + C)** (4.2)

തുല്യവും വിപരീതവുമായ രണ്ടു സദിശങ്ങൾ കൂട്ടിയാലുള്ള ഫലം എന്താണ്? ചിത്രം 4.3 (b) യിൽ കാണുന്നതുപോലെ **A, -A** എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. അവയുടെ തുക **A** + **(-A)** ആകുന്നു. ഇരു സദിശങ്ങളുടെയും അളവുകൾ തുല്യവും എന്നാൽ ദിശ വിപരീതവുമായതിനാൽ പരിണതസദിശത്തിന്റെ പരി

മാണം പൂജ്യമാകുന്നു. അതിനെ **0** എന്നു സൂചിപ്പിക്കുകയും ശൂന്യസദിശം (null vector) അഥവാ പൂജ്യസദിശം (zero vector) എന്നു വിളിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad |\mathbf{0}| = 0 \qquad (4.3)$$

ഒരു ശൂന്യസദിശത്തിന്റെ അളവ് പൂജ്യമാകയാൽ, അതിന്റെ ദിശ വ്യക്തമാക്കാനാവില്ല.

] dPyh pan\b nHcpk Zri wA ഗുണിക്കുമ്പോൾ ഒരു ശൂന്യസദിശം ലഭിക്കും. ശൂന്യസദിശം (**0**) യുടെ പ്രധാന സ്വഭാവങ്ങൾ ഇവയാണ്.

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$\lambda\ \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

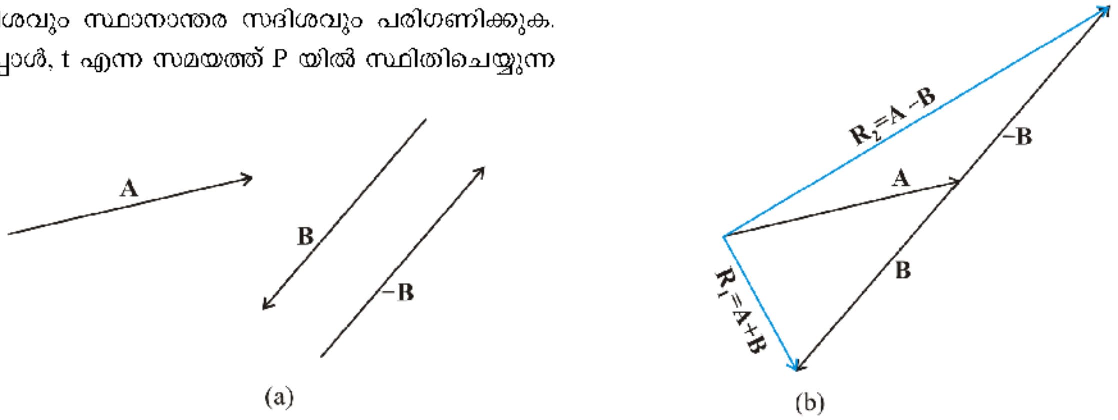
$$0\ \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad (4.4)$$

ശൂന്യസദിശത്തിന്റെ ഭൗതികമാനമെന്താണ്? ചിത്രം 4.1(a)ലേതുപോലെ ഒരു പ്രതലത്തിലെ സ്ഥാന സദിശവും സ്ഥാനാന്തര സദിശവും പരിഗണിക്കുക. ഇപ്പോൾ, t എന്ന സമയത്ത് P യിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു വസ്തു, P' ലേക്കും തിരികെ P യിലേക്കും സഞ്ചരിക്കുന്നതായി കരുതുക. ഇപ്പോൾ എന്താണതിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം? ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സ്ഥാനങ്ങൾ ഒരുമിക്കുന്നതിനാൽ, വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം ഒരു ശൂന്യസദിശമാകും.

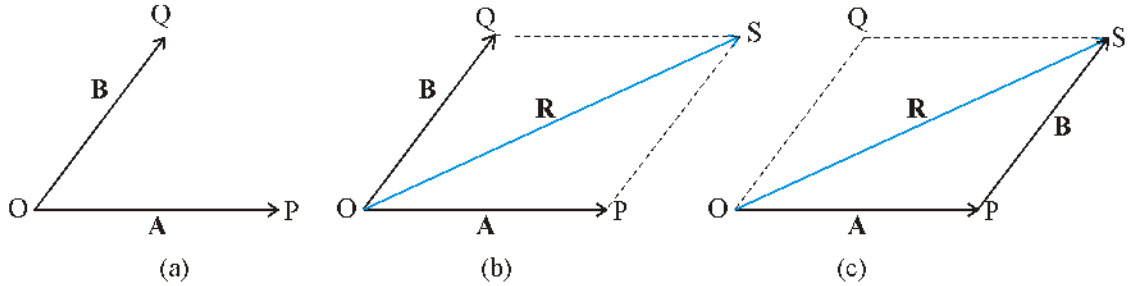
സദിശങ്ങളുടെ വ്യവകലനത്തെ സദിശസങ്കലനത്തിന്റെ സഹായത്താൽ നിർവചിക്കാവുന്നതാണ്. **A**, **B** എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം, **A**, **–B** എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ തുകയായി നമുക്ക് നിർവചിക്കാം.

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \qquad (4.5)$$

ചിത്രം 4.5 ൽ അതു കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. സദിശം **A** യുമായി സദിശം **B** കൂട്ടുമ്പോൾ $\mathbf{R}_2$ =(**A-B**) ലഭിക്കുന്നു. സദിശം $\mathbf{R}_1$ =(**A+B**) കണ്ടെത്തുന്നവിധവും അതേ ചിത്രത്തിൽത്തന്നെ താരതമ്യത്തിനായി നൽകിയിരിക്കുന്നു. രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ തുക കണ്ടെത്താനായി സാമാന്തരികരീതിയും ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. **A,B** എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങളുണ്ടെന്നു കരുതുക. ഇരു സദിശങ്ങളെയും കൂട്ടാനായി, ചിത്രം 4.6(a) യിൽ കാണുന്നതുപോലെ, ഓരോന്നിന്റെയും വാൽഭാഗങ്ങൾ പൊതുവായ അവലംബക കേന്ദ്രത്തിലേക്കു കൊണ്ടുവരുന്നു. അതിനുശേഷം, **A** യുടെ ശിരോഭാഗത്തുനിന്നും **B** യ്ക്കു സമാന്തരമായും **B** യുടെ ശിരോഭാഗത്തുനിന്ന് **A** യ്ക്കു സമാന്തരമായും ഓരോ രേഖ നാം വരക്കുന്നു. ഇത്തരത്തിൽ സാമാന്തരികം OQSP പൂർത്തിയാക്കുന്നു. മുൻപു വരച്ച രണ്ടു രേഖകളുടെയും സംഗമബിന്ദുവിൽനിന്നു കേന്ദ്രം O യിലേക്ക് ഒരു രേഖ വരക്കുന്നു. മൂലബിന്ദു O യിൽനിന്നാണ് പരിണതസദിശം **R** ആരംഭിക്കുന്നത്. മാത്രമല്ല, അതിന്റെ ദിശ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ (OS) ത്തിലൂടെയുമാകുന്നു. (ചിത്രം 4.6(b)). (ചിത്രം 4.6(c)) യിൽ **A** യുടെയും **B** യുടെയും തുക കണ്ടെത്താനായി ത്രികോണനിയമം ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു. രണ്ടു രീതികളുപയോഗിച്ചും ലഭിക്കുന്ന ഫലങ്ങൾ ഒന്നുതന്നെയാണെന്നു കാണാം. അതായത്, ഇരു മാർഗങ്ങളും തത്തുല്യമാണ്.

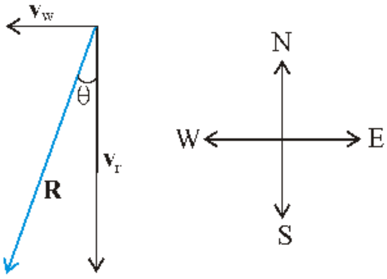


ചിത്രം *4.5* (a) **A**, **B** എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങളും -**B** എന്ന സദിശവും (b) **A** യിൽ നിന്നു സദിശം **B** കുറക്കുമ്പോൾ $\mathbf{R}_2$ എന്ന സദിശം ലഭിക്കുന്നു. താരതമ്യത്തിനായി **A** യുടെയും **B** യുടെയും തുകയായ $\mathbf{R}_1$ ഉം ചിത്രത്തിൽ കാണാം.



ചിത്രം 4.6 (a) **A, B** എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ വാൽഭാഗങ്ങൾ ഒരു പൊതുബിന്ദുവിലേക്കു കൊണ്ടുവരുമ്പോൾ (b) സാമാന്തരികനിയമം ഉപയോഗിച്ച് **(A+ B)** കണ്ടെത്തിയിരിക്കുന്നു. (c) സദിശസങ്കലനത്തിലെ സാമാന്തരിക രീതി ത്രികോണരീതിക്ക് തുല്യമാണ്

ഉദാഹരണം 4.1 : *ലംബമായി പെയ്യുന്ന മഴയുടെ വേഗം 35 ms^{-1} ആണ്. ഈ സമയത്ത് 12 ms^{-1} വേഗത്തിൽ കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറുദിശയിൽ കാറ്റു വീശാനാരംഭിക്കുന്നു. ബസ്സ്റ്റോപ്പിൽ കാത്തുനിൽക്കുന്ന ഒരു കുട്ടി മഴ നനയാതിരിക്കാൻ ഏതു ദിശയിലാണ് തന്റെ കുട പിടിക്കേണ്ടത്?*



ചിത്രം 4.7

ഉത്തരം: ചിത്രം 4.7 ൽ, ചോദ്യത്തിൽ പരാമർശിക്കുന്ന അതേ ദിശയിൽ, മഴയുടെയും കാറ്റിന്റെയും പ്രവേഗങ്ങളെ യഥാക്രമം $\mathbf{v_r}$ എന്നും $\mathbf{v_w}$ എന്നും രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.

ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ സദിശസങ്കലന നിയമത്തിന്റെ സഹായത്താൽ $\mathbf{v_r}$, $\mathbf{v_w}$ എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ പരിണതഫലം **R** എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. **R** ന്റെ അളവ്

$$R = \sqrt{v_r^2 + v_w^2} = \sqrt{35^2 + 12^2}\ \text{m s}^{-1} = 37\ \text{m s}^{-1}$$

R ഉം ലംബവുമായി സൃഷ്ടിക്കുന്ന കോണളവ് θ ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\text{അഥവാ,}\ \tan\theta = \frac{V_w}{V_r} = \frac{12}{35} = 0.343$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.343) = 19^\circ$$

അതുകൊണ്ട്, ലംബപ്രതലത്തിൽ ലംബവുമായി 19° കോണളവിൽ കിഴക്കുദിശയിലാണ് ആ കുട്ടി തന്റെ കുട പിടിക്കേണ്ടത്.

4.5 സദിശങ്ങളുടെ വിഘടനം (Resolution of vectors)

a, b എന്നിവ ഒരേ പ്രതലത്തിൽ വ്യത്യസ്ത ദിശകളിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന രണ്ടു സദിശങ്ങളാണെന്നു കരുതുക. അതേ പ്രതലത്തിൽ തന്നെയുള്ള മറ്റൊരു സദിശമാണ് **A** (ചിത്രം 4.8) സദിശം **A**, രണ്ട് വ്യത്യസ്ത സദിശങ്ങളുടെ തുകയായി രേഖപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്. അതിൽ ഒന്ന്, ഒരു രേഖീയസംഖ്യയാൽ **a** യെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന സദിശവും അടുത്തത്, മറ്റൊരു രേഖീയ സംഖ്യയാൽ **b** യെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന സദിശവുമാണ്. സദിശം **A** യുടെ വാൽഭാഗവും ശിരോഭാഗവും യഥാക്രമം O,P എന്നിവയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. സദിശം **a** യ്ക്കു സമാന്തരമായി O യിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു നേർരേഖ വരക്കുന്നു. അതുപോലെ, **b** ക്കു സമാന്തരമായി P യിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന മറ്റൊരു നേർരേഖയും വരക്കുന്നു. ഇവ Q ൽ സന്ധിക്കുകയാണെങ്കിൽ ,

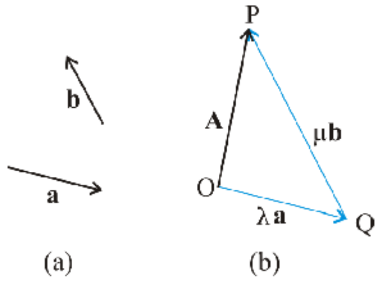
$$\mathbf{A} = \mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} \qquad (4.6)$$

പക്ഷേ, OQ എന്ന രേഖ a ക്കും QP എന്ന രേഖ **b** ക്കും സമാന്തരമാകയാൽ, നമുക്ക്

$\mathbf{OQ} = \lambda\,\mathbf{a}$ എന്നും $\mathbf{QP} = \mu\mathbf{b}$ എന്നുമെഴുതാം. (4.7)

ഇവിടെ λ, μ എന്നിവ രേഖീയസംഖ്യകൾ ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട് $\mathbf{A} = \lambda\,\mathbf{a} + \mu\,\mathbf{b}$ (4.8)



ചിത്രം 4.8 (a) **a, b** എന്നീ നോൺ-കൊലീനിയർ സദിശങ്ങൾ. (b) **a, b** എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ ദിശയിൽ **A** എന്ന സദിശത്തെ വിശ്ലേഷണം ചെയ്യുന്നു.

ഇവിടെ **a** യിലൂടെയും **b** യിലൂടെയും യഥാക്രമം λ**a**, μ**b** എന്നീ രണ്ടു ഘടകസദിശങ്ങളായി സദിശം **A** വിശ്ലേഷണം ചെയ്യപ്പെട്ടതായി നമുക്കു പറയാം. ഈ മാർഗമുപയോഗിച്ച് ഏതൊരു സദിശത്തെയും രണ്ടു വ്യത്യസ്ത സദിശങ്ങളുടെ ദിശകളിലൂടെയുള്ള ഘടക സദിശങ്ങളായി വിശ്ലേഷണം ചെയ്യാവുന്നതാണ്. വിശ്ലേഷണം ചെയ്യപ്പെടുന്ന സദിശവും അതിന്റെ ഘടകസദിശങ്ങളും ഒരേ പ്രതലത്തിലാവണം. എന്നാൽ ഒരു സദിശത്തെ ഒരു സമകോണ ചതുരശ്രനിർദേശാങ്കവ്യവസ്ഥയുടെ (Rectangular co-ordinate system) അക്ഷങ്ങളിലൂടെ വിശ്ലേഷണം ചെയ്യുന്നത് കൂടുതൽ സൗകര്യപ്രദമായിരിക്കും. ഇതിനായി, പരിമാണം ഒന്നായ (one) സദിശങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം. നാമിപ്പോൾ ചർച്ചചെയ്യുന്നത് ഏകകസദിശങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കുന്ന സദിശങ്ങളെയാണ്. പരിമാണം ഒന്ന് (one) ആയതും ഒരു നിശ്ചിത ദിശയുള്ളതുമായ സദിശങ്ങളെയാണ് ഏകസദിശങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നത്. ഇവക്ക് ഡൈമെൻഷനോ യൂണിറ്റോ ഇല്ല. ദിശ വ്യക്തമാക്കാൻ മാത്രമാണ് ഏകസദിശങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ചിത്രം 4.9(a) യിൽ കാണുന്നതുപോല സമകോണ ചതുരശ്ര അവലംബകത്തിൽ x,y,z അക്ഷങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഏകസദിശങ്ങൾ, യഥാക്രമം $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$, എന്നിവയാണ്. ഇവ ഏകസദിശങ്ങൾ ആകയാൽ

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1 \quad (4.9)$$

ഈ ഏകസദിശങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമായി നിലകൊള്ളുന്നു. ഈ പാഠപുസ്തകത്തിൽ, മറ്റു സദിശങ്ങളിൽനിന്ന് ഏകസദിശങ്ങളെ തിരിച്ചറിയാനായി, കനംകൂടിയ അക്ഷരങ്ങൾക്കു മുകളിലായി ഒരു തൊപ്പി (^) ചിഹ്നം അച്ചടിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ പാഠഭാഗത്ത് നാം ചർച്ച ചെയ്യുന്നത് ദ്വിമാന ചലനങ്ങളെപ്പറ്റിയായതിനാൽ, രണ്ട് ഏകസദിശങ്ങൾ മാത്രമാണ് നമുക്കാവശ്യം. $\hat{\mathbf{n}}$ എന്ന ഏകസദിശത്തെ λ എന്ന അദിശവുമായി ഗുണിക്കുമ്പോൾ, ഗുണനഫലമായി നമുക്കു ലഭിക്കുന്നത് ഒരു സദിശമായിരിക്കും.

$\lambda = \lambda\,\hat{\mathbf{n}}$.

സാമാന്യമായി സദിശം **A**, ഈ വിധത്തിൽ എഴുതാം.

$$A = |A|\hat{\mathbf{n}} \quad (4.10)$$

ഇവിടെ $\hat{\mathbf{n}}$ സദിശം A യിലൂടെയുള്ള ഏകസദിശമാകുന്നു.

ഏകസദിശങ്ങളായ $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ എന്നിവയുടെ ദിശയിലുള്ള ഘടകസദിശങ്ങളായി സദിശം **A** യെ വിശ്ലേഷണം ചെയ്യാവുന്നതാണ്. ചിത്രം 4.9(b) യിൽ കാണുന്നതു പോലെ, x-y പ്രതലത്തിലുള്ള **A** എന്ന സദിശം പരിഗണിക്കുക. ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതു പോലെ **A** യുടെ ശിരോഭാഗത്തുനിന്ന് അവലംബക അക്ഷങ്ങളിലേക്ക് ലംബരേഖകൾ വരക്കുന്നു. തൽഫലമായി നമുക്ക് $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ എന്നീ രണ്ട് പുതിയ സദിശങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു. ഇപ്പോൾ $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$ ആകുന്നു. $\mathbf{A}_1$ ഏകസദിശം $\hat{\mathbf{i}}$ യ്ക്കും $\mathbf{A}_2$, ഏകസദിശം $\hat{\mathbf{j}}$ യ്ക്കും സമാന്തരമാകയാൽ

$$\mathbf{A}_1 = A_x\,\hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{A}_2 = A_y\,\hat{\mathbf{j}} \quad (4.11)$$

ഇവിടെ A_x, A_y എന്നിവ രേഖീയ സംഖ്യകളാകുന്നു.

$$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} \quad (4.12)$$

ചിത്രം 4.9 (c) യിൽ ഇത് വ്യക്തമാക്കിയിരിക്കുന്നു. A_x, A_y എന്നീ ഭൗതിക അളവുകളെ സദിശം **A** യുടെ x, y ഘടകങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കാം. A_x ഒരു സദിശമല്ല, എന്നാൽ $A_x\,\hat{\mathbf{i}}$ ഒരു സദിശമാണ് എന്ന കാര്യം പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കുക. $A_y\,\hat{\mathbf{j}}$ ഉം അതുപോലെത്തന്നെ. ലഘുവായ ത്രികോണമിതി സമവാക്യങ്ങളുപയോഗിച്ച്, സദിശം **A** യുടെ അളവിന്റെയും x-അക്ഷവുമായി അതുണ്ടാക്കുന്ന കോണളവ് θ യുടെയും അടിസ്ഥാനത്തിൽ A_x , A_y എന്നിവയെ പ്രതിപാദിക്കാം.

$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta \quad (4.13)$$

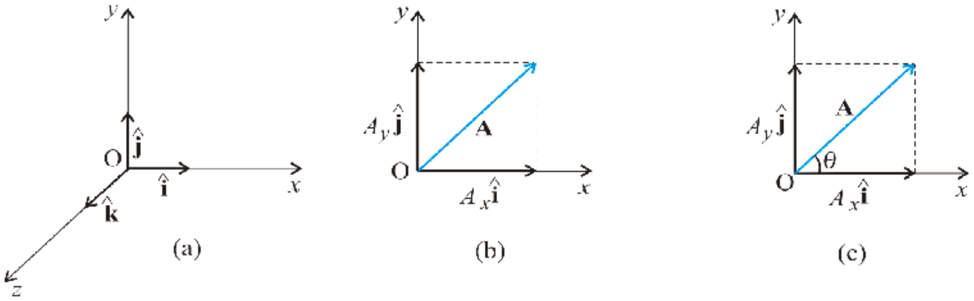
θ യുടെ മൂല്യത്തിനനുസരിച്ച് ഏതൊരു സദിശത്തിന്റെയും ഘടകസദിശം പോസിറ്റീവോ, നെഗറ്റീവോ പൂജ്യമോ ആകാമെന്ന് സമവാക്യം 4.13 ൽ നിന്നു വ്യക്തമാണ്.

ഇപ്പോൾ സദിശം **A** ഒരു പ്രതലത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തുവാൻ രണ്ടു മാർഗങ്ങളാണുള്ളത്.

(i) അതിന്റെ അളവ് **A** യും x അക്ഷവുമായി അതുണ്ടാക്കുന്ന θ എന്ന കോണളവും ഉപയോഗിച്ച്.

(ii) **A** യുടെ ഘടകങ്ങളായ A_x, A_y എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച്.

A യും θ യും നൽകിയിരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ സമവാക്യം (4.13) ഉപയോഗിച്ച് A_x, A_y എന്നിവ ലഭ്യമാകുന്നതാണ്. അത് ഇപ്രകാരമാണ്



ചിത്രം 4.9 (a) x-,y-,z- അക്ഷങ്ങളിലൂടെയുള്ള $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ എന്നീ ഏകകസദിശങ്ങൾ (b) സദിശം A, x-, y-അക്ഷങ്ങളിൽ യഥാക്രമം A_x, A_y എന്നീ സദിശങ്ങളായി വിശ്ലേഷണം ചെയ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. (c) A_x ഉം A_y ഉം യഥാക്രമം $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ എന്നീ ഏകകസദിശങ്ങളുടെ സഹായത്താൽ വിശ്ലേഷണം ചെയ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta$$
$$= A^2$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (4.14)$$

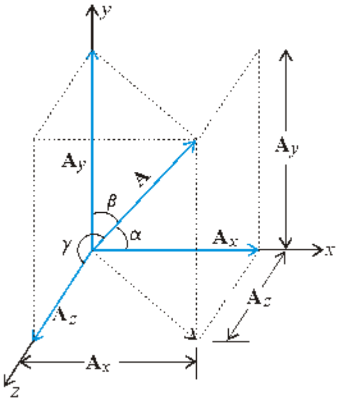
കൂടാതെ $\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x}$,

അതായത് $\theta = \tan^{-1}\dfrac{A_y}{A_x}$ (4.15)

നാമിതുവരെ x-y പ്രതലത്തിലുള്ള ഒരു സദിശത്തെയാണ് പരിഗണിച്ചത്. ത്രിമാനത്തിൽ സദിശം x,y,z അക്ഷങ്ങളിലുള്ള മൂന്നു ഘടകസദിശങ്ങളായി വിശ്ലേഷണം ചെയ്യാൻ ഇതേ പ്രവർത്തനരീതി തന്നെയാണ് ഉപയോഗിക്കേണ്ടത്. സദിശം **A** x,y,z അക്ഷങ്ങളുമായും ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവുകൾ* യഥാക്രമം α, β, γ എന്നിവ ആണെങ്കിൽ (ചിത്രം 4.9(d)).

$$A_x = A\cos\alpha,\ A_y = A\cos\beta,\ A_z = A\cos\gamma \quad (4.16a)$$

സാമാന്യമായി, നമുക്ക്, **A** ഇങ്ങനെ എഴുതാം:



ചിത്രം 4.9 (d) x,y,z അക്ഷങ്ങളിലുള്ള ഘടകസദിശ ങ്ങളായി സദിശം **A** വിശ്ലേഷണം ചെയ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (4.16b)$$

സദിശം **A** യുടെ അളവ്

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (4.16c)$$

സ്ഥാനസദിശം **r** നെ താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ അവതരിപ്പിക്കാം.

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (4.17)$$

ഇവിടെ x, y, z എന്നിവ യഥാക്രമം സ്ഥാനസദിശം **r** ന്റെ x, y, z അക്ഷങ്ങളിലൂടെയുള്ള ഘടകങ്ങൾ ആകുന്നു.

4.6 സദിശസങ്കലനം – അപഗ്രഥനരീതി (Vector addition - Analytical Method)

സദിശങ്ങളുടെയും അവയുടെ പരിണതഫലത്തിന്റെയും ഒരു നേർക്കാഴ്ച ലഭിക്കാൻ ഗ്രാഫിക്കൽ സങ്കലനരീതി വലിയതോതിൽ നമ്മെ സഹായിക്കുമെങ്കിലും ചില സമയങ്ങളിൽ ഇത് മടുപ്പുളവാക്കുന്നതും കൃത്യത കുറഞ്ഞതുമായ ഒരു മാർഗമായി അനുഭവപ്പെടാറുണ്ട്. സദിശങ്ങളുടെ തുക കാണാനായി, അവയുടെ അനുബന്ധഘടകങ്ങളെ പരസ്പരം യോജിപ്പിക്കുന്നത് താരതമ്യേന എളുപ്പമുള്ള മാർഗമാണ്. x, y പ്രതലത്തിലുള്ള **A, B** എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. അവയുടെ ഘടകങ്ങൾ യഥാക്രമം A_x, A_y, B_x, B_y ഉം ആകുന്നു.

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (4.18)$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}$$

R അവയുടെ തുകയാണെന്നിരിക്കട്ടെ, നമുക്ക് **R=A+B** എന്നെഴുതാം.

* α, β, γ എന്നിവ ത്രിമാന ഇടത്തിലുള്ള (space) കോണളവുകളാണ്. കോ-പ്ലാനാർ അല്ലാത്ത രേഖാ ജോടികൾക്കിടയിലെ കോണളവുകളാണിവ.

സദിശങ്ങൾ, കമ്മ്യൂട്ടേറ്റീവ് നിയമവും അസോസിയേറ്റീവ് നിയമവും അനുസരിക്കുന്നതിനാൽ സൗകര്യപ്രദമായ രീതിയിൽ സമവാക്യം

R = **A** + **B**

$$= \left(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}\right)+\left(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}\right) \quad (4.19a)$$

ക്രമീകരിക്കാവുന്നതാണ്.

ആയതിനാൽ,

ഇവിടെ, $\mathbf{R} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\mathbf{j}}$ (4.19b)

$\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$ ആയതിനാൽ (4.20)

$R_x = A_x + B_x,\ R_y = A_y + B_y$ (4.21)

അതായത് പരിണതസദിശം **R** ലെ ഓരോ ഘടകവും **A** യിലെയും **B** യിലെയും അനുബന്ധഘടക സദിശങ്ങളുടെ തുകയായിരിക്കും. ത്രിമാന ഇടത്തിൽ,

$$A = A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$$

$$B = B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$

$$R = A + B = R_x\hat{i}+R_y\hat{j}+R_z\hat{k}$$

ഇവിടെ, $R_x = A_x + B_x$

$$R_y = A_y + B_y$$

$$R_z = A_z + B_z \quad (4.22)$$

എത്ര എണ്ണം സദിശങ്ങളുണ്ടെങ്കിലും അവയുടെ തുക, വ്യത്യാസം എന്നിവ കണ്ടെത്താനും ഈ മാർഗം പ്രയോജനപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്. ഉദാഹരണത്തിന്, a,b,c എന്നീ സദിശങ്ങൾ

$$a = a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$$

$$b = b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}$$

$$c = c_x\hat{i}+c_y\hat{j}+c_z\hat{k} \quad (4.23a)$$

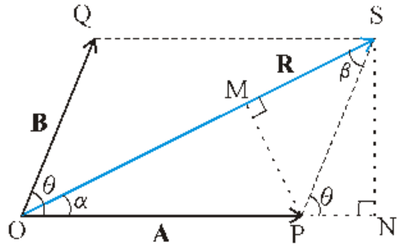
എന്നെഴുതാമെങ്കിൽ, സദിശം, **T** = **a** + **b** – **c** ഘടകങ്ങൾ താഴെപ്പറയുന്നവയാണ്.

$$T_x = a_x + b_x - c_x$$

$$T_y = a_y + b_y - c_y \quad (4.23b)$$

$$T_z = a_z + b_z - c_z .$$

ഉദാഹരണം 4.2: ***A,B*** *എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ പരിണതഫലത്തിന്റെ പരിമാണവും ദിശയും* ***A,B*** *ഇവയുടെ പരിമാണങ്ങളുടെയും അവക്കിടയിലുള്ള കോണളവുകളുടെയും അടിസ്ഥാനത്തിൽ എഴുതുക.*



ചിത്രം 4.10

ഉത്തരം : OP, OQ എന്നീ രശ്മികൾ θ എന്ന കോണളവിൽ നിൽക്കുന്ന **A, B** എന്നീ സദിശങ്ങളാകുന്നു. (ചിത്രം (4.10)) സദിശ സങ്കലനത്തിന്റെ സാമാന്തരികരീതി ഉപയോഗിച്ചാൽ, **OS** എന്ന സദിശം, പരിണതഫലം **R** നെ പ്രതിനിധീകരിക്കും.

R = A + B

OP ക്കു ലംബമായ രേഖയാണ് SN. അതുപോലെ OS നു ലംബമാണ് PM. ചിത്രത്തിന്റെ ജ്യാമിതിയിൽ നിന്ന്,

$OS^2 = ON^2 + SN^2$

പക്ഷേ, $ON = OP + PN = A + B\cos\theta$

$SN = B\sin\theta$

$OS^2 = (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$

അഥവാ, $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \quad (4.24a)$$

Δ OSN, ൽ $SN = OS\sin\alpha = R\sin\alpha$, കൂടാതെ,

Δ PSN, ൽ $SN = PS\sin\theta = B\sin\theta$

അതുകൊണ്ട്, $R\sin\alpha = B\sin\theta$

അഥവാ, $\dfrac{R}{\sin\theta} = \dfrac{B}{\sin\alpha}$ (4.24b)

സമാനമായി, $PM = A\sin\alpha = B\sin\beta$

അഥവാ, $\dfrac{A}{\sin\beta} = \dfrac{B}{\sin\alpha}$ (4.24c)

സമവാക്യങ്ങൾ (4.24b) യും (4.24c) യും യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ,

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \quad (4.24d)$$

എന്നു ലഭിക്കും.

സമവാക്യം (4.24 d) ഉപയോഗിച്ച്,

$$\sin\alpha = \frac{B}{R}\sin\theta \qquad (4.24e)$$

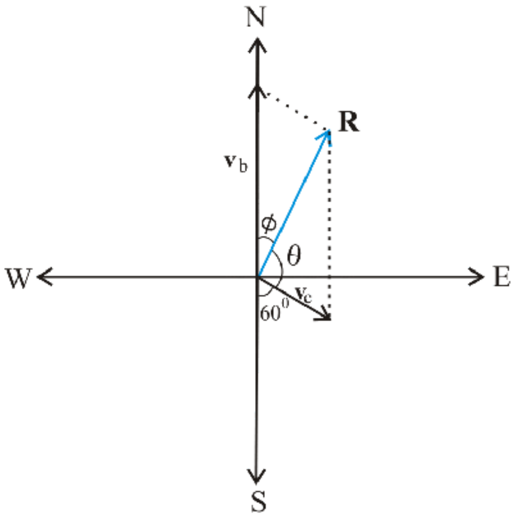
ഇവിടെ **R** ന്റെ മൂല്യം സമവാക്യം (4.24 a) യിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്നു.

അതായത്, $$\tan\alpha = \frac{SN}{OP+PN} = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta} \qquad (4.24f)$$

സമവാക്യം (4.24a) പരിണത സദിശത്തിന്റെ പരിമാണ വും സമവാക്യങ്ങൾ (4.24c) യും (4.24f) ഉം അതിന്റെ ദിശയും നൽകുന്നു. സമവാക്യം (4.24a) യെ **കൊസൈൻ നിയമം** എന്നു വിളിക്കുമ്പോൾ സമവാക്യം (4.24d) **സൈൻ നിയമം** എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

ഉദാഹരണം 4.3: ഒരു യന്ത്രവൽകൃതബോട്ട് 25 km/h എന്ന വേഗത്തിൽ വടക്കോട്ട് സഞ്ചരി ക്കുമ്പോൾ ജലപ്രവാഹം തെക്കുദിശക്ക് 60° കിഴക്കായി 10 km/h വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ബോട്ടിന്റെ പരിണിതപ്രവേഗം എത്രയെന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉത്തരം: ചോദ്യത്തിൽ നിർദ്ദേശിച്ചിരിക്കുന്ന അതേ ദിശകളിൽ ചിത്രം 4.11 ൽ സദിശം $\mathbf{v}_b$, യന്ത്രവൽകൃത ബോട്ടിന്റെ പ്രവേഗത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുമ്പോൾ, സദിശം $\mathbf{v}_c$ ജലപ്രവാഹത്തിന്റെ പ്രവേഗത്തെ സൂചി പ്പിക്കുന്നു. സദിശസങ്കലനത്തിന്റെ സാമാന്തരിക രീതി ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ദിശയിൽ പരിണിതപ്രവേഗം ലഭിക്കുന്നു.



ചിത്രം 4.11

കൊസൈൻനിയമം ഉപയോഗിച്ച് **R** ന്റെ അളവ് കണ്ടെ ത്താം.

$$R = \sqrt{v_b^2 + v_c^2 + 2v_b v_c \cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{25^2 + 10^2 + 2\times 25\times 10\,(-1/2)} \cong 22\ \mathrm{km/h}$$

ദിശ ലഭിക്കാനായി സൈൻനിയമം പ്രയോഗിക്കാം.

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{v_c}{\sin\phi} \quad \text{or,}\ \sin\phi = \frac{v_c}{R}\sin\theta$$

$$= \frac{10\times\sin 120^\circ}{21.8} = \frac{10\sqrt{3}}{2\times 21.8} \cong 0.397$$

$$\phi \cong 23.4^\circ$$

4.7 ഒരു പ്രതലത്തിലെ ചലനം (Motion in a plane)

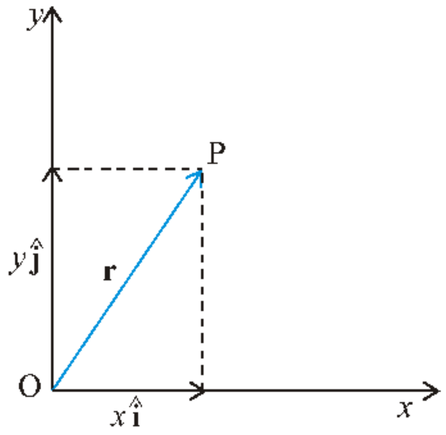
ഈ പാഠഭാഗത്തിൽ ദ്വിമാനതലത്തിലെ ചലനത്തെ സദിശങ്ങളുപയോഗിച്ച് എങ്ങനെ വിവരിക്കാമെന്നു നമുക്കു കാണാം.

4.7.1 സ്ഥാനസദിശവും സ്ഥാനാന്തരവും (Position Vector and Displacement)

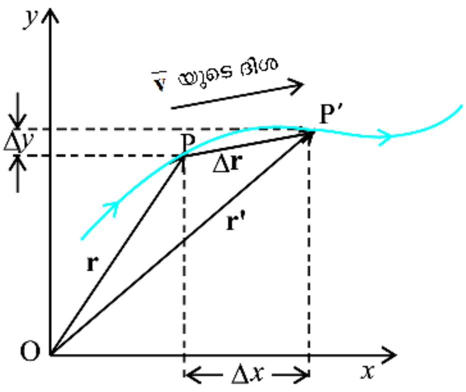
ഒരു x-y അവലംബകത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കി (ചിത്രം 4.12) ഒരു പ്രതലത്തിൽ സഞ്ചരിച്ചെയ്യുന്ന **p** എന്ന കണികയുടെ സ്ഥാനസദിശം **r** ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}$$

ഇവിടെ സ്ഥാനസദിശം **r** ന്റെ x, y അക്ഷങ്ങളിലെ ഗുണാങ്കങ്ങളാണ് യഥാക്രമം x ഉം y ഉം അഥവാ വസ്തു വിന്റെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങളാണ് എന്നും പറയാവുന്നതാണ്.



(a)



(b)

ചിത്രം *4.12* (a) സ്ഥാനസദിശം **r**, **(b)** ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരസദിശം $\Delta\mathbf{r}$ ഉം ശരാശരി പ്രവേഗം v യും

കട്ടികൂടിയ വക്രരേഖയാൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന പാതയിലൂടെ ഒരു കണിക സഞ്ചരിക്കുന്നതായി കരുതുക. t എന്ന സമയത്ത് അത് P യിലും t' സമയത്ത് അത് P' ലും ആകുന്നു. (ചിത്രം 4.12(b)) അപ്പോൾ, കണികയുടെ സ്ഥാനാന്തരം

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \qquad (4.25)$$

അത് P യിൽനിന്നു P' ലേക്കു നയിക്കപ്പെടുന്ന സദിശമാണ്. സമവാക്യം (4.25) നെ ഘടകരൂപത്തിൽ എഴുതാം.

$$\Delta\mathbf{r} = \left(x'\hat{\mathbf{i}} + y'\hat{\mathbf{j}}\right) - \left(x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\Delta x + \hat{\mathbf{j}}\Delta y$$

ഇവിടെ, $\Delta x = x' - x$, $\Delta y = y' - y$ (4.26)

പ്രവേഗം (Velocity)

ഒരു വസ്തുവിന്റെ ശരാശരി പ്രവേഗം $(\bar{\mathbf{v}})$ സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെയും അനുബന്ധസമയ ഇടവേളയുടെയും അനുപാതമാണ്.

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\,\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\,\hat{\mathbf{j}}}{\Delta t} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (4.27)$$

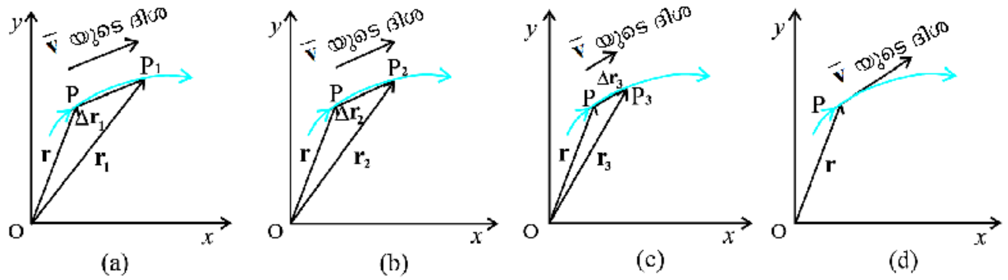
അഥവാ, $\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x\,\hat{\mathbf{i}} + \bar{v}_y\,\hat{\mathbf{j}}$

$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$, ആയതിനാൽ, ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ ദിശ $\Delta\mathbf{r}$ ന്റെ അതേ ദിശ തന്നെയായിരിക്കും. (ചിത്രം 4.12) സമയഇടവേള പൂജ്യത്തോടടുക്കുമ്പോൾ, ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ ക്ലിപ്തമൂല്യമായിരിക്കും ആ നിമിഷത്തിലെ തൽക്ഷണപ്രവേഗം (Instantaneous Velocity).

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (4.28)$$

4.13(a) മുതൽ 4.13(d) വരെയുള്ള ചിത്രങ്ങളുടെ സഹായത്താൽ ഈ ക്ലിപ്തപ്പെടുത്തൽ പ്രക്രിയയുടെ അർഥം എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാവുന്നതാണ്. ഈ ചിത്രങ്ങളിൽ, കട്ടികൂടിയ വക്രരേഖ വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന പാതയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. t സമയത്ത് വസ്തു P യിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. P_1, P_2, P_3 എന്നിവ യഥാക്രമം Δt_1, Δt_2, Δt_3 എന്നീ സമയ ഇടവേളകൾക്കു ശേഷമുള്ള വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനങ്ങളാകുന്നു.

Δr_1, Δr_2, Δr_3 എന്നിവ യഥാക്രമം Δt_1, Δt_2, Δt_3 എന്നീ സമയ ഇടവേളകളിൽ വസ്തുവിനുണ്ടായ സ്ഥാനാന്തരങ്ങളാകുന്നു. Δt_1, Δt_2, Δt_3 എന്നീ ചെറുതായിവരുന്ന ഇടവേളകളിലെ ഈ വസ്തുവിന്റെ ശരാശരിപ്രവേഗത്തിന്റെ $(\bar{\mathbf{v}})$ ദിശ യഥാക്രമം 4.13 (a), (b), (c) എന്നീ ചിത്രങ്ങളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ, $\Delta t \rightarrow 0$, ആകുമ്പോൾ $\Delta\mathbf{r} \rightarrow 0$ ആകുന്നതായി കാണാം. കൂടാതെ അത് പാതയുടെ തൊടുവരയിലൂടെയാണ് അനുഭവപ്പെടുന്നത്. (ചിത്രം 4.13(d)) അതുകൊണ്ട് ഒരു വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരപാതയിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിലെയും പ്രവേഗദിശ ആ ബിന്ദുവിൽ നാം വരക്കുന്ന തൊടുവരയുടെ ദിശയിലായിരിക്കും. അതായത്, ആ വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗദിശ അതിന്റെ ചലനത്തിന്റെ ദിശയിൽ തന്നെ ആയിരിക്കും.



ചിത്രം *4.13* സമയ ഇടവേള Δt പൂജ്യത്തോടടുക്കുമ്പോൾ ശരാശരിപ്രവേഗം **v** ആയി മാറുന്നു. $\bar{\mathbf{v}}$ യുടെ ദിശ, പാതയിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിലെയും തൊടുവരക്കു സമാന്തരമാണ്.

v ഘടകരൂപത്തിൽ എഴുതാം.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}}\right) \quad (4.29)$$

$$= \hat{\mathbf{i}} \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}} \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

അഥവാ, $\mathbf{v} = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$

ഇവിടെ $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}$ (4.30a)

അതുകൊണ്ട്, x, y നിർദേശാങ്കങ്ങളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ സമയത്തിന്റെ ഫലനമായി അറിയാമെങ്കിൽ മേൽപ്പറഞ്ഞ സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് v_x ഉം v_y ഉം കണ്ടെത്താം.

അപ്പോൾ, **v** യുടെ അളവ്

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4.30b)$$

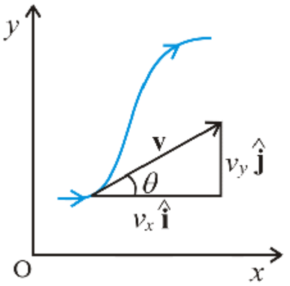
കൂടാതെ, **v** യുടെ ദിശ, θ എന്ന കോണളവിലൂടെ ലഭിക്കുന്നു.

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \quad (4.30c)$$

v എന്ന പ്രവേഗസദിശത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ v_x, v_y എന്നിവയും കോണളവ് θ യും ചിത്രം 4.14 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

ത്വരണം (Acceleration)

x,y പ്രതലത്തിൽ ചലിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന് Δt എന്ന സമയ ഇടവേളയിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ശരാശരി ത്വരണം ആ വസ്തുവിനുണ്ടായ പ്രവേഗമാറ്റത്തെ സമയ ഇടവേള കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഫലമാണ്.



ചിത്രം *4.14* പ്രവേഗസദിശം **v** യുടെ ഘടകസദിശങ്ങളായ v_x, v_y എന്നിവയും x അക്ഷവുമായുണ്ടാക്കുന്ന θ എന്ന കോണളവും. ഇവിടെ $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta$ യും ആകുന്നു.

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta\left(v_x\hat{i} + v_y\hat{j}\right)}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j} \quad (4.31a)$$

അഥവാ, $\bar{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$. (4.31b)

ഇവിടെ തൽക്ഷണ ത്വരണം എന്നത് സമയഇടവേള പൂജ്യത്തോടടുക്കുമ്പോഴുള്ള ശരാശരി ത്വരണത്തിന്റെ ക്ലിപ്തമൂല്യം (limiting value) ആകുന്നു.

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (4.32a)$$

$\Delta v = \Delta v_x\hat{i} + \Delta v_y\hat{j}$, ആയതിനാൽ,

$$a = \hat{i}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t} + \hat{j}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

അഥവാ, $a = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$ (4.32b)

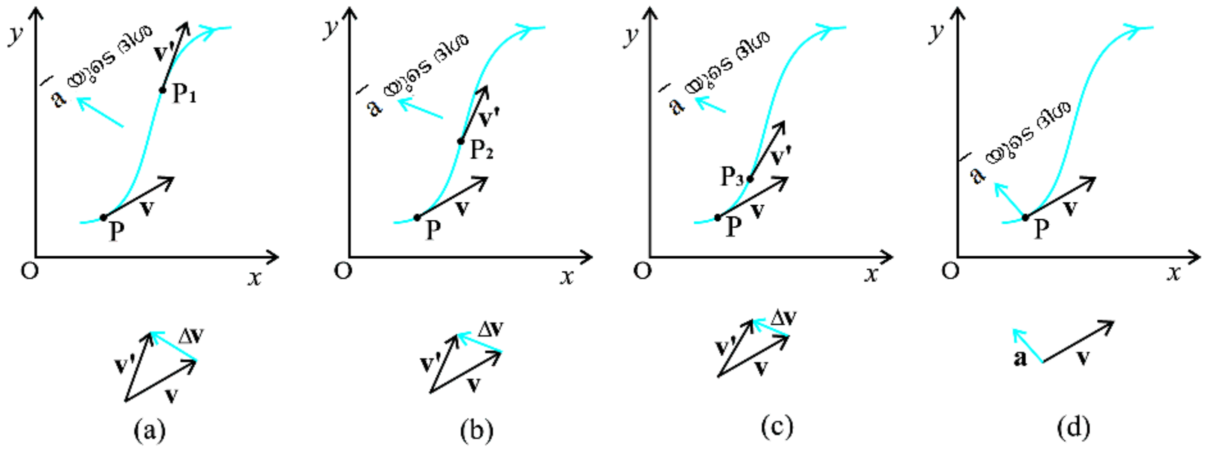
ഇവിടെ, $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ (4.32c)*

പ്രവേഗത്തിന്റെ കാര്യത്തിലെന്നതുപോലെ ഒരു ഗ്രാഫിൽ വസ്തുവിന്റെ ചലനപാത രേഖപ്പെടുത്തി, അതിന്റെ ത്വരണത്തെ നിർവചിക്കാനായുള്ള ക്ലിപ്തപ്പെടുത്തൽ പ്രക്രിയയെ ഗ്രാഫിക്കലായി മനസ്സിലാക്കാം. 4.15(a) മുതൽ 4.15(d) വരെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ ഇതു വ്യക്തമാക്കുന്നു. t സമയത്തെ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം P ആണെങ്കിൽ P_1, P_2, P_3 ഇവ യഥാക്രമം Δt_1, Δt_2, Δt_3 എന്നീ ഇടവേളകൾക്കു ശേഷമുള്ള വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനങ്ങളാകുന്നു ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$). P, P_1, P_2, P_3 എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിലെ പ്രവേഗസദിശങ്ങളും 4.15(a), (b),(c) എന്നീ ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്നു വ്യക്തമാണ്. ഓരോ സന്ദർഭത്തിലും സദിശ സങ്കലനത്തിന്റെ ത്രികോണനിയമം ഉപയോഗിച്ചാണ് Δ**v** കണ്ടെത്തുന്നത്.

---

* x, y എന്നിവയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ a_x, a_y എന്നിവയെ ഇങ്ങനെ രേഖപ്പെടുത്താം:

$$a_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$



ചിത്രം 4.15 മൂന്നു വ്യത്യസ്ത സമയ ഇടവേളകളിലെ ശരാശരി ത്വരണം (a) Δt_1, (b) Δt_2, (c) Δt_3, ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$). (d) സമയ പരിധി $\Delta t \rightarrow 0$ ആകുമ്പോൾ ശരാശരി ത്വരണം, തൽക്ഷണത്വരണമാകുന്നു.

നിർവചനമനുസരിച്ച്, Δv യുടെ അതേ ദിശയിലായിരിക്കും ശരാശരി ത്വരണവും അനുഭവപ്പെടുന്നത്. Δt മാറുന്നതനുസരിച്ച് Δv യുടെ ദിശയും മാറുന്നതായി കാണാം. തൽഫലമായി, ത്വരണത്തിന്റെ ദിശയും മാറുന്നു. അവസാനമായി ചിത്രം 4.15(d) യിൽ കാണുന്നതുപോലെ, $\Delta t \rightarrow 0$ എന്ന മൂല്യത്തിലേക്ക് ക്ലിപ്തപ്പെടുത്തുമ്പോൾ ശരാശരി ത്വരണം, തൽക്ഷണത്വരണം (instantaneous acceleration) ആയി മാറുന്നു. മാത്രമല്ല, അതിനു ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന രീതിയിലുള്ള ദിശയും ഉണ്ടാകുന്നു.

ഏകമാനചലനത്തിൽ ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗവും ത്വരണവുമെല്ലാം എല്ലായ്പ്പോഴും ഒരേ നേർരേഖയിലായിരിക്കുമെന്ന കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കണം (ഒരേ ദിശയിലോ അല്ലെങ്കിൽ വിപരീതദിശയിലോ) എന്നാൽ, ദ്വിമാനത്തിലോ ത്രിമാനത്തിലോ ഉള്ള വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തിൽ പ്രവേഗവും ത്വരണവും തമ്മിൽ 0° യ്ക്കും 180° യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ഏതൊരു കോണളവും ആകാം.

ഉദാഹരണം 4.4: ഒരു കണികയുടെ സ്ഥാനം, **r** എങ്കിൽ,

$$\mathbf{r} = 3.0t\hat{\mathbf{i}} + 2.0t^2\hat{\mathbf{j}} + 5.0\hat{\mathbf{k}}$$

ഇവിടെ t സെക്കന്റിലും **r** മീറ്ററിലുമാകുംവിധം, ഓരോ പദത്തിലെയും ഗുണകങ്ങൾ (coefficients) അനുയോജ്യമായ ഏകകങ്ങ ളിലാണ്. (a) **v** (t) യും **a**(t) യും കണ്ടെത്തുക. t=1.0 സെക്കന്റ് സമയത്തെ **v**(t) യുടെ അളവും ദിശയും കണ്ടെത്തുക.

ഉത്തരം : $\mathbf{v}(t) = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(3.0\,t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 5.0\,\hat{\mathbf{k}}\right)$

$$= 3.0\hat{\mathbf{i}} + 4.0t\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = +4.0\hat{\mathbf{j}}$$

$a = 4.0$ m s^{-2} (y- ദിശയിൽ അനുഭവപ്പെടുന്നു).

At $t = 1.0$ s, $\mathbf{v} = 3.0\hat{\mathbf{i}} + 4.0\hat{\mathbf{j}}$

t=1.0 സെക്കന്റാകുമ്പോൾ,

$$v = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.0 \text{ m s}^{-1}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \cong 53^\circ \text{ (}x\text{-അക്ഷവുമായി)}$$

4.8 ഒരു പ്രതലത്തിലെ സമത്വരണത്തിലുള്ള ചലനം (Motion in a plane with constant acceleration)

ഒരു വസ്തു സമത്വരണത്തോടെ x-y പ്രതലത്തിൽ ചലിക്കുന്നതായി കരുതുക. ഒരു സമയ ഇടവേളയിലത്രയും വസ്തുവിന്റെ ശരാശരി ത്വരണത്തിന് ഈ സ്ഥിരമൂല്യംതന്നെയായിരിക്കും. t=0 എന്ന സമയത്ത് h k Xph rsâ {] th Kw $\mathbf{v}_0$ യും t സമയത്ത് അത് **v** യും ആകുന്നുവെങ്കിൽ, നിർവചനമനുസരിച്ച്,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{t - 0} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{t}$$

അഥവാ, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$ (4.33a)

ഘടകങ്ങളായി എഴുതുമ്പോൾ,

$$v_x = v_{ox} + a_x t$$

$$v_y = v_{oy} + a_y t \qquad (4.33b)$$

വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം **r**, സമയത്തിനനുസരിച്ച് മാറുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നമുക്കിപ്പോൾ പരിശോധിക്കാം. ഏകമാനചലനത്തിൽ ഉപയോഗിച്ച അതേ മാർഗം തന്നെ ഇവിടെയും പിന്തുടരാം. $\mathbf{r}_0$, **r** എന്നിവ യഥാക്രമം t=0, t=t എന്നീ സമയങ്ങളിലെ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശങ്ങളാകുന്നു. ഈ സമയങ്ങളിലെ പ്രവേഗങ്ങൾ യഥാക്രമം $\mathbf{v}_0$, **v** എന്നിവയുമാകുന്നു. അപ്പോൾ, t എന്ന സമയ ഇടവേളയിൽ ശരാശരി പ്രവേഗം $(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v})/2$ ആകുന്നു. ഈ ഇടവേളയെ ശരാശരി പ്രവേഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ വസ്തുവിനുണ്ടായ സ്ഥാനാന്തരം ലഭിക്കും.

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \left(\frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_0}{2}\right)t = \left(\frac{(\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t) + \mathbf{v}_0}{2}\right)t$$

$$= \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

അഥവാ, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$ (4.34a)

മേൽസമവാക്യത്തിന്റെ (4.34a) ഡെറിവേറ്റീവ് (derivative), അതായത്, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ കാണുന്നതിലൂടെ, സമവാക്യം (4.33a) ലഭിക്കുന്നു. കൂടാതെ, t = 0 സമയത്ത് $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ആകുന്നുവെന്ന നിബന്ധനയും അത് പാലിക്കുന്നതായി കാണാം. ഘടകരൂപത്തിൽ സമവാക്യം (4.34a) ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$x = x_0 + v_{ox}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = y_0 + v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \qquad (4.34b)$$

x- ദിശയും y- ദിശയും പരസ്പരം ആശ്രയിക്കുന്നില്ല എന്നതാണ് സമവാക്യം (4.34b) യുടെ വ്യാഖ്യാനം. **അതായത് ഒരു പ്രതലത്തിലെ അഥവാ ദ്വിമാനത്തിലെ ചലനത്തെ സമത്വരണത്തിലുള്ള ഏകകാലികവും വ്യത്യസ്തവും പരസ്പര ലംബങ്ങളുമായ രണ്ട് ഏകമാനചലനങ്ങളായി പരിഗണിക്കാവുന്നതാണ്.** ഈ പ്രധാനപ്പെട്ട ഫലം ദ്വിമാനത്തിലുള്ള വസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തെ വിശകലനം ചെയ്യാൻ സഹായിക്കുന്നു. ത്രിമാനചലനത്തിലും സമാനഫലം നിലനിൽക്കുന്നതാണ്. ലംബദിശകളുടെ സ്വീകാര്യത പല ഭൗതിക സാഹചര്യങ്ങളിലും വളരെയേറെ പ്രയോജനപ്രദമാണ്. പ്രൊജക്ടൈൽ ചലനത്തിൽ (സെക്ഷൻ 4.10) ഈ സൗകര്യം നാം കൂടുതൽ മനസ്സിലാക്കും.

▶ **ഉദാഹരണം 4.5 :** അവലംബകകേന്ദ്രത്തിലിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ഒരു ബാഹ്യബലത്താൽ അതിൽ $(3.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s² എന്ന ത്വരണം അനുഭവപ്പെടുകയും തൽഫലമായി t=0 സമയത്ത് 5.0 $\hat{\mathbf{i}}$ m/s എന്ന പ്രവേഗത്തിൽ x-y പ്രതലത്തിൽ അത് ചലനമാരംഭിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. (a) x-നിർദേശാങ്കം 84m ആകുന്ന നിമിഷത്തിൽ, y- നിർദേശാങ്കം എത്ര? (b) ഈ സമയത്ത് വസ്തുവിന്റെ വേഗം എത്രയായിരിക്കും?

ഉത്തരം: വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

$$= 5.0\hat{\mathbf{i}}t + (1/2)(3.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})t^2$$

$$= (5.0t + 1.5t^2)\hat{\mathbf{i}} + 1.0t^2\hat{\mathbf{j}}$$

അതിനാൽ, $x(t) = 5.0t + 1.5t^2$

$y(t) = +1.0t^2$

ഇവിടെ $x(t)$ = 84 m, എന്നു നൽകിയിരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ, t= ?

$$5.0\,t + 1.5\,t^2 = 84 \Rightarrow t = 6\text{ s}$$

At t = 6 s ആകുമ്പോൾ, $y = 1.0\,(6)^2 = 36.0$ m

ഇപ്പോൾ പ്രവേഗം, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (5.0 + 3.0t)\hat{\mathbf{i}} + 2.0t\,\hat{\mathbf{j}}$

At $t = 6$ s ആകുമ്പോൾ $\mathbf{v} = 23.0\hat{\mathbf{i}} + 12.0\hat{\mathbf{j}}$

വേഗം $= |\mathbf{v}| = \sqrt{23^2 + 12^2} \cong 26\text{ m s}^{-1}$. ◀

4.9 ദ്വിമാനങ്ങളിലെ ആപേക്ഷികപ്രവേഗം (Relative velocity in two dimensions)

'നേർരേഖാ ചലനം' എന്ന അധ്യായത്തിൽ 3.7 എന്ന ഭാഗത്ത് പരിചയപ്പെട്ട ആപേക്ഷികപ്രവേഗം എന്ന ആശയം ദ്വിമാനങ്ങളിലേക്കോ ത്രിമാനങ്ങളിലേക്കോ വളരെ എളുപ്പത്തിൽ പ്രയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. നിശ്ചലപ്രതലം പോലെയുള്ള ഒരു പൊതു അവലംബകത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി A, B എന്നീ വസ്തുക്കൾ യഥാക്രമം $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ എന്നീ വ്യത്യസ്ത പ്രവേഗങ്ങളിൽ സഞ്ചരിക്കു

ന്നതായി കരുതുക. അപ്പോൾ, B യെ അപേക്ഷിച്ച് A യുടെ പ്രവേഗം.

$\mathbf{v}_{AB} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$ (4.35a)

സമാനമായി A യെ അപേക്ഷിച്ച് B യുടെ പ്രവേഗം

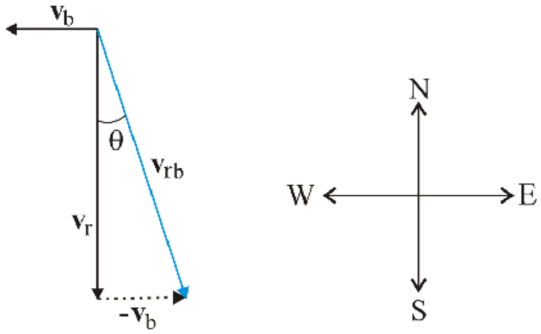
$\mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$

അതിനാൽ, $\mathbf{v}_{AB} = -\mathbf{v}_{BA}$ (4.35b)

കൂടാതെ, $|\mathbf{v}_{AB}| = |\mathbf{v}_{BA}|$ (4.35c)

> **ഉദാഹരണം 4.6:** $35\,ms^{-1}$ വേഗത്തിൽ ലംബമായി മഴ താഴേക്കു പതിക്കുന്നു. കിഴക്കു പടിഞ്ഞാറു ദിശയിൽ $12ms^{-1}$ വേഗത്തിൽ ഒരു സ്ത്രീ തന്റെ സൈക്കിളിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. മഴയിൽ നിന്നു രക്ഷനേടാൻ ഏതു ദിശയിലാണ് തന്റെ കുട ചൂടേണ്ടത്?

ഉത്തരം: ചിത്രം 4.16 ൽ $\mathbf{v}_r$ മഴയുടെ പ്രവേഗവും $\mathbf{v}_b$ അയാൾ സഞ്ചരിക്കുന്ന സൈക്കിളിന്റെ പ്രവേഗവും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഈ രണ്ടു പ്രവേഗങ്ങളും നിശ്ചല പ്രതലത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ളതാണ്. അയാൾ സൈക്കിളിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നതിനാൽ, അയാൾക്ക് അനുഭവപ്പെടുന്ന മഴയുടെ പ്രവേഗം എന്നത് സഞ്ചരിക്കുന്ന സൈക്കിളിന്റെ പ്രവേഗത്തിന് ആപേക്ഷികമാണ്. അതിനാൽ, $v_{rb} = v_r - v_b$



ചിത്രം 4.16

ഈ ആപേക്ഷികപ്രവേഗ സദിശം ചിത്രം 4.16 ൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്. അത് ലംബവുമായി θ എന്ന കോൺ സൃഷ്ടിക്കുന്നുണ്ട്. അതായത്,

$$\tan\theta = \frac{v_b}{v_r} = \frac{12}{35} = 0.343$$

അഥവാ, $\theta \cong 19^0$

അതിനാൽ, ലംബവുമായി 19° കോണളവുണ്ടാക്കുന്ന വിധം പടിഞ്ഞാറുവശത്തേക്കു തിരിച്ചായിരിക്കണം അയാൾ കുട പിടിക്കേണ്ടത്.

ഉദാഹരണം 4.1 ഉം ഇതുമായുള്ള വ്യത്യാസം ശ്രദ്ധയോടെ മനസ്സിലാക്കുക. ഉദാഹരണം 4.1 ൽ കുട്ടി അനുഭവിക്കുന്നത് രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ പരിണതഫലമാണ് (സദിശങ്ങളുടെ തുക) എങ്കിൽ, ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ സൈക്കിളിനെ ആധാരമാക്കി ചലിക്കുന്ന (പെയ്യുന്ന) മഴയുടെ പ്രവേഗമാണ് അനുഭവിക്കുന്നത്. (ഇരുപ്രവേഗങ്ങളുടെയും സദിശ വ്യത്യാസം)

4.10 പ്രൊജക്ടൈൽ ചലനം (Projectile Motion)

വിവിധ ഭാഗങ്ങളിലായി നാം മനസ്സിലാക്കിയ ആശയങ്ങളുടെ പ്രയോഗമെന്ന നിലക്ക് നമുക്കൊരു പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ ചലനം പരിഗണിക്കാം. എറിയുകയോ വിക്ഷേപിക്കുകയോ ചെയ്തശേഷം ഒരു വസ്തു അതിന്റെ പറക്കൽ എന്ന അവസ്ഥയിലാണെങ്കിൽ, അതിനെ **പ്രൊജക്ടൈൽ** എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഫുട്ബോൾ, ക്രിക്കറ്റ്ബോൾ, ബേസ്ബോൾ എന്നിവയെല്ലാം പ്രൊജക്ടൈലുകൾ ആവാം. രണ്ടു വ്യത്യസ്തവും ഏകകാലികവുമായ ചലനഘടകങ്ങളുടെ ഫലമായി പ്രൊജക്ടൈൽ ചലനത്തെ കരുതാവുന്നതാണ്.

ഇതിൽ തിരശ്ചീനതലത്തിലുള്ള ഘടകത്തിന് ത്വരണം അനുഭവപ്പെടുന്നില്ല. ലംബമായ ദിശയിലെ ഘടകത്തിന് ഗുരുത്വാകർഷണംമൂലമുള്ള സമത്വരണം അനുഭവപ്പെടുന്നു. 'ഡയലോഗ് ഓൺ ദ ഗ്രേറ്റ് വേൾഡ് സിസ്റ്റംസ്' (1632) എന്ന പുസ്തകത്തിലൂടെ ഗലീലിയോ ആണ് ആദ്യമായി തിരശ്ചീനവും ലംബവുമായ ഘടകങ്ങൾക്കിടയിലെ ആശ്രിതത്വമില്ലായ്മ പ്രസ്താവിച്ചത്.

നമ്മുടെ ചർച്ചയിൽ പ്രൊജക്ടൈൽചലനത്തിൽ കാര്യമായ ഒരു പ്രഭാവം ചെലുത്താൻ വായുവിന്റെ പ്രതിരോധത്തിനാകുമെന്ന് കണക്കാക്കുന്നില്ല. ചിത്രം 4.17 ൽ കാണുന്നതുപോലെ, $\mathbf{v}_0$ എന്ന പ്രവേഗത്തിൽ വിക്ഷേപിക്കപ്പെട്ട ഒരു പ്രൊജക്ടൈൽ x അക്ഷവുമായി θ_o എന്ന കോണളവു സൃഷ്ടിക്കുന്നതായി കരുതുക.

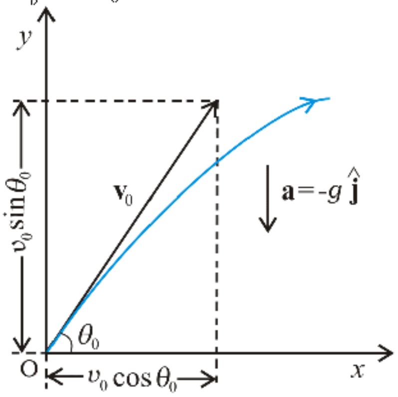
വിക്ഷേപത്തിനുശേഷം വസ്തുവിലനുഭവപ്പെടുന്ന ത്വരണം ഗുരുത്വാകർണം മൂലമുള്ളതാണ്. മാത്രമല്ല, അത് ലംബമായി താഴേക്കാണനുഭവപ്പെടുന്നതും.

$$\mathbf{a} = -g\,\hat{\mathbf{j}}$$

അഥവാ, $a_x \quad 0$, $a_y = -g$ (4.36)

പ്രാരംഭപ്രവേഗത്തിന്റെ ($\mathbf{v}_o$) ഘടകങ്ങൾ താഴെപ്പറയുന്നവയാണ്.

$$v_{ox} = v_o \cos \theta_o$$



ചിത്രം *4.17* v_o എന്ന ആദ്യ പ്രവേഗത്തിലും θ_o എന്ന കോണളവിലും വിക്ഷേപിതമായ ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനം.

$$v_{oy} = v_o \sin \theta_o \qquad (4.37)$$

ചിത്രം 4.17 ൽ കാണുന്നതുപോലെ വസ്തുവിന്റെ ആദ്യസ്ഥാനം അവലംബകത്തിന്റെ കേന്ദ്രമായി എടുത്താൽ,

$x_o = 0,\ y_o = 0$

അപ്പോൾ സമവാക്യം (4.34b) ഇങ്ങനെ മാറുന്നു.

$$x = v_{ox} t = (v_o \cos \theta_o)\, t$$

$$y = (v_o \sin \theta_o)\, t - (\tfrac{1}{2}) g\, t^2 \qquad (4.38)$$

t സമയത്തുള്ള പ്രവേഗത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ സമവാക്യം (4.33b) ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാം.

$$v_x = v_{ox} = v_o \cos \theta_o$$

$$v_y = v_o \sin \theta_o - g\, t \qquad (4.39)$$

സമവാക്യം (4.38) ന്റെ സഹായത്താൽ ഒരു പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ t സമയത്തുള്ള x, y നിർദേശാങ്കങ്ങൾ കണ്ടെത്താം. ഇവ പ്രധാനമായും പ്രാരംഭവേഗം v_0, വിക്ഷേപണ കോൺ θ_o എന്നിവയെ ആശ്രയിക്കുന്നു. പ്രൊജക്ടൈൽ ചലനം അപഗ്രഥിക്കാനായി x, y എന്നീ പരസ്പരലംബങ്ങളായ ദിശകൾ സ്വീകരിക്കുന്നത് ഈ പ്രക്രിയയെ കൂടുതൽ ലളിതമാക്കുന്നു എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുമല്ലോ.

പ്രവേഗത്തിന്റെ ഒരു x ഘടകം, സ്ഥിരമായി തുടരുമ്പോൾ y ഘടകം, നിർബാധപതനത്തിലുള്ള വസ്തുവിന്റേതുപോലെ മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കും. ചിത്രം 4.18 ൽ ഇത്തരം ചില നിമിഷങ്ങൾ ഗ്രാഫിക്കലായി അവതരിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

പരമാവധി ഉയരത്തിൽ, $v_y = 0$ ആകുന്നുവെന്നു ശ്രദ്ധിക്കുക. അതിനാൽ,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = 0$$

ഒരു പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പാതയുടെ സമവാക്യം
(Equation of path of a projectile)

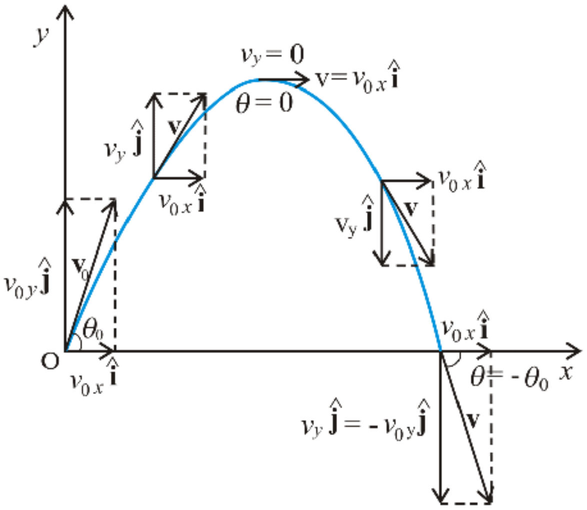
പ്രൊജക്ടൈൽ പിന്തുടരുന്ന പാതയുടെ സ്വഭാവമെന്താണ്?

ഇതു കാണാനായി സമവാക്യം (4.38) ൽ നൽകിയ x ന്റെയും y യുടെയും സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നു സമയം ഒഴിവാക്കിയാൽ മതിയാകും. അങ്ങനെ ചെയ്താൽ,

$$y = (\tan \theta_o)\, x - \frac{g}{2\,(v_o \cos \theta_o)^2}\, x^2 \qquad (4.40)$$

എന്നു ലഭിക്കും.

ഇവിടെ g, θ_o, v_o എന്നീ അളവുകൾക്ക് സ്ഥിരമൂല്യമായതിനാൽ സമവാക്യം (4.40) $y \quad a\,x - b\,x^2$, എന്ന രൂപത്തിലാണ്. ഇവിടെ a, b എന്നിവ സ്ഥിര സംഖ്യകളാകുന്നു. ഇത് ഒരു പരാബൊളയുടെ സമവാക്യമാണ്. അതായത്, പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പാത ഒരു പരാബൊള ആകുന്നു. (ചിത്രം 4.18)



ചിത്രം *4.18* പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ സഞ്ചാരപാത ഒരു പരാബൊളയാണ്.

പരമാവധി ഉയരത്തിലെത്താനുള്ള സമയം (Time of Maximum Height)

ഒരു പ്രൊജക്ടൈൽ അതിന്റെ കൂടിയ ഉയരത്തിലെത്താനെടുക്കുന്ന സമയമെത്ര? ഈ സമയത്തെ t_m എന്ന് രേഖപ്പെടുത്താം. ഏറ്റവും ഉയരത്തിലെ ബിന്ദുവിൽ v_y=0 ആയതിനാൽ സമവാക്യം 4.39 ൽ നിന്നും,

$$v_y = v_o \sin\theta_o \quad g\, t_m = 0$$

അഥവാ, $t_m \quad v_o \sin\theta_o/g$ (4.41a)

പ്രൊജക്ടൈൽ അതിന്റെ ചലനത്തിനെടുത്ത ആകെ സമയം, T_f ലഭിക്കാനായി സമവാക്യം 4.38 ൽ $y = 0$ എന്നു നൽകുക. അപ്പോൾ

$$T_f = 2\ (v_o \sin\ \theta_o\ )/g \qquad (4.41b)$$

ഇവിടെ T_f എന്നത് പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പറക്കൽ സമയം (Time of flight) ആകുന്നു. പരാബൊളിക് പാതയുടെ സമമിതിയാൽ $T_f = 2\, t_m$ എന്നു കാണാൻ കഴിയും.

ഒരു പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പരമാവധി ഉയരം (Maximum Height of a Projectile)

ഒരു പ്രൊജക്ടൈൽ എത്തിച്ചേരുന്ന പരമാവധി ഉയരം h_m കണ്ടെത്താനായി സമവാക്യം 4.38 ൽ $t \quad t_m$ പകരമായി നൽകിയാൽ മതിയാകും.

$$y = h_m = \left(v_0 \sin\theta_0\right)\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right)^2$$

അഥവാ, $$h_m = \frac{\left(v_0 \sin\theta_0\right)^2}{2g} \qquad (4.42)$$

പ്രൊജക്ടൈൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന തിരശ്ചീന പരിധി (Horizontal Range of a Projectile)

പ്രാരംഭസ്ഥാനത്തുനിന്ന് ($x \quad y \quad 0$) വിക്ഷേപിക്കപ്പെടുന്ന ഒരു പ്രൊജക്ടൈൽ വിക്ഷേപണഗതിയിൽ, വീണ്ടും y=0 എന്ന സ്ഥാനത്ത് എത്തുന്നതു വരെയുള്ള തിരശ്ചീനദൂരത്തെ, പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ തിരശ്ചീന പരിധി (Horizontal range of a projectile) എന്നു വിളിക്കാം. T_f സമയംകൊണ്ട് പ്രൊജക്ടൈൽ സഞ്ചരിച്ച ആകെ ദൂരത്തെയാണ് തിരശ്ചീന പരിധിയെന്നു വിളിക്കുന്നത്. അതിനാൽ പരിധി R,

$$R = (v_o \cos\ \theta_o)\ (T_f)$$

$$=(v_o \cos\ \theta_o)\ \ (2\ v_o \sin\ \theta_o)/g$$

അഥവാ, $$R = \frac{v_0^2 \sin\ 2\theta_0}{g} \qquad (4.43\ a)$$

ഈ സമവാക്യം കാണിക്കുന്നത്, ഒരു നിശ്ചിത പ്രാരംഭപ്രവേഗത്തിൽ (v_o) വിക്ഷേപിക്കപ്പെട്ട ഒരു പ്രൊജക്ടൈലിൽ $\sin 2\theta_0$ ഏറ്റവും വലുതാകുമ്പോൾ R പരമാവധി മൂല്യം നേടുന്നു. അതായത്, $\theta = 45°$ ആകുമ്പോൾ. R ന് പരമാവധി മൂല്യം ലഭിക്കും.

അതുകൊണ്ട് പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പരമാവധി തിരശ്ചീന പരിധി ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$R_m = \frac{v_0^2}{g}$$

> **ഉദാഹരണം 4.7:** ഗലീലിയോയുടെ 'റ്റു ന്യൂ സയൻസസ്' എന്ന പുസ്തകത്തിലെ "45° യേക്കാൾ തുല്യ അളവിൽ കൂടിയതോ കുറഞ്ഞതോ ആയ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ചരിവുകളിൽ എന്നറിയപ്പെടുന്ന പ്രൊജക്ടൈലുകളുടെ പരിധി തുല്യമായിരിക്കും" എന്ന പ്രസ്താവന സത്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഉത്തരം : θ_o എന്ന കോണളവിൽ, v_o എന്ന പ്രാരംഭ പ്രവേഗത്തോടുകൂടി വിക്ഷേപിക്കപ്പെട്ട ഒരു പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പരിധി,

$$R = \frac{v_0^2\ \sin\ 2\theta_0}{g}$$

ആകുന്നു.

$(45° + \alpha)$, $(45° - \alpha)$ എന്നീ കോണളവുകൾക്ക് $2\theta_o$ എന്നത് യഥാക്രമം $(90° + 2\alpha)$ യും $(90° - 2\alpha)$ യുമാകുന്നു. $\sin\ (90° + 2\alpha)$, $\sin\ (90° - 2\alpha)$ എന്നിവയുടെ വിലകൾ തുല്യമാണ്. രണ്ടിന്റെയും വില $\cos\ 2\alpha$. ആണ്. അതിനാൽ, 45° യേക്കാൾ തുല്യ അളവിൽ കൂടിയതും കുറഞ്ഞതുമായ α ചരിവുകളിൽ എറിയപ്പെടുന്ന പ്രൊജക്ടൈലുകളുടെ പരിധി എപ്പോഴും ഒന്നു തന്നെയായിരിക്കും.

> **ഉദാഹരണം 4.8:** ഒരു പർവതാരോഹകൻ, ഗ്രൗണ്ടിൽനിന്നു 490 മീ. ഉയരമുള്ള ഒരു പാറയുടെ അഗ്രഭാഗത്തായി നിൽക്കുന്നു. അയാൾ തിരശ്ചീനദിശയിൽ 15 ms^{-1} വേഗത്തിൽ ഒരു കല്ല് എന്നറിയുന്നു. വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം അവഗണിച്ചാൽ, കല്ല് നിലത്തെത്താനാവശ്യമായ സമയമെത്ര? കല്ല് നിലത്തു വന്നിടിക്കുന്ന വേഗം എത്ര? (g=9.8 m s^{-2} എന്നെടുക്കുക).

ഉത്തരം: പാറയുടെ അഗ്രം x-, y- അക്ഷങ്ങളുടെ കേന്ദ്രമായി (origin) തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. മാത്രമല്ല, കല്ല് എറിയുന്ന നിമിഷം t=0 എന്നും പരിഗണിക്കുന്നു. പ്രാരംഭപ്രവേഗദിശയിൽ x- അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവും അതിനു ലംബമായി മുകളിലേക്ക് y- അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് ദിശയും സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. ചലനത്തിന്റെ x, y ഘടകങ്ങൾ സ്വതന്ത്രമായി പരിഗണിക്കാവുന്നതാണ്. ചലനസമവാക്യങ്ങൾ ഇവയാണ്.

$$x(t) \quad x_o + v_{ox}\, t$$

$$y(t) = y_o \mid v_{oy}\, t \mid (1/2)\, a_y\, t^2$$

ഇവിടെ, $x_o \quad y_o = 0,\ v_{oy} = 0,\ a_y \quad -g = -9.8\ \mathrm{m\ s^{-2}}$,

$v_{ox} = 15\ \mathrm{m\ s^{-1}}$.

$x(t) = -490\mathrm{m}$ ആകുമ്പോൾ കല്ല് നിലത്തു വന്നിടിക്കുന്നു

$$-490\ \mathrm{m} = -(1/2)(9.8)\ t^2.$$

ഈ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന്, $t = 10\mathrm{s}$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

$x_o = y_o = 0,\ v_{oy} = 0,\ ay = -g = -9.8\ \mathrm{ms^{-2}}, v_{ox} = 15\ \mathrm{ms^{-1}}$.

$$y(t) = -\ 490\ \mathrm{m}$$

$$t = 10\ \mathrm{cm}$$

പ്രവേഗത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ $v_x \quad v_{ox}$ യുമാകുന്നു.

$v_y \quad v_{oy} - g\, t$

അതുകൊണ്ട് കല്ല് നിലത്തിടിക്കുമ്പോൾ :

$$v_{ox} = 15\ \mathrm{m\,s^{\ 1}}$$

$$v_{oy} = 0 - 9.8 \times 10 = -98\ \mathrm{m\,s^{\ 1}}$$

അതിനാൽ, കല്ലിന്റെ വേഗം

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + 98^2} = 99\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

ഉദാഹരണം 4.9: തിരശ്ചീനദിശക്കു മുകളിലായി 30° കോണളവിൽ 28 $\mathrm{ms^{-1}}$ വേഗത്തിൽ ഒരു ക്രിക്കറ്റ് പന്ത് എറിയപ്പെടുന്നു. താഴെപ്പറയുന്നവ കണ്ടെത്തുക. (a) ആ ക്രിക്കറ്റ് പന്ത് എത്തിച്ചേരുന്ന ഏറ്റവും കൂടിയ ഉയരം (b) അതേ നിരപ്പിലേക്ക് തിരിച്ചെത്താനാശ്യമായ സമയം (c) എറിയുന്ന ആളിൽ നിന്നു പന്തു വീഴുന്നിടത്തേക്കുള്ള ദൂരം.

ഉത്തരം : (a) പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പരമാവധി ഉയരം,

$$h_m = \frac{(v_0 \sin\theta_o)^2}{2g} = \frac{(28 \sin 30°)^2}{2\ (9.8)}\ \mathrm{m}$$

$$= \frac{14 \times 14}{2 \times 9.8} = 10.0\ \mathrm{m}$$

(b) ഒരേ നിരപ്പിലേക്കു തിരിച്ചെത്താനാവശ്യമായ സമയം.

$T_f = (2\ v_o \sin\theta_o)/g = (2 \times 28 \times \sin 30°)/9.8$

$= 28/9.8\ \mathrm{s} = 2.9\ \mathrm{s}$

(c) എറിയുന്ന ആളിൽ നിന്ന്, അതേ നിരപ്പിൽ പന്തു തിരികെ വീഴുന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ദൂരം

$$R = \frac{(v_o^2 \sin 2\theta_o)}{g} = \frac{28 \times 28 \times \sin 60°}{9.8} = 69\ \mathrm{m}$$

വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം അവഗണിക്കുന്നു. ഈ അനുമാനം യഥാർഥത്തിൽ അർഥമാക്കുന്നതെന്ത്?

പ്രൊജക്ടൈൽ ചലനമെന്ന പാഠഭാഗം പരിഗണിച്ചപ്പോൾ വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം പ്രൊജക്ടൈലിൽ കാര്യമായ പ്രഭാവമൊന്നും സൃഷ്ടിക്കുന്നില്ല എന്നു പ്രസ്താവിച്ചിരിക്കുന്നു. ആ പ്രസ്താവന യഥാർഥത്തിൽ എന്താണ് അർഥമാക്കുന്നതെന്ന് നിങ്ങൾ തീർച്ചയായും മനസ്സിലാക്കണം. ഘർഷണം, വിസ്കസ്ബലം, വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം എന്നിവയെല്ലാം നശീകരണാത്മകങ്ങളായ ബലങ്ങളാണ്. ചലനത്തെ തടസ്സപ്പെടുന്ന ഈ വിധത്തിലുള്ള ഏതൊരു ബലത്തിന്റെ സാന്നിധ്യത്തിലും വസ്തുവിന് അതിന്റെ പ്രാരംഭ ഊർജവും അതിന്റെ ഫലമായി ആക്കവും നഷ്ടപ്പെടുന്നു. അങ്ങനെ, ഒരു പരാബൊളിക് പാതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന പ്രൊജക്ടൈൽ വായുവിന്റെ പ്രതിരോധത്താൽ, അതിന്റെ യഥാർഥപാതയിൽ നിന്നു വ്യതിചലിക്കും. തറയിൽനിന്ന് വിക്ഷേപിക്കുമ്പോഴുണ്ടായിരുന്ന അതേ പ്രവേഗത്തിൽ അത് തിരികെ, തറയിൽ പതിക്കുന്നില്ല. വായുവിന്റെ അസാന്നിധ്യത്തിൽ പ്രവേഗത്തിന്റെ x ഘടകം സ്ഥിരമായി തുടരുകയും y ഘടകത്തിനു മാത്രം തുടർച്ചയായി മാറ്റം സംഭവിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. എങ്കിലും, വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം ഈ രണ്ടു ഘടകങ്ങളെയും ബാധിക്കുന്നു. സമവാക്യം (4.43) ൽ കൂടി നമുക്ക് ലഭിക്കുന്ന പരിധിയെക്കാൾ കുറഞ്ഞ പരിധിയാണ് യഥാർഥത്തിൽ ലഭിക്കുന്നത്. പ്രൊജക്ടൈൽ എത്തുന്ന പരമാവധി ഉയരവും സമവാക്യം (4.42) ൽ നാം വിഭാവനം ചെയ്തതിലും കുറവായിരിക്കും. പറക്കൽ സമയത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റമെന്തായിരിക്കുമെന്ന് നിങ്ങൾക്ക് മുൻകൂട്ടി കാണാനാകുമോ?

വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം കുറക്കാനായി നാം ചെയ്യുന്ന ഏതൊരു പരീക്ഷണവും കുറഞ്ഞ മർദ്ദത്തിലോ ശൂന്യതയിലോ നടത്തേണ്ടിവരും. ഇത് എപ്പോഴും പ്രായോഗികമല്ല.

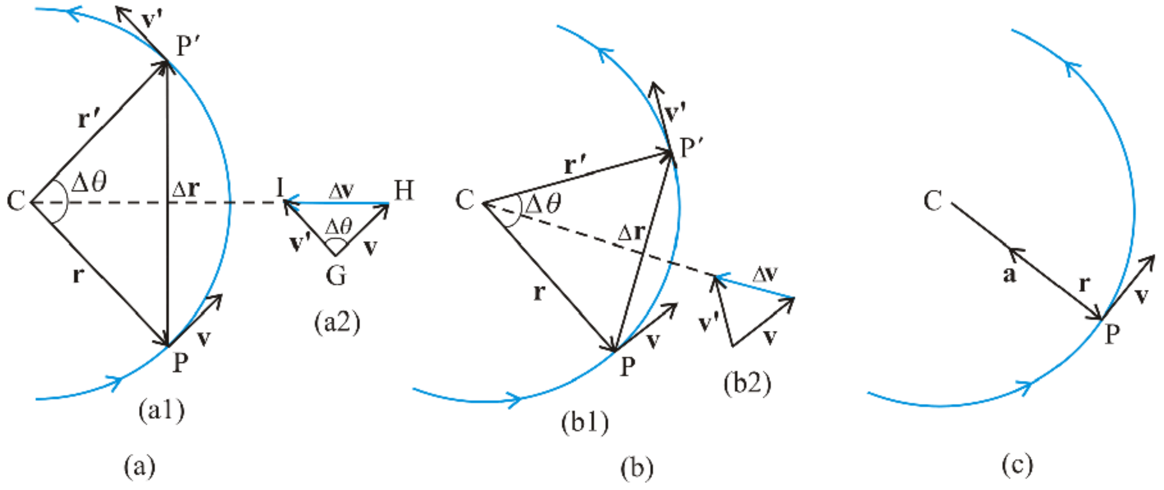
വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം പരിഗണിച്ചുകൊണ്ട് നാം കണക്കാക്കുന്ന പരിധി, ഉയരം എന്നീ അളവുകൾക്ക് അതു പരിഗണിക്കാതെയുള്ള അളവുകളുമായി വളരെ കുറഞ്ഞ വ്യത്യാസമാണുള്ളത്. 'വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം അവഗണിക്കുന്നു' എന്നു പറയുന്നതിന്റെ യഥാർഥ പൊരുൾ അതാണ്. വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം പരിഗണിച്ചുകൊണ്ടുള്ള ഗണിതക്രിയകൾ, അതു പരിഗണിക്കാതെയുള്ള ഗണിതക്രിയകളേക്കാൾ പ്രയാസമേറിയതാണ്.

4.11 സമവർത്തുളചലനം (Uniform circular motion)

ഒരു വസ്തു, സ്ഥിരവേഗത്തിൽ വർത്തുളപാതയിൽ ചലിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ വസ്തുവിന്റെ ചലനം **സമവർത്തുളചലനം** ആകുന്നു. സമം എന്ന വാക്ക് പരാമർശിക്കുന്നത് ചലനത്തിലുടനീളം സമമായ (സ്ഥിരമായി) വേഗം എന്നാണ്. ചിത്രം 4.19 ൽ കാണുന്നതുപോലെ, ഒരു വസ്തു R ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ സമവേഗത്തിൽ ചലിക്കുന്നതായി കരുതുക. വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗദിശ അനുനിമിഷം മാറുന്നതിനാൽ, അതിൽ ഒരു ത്വരണം അനുഭവപ്പെടുന്നു. ഈ ത്വരണത്തിന്റെ അളവും ദിശയും നമുക്കു കണ്ടെത്താം.

ചിത്രം 4.19 യിൽ കാണുന്നതുപോലെ വസ്തു P,P' എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിലായിരിക്കുമ്പോൾ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം യഥാക്രമം **r** ഉം **r'** ഉം പ്രവേഗം **v** ഉം **v'** ഉം ആകട്ടെ. നിർവചനപ്രകാരം ഒരു ബിന്ദുവിലെ പ്രവേഗം അനുഭവപ്പെടുന്നത് ചലനദിശയിൽ ആ ബിന്ദുവിൽ നാം വരക്കുന്ന തൊടുവരയിലൂടെയാണ്. പ്രവേഗ സദിശങ്ങൾ **v** ഉം **v'** ഉം ചിത്രം 4.19(a1) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

ത്രികോണ-സദിശസങ്കലനത്തിലൂടെ നമുക്ക് ലഭിച്ച $\Delta \mathbf{v}$ യും ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്. (ചിത്രം 4.19 (a) പാത വർത്തുളമായതുകൊണ്ട് **v**, സ്ഥാനസദിശം **r** നു ലംബമാകുന്നു. ഇതുപോലെ **v'** എന്നത് **r'** നും ലംബമാകുന്നു. വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന ശരാശരി ത്വരണം $\Delta \mathbf{v}$ യിലൂടെയായതിനാൽ $\left(\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}\right)$ ശരാശരിത്വരണം $\bar{\mathbf{a}}$ $\Delta \mathbf{r}$ നു ലംബമായിരിക്കും. r, r' എന്നീ സ്ഥാന സദിശങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവിനെ രണ്ടായി ഭാഗിക്കുന്ന രേഖയിൽ $\Delta \mathbf{v}$ വക്കുകയാണെങ്കിൽ, അത് വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്ക് നയിക്കപ്പെടുന്നതായി കാണാവുന്നതാണ്. ചെറിയ സമയ ഇടവേളകളിലുള്ള ഇതേ അളവുകൾ ചിത്രം 4.19 (b) യിൽ കാണാം. $\Delta \mathbf{v}$ യും അതുകൊണ്ടുതന്നെ $\bar{\mathbf{a}}$ ഉം വീണ്ടും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള ദിശയിൽ അനുഭവപ്പെടുന്നു. ചിത്രം 4.19 (c) യിൽ $\Delta t \rightarrow 0$ ആയതിനാൽ ശരാശരിത്വരണം തൽക്ഷണത്വരണമായി മാറുന്നു. അതും കേന്ദ്രത്തിന്റെ ദിശയിലായിരിക്കും കാണപ്പെടുക.* അങ്ങനെ, സമവർത്തുളചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തു



ചിത്രം *4.19* സമവർത്തുളചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗവും ത്വരണവും സമയ ഇടവേള Δt (a) യിൽനിന്നു (c) യിലെത്തുന്നതു വരെ കുറയുന്നു. (c) യിൽ Δt പൂജ്യമാണ് പാതയിലെ ഓരോ ബിന്ദുവിലും ത്വരണത്തിന്റെ ദിശ വൃത്തപാതയുടെ കേന്ദ്രത്തിലേക്കായിരിക്കും.

വിന്റെ ത്വരണം, എപ്പോഴും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്കാണ നുഭവപ്പെടുകയെന്നും നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം. ഇനി ത്വരണത്തിന്റെ പരിമാണം എത്രയാണെന്നു കണ്ടെ ത്താം. നിർവചനപ്രകാരം, a യുടെ പരിമാണം ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t}$$

സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ **r** നും **r'** നും ഇടയിലെ കോണളവ് $\Delta\theta$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. പ്രവേഗസദിശങ്ങൾ **v** ഉം **v'** ഉം എപ്പോഴും സ്ഥാനസദിശങ്ങൾക്ക് ലംബങ്ങളായ തിനാൽ, അവയ്ക്കിടയിലെ കോണളവും $\Delta\theta$ ആയിരി ക്കും. അതിനാൽ, സ്ഥാനസദിശങ്ങളാൽ രൂപപ്പെട്ട CPP' എന്ന ത്രികോണവും പ്രവേഗസദിശങ്ങൾ v, v', Δv എന്നിവയാൽ നിർമ്മിതമായ GHI എന്ന ത്രികോണവും സമാനമാണ് (ചിത്രം 4.19a) അതുകൊണ്ട്, പാദദൂര ത്തിന്റെയും പാർശ്വദൂരത്തിന്റെയും അനുപാതം ഇരു ത്രികോണങ്ങളിലും തുല്യമായിരിക്കും. അതായത്,

$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{v} = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{R}$$

അഥവാ, $$|\Delta \mathbf{v}| = v\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{R}$$

അതുകൊണ്ട്,

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v|\Delta \mathbf{r}|}{R\Delta t} = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$$

Δt ചെറുതായാൽ $\Delta\theta$ യും ചെറുതാകുന്നു. തൽഫലമായി ചാപം PP' നെ ഏകദേശം $|\Delta \mathbf{r}|$ ആയി കണക്കാക്കാം.

$$|\Delta \mathbf{r}| \cong v\Delta t$$

$$\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} \cong v$$

അഥവാ, $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = v$$

അതുകൊണ്ട് അഭികേന്ദ്രത്വരണം a_c എന്നത് ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$a_c = \left(\frac{v}{R}\right)v = v^2/R \qquad (4.44)$$

അങ്ങനെ, R ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ v വേഗത്തിൽ കറങ്ങുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ ത്വരണം v^2/R അളവു ള്ളതും എപ്പോഴും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്ക് അനുഭ വപ്പെടുന്നതുമായിരിക്കും. ഈ ത്വരണത്തെ അഭികേ ന്ദ്രത്വരണം (Centripetal acceleration) വിളിക്കാനുള്ള കാരണവും ഇതു തന്നെയാണ് (ഈ പദം നിർദേശിച്ചത് ന്യൂട്ടൺ ആണ്).

അഭികേന്ദ്രത്വരണത്തിന്റെ സമഗ്രമായ ഒരു വിശകലനം ആദ്യമായി പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയത് 1673-ൽ ഡച്ച് ശാസ്ത്രകാരനായ ക്രിസ്റ്റ്യൻ ഹൈഗൻസ് (1629-1695) ആണ്. എങ്കിലും ന്യൂട്ടണ് ഈ കാര്യങ്ങളെക്കുറിച്ചെ ല്ലാം കുറച്ചു വർഷങ്ങൾ മുമ്പു തന്നെ അറിവുണ്ടാ യിരുന്നു. 'അഭികേന്ദ്ര' (centripetal) എന്ന പദം ഗ്രീക്ക് ഭാഷയിലെ 'കേന്ദ്രം തേടുന്നത്' (centre-seeking) എന്ന അർഥമുള്ള പദത്തിൽ നിന്നാണ് ഉണ്ടായത്. v ഉം R ഉം സ്ഥിരസംഖ്യകളായതുകൊണ്ട് അഭികേന്ദ്ര ത്വരണത്തിന്റെ മൂല്യം സ്ഥിരമായിരിക്കും. എങ്കിലും, കേന്ദ്രത്തിലേക്കനുഭവപ്പെടുന്ന രീതിയിൽ തന്നെ അനുനിമിഷം അതിന്റെ ദിശ മാറിക്കൊണ്ടേയിരിക്കും. അതിനാൽ, അഭികേന്ദ്രത്വരണം, ഒരു സ്ഥിരസദിശം ആകുന്നില്ല.

സമവർത്തുളചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേ ഗവും ത്വരണവും വിവരിക്കാൻ നമുക്ക് മറ്റൊരു മാർഗം കൂടിയുണ്ട്. വസ്തു Δt സമയംകൊണ്ട് P യിൽ നിന്നു P' ലേക്ക് ചലിക്കുന്നതിനാൽ Δt $(= t' - t)$. സമയം കൊണ്ട് ചിത്രം 4.19 ൽ കാണുന്നതുപോലെ CP എന്ന രേഖ $\Delta\theta$ കോണളവിൽ തിരിയുന്നു. $\Delta\theta$ യെ കോണീയ സ്ഥാനാന്തരം എന്നു വിളിക്കുന്നു. എങ്കിൽ കോണീയ വേഗത ω (ഗ്രീക്ക് അക്ഷരം ഒമേഗ) നമുക്ക് ഇങ്ങനെ നിർവചിക്കാം: കോണീയ സ്ഥാനാന്തര മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെയാണ് കോണീയ വേഗം, ω (angular speed) എന്നു പറയുന്നത്.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (4.45)$$

* $\Delta t \to 0$, ആകുമ്പോൾ സ്ഥാനാന്തരസദിശം Δr, സ്ഥാനസദിശം r നു ലംബമാകുന്നു. ഈ ചെറിയ പരിധിയിൽ $\Delta\mathbf{v} \to \mathbf{0}$ ആവുകയും തത്ഫലമായി v യ്ക്ക് ലംബമാവുകയും ചെയ്യുന്നു. അതുകൊണ്ട്, വൃത്തപരിധിയിലെ ഓരോ ബിന്ദുവിലും ത്വരണത്തിന്റെ ദിശ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്കായിരിക്കും.

Δt സമയംകൊണ്ട് വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരം Δs ആണെങ്കിൽ; അതായത്, PP' എന്നത് Δs ആണല്ലോ.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

പക്ഷേ, $\Delta s = R\,\Delta\theta$.

$$v = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\,\omega$$

അതുകൊണ്ട് $v = R\,\omega$ (4.46)

കോണീയവേഗത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ അഭികേന്ദ്ര ത്വരണത്തെ നമുക്ക് രേഖപ്പെടുത്താം.

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$ അതുകൊണ്ട്

$a_c = \omega^2 R$ എന്നെഴുതാം. (4.47)

ഒരു പരിക്രമണം പൂർത്തിയാക്കാൻ വസ്തുവിനാവശ്യമായ സമയത്തെ അതിന്റെ പരിവൃത്തി (time period, T) എന്നു പറയുന്നു. ഒരു സെക്കന്റിൽ നടത്തിയ പരിക്രമണങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ അതിന്റെ ആവൃത്തി ν (=1/T) എന്നും പറയുന്നു. ഈ സമയ ഇടവേളയിൽ വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരം = $2\pi R$ ആണ്. അതുകൊണ്ട്

$v = 2\pi R/T = 2\pi R\,\nu$ (4.48)

ആവൃത്തിയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ നമുക്ക് ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\omega = 2\pi\nu$$
$$v = 2\pi R\,\nu$$
$$a_c = 4\pi^2 \nu^2 R \quad (4.49)$$

ഉദാഹരണം 4.10: ഒരു വണ്ട്, 12 cm ആരമുള്ള, വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു ചാലിലകപ്പെടുന്നു. അത് ആ ചാലിലൂടെ തുടർച്ചയായി നീങ്ങുകയും 100 സെക്കന്റ്കൊണ്ട് 7 പരിക്രമണങ്ങൾ പൂർത്തിയാക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. (a) വണ്ടിന്റെ ചലനത്തിന്റെ കോണീയപ്രവേഗവും രേഖീയ പ്രവേഗവും എത്ര? (b) ത്വരണം ഒരു സ്ഥിര സദിശമാണോ? എന്താണതിന്റെ പരിമാണം?

ഉത്തരം: ഇത് സമവർത്തുളചലനത്തിനൊരു ഉദാഹരണമാണ്. ഇവിടെ R = 12 cm ആണ്. വണ്ടിന്റെ കോണീയ വേഗം ω, ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi \times 7/100 = 0.44 \text{ rad/s}$$

രേഖീയവേഗം $v = \omega R = 0.44\ s^{-1} \times 12\ cm = 5.3\ cm\ s^{-1}$

പ്രവേഗം **v** യുടെ ദിശ വൃത്തത്തിലെ ഓരോ ബിന്ദുവിലെയും തൊടുവരയിലൂടെ ആയിരിക്കും. ത്വരണം വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്കാണ് അനുഭവപ്പെടുന്നത്. ദിശ തുടർച്ചയായി മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതിനാൽ, ഇവിടെ ത്വരണം ഒരു സ്ഥിരസദിശമല്ല. എന്നാലും ത്വരണത്തിന്റെ പരിമാണം സ്ഥിരമാണ്.

$$a = \omega^2 R = (0.44\ s^{-1})^2\ (12\ cm)$$
$$= 2.3\ cm\ s^{-2}$$

സംഗ്രഹം

1. അദിശങ്ങളായ ഭൗതികഅളവുകൾക്കു പരിമാണം മാത്രമാണുള്ളത്. ദൂരം, വേഗം, മാസ്, താപനില എന്നിവയെല്ലാം അദിശ അളവുകൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്

2. സദിശങ്ങളായ ഭൗതിക അളവുകൾക്ക് പരിമാണവും ദിശയുമുണ്ട്. സ്ഥാനാന്തരം, പ്രവേഗം, ത്വരണം എന്നിവ ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. സദിശബീജഗണിതത്തിലെ പ്രത്യേക നിയമങ്ങൾ അനുസരിക്കുന്നവയാണിവ.

3. λ എന്ന രേഖീയസംഖ്യകൊണ്ട് സദിശം **A** യെ ഗുണിച്ചാൽ ഫലം പുതിയൊരു സദിശമായിരിക്കും. അതിന്റെ പരിമാണം സദിശം **A** യുടെ അളവിന്റെ λ മടങ്ങായിരിക്കും. λ പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ ആകുന്നതിനനുസരിച്ച് പുതിയ സദിശത്തിന്റെ ദിശ **A** യുടെ ദിശക്ക് സമാനമോ വിപരീതമോ ആകാം.

4. **A, B** എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങൾ ഗ്രാഫിക്കലായി സങ്കലനം ചെയ്യാനായി ഹെഡ്ടു ടെയ്ൽ രീതിയോ സാമാന്തരികരീതിയോ ഉപയോഗിക്കാം.

5. സദിശസങ്കലനം കമ്യൂട്ടേറ്റീവാണ്:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

അത് അസോസിയേറ്റീവ് നിയമവും അനുസരിക്കുന്നു:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \mathbf{C} - \mathbf{A} - (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

6. അളവു പൂജ്യമായുള്ള ഒരു സദിശമാണ് ശൂന്യസദിശം അഥവാ പൂജ്യസദിശം. അതിന്റെ അളവു പൂജ്യമായതിനാൽ, ദിശ പ്രത്യേകം പറയേണ്ടതില്ല. അതിന്റെ സ്വഭാവങ്ങൾ താഴെ പറയുന്നു.

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} - \mathbf{A}$$

$$\lambda\mathbf{0} - \mathbf{0}$$

$$0\,\mathbf{A} - \mathbf{0}$$

7. **A** യിൽനിന്നു സദിശം **B** യുടെ വ്യത്യാസം **A** യുടെയും സദിശം **–B** യുടെയും തുകയായാണ് നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{A} \quad (-\mathbf{B})$$

8. ഒരു സദിശം A, ഒരേ പ്രതലത്തിൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന **a, b** എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങളിലൂടെ ഘടകസദിശങ്ങളായി വിശ്ലേഷണം ചെയ്യാവുന്നതാണ്:

$$\mathbf{A} = \lambda\,\mathbf{a} + \mu\,\mathbf{b}$$

ഇവിടെ λ, μ എന്നിവ രേഖീയസംഖ്യകളാകുന്നു.

9. സദിശം **A** യുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഏകകസദിശത്തിന്റെ പരിമാണം ഒന്നും (one) ദിശ **A** യിലൂടെയുമാണ്

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

ഒരു കാർട്ടീഷ്യൻ നിർദേശാങ്കവ്യവസ്ഥയിൽ അളവ് ഒന്നായതും (one) x, y, z ദിശകളിൽ അനുഭവപ്പെടുന്നതുമായ ഏകകസദിശങ്ങളാണ്, $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ എന്നിവ.

10. സദിശം $A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ എന്നെഴുതാം.

ഇവിടെ A_x, A_y എന്നിവ x, y ദിശകളിലെ ഘടകങ്ങളാകുന്നു. x- അക്ഷവുമായി സദിശം **A,** θ എന്ന കോണളവു

സൃഷ്ടിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, $A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, $\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x}$.

11. വിശകലന രീതിയിൽ (Analytical method) സദിശങ്ങളെ സൗകര്യപ്രദമായി കൂട്ടാൻ സാധിക്കും. x, y പ്രതലത്തിലെ രണ്ടു സദിശങ്ങളായ **A** യുടെയും **B** യുടെയും തുക **R** ആകുന്നുവെങ്കിൽ:

$\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$, ഇവിടെ, $R_x = A_x + B_x$ ഉം $R_y = A_y + B_y$

12. x, y പ്രതലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ ആകുന്നുവെങ്കിൽ r ൽ നിന്നു പുതിയ സ്ഥാനം **r'** ലേക്കുള്ള സ്ഥാനാന്തരം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$
$$= (x' - x)\hat{\mathbf{i}} + (y' - y)\hat{\mathbf{j}}$$
$$= \Delta x\,\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\,\hat{\mathbf{j}}$$

13. ഒരു വസ്തുവിന് Δt സമയത്തിൽ $\Delta\mathbf{r}$ സ്ഥാനാന്തരം സംഭവിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, അതിന്റെ ശരാശരി പ്രവേഗം v ഇങ്ങനെ എഴുതാം: $\mathbf{v} = \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$. t എന്ന സമയത്ത് ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗം ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ ക്ലിപ്തമൂല്യം ആകുന്നു. (ഇവിടെ $\Delta t \rightarrow 0$ ആണ്)

$\mathbf{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ ഏകകസദിശ സങ്കേതമുപയോഗിച്ച്:

$v = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$ ഇവിടെ, $v_x = \dfrac{dx}{dt}, v_y = \dfrac{dy}{dt}, v_z = \dfrac{dz}{dt}$

വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം ഒരു നിർദേശാങ്കവ്യവസ്ഥയിൽ രേഖപ്പെടുത്തുമ്പോൾ, വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരപാത പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന വക്രരേഖയിൽ നാം വരക്കുന്ന തൊടുവരയിലൂടെയാകും **v** അനുഭവപ്പെടുന്നത്.

14. Δt സമയംകൊണ്ട് വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗം **v** യിൽനിന്നു **v'** ലേക്ക് മാറുന്നുവെങ്കിൽ, അതിന്റെ ശരാശരി ത്വരണം ഇങ്ങനെ എഴുതാം. $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{\Delta t} = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ t എന്ന ഏതൊരു സമയത്തുള്ള വസ്തുവിന്റെ ത്വരണം $\bar{\mathbf{a}}$ d $\Delta t \rightarrow 0$ ആകുമ്പോഴുള്ള $\bar{\mathbf{a}}$ ന്റെ ക്ലിപ്തമൂല്യമാണ്.

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

ഘടകരൂപത്തിൽ : $\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$

ഇവിടെ, $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$, $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$, $a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$

15. സമത്വരണത്തിൽ, $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ ഉള്ള ഒരു വസ്തു ഒരു പ്രതലത്തിൽ ചലിക്കുന്നു. t=0 എന്ന സമയത്ത് അതിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $\mathbf{r}_o$ ആകുന്നുവെങ്കിൽ മറ്റേതൊരു സമയത്തും വസ്തു താഴെപ്പറയുന്ന ബിന്ദുവിലാവാം.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{v}_o t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

കൂടാതെ അതിന്റെ പ്രവേഗം :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \mathbf{a}\,t$$

ഇവിടെ $\mathbf{v}_o$ എന്നത് t = 0 സമയത്തെ പ്രവേഗമാകുന്നു.

ഘടകരൂപത്തിൽ,

$$x = x_o + v_{ox}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = y_o + v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$v_x = v_{ox} + a_x t$$

$$v_y = v_{oy} + a_y t$$

ലംബദിശകളിലൂടെയുള്ള വ്യത്യസ്തവും ഏകകാലികവുമായ രണ്ട് ഏകമാനചലനങ്ങളുടെ തുകയായി ഒരു പ്രതലത്തിലെ ചലനത്തെ വിശേഷിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.

16. വിക്ഷേപണത്തിനുശേഷം പറക്കുന്ന വസ്തുവിനെ പ്രൊജക്ടൈൽ എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഒരു വസ്തു v_o എന്ന പ്രാരംഭപ്രവേഗത്തിൽ, x- അക്ഷവുമായി θ_o എന്ന കോണളവിൽ എറിയപ്പെടുന്നുവെന്നും ആരംഭസ്ഥാനം നിർദേശാങ്കകേന്ദ്ര വുമായി ചേർന്നുനിൽക്കുന്നുവെന്നും കരുതുക. അപ്പോൾ t സമയത്ത് വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനവും പ്രവേഗവും ഇങ്ങനെ രേഖപ്പെടുത്താം:

$$x = (v_o \cos \theta_o)\, t$$

$$y = (v_o \sin \theta_o)\, t - (1/2)\, g\, t^2$$

$$v_x = v_{ox} = v_o \cos \theta_o$$

$$v_y = v_o \sin \theta_o - g\, t$$

പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പാത പരാബൊളിക് ആകുന്നു. അത് ഇങ്ങനെ എഴുതാം.:

$$y = (\tan\theta_0)\,x \quad \frac{gx^2}{2\,(v_o \cos\theta_o)^2}$$

ഒരു പ്രൊജക്ടൈൽ ആർജിക്കുന്ന പരമാവധി ഉയരം;

$$h_m = \frac{(v_o \sin\theta_o)^2}{2g}$$

ഈ ഉയരത്തിലെത്താനാവശ്യമായ സമയം ആകുന്നു:

$$t_m = \frac{v_o \sin\theta_o}{g}$$

പ്രാരംഭസ്ഥാനത്തുനിന്നു വിക്ഷേപിക്കപ്പെടുന്ന ഒരു പ്രൊജക്ടൈൽ, വിക്ഷേപണഗതിയിൽ വീണ്ടും y=0 എന്ന സ്ഥാനത്ത് എത്തുന്നതു വരെയുള്ള തിരശ്ചീനദൂരത്തെ, പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ തിരശ്ചീന പരിധി (Horizontal range of a projectile) എന്നു വിളിക്കാം. പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പരിധി R,

$$R = \frac{v_o^2}{g}\sin 2\theta_o$$

17. ഒരു വസ്തു സ്ഥിരവേഗത്തിൽ വർത്തുളപാതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തെ സമവർത്തുളചലനമെന്നു വിളിക്കാം. ത്വരണത്തിന്റെ അളവ് $a_c = v^2/R$ ആകുന്നു. അഭികേന്ദ്രത്വരണം a_c യുടെ ദിശ എപ്പോഴും വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്ക് ആയിരിക്കും. കോണീയ അകലത്തിന്റെ മാറ്റനിരക്കിനെ കോണീയ വേഗത, ω എന്നു വിളിക്കുന്നു. അതിന്റെ പ്രവേഗം v യുമായുള്ള ബന്ധം $v = \omega R$ ആണ്.

വസ്തുവിലെ ത്വരണം $a_c = \omega^2 R$ ആകുന്നു.

വർത്തുളചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണപരിവൃത്തി T യും ν അതിന്റെ ആവൃത്തിയും ആയാൽ $\omega = 2\pi\nu$, $v = 2\pi\nu R$, $a_c = 4\pi^2\nu^2 R$.

ഭൗതിക അളവ്	പ്രതീകം	ഡൈമെൻഷൻ	യൂണിറ്റ്	കുറിപ്പ്
സ്ഥാനസദിശം	**r**	[L]	m	സദിശം. ഏതൊരു പ്രതീകമുപയോഗിച്ചും രേഖപ്പെടുത്താം.
സ്ഥാനാന്തരം	**Δr**	[L]	m	സദിശം. ഏതൊരു പ്രതീകമുപയോഗിച്ചും രേഖപ്പെടുത്താം.
പ്രവേഗം				
(a) ശരാശരി	$\bar{v}$	$[LT^{-1}]$	$m\,s^{-1}$	$\frac{\Delta r}{\Delta t}$ സദിശം
(b) തൽക്ഷണം	v			$\frac{dr}{dt}$ സദിശം
ത്വരണം				
(a) ശരാശരി	$\bar{a}$	$[LT^{-2}]$	$m\,s^{-2}$	$\frac{\Delta v}{\Delta t}$ സദിശം
(b) തൽക്ഷണം	**a**			$\frac{dv}{dt}$ സദിശം
പ്രൊജക്ടൈൽ ചലനം				
(a) പരമാവധി ഉയരത്തിലെത്താനാവശ്യമായ സമയം	t_m	[T]	s	$t_m = \frac{v_o \sin\theta_o}{g}$
(b) പരമാവധി ഉയരം	h_m	[L]	m	$h_m = \frac{(v_o \sin\theta_o)^2}{2g}$
(c) തിരശ്ചീനപരിധി	R	[L]	m	$R = \frac{v_o^2 \sin 2\theta_o}{g}$
വർത്തുളചലനം				
(a) കോണീയവേഗം	ω	$[T^{-1}]$	rad/s	$= \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{v}{r}$
(b) അഭികേന്ദ്ര ത്വരണം	a_c	$[LT^{-2}]$	$m\,s^{-2}$	$= \frac{v^2}{r}$

വിചിന്തന വിഷയങ്ങൾ

1. രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിൽ ചലിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിച്ച പാതയുടെ നീളം പൊതുവിൽ അതിനുണ്ടായ സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ അളവിനു തുല്യമായിരിക്കില്ല. സ്ഥാനാന്തരം ആദ്യ - അവസാന സ്ഥാനങ്ങളെ മാത്രം ആശ്രയിക്കുന്നു. സഞ്ചരിച്ച ദൂരം യഥാർഥ പാതയെയും ആശ്രയിക്കുന്നു. ചലനവേളയിൽ വസ്തുവിന്റെ ദിശക്കു മാറ്റമുണ്ടാകുന്നില്ല എങ്കിൽ മാത്രമേ, മേൽപ്പറഞ്ഞ രണ്ടു അളവുകളും തുല്യമാവുകയുള്ളൂ. മറ്റെല്ലാ അവസരങ്ങളിലും സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ അളവിലും കൂടിയ അളവായിരിക്കും സഞ്ചരിച്ച ദൂരത്തിന്.

2. ഒന്നാമത്തെ സൂചകമനുസരിച്ച് ഒരു നിശ്ചിത സമയ ഇടവേളയിൽ ഒരു വസ്തുവിന്റെ ശരാശരി വേഗം ശരാശരി പ്രവേഗത്തേക്കാൾ കൂടുതലോ തുല്യമോ ആവാം. ദൂരം സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ അളവിനു തുല്യമാകുമ്പോൾ മാത്രമാണ് ഈ ഭൗതിക അളവുകൾ തുല്യമാകുന്നത്.

3. സദിശസമവാക്യങ്ങൾ (4.33 a) യും (4.34 b) യും ഏതെങ്കിലും പ്രത്യേകം അക്ഷങ്ങൾക്ക് മാത്രമുള്ളവയല്ല. ഏതു രണ്ടു സ്വതന്ത്ര അക്ഷങ്ങളിലും നിങ്ങൾക്ക് അവയെ വിശ്ലേഷണം ചെയ്യാവുന്നതാണ്.

4. സമത്വരണത്തിനായുള്ള ചലനസമവാക്യങ്ങൾ സമവർത്തുളചലനത്തിൽ പ്രയോഗിക്കാനാവില്ല. കാരണം, ഈ ചലനത്തിൽ ത്വരണത്തിന്റെ പരിമാണം സ്ഥിരവും, ദിശ മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതുമാണ്.

5. $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ എന്നീ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത പ്രവേഗങ്ങൾക്ക് വിധേയമാകുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ പരിണതപ്രവേഗം $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2$ ആകുന്നു. പരിണതപ്രവേഗം ആപേക്ഷികപ്രവേഗത്തിൽ നിന്നു വ്യത്യസ്തമാണെന്ന വസ്തുത പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കണം. അതായത്, രണ്ടാമത്തെ വസ്തുവിനെ അപേക്ഷിച്ച് ഒന്നാമത്തേതിന്റെ പ്രവേഗം $\mathbf{v}_{12} - \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ആണ് ഇവിടെ $\mathbf{v}_1$ ഉം, $\mathbf{v}_2$ ഉം പൊതുവായ അവലംബകത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പ്രവേഗങ്ങളാണ്.

6. വർത്തുളചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനവേഗം സ്ഥിരമാകുമ്പോൾ മാത്രമാണ് അതിന്റെ പരിണതത്വരണം കേന്ദ്രത്തിലേക്ക് അനുഭവപ്പെടുക.

7. ഒരു വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരപാതയുടെ ആകൃതി നിശ്ചയിക്കപ്പെടുന്നത് ത്വരണത്തെ മാത്രം ആശ്രയിച്ചല്ല, ചലനത്തിന്റെ പ്രാരംഭ അവസ്ഥകളെക്കൂടി ആശ്രയിച്ചാണ് (പ്രാരംഭപ്രവേഗവും പ്രാരംഭസ്ഥാനവും). ഉദാഹരണത്തിന്, തുല്യമായ ഗുരുത്വാകർഷണത്വരണത്തിൽ ചലിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരപാത, അതിന്റെ പ്രാരംഭ അവസ്ഥകൾക്കനുസരിച്ച് ഒരു നേർരേഖയോ പരാബൊളയോ ആകാം.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

4.1 താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ഭൗതികഅളവും സദിശമോ അദിശമോ എന്നു പ്രസ്താവിക്കുക.

ഉള്ളളവ്, മാസ്, വേഗം, ത്വരണം, സാന്ദ്രത, മോളുകളുടെ എണ്ണം, പ്രവേഗം, കോണീയ ആവൃത്തി, സ്ഥാനാന്തരം, കോണീയപ്രവേഗം.

4.2 തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽനിന്നും അദിശ അളവുകൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

ബലം, കോണീയ ആക്കം, പ്രവൃത്തി, വൈദ്യുതകറന്റ്, രേഖീയ ആക്കം, വൈദ്യുതമണ്ഡലം, ശരാശരി പ്രവേഗം, കാന്തികമൊമന്റ്, ആപേക്ഷികപ്രവേഗം.

4.3 താഴെ നൽകിയ പട്ടികയിലുൾപ്പെട്ട ഒരേയൊരു സദിശ അളവു കണ്ടെത്തുക.

താപനില, മർദം, ആക്കം, സമയം, പവർ, ആകെ ദൂരം, ഊർജം, ഗുരുത്വപൊട്ടൻഷ്യൽ, കോയഫിഷ്യന്റ് ഓഫ് ഫ്രിക്ഷൻ, ചാർജ്

4.4 സദിശ, അദിശ ഭൗതിക അളവുകൾ ഉൾപ്പെട്ട, താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബീജഗണിതക്രിയകൾ അർഥ പൂർണമാണോ എന്നു കാരണസഹിതം പ്രസ്താവിക്കുക.

(a) രണ്ട് അദിശങ്ങളുടെ സങ്കലനം, (b) ഒരേ ഡൈമൻഷനുള്ള ഒരു അദിശവും സദിശവുമായുള്ള സങ്കലനം

(c) ഏതൊരു സദിശവും ഏതൊരു അദിശവുമായുള്ള ഗുണനം (d) രണ്ട് അദിശങ്ങളുടെ ഗുണനം (c) രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ സങ്കലനം (f) ഏതൊരു സദിശവും അതിന്റെ തന്നെ ഘടകസദിശവുമായുള്ള സങ്കലനം

4.5 താഴെ കൊടുത്ത ഓരോ പ്രസ്താവനയും ശ്രദ്ധാപൂർവം വായിച്ച് അവ തെറ്റോ ശരിയോ എന്ന് കാരണ സഹിതം പ്രസ്താവിക്കുക.

(a) ഒരു സദിശത്തിന്റെ അളവ് അഥവാ വലുപ്പം എപ്പോഴും ഒരു അദിശമായിരിക്കും.

(b) ഒരു സദിശത്തിന്റെ ഓരോ ഘടകവും എപ്പോഴും ഒരു അദിശമായിരിക്കും.

(c) ഒരു കണികയുടെ സ്ഥാനാന്തരസദിശത്തിന്റെ അളവ് എപ്പോഴും അതു സഞ്ചരിച്ച പാതയുടെ ദൂരത്തിനു തുല്യമായിരിക്കും.

(d) ഒരു കണികയുടെ ശരാശരി വേഗം (സഞ്ചാരപാതയുടെ ആകെ നീളത്തെ പാത പൂർത്തിയാക്കാനെടുക്കുന്ന സമയം കൊണ്ടു ഹരിക്കുക) എന്നത്, അതേ സമയ ഇടവേളയിലുള്ള അതിന്റെ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ അളവിന് തുല്യമോ അതിലേറെയോ ആകാം.

(e) ഒരു പ്രതലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യാത്ത മൂന്നു സദിശങ്ങൾ പരസ്പരം കൂട്ടിയാൽ ഒരിക്കലും ഒരു ശൂന്യ സദിശം ലഭിക്കുന്നില്ല.

4.6 താഴെ കൊടുത്ത സദിശ അസമത്വങ്ങൾ ജ്യാമിതീയമായോ അല്ലാതെയോ തെളിയിക്കുക.

(a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

(b) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \geq ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$

(c) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

(d) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \geq ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$

ഓരോന്നിലെയും സമചിഹ്നം എപ്പോഴാണ് പ്രയോഗത്തിൽ വരുന്നത്?

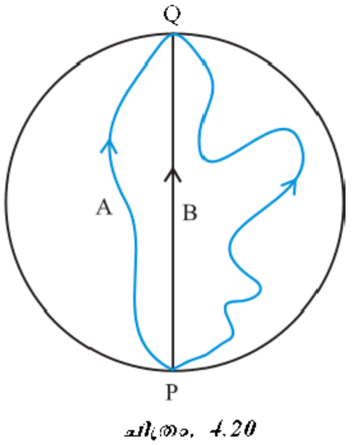
4.7 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ എന്നു തന്നിരിക്കുന്നു. താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതൊക്കെയാണ് ശരിയായ പ്രസ്താവനകൾ?

(a) **a**, **b**, **c**, **d** എന്നിവ നാലും നിർബന്ധമായും ശൂന്യസദിശങ്ങളാവും.

(b) $(\mathbf{a} + \mathbf{c})$ യുടെ അളവ് $(\mathbf{b} + \mathbf{d})$ യുടെ അളവിനു തുല്യമായിരിക്കും.

(c) സദിശം **a** യുടെ അളവ് ഒരിക്കലും **b**, **c**, **d** എന്നിവയുടെ തുകയുടെ പരിമാണത്തിലും കൂടുതലാകാൻ സാധിക്കുകയില്ല.

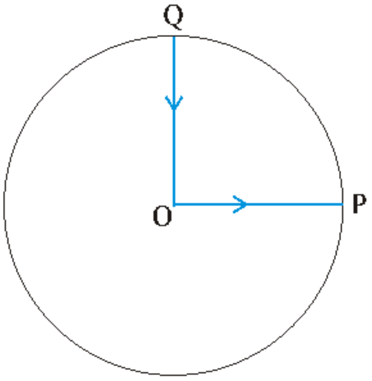
(d) സദിശം **a** യും **d** യും കൊ-ലീനിയർ അല്ലെങ്കിൽ സദിശം $(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ തീർച്ചയായും **a** യുടെയും **d** യുടെയും പ്രതലത്തിലായിരിക്കും. എന്നാൽ അവ കൊ-ലീനിയർ ആയാൽ $(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ സദിശങ്ങൾ **a** യും **d** യും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന രേഖയിലാകും അനുഭവപ്പെടുക.



ചിത്രം. 4.20

4.8 ചിത്രം 4.20 ൽ കാണുന്നതുപോലെ 200 m ആരമുള്ള വൃത്താകാരമായ ഒരു ഹിമപ്രതലത്തിലൂടെ മൂന്ന് കുട്ടികൾ സ്കേറ്റിങ് നടത്തുന്നു. മൂവരും വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിലുള്ള **P** എന്ന ബിന്ദുവിലാരംഭിച്ച് വ്യത്യസ്ത പാതകളിൽ സഞ്ചരിച്ച് **P** യുടെ വ്യാസത്തിന്റെ എതിർബിന്ദുവായ **Q** ൽ എത്തിച്ചേരുന്നു. ഓരോ കുട്ടിയുടെയും സ്ഥാനാന്തരസദിശത്തിന്റെ പരിമാണമെത്ര? ഏതു കുട്ടിക്കാണ് ഇത് യഥാർഥ സഞ്ചാരപാതയുടെ അതേ നീളമാകുന്നത്?

4.9 ചിത്രം 4.21 ൽ കാണുന്നതുപോലെ, ഒരു സൈക്ലിസ്റ്റ് ഒരു കി.മീ. ആരമുള്ള വൃത്താകാരമായ ഒരു പാർക്കിന്റെ കേന്ദ്രം O എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നാരംഭിച്ച്, പരിധിയിലുള്ള P എന്ന ബിന്ദുവിലെത്തുന്നു. അവിടെനിന്നു വൃത്തപരിധിയിലൂടെ നീങ്ങുന്ന അയാൾ QO എന്ന പാതയിലൂടെ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ തിരികെ എത്തിച്ചേരുന്നു. യാത്രയ്ക്കെടുത്ത ആകെ സമയം 10 മിനിറ്റ് ആണെങ്കിൽ, സൈക്ലിസ്റ്റിന്റെ (a) പരിണതസ്ഥാനാന്തരം, (b) ശരാശരി പ്രവേഗം, (c) ശരാശരി വേഗം എന്നിവ എത്രയെന്നു കണ്ടെത്തുക.



ചിത്രം. 4.21

4.10 ഒരു തുറന്ന മൈതാനത്തിൽ, ഒരു മോട്ടോർ വാഹനസഞ്ചാരി ഓരോ 500 മീറ്ററിലും തന്റെ ഇടത്തേക്കു $60°$ കോണളവിൽ തിരിയുന്ന പാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഒരു നിശ്ചിത വളവിൽനിന്ന് ആരംഭിച്ചശേഷം യഥാക്രമം മൂന്നാമത്തെയും ആറാമത്തെയും എട്ടാമത്തെയും വളവുകളിലെത്തുമ്പോഴുള്ള അയാളുടെ സ്ഥാനാന്തരം എത്രയെന്നു വ്യക്തമാക്കുക. ഓരോ സന്ദർഭത്തിലും അയാൾ സഞ്ചരിച്ച ആകെ ദൂരവും അയാൾക്കുണ്ടായ സ്ഥാനാന്തരവും താരതമ്യം ചെയ്യുക.

4.11 പട്ടണത്തിൽ പുതുതായി എത്തിച്ചേർന്ന ഒരു യാത്രികൻ, തന്റെ സ്റ്റേഷനിൽ നിന്നു നേർപാതയിൽ, 10 കി.മീ. അകലെയുള്ള ഹോട്ടലിലേക്ക് പോകാനാഗ്രഹിക്കുന്നു. എന്നാൽ വിശ്വസ്തനല്ലാത്ത ഒരു കാർഡ്രൈവർ, അയാളെ 23 കി.മീ. ദൈർഘ്യമുള്ള ഒരു വക്രപാതയിലൂടെ കൊണ്ടുപോവുകയും 28 മിനിറ്റുകൊണ്ട് ഹോട്ടലിലെത്തിക്കുകയും ചെയ്തു. (a) ടാക്സിയുടെ ശരാശരി വേഗം എത്ര? (b) അതിന്റെ ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെ അളവെത്ര? ഇവ രണ്ടും തുല്യമാണോ?

4.12 30 ms^{-1} വേഗത്തിൽ മഴ ലംബമായി വീഴുന്നു. ഒരാൾ സൈക്കിളിൽ വടക്കുനിന്നു തെക്കോട്ട് $10ms^{-1}$ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഏതു ദിശയിലാണ് അയാൾ തന്റെ കുട പിടിക്കേണ്ടത്?

4.13 നിശ്ചലമായ വെള്ളത്തിൽ ഒരാൾക്ക് 4 km/h വേഗത്തിൽ നീന്താൻ കഴിയും. എന്നാൽ 1.0km വീതിയുള്ളതും 3.0km/h വേഗത്തിൽ ഒഴുകുന്നതുമായ ഒരു നദിക്കു കുറുകെ ലംബമായി നീന്തുകയാണെങ്കിൽ എത്ര സമയമെടുത്തായിരിക്കും അയാൾ നദിയുടെ മറുകരയിലെത്തുക? മറുകരയിലെത്തിമ്പോൾ നദിയുടെ തീരത്ത് എത്ര അകലത്തിലാണ് അയാൾ നീന്തിക്കയറുമ്പോൾ എത്ര ദൂരം അയാൾ പുറപ്പെട്ട സ്ഥലത്തു നിന്നും ഒഴുക്കിന്റെ ദിശയിൽ സഞ്ചരിച്ചിട്ടുണ്ടാകും.

4.14 ഒരു തുറമുഖത്ത്, 72 km/h വേഗത്തിൽ കാറ്റു വീശിയടിക്കുന്നു. അവിടെ നങ്കൂരമിട്ട ഒരു നൗകയുടെ പായ്മരത്തിലുറപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന കൊടി, വടക്കു-കിഴക്കു ദിശയിൽ പാറിപ്പറക്കുന്നു. നൗക വടക്കുദിശയിൽ 51 km/h വേഗത്തിൽ ചലിക്കാൻ തുടങ്ങുകയാണെങ്കിൽ, പായ്മരത്തിലെ കൊടിയുടെ ദിശ എന്തായിരിക്കും?

4.15 നീളമുള്ള ഒരു ഹാളിന്റെ മുകൾത്തട്ടിന്റെ ഉയരം 25 m ആകുന്നു. $40ms^{-1}$ വേഗത്തിൽ എറിയപ്പെടുന്ന ഒരു പന്തിന് ഹാളിന്റെ മുകൾത്തട്ടിലിടിക്കാതെ, സഞ്ചരിക്കാനാവുന്ന പരമാവധി തിരശ്ചീന ദൂരം എത്ര?

4.16 ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാരന് ഒരു പന്തിനെ തിരശ്ചീനദിശയിൽ എറിയാൻ സാധിക്കുന്ന പരമാവധി ദൂരം 100m ആണ്. നിലത്തുനിന്നു പരമാവധി എത്ര ഉയരത്തിലാണ് അയാൾക്ക് അതേ പന്തിനെ എറിയാൻ സാധിക്കുക?

4.17 നീളമുള്ള ഒരു നൂലിന്റെ അഗ്രത്തു ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്ന കല്ല്, ഒരു സ്ഥിരവേഗത്തിൽ തിരശ്ചീനതലത്തിൽ, വർത്തുളപാതയിൽ ചുഴറ്റുന്നു. കല്ല് 25 സെക്കന്റിൽ 14 പരിക്രമണങ്ങൾ പൂർത്തിയാക്കുന്നുവെങ്കിൽ, കല്ലിനുണ്ടാകുന്ന ത്വരണത്തിന്റെ അളവും ദിശയും എന്തെന്ന് വ്യക്തമാക്കുക.

4.18 ഒരു വിമാനം,900 km/h എന്ന സ്ഥിരവേഗത്തിൽ, തിരശ്ചീനതലത്തിൽ 1 km ആരത്തിൽ വട്ടമിട്ടു പറക്കുന്നു. അതിന്റെ അഭികേന്ദ്രത്വരണത്തെ, ഭൂഗുരുത്വാകർഷണ ത്വരണവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുക.

4.19 താഴെ കൊടുത്ത ഓരോ പ്രസ്താവനയും ശ്രദ്ധയോടെ വായിക്കുകയും കാരണസഹിതം അവ തെറ്റോ ശരിയോ എന്നു പറയുകയും ചെയ്യുക.

(a) വർത്തുളചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പരിണതത്വരണം എപ്പോഴും ആരത്തിലൂടെ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്കായിരിക്കും അനുഭവപ്പെടുക.

(b) ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഒരു ബിന്ദുവിലെ പ്രവേഗസദിശം എപ്പോഴും വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരപാതയിലെ ആ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയിലൂടെയായിരിക്കും.

(c) സമവർത്തുളചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പൂർണപരിക്രമണത്തിന്റെ ശരാശരിത്വരണ സദിശം എപ്പോഴും ശൂന്യസദിശമായിരിക്കും.

4.20 ഒരു വസ്തുവിന്റെ സറാനം $\mathbf{r} = 3.0t\,\hat{\mathbf{i}} - 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 4.0\,\hat{\mathbf{k}}$ m എന്നു രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ t സെക്കന്റിലും r മീറ്ററിലുമാകുന്ന വിധം ഗുണാങ്കങ്ങൾക്ക് (coefficients) യോജ്യമായ യൂണിറ്റുകളും നൽകിയിരിക്കുന്നു.

(a) വസ്തുവിന്റെ **v, a** എന്നിവ കണ്ടെത്തുക. (b) t=2.0 സെക്കന്റിൽ വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗത്തിന്റെ അളവും ദിശയും എന്ത്?

4.21 ഒരു വസ്തു, $10.0\,\hat{j}$ m/s എന്ന പ്രവേഗത്തിൽ t = 0 s എന്ന സമയത്ത് നിർദേശാങ്കകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് അതിന്റെ ചലനം ആരംഭിക്കുന്നു. വസ്തു $(8.0\hat{i}\ \ 2.0\hat{j})$ m s^{-2} എന്ന സ്ഥിരത്വരണത്തോടെ x, y പ്രതലത്തിലാണ് ചലിക്കുന്നതെങ്കിൽ,(a) വസ്തുവിന്റെ x നിർദേശാങ്കം 16m ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ്? ആ സമയത്ത് വസ്തുവിന്റെ y നിർദേശാങ്കം എന്തായിരിക്കും? (b) ആ സമയത്ത് വസ്തുവിന്റെ വേഗം എന്തായിരിക്കും?

4.22 $\hat{i}$ ഉം $\hat{j}$ ഉം യഥാക്രമം x,y അക്ഷങ്ങളിലൂടെയുള്ള ഏകകസദിശങ്ങളാണ്. എങ്കിൽ, $\hat{i} + \hat{j}$, $\hat{i} - \hat{j}$ എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ അളവും ദിശയും എന്തായിരിക്കും? $\mathbf{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ യഥാക്രമം $(\hat{i} + \hat{j})$, $(\hat{i} - \hat{j})$ എന്നീ സദിശങ്ങളിലൂടെയുള്ള ഘടകസദിശങ്ങൾ ഏതൊക്കെയായിരിക്കും? (നിങ്ങൾക്ക് ഗ്രാഫിക്കൽ രീതി ഉപയോഗിക്കാം).

4.23 സ്പേസിലെ നിയമനിബന്ധിതമല്ലാത്ത ഏതു ചലനത്തിലും താഴെ നൽകിയിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതു സമീകരണമാണ് ശരിയായുള്ളത്?

(a) $\mathbf{v}_{average} = (1/2)\ (\mathbf{v}\ (t_1) + \mathbf{v}\ (t_2))$

(b) $\mathbf{v}_{average} = [\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)\ ] / (t_2 - t_1)$

(c) $\mathbf{v}\ (t) = \mathbf{v}\ (0) + \mathbf{a}\ t$

(d) $\mathbf{r}\ (t) = \mathbf{r}\ (0) + \mathbf{v}\ (0)\ t + (1/2)\ \mathbf{a}\ t^2$

(e) $\mathbf{a}_{average} = [\ \mathbf{v}\ (t_2) - \mathbf{v}\ (t_1\ )] / (\ t_2 - t_1)$

(ഇവിടെ ശരാശരി എന്നതുകൊണ്ടർഥമാക്കുന്നത് t_1 മുതൽ t_2 വരെയുള്ള സമയത്ത് ആ ഭൗതികഅളവിന്റെ ശരാശരി മൂല്യമെന്നാണ്).

4.24 താഴെ നൽകിയ ഓരോ പ്രസ്താവനയും ശ്രദ്ധാപൂർവം വായിക്കുകയും അവയോരോന്നും ശരിയോ തെറ്റോ എന്ന് രേഖപ്പെടുത്തി അതിന്റെ കാരണങ്ങൾ ഉദാഹരണസഹിതം സമർഥിക്കുകയും ചെയ്യുക.

ഒരു അദിശ ഭൗതികഅളവ് എന്നത്

(a) ഒരു പ്രക്രിയയിൽ പൂർണമായും സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നു.

(b) ഒരിക്കലും നെഗറ്റീവ് മൂല്യം സ്വീകരിക്കുന്നില്ല.

(c) ഡൈമെൻഷൻ രഹിതം (dimensionless) ആയിരിക്കും.

(d) സ്പെയ്സിൽ വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളിൽ മൂല്യം വ്യത്യാസപ്പെടുന്നില്ല.

(e) വ്യത്യസ്ത അക്ഷങ്ങളിൽ നിലകൊള്ളുന്ന നിരീക്ഷകർക്ക് അതിന്റെ മൂല്യം സമാനമായി അനുഭവപ്പെടും.

4.25 നിലത്തുനിന്നു 3400 m ഉയരത്തിലായി ഒരു വിമാനം തിരശ്ചീനമായി പറന്നുകൊണ്ടിരിക്കുന്നു. 10.0 സെക്കന്റിനു ശേഷം നിലത്തുള്ള നിരീക്ഷണകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു നോക്കുമ്പോൾ വിമാനം സൃഷ്ടിക്കുന്ന കോണളവ് 30° ആകുന്നുവെങ്കിൽ വിമാനത്തിന്റെ വേഗം എന്താണ്?

അധിക പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

4.26 ഒരു സദിശത്തിന് അളവും ദിശയുമുണ്ട്. സ്പേസിൽ അതിന് ഒരു നിശ്ചിത സ്ഥാനം നിർവചിക്കാനാകുമോ? സമയത്തിനനുസരിച്ച് സദിശത്തിന് മാറ്റമുണ്ടാകുമോ? സ്പേസിൽ വ്യത്യസ്തസ്ഥാനങ്ങളിലുള്ള **a**, **b** എന്നീ രണ്ട് തുല്യസദിശങ്ങൾ ചെലുത്തുന്ന ഭൗതികപ്രഭാവങ്ങൾ സമാനമായിരിക്കുമോ? ഉദാഹരണസഹിതം നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം സമർഥിക്കുക.

4.27 ഒരു സദിശത്തിന് അളവും ദിശയുമുണ്ട്. എന്നാൽ അളവും ദിശയുള്ള എല്ലാറ്റിനെയും സദിശമായി കണക്കാക്കാനാവുമോ? ചാക്രികചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ അക്ഷം ഏതു ദിശയിലാണ് എന്നതും ചാക്രികചലനത്തിന്റെ കോണളവും ആ ചലനത്തെ വ്യക്തമാക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു. അതിനാൽ ചാക്രീയ ചലനം ഒരു സദിശമാകുന്നുണ്ടോ?

4.28 താഴെ പറയുന്ന സാഹചര്യങ്ങളുമായി സദിശത്തെ ബന്ധപ്പെടുത്താമോ?

(a) ഒരു വലയരൂപത്തിൽ വളച്ചുവച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു വയറിന്റെ നീളം

(b) ഒരു പ്രതലം

(c) ഒരു ഗോളം

നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം വിശദമാക്കുക.

4.29 തിരശ്ചീനതലവുമായി 30° കോണളവിൽ ഒരു തോക്കിൽ നിന്നു പുറത്തേക്കു പോകുന്ന വെടിയുണ്ട 3.0 km അകലെയായി പതിക്കുന്നു. അതിന്റെ വിക്ഷേപണ കോണളവ് ക്രമീകരിക്കുന്നതുവഴി വെടിയുണ്ടയെ 5.0 km അകലെയുള്ള ലക്ഷ്യസ്ഥാനത്തെത്തിക്കാൻ സാധിക്കുമോ? വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം അവഗണിക്കുകയും വെടിയുണ്ടയുടെ വിക്ഷേപണപ്രവേഗം സ്ഥിരമാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുക.

4.30 ഒരു യുദ്ധവിമാനം 720km/h വേഗത്തിൽ, തിരശ്ചീന ദിശയിൽ 1.5 km ഉയരത്തിൽ പറന്നുകൊണ്ടിരിക്കുമ്പോൾ ഒരു വിമാന വേധ പീരങ്കി/വിമാന വേധ തോക്കിന്റെ (anti-aircraft gun) നേർമുകളിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നു. $600 ms^{-1}$ എന്ന വേഗത്തിൽ പുറത്തേക്കുപോകുന്ന വെടിയുണ്ട കൃത്യമായി യുദ്ധ വിമാനത്തിൽ ഇടിക്കണമെങ്കിൽ തോക്കിന്റെ കുഴൽ ലംബവുമായി ഏതു കോണളവിൽ വയ്ക്കണം? വെടിയേൽക്കാതിരിക്കാൻ ഏതു കുറഞ്ഞ ഉയരത്തിലാണ് പൈലറ്റ് വിമാനത്തെ നിലനിർത്തേണ്ടത്? ($g = 10\ ms^{-2}$ എന്നെടുക്കാം.)

4.31 ഒരു സൈക്ലിസ്റ്റ് തന്റെ സൈക്കിൾ 27 km/h വേഗത്തിൽ ഓടിക്കുന്നു. റോഡിൽ 80 m ആരമുള്ള വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു വളവിലെത്തിയപ്പോൾ അയാൾ ബ്രേക്ക് പ്രയോഗിച്ച് $0.50\ ms^{-1}$ എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കുറക്കുന്നു. വളവിൽ ആ സൈക്ലിസ്റ്റിന്റെ പരിണതത്വരണത്തിന്റെ (net acceleration) പരിമാണവും ദിശയും എന്തായിരിക്കും?

4.32 (a) ഒരു പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ പ്രവേഗവും x അക്ഷവുമായി സൃഷ്ടിക്കുന്ന കോണളവും സമയത്തിന്റെ ഫലനമായി $\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{v_{0y} - gt}{v_{ox}}\right)$ എന്നെഴുതാമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(b) അവലംബകകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു വിക്ഷേപണം ചെയ്യപ്പെട്ട ഒരു പ്രൊജക്ടൈലിന്റെ വിക്ഷേപണ കോണളവ്.

$$\theta_0 \quad \tan^{-1}\left(\frac{4h_m}{R}\right)$$

ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(ചിഹ്നങ്ങൾക്ക് അവയുടെ സാധാരണ അർഥം തന്നെയാണുള്ളത്.)

അധ്യായം 5

P8E8R9

ചലനനിയമങ്ങൾ (LAWS OF MOTION)

5.1. ആമുഖം
5.2. അരിസ്റ്റോട്ടിലിന്റെ മിഥ്യാധാരണ
5.3. ജഡത്വനിയമം
5.4. ന്യൂട്ടന്റെ ഒന്നാം ചലനനിയമം
5.5. ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം
5.6. ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമം
5.7. ആക്കത്തിന്റെ സംരക്ഷണം
5.8. ഒരു വസ്തുവിന്റെ സംതുലനാവസ്ഥ
5.9. ബലതന്ത്രത്തിലെ സാധാരണ/ലഘുബലങ്ങൾ
5.10. വർത്തുളചലനം
5.11. ബലതന്ത്രത്തിലെ പ്രശ്നങ്ങളുടെ പരിഹാരം
സംഗ്രഹം
വിചിന്തനവിഷയങ്ങൾ
പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ
അധിക പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

5.1. ആമുഖം

ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് മുൻ അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്തിരുന്നു. സമചലനത്തെപ്പറ്റി പഠിക്കാൻ പ്രവേഗം (velocity) മാത്രം മതിയാകുമെന്നും. അസമചലനത്തെ (non-uniform motion) കുറിച്ച് അറിയണമെങ്കിൽ പ്രവേഗത്തോടൊപ്പം ത്വരണം (acceleration) എന്ന ആശയംകൂടി പരിഗണിക്കേണ്ടിവരുമെന്നും നാം മനസ്സിലാക്കി. പ്രവേഗം, ത്വരണം എന്നിവയെ കുറിച്ചു പ്രതിപാദിക്കുമ്പോഴും വസ്തുക്കളുടെ ചലനം എപ്രകാരം സംഭവിക്കുന്നു എന്ന അടിസ്ഥാനപ്രശ്നത്തെക്കുറിച്ച് ചർച്ചചെയ്തിരുന്നില്ല. ഈ അധ്യായത്തിലൂടെ ഈ അടിസ്ഥാനപ്രശ്നത്തിനുള്ള ഉത്തരം കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിക്കാം.

നിത്യജീവിതത്തിൽ നാം ചലനത്തിന് പല ഉദാഹരണങ്ങളും കാണാറുണ്ട്. ഇവയെ അധികരിച്ച് ഒരു ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിക്കാം. ഒരു പന്ത് ചലിക്കണമെങ്കിൽ ആരെങ്കിലും ആ പന്തിനെ കാലുകൊണ്ടു തട്ടിയേ മതിയാകൂ. ഒരു കല്ല് മുകളിലേക്കെറിയാൻ കല്ലിൽ മുകളിലേക്ക് ഒരു തള്ളൽ പ്രയോഗിക്കണം. ചെറിയ കാറ്റു വീശുമ്പോൾ മരച്ചില്ലകൾ ആടുന്നതു നാം കാണുന്നു. അതേസമയം ശക്തമായ കാറ്റിൽ ഭാരമേറിയ വസ്തുക്കൾക്കുപോലും ചലനം സംഭവിക്കുന്നു. ഒഴുകുന്ന നദിയിൽ തുഴഞ്ഞില്ലെങ്കിൽ പോലും വഞ്ചി ഒഴുക്കിനോടൊപ്പം മുന്നോട്ടു സഞ്ചരിക്കും. അതായത് നിശ്ചലാവസ്ഥയിലിരിക്കുന്ന വസ്തുവിനെ ചലിപ്പിക്കാനുള്ള ബലം നൽകുന്നതിന് ഒരു ബാഹ്യശക്തി ആവശ്യമായിവരുന്നുവെന്നു കാണാം. ഇതുപോലെ വസ്തുക്കളുടെ ചലനം നിർത്തുന്നതിനും ചലനവേഗത കുറക്കുന്നതിനും ഒരു ബാഹ്യബലം ആവശ്യമാണ്. ചരിഞ്ഞ പ്രതലത്തിലൂടെ താഴേക്ക് ഉരുളുന്ന പന്തിനെ പിടിച്ചുനിർത്തണമെങ്കിൽ പന്തിന്റെ ചലനദിശക്കു വിപരീതമായി ബലം പ്രയോഗിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളിലെല്ലാം ബലം നൽകുന്ന ബാഹ്യശക്തി (കൈകൾ, കാറ്റ്, നദിയുടെ ഒഴുക്ക് മുതലായവ) വസ്തുക്കളുമായി നേരിട്ട് സമ്പർക്കത്തിലാണ്. എന്നാൽ എപ്പോഴും ബാഹ്യശക്തി ഇപ്രകാരം ആയിരിക്കണമെന്നില്ല. ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽനിന്നും താഴേക്കിടുന്ന കല്ലിന് ഭൂമിയുടെ ഗുരുത്വാകർഷണംമൂലം താഴേക്ക് ത്വരണം സംഭവിക്കുന്നു. അൽപ്പം അകലെയിരിക്കുന്ന ഇരുമ്പാണിയെ ആകർഷിക്കാൻ കാന്തത്തിനു സാധിക്കുന്നു. അകലെയാണെങ്കിൽ പോലും ബാഹ്യശക്തികൾക്ക് **(ഉദാ:- ഗുരുത്വാകർഷണ ബലം, കാന്തിക ബലം) വസ്തുക്കളിൽ ബലം പ്രയോഗിക്കാനുള്ള കഴിവുണ്ടെന്ന് ഇതു വ്യക്തമാക്കുന്നു.**

ചുരുക്കത്തിൽ, നിശ്ചലാവസ്ഥയിലിരിക്കുന്ന വസ്തുവിനെ ചലിപ്പിക്കുന്നതിനും ചലനാവസ്ഥയിലുള്ള വസ്തുവിനെ നിശ്ചലമാക്കുന്നതിനും വേണ്ടിയുള്ള ബലം നൽകുന്നതിന് ഒരു ബാഹ്യശക്തി ആവശ്യമാണെന്നു കാണാം. ഈ ബാഹ്യശക്തി വസ്തുവുമായി നേരിട്ടു സമ്പർക്കത്തിലോ അല്ലാതെയോ ആകാം.

എന്നാൽ വസ്തു സമചലനത്തിലാണെങ്കിലോ? (ഉദാ: തിരശ്ചീനമായ മഞ്ഞുപാളിയിലൂടെ സ്ഥിരവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു സ്കേറ്റർ) **വസ്തുവിന്റെ സമചലനം അതേപടി തുടരുന്നതിന് ബാഹ്യബലം ആവശ്യമാണോ?**

5.2. അരിസ്റ്റോട്ടിലിന്റെ മിഥ്യാധാരണ (Aristotle's fallacy)

മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച ചോദ്യം വളരെ നിസ്സാരമാണെന്നു തോന്നാം. എന്നാലതിന് തൃപ്തികരമായ ഉത്തരം കണ്ടെത്താൻ ഏറെക്കാലം കാത്തിരിക്കേണ്ടി വന്നു. പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഗലീലിയോ ആണ് ഈ ചോദ്യത്തിന് ശരിയായ ഒരു ഉത്തരം കണ്ടെത്തിയത്. ഇത് ന്യൂട്ടോണിയൻ ബലതന്ത്രത്തിന് അടിസ്ഥാനമിടുകയും അങ്ങനെ ആധുനികശാസ്ത്രത്തിന്റെ പിറവിക്കു കാരണമാവുകയും ചെയ്തു.

ഒരു വസ്തു ചലിക്കുകയാണെങ്കിൽ അതിന്റെ ചലനം തുടർന്നുകൊണ്ടുപോകാൻ ബാഹ്യമായ ഏതോ ഒരു ശക്തി വേണമെന്നായിരുന്നു ബി.സി.384 മുതൽ ബി.സി. 322 വരെ ജീവിച്ചിരുന്ന ഗ്രീക്ക് ചിന്തകനായ അരിസ്റ്റോട്ടിലിന്റെ കാഴ്ചപ്പാട്. ഈ കാഴ്ചപ്പാടനുസരിച്ച് വില്ലിൽ നിന്ന് എയ്തുവിട്ട അമ്പ് അതിനു പിന്നിലുള്ള വായുവിന്റെ തള്ളൽമൂലം മുന്നോട്ടു സഞ്ചരിച്ചുകൊണ്ടേയിരിക്കും. പ്രപഞ്ചത്തിലെ വസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തെക്കുറിച്ച് അരിസ്റ്റോട്ടിൽ രൂപപ്പെടുത്തിയ ആശയങ്ങളുടെ വിശാലമായ ചട്ടക്കൂടിന്റെ ഭാഗമായിരുന്നു ഈ വീക്ഷണം. എന്നാൽ പിൽക്കാലത്ത് അരിസ്റ്റോട്ടിൽ മുന്നോട്ടു വച്ച മിക്ക ആശയങ്ങളും തെറ്റാണെന്നും നമ്മെ ബാധിക്കുന്നവയല്ലെന്നും തെളിയിക്കപ്പെടുകയുണ്ടായി. അരിസ്റ്റോട്ടിലിന്റെ ചലനനിയമം ഇപ്രകാരം സംഗ്രഹിക്കാം: **"വസ്തുക്കളുടെ ചലനം തുടർന്നു കൊണ്ടു പോകുന്നതിന് ഒരു ബാഹ്യബലം ആവശ്യമാണ്."**

അരിസ്റ്റോട്ടിലിന്റെ തത്വം പാളിച്ചയുള്ളതാണെങ്കിലും ഒരു സാധാരണ മനുഷ്യൻ തന്റെ നിത്യജീവിത അനുഭവങ്ങളിൽനിന്നാണ് ഇത്തരം നിഗമനത്തിൽ എത്തിച്ചേരുന്നത്. കളിപ്പാട്ട കാറിനെ ചലിപ്പിക്കാൻ തുടർച്ചയായി അതിന്റെ ചരടിൽ പിടിച്ചുവലിക്കുന്ന ഒരു ബാലന് കളിപ്പാട്ട കാറിന്റെ (വൈദ്യുതി ഉപയോഗിക്കാത്ത) ചലനത്തിന് ഒരു ബാഹ്യബലം ആവശ്യമാണെന്ന് ഉൾക്കാഴ്ചയുണ്ട്. ചരടിൽനിന്നു പിടിവിട്ടു കഴിഞ്ഞാൽ കാറിന്റെ ചലനം നിലക്കുന്നതും കാണാം. ഭൂമിയിലെ ഭൂരിഭാഗം ചലനങ്ങൾക്കും സമാന അനുഭവമാണുള്ളത്. വസ്തുക്കളുടെ ചലനം തുടർന്നു പോകുന്നതിന് ഒരു ബാഹ്യബലത്തിന്റെ സാന്നിധ്യം ആവശ്യമാണ്. ഇത്തരം ബലത്തിന്റെ അഭാവത്തിൽ ക്രമേണ വസ്തുക്കൾ നിശ്ചലാവസ്ഥയിലേക്ക് എത്തിച്ചേരുന്നു.

അരിസ്റ്റോട്ടിലിന്റെ തത്വത്തിനുള്ള പാളിച്ച എന്താണ്? ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു കളിപ്പാട്ടകാർ അൽപസമയം കഴിയുമ്പോൾ നിശ്ചലമാകുന്നത് തറയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന ഘർഷണബലം മൂലമാണ്. ഈ ഘർഷണബലത്തെ പ്രതിരോധിക്കാൻ കുട്ടി ഒരു ബാഹ്യബലം കാറിൽ പ്രയോഗിക്കേണ്ടിവരുന്നു. കാർ സമചലനത്തിലാണെങ്കിൽ അതിൽ ഒരു ബാഹ്യബലവും പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നില്ല എന്നു കാണാം. കാരണം കുട്ടി പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം ഘർഷണബലത്തെ നിർവീര്യമാക്കുന്നു. അതായത് ഘർഷണബലമില്ലെങ്കിൽ കുട്ടിക്ക് തന്റെ കളിപ്പാട്ട കാറിന്റെ സമചലനത്തിനായി ഒരു ബാഹ്യബലം പ്രയോഗിക്കേണ്ടതിന്റെ ആവശ്യകതയില്ലായെന്ന് അനുമാനിക്കാവുന്നതാണ്.

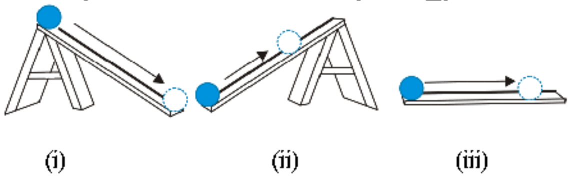
ഖരപദാർഥങ്ങളിലെ ഘർഷണബലം, ദ്രവപദാർഥങ്ങളിലെ (Fluids) വിസ്കസ്ബലം (Viscous force) എന്നിവ പ്രകൃതിയിൽ സർവസാധാരണയായി കാണപ്പെടുന്നവയാണ്. തന്മൂലം വസ്തുക്കളുടെ സമചലനം തുടർന്നു പോകണമെങ്കിൽ ഈ ഘർഷണബലങ്ങളെ മറികടക്കാനാവശ്യമായ ഒരു ബാഹ്യബലം കൂടിയേ കഴിയൂ. ഇവിടെയാണ് അരിസ്റ്റോട്ടിലിനു പാളിച്ച സംഭവിച്ചത്. നിത്യജീവിതത്തിലെ ഇത്തരം പ്രായോഗിക അനുഭവങ്ങളെയാണ് അടിസ്ഥാനവാദത്തിന്റെ രൂപത്തിൽ അദ്ദേഹം രൂപപ്പെടുത്തിയത്.

പ്രകൃതിയിലെ വസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തിനെയും ബലങ്ങളെയുംകുറിച്ചുള്ള സാർവത്രികമായ ഒരു നിയമം രൂപീകരിക്കുന്നത് ഘർഷണബലങ്ങളാൽ തടസ്സപ്പെടാത്ത സമചലനത്തെ പരിഗണിച്ചുകൊണ്ടു മാത്രമേ സാധിക്കൂ. ഇതാണ് ഗലീലിയോ സ്വീകരിച്ച മാർഗം.

5.3 ജഡത്വനിയമം (The law of Inertia)

ഒരു ചരിഞ്ഞ പ്രതലത്തിലൂടെയുള്ള വസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തെക്കുറിച്ച് ഗലീലിയോ പഠനം നടത്തുകയുണ്ടായി. ഇതിലൂടെ താഴെ പറയുന്ന നിഗമനങ്ങളിൽ അദ്ദേഹം എത്തിച്ചേർന്നു. (i) ചരിവുതലത്തിലൂടെ താഴേക്കു സഞ്ചരിക്കുന്ന വസ്തുക്കൾക്ക് ത്വരണവും (ii) ചരിവുതലത്തിലൂടെ മുകളിലേക്കു സഞ്ചരിക്കുന്ന വസ്തുക്കൾക്ക് മന്ദീകരണവും, കൂടാതെ (iii) നിരപ്പായ ഒരു പ്രതലത്തിൽ ഇവക്കു രണ്ടിനുമിടയിലുള്ള അവസ്ഥയും കാണിക്കുന്നു. അതായത് ഘർഷണബലമി

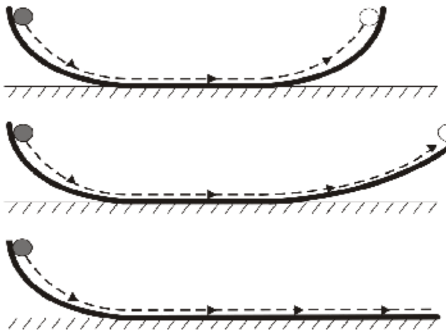
ല്ലാത്ത തിരശ്ചീനമായ ഒരു പ്രതലത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന വസ്തുവിന് ത്വരണമോ മന്ദീകരണമോ സംഭവിക്കുന്നില്ല. പകരം ആ വസ്തു സ്ഥിരപ്രവേഗത്തോടെ സഞ്ചരിക്കുമെന്ന് ഗലീലിയോ അനുമാനിച്ചു.



ചിത്രം 5.1. (a)

ഇരട്ട ചരിവുപ്രതലങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ഗലീലിയോയുടെ മറ്റൊരു പരീക്ഷണവും സമാന നിഗമനത്തിലെത്തിച്ചേരാൻ അദ്ദേഹത്തെ സഹായിച്ചു. നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്നു മുക്തമാക്കപ്പെട്ട ഒരു പന്ത് ഒന്നാമത്തെ ചരിവുപ്രതലത്തിലൂടെ താഴേക്കുരുളുകയും രണ്ടാമത്തെ പ്രതലത്തിലൂടെ മുകളിലേക്ക് ഉരുണ്ടു കയറുകയും ചെയ്യുന്നു. ഈ രണ്ടു പ്രതലങ്ങളും മിനുസമായിരുന്നെങ്കിൽ രണ്ടാമത്തെപ്രതലത്തിൽ പന്ത് എത്തിച്ചേരുന്ന ഉയരവും ആദ്യം പന്ത് സ്ഥിതിചെയ്തിരുന്ന ഉയരവും ഏകദേശം തുല്യമായിരുന്നേനേ (എത്തിച്ചേരുന്ന ഉയരം അൽപ്പം കുറഞ്ഞിരിക്കും, എന്നാൽ ഒരിക്കലും കൂടില്ല). ഈ ചലനത്തിൽ ഘർഷണബലം പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല എന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ പന്ത് എത്തിച്ചേരുന്ന ഉയരവും തുടക്കത്തിൽ പന്ത് സ്ഥിതിചെയ്തിരുന്ന ഉയരവും തുല്യമായിരിക്കുമെന്നു കാണാം.

രണ്ടാമത്തെ പ്രതലത്തിന്റെ ചരിവുകുറച്ചുകൊണ്ടു വന്നാലും പന്ത് അതേ ഉയരത്തിലേക്കുതന്നെ എത്തിച്ചേരുന്നതായി കാണാം. പക്ഷേ, ഇങ്ങനെ ചെയ്യുമ്പോൾ അതേ ഉയരത്തിൽ എത്താൻ പന്തിന് കൂടുതൽദൂരം സഞ്ചരിക്കേണ്ടിവരുന്നു. രണ്ടാമത്തെ പ്രതലത്തിന്റെ ചരിവ് പൂജ്യമായാൽ (പ്രതലം തിരശ്ചീനമായാൽ) പന്ത് അനന്തദൂരത്തേക്കു സഞ്ചരിക്കും. ഇത് തീർച്ചയായും ഒരു സാങ്കൽപ്പിക സന്ദർഭമാണ്.



ചിത്രം 5.1. (b) ഒരു ഇരട്ടച്ചരിവുപ്രതലത്തിലൂടെയുള്ള പന്തിന്റെ ചലനം നിരീക്ഷിച്ചതിലൂടെ ഗലീലിയോ ജഡത്വനിയമം കണ്ടെത്തി.

പ്രായോഗികമായി തിരശ്ചീനതലത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന പന്ത് കുറച്ചുദൂരം സഞ്ചരിച്ചതിനുശേഷം നിശ്ചലമായിത്തീരുന്നുവെന്ന് നമുക്കറിയാം. പന്തിന്റെ ചലനത്തെ എതിർക്കുന്ന ഘർഷണബലത്തെ പൂർണമായും ഒഴിവാക്കാൻ കഴിയാത്തതാണ് ഇതിനു കാരണം. ഘർഷണബലം നിലനിൽക്കുന്നില്ലെങ്കിൽ തിരശ്ചീന പ്രതലത്തിലൂടെ ഈ പന്ത് സ്ഥിരപ്രവേഗത്തോടെ സഞ്ചരിച്ചുകൊണ്ടേയിരിക്കും.

ഇപ്രകാരം അരിസ്റ്റോട്ടിൽ വിട്ടുപോയ ചലനത്തെ സംബന്ധിച്ച ഒരു വസ്തുത കൂട്ടിച്ചേർക്കാൻ ഗലീലിയോക്ക് കഴിഞ്ഞു. വസ്തുക്കളുടെ നിശ്ചലാവസ്ഥയും സ്ഥിരപ്രവേഗത്തോടെയുള്ള നേർരേഖാചലനവും സമാനമാണ്. ഈ രണ്ട് അവസ്ഥകളിലും വസ്തുവിൽ ഒരു ബലവും പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല. ഒരു വസ്തു സമചലനത്തിൽ തുടരണമെങ്കിൽ അതിൽ ഒരു ബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടണമെന്ന വാദഗതി ശരിയല്ല. വസ്തുവിന്റെ സമചലനം നിലനിർത്തുന്നതിനായി, വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ഘർഷണബലത്തെ നിർവീര്യമാക്കാൻ ഒരു ബാഹ്യബലം പ്രയോഗിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഇവിടെ ഈ രണ്ടു ബലങ്ങളുടെയും ആകത്തുകയായ ബാഹ്യബലം പൂജ്യമാകുന്നു.

ചുരുക്കത്തിൽ, ഒരു വസ്തുവിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന സഫലബാഹ്യബലം (net external force) പൂജ്യമാകുമ്പോൾ നിശ്ചലാവസ്ഥയിലുള്ള ഒരു വസ്തു നിശ്ചലാവസ്ഥയിലും സമപ്രവേഗത്തിൽ ചലിക്കുന്ന വസ്തു അതേ അവസ്ഥയിലും തുടരുന്നു. വസ്തുക്കളുടെ ഈ അവസ്ഥയെ ജഡത്വം (inertia) എന്നു പറയുന്നു. ജഡത്വം എന്നാൽ 'മാറ്റത്തിനുള്ള വിമുഖത' (resistance to change) എന്നാണ്. ബാഹ്യബലത്തിന്റെ പ്രേരണയില്ലെങ്കിൽ ഒരു വസ്തുവിന് അതിന്റെ നിശ്ചലാവസ്ഥക്കോ സമചലനത്തിനോ മാറ്റം വരുത്താൻ സാധിക്കില്ല.

ചലനത്തെ സംബന്ധിച്ച് പ്രാചീന ഭാരതീയ ശാസ്ത്രരംഗത്ത് നിലനിന്നിരുന്ന ആശയങ്ങൾ

പ്രാചീന ഭാരതീയചിന്തകന്മാർ ചലനസംബന്ധിയായ നിരവധി ആശയങ്ങൾ കണ്ടെത്തിയിരുന്നു. ചലനത്തിനു കാരണമായ ബലം പലതരത്തിലുണ്ടെന്ന് അവർ കണക്കാക്കി. ഒരു ജലനൗകയിൽ കാറ്റുകൊടുക്കുന്ന ബലം പോലെ തുടർച്ചയായുള്ള മർദ്ദം കാരണമുണ്ടാകുന്ന ബലം (നോദൻ), കുശവന്റെ ദണ്ഡ് ചക്രത്തിൽ പതിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്നതുപോലുള്ള ആഘാതം (അഭിഘത്), നേർരേഖയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നതിന് (വേഗ) ഉള്ള ചിരസ്ഥായിയായ പ്രവണത (സംസ്കാര) അല്ലെങ്കിൽ ഇലാസ്തികമായ ഒരു വസ്തു പൂർവസ്ഥിതിയിലേക്ക് എത്തിച്ചേരുന്നത്, ദണ്ഡുവഴിയോ ചരടുവഴിയോ ബലം നൽകുന്നത് തുടങ്ങിയവയെല്ലാം ഇതിനുദാഹരണങ്ങളാണ്.

വൈശേഷിക (Vaisesika Theory) സിദ്ധാന്തത്തിലെ വേഗ (Vega) എന്ന സങ്കൽപം ജഡത്വമെന്ന ആശയത്തോടു ഏറെ സാദൃശ്യമുള്ളതാണ്. വേഗ എന്നാൽ നേർരേഖയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നതിനുള്ള പ്രവണതയാണ്. ഈ പ്രവണതയെ അന്തരീക്ഷവുമായോ വസ്തുക്കളുമായോ ഉള്ള സമ്പർക്കം പ്രതിരോധിക്കുന്നതായി കരുതിയിരുന്നു. ഘർഷണബലത്തെക്കുറിച്ചും വായുവിന്റെ പ്രതിരോധത്തെക്കുറിച്ചുമുള്ള ആശയങ്ങൾക്ക് തത്തുല്യമാണ് ഈ അനുമാനം. ഒരു സ്ഥൂലവസ്തുവി (extended body) നുണ്ടാകുന്ന വിവിധതരം ചലനങ്ങൾ [സ്ഥാനാന്തരചലനം, ഭ്രമണചലനം, കമ്പനചലനം (translational, rotational, vibrational)] ഈ വസ്തുവിന്റെ ഘടകങ്ങളായ വിവിധ കണികകളുടെ സ്ഥാനാന്തരചലനം മൂലം മാത്രമാണ് സൃഷ്ടിക്കപ്പെടുന്നതെന്ന് വളരെ കൃത്യമായി സംഗ്രഹിക്കാൻ കഴിഞ്ഞിരുന്നു. കാറ്റത്ത് താഴേക്കു വീഴുന്ന ഒരു ഇലയ്ക്ക് മൊത്തത്തിൽ താഴേക്കുള്ള ചലനമാണുള്ളതെങ്കിലും (പതൻ) അതോടൊപ്പം തന്നെ ഭ്രമണചലനവും കമ്പനചലനവും (ഭ്രമൺ, സ്പന്ദൻ) ഉണ്ട്. എന്നാൽ ഇലയിലെ ഓരോ കണികക്കും ഒരു പ്രത്യേകനിമിഷത്തിൽ നിശ്ചിത (ചെറിയ) സ്ഥാനാന്തരം മാത്രമാണുണ്ടാകുന്നത്. ചലനം അളക്കുന്നതിലും നീളത്തിന്റെയും സമയത്തിന്റെയും യൂണിറ്റുകൾ കണക്കാക്കുന്നതിലും ഇന്ത്യൻ ചിന്തകർ വളരെ ശ്രദ്ധ ചെലുത്തിയിരുന്നു. ഒരു സ്ഥലത്തു സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം മൂന്ന് അക്ഷങ്ങളിൽ നിന്നുമുള്ള ദൂരത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ കണക്കാക്കാമെന്ന് അവർക്ക് അറിയാമായിരുന്നു. 1150 AD യിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ഭാസ്കരാചാര്യനാണ് തൽക്ഷണചലനം (Instantaneous motion) (തത്കാലികി ഗതി) എന്ന ആശയം മുന്നോട്ടുവച്ചത്. ആധുനികകാലത്ത് തൽക്ഷണ പ്രവേഗമെന്ന ആശയം അവകലന ഗണിതരീതി (Differential calculus) ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്. ഒരു തരംഗവും (wave) പ്രവാഹവും (ജലപ്രവാഹം) തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ഭാരതീയ ചിന്തകർ കൃത്യമായി മനസ്സിലാക്കിയിരുന്നു. പ്രവാഹമെന്നാൽ ജലകണികകൾ ഗുരുത്വാകർഷണവും ദ്രവത്വവും മൂലം സഞ്ചരിക്കുന്നതാണ്. എന്നാൽ തരംഗമെന്നത് ജലകണികകളുടെ കമ്പനം പ്രേഷണം ചെയ്യുന്നതുമൂലമാണെന്നും അവർ കണ്ടെത്തിയിരുന്നു.

5.4. ന്യൂട്ടന്റെ ഒന്നാം ചലനനിയമം (Newton's First Law of Motion)

ഗലീലിയോയുടെ വിപ്ലവകരമായ ആശയങ്ങൾ അരിസ്റ്റോട്ടിലിന്റെ സിദ്ധാന്തത്തെ പൂർണമായും പുറന്തള്ളിക്കൊണ്ട് ബലതന്ത്ര (Mechanics) ത്തിൽ ഒരു പുതുയുഗം സൃഷ്ടിച്ചു. ഈ മാറ്റത്തിന് സർ ഐസക് ന്യൂട്ടൺ കൂടുതൽ മഹത്തായ സംഭാവനകൾ നൽകി.

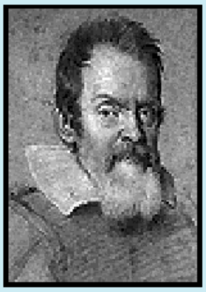
ഗലീലിയോയുടെ ആശയങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ന്യൂട്ടൺ ബലതന്ത്രത്തിലെ മൂന്ന് അടിസ്ഥാനനിയമങ്ങൾക്ക് രൂപം നൽകി. ഇവ ന്യൂട്ടന്റെ നാമധേയത്തിൽ അറിയപ്പെടുന്നു. ഗലീലിയോയുടെ ജഡത്വനിയമത്തെ ആധാരമാക്കി ന്യൂട്ടൺ തന്റെ ഒന്നാം ചലനനിയമം (First law of motion) രൂപീകരിച്ചു.

'ഒരു ബാഹ്യബലത്തിന്റെ അഭാവത്തിൽ വസ്തുക്കൾ അവയുടെ നിശ്ചലാവസ്ഥയോ നേർരേഖയിലുള്ള സമചലനമോ തുടർന്നുകൊണ്ടേയിരിക്കും.' നിശ്ചലാവസ്ഥയിലും നേർരേഖയിലെ സമചലനത്തിലും വസ്തുവിന്റെ ത്വരണം പൂജ്യമാണ്. ഇതിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഒന്നാം ചലനനിയമത്തെ താഴെപറയുന്ന പ്രകാരവും നിർവചിക്കാം.

"ഒരു വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ആകെ ബാഹ്യബലം പൂജ്യമാണെങ്കിൽ ആ വസ്തുവിന്റെ ത്വരണം പൂജ്യമായിരിക്കും. വസ്തുവിൽ സഫല ബാഹ്യബലം (net external force) അനുഭവപ്പെടുന്നുണ്ടെങ്കിൽ മാത്രമേ ത്വരണം ഉണ്ടാകുകയുള്ളൂ."

ഈ നിയമം പ്രായോഗികമായി ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത സന്ദർഭങ്ങൾ കണക്കിലെടുക്കേണ്ടതുണ്ട്. ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ, വസ്തുക്കളിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന സഫല ബാഹ്യബലം പൂജ്യമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം. ഇവിടെ വസ്തുക്കൾക്കുണ്ടാകുന്ന ത്വരണം പൂജ്യമാണെന്ന് കണക്കാക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് നക്ഷത്രാന്തര സ്ഥലത്തിലൂടെ (Interstellar space) സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു ശൂന്യാകാശപേടകത്തിന്റെ കാര്യ

ഗലീലിയോ ഗലീലി (1564 - 1642)



1564-ൽ ഇറ്റലിയിലെ പിസായിൽ ആണ് ഗലീലിയോ ജനിച്ചത്. നാലു നൂറ്റാണ്ടു മുമ്പ് യൂറോപ്പിലെ ശാസ്ത്രീയ വിപ്ലവത്തിന് ഗലീലിയോ സുപ്രധാനമായ പങ്കുവഹിച്ചു. ത്വരണം എന്ന ആശയം മുന്നോട്ടുവച്ചത് ഗലീലിയോ ആണ്. വസ്തുക്കളുടെ ചലനം നിലനിർത്താൻ ബലം ആവശ്യമാണെന്നും ഗുരുത്വാകർഷണം മൂലം ഭാരമേറിയ വസ്തുക്കൾ ഭാരം കുറഞ്ഞ വസ്തുക്കളേക്കാൾ വേഗത്തിൽ താഴേക്കു പതിക്കുമെന്നുമുള്ള അരിസ്റ്റോട്ടിലിന്റെ വാദഗതികളെ ഗലീലിയോ ഖണ്ഡിച്ചു. ചരിവുതലത്തിലൂടെയുള്ള വസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തെക്കുറിച്ചും താഴേക്കു പതിക്കുന്ന വസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തെക്കുറിച്ചുമുള്ള പരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെയാണ് ഗലീലിയോ ഇതു തെളിയിച്ചത്. ഇപ്രകാരം അദ്ദേഹം കണ്ടെത്തിയ ജഡത്വനിയമമാണ് പിൽക്കാലത്ത് സർ. ഐസക് ന്യൂട്ടന്റെ ഐതിഹാസികമായ കണ്ടെത്തലുകൾക്ക് നാന്ദികുറിച്ചത്.

ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രരംഗത്ത് ഗലീലിയോ നടത്തിയ കണ്ടുപിടിത്തങ്ങൾ വിപ്ലവകരമായിരുന്നു. 1609-ൽ അദ്ദേഹം സ്വന്തമായി ഒരു ടെലിസ്കോപ്പ് രൂപകൽപനചെയ്തു (മുമ്പുതന്നെ ഹോളണ്ടിൽ ഇത് കണ്ടുപിടിച്ചിരുന്നു). ഇതുപയോഗിച്ച് സുപ്രധാനമായ പല നിരീക്ഷണങ്ങളും അദ്ദേഹം നടത്തി. ചന്ദ്രന്റെ പ്രതലത്തിലെ ശൃംഗങ്ങളും ഗർത്തങ്ങളും (Mounts and Depressions), സൂര്യകളങ്കങ്ങൾ (Dark spots on the sun), വ്യാഴത്തിന്റെ ഉപഗ്രഹങ്ങൾ, ശുക്രന്റെ വിവിധദശകൾ/കലകൾ (Phases) എന്നിവ അവയിൽ ചിലതാണ്. ക്ഷീരപഥത്തിന്റെ പ്രകാശസ്രോതസ്സ് നഗ്നനേത്രങ്ങൾക്ക് ഗോചരമല്ലാത്ത വളരെയധികം നക്ഷത്രങ്ങളുടെ സാന്നിദ്ധ്യമാണെന്ന് അദ്ദേഹം നിർണയിച്ചു. അദ്ദേഹം രചിച്ച - 'ഡയലോഗ് ഓൺ ദ ടു ചീഫ് വേൾഡ് സിസ്റ്റംസ്' (Dialogue on the Two chief world systems) എന്ന, ശാസ്ത്രീയ ചിന്താഗതിയെക്കുറിച്ചുള്ള പ്രശസ്ത ഗ്രന്ഥം, കോപ്പർ നിക്കസ് മുന്നോട്ടുവച്ച സൂര്യകേന്ദ്രസിദ്ധാന്തത്തെ (Helio centric theory) പിന്തുണക്കുന്നതായിരുന്നു. ഇത് കാലക്രമേണ ലോകമാകെ അംഗീകരിക്കുകയും ചെയ്തു.

ശാസ്ത്രാന്വേഷണരംഗത്തെ ഒരു നാഴികക്കല്ലിനാണത്. ശാസ്ത്രമെന്നത് ചുറ്റുപാടുകളെ നിരീക്ഷിച്ച് അതിൽ നിന്നു രൂപപ്പെടുത്തുന്ന നിഗമനങ്ങൾ മാത്രമല്ല, പരീക്ഷണങ്ങൾ രൂപീകരിക്കുകയും നടത്തുകയും ചെയ്ത് സിദ്ധാന്തങ്ങളെ സമർഥിക്കുകയോ ഖണ്ഡിക്കുകയോ കൂടിയാണ്. വിവിധ ഭൗതികപ്രതിഭാസങ്ങളുടെ പരിമാണങ്ങളെ അളക്കുകയും അവ തമ്മിലുള്ള ഗണിതരൂപത്തിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ കണ്ടെത്തുകയും ചെയ്യുന്നതും ശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഭാഗമാണ്. ഇതിനാലാണ് ഗലീലിയോ ആധുനികശാസ്ത്രത്തിന്റെ പിതാവ് എന്നറിയപ്പെടുന്നത്.

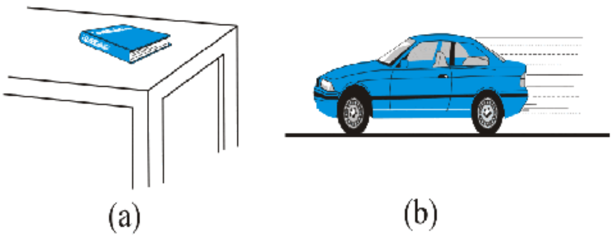
മെടുക്കുക. ഇത് മറ്റെല്ലാവസ്തുക്കളിൽനിന്നും വളരെ അകലെയാണെന്നും അതിന്റെ റോക്കറ്റുകളെല്ലാം പ്രവർത്തനരഹിതമാക്കിയിരിക്കുകയാണെന്നും കരുതുക. ഈ സമയത്ത് പേടകത്തിൽ ഒരു ബാഹ്യബലവും പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല. തന്മൂലം ഒന്നാംചലനനിയമമനുസരിച്ച് ഈ പേടകത്തിന്റെ ത്വരണം പൂജ്യമാണ്. പേടകം ചലിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അത് സമപ്രവേഗത്തോടെ ചലനം തുടർന്നുകൊണ്ടേയിരിക്കും.

വസ്തുക്കളിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ബലങ്ങളെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് എപ്പോഴും വ്യക്തമായ ധാരണ ഉണ്ടാവണമെന്നില്ല. അതായത്, ഒരു വസ്തുവിന് ത്വരണം സംഭവിക്കുന്നില്ലെങ്കിൽ (വസ്തു നിശ്ചലാവസ്ഥയിലോ രേഖീയ സമചലനത്തിലോ ആകാം) ന്യൂട്ടന്റെ ഒന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് വസ്തുവിർ ബാഹ്യബലം അനുഭവപ്പെടുന്നില്ല എന്നു നാം അനുമാനിക്കുന്നു. പ്രപഞ്ചത്തിൽ എല്ലായിടത്തും ഗുരുത്വാകർഷണം അനുഭവപ്പെടുന്നുണ്ട്. ഭൗമോപരിതലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന വസ്തുക്കൾ ഭൂമിയുടെ ആകർഷണബലത്തിന്റെ പരിധിയിലാണ്. കൂടാതെ ഇവ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ ഘർഷണബലം, വിസ്കസ്ബലം മുതലായവയും അനുഭവപ്പെടുന്നു. അപ്രകാരം കണക്കാക്കുമ്പോൾ ഭൗമോപരിതലത്തിർ സറിതിചെയ്യുന്ന ഒരു വസ്തു നിശ്ചലാവസറയിലോ രേഖീയസമചലനത്തിലോ ആണെങ്കിൽ അത് വസ്തുവിൽ ബാഹ്യബലം അനുഭവപ്പെടാത്തതു മൂലമല്ല. മറിച്ച്, ആ വസ്തുവിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന വ്യത്യസ്ത ബാഹ്യബലങ്ങൾ പരസ്പരം റദ്ദാക്കപ്പെടുന്നതുമൂലമോ അഥവാ സഫലബാഹ്യബലം പൂജ്യം ആകുന്നതുമൂലമോ ആയിരിക്കും.

ചിത്രം 5.2. (a) യിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ തിരശ്ചീനപ്രതലത്തിൽ നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു പുസ്തകത്തെ പരിഗണിക്കുക. ഈ പുസ്തകത്തിർ പ്രവർത്തിക്കുന്ന രണ്ടു ബാഹ്യബലങ്ങളാണ് താഴേക്കു പ്രവർത്തിക്കുന്ന ഭൂഗുരുത്വാകർഷണബലവും (അതായത് പുസ്തകത്തിന്റെ ഭാരം) പുസ്തകത്തിൻ മേൽ മേശ മുകളിലേക്കു പ്രയോഗിക്കുന്ന R എന്ന ലംബബലവും സ്വയം ക്രമീകരിക്കാൻ കഴിവുള്ള ബലമാണ് R. മുകളിൽ പറഞ്ഞതു പോലെയുള്ള അവസ്ഥയുടെ ഒരു ഉദാഹരണമാണിത്. ഇവിടെ വസ്തുവിൽ പ്രയോ

ഗിക്കുന്ന ബലങ്ങളെ വ്യക്തമായി തിരിച്ചറിയാൻ കഴിയുന്നില്ലെങ്കിലും വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തിന്റെ അവസ്ഥ നമുക്കു മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയുന്നതാണ്. പുസ്തകം നിശ്ചലാവസ്ഥയിലാണെന്ന് നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും. തന്മൂലം ന്യൂട്ടന്റെ ഒന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് R എന്ന ബലത്തിന്റെ അളവും W എന്ന ബലത്തിന്റെ അളവും തുല്യമായിരിക്കണം എന്നനുമാനിക്കാം. (W=R). ആയതുകൊണ്ട് ഈ ബലങ്ങൾ നിർവീര്യമാക്കപ്പെടുകയും അതിനാൽ പുസ്തകം നിശ്ചലാവസ്ഥയിലായിരിക്കുമെന്നും നമുക്കു പറയാം. പക്ഷേ, ഇത് തെറ്റായ നിഗമനമാണ്.

"ഒന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് പുസ്തകം നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ തുടരുന്നതിൽ നിന്ന് അതിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന സഫലബാഹ്യബലം പൂജ്യമാണെന്നു കണക്കാക്കാം. അതായത് ഭാരം അഥവാ W എന്ന ബലവും ലംബമായ R എന്ന ബലവും തുല്യവും വിപരീതവുമായിരിക്കും" എന്നതാണ് ശരിയായ നിഗമനം.



ചിത്രം (5.2)

(a) മേശപ്പുറത്തു നിശ്ചലാവസ്ഥയിലിരിക്കുന്ന പുസ്തകം
(b) സമപ്രവേഗത്തോടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന കാർ ഈ രണ്ട് ഉദാഹരണങ്ങളിലും സഫല ബാഹ്യബലം പൂജ്യമാണ്.

നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്നു ചലിക്കാൻ തുടങ്ങുന്ന ഒരു കാർ സങ്കൽപ്പിക്കുക. കാർ വേഗം നേടുകയും തുടർന്ന് മിനുസമുള്ള നേർപാതയിലൂടെ സമവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നുവെന്നു കരുതുക. (ചിത്രം. 5.2(b)). കാർ നിശ്ചലാവസ്ഥയിലിരിക്കുമ്പോൾ അതിൽ ഒരു ബാഹ്യബലവും പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല. ചലിച്ചു തുടങ്ങുമ്പോൾ കാറിന് ത്വരണം ഉണ്ടാകുന്നു. കാറിനുമേൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ഒരു സഫലബാഹ്യബലത്തിന്റെ മാത്രം പ്രഭാവത്താലാണ് ഇത് സംഭവിക്കുന്നത്. ആന്തരികബലങ്ങൾക്ക് കാറിൽ ത്വരണം സൃഷ്ടിക്കാൻ സാധിക്കില്ല. റോഡിലൂടെ ചലിക്കുമ്പോൾ അനുഭവപ്പെടുന്ന ഘർഷണബലമാണ് കാറിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ഒരേയൊരു ബാഹ്യബലം. ഇതു നമ്മെ അമ്പരിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിലും ഒരു സത്യമാണ്. അതായത് ഘർഷണബലമാണ് കാറിന് ത്വരണം നൽകുന്നത്. (ഘർഷണ ബലത്തെക്കുറിച്ച് ഭാഗം 5.9 ൽ വിശദമായി പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്). കാർ തുടർന്ന് സമപ്രവേഗത്തോടെ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ അതിൽ ബാഹ്യബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നില്ല.

ഒന്നാം ചലനനിയമത്തിൽ നിർവചിക്കുന്ന ജഡത്വം വ്യത്യസ്ത സന്ദർഭങ്ങളിൽ നമുക്ക് അനുഭവവേദ്യമാണ്. നിർത്തിയിട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു ബസിൽ നാം നിൽക്കുകയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഡ്രൈവർ പെട്ടെന്ന് ബസ് മുന്നോട്ടെടുക്കുന്നുവെന്നു കരുതുക. നാം പുറകിലേക്ക് വീഴാൻ തുടങ്ങുന്നതു കാണാം. എന്താണിതിനു കാരണം? നമ്മുടെ പാദങ്ങൾ ബസിന്റെ തറയുമായി സമ്പർക്കത്തിലാണ്. ഘർഷണമില്ലെങ്കിൽ ബസ് മുന്നോട്ടുനീങ്ങുന്നതിനനുസരിച്ച് ബസിന്റെ തറ നമ്മുടെ പാദങ്ങൾക്കടിയിൽ കൂടി മുന്നോട്ട് തെന്നിനീങ്ങുകയും നാം നിൽക്കുന്ന അതേ സ്ഥലത്ത് തുടരുകയും അൽപ്പം കഴിയുമ്പോൾ ബസിന്റെ പിൻഭാഗം നമ്മെ ഇടിക്കുകയും ചെയ്യും. എന്നാൽ നമ്മുടെപാദങ്ങളും ബസിന്റെതറയും തമ്മിൽ ഘർഷണബലം നിലനിൽക്കുന്നുണ്ട്. ബസ് ചലിക്കാൻ തുടങ്ങുന്നത് വളരെ പെട്ടെന്നല്ലെങ്കിൽ, അതായത് ത്വരണം വളരെ കൂടുതലല്ലെങ്കിൽ, നമ്മുടെ പാദങ്ങൾക്ക് ബസിനോടൊപ്പം ത്വരണം നൽകാൻ ഘർഷണബലത്തിനു സാധിക്കും. പക്ഷേ, നമ്മുടെ ശരീരം ദൃഢവസ്തു (Rigid body) അല്ല. അത് രൂപമാറ്റം (Deformation) അനുവദിക്കുന്ന തരത്തിലുള്ളതാണ്. അതായത് ശരീരത്തിന്റെ വിവിധഭാഗങ്ങൾ തമ്മിൽ ആപേക്ഷികചലനം സാധിക്കും. പാദങ്ങൾ ബസ്സിനോടൊപ്പം മുന്നോട്ടു സഞ്ചരിച്ചാലും, മറ്റു ശരീരഭാഗങ്ങൾ ജഡത്വംമൂലം നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ തന്നെ തുടരും. തന്മൂലം ബസ് മുന്നോട്ടു ചലിക്കുമ്പോൾ ബസിനെ അപേക്ഷിച്ച് നാം പിന്നിലേക്കു വീഴുന്നു. ഇതു സംഭവിക്കുമ്പോൾ പാദത്തിനു മുകളിലുള്ള മറ്റു ശരീരഭാഗങ്ങളിലെ പേശികൾ ബലം പ്രയോഗിച്ച് നമ്മുടെ ശരീരത്തെയും ബസ്സിനോടൊപ്പം ചലിക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു.

ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ബസ് പെട്ടെന്നുനിർത്തുമ്പോഴും ഇതേ അവസ്ഥതന്നെയാണുള്ളത്. നമ്മുടെ പാദങ്ങളും ബസിന്റെ തറയും തമ്മിലുള്ള ഘർഷണബലം പാദങ്ങൾക്ക് ബസിന്റെ തറയുമായുള്ള ആപേക്ഷികചലനത്തെ തടയുന്നു. എന്നാൽ നമ്മുടെ മറ്റു ശരീരഭാഗങ്ങൾ ജഡത്വം കാരണം മുന്നോട്ടു സഞ്ചരിച്ചുകൊണ്ടേയിരിക്കും. തന്മൂലം നാം മുന്നോട്ടു വീഴാൻ തുടങ്ങുകയും പേശികൾ പ്രയോഗിക്കുന്ന പുനഃസ്ഥാപന ബലം (restoring force) മൂലം ക്രമേണ ശരീരം മുഴുവൻ നിശ്ചലാവസ്ഥയിലേക്കെത്തുകയും ചെയ്യുന്നു.

> **ഉദാഹരണം: 5.1** നക്ഷത്രാന്തര തലത്തിലൂടെ (Interstellar space) $100 ms^{-2}$ സ്ഥിരനിരക്കിൽ ത്വരണമുള്ള ചെറിയ ബഹിരാകാശയാനത്തിൽ നിന്ന് ഒരു ബഹിരാകാശസഞ്ചാരി ആകസ്മികമായി വേർപെട്ടുപോകുന്നു. ബഹിരാകാശയാനത്തിൽ നിന്നു പുറത്തെത്തിയ ശേഷം തൊട്ടടുത്ത നിമിഷത്തിൽ ബഹിരാകാശസഞ്ചാരിക്കുള്ള ത്വരണം എത്ര? (ബഹിരാകാശസഞ്ചാരിയിൽ ഗുരുത്വബലം പ്രയോഗിക്കുന്നതിനായി മറ്റു നക്ഷത്രങ്ങളൊന്നും സമീപത്ത് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നില്ലെന്ന് സങ്കൽപിക്കുക)

ഉത്തരം:

ഗുരുത്വബലം പ്രയോഗിക്കുന്നതിനുവേണ്ടി സമീപത്തായി മറ്റു നക്ഷത്രങ്ങളൊന്നും സ്ഥിതിചെയ്യാത്തതിനാലും ബഹിരാകാശയാനം സഞ്ചാരിയുടെമേൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ഗുരുത്വബലം വളരെ ദുർബലമായതിനാലും ബഹികാശയാനത്തിനു പുറത്തെത്തിയ സഞ്ചാരിയുടെ മേൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ആകെ ബലം പൂജ്യമാണ്. അതിനാൽ ഒന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് ബഹിരാകാശസഞ്ചാരിയുടെ ത്വരണവും പൂജ്യമാണ്. ◀

5.5. ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം (Newton's Second Law of Motion)

വസ്തുക്കളിൽ സഫലബാഹ്യബലം പൂജ്യമായിരിക്കുന്ന അവസ്ഥയെ കുറിച്ചാണ് ഒന്നാം ചലനനിയമം വിവക്ഷിക്കുന്നത്. എന്നാൽ രണ്ടാം ചലനനിയമം വസ്തുവിൽ ഒരു സഫലബാഹ്യബലം പ്രവർത്തിക്കുമ്പോഴുള്ള പൊതുവായ അവസ്ഥ വിശദീകരിക്കുന്നു. വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന ത്വരണത്തെയും പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യബലത്തെയും തമ്മിൽ രണ്ടാം ചലനനിയമം ബന്ധിപ്പിക്കുന്നു.

ആക്കം (Momentum)

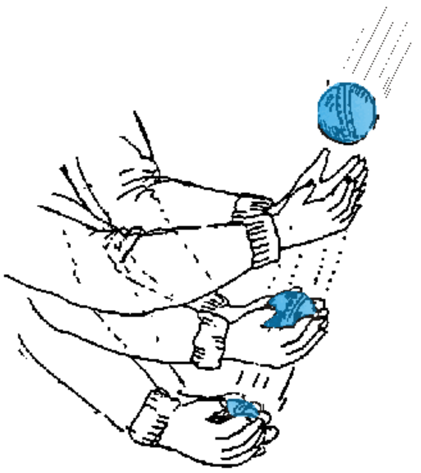
ഒരു വസ്തുവിന്റെ മാസും m (mass) പ്രവേഗവും v (velocity) തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലത്തെ ആക്കം എന്നു നിർവചിക്കുന്നു. ആക്കത്തെ **p** എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v} \qquad (5.1)$$

ആക്കം എന്നത് ഒരു സദിശ അളവാണ്. വസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തിൽ ബലത്തിന്റെ സ്വാധീനം മനസ്സിലാക്കുന്നതിൽ ആക്കത്തിനുള്ള പ്രാധാന്യം താഴെ പറയുന്ന ചില ഉദാഹരണങ്ങളിൽനിന്നു വ്യക്തമാകും.

- ഭാരം കുറഞ്ഞ ഒരു വാഹനവും (ഉദാ: ഒരു ചെറിയ കാർ) ഭാരം കൂടിയ ഒരു വാഹനവും (ഉദാ: ഭാരം നിറച്ച ഒരു ട്രക്ക്) തിരശ്ചീനമായ ഒരു റോഡിൽ പാർക്ക് ചെയ്തിരിക്കുന്നുവെന്ന് വിചാരിക്കുക. ഈ രണ്ടു വാഹനങ്ങൾക്കും ഒരേ സമയത്ത് ഒരേ വേഗം നൽകണമെങ്കിൽ ട്രക്കിൻമേൽ കൂടുതൽ ബലം പ്രയോഗിക്കേണ്ടതുണ്ടെന്ന് അറിയാമല്ലോ. അതുപോലെ ഒരേവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഭാരം കൂടിയ ഒരു വസ്തുവിനെയും ഭാരംകുറഞ്ഞ വസ്തുവിനേയും ഒരേസമയം തടഞ്ഞുനിർത്താൻ ശ്രമിക്കുമ്പോൾ ഭാരംകൂടിയ വസ്തുവിനെ തടഞ്ഞു നിർത്താൻ കൂടുതൽ ബലം ആവശ്യമായിവരുന്നു.
- ഒരു വലിയ കല്ലും ചെറിയ കല്ലും കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽനിന്ന് ഒരേ സമയം താഴേക്കിട്ടെന്നു കരുതുക. താഴെ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾക്കു വലിയ കല്ലിനെ അപേക്ഷിച്ച് ചെറിയകല്ലിനെ നിഷ്പ്രയാസം പിടിക്കാൻ സാധിക്കും. അതായത്, വസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തിൽ ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നതുമൂലമുള്ള ഫലങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നതിന് അവയുടെ മാസ് ഒരു പ്രധാന ഘടകമാണ്.
- നാം കണക്കിലെടുക്കേണ്ട മറ്റൊരു പ്രധാന വസ്തുത വസ്തുക്കളുടെ പ്രവേഗമാണ്. തോക്കിൽനിന്നു വെടിയുതിർക്കുമ്പോൾ നിശ്ചലാവസ്ഥയിലെത്തുന്നതിനുമുമ്പ് ഒരാളുടെ ശരീരത്തിൽ തുളഞ്ഞു കയറാൻ വെടിയുണ്ടക്ക് കഴിയും. എന്നാൽ അതേ വെടിയുണ്ടയുപയോഗിച്ച് കുറഞ്ഞവേഗത്തിലാണ് വെടിയുതിർക്കുന്നതെങ്കിൽ ഉണ്ടാകുന്ന മുറിവ് അത്ര ഗുരുതരമായിരിക്കില്ല. അതായത് ഒരു നിശ്ചിത മാസുള്ള വസ്തുവിന്റെ വേഗത കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് വസ്തുവിന്റെ ചലനം നിർത്തുന്നതിനായി ഒരു നിശ്ചിതസമയത്ത് പ്രയോഗിക്കേണ്ട വിപരീതബലത്തിന്റെ ശക്തിയും കൂടുതലായിരിക്കും. വസ്തുവിന്റെ മാസിന്റെയും പ്രവേഗത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമായ ആക്കം ചലനത്തെ സ്വാധീനിക്കുന്ന വളരെ പ്രധാനമായ ഘടകമാണ്. ഒരു നിശ്ചിത സമയത്തിനുള്ളിൽ ആക്കത്തിനുണ്ടാകുന്ന വ്യത്യാസം കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് പ്രയോഗിക്കേണ്ട ബലത്തിന്റെ അളവും കൂടുതലായിരിക്കും.
- വളരെ വേഗത്തിൽ വരുന്ന ക്രിക്കറ്റ് പന്ത് പിടിക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്ന ഒരു പുതുമുഖ ക്രിക്കറ്റ്കളിക്കാരന്റെ കൈക്ക് പരിക്കുപറ്റുക സാധാരണമാണ്. എന്നാൽ പരിചയസമ്പന്നനായ ക്രിക്കറ്റ്കളിക്കാരനാണെങ്കിൽ വേഗത്തിൽ വരുന്ന പന്ത് അനായാസം പിടിക്കുന്നത് നാം കാണാറുള്ളതാണ്. ഇതിനു കാരണം പരി

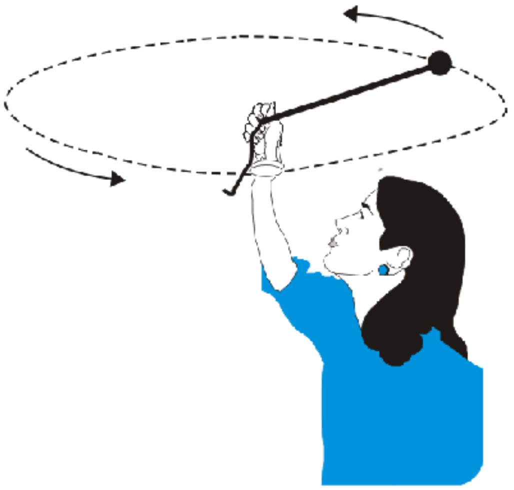
ചയസമ്പന്നനായ കളിക്കാരൻ പന്തിനെ തടഞ്ഞു നിർത്താൻ കൈകൾക്ക് കൂടുതൽ സമയം നൽകുന്നതാണ്. പന്തു പിടിക്കുമ്പോൾ കൈകൾ പിന്നോട്ടു ചലിപ്പിച്ചാണ് ഇതു സാധിക്കുന്നത് (ചിത്രം 5.3). എന്നാൽ ഒരു പുതുമുഖതാരമാണെങ്കിൽ കൈകൾ ഒരു സ്ഥാനത്തു തന്നെവച്ച് കുറഞ്ഞസമയം കൊണ്ട് പന്തിനെ പിടിച്ചുനിർത്താൻ ശ്രമിക്കുന്നു. ഇത് പരിക്കിനു കാരണമാകുന്നു. ഇതിൽനിന്നും ബലം ആക്കവ്യത്യാസത്തെ മാത്രമല്ല ആക്കവ്യത്യാസം സൃഷ്ടിക്കാനെടുക്കുന്ന സമയത്തെയും ആശ്രയിച്ചാണിരിക്കുന്നതെന്നു കാണാം. നിശ്ചിത ആക്കവ്യത്യാസം ഒരു ചെറിയ ഇടവേളയിൽ ഉണ്ടാക്കാൻ പ്രയോഗിക്കേണ്ട ബലം കൂടുതലായിരിക്കും. ചുരുക്കത്തിൽ, ആക്കവ്യത്യാസനിരക്ക് കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് ബലവും കൂടുതലായിരിക്കും.



ചിത്രം 5.3 ബലം ആക്കവ്യത്യാസത്തെ മാത്രമല്ല, ആക്കവ്യത്യാസം സൃഷ്ടിക്കാനാവശ്യമായ സമയത്തെയും ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. പരിചയസമ്പന്നനായ ക്രിക്കറ്റ്കളിക്കാരൻ പന്തു പിടിക്കുമ്പോൾ കൈകൾ പിന്നിലേക്കു ചലിപ്പിച്ച് പന്തിനെ പിടിച്ചുനിർത്താൻ കൂടുതൽ സമയം അനുവദിക്കുന്നു. തന്മൂലം പ്രയോഗിക്കേണ്ട ബലം ചെറുതായിരിക്കും.

- വസ്തുക്കളുടെ മാസിന്റെയും പ്രവേഗത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം അഥവാ ആക്കമാണ് ചലനത്തിൽ ബലത്തിന്റെ പ്രഭാവത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനശില. വ്യത്യസ്തമാസുള്ള രണ്ടുവസ്തുക്കളിൽ ഒരു നിശ്ചിതഇടവേളയിൽ ഒരു നിശ്ചിതബലം പ്രയോഗിക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. മാസ് കൂടുതലുള്ള വസ്തുവിനേക്കാൾ മാസ്കുറഞ്ഞ വസ്തുവിനായിരിക്കും പ്രവേഗം കൂടുതലായി ലഭിക്കുന്നത്. എന്നാൽ ഈ നിശ്ചിതഇടവേളയുടെ അവസാനം രണ്ടുവസ്തുക്കൾക്കുമുണ്ടാകുന്ന ആക്കം തുല്യമായിരിക്കും. അതായത് ഒരു നിശ്ചിതസമയംകൊണ്ട് വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളിൽ ഒരേ ബലത്താൽ സൃഷ്ടിക്കപ്പെടുന്ന ആക്കവ്യത്യാസം തുല്യമായിരിക്കും. ഇതാണ് രണ്ടാം ചലനനിയമത്തിന്റെ സുപ്രധാന സൂചകം.

- മേൽപ്പറഞ്ഞ നിരീക്ഷണങ്ങളിലൊന്നും ആക്കത്തിന്റെ സദിശ സ്വഭാവം സ്പഷ്ടമായിരുന്നില്ല. നാം ചർച്ചചെയ്ത ഉദാഹരണങ്ങളിലെല്ലാം ആക്കത്തിന്റെയും ആക്കവ്യത്യാസത്തിന്റെയും ദിശ ഒന്നു തന്നെയായിരുന്നു. എന്നാൽ എപ്പോഴും ഇപ്രകാരമാവണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണത്തിന്, ചരടിൽ കെട്ടിയ ഒരു കല്ലിനെ സമവേഗത്തിൽ തിരശ്ചീനതലത്തിൽക്കൂടി കറക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ ആക്കത്തിന്റെ അളവ് സ്ഥിരമാണ്. എന്നാൽ അതിന്റെ ദിശ മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കും (ചിത്രം 5.4). ആക്കസദിശത്തിന് ഇപ്രകാരം വ്യത്യാസം വരുത്തണമെങ്കിൽ ഒരു ബലം ആവശ്യമാണ്. നമ്മുടെ കൈയിൽനിന്നു ചരടിലൂടെയാണ് ഈ ബലം നൽകുന്നത്. ഒരു കല്ലിനെ കൂടുതൽവേഗത്തിലോ ചെറിയ ആരമുള്ള വൃത്തത്തിലൂടെയോ ഇതു രണ്ടുംകൂടി ചേർന്ന രീതിയിലോ കറക്കണമെങ്കിൽ നമ്മുടെ കൈകൾ കൂടുതൽബലം പ്രയോഗിക്കേണ്ടതുണ്ടെന്ന് അനുഭവങ്ങളിൽ നിന്നു നമുക്കറിയാം. ഇത് കൂടുതൽ ത്വരണത്തിനോ അഥവാ ആക്കവ്യത്യാസമെന്ന സദിശത്തിന്റെ കൂടുതൽ വ്യതിയാനത്തിനോ കാരണമാകുന്നു. ആക്കവ്യത്യാസത്തിന്റെ നിരക്ക് കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് പ്രയോഗിക്കേണ്ട ബലവും കൂടുന്നു.



ചിത്രം 5.4. ആക്കത്തിന്റെ അളവ് സ്ഥിരമായിരുന്നാൽപോലും ആക്കത്തിന്റെ ദിശമാറ്റുന്നതിന് ഒരു ബലം ആവശ്യമാണ്. കല്ലിനെ ചരടിൽകെട്ടി തിരശ്ചീനമായ വർത്തുളപാതയിലൂടെ സമപ്രവേഗത്തിൽ കറക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് ഇത് അനുഭവപ്പെടാറുണ്ട്.

ഈ നിഗമനങ്ങൾ നമ്മെ ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമ ത്തിലേക്കെത്തിക്കുന്നു. ഈ ചലന നിയമത്തെ താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ പ്രസ്താവിക്കാം.

'ഒരു വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന ആക്കവ്യത്യാസത്തിന്റെ നിരക്ക് പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലത്തിന് നേർ അനുപാ തത്തിലും അതിന്റെ ദിശ, പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബല ത്തിന്റെ ദിശയിലുമായിരിക്കും.'

അതായത്, '**F**' ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നതുമൂലം 'm' മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗം Δt ഇടവേള കൊണ്ട് $\mathbf{v}$ യിൽ നിന്നു $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ആകുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. വസ്തുവിന്റെ ആദ്യ ആക്കം $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ യ്ക്ക് $\Delta\mathbf{p} = m\,\Delta\mathbf{v}$ വ്യത്യാസമുണ്ടാകുന്നു. രണ്ടാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച്

$$\mathbf{F} \propto \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} \quad \text{or} \quad \mathbf{F} = k\,\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t}$$

ഇവിടെ k എന്നത് അനുപാതസ്ഥിരാങ്കമാണ് (constant of proportionality). ഇടവേളയുടെ പരിധി $\Delta t \to 0$ എന്നു കണക്കാക്കിയാൽ $\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t}$ എന്നതിനെ, ആനുമാനികം (derivative) അഥവാ t യിലുള്ള **p** യുടെ അവകലന ഗുണാങ്കം (differential coefficient) $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ എന്നു പറയാം.

അതുകൊണ്ട്, $$\mathbf{F} = k\,\frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (5.2)$$

സ്ഥിരമായ 'm' മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\,\mathbf{v}) = m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\,\mathbf{a} \qquad (5.3)$$

അതായത് രണ്ടാംചലനനിയമത്തെ താഴെപ്പറയുന്ന പ്രകാരവും എഴുതാവുന്നതാണ്.

$$\mathbf{F} = k\,m\,\mathbf{a} \qquad (5.4)$$

ബലം വസ്തുവിന്റെ മാസ് 'm' നും ത്വരണം '**a**' യ്ക്കും ആനുപാതികമാണെന്ന് ഇതു വ്യക്തമാക്കുന്നു.

ബലത്തിന്റെ യൂണിറ്റ് എന്താണെന്ന് നാം ഇതുവരെയും നിർവചിച്ചിരുന്നില്ല. സമവാക്യം (5.4)ൽ നിന്നു ബല ത്തിന്റെ യൂണിറ്റ് നിർവചിക്കാനാകും. ഇതിനായി 'k' എന്നതിന് നമ്മുടെ ഇഷ്ടാനുസരണം ഏതെങ്കിലും സ്ഥിരമൂല്യം നൽകാം. അതായത് $k = 1$ എന്ന് സങ്ക ൽപ്പിക്കുക. അപ്പോൾ രണ്ടാം ചലനനിയമം

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\,\mathbf{a} \qquad (5.5)$$

എന്നാകുന്നു.

SI യൂണിറ്റിൽ, 1kg മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിൽ $1\ \text{m s}^{-2}$ ത്വരണം സൃഷ്ടിക്കുന്ന അത്രയും ബലത്തെ ഒരു യൂണിറ്റ് ബലം എന്നു പറയുന്നു. ഈ യൂണിറ്റാണ് 'ന്യൂട്ടൺ'

$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg m s}^{-2}.$$

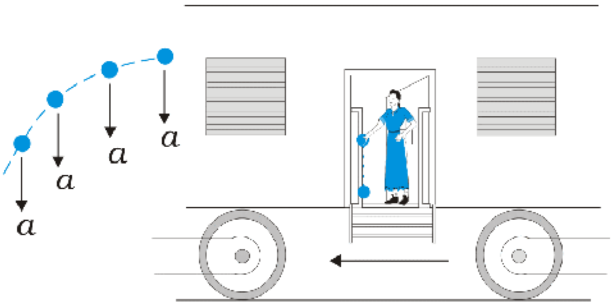
രണ്ടാം ചലനനിയമത്തിലെ ചില പ്രധാനവസ്തുതകളെ നമുക്ക് പരിശോധിക്കാം.

1. രണ്ടാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് $\mathbf{F} = 0$ സൂചിപ്പിക്കു ന്നത് $\mathbf{a} = 0$ ആയിരിക്കുമെന്നാണ്. അതായത് രണ്ടാം ചലനനിയമം ഒന്നാം ചലനനിയമവുമായി പൊരുത്ത മുള്ളതാണ്.

2. രണ്ടാം ചലനനിയമം ഒരു സദിശനിയമമാണ്. ഇത് മൂന്നു സമവാക്യങ്ങളായി എഴുതാൻ കഴിയും. അവ ഈ സദിശത്തിന്റെ മൂന്നു ഘടകങ്ങളിൽ ഓരോന്നി നെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = m\,a_x$$
$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = m\,a_y$$
$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = m\,a_z \qquad (5.6)$$

ഇതിനർഥം ബലം പ്രവേഗത്തിന് സമാന്തരദിശയി ലല്ലെങ്കിൽ, അതായത് അവ തമ്മിൽ ഒരു കോണള വുണ്ടെങ്കിൽ ബലത്തിന്റെ ദിശയിലുള്ള പ്രവേഗ ത്തിന്റെ ഘടകത്തിനു മാത്രമേ വ്യത്യാസമുണ്ടാവു കയുള്ളൂവെന്നാണ്. ബലത്തിന്റെ ദിശക്ക് ലംബമാ യുള്ള പ്രവേഗത്തിന് ഒരു മാറ്റവും സംഭവിക്കുകയി ല്ല. ഉദാഹരണത്തിന്, ലംബമായുള്ള ഗുരുത്വാ കർഷണബലത്തിന്റെ സ്വാധീനത്തിൽ വിക്ഷേപിക്ക പ്പെടുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ (projectile) തിരശ്ചീന ദിശയിലുള്ള പ്രവേഗം മാറ്റമില്ലാതെ തുടരും. (ചിത്രം 5.5)



ചിത്രം 5.5 തൽക്ഷണ ത്വരണം എന്നത് ആ സമയത്തു പ്രയോ ഗിക്കുന്ന ബലത്തെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. ത്വരണം സംഭവിച്ച് ട്രെയിനിൽ നിന്നു പുറത്തേക്കിട്ട കല്ലിന് ആ നിമിഷത്തിനു ശേഷം ബലം അനുഭവപ്പെടുകയോ (വായുവിന്റെ രോധം അവ ഗണിച്ചാൽ) തിരശ്ചീനമായ ത്വരണം ഉണ്ടാവുകയോ ഇല്ല.

3. സമവാക്യം (5.5) അനുസരിച്ചുള്ള രണ്ടാം ചലനനിയമം ഒരു ഏക ബിന്ദുവസ്തുവിനു (single point particle) മാത്രം ബാധകമായുള്ളതാണ്. നിയമത്തിലെ **F** എന്നത് ഈ ഒറ്റ വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന സഫല ബാഹ്യബലവും **a** എന്നത് ഈ വസ്തുവിന്റെ ത്വരണവുമാണ്. എന്നാൽ ഇതേ നിയമം ഒരു ദൃഢവസ്തുവിനും കണികകളുടെ ഒരു വ്യൂഹത്തിനും ഒരേപോലെ ബാധകമാണ്. ഇവിടെ **F** എന്നത് ആ വ്യൂഹത്തിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന സഫലബാഹ്യബലവും **a** ആ വ്യൂഹത്തിന്റെ ത്വരണവും ആകുന്നു. കൃത്യമായി പറഞ്ഞാൽ **a** എന്നത് ആ വ്യൂഹത്തിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ (centre of mass) ത്വരണമാണ്. ഇതിനെക്കുറിച്ച് അധ്യായം 7-ൽ വിശദമായി പഠിക്കും. **"ഒരു വ്യൂഹത്തിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ആന്തരിക ബലങ്ങളെയൊന്നും F എന്ന ബലത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്തുകയില്ല."**

4. ഒരു പ്രത്യേക സ്ഥലത്ത് (വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനം) പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന **F** എന്ന ബലത്തെയും ആ ബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന സമയത്ത് അവിടെയുണ്ടാകുന്ന **a** എന്ന ത്വരണത്തെയും പരസ്പരം ബന്ധിപ്പിക്കുന്നതാണ് രണ്ടാം ചലനനിയമം. അതുകൊണ്ട് ആ സ്ഥാനത്ത് ഒരു നിശ്ചിതസമയത്തുണ്ടാകുന്ന ത്വരണമെന്തെന്നു നിർണയിക്കുന്നത് ആ സമയത്ത് അവിടെ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ബലമാണ്, അല്ലാതെ അതിനുമുമ്പ് വസ്തുവിനുള്ള ചലനത്തിന്റെ അവസ്ഥയല്ല. (ചിത്രം 5.5 കാണുക)

ഉദാഹരണം:- 5.2 0.04 kg മാസുള്ള 90 ms^{-1} വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വെടിയുണ്ട ഭാരമേറിയ ഒരു തടിക്കഷണത്തിൽ തുളഞ്ഞുകയറുകയും 60cm ദൂരം സഞ്ചരിച്ചശേഷം നിശ്ചലമാവുകയും ചെയ്യുന്നു. ഈ വെടിയുണ്ടയിൽ തടിക്കഷണം പ്രയോഗിക്കുന്ന ശരാശരി പ്രതിരോധബലമെത്ര?

ഉത്തരം

വെടിയുണ്ടക്കുണ്ടാകുന്ന മന്ദീകരണം (സ്ഥിരമാണെന്ന് അനുമാനിക്കാം)

$$a = \frac{-u^2}{2s} = \frac{-90 \times 90}{2 \times 0.6} \text{m s}^{-2} = -6750 \text{ m s}^{-2}$$

രണ്ടാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് മന്ദീകരണം സൃഷ്ടിക്കുന്ന ബലം

$$= 0.04 \text{ kg} \times 6750 \text{ m s}^{-2} = 270 \text{ N}$$

വിവിധ സമയങ്ങളിൽ വെടിയുണ്ടയിൽ ഉണ്ടാകുന്ന യഥാർഥത്തിലുള്ള പ്രതിരോധവും മന്ദീകരണവും തുല്യമല്ലാത്തതിനാൽ ഇത് ശരാശരി പ്രതിരോധബലത്തെ മാത്രമാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. ◀

ഉദാഹരണം: 5.3. 'm' മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനം $y = ut + \frac{1}{2}gt^2$ എന്ന സമവാക്യമുപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം: $y = ut + \frac{1}{2}gt^2$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

അതിനാൽ $v = \frac{dy}{dt} = u + gt$

ത്വരണം $a = \frac{du}{dt} = g$

അപ്പോൾ സമവാക്യം 5.5 അനുസരിച്ച് ബലം
$F = ma = mg$

ഈ സമവാക്യം ഗുരുത്വത്വരണത്തോടെയുള്ള വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു. 'y' g യുടെ ദിശയിലുള്ള സ്ഥാന നിർദേശാങ്കമാണ്. ◀

ആവേഗം (Impulse)

വളരെകുറഞ്ഞ സമയത്തിനുള്ളിൽ വളരെവലിയ ഒരു ബലം വസ്തുക്കൾക്ക് ആക്കവ്യതിയാനമുണ്ടാക്കുന്നത് നാം പലപ്പോഴും കാണാറുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന്, പന്ത് ചുമരിൽ തട്ടിതിരിച്ചുവരുന്നത്. ഇവിടെ പന്തും ചുമരും തമ്മിൽ സമ്പർക്കത്തിലുള്ള വളരെ ചെറിയഇടവേളയിൽ മാത്രമാണ് പന്തിന്മേൽ ചുമർ ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നത്. എങ്കിൽ പോലും പന്തിന്റെ ആക്കദിശ നേർവിപരീതമാക്കാൻ കഴിയുന്നതരത്തിൽ ആ ബലം വളരെ വലുതാണ്. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ബലത്തെയും ബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ഇടവേളയെയും പ്രത്യേകമായി കണക്കിലെടുക്കുക പ്രയാസമാണ്. എന്നാൽ ബലത്തിന്റെയും സമയത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം നമുക്ക് അളക്കാൻ കഴിയുന്നതരത്തിലാണ്. ഈ ഗുണനഫലത്തെ ആവേഗം (Impulse) എന്നു പറയുന്നു.

ആവേഗം = ബലം x സമയ ഇടവേള = ആക്കവ്യത്യാസം **(5.7)**

വളരെചെറിയ ഇടവേളയിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന വളരെ വലിയ ബലത്തെയാണ് ആവേഗബലം (Impulsive force) എന്നു പറയുന്നത്. മുൻകാലങ്ങളിൽ ആവേഗബലത്തെ ഒരു പ്രത്യേക വിഭാഗമായാണ് കണക്കാക്കിയിരുന്നത്. എന്നാൽ ന്യൂട്ടോണിയൻ ബലതന്ത്രത്തിൽ അത്തരം വ്യത്യാസങ്ങളില്ല-ആവേഗബലം മറ്റെല്ലാ

ത്തരം ബലങ്ങളെയും പോലെയുള്ളതാണ്. വ്യത്യാസം ആവേഗബലം വളരെ ചെറിയ ഇടവേളയിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന വലിയ ബലമാണെന്നതു മാത്രമാണ്.

> **ഉദാഹരണം 5.4.**
> ബൗളർ എറിഞ്ഞ വേഗമായ 12m/sൽ ഒരു ബാറ്റ്സ്മാൻ പന്തിനെ ബൗളറുടെ നേരേ തിരിച്ചടിക്കുന്നു. പന്തിന്റെ മാസ് 0.5 kg ആയാൽ പന്തിനു ലഭിക്കുന്ന ആവേഗം എത്രയെന്ന് കണക്കാക്കുക. (പന്തിന്റേത് രേഖീയചലനമാണെന്ന് സങ്കൽപിക്കുക).

ഉത്തരം ആക്കവ്യത്യാസം = 0.15 x 12 - (-0.15x 12)

= 3.6 Ns

ആവേഗം = 3.6 Ns

ഇതിന്റെ ദിശ ബാറ്റ്സ്മാനിൽനിന്നു ബൗളറിലേക്കാണ്.

മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച ഉദാഹരണത്തിൽ പന്തിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെട്ട ബലമോ പന്തും ബാറ്റും തമ്മിൽ സമ്പർക്കത്തിലുണ്ടായിരുന്ന സമയമോ വ്യക്തമായി മനസ്സിലാക്കാൻ ബുദ്ധിമുട്ടാണ്. എന്നാൽ പന്തിനു ലഭിക്കുന്ന ആവേഗം കണക്കാക്കാൻ നമുക്ക് എളുപ്പത്തിൽ സാധിക്കുന്നുണ്ട്. ◀

5.6 ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമം (Newton's Third Law of Motion)

രണ്ടാം ചലനനിയമം ഒരു വസ്തുവിൻമേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യബലത്തെയും വസ്തുവിന്റെ ത്വരണത്തെയും പരസ്പരം ബന്ധിപ്പിക്കുന്നു. എന്നാൽ എന്താണ് ഈ വസ്തുക്കളുടെമേലുള്ള ബാഹ്യബലത്തിന്റെ ഉറവിടം? ഈ ബാഹ്യബലത്തിന് കാരണമെന്ത്? ന്യൂട്ടോണിയൻ ബലതന്ത്രത്തിൽ ഇതിന്റെ ഏറ്റവും ലഘുവായ ഉത്തരം ഈ ബാഹ്യബലം എപ്പോഴും മറ്റൊരു വസ്തുമൂലമാണുണ്ടാകുന്നതെന്നാണ്. A,B എന്നിങ്ങനെ ഒരു ജോടി വസ്തുക്കളെ സങ്കൽപിക്കുക. A യിൽ B ഒരു ബാഹ്യബലം സൃഷ്ടിക്കുന്നു. അപ്പോൾ സ്വാഭാവികമായും നാം ഒരു ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം കണ്ടെത്തേണ്ടിവരും. A എന്ന വസ്തു തിരിച്ച് B യിൽ ബാഹ്യബലം പ്രയോഗിക്കുന്നുണ്ടോ? ചില ഉദാഹരണങ്ങളിൽനിന്ന് നമുക്ക് ഇതിന്റെ ഉത്തരം വ്യക്തമായി മനസ്സിലാക്കാം. ഒരു ചുരുളൻ സ്പ്രിങ്ങിനെ (coiled spring) അമർത്തിപ്പിടിക്കുമ്പോൾ നമ്മുടെ കൈയിൽ നിന്നുള്ള ബലം മൂലം സ്പ്രിങ് അമർന്നിരിക്കുന്നു. ഇതേസമയം ഇങ്ങനെ അമർന്നിരിക്കുന്ന സ്പ്രിംഗ് നമ്മുടെ കൈയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം നമുക്ക് അനുഭവിക്കാൻ കഴിയും. എന്നാൽ വസ്തുക്കൾ തമ്മിൽ പരസ്പരം സമ്പർക്കത്തിലല്ല എങ്കിലെന്തായിരിക്കും സംഭവിക്കുന്നത്? ഭൂമി ഒരു കല്ലിനെ ഗുരുത്വാകർഷണബലം വഴി താഴേക്ക് ആകർഷിക്കുന്നു. ഈ കല്ല് തിരിച്ച് ഭൂമിയിൽ ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നുണ്ടോ? ഈ ചോദ്യത്തിനുള്ള ഉത്തരം വ്യക്തമല്ല, കാരണം, കല്ല് ഭൂമിയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലത്തിന്റെ ആഘാതം നമുക്ക് കാണാൻ കഴിയുന്നില്ല. എന്നാൽ ന്യൂട്ടനെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം ഈ ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരം 'ഉണ്ട്' എന്നാണ്. കല്ല് ഭൂമിയിൽ തുല്യവും വിപരീതവുമായ ഒരു ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നുണ്ട്. ഇത് നമുക്ക് തിരിച്ചറിയാൻ പറ്റാത്തതിനു കാരണം ഭൂമിയുടെ വലിയ മാസാണ്. അതുകൊണ്ട് കല്ലുണ്ടാക്കുന്ന ഒരു ചെറിയ ബലം മൂലം ഭൂമിക്കുണ്ടാകുന്ന ചലനം അവഗണിക്കാവുന്നതാണ്.

ഇപ്രകാരം ന്യൂട്ടോണിയൻ ബലതന്ത്രമനുസരിച്ച് ബലങ്ങൾ ഒരിക്കലും പ്രകൃതിയിൽ ഒറ്റപ്പെട്ടല്ല പ്രവർത്തിക്കുന്നതെന്നു കാണാം. രണ്ടു വസ്തുക്കൾ തമ്മിലുള്ള പരസ്പര ഇടപെടലാണ് ബലം. ബലങ്ങൾ എപ്പോഴും ജോടികളായാണ് നിലനിൽക്കുന്നത്. രണ്ടു വസ്തുക്കൾക്കിടയിൽ അന്യോന്യം പ്രവർത്തിക്കുന്ന ബലങ്ങൾ എപ്പോഴും തുല്യവും വിപരീതവുമായിരിക്കും. ഈ ആശയത്തെയാണ് ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമത്തിന്റെ രൂപത്തിൽ ആവിഷ്കരിച്ചിരിക്കുന്നത്.

"ഏതു പ്രവർത്തനത്തിനും തുല്യവും വിപരീതവുമായ ഒരു പ്രതിപ്രവർത്തനം ഉണ്ടായിരിക്കും."

ന്യൂട്ടന്റെ ഭാഷയിലുള്ള മൂന്നാം ചലനനിയമം വളരെ സ്പഷ്ടവും മനോഹരവുമാകയാൽ അത് സാധാരണ ശൈലിയുടെ ഭാഗമായി മാറിയിട്ടുണ്ട്. തന്മൂലം തന്നെ ഇത് വളരെ തെറ്റിദ്ധാരണകൾക്ക് ഇടയാക്കാം.

പ്രവർത്തനം, പ്രതിപ്രവർത്തനം എന്നീ വാക്കുകളുടെ പ്രയോഗം സംബന്ധിച്ച ചില വസ്തുതകൾ നമുക്ക് പരിശോധിക്കാം.

1. മൂന്നാം ചലനനിയമത്തിൽ പ്രതിപാദിക്കുന്ന പ്രവർത്തനവും പ്രതിപ്രവർത്തനവും ബലങ്ങളാണ്. മൂന്നാം ചലനനിയമത്തെ സ്പഷ്ടമായി താഴെ പറയുന്ന തരത്തിൽ നിർവചിക്കാം.

   "ബലങ്ങൾ എപ്പോഴും ജോടികളായാണ് പ്രവർത്തിക്കുന്നത്. A എന്ന വസ്തുവിൽ B എന്ന വസ്തു പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം, B എന്ന വസ്തുവിൽ A പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലത്തിന് തുല്യവും വിപരീതവുമായിരിക്കും."

2. പ്രവർത്തനം, പ്രതിപ്രവർത്തനം എന്നീ പ്രയോഗങ്ങൾ തെറ്റായ ധാരണ സൃഷ്ടിക്കാറുണ്ട്. പ്രവർത്തനത്തെ തുടർന്നാണ് പ്രതിപ്രവർത്തനമുണ്ടാകുന്നതെന്ന, അതായത് പ്രവർത്തനം കാരണവും പ്രതിപ്രവർത്തനമെന്നത് അതിന്റെ ഫലവും ആണെന്ന തെറ്റായ ധാരണയാണ് ഉണ്ടാക്കുന്നത്. **എന്നാൽ പ്രവർത്തനവും പ്രതിപ്രവർത്തനവും തമ്മിൽ യാതൊരു കാര്യകാരണബന്ധവും മൂന്നാം ചലനനിയമം വിവക്ഷിക്കുന്നില്ല. A യിൽ B പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലവും B യിൽ A പ്രയോ**

ഗിക്കുന്ന ബലവും ഒരേ സമയത്താണ് പ്രവർത്തിക്കുന്നത്. അതിനാൽ ഇവയിൽ ഏതിനെ വേണമെങ്കിലും പ്രവർത്തനമെന്നും മറ്റേതിനെ പ്രതിപ്രവർത്തനമെന്നും നിർവചിക്കാം.

3. പ്രവർത്തനവും പ്രതിപ്രവർത്തനവും വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളിലാണ് പ്രവർത്തിക്കുന്നത്, ഒരേ വസ്തുവിലല്ല. A,B എന്നീ രണ്ടു വസ്തുക്കൾ സങ്കൽപ്പിക്കുക. മൂന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച്

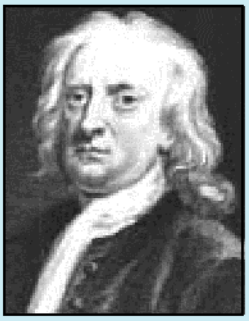
$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \qquad (5.8)$$

(A യിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം) = - (B യിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം)

ഏതെങ്കിലും ഒരു വസ്തുവിന്റെ മാത്രം ചലനമാണ് നാം പരിഗണിക്കുന്നതെങ്കിൽ (A യോ B യോ), മേൽപറഞ്ഞവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബലം മാത്രമേ കണക്കിലെടുക്കേണ്ടതുള്ളൂ. ഈ രണ്ടു ബലങ്ങളും തമ്മിൽ കൂട്ടുന്നതുമൂലം കിട്ടുന്ന ആകെ ബലം പൂജ്യമാണെന്നു കരുതുന്നതും സാധാരണവരുത്താറുള്ള ഒരു പിഴവാണ്.

നാം രണ്ടു വസ്തുക്കളുള്ള ഒരു വ്യൂഹത്തെ മുഴുവനായി പരിഗണിച്ചാൽ $\mathbf{F}_{AB}$, $\mathbf{F}_{BA}$ എന്നിവ ഈ വ്യൂഹത്തിൽ (A+B യിൽ) പ്രവർത്തിക്കുന്ന ആന്തരികബലങ്ങളാണ്. ഇവ രണ്ടും തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്നത് ശൂന്യബലം (null force) ആണ്. അതായത് ഒരു വസ്തുവിൻമേലോ വസ്തുക്കളുടെ വ്യൂഹത്തിലോ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ആന്തരികബലങ്ങൾ പരസ്പരം റദ്ദാക്കപ്പെടുന്നു. ഈ സുപ്രധാന വസ്തുത ഒരു വസ്തുവിൻമേലോ കണികകളുടെ ഒരു വ്യൂഹത്തിലോ ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം പ്രയോഗയോഗ്യമാക്കുന്നതിന് സഹായകമാകുന്നു. (അധ്യായം 7 കാണുക).

ഐസക് ന്യൂട്ടൻ (Isaac Newton) (1642 - 1727)

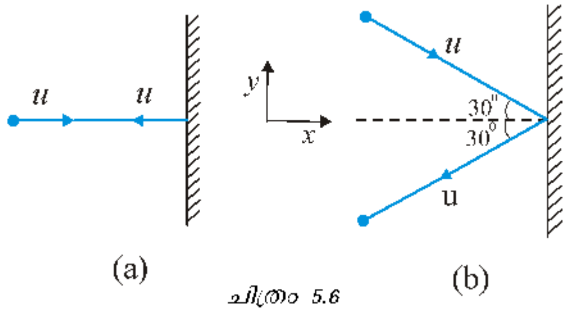


1642 - ൽ ഇംഗ്ലണ്ടിലെ വൂൾസ് തോർപ്പിലാണ് ഐസക് ന്യൂട്ടന്റെ ജനനം, ഗലീലിയോ മരണമടഞ്ഞതും ഇതേ വർഷമാണ്. സ്കൂൾ പഠനകാലത്ത് അദ്ദേഹത്തിന് ഗണിതത്തിലുണ്ടായിരുന്ന അസാമാന്യമായ കഴിവും യന്ത്രനിർമിതിയിലുള്ള അഭിരുചിയും ആരും തിരിച്ചറിഞ്ഞിരുന്നില്ല. 1662 - ൽ അദ്ദേഹം ബിരുദ പഠനത്തിനായി കേംബ്രിഡ്ജിൽ എത്തി. എന്നാൽ 1665ൽ പടർന്നുപിടിച്ച പ്ലേഗു മൂലം കേംബ്രിഡ്ജ് നഗരം അടച്ചുപൂട്ടുകയും ന്യൂട്ടന് തന്റെ അമ്മയുടെ കൃഷിയിടത്തിലേക്ക് മടങ്ങിപ്പോകേണ്ടിവരുകയും ചെയ്തു. രണ്ടുവർഷത്തോളം നീണ്ട ആ ഏകാന്തവാസത്തിനിടയിൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ ഒളിഞ്ഞു കിടന്ന കഴിവുകൾ പുറത്തുവരുകയും ഗണിതത്തിലും ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലുമുള്ള അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ കണ്ടെത്തുകയും ചെയ്തു. ഗണിതത്തിലെ നെഗറ്റീവും ഭിന്നകങ്ങളുമായ ഘാതങ്ങളും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ബൈനോമിയൽ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ (Binomial theorem for negative and fractional exponents), കലനശാസ്ത്രത്തിന്റെ (calculus) ആരംഭം, ഗുരുത്വാകർഷണത്തിലെ വ്യുൽക്രമ വർഗ നിയമം (Inverse square law), ധവളപ്രകാശത്തിന്റെ വർണരാജി മുതലായവ. കേംബ്രിഡ്ജിലേക്ക് തിരിച്ചെത്തിയ ശേഷം അദ്ദേഹം പ്രകാശശാസ്ത്രത്തിൽ (optics) തന്റെ ഗവേഷണം തുടരുകയും പ്രതിഫലന ടെലിസ്കോപ്പ് (reflecting telescope) രൂപകൽപനചെയ്യുകയും ചെയ്തു.

1684 - ൽ തന്റെ സുഹൃത്ത് എഡ്മണ്ട് ഹാലിയുടെ പ്രേരണയും പ്രോത്സാഹനവും മൂലം ന്യൂട്ടൻ ശാസ്ത്രരംഗത്തെ എക്കാലത്തെയും ഏറ്റവും പ്രശസ്തമായ കൃതി പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തി - പ്രിൻസിപ്പിയ മാത്തമാറ്റിക്ക (The Principia Mathematica). ഈ ഗ്രന്ഥത്തിൽ തന്റെ മൂന്നു ചലനനിയമങ്ങളെയും ഗുരുത്വാകർഷണനിയമത്തെയും പ്രതിപാദിക്കുന്നു. ഗ്രഹചലനത്തെക്കുറിച്ച് കെപ്ലർ കണ്ടെത്തിയ മൂന്നു നിയമങ്ങൾക്കുള്ള വിശദീകരണം അതു നൽകി. ഈ പുസ്തകം വിപ്ലവകരമായ വിവിധ കണ്ടുപിടിത്തങ്ങൾ അടങ്ങിയതായിരുന്നു. ദ്രവബലതന്ത്രത്തിന്റെ (Fluid mechanics) അടിസ്ഥാനതത്ത്വങ്ങൾ, തരംഗചലനത്തിന്റെ ഗണിതം, ഭൂമി, സൂര്യൻ മറ്റു ഗ്രഹങ്ങൾ എന്നിവയുടെ മാസ് കണ്ടെത്തൽ, വിഷുവങ്ങളുടെ പുരസ്സരണത്തെ (Precession of Equinoxes) ക്കുറിച്ചുള്ള വിശദീകരണം, വേലിയേറ്റം - വേലിയിറക്കം (tides) എന്നിവയെക്കുറിച്ചുള്ള സിദ്ധാന്തം എന്നിവ ഇതിൽ ചിലതു മാത്രമാണ്. 1704 - ൽ തന്റെ മറ്റൊരു മാസ്റ്റർപീസായ 'ഓപ്റ്റിക്സ്' (optiks) പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു. ഇതിൽ പ്രകാശത്തെയും നിറങ്ങളെയും കുറിച്ചുള്ള അദ്ദേഹത്തിന്റെ ഗവേഷണങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളിച്ചിട്ടുണ്ട്.

കോപ്പർനിക്കസ് തുടക്കമിടുകയും ഗലീലിയോയും കെപ്ലറും മുന്നോട്ടു നയിക്കുകയും ചെയ്ത ശാസ്ത്രവിപ്ലവത്തെ പരിപൂർണതയിലെത്തിച്ചത് ന്യൂട്ടനാണ്. ഭൗമ പ്രതിഭാസങ്ങളെയും ആകാശഗോളങ്ങളുടെ ചലനപ്രതിഭാസങ്ങളെയും ഏകോപിപ്പിക്കാൻ ന്യൂട്ടോണിയൻ ബലതന്ത്രത്തിന് സാധിച്ചു. ആപ്പിൾ താഴേക്കു വീഴുന്നതിനെ വിശദീകരിക്കുന്ന അതേ ഗണിതസമവാക്യം ഭൂമിക്കുചുറ്റുമുള്ള ചന്ദ്രന്റെ ചലനത്തെ വിശദീകരിക്കാനും സഹായിക്കുന്നു. ന്യൂട്ടന്റെ കണ്ടുപിടിത്തങ്ങൾ ശാസ്ത്രരംഗത്ത് യുക്തിയുടെ യുഗപ്പിറവിക്കു കാരണമായി.

ഉദാഹരണം 5.5 സമാനമായ രണ്ട് ബില്യാർഡ്സ് പന്തുകൾ ഒരേ വേഗത്തിൽ എന്നാൽ വ്യത്യസ്ത കോണളവുകളിൽ ഒരു ഉറപ്പുള്ള ചുമരിൽ ഇടിക്കുകയും വേഗത്തിനു വ്യത്യാസമില്ലാതെ ചിത്രം 5.6ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ തിരികെ വരുകയും ചെയ്യുന്നു. i) ഓരോ പന്തും ചുമരിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലത്തിന്റെ ദിശ എന്ത്? ii) രണ്ടു പന്തുകൾക്കും ചുമരു നൽകുന്ന ആവേഗത്തിന്റെ അളവിന്റെ അനുപാതം കണക്കാക്കുക.



ചിത്രം 5.6

ഉത്തരം

ചോദ്യം (i) ന് സ്വാഭാവികമായി നൽകപ്പെടുവാൻ സാധ്യതയുള്ള ഉത്തരം സന്ദർഭം (a) യിൽ ചുമരിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം ചുമരിനു ലംബമായാണെന്നും സന്ദർഭം (b) യിൽ ലംബത്തിന് 30° കോണളവിലാണെന്നതുമാണ്. ഈ നിഗമനം തെറ്റാണ്. രണ്ട് ഉദാഹരണങ്ങളിലും ചുമരിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം ചുമരിനു ലംബമായാണ്.

എങ്ങിനെയാണ് ചുമരിൻമേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം കണക്കാക്കുന്നത്? ഇതിനുള്ള കുറുക്കുവഴി പന്ത് ചുമരിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം (അല്ലെങ്കിൽ ആവേഗം) രണ്ടാം ചലനനിയമമുപയോഗിച്ചു കണക്കാക്കുകയെന്നതും അതിനുശേഷം മൂന്നാം ചലനനിയമത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ ഉത്തരം കണ്ടെത്തുകയെന്നതുമാണ്.

(i) പന്തുകളുടെ മാസ് 'm' ഉം ചുമരുമായുള്ള കൂട്ടിയിടിക്കുമുമ്പ് ഓരോ പന്തിന്റെയും വേഗത 'u' എന്നുമിരിക്കട്ടെ. x,y എന്നീ അക്ഷങ്ങളെ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ തിരഞ്ഞെടുക്കുക. തുടർന്ന് ഓരോ പന്തിന്റെയും ആക്കവ്യത്യാസം കണക്കാക്കുക.

സന്ദർഭം (a)

$(P_x)_{\text{ആദ്യം}} = mu \quad (P_y)_{\text{ആദ്യം}} = 0$

$(P_x)_{\text{അന്തിമം}} = -mu \quad (P_y)_{\text{അന്തിമം}} = 0$

ആക്കസദിശത്തിന്റെ വ്യത്യാസമാണ് ആവേഗം.

അതിനാൽ

ആവേഗത്തിന്റെ x - ഘടകം = -2 mu

ആവേഗത്തിന്റെ y - ഘടകം = 0

ആവേഗവും ബലവും ഒരേ ദിശയിലാണ്. ഇതിൽ നിന്ന് പന്തിന്മേൽ ചുമർ പ്രയോഗിക്കുന്നബലം ചുമരിനു ലംബമായാണെന്ന് സുവ്യക്തമാണ്. ഇത് നെഗറ്റീവ് x- ദിശയിലൂടെയാണ്. ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് പന്ത് ചുമരിൻമേൽ പ്രയോഗിക്കുന്നബലം ചുമരിന് ലംബമായി പോസിറ്റീവ് x - ദിശയിലായിരിക്കും. ഈ പ്രശ്നത്തിൽ കൂട്ടിയിടിയുടെ ചെറിയ സമയം സൂചിപ്പിച്ചിട്ടില്ലാത്തതിനാൽ ബലത്തിന്റെ അളവ് കണക്കാക്കുക സാധ്യമല്ല.

സന്ദർഭം (b)

$(P_x)_{\text{ആദ്യം}} = m\ u \cos 30^0 \quad (P_y)_{\text{ആദ്യം}} = -m\ u \sin 30^0$

$(P_x)_{\text{അന്തിമം}} = -m\ u \cos 30^0 \quad (P_y)_{\text{അന്തിമം}} = -m\ u \sin 30^0$

കൂട്ടിയിടിക്കുശേഷം Px ന്റെ ചിഹ്നത്തിനു വ്യത്യാസമുണ്ടാകുന്നതും Py യുടെ ചിഹ്നം വ്യത്യാസപ്പെടാതിരിക്കുന്നതും ശ്രദ്ധിക്കുക.

ആവേഗത്തിന്റെ x ഘടകം = $-2\ m\ u \cos 30^0$

ആവേഗത്തിന്റെ y ഘടകം = 0

സന്ദർഭം (a) യിലേതുപോലെ ആവേഗത്തിന്റെ (ബലത്തിന്റെയും) ദിശ ചുമരിന് ലംബമായി നെഗറ്റീവ് x - ദിശയിലൂടെയാണ്. തന്മൂലം മുൻസന്ദർഭത്തിലേതുപോലെ ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് ചുമരിൻമേൽ പന്ത് പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം ചുമരിനു ലംബമായി പോസിറ്റീവ് x - ദിശയിലേക്കാണ്.

സന്ദർഭം (a) യിലും (b) യിലും പന്തുകളിൽ സൃഷ്ടിക്കപ്പെടുന്ന ആവേഗങ്ങളുടെ അനുപാതം

$2\,m\,u / \left(2\,m\,u \cos 30^{\circ}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.2$ ആണ്.

5.7 ആക്ക സംരക്ഷണം (Conservation of Momentum)

ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടും മൂന്നും ചലനനിയമങ്ങളിലൂടെ വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ട ഒരു അനുമാനമായ – ആക്കസംരക്ഷണ നിയമത്തിൽ എത്തിച്ചേരുന്നു. നമുക്ക് സുപരിചിതമായ ഒരു ഉദാഹരണം പരിഗണിക്കാം. ഒരു തോക്കിൽ നിന്നു വെടിയുണ്ട ഉതിർക്കുന്നത് സങ്കൽപിക്കുക. മൂന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് വെടിയുണ്ടയിൽ തോക്ക് പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം **F** ആണെങ്കിൽ, തോക്കിൽ വെടിയുണ്ട പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം – **F** ആണ്. ഈ രണ്ടു ബല

ങ്ങളും പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് Δt എന്ന ഒരേ ഇടവേളയിലാണ്. രണ്ടാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് വെടിയുണ്ടക്കുണ്ടാകുന്ന ആക്കവ്യത്യാസം $\mathbf{F}\,\Delta t$ യും തോക്കിനുണ്ടാകുന്ന ആക്കവ്യത്യാസം $\mathbf{F}\,\Delta t$ യും ആണ്.

തുടക്കത്തിൽ തോക്കും വെടിയുണ്ടയും നിശ്ചലാവസ്ഥയിലായിരിക്കുന്നതിനാൽ രണ്ടിനും ഉണ്ടാകുന്ന ആക്കവ്യത്യാസമെന്നത് അന്ത്യആക്കം തന്നെയായിരിക്കും. അതായത്,

$\mathbf{p}_b$ എന്നത് വെടിയുതിർത്തതിനുശേഷം വെടിയുണ്ടക്കുള്ള ആക്കവും $\mathbf{p}_g$ എന്നത് തോക്കിന്റെ പിൻചലന ആക്കവും (recoil momentum) ആണെങ്കിൽ $\mathbf{p}_g = -\mathbf{p}_b$

അതായത് $\mathbf{p}_b + \mathbf{p}_g \quad 0$. അതിനാൽ

വെടിയുണ്ടയും തോക്കും ചേർന്ന വ്യൂഹത്തിന്റെ സഫലആക്കമെന്നത് സംരക്ഷിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതായി കാണാം.

ഇപ്രകാരം ഒറ്റപ്പെട്ട ഒരു വ്യൂഹത്തിലുള്ള (ഒരു ബാഹ്യബലവും ഇല്ലാത്ത വ്യൂഹത്തിൽ) ജോടികളായ വസ്തുക്കളിൽ പരസ്പരം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലങ്ങൾ ഓരോ വസ്തുവിലും ആക്കവ്യത്യാസമുണ്ടാക്കുന്നു. എന്നാൽ ഈ പരസ്പരബലങ്ങൾ ഓരോ ജോടിയിലും തുല്യവും വിപരീതവുമാകയാൽ പരസ്പരം റദ്ദു ചെയ്യപ്പെടുകയും ആകെ ആക്കം സ്ഥിരമായിരിക്കുകയും ചെയ്യും. ഈ വസ്തുതയെ ആക്കസംരക്ഷണനിയമമെന്നു പറയുന്നു.

"ബാഹ്യബലമില്ലെങ്കിൽ ഒരു ഒറ്റപ്പെട്ട വ്യൂഹത്തിലെ, സമ്പർക്കത്തിലേർപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന വസ്തുക്കളുടെ ആകെ ആക്കം സ്ഥിരമായിരിക്കും."

ആക്കസംരക്ഷണനിയമം പ്രയോഗിക്കാൻ കഴിയുന്ന വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ട ഒരുദാഹരണമാണ് രണ്ടു വസ്തുക്കൾ തമ്മിലുള്ള കൂട്ടിയിടി. A, B എന്നീ രണ്ടു വസ്തുക്കളെ സങ്കൽപ്പിക്കുക. ഇവയുടെ ആദ്യആക്കം യഥാക്രമം $\mathbf{p}_A$, $\mathbf{p}_B$ എന്നിങ്ങനെയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഈ വസ്തുക്കൾ പരസ്പരം കൂട്ടിയിടിച്ചശേഷം വേർപെടുമ്പോൾ അവയുടെ അന്തിമആക്കങ്ങൾ യഥാക്രമം $\mathbf{p}'_A$, $\mathbf{p}'_B$ എന്നിങ്ങനെയാണ്.

രണ്ടാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച്

$\mathbf{F}_{AB}\,\Delta t = \mathbf{p}'_A - \mathbf{p}_A$ യും

$\mathbf{F}_{BA}\,\Delta t = \mathbf{p}'_B - \mathbf{p}_B$ യും ആയിരിക്കും.

(ഇവിടെ രണ്ടു ബലങ്ങളും അനുഭവപ്പെടുന്ന ഇടവേള ഒന്നുതന്നെയായി കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നു. അതായത് രണ്ടു വസ്തുക്കളും പരസ്പരം സമ്പർക്കത്തിലിരിക്കുന്ന സമയം).

എന്നാൽ മൂന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച്,

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$$

$$\mathbf{p}'_A - \mathbf{p}_A = -\left(\mathbf{p}'_B - \mathbf{p}_B\right)$$

അതായത് $\mathbf{p}'_A + \mathbf{p}'_B = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B$ (5.9)

ഒറ്റപ്പെട്ട ഒരു വ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ ആദ്യആക്കവും ആകെ അന്തിമആക്കവും തുല്യമാണെന്ന് ഇതു തെളിയിക്കുന്നു. കൂട്ടിയിടി ഇലാസ്തികസംഘട്ടനമായാലും (Elastic collision) ഇലാസ്തികമല്ലാത്ത സംഘട്ടനമായാലും (Inelastic collision) ഇത് ബാധകമാണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുമല്ലോ. ഇലാസ്തികസംഘട്ടനങ്ങളിൽ വ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ ആദ്യ ഗതികോർജവും ആകെ അന്ത്യഗതികോർജവും തുല്യമാണെന്നുള്ള രണ്ടാമതൊരു നിബന്ധന കൂടിയുണ്ട്. (അധ്യായം 6 കാണുക)

5.8 ഒരു കണികയുടെ സന്തുലനം (Equilibrium of a Particle)

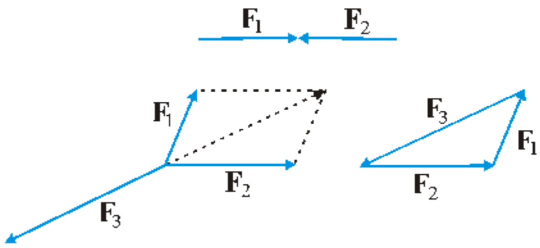
ഒരു കണികയിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന സഫലബാഹ്യബലം പൂജ്യമാകുമ്പോഴാണ് ബലതന്ത്രത്തിൽ ഒരു കണിക സന്തുലനാവസ്ഥയിലാണെന്നു പറയുന്നത്*. ഒന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് കണിക ഒന്നുകിൽ നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ അല്ലെങ്കിൽ സമചലനത്തിൽ തുടരുമെന്നാണ് ഇതിനർഥം.

ഒരു കണികയിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലങ്ങൾ $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ എന്നിവയാണെങ്കിൽ, വസ്തുവിന്റെ സന്തുലനാവസ്ഥക്ക്

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \qquad (5.10)$$

അതായത് കണികയിൻമേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന രണ്ടു ബലങ്ങളും തുല്യവും വിപരീതവുമായിരിക്കും. $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള മൂന്ന് സംഗാമിബലങ്ങൾ (concurrent forces) മൂലമുള്ള സന്തുലനാവസ്ഥക്ക് ഈ മൂന്നു ബലങ്ങളുടെയും സദിശ സങ്കലനഫലം പൂജ്യമായിരിക്കണം.

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0 \qquad (5.11)$$



ചിത്രം 5.7
സംഗാമിബലങ്ങൾ മൂലമുള്ള സന്തുലനാവസ്ഥ

** ഒരു വസ്തുവിന്റെ സന്തുലനാവസ്ഥക്ക്, സ്ഥാനാന്തര സന്തുലനാവസ്ഥയും ((translational equilibrium) (ആകെ ബാഹ്യബലം പൂജ്യമായിരിക്കും)) ഘൂർണന സന്തുലനാവസ്ഥയും ((Rotational equilibrium) (ആകെ ടോർക്ക് പൂജ്യമായിരിക്കും)) ആർജിക്കേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്.*

മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ സാമാന്തരിക നിയമമനുസരിച്ച് (parallelogram law) ലഭിക്കുന്ന $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ എന്നീ ബലങ്ങളുടെ പരിണതഫലം (resultant) മൂന്നാമത്തെ ബലമായ $\mathbf{F}_3$ യ്ക്ക് തുല്യവും വിപരീതവുമായിരിക്കണം. ചിത്രം 5.7ൽ ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ സന്തുലനാവസ്ഥയിലിരിക്കുന്ന മൂന്നു ബലങ്ങളെയും ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നുവശങ്ങളായി, സദിശങ്ങളുടെ ദിശ സൂചിപ്പിക്കുന്ന അമ്പടയാളങ്ങൾ അതേ അർഥത്തിൽ, കണക്കിലെടുക്കാവുന്നതാണ്. ഇത് എത്ര ബലങ്ങളുടെ കാര്യത്തിലും സാമാന്യവൽക്കരിക്കാവുന്നതാണ്. $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$... $\mathbf{F}_n$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള ബലങ്ങളുടെ സാന്നിധ്യം മൂലം സന്തുലനാവസ്ഥയിലിരിക്കുന്ന ഒരു കണികയിൽ, ഈ ബലങ്ങളെ n- വശങ്ങളുള്ള ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളായി അമ്പടയാളങ്ങളുപയോഗിച്ച് (Arrow Mark) പ്രതിനിധാനം ചെയ്യാം.

സമവാക്യം (5.11) അനുസരിച്ച്

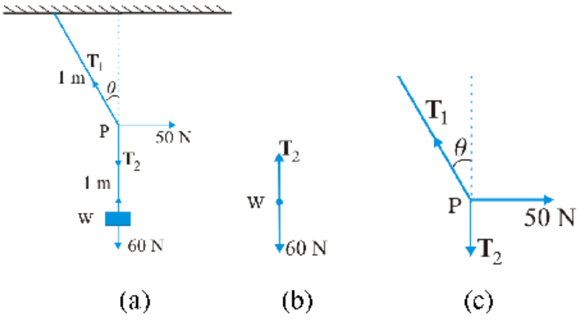
$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$$

$$F_{1y} - F_{2y} + F_{3y} = 0$$

$$F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = 0 \qquad (5.12)$$

F_{1x}, F_{1y}, F_{1z} എന്നിവ യഥാക്രമം F_1 ന്റെ x, y, z ദിശകളിലുള്ള ഘടകങ്ങളാണ്.

▶ **ഉദാഹരണം 5.6 :** ചിത്രം 5.8 ശ്രദ്ധിക്കുക. ഒരു 6kg മാസിനെ 2m നീളമുള്ള കയറുപയോഗിച്ച് മുകൾത്തട്ടിൽനിന്നു തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്നു. കയറിന്റെ മധ്യഭാഗമായ P യിൽ ഒരു 50N ബലം ചിത്രത്തിലേതുപോലെ തിരശ്ചീനദിശയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. സന്തുലനാവസ്ഥയിൽ ഈ കയർ ലംബവുമായുണ്ടാക്കുന്ന കോണളവ് എത്ര? ($g = 10 ms^{-2}$ എന്നു കരുതുക) കയറിന്റെ മാസ് കണക്കിലെടുക്കേണ്ടതില്ല.



ചിത്രം 5.8

ഉത്തരം

ചിത്രം 5.8 (b), 5.8 (c) എന്നിവയെ സ്വതന്ത്രബല ചിത്രം (Freebody diagram) എന്നു പറയുന്നു.

ചിത്രം 5.8 (b) W വിന്റെ സ്വതന്ത്രബല ചിത്രവും ചിത്രം 5.8 (c) P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്വതന്ത്ര ബലചിത്രവും ആണ്.

W എന്ന ഭാരത്തിന്റെ സന്തുലനാവസ്ഥ പരിഗണിക്കുക. തീർച്ചയായും $T_2 = 6 \times 10 = 60N$ ആണ്.

T_1, T_2 തിരശ്ചീനമായുള്ള 50N എന്നീ മൂന്നു ബലങ്ങളുടെ സാന്നിധ്യത്തിൽ P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സന്തുലനാവസ്ഥ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ സഫലബലത്തിന്റെ തിരശ്ചീനഘടകവും ലംബഘടകവും നിർവീര്യമാക്കപ്പെടുന്നു.

$$T_1 \cos\theta = T_2 = 60 \text{ N}$$

$$T_1 \sin\theta = 50 \text{ N}$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$\tan\theta = \frac{5}{6} \text{ or } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) = 40°$$

ഈ ഉത്തരം കയറിന്റെ നീളത്തെയോ (കയറിന്റെ മാസ് പരിഗണിക്കുന്നില്ല) തിരശ്ചീനബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബിന്ദുവിനെയോ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ളതല്ലെന്ന് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കുക. ◀

5.9 ബലതന്ത്രത്തിലെ സാധാരണബലങ്ങൾ (Common Forces in Mechanics)

ബലതന്ത്രത്തിൽ നാം പലതരം ബലങ്ങളെയും അഭിമുഖീകരിക്കുന്നുണ്ട്. അതിൽ ഗുരുത്വബലം സർവവ്യാപിയാണ്. ഭൂമിയുടെ ഗുരുത്വബലം ഭൂമിയിലുള്ള എല്ലാ വസ്തുക്കളിൻമേലും അനുഭവപ്പെടുന്നു. ആകാശഗോളങ്ങളുടെ ചലനത്തെ നിയന്ത്രിക്കുന്നതും ഗുരുത്വബലമാണ്. ഒരു മാധ്യമത്തിന്റെ അഭാവത്തിൽ പോലും വളരെ ദൂരെ നിന്നും വസ്തുക്കളെ സ്വാധീനിക്കാൻ ഗുരുത്വബലത്തിനു കഴിയും.

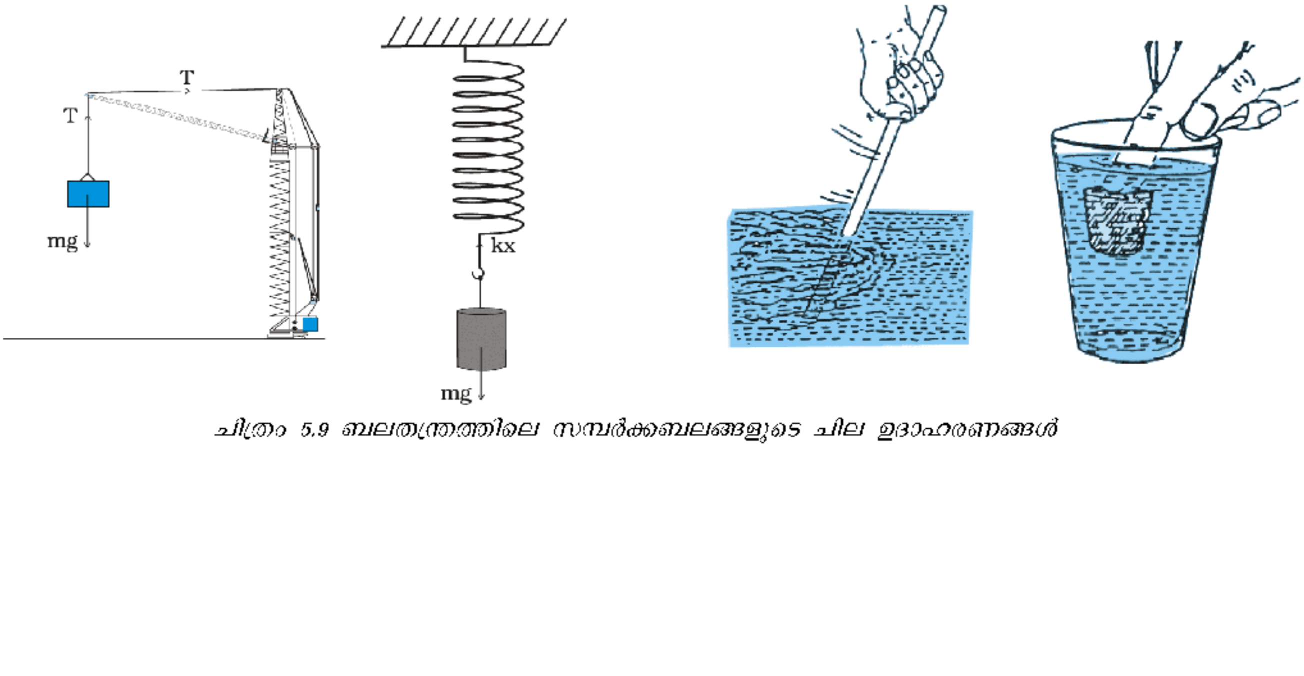
ബലതന്ത്രത്തിലെ മറ്റെല്ലാ ബലങ്ങളും സമ്പർക്കബലങ്ങളാണ്*. പേരു സൂചിപ്പിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു വസ്തു മറ്റൊരു വസ്തുവിനോട് സമ്പർക്കത്തിൽ വരുമ്പോഴാണ് (അത് ദ്രാവകമോ ഖരമോ ആകാം.) ഈ ബലങ്ങൾ സൃഷ്ടിക്കപ്പെടുന്നത്. വസ്തുക്കൾ സമ്പർക്കത്തിലിരിക്കുമ്പോൾ (ഉദാ:- മേശപ്പുറത്തുള്ള പുസ്തകം, ഒരു ദണ്ഡിനാൽ ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ദൃഢവസ്തുക്കളുടെ വ്യൂഹം, വിജാഗിരികളും മറ്റുതരത്തിലുള്ള താങ്ങുകളും) ഉണ്ടാക്കുന്ന പരസ്പരസമ്പർക്കബലങ്ങൾ (ഓരോ ജോടിവസ്തുക്കളിലും ഉള്ളത്) മൂന്നാം ചലനനിയമം

* എളുപ്പത്തിനു വേണ്ടി നാം ചാർജുള്ള വസ്തുക്കളെയും കാന്തികവസ്തുക്കളെയും കണക്കിലെടുക്കുന്നില്ല. ഇവയിൽ, ഗുരുത്വാകർഷണബലത്തെ കൂടാതെ, വൈദ്യുതബലമെന്നും കാന്തികബലമെന്നുമുള്ള സമ്പർക്കരഹിതബലങ്ങളും പ്രവർത്തിക്കുന്നുണ്ട്.

അനുസരിക്കുന്നു. സമ്പർക്കത്തിലുള്ള പ്രതലത്തിനു ലംബമായി പ്രവർത്തിക്കുന്ന സമ്പർക്കബലത്തിന്റെ ഘടകത്തെ ലംബമായ പ്രതിപ്രവർത്തനം (Normal reaction) എന്നു പറയുന്നു. സമ്പർക്കത്തിലുള്ള പ്രതലത്തിന് സമാന്തരമായി പ്രവർത്തിക്കുന്ന ഘടകത്തെ ഘർഷണം (Friction) എന്നു പറയുന്നു. ഖരപദാർഥങ്ങളും ദ്രവപദാർഥങ്ങളും തമ്മിൽ സമ്പർക്കത്തിൽ വരുമ്പോഴും സമ്പർക്കബലങ്ങൾ (Contact Forces) സൃഷ്ടിക്കപ്പെടാറുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു ഖരവസ്തുവിനെ ദ്രാവകത്തിൽ മുക്കിയിടുമ്പോൾ മുകളിലേക്കുള്ള പ്ലവക്ഷമബലവും ആദേശം ചെയ്യപ്പെടുന്ന ദ്രാവകത്തിന്റെ ഭാരവും തുല്യമായിരിക്കും. സമ്പർക്കബലങ്ങളുടെ മറ്റുദാഹരണങ്ങളാണ് വിസ്കസ്ബലം (viscous force), വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം (air resistance) മുതലായവ (ചിത്രം 5.9).

ഒരു സ്പ്രിങ് മൂലമുണ്ടാകുന്ന ബലവും ഒരു ചരടിലനുഭവപ്പെടുന്ന വലിവുബലവും സാധാരണ കാണപ്പെടാറുള്ള മറ്റു രണ്ടു ബലങ്ങളാണ്. സ്പ്രിങ്ങിനെ ഒരു ബാഹ്യബലത്താൽ വലിച്ചുനീട്ടുകയോ (extend) ഞെരുക്കുകയോ (compress) ചെയ്യുമ്പോൾ അതിൽ ഒരു പുനസ്ഥാപനബലം രൂപപ്പെടുന്നു. ഈ ബലം സാധാരണ സ്പ്രിങ്ങിനുണ്ടാകുന്ന നീളക്കൂടുതലിനോ (extension) ചുരുങ്ങലിനോ (compression) ആനുപാതികമാണ് (ചെറിയ സ്ഥാനാന്തരങ്ങൾക്ക്). സ്പ്രിങ് ബലം രേഖപ്പെടുത്തുന്നത് $F = -k\,x$ എന്നാണ്. ഇവിടെ x എന്നത് സ്ഥാനാന്തരവും k എന്നത് ബലസ്ഥിരാങ്കവുമാണ് (Force costant). വലിച്ചുനീട്ടപ്പെടാത്ത അവസ്ഥയിൽ നിന്നുള്ള സ്ഥാനാന്തരത്തിന് വിപരീതമായി ഈ ബലം പ്രവർത്തിക്കുന്നുവെന്നതിനെയാണ് നെഗറ്റീവ് ചിഹ്നം സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. വലിച്ചുനീട്ടാൻ കഴിയാത്ത (Inextensible) ഒരു ചരടിന്റെ ബലസ്ഥിരാങ്കത്തിന്റെ വില വളരെ ഉയർന്നതാണ്. ഒരു ചരടിൽ ഉണ്ടാകുന്ന പുനസ്ഥാപനബലമാണ് വലിവുബലം (Tension). ചരടിൽ എല്ലായിടത്തും വലിവുബലം T യുടെ മൂല്യം ഒന്നു തന്നെയായിരിക്കുമെന്നാണ് ധാരണ. വളരെ നിസ്സാരമാസുള്ള ചരടിൽ പോലും ഈ അനുമാനം കൃത്യമായി പാലിക്കപ്പെടും.

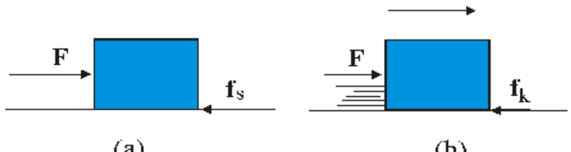
ഒന്നാം അധ്യായത്തിൽ പ്രകൃതിയിലെ നാല് അടിസ്ഥാനബലങ്ങളെക്കുറിച്ചു പഠിച്ചിരുന്നു. ഇവയിൽ ക്ഷീണബലവും പ്രബലബലവും ഇവിടെ നമ്മുടെ പരിഗണനയിലുള്ള മേഖലയിൽ പെടുന്നവയല്ല. ബലതന്ത്രത്തിന്റെ പശ്ചാത്തലത്തിൽ പ്രസക്തമായവ ഗുരുത്വബലവും (Gravitation force) വൈദ്യുതബലവും (Electric force) മാത്രമാണ്. മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ബലതന്ത്രത്തിലെ വ്യത്യസ്ത സമ്പർക്കബലങ്ങൾ അടിസ്ഥാനപരമായി ഉടലെടുക്കുന്നത് വൈദ്യുതബലങ്ങളിൽ നിന്നാണ്. ചാർജില്ലാത്തതും കാന്തികസ്വഭാവമല്ലാത്തതുമായ വസ്തുക്കളെക്കുറിച്ച നാം ബലതന്ത്രത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യുമ്പോൾ ഈ വസ്തുത അദ്ഭുതാവഹമായി തോന്നാം. സൂക്ഷ്മതലത്തിൽ എല്ലാ വസ്തുക്കളും ചാർജുള്ള കണങ്ങളാലാണ് (അറ്റോമിക കേന്ദ്രവും ഇലക്ട്രോണുകളും) നിർമ്മിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്. മാത്രമല്ല, വസ്തുക്കളുടെ ഇലാസ്തികത, തന്മാത്രകൾ തമ്മിലുള്ള കൂട്ടിയിടി മൂലമുള്ള ആഘാതം ഇവ മൂലം വിവിധതരം സമ്പർക്കബലങ്ങൾ ഉടലെടുക്കാറുണ്ട്. ഇവയെല്ലാം ആത്യന്തികമായി വിവിധ വസ്തുക്കളുടെ മൂലപദാർഥങ്ങളിലെ ചാർജുള്ള കണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വൈദ്യുതബലങ്ങളുടെ പരിണതഫലമാണെന്നു കണ്ടെത്താനാകും. ഇത്തരം ബലങ്ങളുടെ സൂക്ഷ്മതലത്തിലുള്ള ഉത്ഭവം വിശദീകരിക്കുന്നത് വളരെ സങ്കീർണമായ പ്രക്രിയയാണ്, കൂടാതെ സ്ഥൂലതലത്തിൽ (Macroscopic) ബലതന്ത്രത്തിലെ പ്രശ്നങ്ങളുടെ പരിഹാരം കണ്ടെത്താൻ ഇത് സഹായകവുമല്ല. അതുകൊണ്ടാണ് ഇത്തരം ബലങ്ങളെ അവയുടെ സവിശേഷ സ്വഭാവങ്ങളോടുകൂടി മറ്റൊരു വിഭാഗമായി ശാസ്ത്രം പരിഗണിക്കുന്നത്.



ചിത്രം 5.9 ബലതന്ത്രത്തിലെ സമ്പർക്കബലങ്ങളുടെ ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ

5.9.1 ഘർഷണം (Friction)

തിരശ്ചീനമായ ഒരു മേശപ്പുറത്തിരിക്കുന്ന 'm' മാസുള്ള വസ്തുവിന്റെ ഉദാഹരണത്തിലേക്ക് നമുക്ക് തിരിച്ചുവരാം. ഗുരുത്വബലം (mg) മേശ പ്രയോഗിക്കുന്ന ലംബമായ പ്രതിപ്രവർത്തനത്താൽ (N) റദ്ദുചെയ്യപ്പെടുന്നു. വസ്തുവിൽ തിരശ്ചീനമായി ഒരു ചെറിയ ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നുവെന്നു കരുതുക. പ്രയോഗിക്കുന്ന ഈ ചെറിയ ബലം, വസ്തുവിനെ ചലിപ്പിക്കാൻ പര്യാപ്തമല്ലെന്ന് അനുഭവത്തിൽനിന്ന് അറിയാവുന്നതാണ്. എന്നാൽ വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന F എന്ന ഈ ബലം (എത്ര ചെറുതായാലും) മാത്രമേ ബാഹ്യബലമായി ഉള്ളൂവെങ്കിലും, ചെറുതാണെങ്കിൽ കൂടിയും F/m എന്ന ത്വരണത്തോടുകൂടി വസ്തു സഞ്ചരിക്കണം. അതിൽ ഇവിടെ മറ്റേതോ ബലം ഉപയോഗിക്കണം. F എന്ന ബാഹ്യബലത്തിന് വിപരീതമായി തിരശ്ചീന ദിശയിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നതുമൂലം വസ്തുവിൻമേലുള്ള ആകെ ബാഹ്യബലം പൂജ്യമാവുകയും വസ്തു നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ തുടരുകയും ചെയ്യുന്നുവെന്ന് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം. മേശയുമായി സമ്പർക്കത്തിൽ വരുന്ന, വസ്തുവിന്റെ വശത്തിന് സമാന്തരമായി പ്രവർത്തിക്കുന്ന f_s, എന്ന ഈ ബലത്തിനെയാണ് ഘർഷണബലം (frictional force) അഥവാ ഘർഷണം (Friction) എന്നു പറയുന്നത് (ചിത്രം 5.10 (a)) ൽ ഇവിടെ 'S' എന്ന ചുവടെഴുത്ത്, ഗതികഘർഷണത്തിൽ (Kinetic friction) f_k യിൽ നിന്നു സറിതഘർഷണത്തെ വേർതിരിച്ചറിയാനാണ് ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നത് ഗതികഘർഷണത്തെക്കുറിച്ചു നാം തുടർന്നു വരുന്ന ഭാഗങ്ങളിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നതാണ് (ചിത്രം. 5.10 (b)).



ചിത്രം 5.10

സ്ഥിതഘർഷണവും നിരങ്ങൽഘർഷണവും (Static friction and sliding friction): (a) ഒരു വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന ആസന്നചലനത്തെ സ്ഥിതഘർഷണം പ്രതിരോധിക്കുന്നു. എപ്പോഴാണോ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബാഹ്യബലം സറിതഘർഷണത്തിന്റെ പരമാവധി പരിധി (Maximum limit of staticfriction) യേക്കാൾ കൂടുതലാകുന്നത്. അപ്പോൾ വസ്തു ചലിക്കാൻ തുടങ്ങുന്നു. (b) വസ്തു ചലിച്ചു തുടങ്ങിയാൽ നിരങ്ങൽ ഘർഷണം (Sliding friction) അഥവാ ഗതികഘർഷണം സമ്പർക്കത്തിലിരിക്കുന്ന രണ്ടു പ്രതലങ്ങൾ തമ്മിലുമുള്ള ആപേക്ഷികചലനത്തെ തടയുന്നു. ഗതികഘർഷണം സാധാരണയായി സ്ഥിതഘർഷണത്തിന്റെ പരമാവധി വിലയേക്കാൾ കുറവാണ്.

സറിതഘർഷണത്തിന് സ്വന്തമായി നിലനിൽപ്പില്ലെന്നുള്ളത് ശ്രദ്ധിക്കുക. ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നില്ലെങ്കിൽ സറിത ഘർഷണവും പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല. എപ്പോഴാണോ വസ്തുവിൻമേൽ ബലംപ്രയോഗിക്കുന്നത് അതേ നിമിഷത്തിൽത്തന്നെ സറിതഘർഷണം ഉടലെടുക്കുന്നു. പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം F കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് f_s ഉം കൂടുന്നു. ഇത് (ഒരു പ്രത്യേക പരിധിവരെ) പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലത്തിന് തുല്യവും വിപരീതവുമായിരിക്കുകയും വസ്തുവിനെ നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നില നിർത്തുകയും ചെയ്യും. തന്മൂലം ഇതിനെ സ്ഥിതഘർഷണം (static friction) എന്നു പറയുന്നു. സ്ഥിതഘർഷണം വസ്തുവിന്റെ ആസന്നചലനത്തെ (Impending motion) തടയുന്നു. ആസന്നചലനമെന്നത് ഘർഷണം ഇല്ലായിരുന്നെങ്കിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം മൂലം നടക്കാനിടയുള്ള (എന്നാൽ യഥാർഥത്തിൽ സംഭവിക്കാത്ത) ചലനമാണ്.

പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം ഒരു പ്രത്യേക പരിധി കഴിഞ്ഞാൽ വസ്തു ചലിക്കാൻ തുടങ്ങുമെന്ന് നമുക്ക് അനുഭവങ്ങളിൽനിന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. പരീക്ഷണങ്ങൾ മുഖേന സറിതഘർഷണത്തിന്റെ പരിധി $(f_s)_{max}$ എന്നത് സമ്പർക്കത്തിലുള്ള പരപ്പളവിനെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ലെന്നും എന്നാൽ ലംബമായ N (Normal force) ബലത്തിനനുസരിച്ച് വ്യത്യാസപ്പെടുന്നുവെന്നും അനുമാനിക്കാം. $(f_s)_{max}$ ന്റെ ഏകദേശ അളവിനെ

$$(f_s)_{max} = \mu_s N \qquad (5.13)$$

എന്നുള്ള സമവാക്യംകൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

μ_s എന്നാൽ സമ്പർക്കത്തിലുള്ള പ്രതലങ്ങളുടെ സ്വഭാവസവിശേഷതകളെ ആശ്രയിക്കുന്ന ആനുപാതിക സ്ഥിരാങ്കമാണ്. μ_s നെ സ്ഥിതഘർഷണഗുണാങ്കം (Coefficient of static friction) എന്നു പറയുന്നു.

സ്ഥിതഘർഷണനിയമം (The Law of Static Friction) നമുക്ക് താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം.

$$f_s \leq \mu_s N \qquad (5.14)$$

പ്രയോഗിക്കുന്ന F എന്ന ബലം $(f_s)_{max}$ നേക്കാൾ കൂടുന്നുവെങ്കിൽ വസ്തു പ്രതലത്തിനു മുകളിലൂടെ നിരങ്ങി നീങ്ങാൻ തുടങ്ങും. ഈ ആപേക്ഷികചലനം ആരംഭിക്കുമ്പോൾ സ്ഥിതഘർഷണത്തിന്റെ പരമാവധി വിലയായ $(f_s)_{max}$ -ൽ നിന്നു ഘർഷണബലം കുറയാൻ തുടങ്ങുന്നു. പരസ്പരസമ്പർക്കത്തിലുള്ള രണ്ടു പ്രതലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ആപേക്ഷികചലനത്തെ എതിർക്കുന്ന ഘർഷണബലത്തെയാണ് ഗതികഘർഷണം (Kinetic friction) അഥവാ നിരങ്ങൽ ഘർഷണം (Sliding friction) എന്നു പറയുന്നത്. ഇതിനെ f_k എന്നു പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു. ഗതികഘർഷണം സറിത ഘർഷണത്തെ പോലെ സമ്പർക്കത്തിലുള്ള പ്രതലങ്ങ

ളുടെ പരപ്പളവിനെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല എന്നു കാണാം. ഈ ബലം വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗത്തെ ആശ്രയിച്ചുള്ളതല്ല. സറിതഘർഷണത്തിന്റേതിനു സമാനമായ നിയമമാണ് നിരങ്ങൽ ഘർഷണവും അനുസരിക്കുന്നത്.

$$\mathbf{f}_k = \mu_k \mathbf{N} \qquad (5.15)$$

μ_k എന്നത് ഗതികഘർഷണ ഗുണാങ്കമാണ് (coefficient of kinetic friction). ഇത് സമ്പർക്കത്തിലിരിക്കുന്ന പ്രതലങ്ങളെ മാത്രം ആശ്രയിക്കുന്നു. മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ചതു പോലെ പരീക്ഷണങ്ങൾ മുഖേന μ_k എന്നത് μ_s നേക്കാൾ കുറവാണെന്ന് തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. ആപേക്ഷികചലനം തുടങ്ങിക്കഴിയുമ്പോൾ വസ്തുവിനു ലഭിക്കുന്ന ത്വരണം $(F-f_k)/m$ ആണ് എന്നു രണ്ടാം ചലനനിയമം മുഖേന നമുക്ക് ലഭിക്കും. സ്ഥിര പ്രവേഗത്തിൽ (Constant velocity) സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന് F f_k ആയിരിക്കും. വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം പിൻവലിക്കുമ്പോൾ വസ്തുവിന്റെ ത്വരണം $-f_k/m$ എന്നാവുകയും ക്രമേണ വസ്തു നിശ്ചലമാവുകയും ചെയ്യുന്നു.

ഗുരുത്വാകർഷണബലം, വൈദ്യുത–കാന്തികബലങ്ങൾ എന്നിവയുടേതുപോലെ മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച ഘർഷണ നിയമം ഒരു അടിസ്ഥാനതത്വമല്ല. ഘർഷണനിയമം അനുഭവസിദ്ധവും ഏകദേശം വസ്തുതാപരമായതുമാണ്. എന്നാൽ പ്രായോഗികതലത്തിൽ ബലതന്ത്രത്തിലെ കണക്കുകൂട്ടലുകൾ നടത്തുന്നതിന് ഇവ വളരെയധികം സഹായകമാണ്.

രണ്ടുവസ്തുക്കൾ തമ്മിൽ സമ്പർക്കത്തിൽ വരുമ്പോൾ അവയ്ക്കിടയിൽ ഒരു സമ്പർക്കബലം രൂപപ്പെടുന്നു. പ്രതലങ്ങൾക്കിടയിലുണ്ടാകാനിടയുള്ള ആസന്നചലനത്തെയോ ഉണ്ടാകുന്ന യഥാർഥ ആപേക്ഷികചലനത്തെയോ തടസ്സപ്പെടുത്തുന്ന, സമ്പർക്കത്തിലുള്ള പ്രതലങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായി പ്രവർത്തിക്കുന്ന സമ്പർക്കബലത്തിന്റെ ഘടകത്തെയാണ് ഘർഷണമെന്ന് നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത്. ചലനത്തെയല്ല, ആപേക്ഷികചലനത്തെ (Relative motion) യാണ് ഘർഷണം പ്രതിരോധിക്കുന്നതെന്ന് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കുക. ത്വരണത്തോടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു തീവണ്ടിയുടെ കംപാർട്ട്മെന്റിൽ ഇരിക്കുന്ന ഒരു പെട്ടി സങ്കൽപ്പിക്കുക. പെട്ടി, തീവണ്ടിയെ അപേക്ഷിച്ച് നിശ്ചലാവസ്ഥയിലാണെങ്കിലും യഥാർഥത്തിൽ അതിന് തീവണ്ടിയോടൊപ്പം ത്വരണം സംഭവിക്കുന്നുണ്ട്. പെട്ടിയുടെ ത്വരണത്തിനു കാരണമാകുന്ന ബലങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

തിരശ്ചീനദിശയിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നതും കണക്കിലെടുക്കാൻ കഴിയുന്നതുമായ ഒരേ ഒരു ബലം ഘർഷണ ബലം മാത്രമാണെന്നു സുവ്യക്തമാണ്. ഘർഷണമില്ലാതിരുന്നെങ്കിൽ തീവണ്ടിയുടെ തറ തെന്നിമാറുകയും പെട്ടി ജഡത്വം മൂലം അതിന്റെ ആദ്യ സ്ഥാനത്തുതന്നെ നിലനിൽക്കുകയും ഇതു മൂലം അത് വണ്ടിയുടെ പിറകിൽ ചെന്നിടിക്കുകയും ചെയ്യും. ഇപ്രകാരം നടക്കാനിടയുള്ള ആസന്നചലനത്തെ സറിതഘർഷണം f_s പ്രതിരോധിക്കുന്നു. സ്ഥിതഘർഷണം തീവണ്ടിക്കുള്ള അതേ ത്വരണംതന്നെ പെട്ടിക്കും പ്രദാനം ചെയ്ത് ട്രെയിനിനെ അപേക്ഷിച്ച് പെട്ടിയെ നിശ്ചലമായി നിലനിർത്തുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.7.: ട്രെയിനിന്റെ തറയിൽ വച്ചിരിക്കുന്ന പെട്ടി നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ തുടരണമെങ്കിൽ ട്രെയിനിനു ലഭിക്കാവുന്ന പരമാവധി ത്വരണമെത്രയെന്ന് കണക്കാക്കുക. പെട്ടിയും ട്രെയിനിന്റെ തറയും തമ്മിലുള്ള സറിതഘർഷണ ഗുണാങ്കം 0.15 ആണ്.

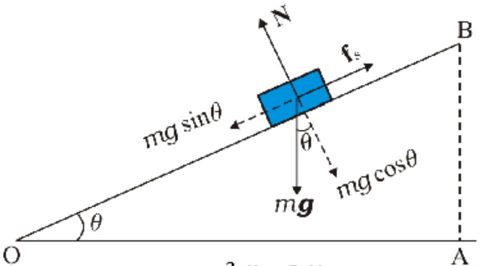
ഉത്തരം : പെട്ടിക്കുണ്ടാകുന്ന ത്വരണം സ്ഥിതഘർഷണം മൂലമാണ്. അതായത്

$ma \quad f_s \le \mu_s N \quad \mu_s\ m\,g$

$a \le \mu_s g$

$\therefore\ a_{max} \quad \mu_s g \quad 0.15 \times 10\ \mathrm{m\ s^{-2}} = 1.5\ \mathrm{m\ s^{-2}}$

ഉദാഹരണം 5.8: ചിത്രം 5.11 ശ്രദ്ധിക്കുക. ഒരു തിരശ്ചീനതലത്തിൽ ഒരു 4kg മാസ് സറിതിചെയ്യുന്നു. ഈ തലത്തെ ക്രമേണ ഉയർത്തി തിരശ്ചീനത്തിൽ നിന്നുമുള്ള ചരിവ് $\theta = 15^\circ$ ആകുമ്പോൾ മാസ് നിരങ്ങിനീങ്ങാൻ തുടങ്ങുന്നു. ഈ കട്ടയും പ്രതലവും തമ്മിലുള്ള സറിതഘർഷണ ഗുണാങ്കം എത്ര?



ചിത്രം 5.11

ഉത്തരം: ചരിവു തലത്തിൽ നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ സറിതി ചെയ്യുന്ന 'm' മാസുള്ള കട്ടയിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലങ്ങൾ ഇവയാണ് (i) താഴേക്കു ലംബമായി പ്രവർത്തിക്കുന്ന ഭാരം mg (ii) പ്രതലം കട്ടയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ലംബമായ പ്രതിപ്രവർത്തനം N (iii) ആസന്നചലനത്തെ പ്രതിരോധിക്കുന്ന സറിതഘർഷണബലം f_s. സന്തുലനാവസ്ഥയിൽ ഈ എല്ലാ ബലങ്ങളുടെയും പരിണതഫലം പൂജ്യമാണ്. 'mg' എന്ന ഭാരത്തെ രണ്ടു ദിശയിലുള്ള ഘടകങ്ങളായി ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ വിശ്ലേഷിക്കുമ്പോൾ (resolve) $m\,g \sin\theta \quad f_s$, $m\,g \cos\theta \quad N$ സ്വയം ക്രമീകരി

ക്കാൻ കഴിയുന്ന f_s എന്ന ഘർഷണബലം θ θ_{max} ആകുന്നതുവരെ θ കൂടുന്നതിനോടൊപ്പം കൂടുന്നു. θ θ_{max} ആകുമ്പോൾ f_s ന് പരമാവധി വില ലഭിക്കുന്നു.

$$(f_s)_{max} = \mu_s N.$$

അതുകൊണ്ട്

$$\tan \theta_{max} \quad \mu_s \text{ അതായത് } \theta_{max} \quad \tan^{-1} \mu_s$$

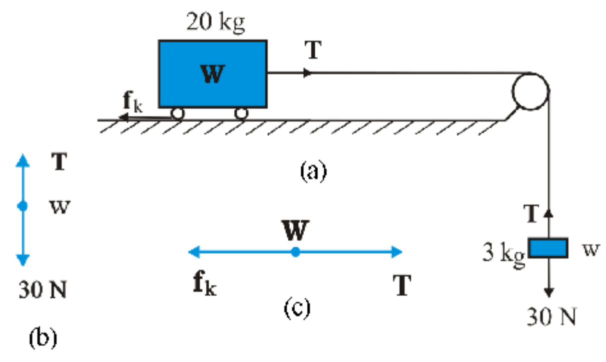
θ എന്നത് θ_{max} നേക്കാൾ അൽപ്പം കൂടുതലാകുമ്പോൾ കട്ടയിൽ ഒരു ചെറിയ സഫലബലം പ്രവർത്തിക്കുകയും കട്ട നിരങ്ങിനീങ്ങാൻ തുടങ്ങുകയും ചെയ്യും. θ_{max} എന്നത് μ_s നെ മാത്രം ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നുവെന്നും അത് കട്ടയുടെ മാസിനെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ലെന്നും ശ്രദ്ധിക്കുക.

θ_{max} = 15°, ആയാൽ

μ_s = tan 15°

μ_s = 0.27 ◀

▶ **ഉദാഹരണം 5.9 :** ചിത്രം 5.12 (a) യിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന കട്ടയും ട്രോളിയും ചേർന്ന വ്യൂഹത്തിന്റെ ത്വരണം എത്രയെന്ന് കണക്കാക്കുക. ട്രോളിയും പ്രതലവും തമ്മിലുള്ള ഗതികഘർഷണഗുണാങ്കം 0.04 ആണ്. ചരടിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന വലിവുബലം എത്ര? ($g = 10 ms^{-2}$ എന്നു കരുതുക) ചരടിന്റെ മാസ് പരിഗണിക്കേണ്ടതില്ല.



ചിത്രം 5.12

ഉത്തരം: കപ്പി മിനുസമുള്ളതും ചരടു വലിച്ചു നീട്ടാനാവാത്തതും (Inextensible) ആണെങ്കിൽ 3kg മാസുള്ള കട്ടക്കും 20kg മാസുള്ള ട്രോളിക്കും ലഭിക്കുന്ന ത്വരണത്തിന്റെ പരിമാണം തുല്യമായിരിക്കും. കട്ടയുടെ ചലനത്തിൽ രണ്ടാം ചലനനിയമം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ (ചിത്രം 5.12 (b))

$$30 - T = 3a$$

ട്രോളിയുടെ ചലനത്തിൽ രണ്ടാം ചലനനിയമം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ (ചിത്രം 5.12 (c))

$$T - f_k = 20\ a.$$

അപ്പോൾ $f_k = \mu_k N$,

ഇവിടെ $\mu_k = 0.04$,

$N = 20 \times 10 = 200$ N.

അപ്പോൾ ട്രോളിയുടെ ചലനത്തിനുള്ള സമവാക്യം

$T - 0.04 \times 200 = 20\ a$ അല്ലെങ്കിൽ

$T - 8 = 20a$. എന്നാകുന്നു.

ഈ സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

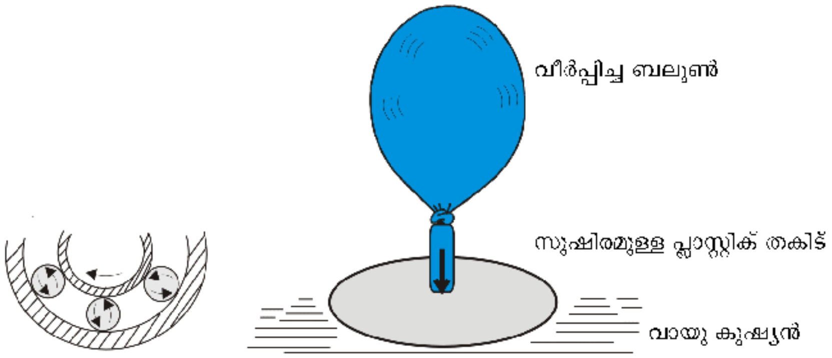
$$a = \frac{22}{23} \text{ m s}^{-2} = 0.96 \text{ m s}^{-2}$$

T = 27.1 N. ◀

ഉരുളൽ ഘർഷണം (Rolling Friction)

ഒരു തിരശ്ചീനപ്രതലത്തിലൂടെ തെന്നിമാറാതെ ഉരുളുന്ന (Rolling without slipping) വളയത്തെയോ ഗോളത്തെയോ പോലുള്ള വസ്തുക്കളിൽ ഘർഷണം അനുഭവപ്പെടുന്നില്ലെന്ന് തത്വത്തിൽ പറയാം. ഓരോ നിമിഷവും വസ്തുവും പ്രതലവും തമ്മിൽ സമ്പർക്കത്തിൽ വരുന്നത് ഒരേ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രമാണ്. ഈ ബിന്ദുവിന് പ്രതലത്തെ അപേക്ഷിച്ച് ചലനമുണ്ടാകുന്നുമില്ല. പരിപൂർണമായും സാങ്കൽപ്പികമായ ഇത്തരം സന്ദർഭത്തിൽ ഗതികഘർഷണമോ സ്ഥിതഘർഷണമോ പൂജ്യമായിരിക്കുകയും വസ്തു സ്ഥിരപ്രവേഗത്തോടെ ഉരുളൽ തുടരുകയും ചെയ്യും. എന്നാൽ പ്രായോഗികമായി ഇത്തരത്തിലല്ല സംഭവിക്കാറുള്ളത്. വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തിന് (ഉരുളലിന്) പ്രതിരോധം അനുഭവപ്പെടാറുണ്ട്. അതായത്, വസ്തുവിന്റെ ഉരുളൽ തുടരുന്നതിന് ബലം പ്രയോഗിക്കേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്. ഒരു നിശ്ചിത ഭാരത്തിന്, ഉരുളൽ ഘർഷണം സ്ഥിതഘർഷണത്തെയോ നിരങ്ങൽ ഘർഷണത്തെയോ അപേക്ഷിച്ച് വളരെ ചെറുതാണ്. ഉരുളൽഘർഷണത്തിന്റെ മൂല്യം മറ്റു രണ്ടു ഘർഷണങ്ങളുടെയും മൂല്യങ്ങളേക്കാൾ രണ്ടോ മൂന്നോ മടങ്ങ് ചെറുതാണ്. ഇതുമൂലമാണ് ചക്രങ്ങളുടെ കണ്ടുപിടിത്തം മനുഷ്യരാശിയുടെ ചരിത്രത്തിലെ ഒരു പ്രധാന നാഴികക്കല്ലായി മാറിയത്.

സ്ഥിതഘർഷണത്തിന്റെയും നിരങ്ങൽ ഘർഷണത്തിന്റെയും ഉദ്ഭവത്തിൽ നിന്ന് അൽപ്പം വ്യത്യസ്തമാണെങ്കിലും ഉരുളൽഘർഷണത്തിന്റെ ഉറവിടവും സങ്കീർണമാണ്. വസ്തുക്കൾ ഉരുളുമ്പോൾ സമ്പർക്കത്തിൽ വരുന്ന പ്രതലങ്ങൾക്ക് നൈമിഷികമായി ഒരു ചെറിയ രൂപമാറ്റം സംഭവിക്കുന്നു. തന്മൂലം വസ്തു പ്രതലവുമായി സമ്പർക്കത്തിൽ വരുന്നത് ഒരു ബിന്ദുവിനു പകരം ഒരുചെറിയ പരപ്പളവ് ആണ്. ഇതിന്റെ ഫലമായി പ്രതലത്തിനു സമാന്തരമായുള്ള സമ്പർക്കബലത്തിന്റെ ഘടകം ചലനത്തെ പ്രതിരോധിക്കുന്നു.



(a) (b)

ചിത്രം 5.13 ഘർഷണം ലഘൂകരിക്കാനുള്ള വിവിധ മാർഗങ്ങൾ
(a) യന്ത്രത്തിന്റെ ചലിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾക്കിടയിൽ ബാൾ ബെയറിങ്ങുകൾ സ്ഥാപിക്കുന്നത്.
(b) ആപേക്ഷികചലനത്തിലുള്ള പ്രതലങ്ങൾക്കിടയിൽ വായുവിനെ ഞെരിച്ചമർത്തി ഒരു പാളി പോലെ നിലനിർത്തുന്നത്.

നാം പലപ്പോഴും ഘർഷണത്തെ അനഭിലഷണീയമായ കാര്യമായാണ് കണക്കാക്കാറുള്ളത്. യന്ത്രങ്ങളിലെ ചലിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളിലേതുപോലെ പല സന്ദർഭങ്ങളിലും ഘർഷണം ദൂഷ്യഫലങ്ങളാണ് നൽകുന്നത്. ഇവിടെ ഘർഷണം ആപേക്ഷികചലനത്തെ തടയുകയും ഇത് ഊർജത്തെ താപോർജത്തിന്റെയും മറ്റും രൂപത്തിൽ പാഴാക്കിക്കളയുകയും ചെയ്യുന്നു. ഒരു യന്ത്രത്തിലുണ്ടാകുന്ന ഗതികഘർഷണം കുറക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗം സ്നേഹകങ്ങളുടെ (Lubricants) ഉപയോഗമാണ്. ഘർഷണം കുറക്കുന്നതിനുള്ള മറ്റൊരു മാർഗം ചലിക്കുന്ന യന്ത്രഭാഗങ്ങൾക്കിടയിൽ ബാൾ ബെയറിങ്ങുകൾ (ball bearings) ഉപയോഗിക്കുക്കയന്നതാണ് (ചിത്രം 5.13 (a)). സമ്പർക്കത്തിലുള്ള പ്രതലവും ബാൾ ബെയറിങ്ങുകളും തമ്മിലുള്ള ഉരുളൽഘർഷണം വളരെ കുറവായതിനാൽ ഊർജം പാഴായിപ്പോകുന്നത് കുറയുന്നു. രണ്ടു ഖരപ്രതലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ഘർഷണം കുറക്കുന്നതിന് കനം കുറഞ്ഞ ഒരു പാളിപോലെ വായുവിനെ രണ്ടു പ്രതലങ്ങൾക്കിടയിൽ നിലനിർത്തുന്നത് ഫലപ്രദമായ മറ്റൊരു മാർഗ്ഗമാണ്. (ചിത്രം 5.13.(a)).

പ്രായോഗികഘട്ടങ്ങളിൽ പലപ്പോഴും ഘർഷണം വളരെ അത്യാവശ്യമാണ്. ഊർജം പാഴാക്കുമെങ്കിലും ആപേക്ഷികചലനത്തെ വളരെ പെട്ടെന്നു തടഞ്ഞുനിർത്താൻ സഹായിക്കുന്നത് ഗതികഘർഷണമാണ്. വാഹനങ്ങളിലും യന്ത്രങ്ങളിലുമുള്ള ബ്രേക്കുകൾ ഗതികഘർഷണം മൂലമാണ് പ്രവർത്തിക്കുന്നത്. സമാനമായി സ്ഥിതഘർഷണത്തിനും നിത്യജീവിതത്തിൽ വളരെ പ്രാധാന്യമുണ്ട്. നമുക്ക് നടക്കാൻ സാധിക്കുന്നത് ഘർഷണം മൂലമാണ്. വഴുക്കലേറിയ ഒരു റോഡിലൂടെ ഒരു കാറിന് സഞ്ചരിക്കാൻ സാധ്യമല്ല. എന്നാൽ സാധാരണ റോഡിൽ ടയറുകളും റോഡും തമ്മിലുള്ള ഘർഷണം കാറിന് ത്വരണം നൽകുന്നതിനാവശ്യമായ ബാഹ്യബലമായി പ്രവർത്തിക്കുന്നു.

5.10 വർത്തുളചലനം (Circular Motion)

'R' ആരമുള്ള വൃത്തത്തിലൂടെ v എന്ന സമവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന ത്വരണം v^2/R ആണെന്നും ഇതിന്റെ ദിശ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്കാണെന്നും നാം 4-ാം അധ്യായത്തിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. രണ്ടാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് ഈ ത്വരണം നൽകാൻ സഹായിക്കുന്ന ബലം f_c എന്നത്

$$f_c = \frac{m v^2}{R} \quad (5.16)$$

ആണെന്നു കണക്കാക്കാം.

ഇവിടെ 'm' എന്നത് വസ്തുവിന്റെ മാസാണ്. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്കു പ്രവർത്തിക്കുന്ന ഈ ബലത്തെ അഭികേന്ദ്രബലം (Centripetal force) എന്നു പറയുന്നു. ഒരു കല്ലിനെ ചരടിൽകെട്ടി കറക്കുമ്പോൾ ചരടിലുണ്ടാകുന്ന വലിവാണ് അഭികേന്ദ്രബലം നൽകുന്നത്. സൂര്യനു ചുറ്റും പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ഗ്രഹത്തിന്റെ ചലനത്തിനാവശ്യമായ അഭികേന്ദ്രബലം നൽകുന്നത് ആ ഗ്രഹത്തിൽ സൂര്യൻ പ്രയോഗിക്കുന്ന ഗുരുത്വബലമാണ്. തിരശ്ചീനമായ ഒരു റോഡിലെ വൃത്താകാരമായ വളവിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന കാറിന് ആവശ്യമായ അഭികേന്ദ്രബലം നൽകുന്നത് ഘർഷണബലമാണ്.

നിരപ്പായ റോഡിലൂടെയും ബാങ്ക്ഡ് റോഡിലൂടെയുമുള്ള (Banked road) കാറിന്റെ വർത്തുളചലനം ചലനനിയമങ്ങളുടെ രസകരമായ പ്രയോഗസാധ്യത നൽകുന്നു.

നിരപ്പായ റോഡിലൂടെയുള്ള കാറിന്റെ ചലനം (Motion of a car on a level road)

കാറിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന മൂന്നുബലങ്ങൾ (ചിത്രം 5.14 (a))

(i) കാറിന്റെ ഭാരം mg

(ii) ലംബമായ പ്രതിപ്രവർത്തനം- N

(iii) ഘർഷണബലം f എന്നിവയാണ്.

ലംബമായ ദിശയിൽ കാറിന് ത്വരണം സംഭവിക്കാത്തതിനാൽ

$$N - mg = 0$$

$$N = mg \qquad (5.17)$$

റോഡിന്റെ പ്രതലത്തിലൂടെയുള്ള വർത്തുളചലനത്തിന് അഭികേന്ദ്രബലം ആവശ്യമാണ്. റോഡും കാറി ന്റെ ടയറുകളും തമ്മിലുള്ള സമ്പർക്കബലത്തിന്റെ പ്രതലത്തിലൂടെയുള്ള ഘടകമാണ് ഇത് നൽകുന്നത്. നിർവചനമനുസരിച്ച് ഇതിനെയാണ് നാം ഘർഷണബലം എന്നു പറയുന്നത്. സ്ഥിതഘർഷണമാണ് അഭികേന്ദ്രത്വരണം നൽകുന്നതെന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക. വർത്തുളപാതയിൽ നിന്നു കാർ അകന്നുപോകുന്ന ആസന്നചലനത്തെ സറിതഘർഷണം തടയുന്നു. 5.14, 5.16 എന്നീ സമവാക്യങ്ങളുടെ സഹായത്തോടെ നമുക്ക്

$$f \le \mu_s N = \frac{mv^2}{R}$$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

$$v^2 \le \frac{\mu_s RN}{m} = \mu_s Rg \quad [\because N = mg]$$

ഇത് കാറിന്റെ മാസിനെ ആശ്രയിച്ചുള്ളതല്ല. ഇതു സൂചിപ്പിക്കുന്നത് μ_s ന്റെയും R ന്റെയും തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു വിലക്ക് വർത്തുളചലനം സാധ്യമാകുന്നതിനായി കാറിനുവേണ്ട പരമാവധി വേഗം

$$v_{max} = \sqrt{\mu_s Rg} \qquad (5.18)$$ എന്നാണ്.

ബാങ്ക്ഡ് റോഡിലൂടെയുള്ള കാറിന്റെ ചലനം (Motion of a car on a banked road)

റോഡ് ബാങ്ക്ഡ് ആണെങ്കിൽ കാറിന്റെ വർത്തുളചലനത്തിൽ ഘർഷണബലത്തിന്റെ പ്രഭാവം കുറക്കാൻ സാധിക്കും (ചിത്രം 5.14 (b)).

ലംബമായ ദിശയിൽ ത്വരണം ഉണ്ടാകാത്തതിനാൽ ഈ ദിശയിലുള്ള സഫലബലം പൂജ്യമായിരിക്കും.

അതിനാൽ $N \cos\theta = mg + f \sin\theta$ (5.19a)

N ന്റെയും f ന്റെയും തിരശ്ചീനദിശയിലുള്ള ഘടകങ്ങളാണ് ആവശ്യമായ അഭികേന്ദ്രബലം പ്രദാനം ചെയ്യുന്നത്. അതിനാൽ,

$$N \sin\theta + f \cos\theta = \frac{mv^2}{R} \qquad (5.19b)$$

എന്നാൽ $f \le \mu_s N$

v_{max} ലഭിക്കുന്നതിന് നമുക്ക്

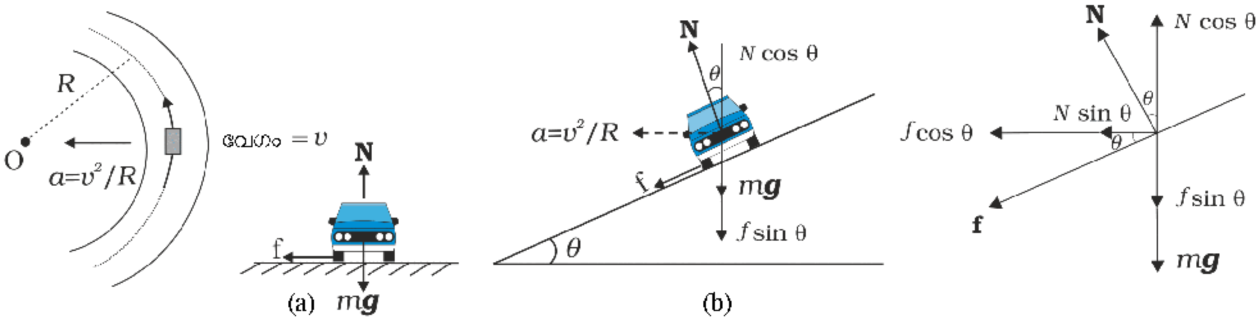
$f = \mu_s N$ എന്ന് ഉപയോഗിക്കാം.

അപ്പോൾ സമവാക്യം 5.19(a), 5.19(b) ഇവ

$$N \cos\theta = mg + \mu_s N \sin\theta \qquad (5.20a)$$

$$N \sin\theta + \mu_s N \cos\theta = mv^2/R \qquad (5.20b)$$

എന്നിങ്ങനെയായി മാറുന്നു.



ചിത്രം 5.14 കാറിന്റെ വർത്തുളചലനം (a) നിരപ്പായ റോഡിലൂടെ (b) ബാങ്ക്ഡ് റോഡിലൂടെ

സമവാക്യം 5.20(a) യിൽനിന്ന്

$$N = \frac{mg}{cos\theta - \mu_s sin\theta}$$ എന്നു ലഭിക്കും.

N ന്റെ വില സമവാക്യം 5.20(b) യിൽ ആരോപിക്കുമ്പോൾ

$$\frac{mg\left(sin\theta + \mu_s\ cos\theta\right)}{cos\theta - \mu_s\ sin\theta} = \frac{mv^2_{max}}{R}$$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

അല്ലെങ്കിൽ $$v_{max} = \left(Rg\frac{\mu_s + tan\theta}{1 - \mu_s\, tan\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5.21)$$

ആയിരിക്കും. ഈ സമവാക്യത്തെ സമവാക്യം 5.18 മായി താരതമ്യപ്പെടുത്തിയാൽ ഒരു ബാങ്ക്ഡ്റോഡിൽ കാറിനു ലഭിക്കുന്ന പരമാവധി വേഗം നിരപ്പായ റോഡിലൂടെയുള്ളതിനേക്കാൾ കൂടുതലാണെന്നു കാണാം.

$\mu_s = 0$ ആകുമ്പോൾ സമവാക്യം (5.21), ൽ നിന്നും

$v_o = (R\ g\ \ \tan\theta\ )^{1/2}$ (5.22) ആകുന്നു.

ഈ വേഗത്തിനാവശ്യമായ അഭികേന്ദ്രബലം നൽകുന്നതിന് ഘർഷണബലത്തിന്റെ ആവശ്യമില്ല. എന്നാൽ ഈ വേഗത്തിൽ ഒരു ബാങ്ക്ഡ് റോഡിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നത് കാറിന്റെ ടയറുകൾക്ക് തേയ്മാനം ഉണ്ടാക്കുന്നു. $v < v_o$ ആണെങ്കിൽ ഘർഷണബലം ചരിവിലൂടെ മുകളിലേക്കായിരിക്കുമെന്നും കാർ നിർത്തിയിടണമെങ്കിൽ $\tan\theta \le \mu_s$ ആയിരിക്കണമെന്നുമുള്ള വസ്തുതകൾ ഈ സമവാക്യം നമുക്ക് വ്യക്തമാക്കിത്തരുന്നു.

▶**ഉദാഹരണം 5.10 :** നിരപ്പായ ഒരു റോഡിലൂടെ 18km/hr വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന സൈക്കിൾ യാത്രക്കാരൻ 3 മീറ്റർ ആരമുള്ള ഒരു കൊടുംവളവിലൂടെ വേഗം കുറക്കാതെ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ടയറും റോഡും തമ്മിലുള്ള സ്ഥിതഘർഷണഗുണാങ്കം 0·1 ആണ്. വളവിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ സൈക്കിൾ യാത്രക്കാരൻ തെന്നിമാറാൻ സാധ്യതയുണ്ടോ?

ഉത്തരം: ബാങ്ക്ഡ് അല്ലാത്ത ഒരു റോഡിലെ വളവിലൂടെ സൈക്കിൾയാത്രക്കാരൻ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ തെന്നിമാറാതിരിക്കാൻ ആവശ്യമായ അഭികേന്ദ്രബലം നൽകുന്നത് ഘർഷണബലം മാത്രമാണ്. വേഗം കൂടുതലാണെങ്കിലോ, കൊടുംവളവ് (അതായത് ആരം വളരെ കുറവ്) ആണെങ്കിലോ അല്ലെങ്കിൽ ഇവ രണ്ടുമായാലോ ആവശ്യമായ അഭികേന്ദ്രബലം നൽകുന്നതിന് ഘർഷണബലം പര്യാപ്തമല്ല. ഇതുമൂലം സൈക്കിൾ യാത്രക്കാരൻ വഴുതിവീഴുന്നു. സൈക്കിൾ യാത്രക്കാരൻ തെന്നിമാറാതിരിക്കേണ്ടതിനുള്ള നിബന്ധന സമവാക്യം 5.18ൽ നിന്ന്

$v^2 \le \mu_s R\, g$ എന്നു കണക്കാക്കാം.

R= 3m, g = 9.8ms^{-2}, μ_s 0.1. അതായത്

$\mu_s R\ g\ = 2.94\text{m}^2\text{s}^{-2}$, $\therefore$ $v = 18km/h = 5ms^{-1}$

അതായത് $v^2 = 25\text{m}^2\text{s}^{-2}$

ഇത് മുകളിൽ പറഞ്ഞ നിബന്ധന അനുസരിക്കുന്നില്ല. അതിനാൽ വളവിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ സൈക്കിൾ യാത്രക്കാരൻ തെന്നിമാറും. ◀

▶**ഉദാഹരണം 5.11 :** വൃത്താകാരമായ ഒരു റേസ് ട്രാക്കിന്റെ ആരം 300 മീറ്ററും ട്രാക്കിന്റെ ചരിവ് 15" യുമാണ്. ഒരു റേസ് കാറിന്റെ ചക്രങ്ങളും റോഡും തമ്മിലുള്ള ഘർഷണഗുണാങ്കം 0.2 ആണെങ്കിൽ
(a) കാറോട്ടമത്സരം നടത്തുന്നതിനുള്ള ഏറ്റവും അഭിലഷണീയമായ വേഗം എത്ര?
(b) തെന്നിപ്പോവാതെ സഞ്ചരിക്കാൻ അനുവദനീയമായ പരമാവധി വേഗം എത്ര?

ഉത്തരം : ബാങ്ക്ഡ് (banked) റോഡിൽ ലംബമായ പ്രതിപ്രവർത്തനത്തിന്റെയും ഘർഷണബലത്തിന്റെയും തിരശ്ചീനഘടകം വഴുതിവീഴാതെ വൃത്താകൃതിയിലുള്ള വളവിലൂടെ സഞ്ചരിക്കാൻ കാറിനെ സഹായിക്കുന്ന അഭികേന്ദ്രബലം നൽകുന്നു. അഭിലഷണീയമായ വേഗത്തിൽ (optimum speed) സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ ലംബമായ പ്രതിപ്രവർത്തനത്തിന്റെ ഘടകം ആവശ്യമായ അഭികേന്ദ്രബലം നൽകാൻ പര്യാപ്തമാണ്. അതിനാൽ ഘർഷണബലത്തിന്റെ ആവശ്യമില്ല.
സമവാക്യം 5.22 അനുസരിച്ച് അഭിലഷണീയ വേഗം

v_O $(R\ g\ \tan\ \theta)^{1/2}$

ഇവിടെ R $300m$, θ 15^0, g $9.8\ m\ s^{-2}$

അപ്പോൾ v_O $28.1\ m\ s^{-1}$

സമവാക്യം 5.21 - ൽ നിന്ന് അനുവദനീയമായ പരമാവധി വേഗം v_{max} എന്നത്

$$v_{max} = \left(R\,g\frac{\mu_s + \tan\theta}{1 - \mu_s \tan\theta}\right)^{1/2} = 38.1\ \text{m s}^{-1}$$ ◀

5.11 ബലതന്ത്രത്തിലെ പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നവിധം (Solving problems in mechanics)

ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം പഠിച്ച മൂന്നു ചലനനിയമങ്ങളും ബലതന്ത്രത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനനിയമങ്ങളാണ്. ഇപ്പോൾ നമുക്ക് ബലതന്ത്രത്തിലെ വളരെ വ്യത്യസ്തമായ വിവിധ പ്രശ്നങ്ങൾക്കുള്ള ഉത്തരങ്ങൾ കണ്ടെത്താൻ സാധിക്കും. ബലതന്ത്രത്തിലെ മാതൃകാപരമായ ഒരു പ്രശ്നത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്ന ബലങ്ങൾ ഒരു വസ്തുവിൽ മാത്രം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നതരത്തിലുള്ളതല്ല. മിക്കപ്പോഴും, പരസ്പരം ബലംപ്രയോഗിക്കുന്ന വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളുടെ ഒരു കൂട്ടത്തെ നാം പരിഗണിക്കേണ്ടതായി വരും. ഇതിനു പുറമേയാണ് ഈ കൂട്ടത്തിലെ ഓരോ വസ്തുവിലും അനുഭവപ്പെടുന്ന ഗുരുത്വാകർഷണബലം. ഉത്തരത്തിലുള്ള പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിക്കുമ്പോൾ ഈ കൂട്ടത്തിലെ ഏതു ഭാഗത്തെയും നമുക്ക് പ്രത്യേകമായി പരിഗണിച്ച് ചലനനിയമങ്ങൾ ആ ഭാഗത്തിൽ പ്രയോഗിക്കേണ്ടിവരും. ഈ ഭാഗത്തിൽ മറ്റുള്ള ഭാഗങ്ങളിൽനിന്നു പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന എല്ലാ ബലങ്ങളെയും നാം പരിഗണിക്കേണ്ട

തുണ്ട്. നാം പരിഗണിച്ച പ്രത്യേക ഭാഗത്തെ വ്യൂഹം (System) എന്നും അവശേഷിക്കുന്ന ഭാഗത്തെ (ബലത്തിന്റെ കാരണങ്ങൾ ഉൾപ്പെടെ) ചുറ്റുപാട് (Environment) എന്നും വിളിക്കുന്നു. ഉദാഹരണങ്ങളിൽ അവതരിപ്പിച്ചിരുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നതിന് നാം ഈ മാർഗമാണ് അവലംബിച്ചത്. ബലതന്ത്രത്തിലെ മാതൃകാപരമായ ഒരു പ്രശ്നം കൃത്യമായി പരിഹരിക്കുന്നതിന് ചുവടെ ചേർത്തിട്ടുള്ള വിവിധ ഘട്ടങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കേണ്ടി വരും.

1. തന്നിരിക്കുന്ന പ്രശ്നത്തിലെ വസ്തുക്കൾ, ബന്ധങ്ങൾ, ലിങ്കുകൾ മുതലായവ പൂർണമായും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന രേഖാചിത്രം വരക്കുക.
2. കൂട്ടത്തിലെ സൗകര്യപ്രദമായ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭാഗത്തെ വ്യൂഹമായി പരിഗണിക്കുക.
3. ഈ വ്യൂഹത്തിന്റെയും തന്നിരിക്കുന്ന കൂട്ടത്തിലെ അവശേഷിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ വ്യൂഹത്തിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന എല്ലാ ബലങ്ങളുടെയും ചിത്രം പ്രത്യേകം വരക്കുക. വ്യൂഹത്തിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന മറ്റു ബലങ്ങളെയും ചിത്രത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്തുക. ***(ചുറ്റുപാടിന്മേൽ വ്യൂഹം പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലത്തെ ചിത്രത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്താൻ പാടില്ല.)*** ഇത്തരത്തിലുള്ള ഒരു ചിത്രത്തെയാണ് സ്വതന്ത്രബലചിത്രം (Free body diagram) എന്നു പറയുന്നത്. (ഇതിന്റെ അർഥം നമ്മുടെ പരിഗണനയിലിരിക്കുന്ന വ്യൂഹത്തിൽ ഒരു പരിണതബലവും പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നില്ല എന്നല്ല.)
4. പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നതോ പ്രവർത്തിക്കുന്നുവെന്ന് നമുക്ക് ഉറപ്പുള്ളതോ ആയ (ഉദാ:- ഒരു ചരടിന്റെ നീളത്തിലൂടെ പ്രവർത്തിക്കുന്ന വലിവ്) എല്ലാ ബലങ്ങളെയും കുറിച്ചുള്ള വിവരങ്ങൾ (അവയുടെ അളവും ദിശയും) സ്വതന്ത്രബലചിത്രത്തിൽ (Freebody diagram) ഉൾപ്പെടുത്തണം. ബാക്കിയുള്ളവയെല്ലാം അജ്ഞാതമായ ബലങ്ങളായി കണക്കാക്കി അവയെ ചലനനിയമങ്ങളുടെ സഹായത്താൽ കണ്ടെത്താവുന്നതാണ്.
5. വ്യൂഹത്തെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന് ആവശ്യമാണെങ്കിൽ മറ്റൊരു രീതിയും പരിഗണിക്കാം. ഇതിൽ ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാംചലനനിയമം ഉപയോഗിക്കേണ്ടി വരും. A എന്ന വസ്തുവിന്റെ സ്വതന്ത്രബല ചിത്രത്തിൽ, B എന്ന വസ്തു A യിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം **F** എന്നു സൂചിപ്പിച്ചാൽ B യുടെ സ്വതന്ത്രബലചിത്രത്തിൽ A എന്ന വസ്തു B യിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം **F** എന്നു സൂചിപ്പിക്കണം. താഴെ പറയുന്ന ഉദാഹരണം ഇത് കൂടുതൽ സ്പഷ്ടമാക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 5.12. : ചിത്രം 5.15 ശ്രദ്ധിക്കുക. 2kg മാസുള്ള ഒരു തടിക്കഷണം മൃദുവും തിരശ്ചീനവുമായ തറയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. ഈ കട്ടയുടെ മേൽ 25kg മാസുള്ള ഒരു ഇരുമ്പു സിലിണ്ടർ വക്കുമ്പോൾ തറ ക്രമമായി വളയുകയും തടിക്കഷണവും സിലിണ്ടറും 0.1 $m\,s^{-2}$. ത്വരണത്തോടുകൂടി താഴേക്കുപോകുകയും ചെയ്യുന്നു. തറ വഴങ്ങുന്നതിന് (yield) (a) മുമ്പും (b) പിമ്പും തടിക്കഷണം തറയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം എത്ര? $g = 10\,m\,s^{-2}$ എന്നു കരുതുക. ഈ പ്രശ്നത്തിലെ പ്രവർത്തന–പ്രതിപ്രവർത്തന ജോടികൾ തിരിച്ചറിയുക.

ഉത്തരം:

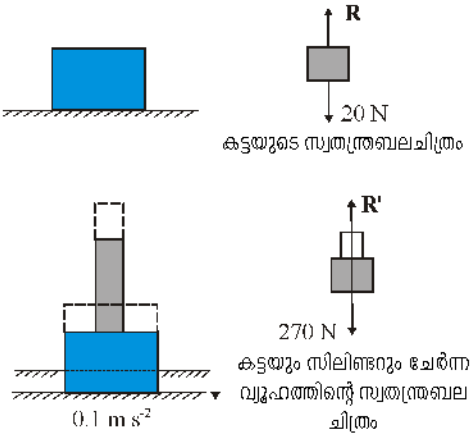
(a) തടിക്കഷണം തറയിൽ നിശ്ചലമായാണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്. ഇതിന്റെ സ്വതന്ത്രബലചിത്രത്തിൽ കട്ടയിലുള്ള രണ്ടു ബലങ്ങളെ കാണിക്കുന്നു. ഭൂമി പ്രയോഗിക്കുന്ന ഗുരുത്വാകർഷണബലം 2x10= 20N ഉം തറ കട്ടയുടെമേൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ലംബമായ പ്രതിപ്രവർത്തനം R ഉം. ഒന്നാം ചലനനിയമനുസരിച്ച് കട്ടയുടെ മേലുള്ള പരിണതബലം പൂജ്യമായിരിക്കണം, അതായത് R = 20 N. മൂന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് കട്ട പ്രയോഗിക്കുന്ന പ്രവർത്തനം (അഥവാ തറയിൽ കട്ട പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം) 20N നു തുല്യമായിരിക്കും. ഇതിന്റെ ദിശ നേരെ താഴേക്കാണ്.

(b) കട്ടയും സിലിണ്ടറും അടങ്ങിയ വ്യൂഹം താഴേക്കു വരുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന ത്വരണം 0.1ms^{-2} ആണ്. വ്യൂഹത്തിന്റെ സ്വതന്ത്രബലചിത്രം ഇതിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന രണ്ടു ബലങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഭൂമി പ്രയോഗിക്കുന്ന ഗുരുത്വബലം (270N), തറ പ്രയോഗിക്കുന്ന ലംബമായ പ്രതിപ്രവർത്തനം R'. ബ്ലോക്കും സിലിണ്ടറും തമ്മിലുള്ള ആന്തരികബലങ്ങൾ സ്വതന്ത്രബലചിത്രത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നില്ലെന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക. ഈ വ്യൂഹത്തിൽ രണ്ടാം ചലനനിയമം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ

$270 - R' = 27 \times 0.1\text{N}$

അതായത്, $R' = 267.3$ N

മൂന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് വ്യൂഹം തറയിൽ നേരേ താഴേക്ക് പ്രയോഗിക്കുന്ന പ്രവർത്തിക്കുന്ന ബലം (പ്രവർത്തനം) ആണ് ഇത്.



ചിത്രം 5.15

പ്രവർത്തന – പ്രതിപ്രവർത്തന ജോടികൾ (Action - reaction pairs)

പ്രശ്നം (a) യിൽ (i) കട്ടയുടെമേൽ ഭൂമി പ്രയോഗിക്കുന്ന

ഗുരുത്വബലം (20 N) (പ്രവർത്തനം); ഭൂമിയിൽ കട്ട പ്രയോഗിക്കുന്ന ഗുരുത്വബലം 20 N (ദിശ മുകളിലേക്ക്) (പ്രതിപ്രവർത്തനം) (പ്രതിപ്രവർത്തനം ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടില്ല).

(ii) തറയിൽ കട്ട പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം (പ്രവർത്തനം), കട്ടയുടെമേൽ തറ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം (പ്രതിപ്രവർത്തനം).

പ്രശ്നം b) യിൽ (i) വ്യൂഹത്തിൽ ഭൂമിയുടെ ഗുരുത്വബലം (270N) (പ്രവർത്തനം), വ്യൂഹം ഭൂമിയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന 270N ഗുരുത്വബലം (പ്രതിപ്രവർത്തനം). ഇത് മുകളിലേക്കുള്ള ദിശയിലാണ് (ചിത്രത്തിൽ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടില്ല).

(ii) തറയിൽ വ്യൂഹം പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം (പ്രവർത്തനം); വ്യൂഹത്തിൻമേൽ തറ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം (പ്രതിപ്രവർത്തനം). ഇതു കൂടാതെ (b) യിൽ കട്ട സിലിണ്ടറിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലവും തിരിച്ച് സിലിണ്ടർ കട്ടയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലവും പ്രവർത്തന – പ്രതിപ്രവർത്തന ജോടിയാണ്.

രണ്ടു വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളിൽ പരസ്പരം പ്രവർത്തിക്കുന്ന എല്ലായ്പ്പോഴും തുല്യവും വിപരീതവുമായ ബലങ്ങളാണ് പ്രവർത്തന–പ്രതിപ്രവർത്തന ജോടി എന്ന വസ്തുത പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധയിൽവെക്കേണ്ടതാണ്. ഒരേ വസ്തുവിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന തുല്യവും വിപരീതവുമായ രണ്ടു ബലങ്ങൾ ഒരിക്കലും പ്രവർത്തന–പ്രതിപ്രവർത്തന ജോടി ആകുന്നില്ല. (a) യിലെയും (b) യിലെയും മാസുകളിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ഗുരുത്വബലവും തറ മാസിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ലംബമായ പ്രതിപ്രവർത്തനവും പ്രവർത്തന – പ്രതിപ്രവർത്തന ജോടികളല്ല. ഈ രണ്ടു ബലങ്ങളും പ്രശ്നം (a) യിൽ വസ്തു നിശ്ചലമായതിനാൽ തുല്യവും വിപരീതവുമാണ്. എന്നാൽ പ്രശ്നം (b) യിൽ ഇവ അപ്രകാരമല്ല. വ്യൂഹത്തിന്റെ ഭാരം 270 N ഉം അതിൻമേൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ലംബമായ ബലം R' എന്നത് 267.3 N ഉം ആണ്.

ബലതന്ത്രത്തിലെ പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നതിന് സ്വതന്ത്രബലചിത്രം വരക്കുന്നത് വളരെ സഹായകരമാണ്. ഇത് വ്യൂഹത്തെ വ്യക്തമായി നിർവചിക്കാനും വ്യൂഹത്തിന്റെ ഭാഗമല്ലാത്ത മറ്റു വസ്തുക്കൾ വ്യൂഹത്തിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന എല്ലാ ബലങ്ങളും കണക്കിലെടുക്കാനും സഹായിക്കുന്നു. ഈ അധ്യായത്തിലെ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ നിങ്ങളെ ഇതിനു സഹായിക്കും.

സംഗ്രഹം

1. ഒരു വസ്തുവിന് സമചലനം തുടരുന്നതിന് ബലം ആവശ്യമാണെന്ന അരിസ്റ്റോട്ടിലിന്റെ വാദഗതി തെറ്റാണ്. യഥാർഥത്തിൽ ചലനത്തെ എതിർക്കുന്ന ഘർഷണബലത്തെ തടയാനാണ് ബലം ആവശ്യമായി വരുന്നത്.
2. ചരിവുതലങ്ങളിലൂടെയുള്ള വസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തെ കുറിച്ചുള്ള ലളിതമായ നിരീക്ഷണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഗലീലിയോ 'ജഡത്വനിയമ'ത്തിൽ എത്തിച്ചേർന്നു. ഇതുതന്നെയാണ് ന്യൂട്ടന്റെ ഒന്നാം ചലനനിയമത്തിന്റെ രൂപത്തിൽ കൂടുതൽ വ്യക്തമായി അവതരിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നത്. "അസന്തുലിതമായ ഒരു ബാഹ്യബലം പ്രയോഗിക്കുന്നതുവരെ ഓരോ വസ്തുവും അതിന്റെ സ്ഥിരാവസ്ഥയിലോ നേർരേഖാ സമചലനത്തിലോ തുടരുന്നതാണ്." ലളിതമായി പറഞ്ഞാൽ വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യബലം പൂജ്യം ആയാൽ വസ്തുവിന്റെ ത്വരണവും പൂജ്യമായിരിക്കും എന്നും ഒന്നാം ചലനനിയമത്തെ അവതരിപ്പിക്കാം.
3. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ആക്കം (p) എന്നത് വസ്തുവിന്റെ മാസിന്റെ (m) യും പ്രവേഗത്തിന്റെയും (v) ഗുണനഫലമാണ്.

   $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$
4. ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം (Newton's second law of motion)

   ഒരു വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന ആക്കവ്യത്യാസ നിരക്ക് ആ വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന അസന്തുലിത ബാഹ്യബലത്തിന് നേർ അനുപാതത്തിലും അതിന്റെ ദിശ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യബലത്തിന്റെ ദിശയിലുമാണ്. അപ്രകാരം $\mathbf{F} = k\,\frac{d\mathbf{p}}{dt} = k\,m\,\mathbf{a}$

   F വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന സഫല ബാഹ്യബലവും **a** വസ്തുവിനു ലഭിക്കുന്ന ത്വരണവുമാണ്. SI യൂണിറ്റിൽ ആനുപാതിക സ്ഥിരാങ്ക (k) ത്തിന്റെ വില k =1 എന്ന് എടുക്കുമ്പോൾ

   $$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\,\mathbf{a}$$

   ബലത്തിന്റെ SI യൂണിറ്റ് ന്യൂട്ടൺ ആണ്

   $1\ N = 1\ kg\ m\ s^{-2}$.

   (a) രണ്ടാം ചലനനിയമം ഒന്നാം ചലനനിയമവുമായി സമവായമുള്ളതാണ് ($F = 0$ ആയാൽ $a = 0$).

   (b) ഇത് ഒരു സദിശ സമവാക്യമാണ്.

   (c) ഇത് ഒരു കണികക്കും ഒരു വസ്തുവിനും കൂടാതെ കണികകളുടെ ഒരു വ്യൂഹത്തിനും ഒരുപോലെ പ്രായോഗികമാണ്. ഇവിടെ **F** എന്നത് വ്യൂഹത്തിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ആകെ ബാഹ്യബലവും **a** എന്നത് ഒന്നായി സങ്കൽപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന വ്യൂഹത്തിന്റെ ത്വരണവുമാണ്.

   (d) ഒരു പ്രത്യേക സ്ഥാനത്ത് ഒരു പ്രത്യേക സമയത്ത് പ്രയോഗിക്കുന്ന **F** ആ സ്ഥാനത്ത് ആ സമയത്തുണ്ടാകുന്ന ത്വരണത്തെ നിർണയിക്കുന്നു. ഇതാണ് രണ്ടാം ചലനനിയമത്തെ പ്രാദേശികനിയമം (local law) എന്നു പറയുന്നതിനുള്ള കാരണം. ഏതെങ്കിലും ഒരു പ്രത്യേക സമയത്തുണ്ടാകുന്ന ത്വരണം അതിന്റെ പൂർവസ്ഥിതിയെ ആശ്രയിച്ചുള്ളതല്ല.
5. ബലത്തിന്റെയും സമയത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ് ആവേഗം. ഇത് ആക്കവ്യത്യാസത്തിനു തുല്യമാണ്. ഒരു വലിയ ബലം ഒരു ചെറിയ ഇടവേളയിൽ പ്രവർത്തിക്കുമ്പോൾ അളക്കാവുന്നതരത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ആക്കവ്യത്യാസം കണക്കാക്കാൻ ആവേഗമെന്ന സങ്കൽപ്പം വളരെ സഹായകമാണ്. ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നത് വളരെ ചെറിയ ഇടവേളയിലായതിനാൽ ആവേഗബലം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ വസ്തുവിന് സ്ഥാനചലനമുണ്ടാകുന്നില്ലെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കാം.
6. ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമം (Newton's third law of motion)

   "എല്ലാ പ്രവർത്തനങ്ങൾക്കും തുല്യവും വിപരീതവുമായ ഒരു പ്രതിപ്രവർത്തനമുണ്ട്."

   ഈ നിയമത്തെ താഴെ പറയുന്ന തരത്തിൽ ലളിതമായി അവതരിപ്പിക്കാം.

   "പ്രകൃതിയിൽ ബലങ്ങൾ എല്ലായ്പ്പോഴും ജോടികളായുള്ള വസ്തുക്കൾക്കിടയിലാണ് പ്രവർത്തിക്കുന്നത്. A എന്ന വസ്തു

വിൽ B എന്ന വസ്തു മൂലമുണ്ടാകുന്ന ബലം എല്ലായ്പ്പോഴും B എന്ന വസ്തുവിൽ A മൂലമുണ്ടാകുന്ന ബലത്തിന് തുല്യവും വിപരീതവുമായിരിക്കും.

പ്രവർത്തനം - പ്രതിപ്രവർത്തനം എന്നിവ ഒരേസമയത്ത് പ്രവർത്തിക്കുന്ന ബലങ്ങളാണ് (simultaneous forces). ഇവ തമ്മിൽ ഒരു തരത്തിലുമുള്ള കാര്യ - കാരണ ബന്ധവും നിലനിൽക്കുന്നില്ല. പരസ്പരമുള്ള ബലങ്ങളിൽ ഏതൊന്നിനെയും പ്രവർത്തനമെന്നും മറ്റേതിനെ പ്രതിപ്രവർത്തനമെന്നും വിളിക്കാവുന്നതാണ്. പ്രവർത്തനവും പ്രതിപ്രവർത്തനവും വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നതിനാൽ അവ പരസ്പരം റദ്ദുചെയ്യപ്പെടുന്നില്ല. എന്നാൽ ഒരു വസ്തുവിന്റെ വിവിധ ഭാഗങ്ങളിൽ ആന്തരികമായി പ്രവർത്തിക്കുന്ന പ്രവർത്തന- പ്രതിപ്രവർത്തന ബലങ്ങളുടെ ആകത്തുക പൂജ്യമായിരിക്കും.

7. *ആക്കസംരക്ഷണനിയമം* (Law of conservation of momentum): കണികകൾചേർന്ന ഒരു ഒറ്റപ്പെട്ട വ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ ആക്കം സ്ഥിരമായിരിക്കും. ഈ നിയമം രണ്ടും മൂന്നും ചലനനിയമങ്ങളെ ശരിവക്കുന്ന തരത്തിലാണ്.

8. *ഘർഷണം* (Friction)

സമ്പർക്കത്തിലുള്ള രണ്ടു പ്രതലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ആപേക്ഷികചലനത്തെ (ആസന്നചലനമോ യഥാർഥത്തിലുള്ള ചലനമോ) ഘർഷണം പ്രതിരോധിക്കുന്നു. സമ്പർക്കത്തിലുള്ള പ്രതലങ്ങളുടെ പൊതുവായ സ്പർശതലത്തിലൂടെ പ്രവർത്തിക്കുന്ന, സമ്പർക്കബലത്തിന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്. ഘർഷണബലം.

ആസന്നമായ ആപേക്ഷികചലനത്തെ സ്ഥിതഘർഷണം f_s പ്രതിരോധിക്കുന്നു. പ്രതലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള യഥാർഥമായ ആപേക്ഷികചലനത്തെ ഗതികഘർഷണം f_k തടയുന്നു. ഇവ രണ്ടും സമ്പർക്കത്തിലിരിക്കുന്ന പരപ്പളവിനെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല. ഇവ താഴെ കൊടുത്ത സമവാക്യങ്ങളോട് ഏകദേശം സമപ്പെടുന്നു.

$$f_s \le \left(f_s\right)_{max} = \mu_s R$$

$$f_k = \mu_k R$$

μ_s (സ്ഥിതഘർഷണ ഗുണാങ്കം), μ_k (ഗതികഘർഷണ ഗുണാങ്കം) എന്നിവ നാം കണക്കിലെടുക്കുന്ന സമ്പർക്കത്തിലിരിക്കുന്ന ഒരു ജോടി പ്രതലങ്ങളുടെ സവിശേഷതയാണ്. μ_k എന്നത് μ_s നേക്കാൾ കുറവാണെന്ന് പരീക്ഷണങ്ങൾ മുഖേന തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ട്.

അളവ്	പ്രതീകം	യൂണിറ്റ്	ഡൈമെൻഷൻ	കുറിപ്പ്
ആക്കം	P	kg ms^{-1} or Ns	MLT^{-1}	സദിശം
ബലം	F	N	MLT^{-2}	$F = ma$ രണ്ടാം ചലന നിയമം
ആവേഗം		$kgms^{-1}$ or Ns	MLT^{-1}	ആവേഗം = ബലം x സമയം = ആക്കവ്യത്യാസം
സ്ഥിതഘർഷണം	f_s	N	MLT^{-2}	$f_s \le \mu_s N$
ഗതികഘർഷണം	f_k	N	MLT^{-2}	$f_k = \mu_k N$

വിചിന്തന വിഷയങ്ങൾ

1. എല്ലായ്പ്പോഴും ബലം പ്രവർത്തിക്കുന്നത് ചലനദിശയിലാകണമെന്നില്ല. സന്ദർഭത്തിനനുസരിച്ച്, F പ്രവേഗ (v) ത്തിന്റെ ദിശയിലോ, v ക്ക് വിപരീതദിശയിലോ, v ക്കു ലംബമായോ v യുമായി ഏതെങ്കിലും കോണളവിലോ ആകാം. എന്നാൽ ഈ സന്ദർഭങ്ങളിലെല്ലാം ബലം ത്വരണത്തിന്റെ ദിശക്ക് സമാന്തരമായിരിക്കും.
2. ഒരു പ്രത്യേക നിമിഷത്തിൽ **v** = 0 ആയാൽ, അതായത് വസ്തു നൈമിഷികമായി നിശ്ചലാവസ്ഥയിലായാൽ, ആ സമയത്ത് ബലമോ ത്വരണമോ പൂജ്യം ആകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു കല്ലിനെ മുകളിലേക്കെറിഞ്ഞാൽ പരമാവധി ഉയരത്തിലെത്തുമ്പോൾ പ്രവേഗം **v** = 0 ആണ്. എന്നാൽ അതിന്മേൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ബലം അതിന്റെ ഭാരം **mg** തന്നെയായി തുടരുകയും ത്വരണം പൂജ്യമാകാതെ, **g** ആയിരിക്കുകയും ചെയ്യും.
3. ഒരു പ്രത്യേക സമയത്ത് ഒരു വസ്തുവിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ബലം എന്നത് വസ്തുവിന്റെ ആ സ്ഥാനത്തിന്റെ അവസ്ഥയ്ക്കനുസരിച്ചായിരിക്കും. ഒരു വസ്തുവിന്റെ നേരത്തേയുള്ള ചലനത്തിന്റെ തുടർച്ചയായി വസ്തു ബലത്തെ വഹിക്കാറില്ല. ത്വരണത്തോടെ ചലിക്കുന്ന ഒരു ട്രെയിനിൽ നിന്ന് ഒരു കല്ലിനെ പുറത്തേക്കെറിയുമ്പോൾ ചുറ്റുപാടുകളുടെ സ്വാധീനം അവഗണിച്ചാൽ ആ നിമിഷം മുതൽ കല്ലിൽ തിരശ്ചീനദിശയിൽ ബലം (അഥവാ ത്വരണം) പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ലെന്നു കാണാം. ലംബമായി പ്രവർത്തിക്കുന്ന ഗുരുത്വബലം മാത്രമേ കല്ലിൽ അനുഭവപ്പെടുകയുള്ളൂ.
4. രണ്ടാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് **F** എന്നത് വസ്തുവിൻമേൽ എല്ലാ ബാഹ്യശക്തികളും ചേർന്നു പ്രയോഗിക്കുന്ന ആകെ ബലമാണ്. ഈ ബലത്തിന്റെ ഫലമായാണ് **a** ഉണ്ടാകുന്നത്. **ma** എന്നതിനെ **F** അല്ലാതെ മറ്റൊരു ബലമായി കണക്കാക്കാൻ പാടില്ല.
5. അഭികേന്ദ്രബലത്തെ മറ്റൊരുതരം ബലമായി കണക്കാക്കാൻ കഴിയില്ല. വർത്തുളചലനത്തിൽ ഒരു വസ്തുവിന് വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള ആരമികമായ (radial) ത്വരണം നൽകുന്ന ബലത്തിന്റെ പേരാണ് അഭികേന്ദ്രബലം. വർത്തുളചലനത്തിൽ വലിവുബലം, ഗുരുത്വബലം, വൈദ്യുതബലം, ഘർഷണം മുതലായവയെല്ലാം അഭികേന്ദ്രബലങ്ങളായി പ്രവർത്തിക്കാറുണ്ട്.
6. $\mu_s N$ എന്ന പരിധി ($f_s \le \mu_s N$) എത്തുന്നവരെ സ്ഥിതഘർഷണം സ്വയം ക്രമീകരിക്കുന്ന ബലമാണ്. സ്ഥിതഘർഷണത്തിന്റെ പരമാവധി മൂല്യത്തിലെത്തി എന്നു വ്യക്തമാകാതെ $f_s = \mu_s N$ എന്ന് കണക്കിലെടുക്കാൻ പാടില്ല.
7. മേശപ്പുറത്തിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു സന്തുലനാവസ്ഥയിലാണെങ്കിൽ മാത്രമേ **mg** = R എന്ന സമവാക്യം ശരിയാവുകയുള്ളൂ. **mg**, R എന്നിവ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ബലങ്ങളാകാം. (ഉദാഹരണത്തിന് ത്വരണത്തോടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ലിഫ്റ്റിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന വസ്തു). **mg**, R ഇവ തമ്മിലുള്ള തുലനാവസ്ഥക്ക് മൂന്നാം ചലനനിയമവുമായി ബന്ധമില്ല.

8. മൂന്നാം ചലനനിയമത്തിലെ പ്രവർത്തന-പ്രതിപ്രവർത്തനങ്ങൾ ഒരു ജോടി വസ്തുക്കൾക്കിടയിൽ ഒരേ സമയത്ത് പരസ്പരം അനുഭവപ്പെടുന്ന ബലങ്ങളാണ്. ഇവയുടെ പേരു സൂചിപ്പിക്കുന്നതുപോലെ പ്രവർത്തനം എന്നത് ആദ്യം അനുഭവപ്പെടുകയോ പ്രതിപ്രവർത്തനമുണ്ടാകുന്നതിന് കാരണമായി മാറുകയോ ചെയ്യുന്നില്ല. പ്രവർത്തനവും പ്രതിപ്രവർത്തനവും വ്യത്യസ്തവസ്തുക്കളിലാണ് പ്രവർത്തിക്കുന്നത്.
9. ഘർഷണം, ലംബമായ പ്രതിപ്രവർത്തനം (Normal Reaction), വലിവ് (Tension), വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം (Air resistance), വിസ്കോസിറ്റിമൂലമുള്ള വലിവ് (Visous drag), വ്യാപകമർദ്ദം (Thrust), പ്ലവക്ഷമബലം (Buoyancy), ഭാരം (Weight), അഭികേന്ദ്രബലം (Centripetal force) എന്നിവയെല്ലാം വിവിധ സന്ദർഭങ്ങളിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലങ്ങളാണ്. അതായത് ബലതന്ത്രത്തിൽ പ്രയോഗത്തിൽ വരുന്ന എല്ലാ ബലങ്ങളും അതിനു തത്തുല്യമായ പദങ്ങളും 'A എന്ന വസ്തു B എന്ന രീതിയിൽ പറയുന്നതാണ്.
10. വസ്തുക്കൾ ജീവനുള്ളവയാണോ നിർജീവമാണോ എന്നതിന് രണ്ടാം ചലനനിയമത്തിൽ യാതൊരു പ്രസക്തിയുമില്ല. മനുഷ്യനെപോലെ, ജീവനുള്ള ഏതൊരു വസ്തുവിനും ത്വരണം ലഭിക്കണമെങ്കിൽ ബാഹ്യബലം ആവശ്യമാണ്. ഉദാഹരണത്തിന്, ഘർഷണമെന്ന ബാഹ്യബലത്തിന്റെ സാന്നിധ്യമില്ലെങ്കിൽ നമുക്ക് തറയിലൂടെ നടക്കാൻ കഴിയില്ല.
11. ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലെ ബലമെന്ന വസ്തുനിഷ്ഠമായ ആശയത്തെ 'ബലം അനുഭവപ്പെടുക' എന്ന വൈയക്തിക ആശയവുമായി കൂടിക്കലർത്താൻ പാടില്ല. ഒരു മെറിഗോറൗണ്ടിൽ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ നമ്മുടെ എല്ലാ ശരീരഭാഗങ്ങളിലും ഉള്ളിലേക്കുള്ള ഒരു ബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നുണ്ട്. എന്നാൽ ഉണ്ടാകാനിടയുള്ള ആസന്നചലനത്തിന്റെ ദിശയിൽ, പുറത്തേക്കു തള്ളപ്പെടുന്നുവെന്ന ഒരു അനുഭവമാണ് നമുക്ക് ഉണ്ടാകുന്നത്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

(കണക്കുകൂട്ടലുകൾ എളുപ്പത്തിലാക്കാൻ $g = 10ms^{-2}$ എന്നു കരുതുക).

5.1 താഴെ പറയുന്നവയിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ആകെ ബലത്തിന്റെ അളവും ദിശയും കണക്കാക്കുക.

(a) സ്ഥിരവേഗത്തോടെ താഴേക്കു പതിക്കുന്ന മഴത്തുള്ളി.

(b) വെള്ളത്തിൽ ഒഴുകിനടക്കുന്ന 10g മാസുള്ള ഒരു കോർക്ക്.

(c) വൈദഗ്ധ്യത്തോടെ ആകാശത്ത് നിശ്ചലമായി നിർത്തിയിരിക്കുന്ന പട്ടം.

(d) പരുക്കൻ റോഡിലൂടെ 30km/h സ്ഥിരവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു കാർ.

(e) മറ്റെല്ലാ വസ്തുക്കളിൽനിന്നും വളരെയകലെ, വൈദ്യുതകാന്തികമണ്ഡലങ്ങൾ അനുഭവപ്പെടാത്ത സ്ഥലത്ത് ശൂന്യാകാശത്ത് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ഉയർന്ന വേഗമുള്ള ഒരു ഇലക്ട്രോൺ.

5.2 0.05kg മാസുള്ള ഒരു ഗോലിയെ കുത്തനെ മുകളിലേക്ക് എറിയുന്നു. ഗോലിയിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ആകെ ബലത്തിന്റെ ദിശയും അളവും കണക്കാക്കുക.

(a) ഗോലി മുകളിലേക്കു സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ.

(b) ഗോലി താഴേക്കു സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ.

(c) ഗോലി ക്ഷണികമായി നിശ്ചലാവസ്ഥയിലിരുന്ന പരമാവധി ഉയരത്തിൽ.

ഈ ഗോലിയെ തിരശ്ചീനദിശയിൽ നിന്നും 45^0 കോണളവിലാണ് മുകളിലേക്ക് എറിയുന്നതെങ്കിൽ ഈ ഉത്തരങ്ങൾക്ക് എന്തെങ്കിലും മാറ്റമുണ്ടാകുമോ? (വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം കണക്കിലെടുക്കേണ്ടതില്ല).

5.3 താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ 0.1kg മാസുള്ള ഒരു കല്ലിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ആകെ ബലത്തിന്റെ അളവും ദിശയും കണക്കാക്കുക.

(a) നിശ്ചലാവസ്ഥയിലിരിക്കുന്ന ഒരു ട്രെയിനിന്റെ ജാലകത്തിലൂടെ പുറത്തേക്കിട്ടയുടനെ.

(b) 36km/h സ്ഥിരപ്രവേഗത്തോടെ ഓടിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു ട്രെയിനിന്റെ ജാലകത്തിലൂടെ താഴേക്കിട്ടയുടനെ.

(c) $1ms^{-2}$ ത്വരണത്തോടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ട്രെയിനിന്റെ ജാലകത്തിലൂടെ പുറത്തേക്കിട്ടയുടനെ.

(d) $1ms^{-2}$ ത്വരണത്തോടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ട്രെയിനിന്റെ തറയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന കല്ല്. ട്രെയിനിനെ അപേക്ഷിച്ച് കല്ല് നിശ്ചലാവസ്ഥയിലാണ്.

(വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം കണക്കിലെടുക്കേണ്ടതില്ല).

5.4 'ℓ' നീളമുള്ള ഒരു ചരടിന്റെ ഒരറ്റം 'm' മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവുമായും മറ്റേ അറ്റം തിരശ്ചീനവും മിനുസവുമായ മേശയിലെ ഒരു ആണിയുമായും ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. വസ്തു 'v' വേഗത്തിൽ ഒരു വർത്തുള പാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ വസ്തുവിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന പരിണതബലം (വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ളത്) എന്നത്.

(i) T, (ii) $T - \frac{mv^2}{l}$, (iii) $T + \frac{mv^2}{l}$, (iv) 0

(T എന്നത് ചരടിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന വലിവുബലമാണ്).

മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്നതിൽ നിന്നു ശരിയായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

5.5 ആദ്യവേഗം $15ms^{-1}$ ആയ 20kg മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിൻമേൽ 50 N മന്ദീകരണബലം പ്രവർത്തിക്കുന്നു. ഈ വസ്തു നിശ്ചലാവസ്ഥയിലാകുന്നതിന് എത്ര സമയം വേണ്ടിവരും?

5.6 3.0kg മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്മേൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ഒരു സ്ഥിരബലം വസ്തുവിന്റെ വേഗം 25 സെക്കന്റുകൾ കൊണ്ട് $2ms^{-1}$ ൽ നിന്ന് $3.5ms^{-1}$ ആക്കി മാറ്റുന്നു. വസ്തുവിന്റെ ചലനദിശക്ക് മാറ്റമൊന്നും സംഭവിക്കുന്നില്ല. എങ്കിൽ ബലത്തിന്റെ അളവും ദിശയും എന്താണെന്ന് കണക്കാക്കുക.

5.7 പരസ്പരം ലംബമായ 8N, 6N എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു ബലങ്ങൾ 5kg മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കുന്നു. വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന ത്വരണത്തിന്റെ അളവും ദിശയും പ്രതിപാദിക്കുക.

5.8 36km/h വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഓട്ടോറിക്ഷയുടെ ഡ്രൈവർ റോഡിന്റെ മധ്യഭാഗത്തായി ഒരു കുട്ടി നിൽക്കുന്നതു കാണുകയും കുട്ടിയെ കഷ്ടിച്ചു രക്ഷപ്പെടുത്താൻ സാധിക്കുന്ന തരത്തിൽ 4.0 സെക്കന്റ് കൊണ്ട് തന്റെ വാഹനം നിർത്തുകയും ചെയ്യുന്നു. വാഹനത്തിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ശരാശരി മന്ദീകരണബലം എത്ര? മുച്ചക്രവാഹനത്തിന്റെ മാസ് 400kg ഉം ഡ്രൈവറുടെ മാസ് 65kg ഉം ആണ്.

5.9 20,000kg മാസുമായി ഒരു റോക്കറ്റിനെ $5ms^{-2}$ ആദ്യ ത്വരണത്തോടുകൂടി മുകളിലേക്ക് കത്തിച്ചു വിടുന്നു. റോക്കറ്റ് കത്തിച്ചു വിടുമ്പോൾ തുടക്കത്തിലുണ്ടാകുന്ന തള്ളൽ (ബലം) എത്രയെന്ന് കണക്കാക്കുക.

5.10 വടക്കുദിശയിലേക്ക് തുടക്കത്തിൽ $10ms^{-1}$ സ്ഥിരവേഗത്തോടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന 0.40kg മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിൽ തെക്കുദിശയിൽ 30 സെക്കന്റ് സമയത്തേക്ക് 8N സ്ഥിരബലം പ്രയോഗിക്കുന്നു. ബലം പ്രയോഗിക്കുന്ന നിമിഷം $t = 0$ എന്നും വസ്തുവിന്റെ തത്സമയത്തുള്ള സ്ഥാനം $x = 0$ എന്നും കരുതിയാൽ $t = -5$ s, 25 s, 100s എന്നീ സമയങ്ങളിൽ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനമെവിടെയായിരിക്കുമെന്ന് പ്രവചിക്കുക.

5.11 നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽനിന്ന് ഒരു ട്രക്ക് $2ms^{-2}$ സമത്വരണത്തിനു വിധേയമായി സഞ്ചരിക്കാൻ തുടങ്ങുന്നു. $t = 10s$ ആകുമ്പോൾ ട്രക്കിനു മുകളിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ (തറനിരപ്പിൽനിന്ന് 6m ഉയരത്തിൽ) ഒരു കല്ല് താഴേക്കിടുന്നു. $t = 11s$ ആകുമ്പോൾ കല്ലിന്റെ (a) പ്രവേഗം (b) ത്വരണം എന്നിവ എത്രയാണ്? (വായുവിന്റെ രോധം കണക്കിലെടുക്കേണ്ടതില്ല).

5.12 ഒരു മുറിയുടെ മച്ചിൽനിന്നും 2m നീളമുള്ള ചരടുപയോഗിച്ച് തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്ന 0.1kg മാസുള്ള ഒരു ചെറിയ ഗോളത്തെ ദോലനം ചെയ്യിക്കുന്നു. സന്തുലിതസ്ഥാനത്തിൽ (Mean position) ഗോളത്തിന്റെ വേഗത $1ms^{-1}$ ആണ്. ചരടിനെ മുറിക്കുമ്പോൾ ഗോളത്തിന്റെ സഞ്ചാരപാത താഴെ പറയുന്ന സ്ഥാനങ്ങളിൽ എപ്രകാരമായിരിക്കും?

(a) പരമാവധി സ്ഥാനം (Extreme position), (b) സന്തുലിതസ്ഥാനം (Mean position)

5.13 സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു ലിഫ്റ്റിനുള്ളിലെ ഭാരമളക്കുന്ന ഒരുപകരണത്തിനു മുകളിൽ 70kg മാസുള്ള ഒരാൾ നിൽക്കുന്നു. താഴെ പറഞ്ഞ സാഹചര്യങ്ങളിൽ ഉപകരണം സൂചിപ്പിക്കുന്ന അളവ് എന്തായിരിക്കും?

(a) $10ms^{-1}$ സമാന വേഗത്തിൽ മുകളിലേക്കു സഞ്ചരിച്ചാൽ

(b) $5ms^{-2}$ സമാന ത്വരണത്തോടു കൂടി താഴേക്കു സഞ്ചരിച്ചാൽ

(c) $5ms^{-2}$ സമാനത്വരണത്തോടു കൂടി മുകളിലേക്കു സഞ്ചരിച്ചാൽ

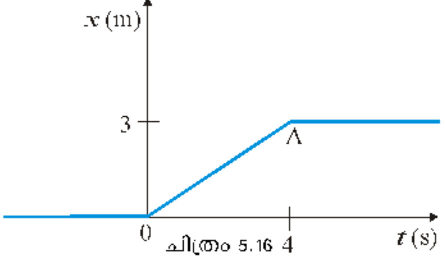
(d) യന്ത്രത്തകരാറുമൂലം ലിഫ്റ്റ് തകർന്ന് ഗുരുത്വാകർഷണം മൂലം സ്വതന്ത്രമായി താഴേക്കു വീഴുമ്പോൾ

5.14 4kg ഭാരമുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാന - സമയ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 5.16 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

(a) $t < 0$, $t > 4$ s, $0 < t < 4$ s എന്നീ ഇടവേളകളിൽ വസ്തുവിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ബലം എന്തായിരിക്കും?

(b) $t = 0$, $t = 4s$ എന്നീ സമയങ്ങളിൽ വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന ആവേഗം എന്തായിരിക്കും? (ഏകമാനചലനം മാത്രം കണക്കിലെടുക്കുക.)

5.15 ഭാരമില്ലാത്ത ഒരു ചരടിന്റെ രണ്ടഗ്രങ്ങളിലായി കെട്ടിയിട്ടിരിക്കുന്ന യഥാക്രമം 10kg, 20kg എന്നിങ്ങനെ മാസുള്ള A, B എന്ന രണ്ടു വസ്തുക്കൾ തിരശ്ചീനവും മിനുസവുമായ ഒരു പ്രതലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. 600 N ബലം തിരശ്ചീനമായി (i) A യിലും (ii) B യിലും ചരടിന്റെ ദിശയിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നുവെങ്കിൽ രണ്ടു സാഹചര്യങ്ങളിലും ചരടിലുണ്ടാകുന്ന വലിവുബലം എന്തായിരിക്കും?



ചിത്രം 5.16

5.16 ഘർഷണമില്ലാത്ത ഒരു കപ്പിയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വലിച്ചുനീട്ടാൻ കഴിയാത്ത ഒരു ചരടിന്റെ രണ്ടഗ്രത്തുമായി 8kg, 12 kg എന്നിങ്ങനെയുള്ള രണ്ടു മാസുകൾ ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. മാസുകളെ താഴേക്ക് തൂക്കിയിടുമ്പോൾ അവക്കുണ്ടാകുന്ന ത്വരണവും ചരടിന്മേലുള്ള വലിവുബലവും കണക്കാക്കുക.

5.17 പരീക്ഷണശാലയിലെ അവലംബക ചട്ടക്കൂടിൽ ഒരു ന്യൂക്ലിയസ് നിശ്ചലമായിരിക്കുന്നു. ഈ ന്യൂക്ലിയസിന്റെ വിഭജനം നടന്ന് ചെറിയ ന്യൂക്ലിയസുകളായി മാറുമ്പോൾ, ലഭിക്കുന്ന ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ വിപരീതദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നുവെന്ന് തെളിയിക്കുക.

5.18 വിപരീതദിശയിൽ $6ms^{-1}$ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന 0.05kg മാസുള്ള രണ്ടു ബില്യാർഡ്സ് പന്തുകൾ പരസ്പരം കൂട്ടിയിടിച്ച ശേഷം അതേവേഗത്തിൽ തിരികെ പോകുന്നു. ഓരോ പന്തും പരസ്പരം പ്രദാനം ചെയ്യുന്ന ആവേഗം എത്ര?

5.19 100kg മാസുള്ള ഒരു തോക്കിൽ നിന്ന് 0.020kg മാസുള്ള ഒരു ഷെല്ല് വർഷിക്കുന്നു. ഷെല്ലിന്റെ മസിൽ വേഗം (Muzzle speed) $80ms^{-1}$ ആയാൽ തോക്കിന്റെ പിൻവാങ്ങൽ വേഗം (Recoil speed) എത്രയാണ്?

5.20 ഒരു ബാറ്റ്സ്മാൻ 54km/h പ്രാരംഭ വേഗത്തോടെ വരുന്ന ഒരു പന്തിനെ അതിന്റെ വേഗത്തിനു വ്യത്യാസം വരാതെ 45^0 കോണളവിൽ വ്യതിചലിപ്പിച്ചു വിടുന്നു. പന്തിനു പ്രദാനം ചെയ്ത ആവേഗം എത്ര? (പന്തിന്റെ മാസ് 0.15kg)

5.21 ഒരു ചരടിന്റെ അഗ്രത്തു കെട്ടിയിരിക്കുന്ന 0.25kg മാസുള്ള കല്ലിനെ 1.5m. ആരമുള്ള വർത്തുളപാതയിലൂടെ 40 rev/min വേഗത്തിൽ തിരശ്ചീനതലത്തിൽ കറക്കുന്നു. ചരടിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന വലിവുബലം എത്ര? ചരടിനു താങ്ങാൻ കഴിയുന്ന പരമാവധി വലിവുബലം 200N ആയാൽ കല്ലിനെ പരമാവധി എത്ര വേഗത്തിൽ കറക്കാൻ സാധിക്കും?

5.22 പ്രശ്നം 5.21 ൽ കല്ലിന്റെ വേഗം അനുവദനീയമായ പരമാവധി വേഗത്തേക്കാൾ കൂടുതലാണെങ്കിൽ ചരട് പെട്ടെന്ന് പൊട്ടിപ്പോകുന്നു. താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ചരടു പൊട്ടിയശേഷം കല്ലിന്റെ പാതയെ ശരിയായി വിശദീകരിക്കുന്നത് ഏത്?

(a) കല്ല് ആരമികമായി പുറത്തേക്ക് (Radially outward) സഞ്ചരിക്കുന്നു.

(b) കല്ല് ആരമികമായി അകത്തേക്ക് (Radially inward) സഞ്ചരിക്കുന്നു.

(c) കല്ല് തൊടുവരയിലൂടെ ഒരു കോണളവിൽ പുറത്തേക്കു തെറിച്ചുപോകുന്നു. കോണളവ് കല്ലിന്റെ വേഗത്തെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കും.

5.23 കാരണം വ്യക്തമാക്കുക.

(a) ശൂന്യാകാശത്തു ഒരു കുതിരക്ക് വണ്ടിവലിച്ചുകൊണ്ട് ഓടാൻ സാധിക്കില്ല.

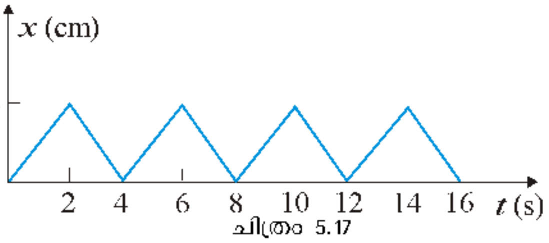
(b) വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബസ് പെട്ടെന്ന് നിർത്തുമ്പോൾ യാത്രക്കാർ ഇരിപ്പിടത്തിൽ നിന്നു മുന്നോട്ടു വീഴാൻ തുടങ്ങുന്നു.

(c) ഒരു പുല്ലുവെട്ടിയന്ത്രത്തെ വലിച്ചുകൊണ്ടുപോകുന്നത് ഉന്തിക്കൊണ്ടു പോകുന്നതിനേക്കാൾ എളുപ്പമാണ്.

(d) പന്തു പിടിക്കുമ്പോൾ ക്രിക്കറ്റ് കളിക്കാരൻ കൈ പിന്നിലേക്കു ചലിപ്പിക്കുന്നു.

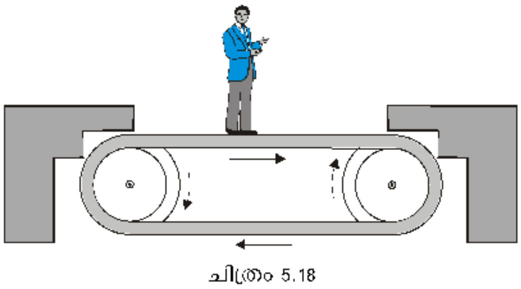
കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

5.24 0.04kg മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാന–സമയ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 5.17ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ചലനത്തിനനുയോജ്യമായ ഒരു ഭൗതികസന്ദർഭം നിർദേശിക്കുക. വസ്തുവിനു ലഭിക്കുന്ന തുടർച്ചയായ രണ്ട് ആവേഗങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള സമയമെത്ര? ഓരോ ആവേഗത്തിന്റെയും പരിമാണം എത്ര?



ചിത്രം 5.17

5.25 $1ms^{-2}$ ത്വരണത്തോടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന തിരശ്ചീനമായ ഒരു കൺവേയർ ബെൽറ്റിൽ നിശ്ചലനായി നിൽക്കുന്ന ഒരാളെ ചിത്രം 5.18 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. അയാളിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന പരിണതബലം (Net force) എത്രയാണ്? അയാളുടെ ഷൂസും കൺവെയർ ബെൽറ്റും തമ്മിലുള്ള സ്ഥിത ഘർഷണഗുണാങ്കം 0.2 ആയാൽ ബെൽറ്റിന്റെ ത്വരണം എത്രയാകുന്നതുവരെ അയാൾക്ക് ബെൽറ്റിനെ അപേക്ഷിച്ച് നിശ്ചലനായി തുടരാൻ സാധിക്കും? (ആളിന്റെ മാസ് = 65kg)


ചിത്രം 5.18

5.26 ഒരു ചരടിൽ കെട്ടിയിരിക്കുന്ന m മാസുള്ള കല്ല് R ആരമുള്ളതും കുത്തനെയുള്ളതും വർത്തുളപാതയിലൂടെ പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നു. വർത്തുളപാതയുടെ ഏറ്റവും ഉയർന്നസ്ഥാനത്തും ഏറ്റവും താഴ്ന്നസ്ഥാനത്തും ലംബ

മായി താഴേക്ക് അനുഭവപ്പെടുന്ന പരിണതബലങ്ങൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. (ശരിയായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക).

	ഏറ്റവും താഴ്ന്ന സ്ഥാനം (Lowest Point)	ഏറ്റവും ഉയർന്ന സ്ഥാനം (Highest Point)
(a)	$mg \quad T_1$	$mg \quad T_2$
(b)	$mg + T_1$	$mg \quad T_2$
(c)	$mg \quad T_1 \quad (m v_1^2) / R$	$mg \quad T_2 + (m v_1^2) / R$
(d)	$mg \quad T_1 \quad (m v_1^2) / R$	$mg \quad T_2 + (m v_1^2) / R$

T_1, v_1 ഇവ യഥാക്രമം ഏറ്റവും താഴ്ന്ന സ്ഥാനത്തെ വലിവുബലത്തെയും വേഗത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. T_2, v_2 ഇവ യഥാക്രമം ഏറ്റവും ഉയർന്ന സ്ഥാനത്തെ വലിവുബലത്തെയും വേഗതത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

5.27 1000kg മാസുള്ള ഒരു ഹെലികോപ്റ്റർ കുത്തനെ $15 ms^{-2}$ ത്വരണത്തോടുകൂടി ഉയർന്നു പൊങ്ങുന്നു. വിമാന ജോലിക്കാരുടെയും യാത്രക്കാരുടെയും ആകെ ഭാരം 300kg ആണ്. താഴെ പറയുന്നവയുടെ അളവും ദിശയും നൽകുക.

(a) ജോലിക്കാരും യാത്രക്കാരും ഹെലികോപ്റ്ററിന്റെ തറയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം

(b) ചുറ്റുമുള്ള വായുവിൽ ഹെലികോപ്റ്ററിലെ റോട്ടറിന്റെ പ്രവർത്തനം

(c) ചുറ്റുമുള്ള വായു ഹെലികോപ്റ്ററിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം.

5.28 $15 ms^{-1}$ വേഗത്തിൽ തിരശ്ചീനമായി ഒഴുകുന്ന ഒരു ജലധാര $10^{-2} m^2$ ഛേദതലപരപ്പളവുള്ള ഒരു കുഴലിലൂടെ പുറത്തേക്കുപ്രവഹിച്ച് സമീപത്തു സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന കുത്തനെയുള്ള ഒരു ചുമരിൽ പതിക്കുന്നു. ജലത്തിന്റെ ആഘാതം മൂലം ചുമരിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ബലം എത്ര? (ചുമരിലിടിക്കുന്ന ജലം പിന്നിലേക്കു തെറിക്കുന്നില്ലെന്ന് സങ്കൽപിക്കുക.)

5.29 ഒരു മേശപ്പുറത്ത് പത്ത് ഒരു രൂപാനാണയങ്ങൾ ഒന്നിനുമേൽ ഒന്നായി അടുക്കിവച്ചിരിക്കുന്നു. ഓരോ നാണയത്തിന്റെയും മാസ് 'm' ആണ്. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ബലങ്ങളുടെ അളവും ദിശയും കണ്ടെത്തുക.

(a) 7-ാമത്തെ നാണയത്തിൽ (ചുവട്ടിൽനിന്ന് എണ്ണുമ്പോൾ) അതിനു മുകളിലുള്ള എല്ലാ നാണയങ്ങളും ചേർന്നു പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം

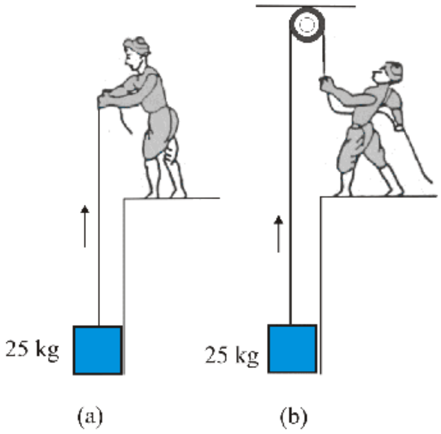
(b) 7-ാമത്തെ നാണയത്തിൽ 8-ാമത്തെ നാണയം പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം

(c) 6-ാമത്തെ നാണയം 7-ാമത്തെ നാണയത്തിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന പ്രതിപ്രവർത്തനം.

5.30 ഒരു വിമാനം അതിന്റെ ചിറകുകൾക്ക് 15^0 ബാങ്കിങ്ങോടെ 720km/h വേഗതയിൽ തിരശ്ചീനമായി വട്ടമിട്ടു പറക്കുന്നു. ഈ വർത്തുളപാതയുടെ ആരം എന്ത്?

5.31 30m ആരമുള്ള ബാങ്കിങ് ചെയ്യാത്ത വൃത്താകാരമായ ട്രാക്കിലൂടെ ഒരു ട്രെയിൻ 54km/h വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ട്രെയിനിന്റെ മാസ് 10^6kg ആണ്. ട്രെയിനിന്റെ സഞ്ചാരത്തിനാവശ്യമായ അഭികേന്ദ്രബലം നൽകുന്നത് എന്താണ്? എൻജിനാണോ പാളങ്ങളാണോ? പാളങ്ങളുടെ തേയ്മാനം ഒഴിവാക്കുന്നതിന് ആവശ്യമായ ബാങ്കിങ് കോൺ (Angle of Banking) എത്രയാണ്?

5.32 ചിത്രം 5.19 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ 25kg മാസുള്ള ഒരു കട്ടയെ 50 kg മാസുള്ള ഒരാൾ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ ഉയർത്താൻ ശ്രമിക്കുന്നു. രണ്ടു സന്ദർഭങ്ങളിലും തറയിൽ അയാൾ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം എത്രയാണ്? 700 N ബലം ലംബമായി പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ തറ വളയുമെങ്കിൽ തറ വളഞ്ഞു പോകാതെ (yield) കട്ടയെ ഉയർത്താൻ അയാൾ ഏതു രീതിയാണ് അവലംബിക്കേണ്ടത്?



ചിത്രം 5.19

5.33 600N വലിവുബലം താങ്ങാൻ കഴിവുള്ള ഒരു കയറിലൂടെ 40kg മാസുള്ള ഒരു കുരങ്ങൻ കയറിപ്പോകുന്നത് ചിത്രം 5.20 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. താഴെ പറയുന്നവയിൽ ഏതു സന്ദർഭത്തിലാണ് കയർ പൊട്ടിപ്പോകാനിട യുള്ളത്?

കുരങ്ങൻ (a) $6 ms^{-2}$ ത്വരണത്തോടെ മുകളിലേക്കു കയറുമ്പോൾ

(b) $4 ms^{-2}$ ത്വരണത്തോടെ താഴേക്കിറങ്ങുമ്പോൾ

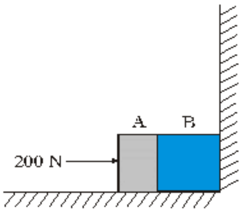
(c) $5 ms^{-1}$ സമവേഗത്തോടെ മുകളിലേക്കു കയറുമ്പോൾ

(d) ഗുരുത്വാകർഷണത്തിനു വിധേയമായി കയറിലൂടെ സ്വതന്ത്രമായി താഴേക്കു വീഴുമ്പോൾ (കയറിന്റെ മാസ് കണക്കിലെടുക്കേണ്ടതില്ല).

ചിത്രം. 5.20

5.34 യഥാക്രമം 5kg ഉം 10kg ഉം മാസുള്ള പരസ്പരം സമ്പർക്കത്തിലിരിക്കുന്ന A, B എന്ന രണ്ടു വസ്തുക്കൾ വഴങ്ങാത്ത ഒരു ചുമരിനോടു ചേർന്ന് ഒരു മേശപ്പുറത്ത് നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. (ചിത്രം 5.21). രണ്ടു വസ്തുക്കളും മേശയും തമ്മിലുള്ള ഘർഷണഗുണാങ്കം 0.15 ആണ്. A എന്ന വസ്തുവിൽ തിരശ്ചീനമായി 200N ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നു. എങ്കിൽ (a) ഇടഭിത്തിയുടെ പ്രതിപ്രവർത്തനം എന്ത്? (b) A യും B യും തമ്മിലുള്ള പ്രവർത്തന-പ്രതിപ്രവർത്തനബലങ്ങൾ ഏവ? ചുമരിനെ നീക്കം ചെയ്താൽ എന്തു സംഭവിക്കും? രണ്ടു വസ്തുക്കളും ചലിക്കുകയാണെങ്കിൽ ചോദ്യം (b) യുടെ ഉത്തരത്തിന് എന്തെങ്കിലും വ്യത്യാസമുണ്ടാകുമോ?

(μ_s ഉം μ_k ഉം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം അവഗണിക്കുക.)



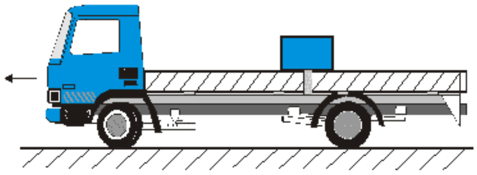
ചിത്രം. 5.21

5.35 നീളമുള്ള ഒരു ട്രോളിയിൽ 15kg മാസുള്ള ഒരു കട്ട വച്ചിരിക്കുന്നു. കട്ടയും ട്രോളിയും തമ്മിലുള്ള സ്ഥിത ഘർഷണഗുണാങ്കം 0.18 ആണ്. ട്രോളിക്ക് നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്ന് 20s സമയം കൊണ്ട് $0.5 ms^{-2}$ ത്വരണം സംഭവിക്കുകയും പിന്നീട് സമപ്രവേഗത്തോടുകൂടി സഞ്ചരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. താഴെ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന രീതികളിൽ കട്ടയുടെ ചലനം നിരീക്ഷിക്കുന്നത് ചർച്ച ചെയ്യുക.

(a) തറയിൽ നിശ്ചലനായി നിൽക്കുന്ന ഒരു നിരീക്ഷകൻ

(b) ട്രോളിയോടൊപ്പം സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു നിരീക്ഷകൻ

5.36 ഒരു ട്രക്കിന്റെ തുറന്നിരിക്കുന്ന പിൻഭാഗത്തുനിന്ന് 5m അകലെയായി സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന 40kg മാസുള്ള ഒരു പെട്ടി ചിത്രം 5.22 -ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. പെട്ടിയും അതിനുതാഴെയുള്ള പ്രതലവും തമ്മിലുള്ള ഘർഷണഗുണാങ്കം 0.15 ആണ്. നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്ന് ട്രക്ക് നിരപ്പായ റോഡിലൂടെ ചലിക്കാൻ തുടങ്ങുകയും ട്രക്കിന് $2 ms^{-2}$ ത്വരണം ഉണ്ടാകുകയും ചെയ്യുന്നു. പ്രാരംഭസ്ഥാനത്തു നിന്ന് എത്ര അകലെയെത്തുമ്പോഴാണ് പെട്ടി ട്രക്കിൽ നിന്നും താഴെ വീഴാൻ ഇടയുള്ളത്? (പെട്ടിയുടെ വലുപ്പം കണക്കിലെടുക്കേണ്ടതില്ല).


ചിത്രം 5.22

5.37 15cm ആരമുള്ള ഒരു ഡിസ്ക് $33\frac{1}{3}$ rev/min വേഗതയിൽ സ്വയം കറങ്ങുന്നു. ഈ ഡിസ്കിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നു 4cm, 14cm എന്നീ അകലങ്ങളിലായി രണ്ട് നാണയങ്ങൾ വച്ചിട്ടുണ്ട്. ഡിസ്കും നാണയങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ഘർഷണ-ഗുണാങ്കം 0.15 ആണെങ്കിൽ ഏതു നാണയമാണ് ഡിസ്കിനൊപ്പം കറങ്ങാൻ ഇടയുള്ളത്?

5.38 സർക്കസിലെ മരണക്കിണറിൽ ((Death well), കാണികൾക്കു പുറമേനിന്നു കാണാൻ സാധിക്കുന്ന വിധത്തിൽ നിർമിച്ച, സുഷിരങ്ങളോടു കൂടിയ ഗോളരൂപത്തിലുള്ള പൊള്ളയായ അറ) മോട്ടോർ സൈക്കിളുകാരൻ കുത്തനെയുള്ള വലയത്തിലൂടെ വണ്ടിയോടിക്കുന്നത് നിങ്ങൾ കണ്ടിരിക്കുമല്ലോ. താഴെനിന്ന് ഊന്നു കൊടുത്തിട്ടില്ലെങ്കിൽ പോലും, ഏറ്റവും ഉയർന്ന സ്ഥാനത്തെത്തിയ മോട്ടോർ സൈക്കിളുകാരൻ താഴെ വീഴാത്തതെന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് വിശദീകരിക്കുക. അറയുടെ ആരം 25m ആണെങ്കിൽ കുത്തനെയുള്ള

വലയത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നതിന് മോട്ടോർ സൈക്കിളഭ്യാസിക്ക് പരമാവധി ഉയരത്തിൽ ആവശ്യമായ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വേഗം എത്ര?

5.39 200rev/min വേഗത്തിൽ, കുത്തനെയുള്ള അക്ഷത്തിനാസ്പദമായി കറങ്ങുന്ന 3m ആരമുള്ള പൊള്ളയായ, സിലിണ്ടർ ആകൃതിയുള്ള ഒരു വീപ്പയുടെ ഉൾഭിത്തിയിൽ 70kg മാസുള്ള ഒരാൾ ചാരിനിൽക്കുന്നു. അയാളുടെ വസ്ത്രങ്ങളും ചുമരും തമ്മിലുള്ള ഘർഷണഗുണാങ്കം 0.15 ആണ്. വീപ്പയുടെ ചുവട് പെട്ടെന്ന് എടുത്തു മാറ്റുമ്പോൾ താഴെ വീഴാതെ അയാൾ ചുമരിൽ പറ്റിച്ചേർന്ന് നിൽക്കണമെങ്കിൽ വീപ്പയ്ക്ക് ഉണ്ടാകേണ്ട ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ഭ്രമണ വേഗം എത്ര?

5.40 വൃത്താകാരമായ, R ആരമുള്ള, കനംകുറഞ്ഞ ഒരു വളയം അതിന്റെ കുത്തനെയുള്ള വ്യാസത്തെ ആസ്പദമാക്കി ω കോണീയാവൃത്തിയോടു കൂടി കറങ്ങുന്നു. ഒരു ചെറിയ മുത്ത് ഈ കമ്പിവളയത്തിന്റെ ഏറ്റവും താഴ്ന്ന ബിന്ദുവിൽത്തന്നെ തുടരണമെങ്കിൽ $\omega \le \sqrt{g / R}$ ആയിരിക്കണമെന്ന് തെളിയിക്കുക. $\omega = \sqrt{2g / R}$ ആകുമ്പോൾ വളയത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തെ മുത്തിന്റെ കേന്ദ്രവുമായി ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന ആരസദിശം കുത്തനെ താഴേക്കുള്ള ദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവ് എത്രയാണ്? (ഘർഷണത്തെ കണക്കിലെടുക്കേണ്ടതില്ല.)

അധ്യായം 6

T2C9Y8

പ്രവൃത്തി, ഊർജം, പവർ (WORK, ENERGY, POWER)

6.1 ആമുഖം

6.2 പ്രവൃത്തിയുടെയും ഗതികോർജത്തിന്റെയും ധാരണകൾ : പ്രവൃത്തി - ഊർജസിദ്ധാന്തം

6.3 പ്രവൃത്തി

6.4 ഗതികോർജം

6.5 വ്യതിയാനബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി

6.6 വ്യതിയാനബലത്തിന്റെ പ്രവൃത്തി - ഊർജസിദ്ധാന്തം

6.7 സ്ഥിതികോർജം എന്ന ആശയം

6.8. യാന്ത്രികോർജത്തിന്റെ സംരക്ഷണം

6.9 സ്പ്രിങ്ങിന്റെ സ്ഥിതികോർജം

6.10 ഊർജത്തിന്റെ വിവിധ രൂപങ്ങൾ: ഊർജസംരക്ഷണനിയമം

6.11 പവർ

6.12 കൂട്ടിമുട്ടലുകൾ

സംഗ്രഹം

വിചിന്തനവിഷയങ്ങൾ

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

അനുബന്ധം 6.1

6.1 ആമുഖം

നിത്യജീവിതത്തിൽ നാം ആവർത്തിച്ച് ഉപയോഗിക്കുന്ന പദങ്ങളാണ് പ്രവൃത്തി, ഊർജം, പവർ എന്നിവ. നിലമുഴുന്ന കർഷകനും, ഇഷ്ടിക ചുമക്കുന്ന നിർമാണത്തൊഴിലാളിയും മത്സരപ്പരീക്ഷയ്ക്കു തയാറെടുക്കുന്ന വിദ്യാർഥിയും മനോഹരമായ പ്രകൃതിദൃശ്യം രചിക്കുന്ന ചിത്രകാരനും എല്ലാം പ്രവൃത്തി ചെയ്യുന്നുണ്ട്. എന്നാൽ ഭൗതിക ശാസ്ത്രത്തിൽ, 'പ്രവൃത്തി' എന്നതിന് വ്യക്തവും കൃത്യവുമായ ഒരു അർഥമുണ്ട്. ഒരു ദിവസം 14 മുതൽ 16 വരെ മണിക്കൂർ പ്രവൃത്തി ചെയ്യാൻ കഴിവുള്ള ഏതൊരാളിനും വലിയ കരുത്ത് (സ്റ്റാമിന) അല്ലെങ്കിൽ ഊർജമുണ്ട് എന്നു നാം പറയും. ഒരു ദീർഘദൂര ഓട്ടക്കാരിയെ നമ്മൾ അഭിനന്ദിക്കുന്നത് അവളുടെ കരുത്ത് അല്ലെങ്കിൽ ഊർജത്തിന്റെ പേരിലാണ്. അതുകൊണ്ട് പ്രവൃത്തി ചെയ്യാനുള്ള നമ്മുടെ കഴിവിനെ ഊർജം എന്നു പറയാം. ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലും ഈ അർഥത്തിൽ ഊർജം പ്രവൃത്തിയുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ 'പ്രവൃത്തി' എന്നത് കൂടുതൽ കൃത്യതയോടെ നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്. പവർ എന്ന വാക്ക് നിത്യജീവിതത്തിൽ പല അർഥതലങ്ങളിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നു. കരാട്ടെയിലും ബോക്സിങ്ങിലും നമ്മൾ കരുത്തുറ്റ 'ഇടി' യെക്കുറിച്ച് സംസാരിക്കുന്നു. വളരെ വലിയ വേഗത്തിലാണ് ഇവിടെ ഇടി നടക്കുന്നത്. ഈ അർഥമാണ് ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന 'പവർ' എന്ന പദത്തിന്റെ അർഥത്തോടു ചേർന്നു വരുന്നത്. ഈ ഭൗതികശാസ്ത്ര നിർവചനവും ശരീരശാസ്ത്രപരമായ ചിത്രങ്ങളും തമ്മിൽ ഒരു നേരിയ പാരസ്പര്യം നമ്മുടെ മനസ്സിൽ സൃഷ്ടിക്കുമെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. പ്രവൃത്തി, ഊർജം, പവർ എന്നീ മൂന്നു ഭൗതിക അളവുകളെപ്പറ്റി ധാരണ വികസിപ്പിക്കുക എന്നതാണ് ഈ അധ്യായത്തിന്റെ ലക്ഷ്യം. ഈ ലക്ഷ്യത്തിലേക്കു പോകുന്നതിന്, രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ അദിശഗുണനഫലത്തെ കുറിച്ച് ഒരു ഗണിതശാസ്ത്ര മുന്നറിവ് ആവശ്യമാണ്.

6.1.1 അദിശഗുണനം (The Scalar Product)

സദിശങ്ങളെയും അവയുടെ ഉപയോഗങ്ങളെയും കുറിച്ച് നാം അധ്യായം 4-ൽ പഠിച്ചു. സ്ഥാനാന്തരം, പ്രവേഗം, ത്വരണം, ബലം തുടങ്ങിയ ഭൗതിക അളവുകൾ സദിശങ്ങളാണ്. സദിശങ്ങളുടെ സങ്കലന-വ്യവകലന രീതികൾ നാം ചർച്ച ചെയ്തു. എങ്ങനെയാണ് സദിശങ്ങളെ ഗുണിക്കുന്നത് എന്ന് നോക്കാം. സദിശങ്ങൾ തമ്മിൽ രണ്ടു തരത്തിൽ ഗുണിക്കാൻ കഴിയും. ഇതിൽ ഒരു മാർഗം അദിശഗുണനമാണ്. ഇവിടെ രണ്ടു സദിശങ്ങളെ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ ഒരു അദിശം ഗുണനഫലമായി ലഭിക്കുന്നു. ഇതിനെ അദിശഗുണിതം എന്ന് പറയാം. രണ്ടാമത്തെ രീതിയിൽ രണ്ടു സദിശങ്ങൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ ഒരു സദിശം ഗുണനഫലമായി ലഭിക്കുന്നു. ഇതിനെ സദിശഗുണിതം എന്നു പറയുന്നു. സദിശഗുണനഫലത്തെക്കുറിച്ച് അധ്യായം 7 ൽ പഠിക്കും.

ഈ അധ്യായത്തിൽ രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ അദിശഗുണനഫലം പഠിക്കുന്നു. രണ്ടു സദിശങ്ങൾ A, B എന്നിവയുടെ അദിശഗുണനം അഥവാ ഡോട്ട് പ്രൊഡക്റ്റ് എന്നതിനെ A·B (A ഡോട്ട് B) എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ്.

$$\mathbf{A \cdot B} = A\ B\ \cos\ \theta \qquad (6.1a)$$

ഇവിടെ θ എന്നത് ചിത്രം 6.1(a) യിൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നതുപോലെ രണ്ടു സദിശങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണളവാണ്. A,B, cos θ എന്നിവ അദിശങ്ങളായതുകൊണ്ട്, A യുടെയും B യുടെയും അദിശഗുണിതം ഒരു അദിശ അളവാണ്. **A, B** എന്നീ ഓരോ സദിശത്തിനും ദിശയുണ്ട്. എന്നാൽ അവയുടെ അദിശഗുണനഫലത്തിന് ദിശയില്ല.

സമവാക്യം (6.1. a) യിൽനിന്ന്

$$(\mathbf{A.B} = A(B\cos\theta) = B(A\cos\theta))$$

ജ്യാമിതീയമായി പറഞ്ഞാൽ B cos θ എന്നത് **A**യിലുള്ള **B** യുടെ പ്രക്ഷേപവും (Projection) A cos θ എന്നത് **B** യിലുള്ള **A** യുടെ പ്രക്ഷേപവുമാണ്. ചിത്രം 6.1 (a) യിൽ ഇത് ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് $\boldsymbol{A \times B}$ എന്നത് **A** യുടെ പരിമാണത്തിന്റെയും **A** യുടെ ദിശയിലൂള്ള **B** യുടെ ഘടകത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്. അഥവാ, **B** യുടെ പരിമാണത്തിന്റെയും **B** യുടെ ദിശയിലൂടെയുള്ള **A** യുടെ ഘടകത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്.

സമവാക്യം (6.1. a) യിൽനിന്ന് അദിശഗുണിതം ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നുവെന്ന് കാണാം.

$$\mathbf{A \cdot B} = \mathbf{B \cdot A}$$

അദിശഗുണനം വിതരണനിയമവും അനുസരിക്കുന്നുണ്ട്.

$$\mathbf{A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C}$$

$\mathbf{A} \cdot (\lambda\ \mathbf{B}) = \lambda\ (\mathbf{A \cdot B})$.

ഇവിടെ λ ഒരു രേഖീയസംഖ്യയാണ് മുകളിലെ സമവാക്യങ്ങളുടെ തെളിവ് ഒരു പരിശീലനപ്രശ്നമായി നിങ്ങൾക്ക് നൽകിയിട്ടുണ്ട്.

യൂണിറ്റ് സദിശങ്ങളായ

$\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ യുടെ വിവിധ അദിശഗുണനഫലങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$$

A, B എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങളെ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ

$\mathbf{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ എന്നും

$\mathbf{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ എന്നും എഴുതാം.

ഇവയുടെ അദിശഗുണിതം

$$\mathbf{A \cdot B} = \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (6.1(b))$$

അദിശഗുണിതത്തിന്റെ നിർവചനത്തിൽ നിന്നു സമവാക്യം (6.1 b) യിൽനിന്നും. താഴെപറയും പ്രകാരം കിട്ടും.

(i) $\mathbf{A \cdot A} = A_xA_x + A_yA_y + A_zA_z$

അഥവാ $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \qquad (6.1c)$

കാരണം $\mathbf{A \cdot A} = |\mathbf{A}||\mathbf{A}| \cos 0 = A^2$.

(ii) **A** യും **B** യും ലംബമായാൽ, $\mathbf{A \cdot B} = 0$

ഉദാഹരണം 6.1 ബലം $\mathbf{F} = (3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}})$ യൂണിറ്റും സ്ഥാനാന്തരം $\mathbf{d} = (5\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$ യൂണിറ്റുമായാൽ ഇവക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് കാണുക. **F** ന് **d** യിലുള്ള പ്രക്ഷേപം (Projection) കാണുക.

ഉത്തരം: $\mathbf{F \cdot d} = F_xd_x + F_yd_y + F_zd_z$

$\mathbf{F \cdot d} = 3\ (5) + 4\ (4) + (-5)\ (3)$

$= 16$ യൂണിറ്റ്

അതുകൊണ്ട് $\mathbf{F \cdot d} = F\ d\ \cos\theta = 16$ യൂണിറ്റ്

ഇപ്പോൾ $\mathbf{F \cdot F} = F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$

$= 9 + 16 + 25$

$= 50$ യൂണിറ്റ്

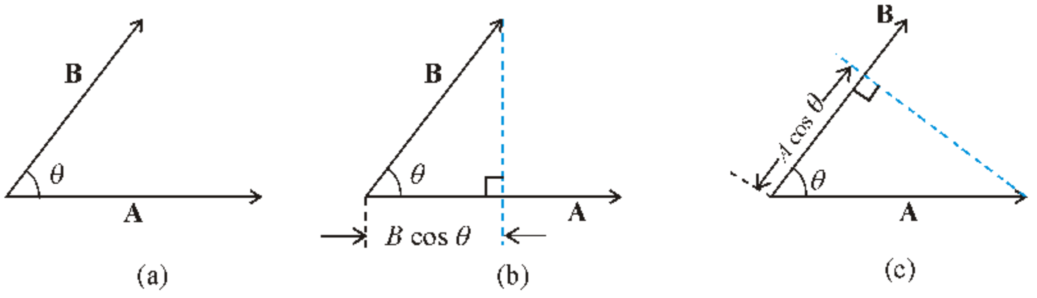
$\mathbf{d \cdot d} = d^2 = d_x^2 + d_y^2 + d_z^2$

$= 25 + 16 + 9$

$= 50$ യൂണിറ്റ്

$$\therefore \cos\ \theta = \frac{16}{\sqrt{50}\sqrt{50}} - \frac{16}{50} - 0.32,$$

$$\theta = \cos^{1}\ 0.32$$



ചിത്രം 6.1 (a) രണ്ടു സദിശങ്ങൾ **A, B** എന്നിവയുടെ അദിശഗുണനഫലം ഒരു അദിശമാണ്. $\mathbf{A \cdot B} - AB\cos\theta$. b) A യിലുള്ള B യുടെ പ്രക്ഷേപമാണ് (Projection) B cos θ. B യിലുള്ള A യുടെ പ്രക്ഷേപമാണ് (Projection) A cos θ

6.2 പ്രവൃത്തി – ഗതികോർജ ആശയം; പ്രവൃത്തി – ഊർജസിദ്ധാന്തം (Notions of Work and Kinetic energy: The Work Energy Theorem)

'a' എന്ന സ്ഥിരത്വരണത്തിൽ നേർരേഖാചലനത്തിന്റെ താഴെ പറയുന്ന സമവാക്യം നാം അധ്യായം 3 ൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്.

$$v^2 - u^2 = 2\ as$$

ഇവിടെ u, v ഇവ യഥാക്രമം ആദ്യവേഗവും അന്തിമവേഗവും, s എന്നത് സ്ഥാനാന്തരവുമാകുന്നു. ഇരുവശത്തെയും $m/2$, കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക.

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = mas = Fs \qquad (6.2a)$$

ഇവിടെ ma = F എന്നത് ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമത്തിൽനിന്നു ലഭിക്കുന്നതാണ്. നമുക്ക് സമവാക്യം (6.2) നെ സദിശങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുത്തി ത്രിമാനത്തിലേക്ക് സാമാന്യവൽക്കരിക്കാം.

$$v^2 - u^2 = 2\ \mathbf{a{\cdot}d}$$

ഇവിടെ **a** യും **d** യും യഥാക്രമം ത്വരണവും സ്ഥാനാന്തരവുമാണ്. ഒരിക്കൽകൂടി ഇരുവശങ്ങളെയും m/2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = m\,\mathbf{a \cdot d} = \mathbf{F \cdot d} \qquad (6.2b)$$

എന്നു ലഭിക്കും.

മുകളിലത്തെ സമവാക്യം പ്രവൃത്തിയെയും ഗതികോർജത്തെയും നിർവചിക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു. സമവാക്യത്തിന്റെ ഇടതുവശം മാസിന്റെ പകുതിയും വേഗങ്ങളുടെ വർഗത്തിന്റെ വ്യത്യാസവും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലമാണ്. ഈ അളവുകളിൽ ഓരോന്നിനെയും 'ഗതികോർജം' എന്നു വിളിക്കും. ഇതിനെ K കൊണ്ട് പ്രതിനിധീകരിക്കാം. വലതുവശം സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെയും സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ ദിശയിലെ ബലത്തിന്റെ ഘടകത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്. ഈ അളവിനെ പ്രവൃത്തി എന്നു വിളിക്കാം. ഇതിനെ 'W' കൊണ്ട് പ്രതിനിധീകരിക്കാം.

അപ്പോൾ (6.2 b) യെ

$$K_f - K_i = W \qquad (6.3)$$

എന്നെഴുതാം.

ഇവിടെ K_i, K_f യഥാക്രമം വസ്തുവിന്റെ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും ഗതികോർജങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഇവിടെ പ്രവൃത്തി, ബലത്തെയും ബലം മൂലമുണ്ടാകുന്ന സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെയും ബന്ധം നൽകുന്നു. **ബലത്തിനു വിധേയമായി ഒരു വസ്തുവിനു സ്ഥാനാന്തരമുണ്ടാകുമ്പോഴാണ് പ്രവൃത്തി ചെയ്യപ്പെടുന്നത്.**

പ്രവൃത്തി – ഊർജനിയമത്തിന്റെ ഒരു സവിശേഷരൂപമാണ് (Special case) സമവാക്യം 6.2. **ഒരു കണികയുടെ ഗതികോർജവ്യത്യാസം അതിൽ ഒരു സഫലബലം** (net force) **ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിക്ക് തുല്യമാണ്.** മുകളിലെ സമവാക്യരൂപീകരണം വ്യതിയാനപ്പെടുന്ന ബലത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ എങ്ങനെ സാമാന്യവൽക്കരിക്കാം എന്നത് പിന്നീടു പഠിക്കാം.

▶ *ഉദാഹരണം 6.2:* ഒരു മഴത്തുള്ളിയുടെ പതനം താഴേക്കുള്ള ഗുരുത്വാകർഷണബലത്തിന്റെയും അതിന്റെ ചലനത്തിന് എതിരായുള്ള പ്രതിരോധബലത്തിന്റെയും സ്വാധീനത്തിലാണ്. പ്രതിരോധബലം പൂർണമായും നിർണയിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ലെങ്കിലും, അത് മഴത്തുള്ളിയുടെ വേഗത്തിന് ആനുപാതികമാണ്. 1.00g മാസുള്ള ഒരു മഴത്തുള്ളി 1.00 കി.മീ. ഉയരത്തിൽ നിന്ന് താഴേക്ക് വീഴുന്നു. മഴത്തുള്ളി 50 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് വേഗത്തിൽ തറയിൽ വന്നിടിക്കുന്നു. (a) ഗുരുത്വാകർഷണബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി എത്ര? (b) കൃത്യമായി നിർണയിക്കപ്പെടാത്ത പ്രതിരോധബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി എത്ര?

ഉത്തരം: (a) മഴത്തുള്ളിയുടെ ഗതികോർജവ്യത്യാസം

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\ v^2 - 0$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times 50 \times 50$$

$$= 1.25\ \text{J}$$

മഴത്തുള്ളി ആദ്യം നിശ്ചലമാണെന്നു കരുതുന്നു. g ക്ക് 10 m/s^2 എന്ന സ്ഥിരവില നൽകിയാൽ ഗുരുത്വാകർഷണബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി

$$W_g = mgh$$

$$= 10^{-3} \times 10 \times 10^3$$

$$= 10.0\ \text{J}$$

(b) പ്രവൃത്തി – ഊർജനിയമത്തിൽ നിന്ന്

$$\Delta K = W_g + W_r$$

ഇവിടെ W_r എന്നത് മഴത്തുള്ളിയിൽ പ്രതിരോധബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിയാണ്.

$$W_r = \Delta K - W_g$$

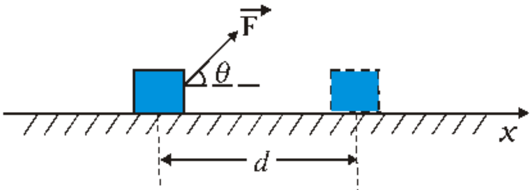
$$= 1.25 - 10$$

$$= -8.75\ \text{J}$$

ഈ പ്രവൃത്തി നെഗറ്റീവാണ്. ◀

6.3 പ്രവൃത്തി (Work)

നേരത്തേ കണ്ടതുപോലെ, പ്രവൃത്തി ബലവുമായും അത് പ്രവർത്തിക്കുന്ന സ്ഥാനാന്തരവുമായും ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഒരു സ്ഥിരബലം **F**, മാസ് m ൽ പ്രയോഗിക്കുന്നുവെന്നു കരുതുക. ചിത്രം 6.2 ൽ കാണിച്ചിരിക്കും പോലെ വസ്തുവിന് **d** സ്ഥാനാന്തരം പോസിറ്റീവ് 'x' ദിശയിൽ ഉണ്ടാകുന്നു.



ചിത്രം 6.2 F ബലത്തിന്റെ സ്വാധീനത്തിൽ ഒരു വസ്തുവിന് d സ്ഥാനാന്തരം ഉണ്ടാകുന്നു.

ബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി സ്ഥാനാന്തര പരിമാണത്തിന്റെയും സ്ഥാനാന്തര ദിശയിലെ ബലത്തിന്റെ ഘടകത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമായി നിർവചിക്കാം. അതുകൊണ്ട്

$$W = (F \cos \theta) d = \mathbf{F \cdot d} \qquad (6.4)$$

സ്ഥാനാന്തരം ഇല്ലാതെ ബലം എത്ര വലുതായാലും പ്രവൃത്തി ചെയ്യപ്പെടുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് നിങ്ങൾ ദൃഢമായ ഒരു മതിലിൽ തള്ളിയാൽ, മതിലിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം പ്രവൃത്തിചെയ്യുന്നില്ല. നിങ്ങളുടെ പേശികൾ മാറിമാറി വികസിക്കുകയും സങ്കോചിക്കുകയും ആന്തരിക ഊർജം ചെലവഴിക്കപ്പെടുകയും നിങ്ങൾ ക്ഷീണിതനാവുകയും ചെയ്തിട്ടും ഇവിടെ പ്രവൃത്തി ചെയ്യപ്പെടുന്നില്ല. അതായത്, സാധാരണ ഉപയോഗഭാഷയിൽ നിന്ന് ശാസ്ത്രത്തിലെ പ്രവൃത്തിയുടെ അർഥം തികച്ചും വ്യത്യസ്തമാണ്.

താഴെ പറയുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ യാതൊരു പ്രവൃത്തിയുമുണ്ടാവുന്നില്ല.

(i) മുകളിൽ കണ്ട ഉദാഹരണത്തിലെ പോലെ സ്ഥാനാന്തരം പൂജ്യമാണെങ്കിൽ: 150 കിലോഗ്രാം മാസ് 30 സെക്കന്റ് തോളിൽ വക്കുന്ന ഒരു ഭാരോദ്വഹകൻ (weight lifter) ഈ സമയം യാതൊരു പ്രവൃത്തിയും ചെയ്യുന്നില്ല.

(ii) ബലം പൂജ്യമാണെങ്കിൽ മിനുസമായ മേശയിലൂടെ തിരശ്ചീനമായി ചലിക്കുന്ന ഒരു ചതുരക്കട്ടക്ക് യാതൊരു തിരശ്ചീനബലവും പ്രയോഗിക്കാതെ വലിയ സ്ഥാനാന്തരം ഉണ്ടാകുന്നു (ഘർഷണം ഇല്ലാത്തതിനാൽ).

(iii) ബലവും സ്ഥാനാന്തരവും പരസ്പരം ലംബമായാൽ: $\theta = \pi/2$ റേഡിയൻ ($= 90^o$), $\cos(\pi/2) = 0$ ആയതിനാലാണ്. ഒരു തിരശ്ചീന മേശയിലൂടെ ചലിക്കുന്ന ഒരു ചതുരക്കട്ടയിൽ ഗുരുത്വാകർഷണ ബലം mg യാതൊരു പ്രവൃത്തിയും ചെയ്യുന്നില്ല. സ്ഥാനാന്തരത്തിന് ലംബമായി പ്രവർത്തിക്കുന്നതു കാരണമാണിത്. ഭൂമിക്കു ചുറ്റുമുള്ള ചന്ദ്രന്റെ ഭ്രമണപഥം കൃത്യമായ വൃത്താകാരമാണെങ്കിൽ ഭൂമിയുടെ ഗുരുത്വാകർഷണ ബലം ചന്ദ്രനിൽ യാതൊരു പ്രവൃത്തിയും ചെയ്യുന്നില്ല. ചന്ദ്രന്റെ തൽക്ഷണ സ്ഥാനാന്തരം തൊടുവരയിലൂടെയും ഭൂമിയുടെ ബലം ആരത്തിലൂടെ ഉള്ളിലേക്കുമാണ്. അതിനാൽ

$\theta = \pi/2$ ആണ്.

പ്രവൃത്തി പോസിറ്റീവും നെഗറ്റീവുമാകാം. θ യുടെ വില 0° യ്ക്കും 90° യ്ക്കുമിടയിലായാൽ സമവാക്യം (6.4)ൽ $\cos\theta$ പോസിറ്റീവ് ആണ്. θ വില 90° യ്ക്കും 180° യ്ക്കും ഇടയിലായാൽ $\cos\theta$ നെഗറ്റീവാണ്. പല ഉദാഹരണങ്ങളിലും ഘർഷണബലം സ്ഥാനാന്തരത്തെ എതിർക്കുന്നു. അതിനാൽ $\theta = 180^o$. അപ്പോൾ ഘർഷണം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി നെഗറ്റീവാണ്. ($\cos 180^o = -1$)

സമവാക്യം 6.4 ൽ നിന്ന് പ്രവൃത്തിക്കും ഊർജത്തിനും ഒരേ ഡൈമെൻഷനുകളാണ് $[ML^2T^{-2}]$ എന്നു കാണാനാകും. ഇവയുടെ SI യൂണിറ്റ് ജൂൾ ആണ് (J). പ്രശസ്ത ബ്രിട്ടിഷ് ഭൗതികശാസ്ത്രജ്ഞൻ ജയിംസ് പ്രെസ്ക്കോട്ട് ജൂളിന്റെ (1811 – 1869) സ്മരണാർഥമാണ് ഈ പേര് നൽകപ്പെട്ടത്. പ്രവൃത്തിയും ഊർജവും ഭൗതിക ആശയങ്ങളായി വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്നതിനാൽ പകരമുള്ള യൂണിറ്റുകളും വ്യാപകമാണ്. ഇവയിൽ ചിലതു പട്ടിക 6.1 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

പട്ടിക 6.1. പ്രവൃത്തി/ഊർജത്തിന്റെ ഇതര യൂണിറ്റുകൾ

1 എർഗ്	10^{-7} J
1 ഇലക്ട്രോൺ വോൾട്ട് (eV)	1.6×10^{-19} J
കലോറി (cal)	4.186 J
കിലോവാട്ട് അവർ (kWh)	3.6×10^6 J

▶ഉദാഹരണം 6.3: ഒരു സൈക്ലിസ്റ്റ് 10 m ദൂരം നിരക്കി നീക്കി തന്റെ സൈക്കിൾ നിർത്തുന്നു. ഈ പ്രവർത്തനത്തിൽ ചലനത്തിനെതിരായി റോഡ് 200 N ബലം സൈക്കിളിൽ പ്രയോഗിക്കുന്നു.

(a) റോഡ് സൈക്കിളിൽ ചെയ്ത പ്രവൃത്തി എത്ര?
(b) സൈക്കിൾ റോഡിൽ ചെയ്ത പ്രവൃത്തി എത്ര?

ഉത്തരം:

റോഡ് സൈക്കിളിൽ ചെയ്ത പ്രവൃത്തിയെന്നത് റോഡിലെ ഘർഷണബലം സൈക്കിളിൽ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിയാണ്.

(a) നിർത്തുന്ന ബലവും സ്ഥാനാന്തരവും തമ്മിലുള്ള കോൺ 180° (π റേഡിയൻ) ആണ് അതിനാൽ റോഡ് ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി.

$$W_r = Fd \cos\theta$$
$$= 200 \times 10 \times \cos\pi = -2000 \text{ J}$$

പ്രവൃത്തി ഊർജസിദ്ധാന്തത്തിനനുസരിച്ച് നെഗറ്റീവായ ഈ പ്രവൃത്തിയാണ് സൈക്കിളിനെ നിർത്തുന്നത്.

(b) ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച്, സൈക്കിൾ കാരണമായി തുല്യവും വിപരീതവുമായ ഒരു ബലം റോഡിൽ പ്രയോഗിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഈ ബലത്തിന്റെ പരിമാണം 200 N ആണ്. എന്നാൽ റോഡിന് സ്ഥാനാന്തരം ഉണ്ടാകുന്നില്ല. അതിനാൽ സൈക്കിൾ റോഡിൽ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി പൂജ്യമാണ്.

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽനിന്ന് B എന്ന വസ്തു A യിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം, B യിൽ A പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലത്തിനു തുല്യവും വിപരീതവുമാണ് എന്നു ബോധ്യമാവും. എന്നാൽ B യിൽ A ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിയും A യിൽ B ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിയും തുല്യവും വിപരീതവുമാകണമെന്ന് നിർബന്ധമില്ലായെന്നുള്ളതാണ്.

6.4 ഗതികോർജം (Kinetic Energy)

മുമ്പു സൂചിപ്പിച്ചപ്പോലെ, m മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിന് v പ്രവേഗമുണ്ടെങ്കിൽ, അതിന്റെ ഗതികോർജം K.

$$K = \frac{1}{2}m\ \mathbf{v.v} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (6.5)$$

ഗതികോർജം ഒരു അദിശ (6.5) അളവാണ്. ചലനം മൂലം ഒരു വസ്തുവിന് ചെയ്യാൻ കഴിയുന്ന പ്രവൃത്തിയുടെ അളവാണ് ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജം. പണ്ട് അതിവേഗത്തിലുള്ള പ്രവാഹത്തിന്റെ ഗതികോർജം ധാന്യങ്ങൾ പൊടിക്കാനായി ഉപയോഗിച്ചതും, കാറ്റിന്റെ ഗതികോർജം കപ്പലുകളുടെ സഞ്ചാരത്തിന് ഉപയോഗിച്ചതും ഈ അറിവിന്റെ പിൻബലത്തിലാണ്. വിവിധ വസ്തുക്കളുടെ ഗതികോർജം പട്ടിക 6.2 ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

പട്ടിക 6.2. സവിശേഷ ഗതികോർജങ്ങൾ K

വസ്തു	മാസ്സ് (kg)	വേഗം (ms^{-1})	K(J)
കാർ	2000	25	6.3×10^5
ഓടുന്ന അത്‌ലറ്റ്	70	10	3.5×10^3
വെടിയുണ്ട	5×10^{-2}	200	10^3
10 m ഉയരത്തിൽനിന്ന് താഴേക്കിട്ട കല്ല്	1	14	10^2
ടെർമിനൽ വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന മഴത്തുള്ളി	3.5×10^{-5}	9	1.4×10^{-3}
വായുതന്മാത്ര	$\simeq 10^{-26}$	500	$\simeq 10^{-21}$

▶*ഉദാഹരണം 6.4:* ഒരു ബാലിസ്റ്റിക് പ്രദർശനത്തിൽ പോലീസ് ഉദ്യോഗസ്ഥൻ 50.0g മാസുള്ള ഒരു വെടിയുണ്ട ഉപയോഗിച്ച് 200 m s^{-1} വേഗത്തിൽ 2.00 സെന്റീമീറ്റർ കനമുള്ള മൃദുവായ ഒരു പ്ലൈവുഡിലേക്ക് വെടിവക്കുന്നു. അതിന്റെ ആദ്യ ഗതികോർജത്തിന്റെ 10% ൽ അത് പ്ലൈവുഡിൽ നിന്നു പുറത്തേക്കു വരുന്നു. പുറത്തേക്കു വരുന്ന വെടിയുണ്ടയുടെ വേഗമെത്ര?

ഉത്തരം: വെടിയുണ്ടയുടെ ആദ്യ ഗതികോർജം $mv^2/2 = 1000$ J ആണ്. അതിന്റെ അവസാന ഗതികോർജം $0.1\times1000 = 100$ J ആണ്. അതിന്റെ പുറത്തേക്കുള്ള വേഗം v_f ആയാൽ,

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = 100\ \text{J}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2\times100\ \text{J}}{0.05\ \text{kg}}} = 63.2\ \text{m s}^{-1}$$

അതായത് വേഗം 68% കുറയുന്നു (90% അല്ല). ◀

6.5 വ്യതിയാനബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി (Work done by a Variable Force)

ഒരു സ്ഥിരബലം അപൂർവമായാണ് നമുക്ക് അനുഭവപ്പെടുക. അസ്ഥിര ബലങ്ങളാണ് നിത്യജീവിതത്തിൽ സർവ്വസാധാരണ നാം കണ്ടുവരുന്നത്. ഏകമാനമായ ഒരു വ്യതിയാനബലത്തിന്റെ ചിത്രീകരണമാണ് ചിത്രം 6.2.

സ്ഥാനാന്തരം Δx വളരെ ചെറുതായാൽ $F(x)$ എന്ന ബലത്തെ നമുക്ക് ഏകദേശം സ്ഥിരമായി കണക്കാക്കാം. അപ്പോൾ ചെയ്യപ്പെട്ട പ്രവൃത്തി

$\Delta W = F(x)\ \Delta x$ ആണ്.

ഇത് ചിത്രം 6.3 (a) യിൽ കാണാം. ചിത്രം 6.3 (a) യിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള ചതുര പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടിച്ചേർത്താൽ ആകെ പ്രവൃത്തി താഴെ പറയും പ്രകാരം ലഭിക്കുന്നു.

$$W \cong \sum_{x_i}^{x_f} F(x)\Delta x \quad (6.6)$$

ഇവിടെ പ്രാരംഭസ്ഥാനം x_i മുതൽ അന്തിമസ്ഥാനം x_f വരെയാണ് സങ്കലനം ചെയ്തിരിക്കുന്നത്.

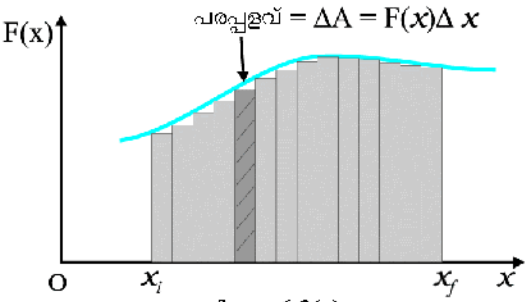
സ്ഥാനാന്തരങ്ങൾ പൂജ്യത്തോട് അടുത്താൽ തുകയിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം പരിധികൂടാതെ കൂടുകയും തുക ഒരു കൃത്യവിലയിലേക്ക് എത്തുകയും ചെയ്യുന്നു. ഇങ്ങനെ ചെയ്താൽ ഇത് ചിത്രം 6.3 (b) യിലെ വക്രരേഖയുടെ താഴെയുള്ള പരപ്പളവിന് തുല്യമാകും.

അതുകൊണ്ട് ചെയ്യപ്പെട്ട പ്രവൃത്തി

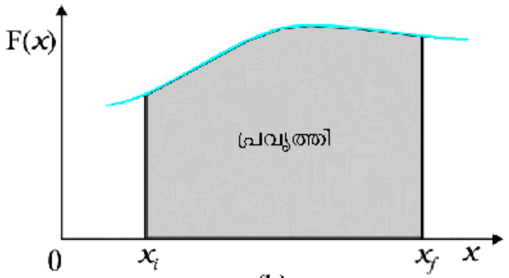
$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F(x)\Delta x$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx \qquad (6.7)$$

ഇവിടെ ‘lim’ എന്നത് Δx പൂജ്യത്തോടടുക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന തുകയുടെ പരിധിയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. അതിനാൽ വ്യതിയാനപ്പെടുന്ന ഒരു ബലത്തിന്, സ്ഥാനാന്തരത്തിനു മേലുള്ള ബലത്തിന്റെ ഒരു നിശ്ചിത സമാകലനമായി ചെയ്യപ്പെടുന്ന പ്രവൃത്തിയെ സൂചിപ്പിക്കാം.



ചിത്രം 6.3(a)

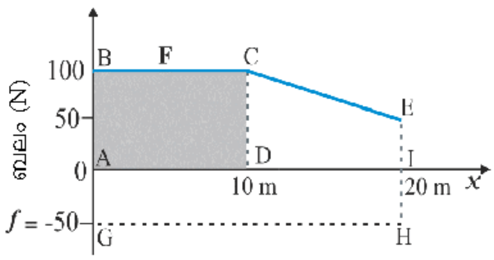


(b)

ചിത്രം. 6.3 (a) യിലെ ദീർഘചതുരം വ്യതിയാനബലം, F(x) ചെറിയ സ്ഥാനാന്തരം Δx ൽ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി $\Delta W = F(x)\,\Delta x$ നെ കറുപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ഭാഗം സൂചിപ്പിക്കുന്നു. (b) $\Delta x \to 0$ എന്ന സങ്കൽപ്പത്തിൽ എല്ലാ ദീർഘചതുരങ്ങളുടെയും പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടുമ്പോൾ, വക്രരേഖയുടെ താഴെയുള്ള പരപ്പളവ് F(x) ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിക്ക് തുല്യമാണെന്നു കാണാൻ കഴിയും.

▶ *ഉദാഹരണം 6.5:* റെയിൽവേ പ്ലാറ്റ്ഫോമിന്റെ പരുപരുത്ത പ്രതലത്തിലൂടെ ഒരാൾ ഒരു പെട്ടി തള്ളുന്നു. 10 മീറ്റർ ദൂരത്തേക്ക് 100 N ബലം അയാൾ പ്രയോഗിക്കുന്നു. അതിനുശേഷം അയാൾ പടിപടിയായി ക്ഷീണിക്കുകയും പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം ദൂരത്തിന് ആനുപാതികമായി കുറഞ്ഞ് 50 N ആയി മാറുകയും ചെയ്തു. ട്രങ്ക് സഞ്ചരിച്ച ആകെ ദൂരം 20 m ആണ്. അയാൾ പ്രയോഗിച്ച ബലത്തിനെയും ഘർഷണബലത്തിനെയും സ്ഥാനാന്തരത്തിനനുസരിച്ച് ചിത്രീകരിക്കുക. ഘർഷണബലം 50 N ആണ്. 20 m ദൂരത്തിൽ രണ്ട് ബലങ്ങളും ചെയ്ത പ്രവൃത്തി കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം:



ചിത്രം 6.4 പ്രയോഗിച്ച ബലം F ഉം എതിർക്കുന്ന ഘർഷണബലം f ഉം സ്ഥാനാന്തരമായുള്ള ചിത്രീകരണം.

പ്രയോഗിച്ച ബലത്തിന്റെ ചിത്രീകരണം ചിത്രം 6.4 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. $x = 20$ m ൽ, $F = 50$ N ($\neq 0$). ഘർഷണബലം f, $|\mathbf{f}| = 50$ Nഎന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു. അത് ചലനത്തെ എതിർക്കുകയും **F** ന്റെ എതിർദിശയിൽ പ്രയോഗിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. അതിനാലതിനെ ബല അക്ഷത്തിന്റെ നെഗറ്റീവ് വശത്തു കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

അയാൾ ചെയ്ത പ്രവൃത്തി

$W_F \rightarrow$ ABCD എന്ന ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് + ലംബകം CEID യുടെ പരപ്പളവ്

$$W_F = 100 \times 10 + \frac{1}{2}(100 + 50) \times 10$$

$$= 1000 + 750$$

$$= 1750 \text{ J}$$

ഘർഷണബലം ചെയ്ത പ്രവൃത്തി

$W_f \rightarrow$ ചതുരം AGHI യുടെ പരപ്പളവ്

$$W_f = (-50) \times 20$$

$$= -1000 \text{ J}$$

ബലഅക്ഷത്തിന്റെ നെഗറ്റീവ് വശത്തെ പരപ്പളവിന് നെഗറ്റീവ് ചിഹ്നം നൽകുന്നു. ◀

6.6 വ്യതിയാനബലത്തിന്റെ പ്രവൃത്തി – ഊർജ സിദ്ധാന്തം (The Work - Energy Theorem for a Variable Force)

ഇനി ഒരു വ്യതിയാനബലത്തിന്റെ പ്രവൃത്തി – ഊർജ സിദ്ധാന്തം എങ്ങനെ തെളിയിക്കാം എന്നു നോക്കാം. ഇതിനായി ഒരു ഏകമാന വ്യതിയാനബലം പരിഗണിക്കുന്നതാണ് എളുപ്പം.

ഗതികോർജവ്യതിയാനത്തിന്റെ നിരക്ക്

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

$$= m \frac{dv}{dt} v$$

$= F v$ (ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം അനുസരിച്ച്)

$$= F \frac{dx}{dt}$$

അതുകൊണ്ട് $dK = Fdx$ എന്നെഴുതാം.

ആദ്യസ്ഥാനം x_i മുതൽ അന്ത്യസ്ഥാനം x_f വരെ ഇതിനെ സമാകലനം ചെയ്യുക.

$$\int_{K_i}^{K_f} dK = \int_{x_i}^{x_f} F dx$$

x_i, x_f എന്നിവയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ആദ്യ-അന്ത്യ ഗതികോർജങ്ങളാണ് K_i ഉം K_f ഉം

$$K_f - K_i = \int_{x_i}^{x_f} F dx \qquad (6.8a)$$

സമവാക്യം 6.7 ൽ നിന്ന്

$K_f - K_i \quad W$ (6.8b) എന്നു ലഭിക്കും.

ഒരു വ്യതിയാനബലത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ പ്രവൃത്തി-ഊർജസിദ്ധാന്തം ഇത്തരത്തിൽ തെളിയിക്കാം.

വിവിധ പ്രശ്നങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യാൻ പ്രവൃത്തി-ഊർജനിയമം ഉപകാരപ്രദമാണെങ്കിലും അത് ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമത്തിനു വിധേയമായി ഉണ്ടാകുന്ന ചലനം എന്ന ആശയത്തിന്റെ വിവിധതലങ്ങൾ പൂർണ്ണമായും ഉൾക്കൊള്ളുന്നില്ല. ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലന നിയമത്തിന്റെ ഒരു സമാകലനരൂപമാണിത്. ക്ഷണ നേരത്തെ ബലവും ത്വരണവും തമ്മിലുള്ള ഒരു ബന്ധമാണ് ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം. പ്രവൃത്തി -ഊർജനിയമം ഒരു സമയ ഇടവേളയിലെ സമാകലനത്തിന്റെ രൂപത്തിലാണ് കാണുന്നത്. അതായത് ഇവിടെ ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമപ്രസ്താവനയിലെ സമയ വേളകൾ സമാകലനം ചെയ്യപ്പെടുന്നു. അതിനാൽ സമയാശ്രയ വിവരങ്ങൾ ലഭ്യമല്ല. ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം ദ്വിമാനത്തിലും ത്രിമാനത്തിലും സദിശരൂപത്തിലാണ് പ്രസ്താവിക്കപ്പെടുന്നത്. എന്നാൽ പ്രവൃത്തി – ഊർജനിയമം അദിശരൂപത്തിലുമാണ്. അദിശരൂപത്തിലായതിനാൽ, ഈ പ്രവൃത്തി-ഊർജസിദ്ധാന്തത്തിൽ നിന്നും ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമത്തിലെ ദിശകളെ സംബന്ധിച്ച വിശദാംശങ്ങൾ ലഭിക്കില്ല.

▶ *ഉദാഹരണം 6.6:* $m_1 = 1kg$ മാസുള്ള ഒരു കട്ട $v_i = 2ms^{-1}$ പ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിച്ച് $x = 0.10m$ മുതൽ $x = 2.01$ m വരെ നീളമുള്ള ഒരു പരുപരുത്ത പ്രദേശത്തിൽ കടക്കുന്നു. ഈ പരിധിയിൽ കട്ടയുടെ മന്ദീകരണബലം F_r സ്ഥാനാന്തരം x ന് വിപരീത അനുപാതത്തിലാണ്.

$$F = \frac{-k}{x} \quad 0.1m < x < 2.01m$$

$- \; o, \; x < 0.1m$ ലും $x > 2.01$ ലും

ഇവിടെ $k = 0.5$ J ആണ്. ഈ പ്രദേശം മുറിച്ചു കടക്കുമ്പോൾ കട്ടയ്ക്കുള്ള അവസാന ഗതികോർജവും വേഗം v_f ഉം എത്രയാണ്?

ഉത്തരം: സമവാക്യം (6.8. a) പ്രകാരം

$$K_f = K_i + \int_{0.1}^{2.01} \frac{(-k)}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2} m v_i^2 - k \ln(x) \Big|_{0.1}^{2.01}$$

$$= \frac{1}{2} m v_i^2 - k \ln(2.01/0.1)$$

$$= 2 - 0.5 \ln(20.1)$$

$$= 2 - 1.5 = 0.5 \text{ J}$$

$$v_f = \sqrt{2K_f / m} = 1 \text{ m s}^{\;1}$$

ln എന്നത് e ആധാരമാക്കിയുള്ള സ്വാഭാവിക ലോഗരിതത്തിന്റെ അടയാളമാണ്. 10 ആധാരമാക്കിയുള്ള ലോഗരിതം അല്ല [$\ln X = \log_e X = 2.303 \log_{10} X$]. ◀

6.7 സ്ഥിതികോർജം എന്ന ആശയം (The concept of potential energy)

പൊട്ടൻഷ്യൽ എന്ന പദം പ്രവൃത്തിചെയ്യാനുള്ള കഴിവിനെയോ അതിന്റെ സാധ്യതയോ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. സ്ഥിതികോർജം എന്നത് 'സംഭരിക്കപ്പെട്ട ഊർജം' എന്ന ആശയം ഒരാളുടെ മനസ്സിൽ കൊണ്ടുവരുന്നു. വലിച്ചുനീട്ടിയ ഒരു വില്ലിലെ ചരടിന് സ്ഥിതികോർജമുണ്ട്. അതിനെ സ്വതന്ത്രമാക്കുമ്പോൾ, ചരടുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന അമ്പ് വലിയ വേഗത്തിൽ പറന്നു പോകുന്നു. ഭൂമിയുടെ പുറംതോട് ഒരുപോലെയല്ല. അതിൽ 'ലോപരേഖകൾ' (Fault lines) എന്ന തുടർച്ചയില്ലായ്മകളും സ്ഥാനഭ്രംശങ്ങളുമുണ്ട്. ഭൂമിയുടെ പുറംതോടിലെ ഈ ലോപരേഖകൾ 'അമർത്തിവയ്ക്കപ്പെട്ട' സ്പ്രിങ്ങുകൾ പോലെ വർത്തിക്കുന്നു. അവക്ക് വലിയ അളവിൽ സ്ഥിതികോർജമുണ്ട്. ഈ ലോപരേഖകളുടെ പുനക്രമീകരണം നടക്കുമ്പോൾ ഈ സ്ഥിതികോർജം സ്വതന്ത്രമാക്കപ്പെടുന്നത് ഭൂകമ്പത്തിന് കാരണമാകുന്നു. സ്ഥാനം മൂലമോ ഒരു വസ്തുവിന്റെ ക്രമീകരണം മൂലമോ സംഭരിക്കപ്പെടുന്ന ഊർജമാണ് സ്ഥിതികോർജം. വസ്തു സ്വതന്ത്രമാക്കിയാൽ അതിൽ സംഭരിക്കപ്പെട്ട ഊർജത്തെ ഗതികോർജരൂപത്തിൽ സ്വതന്ത്രമാക്കുന്നു, സ്ഥിതികോർജത്തെപ്പറ്റിയുള്ള നമ്മുടെ ധാരണകൾ കൂടുതൽ ദൃഢമാക്കാം.

m മാസുള്ള ഒരു പന്തിലെ ഗുരുത്വാകർഷണബലം mg ആകുന്നു. ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിനടുത്ത് g യെ സ്ഥിരമായി കണക്കാക്കാം. അടുത്ത് എന്നതു കൊണ്ട് ഇവിടെ അർഥമാക്കുന്നത് ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽ നിന്നുള്ള ഉയരം 'h', ഭൂമിയുടെ ആരം R നെ അപേക്ഷിച്ച് വളരെ കുറവ് എന്നാണ് ($h << R_E$). അതിനാൽ ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിനടുത്ത് g യുടെ വ്യതിയാനം അവഗണിക്കാവുന്നതാണ്*. പന്തിനെ 'h' ഉയരത്തിലേക്ക് നമുക്ക്

ഉയർത്താം. ഇവിടെ മുകളിലേക്കുള്ള ദിശ പോസിറ്റീവായിട്ടാണെടുക്കുന്നത്. ഗുരുത്വാകർഷണ ബലത്തിനെതിരേ ബാഹ്യശക്തി ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി mgh ആണ്. ഈ പ്രവൃത്തി സ്ഥിതികോർജമായി സംഭരിക്കപ്പെടുന്നു. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഗുരുത്വാകർഷണ സ്ഥിതികോർജം, ഉയരം h ന്റെ ഫലനം ആയി, $V(h)$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം. ഇത് ആ വസ്തുവിനെ h ഉയരത്തിലേക്ക് ഉയർത്താൻ ഗുരുത്വാകർഷണബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിയുടെ നെഗറ്റീവാണ്

$$V(h) = mgh$$

h നെ ഒരു ചരമായി പരിഗണിച്ചാൽ ഗുരുത്വാകർഷണ ബലം F എന്നത് h ആധാരമാക്കിയുള്ള $V(h)$ന്റെ ആനുമാനികത്തിന്റെ *(derivative)* നെഗറ്റീവിന് തുല്യമാണ്. അതായത്

$$F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}V(h) = -mg$$ എന്നെഴുതാം.

ഗുരുത്വാകർഷണബലം താഴേക്കാണെന്നാണ് -ve ചിഹ്നം സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. സ്വതന്ത്രമാക്കുമ്പോൾ, പന്ത് കൂടിയ വേഗത്തിൽ താഴേക്കു വരുന്നു. തറയിൽ തൊടുന്നതിനു തൊട്ടു മുമ്പ്, അതിന്റെ വേഗം താഴെ പറയുന്ന ചലനബന്ധത്തിൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

$$v^2 = 2gh$$

ഈ സമവാക്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ ഇവിടെ $\frac{1}{2}mv^2$ എന്നത് ഗതികോർജമാണല്ലോ. അതുകൊണ്ട് ഈ വസ്തുവിന് 'h' ഉയരത്തിലുള്ള ഗുരുത്വാകർഷണ സ്ഥിതികോർജം, വസ്തുവിനെ സ്വതന്ത്രമാക്കിയശേഷം തറയിൽ എത്തുമ്പോൾ ഗതികോർജമാകുമെന്ന് ഈ സമവാക്യത്തിലൂടെ സ്പഷ്ടമാകും.

ബലത്തിനെതിരെ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി വസ്തുവിന്റെ ഊർജമായി സംഭരിക്കപ്പെടുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ മാത്രമേ സ്ഥിതികോർജം എന്ന ആശയത്തിന് പ്രസക്തിയുള്ളൂ. ബാഹ്യനിയന്ത്രണങ്ങൾ ഒഴിവാക്കിയാൽ, ഈ ഊർജം പ്രത്യക്ഷപ്പെടുന്നത് ഗതികോർജമായിട്ടാണ്. (ലളിതമാക്കാനായി, ഏകമാനത്തിൽ) ബലം F(x) – നെ

$F(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ എന്ന രൂപത്തിലെഴുതാൻ കഴിയുമ്പോൾ മാത്രമേ അതിന് സ്ഥിതികോർജം നൽകാനാകൂ.

ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്

$$\int_{x_i}^{x_f} F(x)\mathrm{d}x = -\int_{V_i}^{V_f} \mathrm{d}V = V_i - V_f$$

ഗ്രാവിറ്റിപോലെയുള്ള ഒരു സംരക്ഷിതബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സ്ഥാനങ്ങളെ മാത്രം ആശ്രയിക്കുന്നു. കഴിഞ്ഞ അധ്യായത്തിൽ ചരിവ്പ്രതലവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ചില വസ്തുതകൾ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. m മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിനെ h ഉയരമുള്ള മിനുസമായ ചരിവുപ്രതലത്തിന്റെ മുകളിലെ നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽനിന്നു സ്വതന്ത്രമാക്കിയാൽ ചരിവിന്റെ കോണളവ് എത്രയായാലും ഈ പ്രതലത്തിന്റെ താഴ്ഭാഗത്ത് ഇതിന്റെ വേഗം $\sqrt{2gh}$ ആണെന്ന് നാം കണ്ടിട്ടുണ്ട്. ചരിവുതലത്തിന്റെ താഴ്ഭാഗത്ത് അത് mgh തുല്യമായ ഗതികോർജം ആർജിക്കുന്നതായി കാണാം. പ്രവൃത്തിയോ ഗതികോർജമോ വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരപാതയെയോ പ്രവേഗത്തെയോ മറ്റോ ആശ്രയിക്കുകയാണെങ്കിൽ അവയുണ്ടാക്കുന്ന ബലത്തെ അസംരക്ഷിത ബലം എന്നു വിളിക്കാം.

സ്ഥിതികോർജത്തിന്റെ ഡൈമെൻഷൻ $[ML^2T^{-2}]$ ഉം യൂണിറ്റ് ജൂളും (J) ആണ്. അതാകട്ടെ ഗതികോർജത്തിന്റെയും പ്രവൃത്തിയുടെയും ഡൈമെൻഷനുകളും യൂണിറ്റും തന്നെയാണ്. പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം സംരക്ഷിതബലമാണെങ്കിൽ സ്ഥിതികോർജവ്യത്യാസം ബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിയുടെ നെഗറ്റീവിന് തുല്യമായിരിക്കും.

$$\Delta V = -F(x)\,\Delta x \qquad (6.9)$$

മുകളിൽ പ്രതിപാദിച്ച താഴേക്കു പതിക്കുന്ന പന്തിന്റെ ഉദാഹരണത്തിൽ എങ്ങനെയാണ് സ്ഥിതികോർജം ഗതികോർജമായി പരിവർത്തനം ചെയ്തതെന്ന് നമ്മൾ കണ്ടു. ഇത് ബലതന്ത്രത്തിലെ ഒരു പ്രധാന സംരക്ഷണ തത്വത്തിലേക്ക് നമ്മെ എത്തിക്കുന്നു. ഈ തത്വം എന്താണെന്ന് മനസിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കാം.

6.8 യാന്ത്രികോർജത്തിന്റെ സംരക്ഷണം (The Conservation of Mechanical Energy)

ഏകമാനചലനത്തിൽ ഈ തത്വത്തെ നമുക്ക് എളുപ്പത്തിൽ തെളിയിക്കാം. F എന്ന സംരക്ഷിതബലത്തിന്റെ സ്വാധീനത്താൽ ഒരു വസ്തുവിന് Δx സ്ഥാനാന്തരം ഉണ്ടായെന്നിരിക്കട്ടെ. അങ്ങനെയെങ്കിൽ പ്രവൃത്തി - ഊർജസിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് $\Delta K = F(x)\,\Delta x$ എന്നെഴുതാം.

സംരക്ഷിതബലമായതിനാൽ സ്ഥിതികോർജ ഫലനത്തെ $\Delta V = -F(x)\,dx$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം.

മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$\Delta K + \Delta V = 0$ എന്നെഴുതാമല്ലോ.

$$\Delta(K + V) = 0 \qquad (6.10)$$

$K + V$ യ്ക്ക് വ്യത്യാസം വരുന്നില്ലായെന്നാണിത് അർഥമാക്കുന്നത്. അതായത് വസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജങ്ങളുടെയും സ്ഥിതികോർജങ്ങളുടെയും തുകയായ $K + V$ ഒരു സ്ഥിരാങ്കമാണ്. x_i മുതൽ x_f വരെയുള്ള പാത പരിഗണിച്ചാൽ

$$K_i + V(x_i) = K_f + V(x_f) \qquad (6.11)$$

എന്നാണിതിനർഥം.

* ഉയരത്തിനനുസരിച്ചുള്ള g യുടെ വ്യതിയാനം ഗുരുത്വാകർഷണമെന്ന് അധ്യായം 8 ൽ ചർച്ചചെയ്യും.

$K+V(x)$ എന്ന അളവിനെ വസ്തുവിന്റെ ആകെ യാന്ത്രികോർജം എന്നു വിളിക്കാം. ഓരോ ബിന്ദുവിലും ഗതികോർജത്തിന്റെയും സ്ഥിതികോർജത്തിന്റെയും വിലകൾ വ്യത്യാസപ്പെട്ടാമെങ്കിലും അവയുടെ തുക സ്ഥിരമായിരിക്കും. 'സംരക്ഷിതബലം' എന്നതിന്റെ അർഥം ഇപ്പോൾ വ്യക്തമാണല്ലോ.

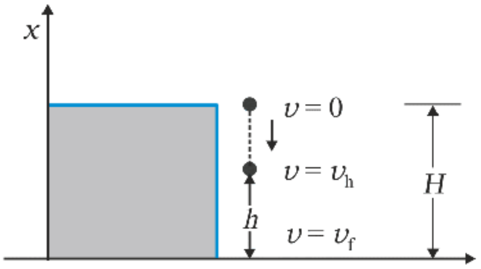
സംരക്ഷിതബലത്തിന്റെ ചില നിർവചനങ്ങൾ നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം.

- സമവാക്യം 6.9 ൽ തന്നിരിക്കുന്നതുപോലെ ബലം ഒരു അദിശ അളവായ $V(x)$ ൽ നിന്ന് രൂപീകരിക്കാൻ കഴിയുമെങ്കിൽ ആ ബലം സംരക്ഷിതബലമാണ്.

  ത്രിമാനത്തിലെ ഒരു സാമാന്യവൽക്കരണത്തിന് ഒരു സദിശ ആനുമാനികം ആവശ്യമായതിനാൽ അത് പുസ്തകത്തിന്റെ ഉള്ളടക്കപരിധിക്ക് പുറത്താണ്.
- ഒരു സംരക്ഷിതബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി അഗ്രബിന്ദുക്കളെ മാത്രം ആശ്രയിക്കുന്നു. ഇത് താഴെ പറയുന്ന ബന്ധത്തിൽ നിന്നു വ്യക്തമാണ്.

  $W \quad K_f \quad K_i \quad V(x_i) - V(x_f)$
- തുടങ്ങിയ ബിന്ദുവിൽത്തന്നെ തിരിച്ചെത്തുന്ന ഒരു പാതയിൽ സംരക്ഷിതബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി പൂജ്യമാണ്. സമവാക്യം 6.11 ൽ $x_i = x_f$ എന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ ഇത് വ്യക്തമാണ്. ഒരു **വ്യൂഹത്തിൽ പ്രവൃത്തി ചെയ്യുന്ന ബലം സംരക്ഷിതമാണെങ്കിൽ, അതിലെ ആകെ യാന്ത്രികോർജം സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നു.**

ഗുരുത്വാകർഷണബലത്തിന്റെ ഉദാഹരണം വീണ്ടും പരിഗണിച്ചുകൊണ്ടോ അടുത്ത ഭാഗത്തെ സ്പ്രിങ് ബലം എടുത്തോ മുകളിലെ ചർച്ചകൾക്കു കൂടുതൽ വ്യക്തത വരുത്താം. ചിത്രം 6.5, H ഉയരത്തിൽ നിന്നു താഴേക്കു പതിക്കുന്ന m മാസുള്ള ഒരു പന്ത് ചിത്രീകരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 6.5 H ഉയരത്തിൽ നിന്നു താഴേക്കു വീഴ്ത്തിയ പന്തിന്റെ സ്ഥിതികോർജത്തിൽ നിന്ന് ഗതികോർജത്തിലേക്കുള്ള മാറ്റം.

പൂജ്യം (തറനിരപ്പ്), h, H എന്നീ ഉയരങ്ങളിലുള്ള പന്തിന്റെ ആകെ യാന്ത്രികോർജങ്ങൾ യഥാക്രമം E_o, E_h, E_H എന്നു സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ

$$E_H \quad mgH \tag{6.11 (a)}$$

$$E_h = mgh + \frac{1}{2}mv_h^2 \tag{6.11 (b)}$$

$$E_0 = (1/2)\, mv_f^2 \tag{6.11 (c)}$$

ഇവിടെ പ്രവർത്തിക്കുന്ന സറിരബലം $F(x)$ വസ്തുവിന്റെ സറാനത്തെ ആധാരമാക്കുന്ന ഒരു സവിശേഷ ബലമായതിനാൽ യാന്ത്രികോർജം സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നു. അതുകൊണ്ട് $E_H \quad E_0$ ആണ്.

$$\text{അതിനാൽ } mgH = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{2gH}$$

ഇത് 3.7 ൽ, സ്വതന്ത്രമായി താഴേക്കു പതിക്കുന്ന വസ്തുവിന്റെ കാര്യത്തിൽ ലഭിച്ച ഫലമാണ്.

വീണ്ടും $E_H = E_h$ എന്നെടുത്താൽ ഇതു സൂചിപ്പിക്കുന്നത്

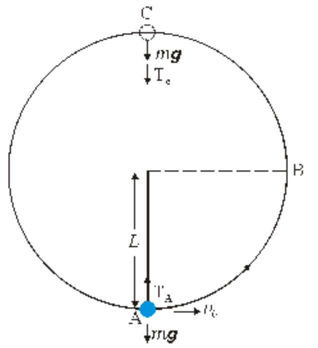
$$v_h^2 = 2g(H-h) \tag{6.11 (d)}$$

എന്നാണ്.

ഗതികത്തിൽ നാം നേരത്തേ പഠിച്ചിട്ടുള്ളതുപോലെ. H ഉയരത്തിൽ, വസ്തുവിന്റെ ഊർജം പൂർണമായും സ്ഥിതികോർജമാണ്.

h ഉയരത്തിലിത് ഭാഗികമായി ഗതികോർജവും ഭൂനിരപ്പിലപൂർണമായും ഗതികോർജവുമാണ്.

▶ *ഉദാഹരണം 6.7:* L നീളമുള്ള ഒരു നേർത്ത ചരടിൽ m മാസുള്ള ഒരു ഗോളം തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്നു. ചരടിന്റെ താഴെ A യിൽ ഒരു തിരശ്ചീന പ്രവേഗം v_o നൽകിയാൽ, അത് ലംബതലത്തിൽ ഒരു അർധ വൃത്താകൃതപാത പൂർത്തിയാക്കുന്നു. ഏറ്റവും മുകളിലെ ബിന്ദു C യിൽ എത്തുമ്പോൾ മാത്രം ചരട് അയയുന്നു. ഇത് ചിത്രം 6.6 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. താഴെ പറയുന്നവയുടെ സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുക. (i) v_o (ii) B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ വേഗം (iii) B യിലും C യിലുമുള്ള ഗതികോർജങ്ങളുടെ അനുപാതം. C യിൽ എത്തിയതിനുശേഷം ഈ ഗോളത്തിന്റെ സഞ്ചാരപഥം എങ്ങനെ ആയിരിക്കും?



ചിത്രം 6.6

ഉത്തരം (i) ഗോളത്തിൽ രണ്ടു ബാഹ്യബലങ്ങളുണ്ട്. ഗുരുത്വാകർഷണവും ചരടിലെ വലിവ് ബലവും (T). ചരടിന് ലംബമായിട്ടാണ് എപ്പോഴും സ്ഥാനാന്തരം. അതിനാൽ വലിവുബലം ഗോളത്തിൽ പ്രവൃത്തി ചെയ്യുന്നില്ല. ഗോളത്തിന്റെ സ്ഥിതികോർജവുമായി ഗുരുത്വാകർഷണബലം മാത്രമേ ബന്ധപ്പെടുന്നുള്ളൂ. ഈ വ്യൂഹത്തിന്റെ

6.5:

ആകെ യാന്ത്രികോർജം E സംരക്ഷിതമാണ്. താഴെയുള്ള A എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്ഥിതികോർജം പൂജ്യമായി എടുക്കാം. അതിനാൽ A യിൽ

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (6.12)$$

$$T_A - mg = \frac{mv_0^2}{L}$$ (ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം)

A യിൽ ചരടിന്റെ വലിവുബലം T ആണ് ചരടിലെ വലിവുബലം (T_c) പൂജ്യമായതിനാൽ, ഉയർന്നബിന്ദു C യിൽ ചരട് അയയുന്നു.

അതിനാൽ C യിൽ

$$E = \frac{1}{2}mv_c^2 + 2mgL \qquad (6.13)$$

$$mg = \frac{mv_c^2}{L}$$ (ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം) (6.14)

ഇവിടെ v_c എന്നത് C യിലെ വേഗമാണ്. സമവാക്യം (6.13), (6.14) എന്നിവയിൽ നിന്ന്

$$E = \frac{5}{2}mgL$$

ഇതിനെ A യിലെ ഊർജവുമായി തുലനപ്പെടുത്തിയാൽ

$$\frac{5}{2}mgL = \frac{m}{2}v_0^2$$
$$v_0 = \sqrt{5gL}$$

((ii) സമവാക്യം (6.14) ൽ നിന്ന്

$v_C = \sqrt{gL}$ എന്നു വ്യക്തമാകും.

B യിൽ, ഊർജം

$$E = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgL$$

ഇതിനെ A യിലെ ഊർജവുമായി തുലനം ചെയ്യുകയും സമവാക്യം (i) ഉപയോഗപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്താൽ $v_0^2 = 5gL$, എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgL = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$= \frac{5}{2}m\,g\,L$$
$$\therefore v_B = \sqrt{3gL}$$

(iii) B യിലും C യിലുമുള്ള ഗതികോർജങ്ങളുടെ അനുപാതം

$$\frac{K_B}{K_C} = \frac{\frac{1}{2}mv_B^2}{\frac{1}{2}mv_C^2} = \frac{3}{1}$$ ആണ്.

C എന്ന ബിന്ദുവിൽ ചരട് അയയുന്നു. ഇവിടെ ഗോളത്തിന്റെ പ്രവേഗം തിരശ്ചീനമായി ഇടത്തേക്കാണ്. ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ചരടിനെ ഈ സമയത്ത് മുറിച്ചാൽ, ഒരു കുത്തനെയുള്ള പാറയുടെ അഗ്രത്തു നിന്നും തിരശ്ചീനമായി തൊടുത്തുവിടുന്ന ഒരു കല്ലിന്റെ തിരശ്ചീന ചലനത്തിന് സമാനമായ ചലനത്തിന് ഗോളം വിധേയമാകും. അല്ലെങ്കിൽ ഗോളം വൃത്താകൃതപാതയിൽ തുടരുകയും പരിക്രമണം പൂർത്തിയാക്കുകയും ചെയ്യും.◀

6.9 ഒരു സ്പ്രിങ്ങിന്റെ സ്ഥിതികോർജം (The Potential Energy of a Spring)

സംരക്ഷിതമായ ഒരു വ്യതിയാനബലത്തിന് ഉദാഹരണമാണ് സ്പ്രിങ്ങിലെ ബലം. ചിത്രം 6.7 ഒരു സ്പ്രിങ്ങുമായി ബന്ധിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു ചതുരക്കട്ട മിനുസമായ തിരശ്ചീന തലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. സ്പ്രിങ്ങിന്റെ മറ്റേ അഗ്രം ഒരു ഉറപ്പേറിയ ഭിത്തിയിൽ ഉറപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. സ്പ്രിങ് ഒരു ലഘുവായ വസ്തുവാണ്, അതിനാൽ ഭാരമില്ലാത്തതെന്നു കരുതാം. ഒരു മാതൃകാ സ്പ്രിങ്ങിൽ x സ്പ്രിങ്ങിൽ ബലം F_S എന്ന അനുപാതത്തിലായിരിക്കും. ഇവിടെ x എന്നത് സന്തുലിത സ്ഥാനത്തിൽനിന്നുള്ള സ്ഥാനാന്തരമാണ്. സ്ഥാനാന്തരം പോസിറ്റീവോ (ചിത്രം 6.7 (b)) നെഗറ്റീവോ (6.7.(c)) ആകാം.

സ്പ്രിങ്ങിന്റെ ബലനിയമമാണ് ഹുക്ക്സ് നിയമം. ഇതിനെ ഗണിതപരമായി

$F_S = -kx$ എന്ന് പ്രസ്താവിക്കാം.

സ്ഥിരസംഖ്യ k യെ സ്പ്രിങ് സ്ഥിരസംഖ്യ എന്നു വിളിക്കാം.

അതിന്റെ യൂണിറ്റ് $N\,m^{-1}$ ആണ്. k യുടെ വില വലുതാണെങ്കിൽ സ്പ്രിങ്ങിനെ ദൃഢതയുള്ളതെന്നും k യുടെ വില ചെറുതാണെങ്കിൽ മൃദുവെന്നും പറയാം.

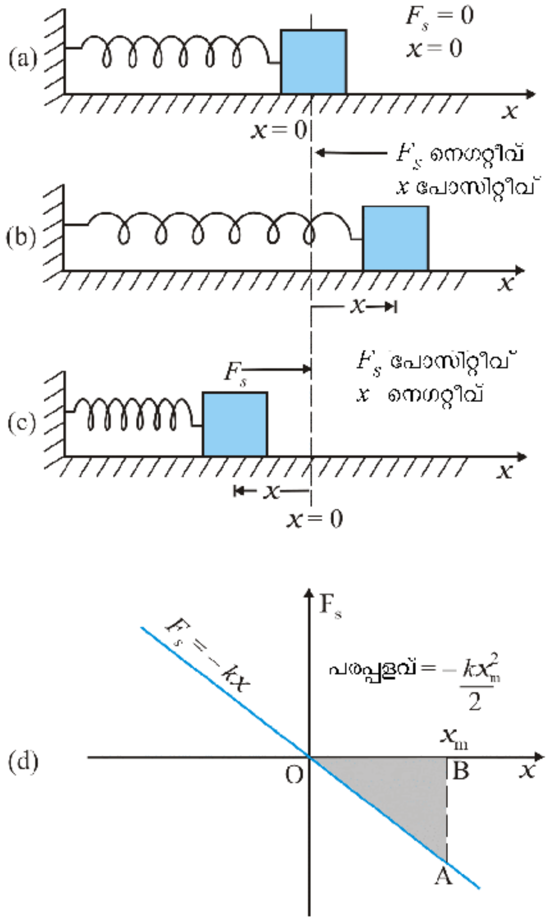
ചിത്രം 6.7 (b) യിലെപ്പോലെ നമ്മൾ ഈ ചതുരക്കട്ടയെ വലിക്കുന്നു. ഇവിടത്തെ സ്പ്രിങ്ങിന്റെ വലിവ് x_m ആയാൽ, സ്പ്രിങ് ബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി

$$W_s = \int_0^{x_m} F_s\,dx \qquad = -\int_0^{x_m} kx\,dx$$

$$= -\frac{k\,x_m^2}{2} \qquad (6.15)$$

ചിത്രം 6.7 (d) യിലേതുപോലെയുള്ള ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് പരിഗണിച്ചാലും ഈ സമവാക്യം നമുക്കു ലഭിക്കും. വസ്തുവിനെ ചലിപ്പിക്കാൻ ചെയ്യുന്ന ബാഹ്യബലം സ്പ്രിങ് ബലത്തിന് വിപരീതദിശയിലാകയാൽ, ബാഹ്യബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി പോസിറ്റീവാണ്.

$$W = +\frac{k\,x_m^2}{2} \qquad (6.16)$$



ചിത്രം 6.7 ഒരു സ്പ്രിങിന്റെ സ്വതന്ത്ര അഗ്രത്തിൽ ബന്ധിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു ചതുരക്കട്ടയിലെ സ്പ്രിങ്ബലം ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. (a) സന്തുലനാവസ്ഥയിൽ നിന്നുള്ള സ്ഥാനാന്തരം x പൂജ്യമാകുമ്പോൾ, സ്പ്രിങ്ബലം F_s പൂജ്യമാകുന്നു. (b) വലിച്ചു നീട്ടപ്പെട്ട ഒരു സ്പ്രിംങിന് $x > 0$ യും $F_s < 0$ യും ആണ്. (c) അമർത്തിവെച്ച സ്പ്രിങിന് $x < 0$ യും $F_s > 0$ യും ആണ്. (d) F_s ഉം x ഉം തമ്മിലുള്ള ഗ്രാഫിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ ഷേഡ് ചെയ്ത ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് സ്പ്രിങ്ബലം ചെയ്ത പ്രവൃത്തിയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. F_s, x എന്നിവയുടെ വിപരീതചിഹ്നങ്ങൾ മൂലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി നെഗറ്റീവ് ആണ്. അതായത് $W_s = \frac{-kx_c^2}{2}$

സ്പ്രിങിനെ x_c എന്ന അളവിൽ (x_c (< 0)) അമർത്തിയാലും ഇത് ബാധകമാണ്. സ്പ്രിങ്ബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി $W_s = -kx_c^2/2$ യും ബാഹ്യബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി $+ kx_c^2/2$ ഉം ആണ്. ചതുരക്കട്ടയെ ആദ്യസ്ഥാനാന്തരം x_i യിൽ നിന്ന് അന്തിമ സ്ഥാനാന്തരം x_f ലേക്കു ചലിപ്പിച്ചാൽ സ്പ്രിങ് ബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി

$$W_s = -\int_{x_i}^{x_f} k\, x\, dx = \frac{k\, x_i^2}{2} - \frac{k\, x_f^2}{2} \qquad (6.17)$$

അതുകൊണ്ട് സ്പ്രിങ് ബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി അഗ്രബിന്ദുക്കളെ ആശ്രയിക്കുന്നു. പ്രത്യേകിച്ച് ചതുരക്കട്ടയെ x_fൽനിന്ന് തള്ളിതിരിച്ച് x_i യിലേക്കു തന്നെ എത്താൻ അനുവദിച്ചാൽ

$$W_s = -\int_{x_i}^{x_i} k\, x\, dx = \frac{k\, x_i^2}{2} - \frac{k\, x_i^2}{2} = 0 \qquad (6.18)$$

ഒരു ചാക്രികപ്രവർത്തനത്തിൽ സ്പ്രിങ് ബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി പൂജ്യമാണ്. സ്പ്രിങ് ബലം (i), ഹുക്ക് നിയമത്തിൽ പ്രസ്താവിച്ചതു പോലെ സ്ഥാനത്തെ മാത്രം ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു ($F_s \;\; -kx$) എന്നും (ii) ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി, അഗ്രബിന്ദുക്കളെ മാത്രം ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നുവെന്നും മുകളിലെ സമവാക്യങ്ങൾ വ്യക്തമാക്കുന്നു. ഉദാഹരണം സമവാക്യം (6.17). അതിനാൽ സ്പ്രിങ് ബലം ഒരു **സംരക്ഷിതബലമാണ്**.

ചതുരക്കട്ടയും സ്പ്രിങ് വ്യൂഹവും സംതുലിതസ്ഥാനത്തിലായാൽ സ്പ്രിങിന്റെ സ്ഥിതികോർജത്തെ പൂജ്യമായി നമ്മൾ നിർവചിക്കുന്നു. ഒരു വലിവ് (അല്ലെങ്കിൽ ചുരുങ്ങൽ) x ന്, ഉണ്ടാകുന്നതിനാൽ ഇതിൽനിന്നുള്ള സ്ഥിതികോർജം

$$V(x) = \frac{kx^2}{2} \qquad (6.19)$$

$\frac{-dv}{dx} = kx$ എന്ന വലിവുബലം നമുക്ക് എളുപ്പത്തിൽ പരിശോധിക്കാം.

ചിത്രം. 6.7. ലെ m മാസുള്ള ചതുരക്കട്ടയെ നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽനിന്ന് x_m ലേക്ക് വലിച്ചു വിട്ടാൽ $-x_m$ നും $-x_m$ നും ഇടയിൽ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദു x ലുള്ള ആകെ യാന്ത്രികോർജം

$$\frac{1}{2}k\, x_m^2 = \frac{1}{2}k\, x^2 + \frac{1}{2}m\, v^2$$ എന്നതിലൂടെ

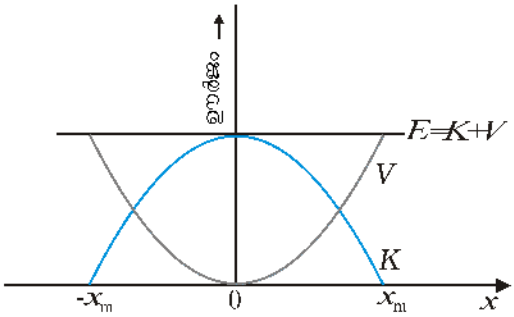
യാന്ത്രികോർജത്തിന്റെ സംരക്ഷണം എന്ന ആശയം കൂടി ലഭിക്കുന്നു. വേഗവും ഗതികോർജവും സന്തുലനസ്ഥാനത്ത് $(x \;\; 0)$ പരമാവധി ആയിരിക്കുമെന്ന് ഈ സമവാക്യത്തിൽനിന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

അതായത് $\frac{1}{2}m\, v_m^2 = \frac{1}{2}k\, x_m^2$

ഇവിടെ v_m എന്നത് പരമാവധി വേഗമാണ്.

$$v_m = \sqrt{\frac{k}{m}}\, x_m$$

k/m ന് T^{-2} ന്റെ ഡൈമെൻഷനുകളാണുള്ളത്. നമ്മുടെ സമവാക്യം ഡൈമെൻഷണലായി ശരിയാണ്. ഗതികോർജം സ്ഥിതികോർജമായി പരിവർത്തനം ചെയ്യാം. അതുപോലെ തിരിച്ചും. എങ്ങനെയായിരുന്നാലും, ആകെ യാന്ത്രികോർജം സ്ഥിരമായി നിലനിൽക്കുന്നു. ഇത് ഗ്രാഫ്രൂപത്തിൽ ചിത്രം 6.8 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 6.8 ഹുക്കിന്റെ നിയമം അനുസരിക്കുന്ന ഒരു സ്പ്രിങ്ങുമായി ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ചതുരക്കട്ടയുടെ സറിതികോർജം V യുടെയും ഗതികോർജം K യുടെയും പരാബോള ആകൃതിയിലുള്ള ഗ്രാഫുകൾ. ഇവ പരസ്പരം പൂരകങ്ങളാണ്. ഒന്ന് കുറയുന്നതനുസരിച്ച് മറ്റേത് കൂടുന്നു. ആകെ യാന്ത്രികോർജം $E = K + V$ സ്ഥിരമായിരിക്കും.

> ▶*ഉദാഹരണം 6.8:* കാറപകടങ്ങൾ പഠിക്കാൻ വാഹനനിർമാതാക്കൾ ചലിക്കുന്ന കാറുകളും പ്രത്യേകം ക്രമീകരിച്ചിട്ടുള്ള വ്യത്യസ്ത സ്പ്രിങ് സ്ഥിരാങ്കങ്ങളുള്ള സ്പ്രിങ്ങുകളും തമ്മിലുള്ള കൂട്ടിമുട്ടലുകളെപ്പറ്റി പഠിക്കുന്നു. 1000 kg മാസുള്ള ഒരു കാർ മിനുസമുള്ള റോഡിലൂടെ 18 km/h വേഗത്തിൽ സഞ്ചരിച്ച് തിരശ്ചീനമായി ഉറപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന 6.25×10^{3} N m^{-1} സ്പ്രിങ് സ്ഥിരാങ്കമുള്ള ഒരു സ്പ്രിങ്ങിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നതായി കരുതാം. സ്പ്രിങ്ങിന്റെ പരമാവധി സമ്മർദ്ദനം എത്ര?

ഉത്തരം: പരമാവധി സമ്മർദ്ദനത്തിൽ കാറിന്റെ ഗതികോർജം പൂർണമായും സ്പ്രിങ്ങിന്റെ സ്ഥിതികോർജമായി മാറുന്നു.

കാറിന്റെ ഗതികോർജം

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \text{ ആണ്.}$$

$$= \frac{1}{2}\times10^3\times5\times5$$

$$K = 1.25\times10^4 \text{ J}$$

ഇവിടെ നമ്മൾ 18 km h^{-1} നെ 5 m s^{-1} ആക്കി മാറ്റിയിട്ടുണ്ട്. [**36 km h^{-1} = 10 m s^{-1}** എന്ന് ഓർക്കുന്നത് ഉപയോഗപ്രദമാണ്]. യാന്ത്രികോർജ സംരക്ഷണനിയമമനുസരിച്ച് പരമാവധി സമ്മർദ്ദനം x_m ൽ സ്പ്രിങ്ങിന്റെ സറിതികോർജം V, ചലിക്കുന്ന കാറിന്റെ ഗതികോർജം K ക്ക് തുല്യമാകും.

$$V = \frac{1}{2}k\,x_m^2 \quad 1.25\times10^{4} \text{ J}$$

x_m = 2.00 m എന്നു ലഭിക്കും.

ഇവിടെ നമ്മൾ തികച്ചും ഉചിതമായ ഒരു സാഹചര്യം സൃഷ്ടിക്കുകയാണ് ചെയ്തത്. സ്പ്രിങ്ങിനെ മാസില്ലാത്തതായി കണക്കാക്കി ഘർഷണമില്ലാത്ത പ്രതലമാണ് നാം പരിഗണിച്ചത്. ◀

ഈ സന്ദർഭത്തെ മാതൃകാപരമായാണ് സങ്കൽപിച്ചിരിക്കുന്നതെന്നു ശ്രദ്ധിക്കുക. കൂടാതെ പ്രതലത്തിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ഘർഷണബലം വളരെ കുറവാണെന്നും സങ്കൽപിച്ചിരിക്കുന്നു.

സംരക്ഷിത ബലങ്ങളെ സംബന്ധിച്ച ചില വസ്തുതകൾ കൂടി ചർച്ച ചെയ്തശേഷം ഇങ്ങനെ സംഗ്രഹിക്കാം.

i മുകളിലെ ചർച്ചകളിലൊന്നും സമയം ഒരു ഘടകമായി പരിഗണിച്ചിരുന്നില്ല. ഉദാഹരണത്തിൽ നാം സമ്മർദ്ദനം കണക്കാക്കിയിരുന്നു. എന്നാൽ ഈ സമ്മർദ്ദനം എത്ര സമയം കൊണ്ടാണ് സംഭവിക്കുന്നതെന്ന് കണ്ടെത്തിയിരുന്നില്ല. ഈ വ്യൂഹത്തിന് ബാധകമായ ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമത്തിന്റെ നിർധാരണം ഇത് കണ്ടെത്തുവാൻ ആവശ്യമാണ്.

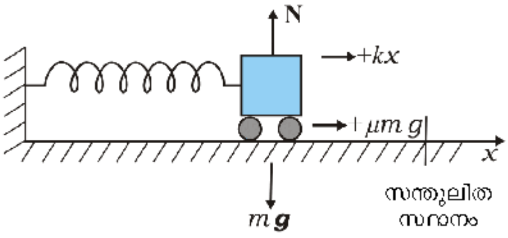
ii എല്ലാ ബലങ്ങളും സംരക്ഷിതബലങ്ങളല്ല. ഉദാ: ഘർഷണബലം. ഇത് ഒരു അസംരക്ഷിതബലമാണ്. ഈ പ്രശ്നത്തിൽ ഊർജസംരക്ഷണതത്വം പരിഷ്ക്കരിക്കേണ്ടിവരും. ഇത് ഉദാഹരണം 6.9 –ൽ വിശദീകരിച്ചിരിക്കുന്നു.

iii സ്ഥിതികോർജത്തിന്റെ വില പൂജ്യം എന്നു സങ്കൽപിക്കുന്നതിന് പ്രത്യേക നിയമങ്ങളൊന്നും ബാധകമല്ല. ഇത് നമ്മുടെ സൗകര്യാർഥം തിരഞ്ഞെടുക്കാവുന്നതാണ്. സ്പ്രിങ് ബലത്തെ സംബന്ധിച്ച് x = 0 ആകുമ്പോൾ V(x) = 0 എന്ന് നാം പരിഗണിച്ചു. അതായത് വലിച്ചുനീട്ടപ്പെടാത്ത സ്പ്രിങ്ങിന്റെ സ്ഥിതികോർജം പൂജ്യമാണ്. സ്ഥിരമുള്ള 'mg' എന്ന ഗുരുത്വാകർഷണബലത്തെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം V=0 ആകുന്നത് ഭൗമോപരിതലത്തിലാണെന്ന് സങ്കല്പിച്ചു. പിന്നീട് ഗുരുത്വനിയമത്തെ കുറിച്ചു പഠിക്കുന്ന അധ്യായത്തിൽ സ്ഥിതികോർജത്തിന്റെ വില അനന്തതയിൽ പൂജ്യമാണെന്ന് കൂടുതൽ കൃത്യമായി നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്. എന്നാൽ സൗകര്യാർഥം സ്ഥിതികോർജത്തിന്റെ വില പൂജ്യമെന്നു സങ്കൽപ്പിക്കുന്നത് എപ്രകാരമാണോ അതിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ് ചർച്ച തുടരേണ്ടത്.

> ▶*ഉദാഹരണം 6.9:* ഉദാഹരണം 6.8ൽ ഘർഷണ ഗുണാങ്കം μ ന്റെ വില 0.5 ആയാൽ സ്പ്രിങ്ങിന്റെ പരമാവധി സമ്മർദ്ദനം കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉത്തരം: ഘർഷണത്തിന്റെ സാന്നിധ്യത്തിൽ, ചിത്രം 6.9ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ സ്പ്രിങ് ബലവും ഘർഷണബലവും സ്പ്രിങ്ങിന്റെ സങ്കോചത്തെ എതിർക്കുന്നു

യാന്ത്രികോർജ സംരക്ഷണനിയമത്തിനു പകരം പ്രവൃത്തി - ഊർജനിയമത്തെ പരിഗണിച്ചാൽ



ചിത്രം 6.9 കാറിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ബലങ്ങൾ

ഗതികോർജത്തിലുണ്ടാകുന്ന വ്യത്യാസം

$$\Delta K \quad K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2} m v^2$$

സഫലബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി

$$W = -\frac{1}{2} k x_m^2 - \mu m g x_m$$

ഇവ തുലനം ചെയ്യുമ്പോൾ

$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 + \mu m g x_m$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

അപ്പോൾ $\mu mg = 0.5 \times 10^3 \times 10 = 5 \times 10^3$ N ആണ്. ($g = 10.0$ m s^{-2} എന്ന് എടുക്കുന്നു).

മുകളിലത്തെ സമവാക്യം പുനക്രമീകരിച്ചാൽ, x_m ഉള്ള താഴെ വരുന്ന ദ്വിമാന സമവാക്യം ലഭിക്കും.

$$k x_m^2 + 2\mu m g x_m - m v^2 = 0$$

$$x_m = \frac{-\mu m g + \left[\mu^2 m^2 g^2 + m k v^2\right]^{1/2}}{k}$$

x_m പോസിറ്റീവായതിനാൽ പോസിറ്റീവ് വർഗമൂലം എടുക്കാം. ഈ സമവാക്യത്തിൽ വിലകൾ നൽകിയാൽ $x_m = 1.35$ m എന്നു കിട്ടും. ഇത് പ്രതീക്ഷിച്ചതുപോലെ ഉദാഹരണം 6.8 ന്റെ ഫലത്തേക്കാൾ ചെറുതാണ്.

ഒരു വസ്തുവിലെ രണ്ടു ബലങ്ങളിൽ ഒന്ന് സംരക്ഷിതവും (F_c) മറ്റേത് അസംരക്ഷിതബലവും (F_{nc}) ആയാൽ, യാന്ത്രികോർജ സംരക്ഷണ സമവാക്യത്തിൽ മാറ്റം വരുത്തേണ്ടതുണ്ട്.

$$(F_c + F_{nc})\,\Delta x \quad \Delta K$$

എന്നാൽ $\quad F_c\,\Delta x = -\Delta V$

$\therefore \quad \Delta(K + V) \quad F_{nc}\,\Delta x$

$$\Delta E = F_{nc}\,\Delta x$$

ഇവിടെ E എന്നത് ആകെ യാന്ത്രികോർജമാണ്.

സഞ്ചാരപാതയിൽ ഇതിനെ താഴെകാണുന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാം.

$$E_f - E_i \quad W_{nc}$$

ഇവിടെ W_{nc} എന്നത് പാതയിൽ അസംരക്ഷിതബലം ചെയ്യുന്ന ആകെ പ്രവൃത്തിയാണ്. സംരക്ഷിതബലത്തിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമായി W_{nc} എന്നത് i മുതൽ f വരെയുള്ള പാതയെ ആശ്രയിക്കുന്നു.

6.10 ഊർജത്തിന്റെ വിവിധ രൂപങ്ങൾ: ഊർജസംരക്ഷണനിയമം (Various forms of Energy : The Law of Conservation of Energy)

മുകളിൽ പറഞ്ഞ വിഭാഗങ്ങളിൽ നാം ഇതുവരെ യാന്ത്രികോർജത്തെക്കുറിച്ചാണ് ചർച്ച ചെയ്തത്. ഇതിനെ രണ്ടു വേറിട്ട വിഭാഗങ്ങളായി തരം തിരിക്കാം. ഒന്ന് ചലനം അടിസ്ഥാനമാക്കിയ ഗതികോർജവും മറ്റൊന്ന് സ്ഥാനം അഥവാ ക്രമീകരണം അടിസ്ഥാനമാക്കിയ സ്ഥിതികോർജവും. ഊർജം പല രൂപഭേദങ്ങളിൽ കാണപ്പെടുന്നു. പലപ്പോഴും നമുക്ക് അജ്ഞാതമായ വിവിധ വഴികളിൽ അവ പരസ്പരം രൂപം മാറുന്നു.

6.10.1 താപോർജം (Heat)

ഘർഷണബലം ഒരു സംരക്ഷിതബലമല്ല എന്ന് നമ്മൾ കണ്ടു. എന്നിരുന്നാലും ഘർഷണബലവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടും പ്രവൃത്തി ഉണ്ട്. ഉദാഹരണം 6.5 ൽ ഒരു പരുക്കൻ തിരശ്ചീന പ്രതലത്തിൽക്കൂടി 'v_0' വേഗത്തിൽ നീങ്ങുന്ന 'm' മാസുള്ള ഒരു ചതുരക്കട്ടയുടെ വേഗം 'x_0' ദൂരം കഴിയുമ്പോൾ പൂജ്യമായി മാറുന്നു. x_0 ദൂരത്തിൽ ഗതികഘർഷണബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി $-fx_0$ ആണ്. പ്രവൃത്തി - ഊർജസിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് $m v_0^2/2 = f x_0$ ആണ്. നമ്മുടെ താൽപര്യം ബലതന്ത്രത്തിൽ മാത്രമായി പരിമിതപ്പെടുത്തിയാൽ, ഘർഷണ ബലം കാരണമായി ചതുരക്കട്ടയുടെ ഗതികോർജം നഷ്ടപ്പെടുന്നുവെന്നു പറയാം. ചതുരക്കട്ടയും മേശയും പരിശോധിച്ചാൽ അവയുടെ താപനിലയിൽ അൽപം വർധന ഉണ്ടായതായി കണ്ടെത്താം. ഘർഷണം ചെയ്ത പ്രവൃത്തി നഷ്ടപ്പെട്ടില്ല, പകരം താപോർജമായി രൂപാന്തരപ്പെടുകയാണുണ്ടായത്. ഇത് ചതുരക്കട്ടയുടെയും മേശയുടെയും ആന്തരിക ഊർജം വർധിപ്പിക്കുന്നു. ശൈത്യകാലത്ത്, ഊഷ്മളത ലഭിക്കാൻ നമ്മുടെ കൈപ്പത്തികൾ തമ്മിൽ തീവ്രമായി ഉരസി ചൂട് ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കാറുണ്ട്. തന്മാത്രകളുടെ നിർത്താതെയുള്ളതും ക്രമരഹിതവുമായ ചലനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടും ആന്തരികഊർജം നിലനിൽക്കുന്നുവെന്ന് നമുക്ക് പിന്നീട് മനസിലാക്കാം. 1 kg ജലത്തെ 10^0C തണുപ്പിച്ചാൽ അത് 42000 J ഊർജം ഉൽസർജിക്കും എന്നതിൽ നിന്ന് താപോർജ കൈമാറ്റത്തിന്റെ അളവിനെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു ധാരണ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു.

6.10.2 രാസോർജം (Chemical Energy)

തീ കത്തിക്കാനും നിയന്ത്രിക്കാനുമുള്ള കണ്ടുപിടിത്തം മാനവരാശിയുടെ ഏറ്റവും വലിയ സാങ്കേതിക നേട്ടങ്ങളിൽ ഒന്നാണ്. രണ്ട് അഗ്നിശിലകളെ തമ്മിലുരസുമ്പോൾ (യാന്ത്രികോർജം) അവ ചൂടാകുമെന്നും ഉണങ്ങിയ ഇലകളുടെ കൂമ്പാരത്തെ കത്തിക്കുമെന്നും (രാസോർജം) ഇത് ചൂട് നിലനിർത്താൻ സഹായിക്കുമെന്നും അവർ മനസ്സിലാക്കിയിരുന്നു. പ്രത്യേകമായി നിർമിച്ച രാസപ്രതലത്തിൽ ഉരസുമ്പോൾ ഒരു തീപ്പെട്ടിക്കൊള്ളി തെളിഞ്ഞ ജ്വാലയോടെ തീപിടിക്കുന്നു. കത്തിച്ച തീപ്പെട്ടിക്കൊള്ളി പടക്കങ്ങളിൽ പ്രയോഗിച്ചാൽ ശബ്ദത്തിന്റെയും പ്രകാശത്തിന്റെയും മനോഹരദൃശ്യത്തിന് കാരണമാകുന്നു. രാസപ്രവർത്തനങ്ങളിൽ പങ്കെടുക്കുന്ന തന്മാത്രകൾക്ക് വ്യത്യസ്ത ബന്ധന ഊർജങ്ങളാണുള്ളത് എന്ന വസ്തുതയിൽ നിന്നാണ് രാസോർജം ആവിർഭവിക്കുന്നത്. ഒരു സ്ഥിര രാസസംയുക്തത്തിന്റെ ഊർജം വേർതിരിച്ച ഘടകങ്ങളെ അപേക്ഷിച്ച് കുറവാണ്. ഒരു രാസപ്രവർത്തനം അടിസ്ഥാനപരമായി ആറ്റങ്ങളുടെ പുനക്രമീകരണമാണ്. രാസപ്രവർത്തനത്തിലെ ഉൽപ്പന്നങ്ങളെ അപേക്ഷിച്ച് അഭികാരകങ്ങളുടെ ആകെ ഊർജം കൂടുതലായാൽ, താപം പുറത്തു വിടുന്നു അത്തരം രാസപ്രവർത്തനങ്ങളെ **താപമോചക പ്രവർത്തനങ്ങൾ** (exothermic reactions) എന്നു പറ

യുന്നു. മറിച്ചായാൽ, താപം ആഗിരണം ചെയ്യും ഈ പ്രവർത്തനങ്ങളെ **താപശോഷകപ്രവർത്തനങ്ങൾ** (endothermic reactions) എന്നു പറയുന്നു. കൽക്കരി കാർബൺ ആണ്. 1 കിലോഗ്രാം കൽക്കരി കത്തിച്ചാൽ 3×10^7 ജൂൾ ഊർജം സ്വതന്ത്രമാകുന്നു.

രാസോർജം പദാർഥങ്ങൾക്ക് സ്ഥിരത നൽകുന്ന ബലങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഈ ബലങ്ങൾ ആറ്റങ്ങളെ കൂട്ടിച്ചേർത്ത് തന്മാത്രകളായും തന്മാത്രകളെ ചേർത്ത് പോളിമർ ശൃംഖലകളായും മാറ്റുന്നു. കൽക്കരി, പാചകവാതകം, തടി, പെട്രോളിയം എന്നിവ കത്തിക്കുന്നതിൽ നിന്ന് ഉണ്ടാകുന്ന രാസോർജം നമ്മുടെ ദൈനംദിന ജീവിതത്തിന് അനിവാര്യമാണ്.

6.10.3 വൈദ്യുതോർജം (Electrical Energy)

ബൾബുകൾ കത്തുന്നതും ഫാനുകൾ കറങ്ങുന്നതും വൈദ്യുത ബെല്ലുകൾ മുഴങ്ങുന്നതുമെല്ലാം വൈദ്യുത കറന്റിന്റെ ഒഴുക്ക് മൂലമാണ്. ചാർജുകളുടെയും, കറന്റുകളുടെയും ആകർഷണ- വികർഷണങ്ങൾ നിയന്ത്രിക്കുന്ന നിയമങ്ങളുണ്ട്. ഇവയെക്കുറിച്ച് നാം പിന്നീട് പഠിക്കും. വൈദ്യുത കറന്റുമായി ഊർജത്തിന് ബന്ധമുണ്ട്. നഗരങ്ങളിൽ ഒരു ഇന്ത്യൻ ശരാശരികുടുംബം ഒരു സെക്കന്റിൽ ഏകദേശം 200 ജൂൾ ഊർജം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

6.10.4 മാസ് - ഊർജസമത്വം (The Equivalence of mass and energy)

19-ാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ അവസാനം വരെ ഭൗതികശാസ്ത്രജ്ഞർ എല്ലാ ഭൗതികരാസപ്രവർത്തനങ്ങളിലും ഒരു ഒറ്റപ്പെട്ട വ്യൂഹത്തിന്റെ മാസ് സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നുവെന്ന് വിശ്വസിച്ചിരുന്നു. ദ്രവ്യത്തിന് രൂപമാറ്റം സംഭവിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, മഞ്ഞുമലയിലെ മഞ്ഞുരുകി ജലപ്രവാഹം ഉണ്ടാകുന്നു. എന്നാൽ ദ്രവ്യത്തെ നിർമിക്കാനോ നശിപ്പിക്കാനോ സാധ്യമല്ല. എങ്കിലും മാസും ഊർജവും സമാനമാണെന്നും അവ

$$E = m c^2 \qquad (6.20)$$

എന്ന സമവാക്യം വഴി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നുവെന്നും ആൽബർട്ട് ഐൻസ്റ്റൈൻ (1879-1955) തെളിയിച്ചു. ഇവിടെ c പ്രകാശത്തിന്റെ ശൂന്യതയിലെ വേഗമാണ്. ഇത് ഏകദേശം 3×10^8 m s^{-1} ആണ്. കേവലം ഒരു കിലോഗ്രാം ദ്രവ്യത്തിൽപ്പോലും അതിശയകരമായ അളവിൽ ഊർജമുണ്ട്.

$$E \quad 1 \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} = 9 \times 10^{16} \text{ J}.$$

ഇത് ഒരു വലിയ (3000 MW) ഊർജ ഉൽപ്പാദന കേന്ദ്രത്തിന്റെ വാർഷിക വൈദ്യുതഉൽപാദനത്തിന് തുല്യമാണ്.

6.10.5 ന്യൂക്ലിയർ ഊർജം (Nuclear Energy)

മനുഷ്യനിർമിതമായ, ഏറ്റവും കൂടുതൽ നശീകരണശേഷിയുള്ള ആയുധങ്ങളായ ഫിഷൻ, ഫ്യൂഷൻ ബോംബുകൾ മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച മാസ് -ഊർജ തുല്യതയുടെ (സമവാക്യം 6.20) ആവിഷ്കാരങ്ങളാണ്. മറുവശത്ത്, ജീവിതം പരിപോഷിപ്പിക്കുന്ന സൗരോർജ ഉൽപ്പാദനത്തിന്റെ വിശദീകരണത്തിന് അടിസ്ഥാനവും ഇതേ സമവാക്യമാണ്. ഇവിടെ ഭാരം കുറഞ്ഞ നാല് ഹൈഡ്രജൻ ന്യൂക്ലിയസുകൾ ചേർന്ന് ഒരു ഹീലിയം ന്യൂക്ലിയസാകുന്നു. അഭികാരകങ്ങളുടെ ആകെ മാസിനേക്കാൾ കുറവാണ് ഹീലിയത്തിന്റെ മാസ്. ഈ മാസ് വ്യത്യാസത്തെ മാസ്ശോഷണം (mass defect) എന്നു പറയുന്നു. ഇതാണ് $(\Delta m)c^2$ എന്ന ഊർജത്തിന്റെ ഉറവിടം. ഫിഷനിൽ യുറേനിയം $_{92}U^{235}$ പോലെയുള്ള ഭാരമേറിയ ഒരു ന്യൂക്ലിയസ്സിനെ ന്യൂട്രോണുപയോഗിച്ച് ഭാരം കുറഞ്ഞ ന്യൂക്ലിയസുകളാക്കി വിഭജിക്കുന്നു. ഇവിടെയും ഉൽപന്നങ്ങളുടെ മാസ് അഭികാരകത്തിന്റെ മാസിനേക്കാൾ കുറവാണ്. ഈ മാസ് വ്യത്യാസം ഊർജമാക്കി മാറ്റപ്പെടുന്നു. ഈ ഊർജത്തെ ന്യൂക്ലിയർ പവർ പ്ലാന്റിലേതുപോലെ (നിയന്ത്രിത ന്യൂക്ലിയർ ഫിഷൻ) വൈദ്യുതോർജം പ്രദാനം ചെയ്യാൻ ഉപയോഗിക്കുകയോ ആണവായുധങ്ങൾ (അനിയന്ത്രിത ന്യൂക്ലിയർഫിഷൻ) നിർമിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുകയോ ചെയ്യാം. രാസപ്രവർത്തനങ്ങളിൽ സ്വതന്ത്രമാകുന്ന ΔE എന്ന ഊർജത്തെ മാസ് ശോഷണവുമായി $\Delta m = \Delta E/c^2$ എന്ന സമവാക്യം വഴി ബന്ധിപ്പിക്കാം. രാസപ്രവർത്തനങ്ങളിലെ മാസ് ശോഷണം ന്യൂക്ലിയാർപ്രവർത്തനങ്ങളെ അപേക്ഷിച്ച് വളരെ ചെറുതാണ്. പട്ടിക 6.3ൽ വിവിധ പ്രതിഭാസങ്ങളുടെയും പ്രവർത്തനങ്ങളുടെയും ആകെ ഊർജം നൽകിയിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 6.10: പട്ടിക 6.1 മുതൽ 6.3 വരെ പരിശോധിച്ച് (a) ഒരു ഡി.എൻ.എയിലെ ഒരു ബന്ധനം തകർക്കാനുള്ള ഊർജം eV യിൽ (b) വായുതന്മാത്രയുടെ ഗതികോർജം ($10^{\;21}$ J) eV യിൽ (c) ഒരു മുതിർന്ന മനുഷ്യന്റെ ഒരു ദിവസം കഴിക്കുന്ന ഭക്ഷണത്തിന്റെ ഉപഭോഗം കിലോ കലോറിയിൽ രേഖപ്പെടുത്തുക.

ഉത്തരം: (a) ഡി.എൻ.എയുടെ ഒരു ബന്ധനം തകർക്കാനുള്ള ഊർജം

$$\frac{10^{\;20}\,\text{J}}{1.6 \times 10^{\;19}\,\text{J/eV}} \simeq 0.06 \text{ eV}$$

$\simeq$ ഈ അടയാളം ഏകദേശം എന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

0.1 eV = 100 meV എന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക.

(b) വായുതന്മാത്രയുടെ ഗതികോർജം

$$\frac{10^{\;21}\,\text{J}}{1.6 \times 10^{\;19}\,\text{J/eV}} \simeq 0.0062 \text{ eV}$$

ഇത് 6.2 meV ക്ക് സമമാണ്.

(c) ഒരു മനുഷ്യന്റെ ശരാശരി ദൈനംദിന ഭക്ഷണ

ഉപഭോഗം $\dfrac{10^7\,\text{J}}{4.2 \times 10^3 \text{ J/kcal}} \simeq 2400 \text{ kcal}$

പത്രങ്ങളും മാഗസിനുകളും സൃഷ്ടിക്കുന്ന ഒരു തെറ്റിദ്ധാരണയാണ് ഇവിടെ നമ്മൾ പരാമർശിക്കുന്നത്. അവർ ഭക്ഷണമൂല്യം കലോറിയിൽ പറയുന്നതോടൊപ്പം നമ്മുടെ ഭക്ഷണഉപഭോഗം 2400 കലോറിയേക്കാൾ കുറക്കാനും പറയുന്നു. അവർ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് കലോറിയിലല്ല, കിലോ കലോറിയിലാണ്. ഒരു ദിവസം 2400 കലോറി ഭക്ഷണം കഴിക്കുന്ന ഒരാൾ പെട്ടെന്ന് തന്നെ പട്ടിണിമരണത്തിലെത്തും. ഒരു ഭക്ഷണ കലോറി എന്നത് ഒരു കിലോ കലോറിയാണ്. ◀

പട്ടിക 6.3 വ്യത്യസ്ത പ്രതിഭാസങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ശരാശരി ഊർജം

വിവരണം	ഊർജം (J)
ബിഗ്ബാംഗ് (മഹാസ്ഫോടനം)	10^{68}
ഗാലക്സി അതിന്റെ ആയുഷ്കാലത്ത് പുറപ്പെടുവിക്കുന്ന ഊർജം	10^{55}
ആകാശഗംഗയുടെ ഭ്രമണ ഊർജം	10^{52}
സൂപ്പർനോവ സ്ഫോടനത്തിൽ പുറപ്പെടുവിക്കുന്ന ഊർജം	10^{44}
സമുദ്രത്തിലെ ഹൈഡ്രജന്റെ ഫ്യൂഷൻ വഴി	10^{34}
ഭൂമിയുടെ ഭ്രമണത്തിന്റെ ഊർജം	10^{29}
ഭൂമിയിൽ പതിക്കുന്ന വാർഷിക സൗരോർജം	5×10^{24}
ഭൗമോപരിതലത്തിൽ വർഷം തോറും കാറ്റ് സൃഷ്ടിക്കുന്ന ഊർജനഷ്ടം	10^{22}
മനുഷ്യരുടെ ആഗോള ഊർജ ഉപഭോഗം	3×10^{20}
തിരമാലകളിൽ നഷ്ടപ്പെടുന്ന ആകെ ഊർജം	10^{20}
15 മെഗാടൺ ഫ്യൂഷൻബോംബ് പുറപ്പെടുവിക്കുന്ന ഊർജം	10^{17}
വലിയ ഊർജ ഉൽപ്പാദനകേന്ദ്രങ്ങളിലെ ആകെ വാർഷിക വൈദ്യുതോർജം	10^{16}
ഇടിമിന്നൽ	10^{15}
1000 kg കൽക്കരി കത്തിക്കുമ്പോൾ പുറപ്പെടുവിക്കുന്ന ഊർജം	3×10^{10}
വലിയ ജെറ്റ് വിമാനത്തിന്റെ ഗതികോർജം	10^{9}
1 ലിറ്റർ പെട്രോൾ കത്തിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഊർജം	3×10^{7}
ഒരു മുതിർന്ന മനുഷ്യൻ ഒരു ദിവസം കഴിക്കുന്ന ആഹാരം	10^{7}
ഒരു പ്രാവശ്യം മിടിക്കുന്നതിന് മനുഷ്യഹൃദയം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി	0.5
ഈ പേജ് മറിക്കാൻ	10^{-3}
ഈച്ചയുടെ ചാട്ടം	10^{-7}
ഒരു ന്യൂറോണിന്റെ ഡിസ്ചാർജ്	10^{-10}
ഒരു ന്യൂക്ലിയസിലെ പ്രോട്ടോണിന്റെ ഊർജം	10^{-13}
ഒരു ആറ്റത്തിലെ ഇലക്ട്രോണിന്റെ ഊർജം	10^{-18}
ഡി.എൻ.എയിലെ ഒരു ബന്ധം വേർപെടുത്താനുള്ള ഊർജം	10^{-20}

6.10.6 ഊർജസംരക്ഷണതത്വം (The Principle of Conservation of Energy)

ഒരു വ്യൂഹത്തിലെ പ്രവൃത്തിക്ക് കാരണമായ ബലങ്ങൾ സംരക്ഷിതബലങ്ങളാണെങ്കിൽ ആ വ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ യാന്ത്രികോർജം സംരക്ഷിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്ന് നമ്മൾ കണ്ടു. ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ബലങ്ങളിൽ ചിലത് അസംരക്ഷിതബലങ്ങളാണെങ്കിൽ യാന്ത്രികോർജത്തിന്റെ കുറച്ചു ഭാഗം താപം, പ്രകാശം, ശബ്ദം എന്നീ രൂപങ്ങളിലേക്കു മാറ്റം ചെയ്യപ്പെടുന്നു. എന്നിരുന്നാലും എല്ലാ ഊർജരൂപങ്ങളെയും കണക്കിലെടുത്താൽ ഒരു ഒറ്റപ്പെട്ട വ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ ഊർജത്തിന് മാറ്റമുണ്ടാകുന്നില്ലെന്ന് കാണാം. ഊർജത്തെ ഒരു രൂപത്തിൽനിന്നും മറ്റൊരു രൂപത്തിലേക്കു മാറ്റം വരുത്താൻ കഴിയും. എന്നാൽ ഒറ്റപ്പെട്ട വ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ ഊർജം സ്ഥിരമായിരിക്കും. ഊർജത്തെ നിർമിക്കാനോ നശിപ്പിക്കാനോ സാധ്യമല്ല.

പ്രപഞ്ചത്തെ ഒന്നാകെ ഒറ്റപ്പെട്ട വ്യൂഹമായി കരുതിയാൽ, പ്രപഞ്ചത്തിന്റെ ആകെ ഊർജം സ്ഥിരമായിരിക്കും. പ്രപഞ്ചത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭാഗത്ത് ഊർജം നഷ്ടപ്പെട്ടാൽ മറ്റൊരു ഭാഗം തുല്യഅളവിൽ ഊർജം നേടുന്നു.

ഊർജസംരക്ഷണതത്വം തെളിയിക്കാൻ സാധ്യമല്ല. എന്നിരുന്നാലും ഈ തത്വത്തിൽ നിന്നുമുള്ള വ്യതിയാനം നിരീക്ഷിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. ഊർജസംരക്ഷണവും വിവിധ രൂപങ്ങളിലേക്കുള്ള ഊർജത്തിന്റെ രൂപമാറ്റവും ഭൗതികശാസ്ത്രം, രസതന്ത്രം, ജീവശാസ്ത്രം എന്നീ ശാഖകളെ പരസ്പരം ബന്ധിപ്പിക്കുന്നു. നമ്മുടെ ശാസ്ത്രാന്വേഷണങ്ങളിൽ ഇത് സ്ഥായിയായതും ഏകീകരിക്കുന്നതുമായ ഘടകമാണ്. എൻജിനീയറിങ് കാഴ്ചപ്പാടിൽ എല്ലാ ഇലക്ട്രോണിക് വാർത്താവിനിമയ, യാന്ത്രിക ഉപകരണങ്ങളും ഏതെങ്കിലും രൂപത്തിലുള്ള ഊർജമാറ്റങ്ങളെ ആശ്രയിക്കുന്നവയാണ്.

6.11 പവർ (Power)

ഒരു വസ്തുവിൽ ചെയ്യപ്പെടുന്ന പ്രവൃത്തി മാത്രമല്ല, ഏതു നിരക്കിലാണ് ഈ പ്രവൃത്തി ചെയ്യപ്പെടുന്നത് എന്നതും മിക്കപ്പോഴും പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്നു. നാം ഒരാളെ ശാരീരികക്ഷമതയുള്ള ആളായി കണക്കാക്കുന്നത് ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ നാലോ അഞ്ചോ നിലകൾ കയറുന്നതുകൊണ്ടു മാത്രമല്ല. അത് എത്ര വേഗത്തിൽ കയറുന്നുവെന്നതുകൂടി പരിഗണിച്ചാണ്. പ്രവൃത്തി ചെയ്യുന്ന നിരക്ക് അല്ലെങ്കിൽ ഊർജം കൈമാറ്റം ചെയ്യപ്പെടുന്ന നിരക്കാണ് **പവർ**. ഒരു ബലത്തിന്റെ ശരാശരി പവർ എന്നത് പ്രവൃത്തി (W)യുടെയും എടുക്കുന്ന ആകെ സമയത്തിന്റെയും (t) അനുപാതമാണ്.

$$P_{av} = \frac{W}{t}$$

പവറിന്റെ സമയ ഇടവേള പൂജ്യത്തോടടുക്കുമ്പോഴുള്ള ശരാശരി മൂല്യത്തെ പവറിന്റെ തൽക്ഷണ മൂല്യമായി നിർവചിക്കാം.

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (6.21)$$

F എന്ന ബലം dr എന്ന സ്ഥാനാന്തരം ഉണ്ടാക്കുന്നതിന് ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി $dW = \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ ആണ്. അതിനാൽ തൽക്ഷണ പവർ

$$P = \mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ എന്നെഴുതാം.}$$

$$= \mathbf{F}\,.\,\mathbf{v} \qquad (6.22)$$

v എന്നത് F ബലം പ്രയോഗിക്കുന്ന സമയത്തെ തൽക്ഷണ പ്രവേഗമാണ്.

പ്രവൃത്തി, ഊർജം എന്നിവപോലെ ഒരു അദിശ അളവാണ് പവർ. അതിന്റെ ഡൈമെൻഷൻ $[ML^2T^{-3}]$ ആണ്. SI യിൽ അതിന്റെ യൂണിറ്റ് വാട്ട് (W) ആണ്. വാട്ട് എന്നത് $1\ J\ s^{-1}$ ആണ്. 18-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ആവിയന്ത്രം കണ്ടുപിടിച്ച ജയിംസ് വാട്ടിന്റെ പേരിലാണ് പവറിന്റെ യൂണിറ്റ് അറിയപ്പെടുന്നത്.

പവറിന് കുതിരശക്തി എന്ന മറ്റൊരു യൂണിറ്റുണ്ട്.
ഒരു കുതിരശക്തി (1hP) = 746 W ആണ്
ഓട്ടോമൊബൈലുകളുടെയും മോട്ടോർ ബൈക്കിന്റെയും പ്രവർത്തനശേഷി പ്രകടിപ്പിക്കാൻ ഇപ്പോഴും ഈ യൂണിറ്റാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

വൈദ്യുത ഉപകരണങ്ങളായ ബൾബുകൾ, ഹീറ്ററുകൾ, ഫ്രിഡ്ജുകൾ തുടങ്ങിയവ വാങ്ങുമ്പോൾ നാം വാട്ട് എന്ന യൂണിറ്റിനെ ഉപയോഗിക്കും. ഒരു 100 W ബൾബ് 10 മണിക്കൂർ പ്രവർത്തിപ്പിച്ചാൽ 1 കിലോവാട്ട് (1kWh) ഊർജം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

= 100 (വാട്ട്) × 10 (മണിക്കൂർ)
= 1000 വാട്ട് മണിക്കൂർ
=1 കിലോ വാട്ട് അവർ (1 kWh)
= 10^3 (W) × 3600 (s)
= 3.6×10^6 J

വൈദ്യുതബില്ലുകളിൽ വൈദ്യുത ഉപഭോഗം kWh യൂണിറ്റിൽ കാണുന്നു. kWh എന്നത് ഊർജത്തിന്റെ യൂണിറ്റാണ്. പവറിന്റേതല്ല എന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക.

▶**ഉദാഹരണം 6.11:** പരമാവധി 1800kg (ലിഫ്റ്റ് + യാത്രക്കാർ) ഭാരം വഹിക്കാൻ കഴിയുന്ന ഒരു ലിഫ്റ്റ് $2\ m\ s^{-1}$ സ്ഥിരവേഗത്തോടെ മുകളിലേക്കു സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഈ ചലനത്തിനെതിരായ ഘർഷണ ബലം 4000 Nആണ്. ഈ ലിഫ്റ്റിന് മോട്ടോർ നൽകുന്ന കുറഞ്ഞ പവർ വാട്ടിലും കുതിരശക്തിയിലും കണ്ടെത്തുക.

ഉത്തരം: ലിഫ്റ്റിൽ താഴേക്കുള്ള ബലം

$$F \quad m\,g + F_f \quad (1800 \times 10) + 4000 = 22000\ N$$

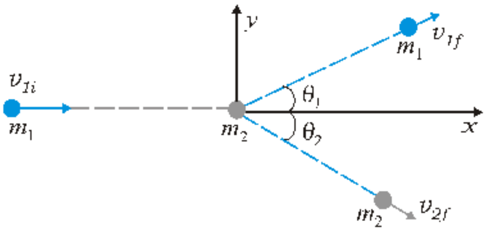
ഈ ബലത്തിന് തത്തുല്യമായ പവർ ഈ മോട്ടോർ നൽകണം. അതായത്,

$$P = \mathbf{F}.\,\mathbf{v} = 22000 \times 2 = 44000\ W = 59\ hp$$ ◀

6.12 കൂട്ടിമുട്ടലുകൾ (Collisions)

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ നമ്മൾ ചലനത്തെ (സ്ഥാനാന്തരം) കുറിച്ച് പഠിച്ചു. അതേസമയം ഭൗതികപ്രവർത്തനങ്ങളിൽ മാറ്റത്തിനുവിധേയമാകാത്ത ഭൗതിക അളവുകൾ കണ്ടെത്താനും നാം ശ്രമിച്ചു. ആക്കം ഊർജസംരക്ഷണ നിയമങ്ങൾ ഇതിനുദാഹരണങ്ങളാണ്. ഈ നിയമങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടൽ എന്ന സാധാരണ പ്രതിഭാസത്തിൽ പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നതെന്നു നോക്കാം. ബില്യാഡ്സ്, ഗോലികളി, കാരംസ് തുടങ്ങി നിരവധി കളികളിൽ കൂട്ടിമുട്ടൽ കാണാവുന്നതാണ്. നമുക്ക് കൂട്ടിമുട്ടലിനെ ശാസ്ത്രീയമായി അപഗ്രഥിക്കാൻ ശ്രമിക്കാം.

m_1, m_2 എന്നീ രണ്ടു മാസുകൾ സങ്കൽപിക്കുക. m_1 എന്ന കണം v_{1i} വേഗത്തിൽ ചലിക്കുന്നു. i എന്നത് ആദ്യത്തേത് (initial) എന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. m_2 നിശ്ചലമാണെന്ന് കരുതാം. ഈ അവസ്ഥയിൽ m_1 എന്ന മാസ് നിശ്ചലമായ മാസ് m_2 വുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. ഇത് ചിത്രം 6.10 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 6.10: m_1 മാസിന്റെ നിശ്ചലമായ മാസ് m_2വുമായുള്ള കൂട്ടിമുട്ടൽ

ഇവിടെ m_1,m_2 എന്നീ മാസുകൾ വ്യത്യസ്തദിശകളിൽ തെറിച്ചു പോകുന്നു. ഈ മാസുകളെയും, പ്രവേഗങ്ങളെയും കോണുകളെയും കൂട്ടിയിണക്കുന്ന ബന്ധങ്ങൾ നമുക്ക് കണ്ടെത്താവുന്നതാണ്.

6.12.1 ഇലാസ്തികവും ഇലാസ്തികമല്ലാത്തതുമായ കൂട്ടിമുട്ടലുകൾ (Elastic & Inelastic collisions)

എല്ലാ കൂട്ടിമുട്ടലുകളിലും ആകെ രേഖീയആക്കം സംരക്ഷിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഒരു വ്യൂഹത്തിന്റെ ആദ്യ ആക്കം അന്തിമആക്കത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും. ഒരാൾക്കിത് താഴെപറയുംപോലെ തെളിയിക്കാനാകും. രണ്ടു വസ്തുക്കൾ തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടിയാൽ, Δt സമയത്തിലെ പരസ്പരമുള്ള ആവേഗബലങ്ങൾ അവരുടെ ആക്കത്തിൽ വ്യത്യാസമുണ്ടാക്കും.

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{F}_{12}\ \Delta t$$
$$\Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{F}_{21}\ \Delta t$$

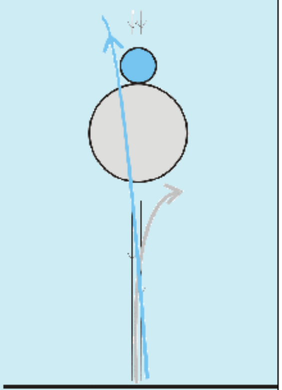
ഇവിടെ F_{12} എന്നത് ആദ്യകണത്തിൽ രണ്ടാമത്തെ കണം പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലമാണ്.

F_{21} എന്നത് രണ്ടാം കണത്തിൽ ഒന്നാം കണം പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലമാണ്.

ന്യൂട്ടന്റെ 3-ാം ചലനനിയമപ്രകാരം
$F_{12} = -F_{21}$ ആണ്.
ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ എന്നാണ്. Δt

നേർക്കുനേർ കൂട്ടിയിടിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഒരു പരീക്ഷണം
(An experiment on head-on collision)

ഒരു തിരശ്ചീനപ്രതലത്തിലെ കൂട്ടിയിടിപരീക്ഷണം നടത്തുമ്പോൾ, നമ്മൾ മൂന്നു തരം പ്രശ്നങ്ങൾ നേരിടുന്നു. ഒന്ന്, ഘർഷണം കാരണം വസ്തുക്കൾക്ക് സമപ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുക സാധ്യമല്ല. രണ്ടാമതായി, വ്യത്യസ്തവലുപ്പമുള്ള വസ്തുക്കൾ ഒരു പ്രതലത്തിൽ പുറത്തു കൂട്ടിമുട്ടിയാൽ, പ്രതലത്തിൽനിന്ന് ഒരേ ഉയരത്തിലല്ല അവയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രങ്ങളെങ്കിൽ അവയെ നേർക്കുനേർ കൂട്ടിമുട്ടലിനായി ക്രമീകരിക്കുന്നത് പ്രയാസമായിരിക്കും. മൂന്നാമതായി, കൂട്ടിമുട്ടലിന് തൊട്ടു മുമ്പും ശേഷവുമുള്ള പ്രവേഗങ്ങൾ അളക്കുക തികച്ചും ബുദ്ധിമുട്ടാണ്.



എന്നാൽ ഈ പരീക്ഷണം നടത്തുന്നത് ലംബദിശയിലായാൽ, ഈ പ്രയാസങ്ങളെല്ലാം ഒഴിവാകും. രണ്ടു പന്തുകളിൽ ഒന്ന് വലുതും (ബാസ്ക്കറ്റ് ബോൾ/ഫുട്ബോൾ/വോളിബോൾ) മറ്റേത് ചെറുതും (ടെന്നിസ് പന്ത്/റബ്ബർപന്ത്/ടേബിൾ ടെന്നിസ് പന്ത്) എടുക്കുക. ആദ്യം ഭാരമുള്ള പന്തെടുത്ത് 1 m ഉയരത്തിൽ നിന്ന് താഴേക്കിടുക. പന്ത് എത്ര ഉയരുമെന്ന് രേഖപ്പെടുത്തുക. ഇത് തറയിൽ തട്ടി തെറിക്കുന്നതിന് തൊട്ടു മുമ്പും ശേഷവുമുള്ള പ്രവേഗങ്ങൾ നൽകുന്നു. ($v^2=2gh$ ഉപയോഗിച്ച്). ഇതിൽ നിന്നു നമുക്ക് പുനസ്ഥാപനഗുണാങ്കം (coefficient of restitution) ലഭിക്കും. ഇനി വലിയ പന്തും ചെറിയ പന്തും എടുത്ത് ചെറിയ പന്ത് മുകളിലും വലിയ പന്ത് താഴെയുമായി ചിത്രത്തിലേതുപോലെ വക്കുക. അവയെ ഒരുമിച്ച് താഴേക്കിടുക. വീഴുമ്പോൾ അവ ഒരുമിച്ച് ഇരിക്കത്തക്ക വിധം താഴേക്ക് ഇടുക. ഒറ്റക്ക് താഴേക്കിടുമ്പോൾ ഉള്ളതിലും കുറഞ്ഞ ദൂരത്തിൽ മാത്രമേ വലിയ പന്ത് ഉയരുന്നുള്ളൂ. എന്നാൽ ചെറിയ പന്ത് ഏകദേശം 3m ഉയരത്തിലേക്ക് കുതിച്ചുയരുന്നു. ചെറിയ പന്ത് വശങ്ങളിലേക്കു പോകാതെ നേരെതന്നെ മുകളിലേക്ക് ഉയരുന്ന തരത്തിൽ, പന്തുകളെ ശരിയായി താഴേക്കിടാൻ പരിശീലനം മൂലം കഴിയും. ഇതാണ് നേർക്കുനേർ കൂട്ടിമുട്ടൽ അഥവാ കൊളീഷൻ.

ഈ പരീക്ഷണത്തിൽ ഫലം ലഭിക്കുന്ന അനുയോജ്യമായ പന്തുകളുടെ ജോടി നമുക്ക് കണ്ടെത്താം. ഒരു സാധാരണ ബാലൻസിൽ മാസുകൾ അളന്നെടുക്കാം. പന്തുകളുടെ ആദ്യ-അവസാന പ്രവേഗങ്ങൾ എങ്ങനെ കണ്ടെത്താം എന്നത് നിങ്ങളുടെ ചിന്തക്കായി വിടുന്നു.

സമയത്ത് ബലങ്ങൾ സങ്കീർണമായി മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുകയാണെങ്കിലും, മുകളിലെ നിഗമനങ്ങൾ ശരിയാണ്. എല്ലാ സമയത്തും മൂന്നാം ചലനനിയമം ശരിയായതിനാൽ ആദ്യവസ്തുവിലെ ആകെ ആവേഗം രണ്ടാം വസ്തുവിലെ ആവേഗത്തിന് തുല്യവും വിപരീതവുമാണ്.

എന്നാൽ വ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ ഗതികോർജം സംരക്ഷിതമാകണമെന്നില്ല. കൂട്ടിമുട്ടൽവേളയിലെ രൂപമാറ്റം, ആഘാതം എന്നിവ ചൂടും ശബ്ദവും ഉൽപാദിപ്പിക്കുന്നു. ആദ്യ ഗതികോർജത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗം മറ്റു തരത്തിലുള്ള ഊർജങ്ങളായി മാറുന്നു. കൂട്ടിമുട്ടൽ മൂലമുണ്ടാകുന്ന രൂപമാറ്റത്തെ ഒരു അമർത്തിവച്ച സ്പ്രിങ്ങിന്റെ സഹായത്താൽ ദൃശ്യവൽക്കരിക്കാം. രണ്ട് മാസുകളെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന ഒരു സ്പ്രിങ് ഊർജനഷ്ടം കൂടാതെ യഥാർഥ രൂപത്തിലേക്ക് തിരികെവരുമ്പോൾ ആദ്യ ഗതികോർജം അന്തിമ ഗതികോർജത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും. എന്നാൽ Δt കൂട്ടിമുട്ടൽ സമയത്തിലെ ഗതികോർജം സ്ഥിരമായിരിക്കില്ല. ഇത്തരം കൂട്ടുമുട്ടലുകളെ **ഇലാസ്തിക കൂട്ടിമുട്ടൽ** എന്നു പറയുന്നു. നേരെമറിച്ച് രൂപം മാറാതിരിക്കുകയും രണ്ടു വസ്തുക്കളും കൂട്ടിയിടിക്കു ശേഷം ഒന്നിച്ചു നീങ്ങുകയും ചെയ്യാം. ഒരു കൂട്ടിമുട്ടലിൽ, കൂട്ടിയിടിക്കു ശേഷം രണ്ട് കണങ്ങളും ഒരുമിച്ചു സഞ്ചരിക്കുകയാണെങ്കിൽ അതിനെ **പൂർണ്ണ ഇലാസ്തികമല്ലാത്ത കൂട്ടിമുട്ടൽ** എന്നു പറയുന്നു. ഇതിന് രണ്ടിനുമിടയിലായി രൂപം ഭാഗികമായി മാറുകയും ആദ്യ ഗതികോർജത്തിൽ കുറച്ചു നഷ്ടപ്പെടുകയും ചെയ്യുന്നത് സർവസാധാരണമാണ്. ഇത് **ഇലാസ്തിക കൂട്ടിമുട്ടൽ** എന്നു പറയുന്നു.

6.12.2 ഏകമാനത്തിലെ കൂട്ടിമുട്ടലുകൾ (Collisions in One Dimension)

ആദ്യം ഏകമാനത്തിലെ **പൂർണ ഇൻ ഇലാസ്തിക** കൂട്ടിമുട്ടൽ പരിഗണിക്കാം. അപ്പോൾ ചിത്രം 6.10 ൽ നിന്ന്

$$\theta_1 - \theta_2 - 0$$

$$m_1 v_{1i} - (m_1 - m_2) v_f \quad \text{(ആക്കസംരക്ഷണം)}$$

$$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad (6.23)$$

കൂട്ടിമുട്ടൽമൂലം നഷ്ടപ്പെടുന്ന ഗതികോർജം

$$\Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2 \quad \text{[സമവാക്യം. (6.23)]}$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \left[1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2$$

പ്രതീക്ഷിച്ചപോലെ ഇത് ഒരു പോസിറ്റീവ് അളവാണ്. അടുത്തതായി ഒരു ഇലാസ്തിക കൂട്ടിമുട്ടൽ പരിഗണിക്കാം. മുകളിലേതു പോലെ $\theta_1 \quad \theta_2 \quad 0$ എന്നെടുത്താൽ ആക്കത്തിന്റെയും ഗതികോർജത്തിന്റെയും സംരക്ഷണ സമവാക്യങ്ങൾ

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \quad m_2 v_{2f} \qquad (6.24)$$

$$m_1 v_{1i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 \text{ ആണ്.} \qquad (6.25)$$

സമവാക്യം (6.24), (6.25) ഇവയിൽ നിന്ന്

$$m_1 v_{1i}(v_{2f} - v_{1i}) = m_1 v_{1f}(v_{2f} - v_{1f})$$

അല്ലെങ്കിൽ $v_{2f}(v_{1i} - v_{1f}) = v_{1i}^2 - v_{1f}^2$

$$= (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f})$$

$$\therefore v_{2f} = v_{1i} + v_{1f} \qquad (6.26)$$

ഇത് സമവാക്യം (6.24), ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad (6.27)$$

അതുപോലെ $v_{2f} = \dfrac{2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$ (6.28)

എന്നും ലഭിക്കും.

ഇവിടെ അറിയാത്ത അളവുകളായ $\{v_{1f}, v_{2f}\}$ എന്നിവ അറിയുന്നവയായ $\{m_1, m_2, v_{1i}\}$. എന്നിവയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ലഭിക്കും. നമ്മുടെ ഈ വിശകലനത്തിന്റെ ചില പ്രത്യേക സന്ദർഭങ്ങൾ വളരെ ശ്രദ്ധേയമാണ്.

സന്ദർഭം I : രണ്ടു മാസുകളും തുല്യമായാൽ

v_{1f} 0

$v_{2f} = v_{1i}$

ആദ്യ മാസ് നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ എത്തിച്ചേരും. കൂട്ടിമുട്ടുമ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ മാസിനെ ആദ്യമാസിന്റെ ആദ്യ വേഗത്തിൽ തള്ളിനീക്കുന്നു.

സന്ദർഭം II: ഏതെങ്കിലും ഒരു മാസ് വലുതായാൽ

DZm $m_2 >> m_1$ $v_{1f} \simeq - v_{1i}$ $v_{2f} \simeq 0$

ഭാരമുള്ള മാസ് മാറ്റമില്ലാതെ തുടരും. എന്നാൽ ചെറിയ മാസിന്റെ പ്രവേഗത്തിന്റെ ദിശ നേരേ തിരിച്ചാകും.

▶ *ഉദാഹരണം 6.12:* ന്യൂട്രോണുകളുടെ വേഗം കുറയ്ക്കൽ: ഏകദേശം 10^7 m s^{-1} അതിവേഗമുള്ള ഒരു ന്യൂട്രോണിന്റെ വേഗം ഒരു ന്യൂക്ലിയർ റിയാക്ടർ 10^3 m s^{-1} ആയി കുറക്കുന്നു. ഇതിന്റെ ഫലമായി $^{235}_{92}U$ ഐസോടോപ്പുമായി കൂട്ടിയിടിക്കാനുള്ള സാധ്യത വർധിക്കുകയും ഫിഷൻ നടക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഡ്യൂട്ടീരിയം, കാർബൺ എന്നിവ പോലെ ന്യൂട്രോണിനേക്കാൾ അൽപ്പം മാത്രം മാസ് കൂടുതലുള്ള ലഘു ന്യൂക്ലിയസുകളുമായി ഇലാസ്തിക കൂട്ടിമുട്ടൽ വഴി ഒരു ന്യൂട്രോണിന്റെ ഗതികോർജം മുഴുവനായും നഷ്ടപ്പെടുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഉത്തരം: ന്യൂട്രോണിന്റെ ആദ്യ ഗതികോർജം

$$K_{1i} = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$

സമവാക്യം 6.27ൽ നിന്ന് അന്തിമഗതികോർജം

$$K_{1f} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 v_{1i}^2$$

ഗതികോർജനഷ്ടത്തിന്റെ അനുപാതം

$$f_1 = \frac{K_{1f}}{K_{1i}} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2$$

എന്നാൽ മോഡറേറ്ററായ ന്യൂക്ലിയസ് നേടുന്ന ഗതികോർജം K_{2f}/K_{1i} എന്നത് $f_2 = 1 - f_1$ ആണ് (ഇലാസ്തിക കൂട്ടിയിടിയിൽ).

$$= \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

സമവാക്യം (6.28)ൽ വിലകൾ നൽകുകവഴിയും ഇതേ ഉത്തരം ലഭിക്കും.

ഡ്യൂട്ടീരിയത്തിന് m_2 $2m_1$ ആണ്. നമുക്ക് f_1 1/9 എന്നും f_2 8/9 എന്നും ലഭിക്കും. ന്യൂട്രോണുകളുടെ ഊർജത്തിന്റെ 90% വും ഡ്യൂട്ടീരിയത്തിന് കൈമാറ്റം ചെയ്യപ്പെടും. കാർബണിന് f_1 71.6% ഉം f_2 28.4% ഉം ആണ്. നേർക്കുനേരെയുള്ള കൂട്ടിയിടിക്കുള്ള സാധ്യത കുറവായതിനാൽ ഇതിന്റെ വില യഥാർഥത്തിൽ വളരെ ചെറുതാണ്. ◀

വസ്തുക്കളുടെ ആദ്യപ്രവേഗങ്ങളും അന്തിമപ്രവേഗങ്ങളും ഒരേ നേർരേഖയിലൂടെയാണെങ്കിൽ ഇതിനെ ഏകമാനത്തിലുള്ള കൂട്ടിയിടി അഥവാ നേർക്കുനേരെയുള്ള കൂട്ടിയിടി (head - on collision) എന്നു പറയുന്നു. ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ചെറിയ വസ്തുക്കളെ സംബന്ധിച്ചാണെങ്കിൽ ഒന്നാമത്തെ വസ്തുവിന്റെ ചലനദിശ നിശ്ചലാവസ്ഥയിലുള്ള രണ്ടാമത്തെ വസ്തുവിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നുവെങ്കിൽ ഇത്തരം നേർക്കുനേർ ഉള്ള കൂട്ടിയിടി സാധ്യമാകും. പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ, ആദ്യ പ്രവേഗങ്ങളും അന്തിമപ്രവേഗങ്ങളും ഒരു തലത്തിലാണെങ്കിൽ കൂട്ടിമുട്ടൽ ദ്വിമാനത്തിലുള്ള കൂട്ടിമുട്ടലാണെന്നു പറയാം.

6.12.3 ദ്വിമാന കൂട്ടിമുട്ടലുകൾ (Collisions in two Dimensions)

ചിത്രം 6.10 ചലിക്കുന്ന m_1 എന്ന മാസിന്റെ നിശ്ചലമാസ് m_2 വുമായുള്ള കൂട്ടിമുട്ടൽകൂടി ചിത്രീകരിക്കുന്നു. ഇത്തരം കൂട്ടിമുട്ടലുകളിൽ ആക്കം സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നു. ആക്കം ഒരു സദിശമായതിനാൽ ഇത് മൂന്നു ദിശകളിലുള്ള (x, y, z) മൂന്ന് സമവാക്യങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. m_1 ന്റെയും m_2 വിന്റെയും അവസാന പ്രവേഗ ദിശകളാൽ തീരുമാനിക്കപ്പെടുന്ന ഒരു തലം സങ്കൽപിക്കുക. ഇത് x y തലം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ആക്കത്തിന്റെ z ഘടകത്തിന്റെ സംരക്ഷണം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് കൂട്ടിമുട്ടൽ നടക്കുന്നത് x - y തലത്തിലാണെന്നാണ്. x, y ഘടകങ്ങളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2 \qquad (6.29)$$

$$0 \quad m_1 v_{1f} \sin \theta_1 - m_2 v_{2f} \sin \theta_2 \qquad (6.30)$$

(m_1, m_2, v_1) എന്നിവ മിക്ക അവസ്ഥകളിലും നമുക്ക drb nw A drb m \ ne vcmi n\ f pw (v_{1f}, v_{2f}, θ_1, θ_2) ഇവ. നിർധാരണം ചെയ്യുന്നതിലേക്കായി രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളുമാണുള്ളത്.

ഇവിടെ $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ആണെങ്കിൽ ഏകമാനത്തിലെ സമവാക്യം 6.24 ലഭിക്കും.

വീണ്ടും കൂട്ടിമുട്ടൽ ഇലാസ്തികമാണെങ്കിൽ

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^{\ 2} = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^{\ 2} \qquad (6.31)$$

ഇങ്ങനെ നമുക്ക് ഒരു സമവാക്യംകൂടി അധികം ലഭിക്കുന്നു. പക്ഷേ, ഇപ്പോഴും ഒരു സമവാക്യത്തിന്റെ കുറവുണ്ട്. അറിയാത്ത നാല് അളവുകളിൽ ഒന്നെങ്കിലും (θ_1 എന്നിരിക്കട്ടെ) അറിയാമെങ്കിൽ മാത്രമേ ഈ പ്രശ്നം പരിഹരിക്കാൻ കഴിയൂ. ഒരു ഡിറ്റക്ടറിനെ കോണീയമായി x ൽ നിന്ന് y അക്ഷത്തിലേക്ക് ചലിപ്പിച്ചാൽ θ_1 കണ്ടു പിടിക്കാം. m_1, m_2, v_i, θ_1 എന്നിവ അറിയാമെങ്കിൽ നമുക്ക് v_{1f}, v_{2f}, θ_2 എന്നിവ സമവാക്യം 6.29 മുതൽ 6.31 വരെ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം.

▶ *ഉദാഹരണം 6.13:* ചിത്രം 6.10 ൽ ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്ന കൂട്ടിമുട്ടൽ $m_1 = m_2$ എന്ന തുല്യമാസുകളുള്ള രണ്ട് ബില്യാഡ് ബോളുകൾക്കിടയിലാണെന്നു കരുതാം. ഒന്നാമത്തെ പന്തിനെ ക്യൂ (cue) എന്നും രണ്ടാമത്തെ പന്തിനെ ടാർഗറ്റ് എന്നും വിളിക്കുന്നു. ബില്യാർഡ്കളിക്കാരൻ ലക്ഷ്യത്തിലുള്ള പന്തിനെ ഒരു മൂലയിലുള്ള കുഴിയിൽ വീഴ്ത്താൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. ഇത് $\theta_2 = 37°$ യിലാണ്. കൊളീഷൻ ഇലാസ്തികമാണെന്നും ഘർഷണവും വർത്തുള ചലനവും അവഗണിക്കാവുന്നതാണെന്നും കരുതുക. θ_1 കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉത്തരം: ആക്കസംരക്ഷണത്തിൽനിന്നു മാസുകൾ സറിരമായതു കൊണ്ട്

$\mathbf{v}_{1i} = \mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}$ എന്നെടുക്കാം.

അല്ലെങ്കിൽ $v_{1i}^{\ 2} = (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) \cdot (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f})$

$$= v_{1f}^{\ 2} + v_{2f}^{\ 2} + 2\mathbf{v}_{1f} . \mathbf{v}_{2f}$$

$$= \left\{ v_{1f}^{\ 2} + v_{2f}^{\ 2} + 2 v_{1f} v_{2f} \cos\ (\theta_1 + 37°) \right\} \qquad (6.32)$$

കൊളീഷൻ ഇലാസ്തികമായതിനാലും $m_1 = m_2$ ആയതുകൊണ്ടും ഗതികോർജത്തിന്റെ സംരക്ഷണത്തിൽ നിന്ന്

$$v_{1i}^{\ 2} = v_{1f}^{\ 2} + v_{2f}^{\ 2} \qquad (6.33)$$

സമവാക്യം (6.32), (6.33) എന്നിവ താരതമ്യം ചെയ്താൽ

$$\cos (\theta_1 + 37°) \quad 0$$

$$\theta_1 + 37° \quad 90°$$

അതിനാൽ, $\theta_1 \quad 53°$

ഇത് താഴെപ്പറയുന്ന ഫലം തെളിയിക്കുന്നു. രണ്ടു തുല്യ മാസുകൾ ഒരു ഇലാസ്തിക കൂട്ടിമുട്ടലിനു വിധേയമാകുമ്പോൾ അതിലൊന്ന് നിശ്ചലമായിരുന്നാൽ, കൂട്ടിമുട്ടലിനുശേഷം അവ പരസ്പരം ലംബമായി സഞ്ചരിക്കും. ◀

ഗോളാകൃത മാസുകൾ മിനുസപ്രതലങ്ങളിൽ നീങ്ങുന്നതായി സങ്കൽപിക്കുകയും വസ്തുക്കൾ ഉരസുമ്പോൾ മാത്രം കൂട്ടിമുട്ടൽ നടക്കുന്നുവെന്നു കരുതുകയും ചെയ്താൽ ഈ പ്രശ്നം ലളിതവൽക്കരിക്കാം. മാർബിൾ, കാരംസ്, ബില്യാഡ്സ് തുടങ്ങിയ കളികളിൽ ഇതാണ് സംഭവിക്കുന്നത്.

നമ്മുടെ നിത്യജീവിതത്തിൽ, രണ്ടു വസ്തുക്കൾ പരസ്പരം ഉരസുമ്പോഴാണ് കൂട്ടിമുട്ടൽ നടക്കുന്നത്. എന്നാൽ വളരെ ദൂരത്ത് നിന്നു സൂര്യനിലേക്കു വരുന്ന ധൂമകേതുവും, ന്യൂക്ലിയസിനടുത്തേക്ക് വരുന്ന കണവും ഏതോ ദിശയിൽ അകന്നു പോകുന്നു. ഈ പ്രതിഭാസത്തെ വിസരണം (Scattering) എന്നു പറയുന്നു. ഇവിടെ നമുക്ക് വളരെ ദൂരത്തിൽ പ്രവർത്തനം നടത്തുന്ന ബലങ്ങളെ കൈകാര്യം ചെയ്യണം. രണ്ടു കണികകളുടെ പ്രവേഗവും ഗമനദിശകളും അവരുടെ ആദ്യപ്രവേഗങ്ങളെയും അവർ തമ്മിലുള്ള ഇടപെടലിന്റെ സ്വഭാവത്തെയും, അവയുടെ മാസുകൾ, ആകൃതി, വലുപ്പം എന്നിവയെയും ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു.

സംഗ്രഹം

1. പ്രവൃത്തി - ഊർജനിയമം പ്രസ്താവിക്കുന്നത് ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജ വ്യത്യാസം പരിണതബലം വസ്തുവിൽ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിക്ക് തുല്യമാണെന്നാണ് $K_f - K_i \quad W_{net}$
2. ഒരു ബലം സംരക്ഷിതബലമാകുന്നത് (i) അത് ഒരു വസ്തുവിൽ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി, പാതയെ ആശ്രയിക്കാതെ, $\{x_i, x_j\}$ തുടങ്ങിയ അഗ്രബിന്ദുകളെ മാത്രം ആശ്രയിക്കുമ്പോഴോ അല്ലെങ്കിൽ (ii) വസ്തു ആദ്യ സ്ഥാനത്തേക്ക് മടങ്ങിവരുന്നതു മൂലം, അതുണ്ടാക്കുന്ന അടഞ്ഞ പാതയിൽ ഒരു ബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി പൂജ്യമായിരിക്കുമ്പോഴാണ്.
3. ഏകമാനത്തിലെ ഒരു സംരക്ഷിതബലത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ സ്ഥിതികോർജഫലനത്തെ നമുക്ക് ഇങ്ങനെ നിർവചിക്കാം.

$$\mathrm{F}(x) = -\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x} \quad \text{അഥവാ} \quad V_i - V_f = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

4. യാന്ത്രികോർജസംരക്ഷണ നിയമം പ്രസ്താവിക്കുന്നത്, ഒരു വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലങ്ങൾ സംരക്ഷിതബലങ്ങളായാൽ, ആ വസ്തുവിന്റെ ആകെ യാന്ത്രികോർജം സ്ഥിരമായിരിക്കുമെന്നാണ്.

5. ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽനിന്ന് x ഉയരത്തിൽ m മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഗുരുത്വാകർഷണ സ്ഥിതികോർജം. $V(x)$ $m g x$ ആണ്.
g ക്ക് ഉയരം അനുസരിച്ചുള്ള വ്യതിയാനം ഇവിടെ കണക്കാക്കുന്നില്ല.
6. സ്പ്രിങ് സ്ഥിരാങ്കം k യും വലിവ് x ഉം ഉള്ള ഒരു സ്പ്രിങിന്റെ ഇലാസ്തിക സ്ഥിതികോർജം

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$ ആണ്.

7. **A, B** എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ അദിശ ഗുണനഫലത്തെ **A·B** എന്നെഴുതാം. ഇതൊരു അദിശഅളവാണ്. ഇതിനെ **A·B** = $AB \cos\theta$ എന്നെഴുതാം. θ എന്നത് **A** ക്കും **B** ക്കും ഇടയിലെ കോണളവാണ്. ഇതിന്റെ മൂല്യം θ യുടെ വില അനുസരിച്ച് പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ പൂജ്യമോ ആകാം. സദിശങ്ങളുടെ അദിശ ഗുണനഫലം എന്നത് അവയിൽ ഒന്നിന്റെ പരിമാണത്തിന്റെയും ആദ്യ സദിശത്തിന്റെ ദിശയിൽ രണ്ടാം സദിശത്തിന്റെ ഘടകത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമായി വ്യാഖ്യാനിക്കാം. യൂണിറ്റ് സദിശങ്ങൾക്ക്

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$$

ഭൗതിക അളവ്	പ്രതീകം	ഡൈമെൻഷൻ	യൂണിറ്റ്	പരാമർശം
പ്രവൃത്തി	W	$[ML^2T^{-2}]$	J	W = **F**· **d**
ഗതികോർജം	K	$[ML^2T^{-2}]$	J	$K = \frac{1}{2}mv^2$
സ്ഥിതികോർജം	V(x)	$[ML^2T^{-2}]$	J	$F(x) = \frac{-dV(x)}{dx}$
യാന്ത്രികോർജം	E	$[ML^2T^{-2}]$	J	E = K + V
സ്പ്രിങ് സ്ഥിരാങ്കം	k	$[MT^{-2}]$	N m^{-1}	F = -kx $F = -kx = \frac{1}{2}kx^2$
പവർ	P	$[ML^2T^{-3}]$	W	W = **F**· $\boldsymbol{v}$ $P = \frac{dW}{dt}$

വിചിന്തനവിഷയങ്ങൾ

1. 'ചെയ്ത പ്രവൃത്തി കണക്കാക്കുക' എന്ന പ്രയോഗം അപൂർണമാണ്. നിശ്ചിത സ്ഥാനാന്തരത്തിൽ ഒരു വസ്തുവിൻമേൽ ഒരു നിശ്ചിതബലം അല്ലെങ്കിൽ ഒരു കൂട്ടം ബലങ്ങൾ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിയെന്നാണ് പറയേണ്ടത്.

2. പ്രവൃത്തി ഒരു അദിശ അളവാണ്. മാസും ഗതികോർജവും പോസിറ്റീവ് അദിശഅളവുകളാണ്. അതിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമായി പ്രവൃത്തി പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ ആകാം. ഘർഷണബലമോ, വിസ്കസ്ബലമോ (viscous force) ഒരു ചലിക്കുന്ന വസ്തുവിൽ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി നെഗറ്റീവാണ്.

3. ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് രണ്ടു വസ്തുക്കൾക്കിടയിൽ പരസ്പരം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ആകെ ബലം പൂജ്യമാണ്.

   $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}$ 0

   എന്നാൽ രണ്ട് ബലങ്ങൾ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിയുടെ തുക എപ്പോഴും പൂജ്യമാവണമെന്നില്ല.

   $W_{12} + W_{21} \neq 0$

   എന്നാലിത് ചിലപ്പോൾ പൂജ്യമാകാം

4. ബലത്തിന്റെ യഥാർഥ പ്രകൃതം അറിയില്ലെങ്കിലും, ചിലപ്പോൾ ഒരു ബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി കണ്ടുപിടിക്കാം. ഉദാഹരണം 6.1ൽ നിന്ന് ഇത് വ്യക്തമാകും. ഇവിടെ പ്രവൃത്തി - ഊർജനിയമം അത്തരം ഒരു സാഹചര്യത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

5. പ്രവൃത്തി - ഊർജനിയമം ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമത്തിൽ നിന്ന് സ്വതന്ത്രമല്ല. പ്രവൃത്തി - ഊർജനിയമം രണ്ടാം ചലനനിയമത്തിന്റെ ഒരു അദിശരൂപമായി കാണാം. യാന്ത്രികോർജ സംരക്ഷണനിയമം സംരക്ഷിത ബലത്തെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം പ്രവൃത്തി - ഊർജനിയമത്തിന്റെ പരിണതഫലമായി കാണാവുന്നതാണ്.

6. എല്ലാ ഇനേർഷ്യൽ ഫ്രെയിമുകളിലും പ്രവൃത്തി- ഊർജനിയമം അനുസരിക്കുന്നു. സഫലബലം കണക്കാക്കുമ്പോൾ കപടബലങ്ങൾ (pseudo forces) കൂടി പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ പ്രവൃത്തി- ഊർജ നിയമം നോൺ ഇനേർഷ്യൽ ഫ്രെയിമുകളിലേക്ക് നമുക്ക് വ്യാപിപ്പിക്കാം.

7. സംരക്ഷിതബലത്തിന് വിധേയമായ ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥിതികോർജത്തിൽ ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയുടെ ഗുരുത്വം ഉണ്ടാക്കാം. ഏതു ബിന്ദുവിലാണ് സ്ഥിതികോർജം പൂജ്യമാകേണ്ടത് എന്ന് നമുക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കാം. ഗുരുത്വാകർഷണ സ്ഥിതികോർജം ഉദാഹരണത്തിന് ഭൂഗുരുത്വ പൊട്ടൻഷ്യൽ ഊർജം mgh കാണുമ്പോൾ ഭൗമോപരിതലത്തിൽ സ്ഥിതികോർജം mgh പൂജ്യമായി എടുക്കുന്നു. സ്പ്രിങ് സ്ഥിതികോർജം $kx^2/2$ പൂജ്യമാകുന്നത് ദോലനം ചെയ്യുന്ന മാസിന്റെ സന്തുലിതസ്ഥാനത്താണ്.

8. ബലതന്ത്രത്തിൽ പ്രതിപാദിക്കുന്ന എല്ലാ ബലങ്ങളുമായും ബന്ധപ്പെട്ട് ഒരു സ്ഥിതികോർജം ഇല്ല. ഉദാഹരണമായി, ഒരു അടഞ്ഞ പാതയിൽ ഘർഷണം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി പൂജ്യമല്ല. ഘർഷണവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് ഒരു സ്ഥിതികോർജവുമില്ല.

9. കൂട്ടിമുട്ടൽവേളയിൽ (a) ഓരോ സമയത്തും രേഖീയ ആക്കം സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നു. (b) ഗതികോർജ സംരക്ഷണം പ്രയോഗിക്കുന്നത് (ഇലാസ്തിക കൂട്ടിമുട്ടലാണെങ്കിൽ പോലും) കൂട്ടിമുട്ടൽ കഴിയുമ്പോഴാണ്. കൂട്ടിമുട്ടലിൽ എല്ലാ സമയത്തുമിത് അനുസരിക്കില്ല. യഥാർഥത്തിൽ കൂട്ടിമുട്ടൽ നടത്തുന്ന വസ്തുക്കൾക്ക് രൂപഭേദം വരുകയും ചില സമയത്ത് ഒന്ന് മറ്റൊന്നിനെ അപേക്ഷിച്ച് നിശ്ചലമായിരിക്കുകയും ചെയ്യും.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

6.1 ഒരു വസ്തുവിൽ ഒരു ബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിയുടെ ചിഹ്നത്തിന് പ്രാധാന്യമുണ്ട്. താഴെ പറയുന്ന അളവുകൾ പോസിറ്റീവാണോ നെഗറ്റീവാണോ എന്നു പ്രസ്താവിക്കുക.

(a) ഒരാൾ കിണറിൽ നിന്ന് ഒരു കയർ ഉപയോഗിച്ച് ജലം നിറച്ച ബക്കറ്റുയർത്തുന്നു.

(b) മുകളിലെ ഉദാഹരണത്തിൽ ഗുരുത്വബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി.

(c) ചരിവുപ്രതലത്തിൽ കൂടി നിരങ്ങിയിറങ്ങുന്ന ഒരു വസ്തുവിൽ ഘർഷണം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി.

(d) ഒരു പരുപരുത്ത തിരശ്ചീന പ്രതലത്തിൽക്കൂടി സമപ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെട്ട ബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി.

(c) ദോലനം ചെയ്യുന്ന ഒരു പെൻഡുലത്തെ നിശ്ചലമാക്കാൻ വായുവിന്റെ പ്രതിരോധബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി.

6.2 നിശ്ചലാവസ്ഥയിലുള്ള 2 kg മാസുള്ള ഒരു വസ്തു അതിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെട്ട 7 N തിരശ്ചീനബലത്തിന്റെ സ്വാധീനത്താൽ 0.1 ഗതികഘർഷണ ഗുണാങ്കമുള്ള ഒരു മേശയിൽ കൂടി ചലിക്കുന്നു.

(a) പ്രയോഗിക്കപ്പെട്ട ബലം 10 s കൊണ്ട് ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി

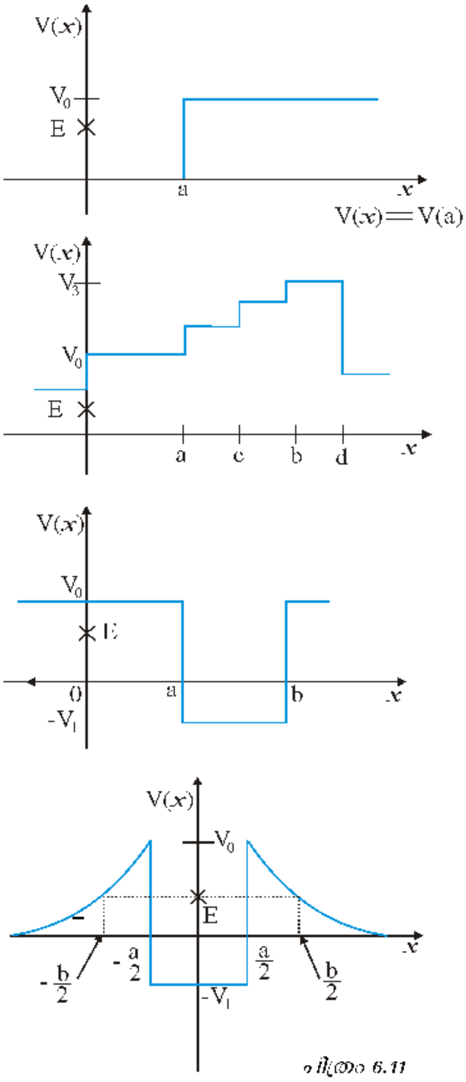
(b) ഘർഷണബലം 10 s കൊണ്ട് ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി

(c) സഫല ബലം 10 s കൊണ്ട് വസ്തുവിൽ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി

(d) 10s കൊണ്ട് വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന ഗതികോർജ വ്യത്യാസം.

എന്നിവ കണ്ടെത്തി നിങ്ങളുടെ ഉത്തരങ്ങൾ വ്യാഖ്യാനിക്കുക.

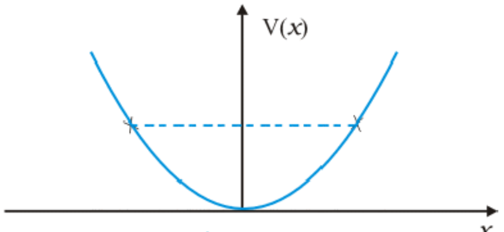
6.3 ഏകമാനത്തിലെ ചില സ്ഥിതികോർജഫലനങ്ങൾ ചിത്രം 6.11 ൽ തന്നിരിക്കുന്നു. കണത്തിന്റെ ആകെ ഊർജം അക്ഷത്തിൽ ഒരു ഗുണനചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ച് രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഓരോ പ്രശ്നത്തിലും ഏതെങ്കിലും സ്ഥലത്ത് തന്നിരിക്കുന്ന ഊർജത്തോടെ കണങ്ങളെ കാണാൻ കഴിയുന്നില്ലെങ്കിൽ ആ സ്ഥലങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുക. ഓരോ പ്രശ്നത്തിലും കണത്തിന് ഉണ്ടാകാവുന്ന ആകെ ഊർജത്തിന്റെ കുറഞ്ഞ വില സൂചിപ്പിക്കുക. ഈ സ്ഥിതികോർജരൂപങ്ങൾ പ്രസക്തമാകുന്ന ലളിതമായ



ചിത്രം 6.11

ഭൗതികസന്ദർഭങ്ങൾ ചിന്തിക്കുക.

6.4 രേഖീയ സരളഹാർമോണികചലനത്തിലുള്ള ഒരു കണികയുടെ b psS Ø rKrt I mÀP^ e\ w $V(x) = kx^2/2$ എന്നു തന്നിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ k ദോലകത്തിന്റെ ബലസറിരാങ്കമാണ്. k 0.5 N m^{-1} ൽ (V(x) ഉം x ഉം തമ്മിലുള്ള ഗ്രാഫ് ചിത്രം 6.12 ൽ തന്നിരിക്കുന്നു. ഈ പൊട്ടൻഷ്യലിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ആകെ ഊർജം 1 J ഉള്ള ഒരു കണിക $x = \pm 2$ ൽ എത്തിച്ചേരുമ്പോൾ തിരികെ വരും എന്നു തെളിയിക്കുക.

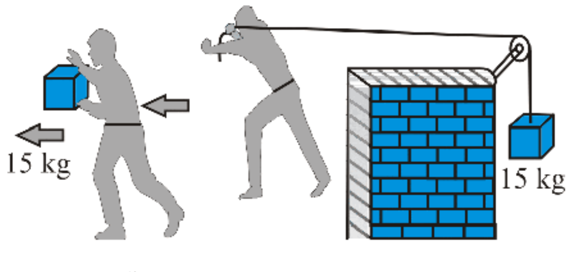


ചിത്രം 6.12

6.5 **താഴെപറയുന്നവക്ക് ഉത്തരം കണ്ടെത്തുക**

(a) സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു റോക്കറ്റിന്റെ ബാഹ്യാവരണം ഘർഷണംമൂലം കത്തിയമരുന്നു. കത്തുന്നതിനുള്ള താപോർജം എവിടെനിന്നാണ് ലഭിക്കുന്നത്? റോക്കറ്റിൽനിന്നാണോ അന്തരീക്ഷത്തിൽനിന്നോ?

(b) ധൂമകേതുക്കൾ സൂര്യനെ ചുറ്റി ദീർഘവൃത്തപാതയിലൂടെ ചലിക്കുന്നു. സാധാരണ ധൂമകേതുവിൽ സൂര്യൻ പ്രയോഗിക്കുന്ന ഗുരുത്വാകർഷണബലം അതിന്റെ പ്രവേഗത്തിന് ലംബമല്ല. എന്നിരുന്നാലും ധൂമകേതുവിന്റെ ഓരോ പൂർണ്ണ പരിക്രമണപാതയിലും ഗുരുത്വാകർഷണബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി പൂജ്യമാണ്. എന്തുകൊണ്ട്?



ചിത്രം 6.13

(c) നേർത്ത അന്തരീക്ഷത്തിൽ ഭൂമിയെ ചുറ്റുന്ന ഒരു കൃത്രിമ ഉപഗ്രഹത്തിന് അന്തരീക്ഷത്തിന്റെ പ്രതിരോധംമൂലം, ക്രമേണ തീരെ ചെറിയ തോതിലായാലും ക്രമേണ ഊർജം നഷ്ടപ്പെടുന്നു. എന്നാലും ഭൂമിയോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്തോറും അതിന്റെ വേഗം ക്രമമായി വർധിക്കുന്നു. എന്തുകൊണ്ട്?

(d) ചിത്രം 6.13 (i) ൽ കൈയിൽ 15 kg മാസുമായി ഒരാൾ 2 m നടക്കുന്നത് ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. ചിത്രം 6.13 (ii) ൽ അത്രയും ദൂരംതന്നെ ചരടു വലിച്ചു കൊണ്ട് നടക്കുന്നത് കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ചരട് ഒരു കപ്പിയിലൂടെ കടത്തിവിട്ടിരിക്കുന്നു. ചരടിന്റെ മറ്റേ അഗ്രത്തിൽ 15 kg മാസ് തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്നു. ഏതു പ്രശ്നത്തിലാണ് കൂടുതൽ പ്രവൃത്തി ചെയ്യുന്നത്?

6.6 **ശരിയുത്തരത്തിന് അടിവരയിടുക**

(a) ഒരു സംരക്ഷിതബലം ഒരു വസ്തുവിൽ പോസിറ്റീവ് പ്രവൃത്തി ചെയ്യുമ്പോൾ ആ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥിതികോർജം കൂടുന്നു/കുറയുന്നു/മാറ്റമുണ്ടാകുന്നില്ല.

(b) ഒരു വസ്തു ഘർഷണത്തിനെതിരായി പ്രവൃത്തി ചെയ്യുന്നതിന്റെ ഫലമായി എല്ലായ്പ്പോഴും ഗതികോർജം നഷ്ടപ്പെടുന്നു/സ്ഥിതികോർജം നഷ്ടപ്പെടുന്നു.

(c) ധാരാളം കണങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഒരു വ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ ആക്കവ്യത്യാസത്തിന്റെ നിരക്ക് ബാഹ്യബലത്തിന്/വ്യൂഹത്തിലെ ആന്തരികബലങ്ങളുടെ തുകക്ക് അനുപാതത്തിൽ ആയിരിക്കും.

(d) രണ്ടു വസ്തുക്കളുടെ ഒരു ഇലാസ്തികമല്ലാത്ത കൂട്ടിമുട്ടലിനുശേഷം മാറ്റമില്ലാതെ തുടരുന്ന അളവുകൾ ആകെ ഗതികോർജം/ആകെ ആക്കം/രണ്ടു വസ്തുക്കളുടെ വ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ ഊർജം എന്നിവയാണ്.

6.7 **ഓരോ പ്രസ്താവനയും ശരിയോ തെറ്റോ എന്നു പ്രസ്താവിക്കുക. നിങ്ങളുടെ ഉത്തരത്തിന് കാരണം നൽകുക.**

(a) രണ്ടു വസ്തുക്കളുടെ ഇലാസ്തിക കൂട്ടിമുട്ടലിൽ, ഓരോ വസ്തുവിന്റേയും ആക്കവും ഊർജവും സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നു.

(b) ഒരു വസ്തുവിൽ ആന്തരികവും ബാഹ്യവുമായ ഏതു ബലങ്ങളുണ്ടായാലും അതുൾപ്പെടുന്ന വ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ ഊർജം എല്ലായ്പ്പോഴും സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നു.

(c) പ്രകൃതിയിലുള്ള ഏതു ബലങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചും ഒരു അടഞ്ഞ പാതയിലൂടെ (closed loop) ഒരു വസ്തു ചലിക്കുന്നതു മൂലമുള്ള പ്രവൃത്തി പൂജ്യമായിരിക്കും.

(d) ഇലാസ്തികമല്ലാത്ത കൂട്ടിമുട്ടലിൽ ഒരു വ്യൂഹത്തിന്റെ അന്തിമ ഗതികോർജം എല്ലായ്പ്പോഴും ആദ്യ ഗതികോർജത്തേക്കാൾ കുറവായിരിക്കും.

6.8 **കാരണങ്ങൾ സഹിതം കൃത്യമായി ഉത്തരം നൽകുക**

(a) രണ്ട് ബില്യാഡ് പന്തുകൾ ഇലാസ്തികമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ചെറിയ ഇടവേളയിൽ (അതായത് അവ ചേർന്നിരിക്കുമ്പോൾ) ആകെ ഗതികോർജം സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നുണ്ടോ?

(b) രണ്ടു പന്തുകളുടെ ഇലാസ്തിക കൂട്ടിമുട്ടലിനെടുക്കുന്ന ചെറിയ സമയത്തിൽ ആകെ നേർരേഖാആക്കം സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നുണ്ടോ?

(c) ഒരു ഇലാസ്തികമല്ലാത്ത കൂട്ടിമുട്ടലിൽ (a), (b) എന്നിവയുടെ ഉത്തരങ്ങൾ എന്താണ്?

(d) രണ്ട് ബില്യാഡ് പന്തുകളുടെ സ്ഥിതികോർജം അവയുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള അകലത്തെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഈ കൂട്ടിമുട്ടൽ ഇലാസ്തികമാണോ അല്ലയോ? (ഇവിടെ നമ്മൾ പറയുന്നത് കൂട്ടിമുട്ടലിലെ ബലത്തിനുസരിച്ചുള്ള സ്ഥിതികോർജത്തെക്കുറിച്ചാണ്, ഗുരുത്വാകർഷണ സ്ഥിതികോർജത്തെക്കുറിച്ചല്ല).

6.9 ഒരു വസ്തു ആദ്യം നിശ്ചലാവസ്ഥയിലാണ്. അതിന് നേർരേഖയിൽ സ്ഥിരത്വരണത്തോടെയുള്ള ചലനം ഉണ്ടാകുന്നു. t സമയത്ത് അതിന് നൽകുന്ന പവർ ഏതനുപാതത്തിലാണ്?

(i) $t^{1/2}$ (ii) t (iii) $t^{3/2}$ (iv) t^2

6.10 നേർരേഖയിൽ സ്ഥിരപവർ ഉറവിടത്തിന്റെ സ്വാധീനത്തിൽ ഒരു വസ്തു ചലിക്കുന്നു. t സമയത്തിലെ അതിന്റെ സ്ഥാനാന്തരം ഏത് അനുപാതത്തിലാണ്?

(i) $t^{1/2}$ (ii) t (iii) $t^{3/2}$ (iv) t^2

6.11 ഒരു നിർദേശാങ്കവ്യവസ്ഥയിലെ z അക്ഷത്തിലൂടെ മാത്രം ചലിക്കാൻ കഴിയുന്ന ഒരു വസ്തുവിൽ $\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ N എന്ന ഒരു ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നു. $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ എന്നിവ x, y, z അക്ഷങ്ങളിലെ ഏകസദിശങ്ങളാണ്. z അക്ഷത്തിലൂടെ ഈ വസ്തുവിനെ 4m ചലിപ്പിക്കാൻ ഈ ബലം ചെയ്യേണ്ട പ്രവൃത്തി എത്ര?

6.12 കോസ്മിക് വികിരണ പരീക്ഷണത്തിൽ ഒരു ഇലക്ട്രോണിനെയും പ്രോട്ടോണിനെയും കണ്ടെത്തി. ആദ്യത്തേതിന്റെ ഗതികോർജം 10 keV യും രണ്ടാമത്തേതിന്റേത് 100 keV യുമാണ്. ഏതിനാണ് വേഗം കൂടുതൽ, ഇലക്ട്രോണിനോ പ്രോട്ടോണിനോ? അവയുടെ വേഗത്തിന്റെ അനുപാതം കണക്കാക്കുക.

(ഇലക്ട്രോണിന്റെ മാസ് $= 9.11\times10^{-31}$ kg

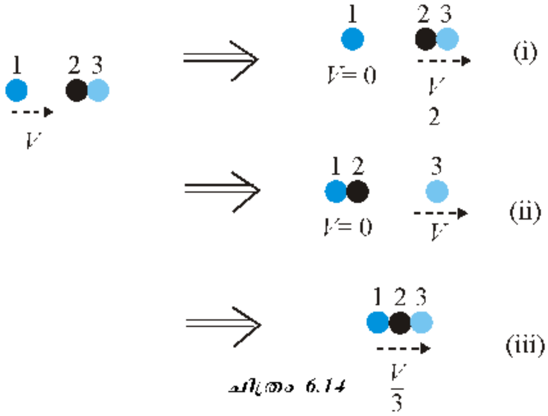
പ്രോട്ടോണിന്റെ മാസ് $= 1.67\times10^{\ 27}$ kg 1 eV $= 1.60 \times10^{\ 19}$ J).

6.13 2 mm ആരമുള്ള മഴത്തുള്ളി 500 m ഉയരത്തിൽ നിന്ന് താഴേക്കു പതിക്കുന്നു. അത് വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം കാരണം കുറഞ്ഞുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ത്വരണത്തിൽ ഉയരത്തിന്റെ പകുതിവരെ സഞ്ചരിക്കുന്നു. അതിനുശേഷം സമചലനത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ആദ്യപകുതിയിലും രണ്ടാംപകുതിയിലും ഈ മഴത്തുള്ളിയിൽ ഗുരുത്വാകർഷണബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി എത്ര? നിലത്തു വീഴുമ്പോഴുള്ള വേഗം 10 m s^{-1} ആയാൽ ആകെ യാത്രയിൽ പ്രതിരോധബലം ചെയ്ത പ്രവൃത്തി എത്ര?

6.14 ഒരു വാതകം ഉൾക്കൊണ്ട പാത്രത്തിലെ ഒരു തന്മാത്ര തിരശ്ചീനഭിത്തിയിൽ ലംബവുമായി 30^0 കോണിൽ 200m s^{-1} വേഗത്തിലിടിച്ച് അതേ വേഗത്തിൽത്തന്നെ തിരിച്ചുവരുന്നു. ഈ കൂട്ടിമുട്ടലിൽ ആക്കം സംരക്ഷിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടോ? ഈ കൂട്ടിമുട്ടൽ ഇലാസ്തികമാണോ അല്ലയോ?

6.15 ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ തറനിരപ്പിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു പമ്പിന് 30m^3 വ്യാപ്തമുള്ള ഒരു ടാങ്കിനെ 15 മിനിറ്റിൽ നിറയ്ക്കാൻ കഴിയുന്നു. തറയിൽനിന്ന് ടാങ്ക് 40m ഉയരത്തിലും പമ്പിന്റെ കാര്യക്ഷമത 30%വും ആയാൽ പമ്പ് ഉപഭോഗം ചെയ്യുന്ന പവർ എത്ര?

6.16 തുല്യമാസും പരസ്പരം സമ്പർക്കവുമുള്ള രണ്ടു സമാന ലോഹഗോളങ്ങൾ ഘർഷണമില്ലാത്ത ഒരു പ്രതലത്തിൽ നിശ്ചലമായിരിക്കുന്നു. സമാനമായ മറ്റൊരു ഗോളം v പ്രവേഗത്തിൽ ഇവയുമായി നേർക്കുനേർ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. കൂട്ടിമുട്ടൽ ഇലാസ്തികമാണെങ്കിൽ കൂട്ടിമുട്ടലിനുശേഷം സാധ്യമായ ഫലം ഏതാണ്? (ചിത്രം 6.14)

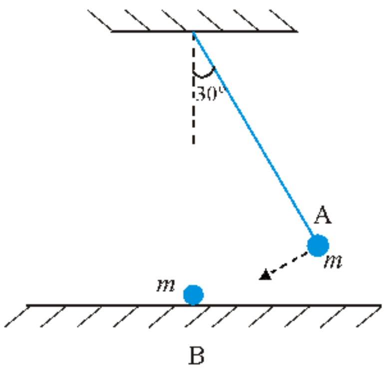


ചിത്രം 6.14

6.17 ചിത്രം 6.15 ൽ കാണിച്ച പോലെ ലംബവുമായി 30^0 കോണളവിൽ വച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു പെൻഡുലത്തിന്റെ ഗോളം A ഒരു ടേബിളിൽ നിശ്ചലമായിരിക്കുന്ന തുല്യമാസുള്ള B എന്ന ഗോളവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. കൂട്ടിമുട്ടലിനുശേഷം ഗോളം A എത്ര മാത്രം ഉയരും? കൂട്ടിമുട്ടൽ ഇലാസ്തികമാണെന്നും ഗോളങ്ങളുടെ വലുപ്പം ഒഴിവാക്കാമെന്നും കരുതുക.

6.18 ഒരു നിശ്ചിത സ്ഥാനത്തുനിന്ന് ഒരു പെൻഡുലം ബോബിനെ സ്വതന്ത്രമാക്കുന്നു. പെൻഡുലത്തിന് 1.5*m* നീളമുണ്ട്. വായുപ്രതിരോധത്തിനെതിരെ ആദ്യ ഊർജത്തിന്റെ 5% പാഴാക്കുന്നുവെങ്കിൽ, ഈ ബോബ് താഴെയറ്റത്തെ ബിന്ദുവിൽ എത്തുമ്പോഴുള്ള വേഗം എത്ര?

6.19 ഒരു ഘർഷണരഹിത പാതയിലൂടെ 25 kg മണൽചാക്ക് വഹിക്കുന്ന 300kg മാസുള്ള ഒരു ട്രോളി 27 km/h വേഗത്തിൽ സമചലനം നടത്തുന്നു. കുറച്ചു സമയത്തിനുശേഷം, മണൽ 0.05 kg s^{-1} എന്ന നിരക്കിൽ ഒരു ദ്വാരത്തിലൂടെ ചോരാൻ തുടങ്ങുന്നു. മണൽചാക്ക് മുഴുവൻ ഒഴിഞ്ഞു കഴിയുമ്പോൾ ആ ട്രോളിയുടെ വേഗം എത്രയായിരിക്കും?



ചിത്രം 6.15

6.20 0.5 kg മാസുള്ള വസ്തു ഒരു നേർരേഖയിലൂടെ $v = a x^{3/2}$ പ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഇവിടെ $a = 5 m^{-1/2} S^{-1}$, x 0 മുതൽ x $2m$ വരെയുള്ള സ്ഥാനാന്തരത്തിൽ സഫലബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി എത്ര?

6.21 ഒരു കാറ്റാടിയന്ത്രത്തിന്റെ ബ്ലേഡുകൾ A പരപ്പളവുള്ള ഒരു വൃത്തം പൂർത്തിയാക്കുന്നു.

(a) വൃത്തത്തിനു ലംബമായി v പ്രവേഗത്തിൽ വായു പ്രവഹിക്കുന്നെങ്കിൽ t സമയത്ത് അതിലൂടെ പ്രവഹിക്കുന്ന വായുവിന്റെ മാസ് എത്ര?

(b) വായുവിന്റെ ഗതികോർജം എത്ര?

(c) കാറ്റാടിയന്ത്രം കാറ്റിന്റെ 25% ഊർജത്തെ വൈദ്യുതോർജമാക്കിയാൽ അത് സൃഷ്ടിക്കുന്ന വൈദ്യുതപവർ എത്രയാണ്? (A = 30 m^2, v = 36 km/h, വായുവിന്റെ സാന്ദ്രത 1.2 kg m^{-3})

6.22 ഒരു വ്യക്തി ശരീരഭാരം കുറയ്ക്കാനായി ഒരു 10 kg മാസിനെ 1000 തവണ, ഓരോ പ്രാവശ്യവും 0.5m ഉയർത്തുന്നു. ഓരോ തവണയും ഭാരം താഴ്ത്തുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന സ്ഥിതികോർജനഷ്ടം താപരൂപത്തിൽ പാഴായിപ്പോകുന്നു.

(a) ഗുരുത്വാകർഷണബലത്തിനെതിരായി അയാൾ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി എത്ര?

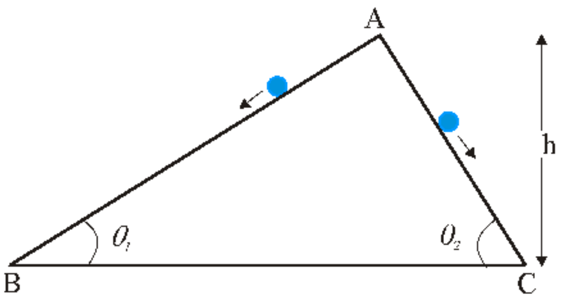
(b) കൊഴുപ്പ് ഓരോ കിലോഗ്രാമിനും 3.8×10^7J ഊർജം പ്രദാനം ചെയ്യുന്നു. 20% ക്ഷമതനിരക്കിൽ ഇത് യാന്ത്രികോർജമായി മാറ്റപ്പെടുന്നു. എത്ര കൊഴുപ്പ് ഇയാൾക്ക് നഷ്ടപ്പെടുത്താനാകും?

6.23 ഒരു കുടുംബം 8 kW പവർ ഉപയോഗിക്കുന്നു. (a) ഒരു തിരശ്ചീന പ്രതലത്തിൽ ശരാശരി സ്ക്വയർ മീറ്ററിൽ 200 W എന്ന നിരക്കിൽ സൗരോർജം നേരിട്ടു പതിക്കുന്നു. ഇതിൽ 20% ഉപയോഗപ്രദമായ വൈദ്യുതോർജമാക്കി മാറ്റിയാൽ, 8 kW ഊർജം പ്രദാനം ചെയ്യാൻ എത്ര പരപ്പളവ് ആവശ്യമാണ്? (b) ഈ പരപ്പളവിനെ ഒരു സാധാരണ വീടിന്റെ മേൽക്കൂരയുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുക.

അധിക പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

6.24 0.012 kg മാസും തിരശ്ചീനവേഗം 70 m s^{-1} ഉം ഉള്ള ഒരു വെടിയുണ്ട ഒരു തടിക്കഷണത്തിലിടിച്ച് അതേ നിമിഷംതന്നെ തടിയെ അപേക്ഷിച്ച് നിശ്ചലാവസ്ഥയിലേക്കു വരുന്നു. തടിക്കഷണത്തെ ഒരു മേൽക്കൂരയിൽ നിന്ന് കനംകുറഞ്ഞ ചരട് ഉപയോഗിച്ച് തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്നു. എത്ര ഉയരത്തിലേക്ക് ഈ തടിക്കഷണം ഉയരുമെന്നു കണ്ടെത്തുക. ഈ കഷണത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന താപത്തിന്റെ അളവ് കണ്ടെത്തുക.

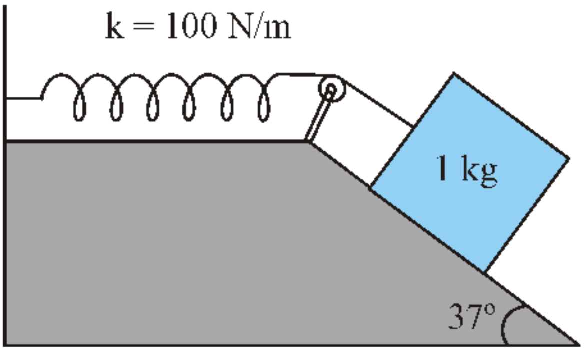
6.25 ചരിഞ്ഞ ഘർഷണമില്ലാത്ത രണ്ടു ട്രാക്കുകൾ (ഒന്ന് ക്രമേണയും മറ്റൊന്ന് കുത്തനെയും ചരിഞ്ഞവ) A യിൽ യോജിക്കുന്നു. ഓരോ ട്രാക്കിലും ഒന്ന് എന്ന ക്രമത്തിൽ A യിൽ നിന്ന് രണ്ടു കല്ലുകൾ നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽനിന്നു നിരങ്ങി വീഴാനനുവദിക്കുന്നു (ചിത്രം 6.16). ഈ കല്ലുകൾ ഒരേസമയം താഴ്ഭാഗത്ത് എത്തിച്ചേരുമോ? ഒരേ വേഗത്തിൽ അവിടെ എത്തിച്ചേരുമോ? വിശദീകരിക്കുക. $\theta_1 = 30^0$, $\theta_2 = 60^0$, $h = 10$ m എന്നിങ്ങനെയായാൽ



ചിത്രം

രണ്ടു കല്ലുകളുടെയും വേഗങ്ങളും, അവയെടുക്കുന്ന സമയവും എത്ര?

6.26 ഒരു ചരിഞ്ഞ പ്രതലത്തിലിരിക്കുന്ന ഒരു 1kg കട്ടയെ സ്പ്രിങ് സ്ഥിരാങ്കം 100 N/m^{-1} ഉള്ള സ്പ്രിങ്ങിൽ ചിത്രത്തിലേതുപോലെ ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. സ്പ്രിങ് വലിയാത്ത അവസ്ഥയിൽ ഈ കട്ടയെ നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽനിന്ന് സ്വതന്ത്രമാക്കുന്നു. നിശ്ചലമാകുന്നതിനുമുമ്പ് ചരിവുതലത്തിലൂടെ ഈ കട്ട 10cm താഴേക്ക് സഞ്ചരിക്കുന്നു. ചരിവിനും കട്ടക്കും ഇടയിലുള്ള ഘർഷണസ്ഥിരാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക. സ്പ്രിങ്ങിന്റെ മാസ്



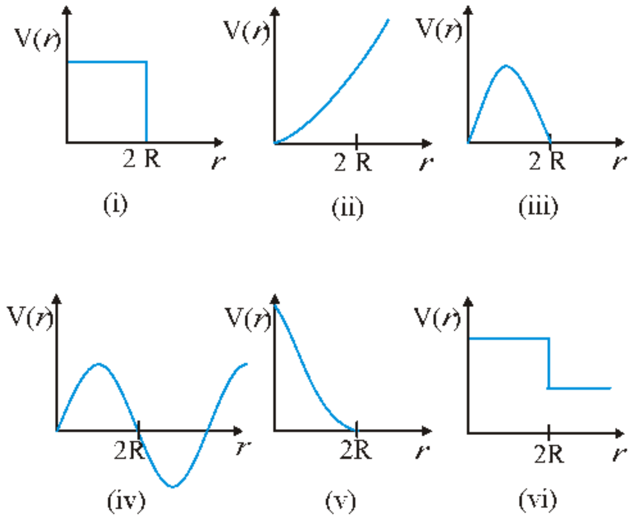
അവഗണിക്കുകയും കപ്പിക്ക് ഘർഷണം ഇല്ലെന്നു കരുതുകയും ചെയ്യുക.

ചിത്രം 6.17

6.27 ഒരേ വേഗത്തിൽ (7 ms^{-1}) താഴേക്കു ചലിക്കുന്ന എലിവേറ്ററിൽ 0.3kg മാസുള്ള ഒരു ബോൾട്ട് മേൽക്കൂരയിൽ നിന്ന് താഴേക്കു പതിക്കുന്നു (എലിവേറ്ററിന്റെ നീളം 3m). ഇത് എലിവേറ്ററിന്റെ തറയിലാണ് വീഴുന്നത്. എന്നാൽ തിരികെ മുകളിലേക്കു തെറിക്കുന്നില്ല. ഈ ആഘാതത്തിൽ സൃഷ്ടിക്കപ്പെടുന്ന താപമെത്ര? എലിവേറ്റർ നിശ്ചലമായിരുന്നെങ്കിൽ നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം വ്യത്യസ്തമാകുമായിരുന്നോ?

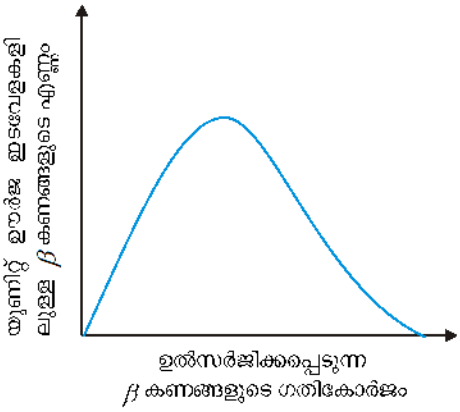
6.28 200kg മാസുള്ള ട്രോളി 36km/h സമവേഗത്തിൽ ഘർഷണമില്ലാത്ത ഒരു പാതയിലൂടെ ചലിക്കുന്നു. ആ ട്രോളിയുടെ ഒരഗ്രത്തുനിന്ന് മറ്റേ അറ്റം വരെ (10m അകലം) 20kg മാസുള്ള ഒരു കുട്ടി ട്രോളിയെ അപേക്ഷിച്ച് 4 ms^{-1} വേഗത്തിൽ അതിന്റെ ചലനത്തിന്റെ എതിർദിശയിൽ ഓടുകയും അതിൽ നിന്നു പുറത്തേക്ക് ചാടുകയും ചെയ്യുന്നു. കുട്ടി ഓടാൻ തുടങ്ങുന്നതു മുതൽ ട്രോളി സഞ്ചരിച്ച ദൂരം എത്ര?

6.29 ചിത്രം 6.18ലെ സ്ഥിതികോർജ ഗ്രാഫുകളിൽ ഏതൊക്കെ ഗ്രാഫുകൾ രണ്ട് ബില്യാർഡ് പന്തുകളുടെ ഇലാസ്തിക കൂട്ടിമുട്ടലിനെ വിവരിക്കുന്നില്ല? r എന്നത് പന്തുകളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലെ അകലമാണ്.



ചിത്രം 6.18

6.30 നിശ്ചലാവസ്ഥയിലുള്ള ഒരു സ്വതന്ത്ര ന്യൂട്രോണിന്റെ ശോഷണം എടുക്കുക, $n \rightarrow p + e$. ഇത്തരത്തിലുള്ള കണങ്ങളുടെ ശോഷണം ഊർജസ്ഥിരതയുള്ള ഒരു ഇലക്ട്രോണിനെ ഉൽപാദിപ്പിക്കുമെന്നും ആയതിനാൽ ന്യൂട്രോണുകൾ, ന്യൂക്ലിയസുകൾ എന്നിവയുടെ β ശോഷണത്തിൽ നിരീക്ഷിക്കാവുന്ന തുടർച്ചയായ ഊർജ വിതരണം വിവരിക്കാനാവില്ലയെന്നും തെളിയിക്കുക.



ചിത്രം
6.19

[കുറിപ്പ് : ഈ പ്രശ്നത്തിന്റെ ലളിതമായ ഉത്തരം, വോൾഫ്ഗാങ് പോളി β നാശനത്തിലെ മൂന്നാമത്തെ കണത്തെ കണ്ടെത്താനായി ഉയർത്തിയ നിരവധി വാദങ്ങളിൽ ഒന്നാണ്. ഈ കണത്തെ ന്യൂട്രിനോയെന്നു വിളിക്കുന്നു. ഇത് സ്പിൻ ½ ഉള്ള ഒരു കണമാണ് (e^-, p, n ഇവയെ പോലെ). എന്നാൽ ഇവയ്ക്കു ചാർജില്ല. കൂടാതെ ഇവ മാസില്ലാത്തതോ അല്ലെങ്കിൽ വളരെ ചെറിയ മാസ് മാത്രം ഉള്ളവയാണ് (ഇലക്ട്രോണിന്റെ മാസുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ). ഇവ ദ്രവ്യവുമായി വളരെ ദുർബലമായി പ്രതിപ്രവർത്തിക്കുന്നു. ന്യൂട്രോണിന്റെ യഥാർഥ ശോഷണ പ്രവർത്തനം $n \rightarrow \quad p \quad e^- + \bar{\nu}$ ആണ്.]

അനുബന്ധം 6.1

നടക്കുമ്പോഴുള്ള ഊർജ ഉപഭോഗം (Power consumption in walking)

60 കിലോഗ്രാം ഭാരമുള്ള മുതിർന്ന ഒരാളുടെ ശരാശരി ഊർജ ഉപഭോഗം പട്ടിക 6.4 ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

പട്ടിക 6.4 ഏകദേശ ഊർജ ഉപഭോഗത്തിന്റെ നിരക്ക്

പ്രവർത്തനം	പവർ (W)
ഉറക്കത്തിൽ	75
പതുക്കെയുള്ള നടത്തം	200
സൈക്കിൾ ചവിട്ടുമ്പോൾ	500
ഹൃദയമിടിപ്പ്	1.2

യാന്ത്രികപ്രവൃത്തിയും ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ പ്രവൃത്തി എന്നു പറയുന്നതും തമ്മിൽ ആശയക്കുഴപ്പമുണ്ടാക്കരുത്. ഭാരമേറിയ ചുമട് തലയിലേറ്റി നിൽക്കുന്ന ഒരാൾക്ക് ക്ഷീണമുണ്ടാകാം. പക്ഷേ, ഇവിടെ യാന്ത്രിക പ്രവൃത്തി ചെയ്യുന്നില്ല എന്ന് കരുതി മനുഷ്യപ്രവൃത്തികളിൽ യാന്ത്രികപ്രവൃത്തി കണക്കെടുക്കാൻ സാധിക്കുന്നില്ല എന്ന് ഇത് അർഥമാക്കുന്നില്ല.

v_0 എന്ന സ്ഥിരവേഗത്തോടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരാളെ സങ്കൽപ്പിക്കുക. ഇയാൾ ചെയ്യുന്ന യാന്ത്രികപ്രവൃത്തിയെ പ്രവൃത്തി-ഊർജ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ സഹായത്താൽ കണക്കാക്കാൻ കഴിയും. ഇതിനായി താഴെ പറയുന്ന പ്രകാരം സങ്കൽപ്പിക്കാം.

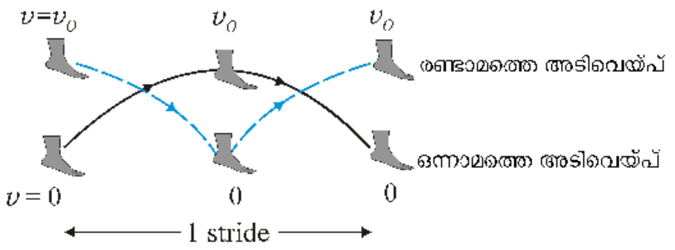
(എ) ഓരോ അടിവയ്പിലും കാലുകൾക്കുണ്ടാകുന്ന ത്വരണവും മന്ദീകരണവുമാണ് പ്രധാനമായും പ്രവൃത്തി ചെയ്യാൻ കാരണമാകുന്നത്. (ചിത്രം 6.20 കാണുക)

(ബി) വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം പരിഗണിക്കേണ്ടതില്ല.

(സി) ഗുരുത്വാകർഷണത്തെ എതിർത്തുകൊണ്ട് പാദങ്ങൾ ഉയർത്തുന്നതിനായി ചെയ്യുന്ന ചെറിയ പ്രവൃത്തി കണക്കിലെടുക്കേണ്ടതില്ല.

(ഡി) സാധാരണ നടത്തത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കൈവീശൽ പരിഗണിക്കേണ്ടതില്ല.

ചിത്രം 6.20 ൽ കാണാൻ കഴിയുന്നതുപോലെ ഓരോ അടിവയ്പിലും കാലുകൾ നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്ന് ഒരു വേഗത്തിലേക്ക് കൊണ്ടുവരുന്നു. ഇത് നടത്തത്തിന്റെ ഏകദേശ വേഗത്തിനു തുല്യമാണ്. തുടർന്ന് കാലുകളെ വീണ്ടും നിശ്ചലാവസ്ഥയിലേക്കു കൊണ്ടുവരുന്നു.



ചിത്രം 6.20 നടക്കുമ്പോഴുള്ള ഒരു അടിവെയ്പിന്റെ ചിത്രീകരണം. ഒരു കാൽ തറയിൽ നിന്നു പരമാവധി ഉയരത്തിലായിരിക്കുമ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ കാല് തറയിലായിരിക്കും. നേരേ തിരിച്ചും.

ഓരോ അടിവെയ്പിലും ഒരു കാലുചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി പ്രവൃത്തി-ഊർജസിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് $m_l v_o^2/2$ ആണ്. ഇവിടെ m_l എന്നത് കാലിന്റെ മാസാണ്. പാദത്തെ നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്നു v_o വേഗത്തിലേക്ക് എത്തിക്കുന്നതിനായി കാലിലെ പേശികൾ ചെലവഴിക്കുന്ന ഊർജമാണ് $m_l v_o^2/2$.

രണ്ടാമത്തെ $m_l v_o^2/2$ എന്നത് പാദത്തെ v_o വേഗത്തിൽ നിന്നു നിശ്ചലാവസ്ഥയിലേക്കെത്തിക്കാനായി (മന്ദീകരണം) രണ്ടാമത്തൊരു വിഭാഗം പേശികൾ ചെലവഴിക്കുന്ന ഊർജമാണ്. അപ്പോൾ ഓരോ അടിവെയ്പിലും ഇരു കാലുകളും ചേർന്നു ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി (ചിത്രം 6.20 ശ്രദ്ധാപൂർവം നിരീക്ഷിക്കുക).

$$W_s = 2\, m_l v_o^2 \quad \text{- ആണ്} \tag{6.34}$$

$m_l = 10\ kg$ എന്നും 1 മൈൽ സഞ്ചരിക്കുന്നതിനായി 9 മിനിറ്റ് എടുക്കുന്ന തരത്തിൽ വേഗമുണ്ടെന്നും (SI യൂണിറ്റിൽ 3 ms^{-1} വേഗം) കരുതുക.

(1 മൈൽ = 1.609 km.)

1 മൈൽ സഞ്ചരിക്കാൻ 9 മിനിറ്റെടുത്താൽ $V_o = \dfrac{1 \times 1.609 \times 10^3}{9 \times 60}$ m/s = 3 ms^{-1})

Ws = 180 J/stride

ഓരോ അടിവെയ്പ്പിലും 180 J ഊർജം ചെലവഴിച്ചു.

ഓരോ അടിയും 2 മീറ്റർ നീളമുള്ളതാണെന്നു സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ ഒരാൾ ഒരു സെക്കന്റിൽ 1.5 അടി 3ms^{-1} വേഗതയിൽ പൂർത്തിയാക്കുമെന്നു കരുതാം. അപ്പോൾ ചെലവഴിക്കുന്ന പവർ

$$\frac{J}{\text{അടിവെയ്പ്}} \times 1.5 \frac{\text{അടിവെയ്പ്}}{\text{സെക്കന്റ്}} = 270\ W$$

ഇത് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ശരാശരി കണക്കാനുള്ളതാണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതാണ്. കാരണം, പലതരത്തിലുള്ള ഊർജ നഷ്ടങ്ങൾ (ഉദാഹരണത്തിന് കൈകൾ വീശുന്നത്, വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം മുതലായവ) നാം കണക്കിലെടുത്തിട്ടില്ല. ഇവിടെ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ബലങ്ങളെപ്പറ്റി ആകുലപ്പെടേണ്ടതില്ലെന്നുള്ളത് രസകരമായ വസ്തുതയാണ്. ഘർഷണവും ശരീരത്തിലെ മറ്റു ഭാഗങ്ങളിലെ പേശികൾ കാലിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലവും നമുക്ക് കണക്കാക്കാൻ പ്രയാസമാണ്. സ്ഥിതഘർഷണം പ്രവൃത്തി ചെയ്യുന്നില്ല. കൂടാതെ, പേശികൾ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിയെ മറികടക്കാനായി നാം പ്രവൃത്തി-ഊർജസിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ച് പ്രവൃത്തി കണക്കാക്കി. ഇവിടെ നമുക്ക് ചക്രങ്ങളുടെ പ്രയോജനങ്ങളെക്കുറിച്ചും മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയും. സസ്തനികളുടെ ചലനത്തിലെപ്പോലെ ആരംഭിക്കലുകളുടെയും നിർത്തലുകളുടെയും ഒരു തുടർച്ചയായിട്ടല്ലാതെ സുഗമമായ ചലനം സാധ്യമാക്കുന്നതിന് ചക്രങ്ങൾ നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു.

അധ്യായം 7

I9K2B1

കണികാവ്യൂഹവും അവയുടെ ഭ്രമണ ചലനവും
SYSTEMS OF PARTICLES AND ROTATIONAL MOTION

7.1 ആമുഖം
7.2 ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം
7.3 ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനം
7.4 ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ രേഖീയആക്കം
7.5 രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ സദിശ ഗുണിതം
7.6 കോണീയ പ്രവേഗവും രേഖീയ പ്രവേഗവുമായി അതിനുള്ള ബന്ധവും
7.7 ടോർക്കും കോണീയആക്കവും
7.8 ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ സന്തുലനാവസ്ഥ
7.9 മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനേർഷ്യ
7.10 ലംബവും സമാന്തരവുമായ അക്ഷങ്ങളുടെ തത്വങ്ങൾ
7.11 ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഭ്രമണചലനത്തിന്റെ ശുദ്ധഗതികം
7.12 ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഭ്രമണചലനത്തിന്റെ ഗതികം
7.13 ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഭ്രമണത്തിലെ കോണീയ ആക്കം
7.14 ഉരുളൽ ചലനം
സംഗ്രഹം
ആലോചനാസൂചകങ്ങൾ
പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ
കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

7.1 ആമുഖം

കഴിഞ്ഞ അധ്യായത്തിൽ പ്രാഥമികമായി പരിഗണിച്ചത് ഒരു കണത്തിന്റെ ചലനത്തെക്കുറിച്ചാണ്. ഒരു കണം ദ്രവ്യത്തിന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ അംശമാണ്. അതിന് ഒരു പ്രത്യേക ആകൃതിയോ ആകാരമോ സങ്കൽപ്പിക്കാനാവില്ല. നിശ്ചിത വലുപ്പമുള്ള വസ്തുക്കളുടെ ചലനങ്ങൾപോലും കണങ്ങളുടെ ചലനമായി കണക്കാക്കിക്കൊണ്ടാണ് ഇതുവരെയുള്ള നമ്മുടെ പഠനങ്ങൾ മുന്നേറിയിട്ടുള്ളത്.

സാധാരണ നമ്മൾ കണ്ടുവരാറുള്ള ഏതൊരു യഥാർഥ വസ്തുവിനും ഒരു നിശ്ചിത ആകൃതിയുണ്ടായിരിക്കും. ഇത്തരം നിശ്ചിത ആകൃതിയുള്ള (വ്യാപ്തിതവസ്തുക്കൾ- extended bodies-. എന്നും പറയാം) വസ്തുക്കളുടെ ചലനങ്ങൾ പരിഗണിക്കുമ്പോൾ, അത്തരം ചലനങ്ങളെ ഒരു കണത്തിന്റെ ചലനമായി താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിൽ അപാകതയുണ്ട്. ഈയൊരു പരിമിതിയെ മറികടക്കാനുള്ള ശ്രമമാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ വിവരിക്കുന്നത്. ഒരു വ്യാപ്തിതവസ്തുവിനെ എങ്ങനെയാണ് വിവരിക്കേണ്ടതെന്നും, അതിനെപ്പറ്റി ഒരു ധാരണ രൂപീകരിക്കേണ്ടതെങ്ങനെയാണെന്നും നമുക്ക് ആലോചിക്കാം. ഒരു വ്യാപ്തിതവസ്തു അനേകം കണികകൾ ഉൾച്ചേർന്നിട്ടുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയാണെന്നതാണ് ഒന്നാമത്തെ കാര്യം. എന്നാൽ നമ്മൾ പരിഗണിക്കുന്നത് ആ വസ്തുവിന്റെ മൊത്തം ചലനത്തെക്കുറിച്ചാണുതാനും. ആ കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ അല്ലെങ്കിൽ വ്യാപ്തിതവസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം (Centre of mass) എന്ന ആശയമാണ് ഇവിടെ മുഖ്യ പരിഗണനാവിഷയമായി അവതരിപ്പിക്കുന്നത്. അങ്ങനെ ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രചലനത്തെയും ഒരു വ്യാപ്തിതവസ്തു ചലിക്കുന്നതുകൊണ്ടുള്ള പ്രയോജനങ്ങളെക്കുറിച്ചുമാണ് പ്രധാനമായും ഇവിടെ ചർച്ചചെയ്യുന്നത്.

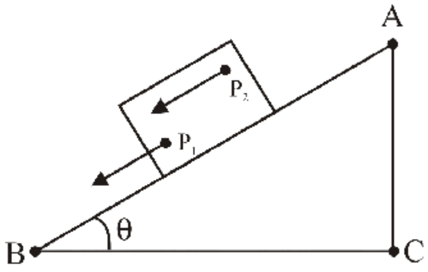
വ്യാപ്തിതവസ്തുക്കളെ സംബന്ധിച്ച നിരവധി പ്രശ്നങ്ങൾക്ക്, അവയെ ദൃഢവസ്തുക്കൾ (rigid bodies) എന്നു പരിഗണിച്ചാൽ എളുപ്പത്തിൽ ഉത്തരം കണ്ടെത്താവുന്നതാണ്. വളരെ വ്യക്തമായ ആകൃതിയുള്ളതും എന്നാൽ ആകൃതിയിൽ മാറ്റം വരുത്താനാവാത്തതുമായ വസ്തുവെന്നാണ് ഒരു ദൃഢവസ്തുവിനെ നിർവചിക്കുന്നത്. ഒരു ദൃഢവസ്തുവിൽ (rigid bodies) ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഏതൊരു ജോടി കണികകളെടുത്താലും അവ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിൽ മാറ്റം വരുത്താനാവില്ല, അല്ലെങ്കിൽ അവ തമ്മിലുള്ള അകലം സ്ഥിരമായിരിക്കും. ഈ നിർവചനപ്രകാരം യഥാർഥ വസ്തുക്കളെല്ലാംതന്നെ ദൃഢവസ്തുക്കളായി പരിഗണിക്കാനാവില്ലെന്നു കാണാം. കാരണം, യഥാർഥവസ്തുക്കളുടെ കൂട്ടത്തിൽ ബലങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ആകൃതിവ്യത്യാസം വരുത്താവുന്ന വസ്തുക്കളും

ഉണ്ടായേക്കാം. എന്നിരുന്നാലും മിക്ക സാഹചര്യങ്ങളിലും ഇത്തരത്തിലുള്ള രൂപമാറ്റം വളരെ നിസ്സാരമായി പരിഗണിക്കാവുന്നതാണ്. ചക്രങ്ങൾ (wheel), പമ്പരങ്ങൾ (Tops), ഉരുക്കു ദണ്ഡുകൾ, തന്മാത്രകൾ, ഗ്രഹങ്ങൾ എന്നിവകൾക്ക് ചുളുക്കുകളോ വളവുകളോ കമ്പനങ്ങളോ എന്തൊക്കെയുണ്ടായിരുന്നാലും അവയൊക്കെത്തന്നെ ദൃഢവസ്തുക്കളായി കണക്കാക്കാവുന്നവയാണ്.

7.1.1 ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന് ഏതൊക്കെ തരം ചലനങ്ങൾ ആവാം? (What kind of motion can a rigid body have?)

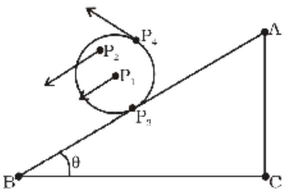
ഈ ചോദ്യത്തിനുള്ള ഉത്തരത്തിനായി നമുക്ക് ദൃഢവസ്തുക്കളുടെ ചലനങ്ങൾ സംബന്ധിച്ച ചില ഉദാഹരണങ്ങളിലേക്കു പോകാം. ഒരു ചതുരക്കട്ട ഒരു ചരിവുതലത്തിലൂടെ നേർരേഖയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നത് നിരീക്ഷിച്ചുകൊണ്ട് ചർച്ച ആരംഭിക്കാം (വശങ്ങളിലേക്കുള്ള സഞ്ചാരമല്ല).

ചതുരക്കട്ട ഒരു ദൃഢവസ്തുവാണ്. അത് ചരിവുതലത്തിലൂടെ താഴേക്കുള്ള സ്ഥാനാന്തരചലനം (translational motion) നടത്തുമ്പോൾ അതിലടങ്ങിയിരിക്കുന്ന കണങ്ങളും അതിനോടൊപ്പംതന്നെ സഞ്ചാരത്തിലായിരിക്കും. ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിലെ ഏതൊരു വേളയിലും വസ്തുവും അതിലടങ്ങിയിരിക്കുന്ന കണങ്ങളും ഒരേ പ്രവേഗത്തിലായിരിക്കും. അപ്പോൾ, ഈ ദൃഢവസ്തു ഒരു യഥാർഥ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിലാണ് എന്നു പറയുന്നു.



ചിത്രം 7.1 *ഒരു ചതുരക്കട്ടയുടെ ചരിവുതലത്തിലൂടെയുള്ള സ്ഥാനാന്തര ചലനം (തെന്നൽ). ചതുരക്കട്ടയിലെ P_1, P_2 എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്ക് ഏത് ഇടവേളയിലും ഒരേ പ്രവേഗമായിരിക്കും.*

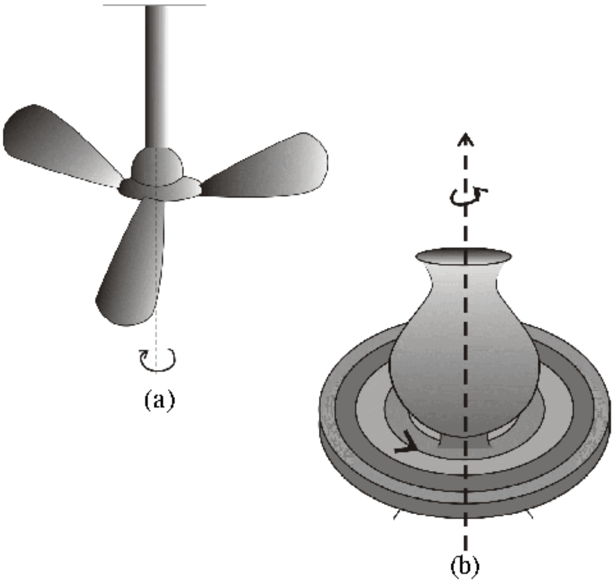
ഇനി, അതേ ചരിവുതലത്തിലൂടെത്തന്നെ താഴേക്ക് ഉരുളുന്ന (*Rolling*) ലോഹത്തിന്റെയോ മരത്തിന്റെയോ സിലിണ്ടറിന്റെയോ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തെ നിരീക്ഷിക്കാം (ചിത്രം 7.2). ഈ പ്രവർത്തനത്തിലെ ദൃഢവസ്തു, അതായത് സിലിണ്ടർ ചരിവുതലത്തിന്റെ മുകൾഭാഗത്തുനിന്ന് താഴേക്കുവരെ സ്ഥാനമാറ്റം (*Shift*) ചെയ്യപ്പെടുന്നുണ്ട്. അതിനാൽ അതൊരു സ്ഥാനാന്തരചലനമാണെന്നു പറയാം. ചിത്രം 7.2 സൂക്ഷിച്ചുനോക്കിയാൽ, ഈ ദൃഢവസ്തുവിന്റെ ചലനത്തോടൊപ്പം അവയിലുൾപ്പെടുന്ന എല്ലാ കണങ്ങൾക്കും സമയക്രമത്തിൽ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു നിശ്ചിത സമയത്തിൽ ഒരേ പ്രവേഗമാണെന്ന് പറയാനാവില്ല. അതുകൊണ്ട് ആ വസ്തു ഒരു യഥാർഥ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിലല്ല എന്നു പറയേണ്ടി



ചിത്രം 7.2:
ഒരു സിലിണ്ടറിന്റെ ഉരുളൽ ചലനം യഥാർഥ സ്ഥാനാന്തരചലനമല്ല, സിലിണ്ടറിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ P_1, P_2 P_3, P_4 എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്ക് വ്യത്യസ്ത പ്രവേഗമായിരിക്കും. ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന P_3 ബിന്ദുവിന്റെ പ്രവേഗം പൂജ്യമായിരിക്കും (സിലിണ്ടർ തെന്നി നീങ്ങുന്നില്ലെങ്കിൽ).

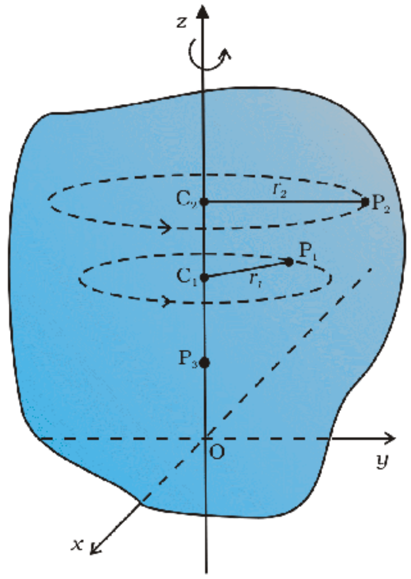
വരുന്നു. അതിന് സ്ഥാനാന്തരചലനത്തോടൊപ്പം പ്രത്യേകതയുള്ള '*വേറെന്തോ ചില*' ചലനങ്ങൾകൂടിയുണ്ടെന്ന് അനുമാനിക്കേണ്ടിയിരിക്കുന്നു.

നേരത്തേ സൂചിപ്പിച്ചതുപോലെയുള്ള '*വേറെന്തോ ചില*' ചലനങ്ങൾ എന്താണെന്നു മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് ഒരു ദൃഢവസ്തുവിനെ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിന് സാധ്യമാവാത്തവിധം ഒരു പ്രത്യേക രീതിയിൽ ബന്ധിപ്പിച്ചുനിർത്തി അതിന്റെ ചലന പ്രത്യേകതകൾ നിരീക്ഷിക്കാവുന്നതാണ്. ഇതിനായി ദൃഢവസ്തുവിനെ ഒരു നേർരേഖയിൽ ഉറപ്പിക്കുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്. അപ്പോൾ പിന്നെ അതിന് ഭ്രമണചലനത്തിന് (Rotational motion) മാത്രമേ സാധ്യമാവൂ. വസ്തുവിനെ ഉറപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന രേഖയെ ഭ്രമണ അക്ഷം (Axis of rotation) എന്നു പറയുന്നു. ഒരു അക്ഷത്തെ കേന്ദ്രമാക്കിയുള്ള നിരവധി ഭ്രമണചലനങ്ങൾ ചുറ്റും നോക്കിയാൽ കാണാൻ കഴിയും; സീലിങ് ഫാൻ, മൺപാത്രനിർമാണ ചക്രം, ഉത്സവസ്ഥലങ്ങളിലെ ഭീമാകാര ചക്രങ്ങൾ എന്നിങ്ങനെ. (ചിത്രം 7.3(a), 7.3 (b)).



ചിത്രം 7.3: ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണ ചലനം. a.സീലിങ് ഫാൻ, b. മൺപാത്ര നിർമ്മാണചക്രം

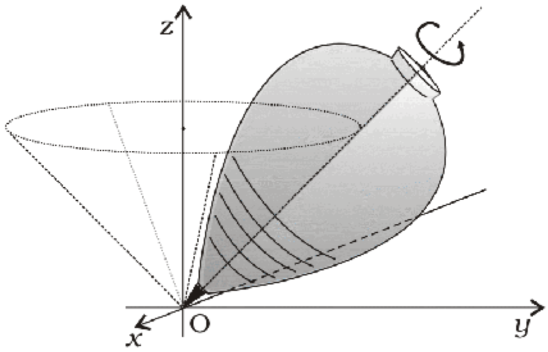
ഭ്രമണമെന്നാലെന്താണെന്നും അതിന്റെ പ്രത്യേകതയെ ന്താണെന്നും നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തിൽ ഉറപ്പിക്കപ്പെട്ട ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ ഭ്രമണചലനത്തിൽ ആ വസ്തുവിലെ എല്ലാ കണങ്ങളും അക്ഷത്തിനു ലംബമായി വരുന്ന തലത്തിലൂടെ അക്ഷത്തിന് ചുറ്റുമായി സഞ്ചരിക്കുന്നു. (ചിത്രം



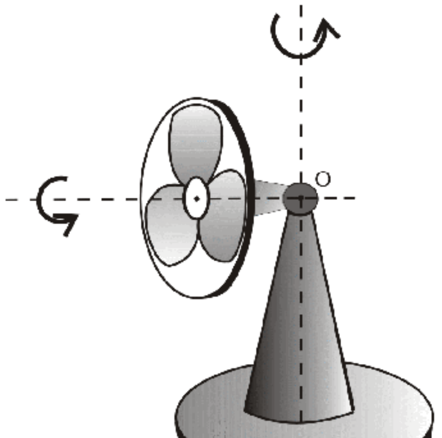
ചിത്രം 7–4: Z-അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ ഭ്രമണചലനം. വസ്തുവിലെ ഓരോ സ്ഥാനവും (P_1,P_2) അക്ഷത്തെ കേന്ദ്രമാക്കിയുള്ള (C_1, C_2) വർത്തുള പാതയിലായിരിക്കും. വൃത്തത്തിന്റെ ആരമായി വരുന്ന (r_1,r_2) എന്നിവ അക്ഷകേന്ദ്രത്തിന് ലംബമാണ് അത് സന്ധിക്കുന്നത് (P_1,P_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലാണ്. ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ അക്ഷത്തിലുള്ള P_3 എന്ന ബിന്ദു നിശ്ചലമായി തുടരുന്നു.

7.4) ദൃഢവസ്തുവിലെ ഒരു കണമായ P_1 അക്ഷകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് r_1 അകലത്തിലാണെന്ന് കരുതുക. P_1 എന്ന സ്ഥാനത്തുള്ള കണം ദൃഢവസ്തുവിന്റെ മൊത്തം ഭ്രമണത്തോടൊപ്പം അക്ഷകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് r_1 ആരമായി നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് ചുറ്റുമായി വൃത്താകാരപാതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. P_1, r_1, C_1 എന്നിവ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വൃത്താകാരതലം അക്ഷത്തിന് ലംബമായ പ്രതലത്തിൽ സറിതിചെയ്യുന്നു. ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന മറ്റൊരു കണമായ P_2 അക്ഷകേന്ദ്രം C_2 വിൽ നിന്ന് r_2 അകലത്തിലൂടെ നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് ലംബമായി മറ്റൊരു വൃത്താകാരപാതയിൽ പരിക്രമണം നടത്തുന്നു. ദൃഢവസ്തുവിലുൾപ്പെട്ട ബിന്ദുക്കളായ P_1, P_2 എന്നിവ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത തലങ്ങളിലാണ് പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നതെങ്കിലും, ഈ രണ്ടു തലങ്ങളും അക്ഷത്തിന് ലംബമാണ്. പക്ഷേ, P_3 നെപ്പോലെ $r = 0$ ആരമുള്ള ഒരു കണമാണെങ്കിൽ (അക്ഷത്തിൽത്തന്നെയുള്ള ഒരു കണം) ദൃഢവസ്തുവിനൊപ്പം മറ്റു രണ്ടു കണങ്ങളെന്നപോലെ അത് പരിക്രമണത്തിൽ പങ്കെടുക്കുന്നില്ല. അതായത് അക്ഷം നിശ്ചലമായതിനാൽ കണവും നിശ്ചലമാണ്.

ഭ്രമണചലനത്തിന്റെ ചില ഉദാഹരണങ്ങളെടുത്താൽ



ചിത്രം 7.5 (a): പമ്പരം തറയുമായി ബന്ധപ്പെടുന്ന അഗ്രമായ O, (പമ്പരത്തിന്റെ മധ്യഭാഗത്തുകൂടി കടന്നുപോവുന്ന അക്ഷത്തിന്റെ ഒരു അഗ്രഭാഗം) താൽക്കാലികമായി ഉറപ്പിച്ചതാണ്.

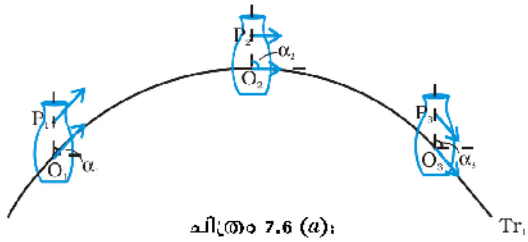


ചിത്രം 7.5 (b): പരിക്രമണത്തിലുള്ള ടേബിൾ ഫാൻ – അതിന്റെ ദോലന കേന്ദ്രം O, ഉറപ്പിച്ചതാണ്.

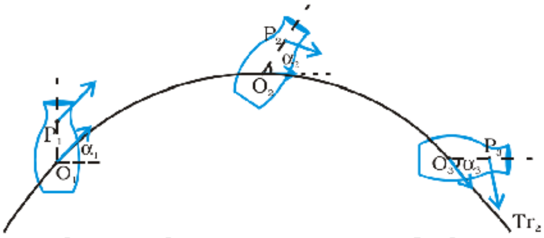
അവയുടെയെല്ലാം അക്ഷം ഉറപ്പിച്ച നിലയിലാകണമെന്നില്ല. ഏറ്റവും നല്ല ഉദാഹരണം തിരിയുന്ന പമ്പരം (*Spinning top*) തന്നെയാണ്. (പമ്പരം കറങ്ങുമ്പോൾ അതിന്റെ ചുവട് നീങ്ങിപ്പോകുന്നില്ലെങ്കിൽ) തറയുമായുള്ള സമ്പർക്ക ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ലംബദിശയെ ആധാരമാക്കി പമ്പരം കറങ്ങുന്ന അക്ഷത്തിന്റെ അഗ്രം ചിത്രം (7.5(*a*)) യിൽ കാണുന്ന രീതിയിൽ വൃത്താകാരമായ ഒരു പാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നുണ്ട്. കൂടാതെ ഈ ചലനം ഈ വൃത്തം ബെയ്സ് ആകത്തക്കവിധത്തിൽ ഒരു കോണും സൃഷ്ടിക്കുന്നുണ്ട്. പമ്പരത്തിന്റെ അക്ഷം ചുറ്റും വിസ്താര വൃത്താകാരത്തിൽ കറങ്ങുന്ന

ഈ പ്രതിഭാസത്തെ പുരസ്സരണം (*Precession*) എന്നാണ് പറയുക. (പമ്പരത്തിന്റെ അക്ഷം ലംബത്തിനു ചുറ്റും കറങ്ങുന്നതിനെ പുരസ്സരണം എന്നു വിളിക്കുന്നു). ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ പമ്പരം തറയിൽ സ്പർശിക്കുന്ന അഗ്രഭാഗം സ്ഥാനഭ്രംശം വരാത്ത രീതിയിൽ ഉറപ്പിച്ചു നിർത്തിയതായി കരുതുക. പമ്പരത്തിന്റെ പരിക്രമണാക്ഷം എല്ലായ്പ്പോഴും ഈ സ്പർശബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവും. ഇത്തരത്തിൽ കാണാൻ കഴിയുന്ന മറ്റൊരുദാഹരണമാണ് ദോലനം (*Oscillation*) ചെയ്യുന്ന ടേബിൾ ഫാൻ, പെഡസ്റ്റൽ ഫാൻ മുതലായവ. നിങ്ങൾ കണ്ടിട്ടുള്ളതുപോലെ ഇത്തരം ഉപകരണങ്ങളുടെ പരിക്രമണ അക്ഷത്തിന്റെ ഒരഗ്രം ഉറപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന സ്ഥാനത്ത് തിരശ്ചീനമായി (*Horizontal*) അതിന് ദോലനചലനം കൂടിയുണ്ട്. (വശങ്ങളിലേക്ക് -ചിത്രം 7.5 (*b*)).

ഫാൻ കറങ്ങുമ്പോൾ അതിന്റെ അക്ഷം വശങ്ങളിലേക്കു നീങ്ങിയാലും അത് ഉറപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന സ്പർശബിന്ദു സ്ഥിരമായി നിലനിൽക്കുന്നു. അതിനാൽ ഒരു പമ്പരം, പെഡസ്റ്റൽ ഫാൻ എന്നിവയെപ്പോലുള്ള ദൃഢവസ്തുക്കളുടെ പരിക്രമണത്തിൽ ഈയൊരു ബിന്ദു മാത്രമേ സ്ഥാനഭ്രംശം സംഭവിക്കാതിരിക്കുന്നുള്ളൂ. എന്നാൽ ഇവയുടെ ഭ്രമണ അക്ഷം ചലിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ, എല്ലായ്പ്പോഴും അത് സ്പർശബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്നു.



ചിത്രം 7.6 (*a*): യഥാർഥ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിലുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തു



ചിത്രം 7.6 (*b*): സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിന്റെയും പരിക്രമണ ചലനത്തിന്റെയും സംയോജിത ചലനാവസ്ഥയുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തു

ചിത്രം 7.6 (a)യും 7.6(b)യും ഒരു വസ്തുവിന്റെ വ്യത്യസ്ത തരത്തിലുള്ള ചലനങ്ങൾ വ്യക്തമാക്കുന്നു. P എന്ന ബിന്ദു ശ്രദ്ധിക്കുക. P എന്നത് വസ്തുവിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സ്ഥാനവും 'O' വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്ര (centre of mass- ഇതേപ്പറ്റി അടുത്ത ഭാഗത്ത് വിവരിക്കുന്നുണ്ട്) വുമാണ്. O_1, O_2, O_3, *യും* P_1, P_2, P_3 *യും യഥാക്രമം O യുടെയും P യുടെയും മൂന്നു വ്യത്യസ്ത സമയങ്ങളിലുള്ള സ്ഥാനങ്ങളാണ്. ചിത്രം 7.6 (a) പരിശോധിച്ചാൽ സമയത്തിന്റെ ഏതു ക്ഷണത്തിലും O യേയും P യേയും പോലുമുള്ള കണങ്ങൾക്ക് നേർരേഖാ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിൽ ഒരേ പ്രവേഗമായിരിക്കുമെന്നു കാണാം. ആ വസ്തു ഒരു യഥാർഥ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിൽ OP രേഖ തിരശ്ചീനദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവിനു വ്യതിയാനം സംഭവിക്കുന്നില്ല. ചിത്രം 7.6(a) അതുകൊണ്ട് ഇവിടെ* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ *ആയിരിക്കും. ചിത്രം 7.6(b) യിൽ വിവരിക്കുന്നത് സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിന്റെയും പരിക്രമണ ചലനത്തിന്റെയും സംയോജനമാണ്. ഇതിൽ ഏതൊരു വേളയിലും കണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള പ്രവേഗം വ്യത്യസ്തമാവും* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *എന്നിവ വ്യത്യാസപ്പെട്ടുകൊണ്ടിരിക്കുകയും ചെയ്യും.*

നമ്മെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം സൂചനകളൊന്നും ഇല്ലാത്തപക്ഷം, പരിക്രമണ ചലനം ഒരു സ്ഥിര അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയിട്ടുള്ളതായിരിക്കും.

ചരിവുതലത്തിലൂടെ താഴേക്കുരുളുന്ന ഒരു സിലിണ്ടറിനെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം അതിന്റെ ചലനം ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഒരു പരിക്രമണചലനത്തിന്റെയും സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിന്റെയും സംയോജനമാണെന്ന് പറയാം.

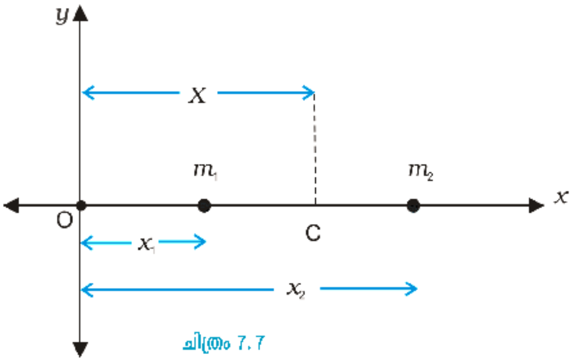
ഉരുളൽചലന (*Rolling motion*) ത്തിൽ നാം നേരത്തേ സംശയം പ്രകടിപ്പിച്ച '*വേറെന്തോ ചലനം*' വാസ്തവത്തിൽ ഭ്രമണചലനമാണ്. ഈയൊരു കാഴ്ചപ്പാടിലൂടെ ചിത്രം 7.6 (*a*), 7.6(*b*) എന്നിവ സൂക്ഷ്മമായി പരിശോധിച്ചാൽ ഇക്കാര്യം ബോധ്യമാവും. രണ്ടിലും കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് ഒരേ സഞ്ചാരപഥത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ രണ്ടുതരം ചലനങ്ങളാണ്. ചിത്രം 7.6 (*a*) യിലെ വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരം പൂർണ സ്ഥാനാന്തര ചലനവും ചിത്രം 7.6(*b*) യിലേത് സ്ഥാനാന്തരവും പരിക്രമണവും ചേർന്നുള്ള ചലനവുമാണ്. (നിങ്ങൾക്ക് പുസ്തകത്തെ ഒരു ദൃഢവസ്തുവായി സങ്കൽപിച്ച് അതിന്റെ രണ്ടുവിധത്തിലുള്ള സഞ്ചാരങ്ങൾ പുനരാവിഷ്കരിക്കാവുന്നതാണ്).

മേൽചർച്ചയെ അധികരിച്ച് ഈ വിഭാഗത്തിൽ നടത്തിയ നിരീക്ഷണങ്ങൾ സംഗ്രഹിക്കാം. **ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ ഉറപ്പിക്കുകയോ ബന്ധിക്കുകയോ ചെയ്യാത്ത ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരം ഒന്നുകിൽ പൂർണ സ്ഥാനാന്തരചലനമോ അല്ലെങ്കിൽ സ്ഥാനാന്തരചലനവും ഭ്രമണചലനവും ചേർന്നുള്ളതോ ആവാം. എന്നാൽ ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ ഉറപ്പിക്കുകയോ ബന്ധിപ്പിക്കുകയോ ചെയ്ത ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനം പരിക്രമണ ചലനം മാത്രമായിരിക്കും.** ഭ്രമണചലനമെന്നത് ഒരു നിശ്ചലഅക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ളതോ (സീലിങ്

ഫാൻ) അല്ലെങ്കിൽ ചലിക്കുന്ന അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ളതോ (ദോലനമുള്ള ടേബിൾ ഫാൻ) ആവാം. ഈ അധ്യായത്തിൽ പരിഗണിക്കുന്നത് നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഭ്രമണചലനം മാത്രമാണ്.

7.2 ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം (Centre of mass)

ഒരു കണികാവ്യൂഹത്തിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം എന്ന ആശയത്തെപ്പറ്റി ആലോചിക്കാം. ഇതിനായി രണ്ടു കണികകളുടെ ഒരു വ്യൂഹം പരിഗണിച്ചുകൊണ്ട് ആരംഭിക്കാം. ഈ രണ്ടു കണികകളെ യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ടുള്ള രേഖയെ x -അക്ഷമായി സങ്കൽപിക്കാം.



ചിത്രം 7.7

O എന്ന നിർദേശാങ്കകേന്ദ്രത്തിൽ ($Origin$) നിന്നു കണികകളിലേക്കുള്ള ദൂരം യഥാക്രമം x_1 ഉം x_2 ഉം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. കണികകളുടെ മാസ് യഥാക്രമം m_1, m_2 എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഈ വ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം C എന്നത് O വിൽനിന്ന് X ദൂരത്തുള്ള ഒരു സ്ഥാനത്തായിരിക്കും. അത് ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സമവാക്യം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (7.1)$$

സമവാക്യം 7.1 ലെ X എന്നത് x_1, x_2 എന്നിവയുടെ മാസ് അധിഷ്ഠിത ശരാശരിയാണ്. എന്നാൽ ഈ രണ്ടു കണികകൾക്കും ഒരേ മാസ് ആണെങ്കിൽ, അതായത് $m_1 = m_2 = m$ അപ്പോൾ,

$$X = \frac{m x_1 + m x_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

അതായത് ഒരേ മാസ് ഉള്ള രണ്ടു കണികകളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കൃത്യമായും ഇരു കണികകളെയും യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ മധ്യഭാഗത്തായിരിക്കും.

n കണികകളുള്ള ഒരു സഞ്ചയത്തിലെ മാസുകൾ m_1, m_2....m_n എന്നിവ ഒരു നേർരേഖയിൽ വരത്തക്കവണ്ണം ഒരു അക്ഷം വരച്ചാൽ, മുകളിലെ നിർവചനപ്രകാരം കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം ലഭ്യമാകുന്ന സമവാക്യം :

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad (7.2)$$

ഇതിൽ $x_1, x_2....x_n$ എന്നീ സ്ഥാനങ്ങൾ നിർദേശാങ്കകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് കണക്കാക്കുന്ന ദൂരങ്ങളാണ്. X ഉം അതേ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് അളന്നു തിട്ടപ്പെടുത്തിയതാണ്. n കണങ്ങളുടെ എണ്ണം ആയതിനാൽ അത്രയും ഘടകങ്ങളുടെ സങ്കലനത്തെയാണ് Σ (സിഗ്മ)എന്ന ഗണിത ചിഹ്നം സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. ഇവിടെ n എണ്ണം കണങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ ആകത്തുക വരുന്നത് : $\Sigma m_i = M$. ഇതാണ് വ്യവസ്ഥയുടെ ആകെ മാസ്.

ഒരു നേർരേഖകൊണ്ട് പരസ്പരം യോജിപ്പിക്കാനാവാത്ത മൂന്നു കണങ്ങളാണ് പരിഗണിക്കുന്നതെങ്കിൽ അവയെ വിവരിക്കുന്നതിന് നേർരേഖക്കു പകരം, രണ്ടു അക്ഷരേഖകൾ നിർണയിക്കുന്ന ഒരു തലത്തിൽ ഈ കണങ്ങൾ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നുവെന്ന് സങ്കൽപിച്ച് ഈ അക്ഷങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള അവയുടെ അകലങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നു. അതായത്, X അക്ഷവും Y അക്ഷവും ആധാരമാക്കി (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) എന്നിങ്ങനെ സ്ഥാനങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു. മൂന്നു കണികകളുടെയും മാസുകൾ യഥാക്രമം m_1, m_2, m_3 എന്നിരിക്കട്ടെ, X-Y നിർദേശാങ്കങ്ങളിലൂടെ നിർവചിക്കപ്പെട്ട മൂന്നു കണികകളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം C ലഭ്യമാകുന്നതിന് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad (7.3\ a)$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad (7.3\ b)$$

തുല്യ മാസുള്ള, അതായത് $m = m_1 = m_2 = m_3$ കണങ്ങളാവുമ്പോൾ

$$X = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3)}{3m} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$Y = \frac{m(y_1 + y_2 + y_3)}{3m} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

അതായത് നേർരേഖയിലല്ലാത്ത ഒരേ ദ്രവ്യമാനവുമുള്ള മൂന്നു കണങ്ങളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം ആ മൂന്നു കണങ്ങളുടെയും സ്ഥാനങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ചുകൊണ്ടുള്ള ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവായിരിക്കും. സമവാക്യങ്ങൾ $7.3a$, $7.3b$ യുടെ ഫലങ്ങൾ n എണ്ണം കണങ്ങളുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയിലേക്ക് എളുപ്പത്തിൽത്തന്നെ സാമാന്യവൽക്കരിക്കാവുന്നതാണ്. അവ ഒരു പ്രതല

ത്തിൽത്തന്നെ ആയിരിക്കണമെന്നില്ല, വിവിധ സ്ഥലത്ത് (*Space*) വിവിധ ഇടങ്ങളിൽ വ്യാപിച്ചിരിക്കുന്നതായാൽ പോലും ഇത് കണക്കാക്കുവാൻ സാധിക്കും. അങ്ങനെയുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം (X,Y,Z) കണ്ടെത്തുന്നത് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾ ഉപയോഗിച്ചാണ്.

$$X = \frac{\sum m_i x_i}{M} \quad (7.4a)$$

$$Y = \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad (7.4b)$$

$$Z = \frac{\sum m_i z_i}{M} \quad (7.4c)$$

ഇതിലെ $M = \Sigma m_i$ എന്നത് വ്യവസ്ഥയുടെ ആകെ മാസാണ്. i എന്ന അങ്കനം 1 മുതൽ n വരെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതാണ്. m_i എന്നത് i സ്ഥാനത്തുള്ള കണത്തിന്റെ മാസും i എന്ന കണികയുടെ സ്ഥാന നിർണയം നിർദേശാങ്കങ്ങൾ x_i, y_i, z_i പ്രകാരവുമാണ്.

സമവാക്യങ്ങളായ *(7.4a), (7.4b), (7.4c)* ഇവ സ്ഥാനസദിശങ്ങളുടെ (*position vectors*) അളവുകളും പ്രതീകങ്ങളുമുപയോഗിച്ച് ഒന്നിപ്പിച്ച് ഒറ്റ സമവാക്യമായി എഴുതാനാവും. r_i എന്നത് i സ്ഥാനത്തുള്ള കണികയുടെ സ്ഥാനസദിശമാണെന്നിരിക്കട്ടെ, R എന്നത് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ സ്ഥാനസദിശവുമാണെങ്കിൽ

$$\mathbf{r}_i = x_i \hat{\mathbf{i}} + y_i \hat{\mathbf{j}} + z_i \hat{k}$$

$$\mathbf{R} = X \hat{\mathbf{i}} + Y \hat{\mathbf{j}} + Z \hat{k}$$ എന്നെഴുതാം

അങ്ങനെയെങ്കിൽ $$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad (7.4d)$$

വലതുഭാഗത്തുള്ളവയുടെ തുക ഒരു സദിശസങ്കലനഫലമാണ്.

സദിശരീതി ഉപയോഗത്തിൽ വരുമ്പോൾ ആവിഷ്കാരത്തിലുള്ള ലാളിത്യം ശ്രദ്ധേയമാണ്. നിർദിഷ്ട നിർദേശാങ്ക വ്യവസ്ഥയിൽ മൂലബിന്ദു *(origin)* തന്നെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രമായിവരുന്നെങ്കിൽ തന്നിരിക്കുന്ന കണികാ വ്യവസ്ഥയിൽ $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$ ആയിരിക്കും.

ഒരു ദൃഢവസ്തു, അതൊരു മീറ്റർ ദണ്ഡോ ഫ്ളൈവീലോ ആകട്ടെ, പരമാവധി അടുത്തടുത്തായി അടുക്കിവച്ച കണങ്ങളുടെ ഒരു വ്യവസ്ഥയാണ്. അതുകൊണ്ട് സമവാക്യങ്ങൾ *(7.4a),(7.4b), (7.4c), (7.4d)* എന്നിവ അത്തരം ദൃഢവസ്തുക്കളിൽ പ്രയോഗിക്കാൻ അനുയോജ്യങ്ങളാണ്. ദൃഢവസ്തു, ചെറുതായാൽപ്പോലും അതിലടങ്ങിയിരിക്കുന്ന കണങ്ങളുടെ എണ്ണം (ആറ്റങ്ങളായാലും തന്മാത്രകളായാലും) അതിഭീമമായതിനാൽ അവയുടെ അവസ്ഥകളെ മൊത്തത്തിൽ വെവ്വേറെ കണക്കാക്കി കൂട്ടിയെടുക്കാനോ ഓരോന്നിന്റെയും വിവരങ്ങൾ സമവാക്യങ്ങളിലേക്കു കൊണ്ടുവരാനോ സാധ്യമല്ല. കണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലങ്ങൾ തീരെ ചെറുതായതിനാൽ വസ്തുവിനെ ഒരു അവിച്ഛിന്ന മാസ് വിന്യാസമായി കരുതാവുന്നതാണ്. ഇനി ഈ വസ്തുവിനെ n ചെറിയ മാസുകളായി പരിഗണിക്കാം. അതായത് $\Delta m_1, \Delta m_2, \ldots\ldots\Delta m_n$ വരെയുള്ള ഒരു വ്യൂഹമായി കണക്കാക്കാം. അതിലെ i സ്ഥാനത്തുള്ള Δm_i എന്ന ദ്രവ്യഖണ്ഡത്തിന്റെ സ്ഥാനം x_i, y_i, z_i എന്ന നിർദേശാങ്കങ്ങളിലായിരിക്കും. ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ നിർദേശാങ്കം ഏകദേശമായി കണക്കാക്കുന്നത് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന വിധമാണ്.

$$X = \frac{\sum(\Delta m_i)x_i}{\sum \Delta m_i}, Y = \frac{\sum(\Delta m_i)y_i}{\sum \Delta m_i}, Z = \frac{\sum(\Delta m_i)z_i}{\sum \Delta m_i}$$

n ന്റെ വില വലുതാകുന്തോറും Δm_i ചെറുതായി വരുകയും ഈ ആവിഷ്കാരം കൃത്യതയുള്ളതായിത്തീരുകയും ചെയ്യും. അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ i യുടെ സങ്കലനം, സമാകലനത്തിലൂടെ ലഭ്യമാകും. അങ്ങനെ,

$$\sum \Delta m_i \to \int dm = M,$$

$$\sum(\Delta m_i)x_i \to \int x\, dm,$$

$$\sum(\Delta m_i)y_i \to \int y\, dm,$$

$$\sum(\Delta m_i)z_i \to \int z\, dm$$

ഇതിൽ M എന്നത് വസ്തുവിന്റെ മൊത്തം മാസ് ആണ്. ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ കുറിക്കാവുന്നതാണ്.

$$X = \frac{1}{M}\int x\, dm, Y = \frac{1}{M}\int y\, dm \text{ and } Z = \frac{1}{M}\int z\, dm \quad (7.5a)$$

ഈ മൂന്ന് അദിശ ആവിഷ്കാരങ്ങളെയും സദിശ ആവിഷ്കാരങ്ങളാക്കി മാറ്റിയാൽ

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm \quad (7.5b)$$

എന്ന് ലഭിക്കും.

നിർദേശാങ്കവ്യവസ്ഥയുടെ കേന്ദ്രം തന്നെ (*origin*) ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രമായി പരിഗണിച്ചാൽ

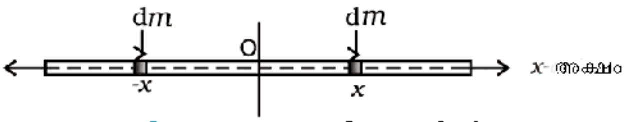
$$\mathbf{R} = 0$$

അതായത് $\int \mathbf{r}\, dm = 0$

അല്ലെങ്കിൽ $\int x\, dm = \int y\, dm = \int z\, dm = 0 \quad (7.6)$

മിക്കപ്പോഴും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രങ്ങൾ കണക്കാക്കാനായി നമുക്കു ലഭിക്കാറുള്ളത് ഏകസമാനമായതും (*Homogeneous*) ക്രമരൂപമുള്ളതുമായ വസ്തുക്കളായിരിക്കും. ഉദാഹരണത്തിന് വളയങ്ങൾ, തകിടുകൾ, ഗോളങ്ങൾ, ദണ്ഡുകൾ മുതലായവ (ഏകസമാന വസ്തുവെന്നാൽ ദ്രവ്യാവസ്ഥ, അല്ലെങ്കിൽ മാസ് ഒരേനിരക്കിൽ വിതരണം ചെയ്യപ്പെട്ട വസ്തുക്കൾ എന്നാണ്). സമമിതിയുടെ (*Symmetry*) പരിഗണനകൾ ഉപയോഗിച്ചുകൊണ്ട് ആ വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം സ്ഥിതിചെയ്യുന്നത് ആ വസ്തുവിന്റെ ജ്യാമിതീയരൂപ കേന്ദ്രത്തിലായിരിക്കുമെന്ന് (*Geometric centre*)എളുപ്പത്തിൽ അനുമാനിക്കാൻ കഴിയും.

കനം കുറഞ്ഞ ഒരു നേരിയ ദണ്ഡ് പരിഗണിക്കുക. ഛേദതലം ചതുരമാണെങ്കിൽ നീളവും വീതിയും, അതല്ലെങ്കിൽ ഛേദതലം വൃത്താകൃതിയിലാണെങ്കിൽ അതിന്റെ ആരം (*Radius*) ദണ്ഡിന്റെ മൊത്തം നീളത്തെക്കാൾ



ചിത്രം 7.8 : ഒരു നേരിയ ദണ്ഡിന്റെ ദ്രവ്യകേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന വിധം

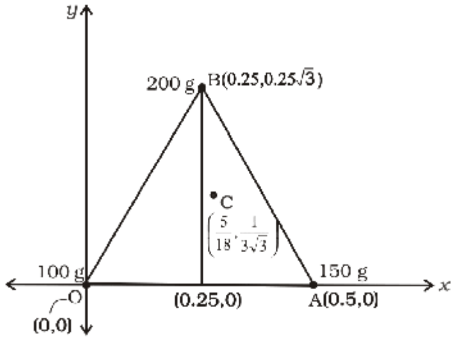
വളരെ ചെറുതാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക. ദണ്ഡിന്റെ നിർദേശാങ്കകേന്ദ്രം ദണ്ഡിന്റെ ജ്യാമിതീയകേന്ദ്രമാണെന്നും അത് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നത് ദണ്ഡിന്റെ നീളത്തിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന x-അക്ഷത്തിലാണെന്നും എടുത്താൽ, പ്രതിഫലന സമമിതി (reflection symmetry) കാരണം ദണ്ഡിന്റെ $+x$ ലുള്ള ഓരോ dm ഘടകത്തിനും തത്തുല്യമായ dm ഘടകം $-x$ ൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നുണ്ടെന്നു പറയാനാകും. (ചിത്രം 7-8) അതിനാൽ ഓരോ ജോടികളും സമാകലനത്തിലേക്ക് (*Integral*) കൊണ്ടുവന്നാൽ $\int xdm$ ന്റെ ഫലം പൂജ്യമായിരിക്കും. സമവാക്യം (7.6) ൽ നിന്നു ലഭിച്ചതുപോലെ, സമാകലനം പൂജ്യമാവുന്നിടത്തു തന്നെയായിരിക്കും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം സ്ഥിതിചെയ്യുക. ഏകസമാനമായ ഒരു ദണ്ഡിന്റെ ജ്യാമിതീയ മധ്യബിന്ദു തന്നെയാണ് അതിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം. ഇത് പ്രതിഫലന സമമിതിയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലും മനസിലാക്കാൻ സാധിക്കും.

ഇതേ സമമിതി വാദങ്ങൾ തന്നെ ഏകമാനവസ്തുക്കളായ വളയങ്ങൾ, തകിടുകൾ, വൃത്താകാരമോ ചതുരമോ ആയ ഛേദതലങ്ങളുള്ള കനം കൂടിയ ദണ്ഡുകൾ തുടങ്ങിയവക്കു വേണ്ടി പ്രയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. ഇത്തരത്തിലുള്ള വസ്തുക്കളിൽ ഓരോ (x,y,z) സ്ഥാനത്തുമുള്ള dm മാസിന് സമാനമായ മാസുകൾ ഭാഗം $(-x,-y,-z)$ സ്ഥാനത്തും ഉണ്ടായിരിക്കുമെന്ന ബോധ്യത്തിലേക്ക് ഇത് നമ്മളെ എത്തിക്കുന്നു. (മറ്റൊരു തരത്തിൽ, ഈ വസ്തുക്കളിൽ സമമിതി കേന്ദ്രം തന്നെയായിരിക്കും. നിർദേശാങ്കകേന്ദ്രം). അതിനാൽ, സമവാക്യം (7.5*a*) യിലെ സമാകലന ക്രിയയുടെ ഫലം പൂജ്യമാവുന്നു. മുകളിൽ പ്രസ്താവിച്ച തരം വസ്തുക്കളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം അതിന്റെ ജ്യാമിതീയ മധ്യബിന്ദു തന്നെയായിരിക്കുമെന്ന് ഇതിൽനിന്നു വ്യക്തമാവുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.1: ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു കോണുകളിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന മൂന്നു കണികകളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കണ്ടെത്തുക. കണികകളുടെ മാസ് യഥാക്രമം 100 ഗ്രാം, 150 ഗ്രാം, 200 ഗ്രാം എന്നിങ്ങനെയാണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ഭുജത്തിന്റെ നീളം 0.5 മീറ്ററാണ്.

ഉത്തരം:

ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ X, Y അക്ഷങ്ങൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുക. ഒരു സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ O, A, B സ്ഥാനങ്ങളിലെ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ യഥാക്രമം, (0,0), (0.50), (0.25, $0.25\sqrt{3}$) എന്നിങ്ങനെയാണ്. മാസുകളായ 100 ഗ്രാം, 150 ഗ്രാം, 200 ഗ്രാം എന്നിവ യഥാക്രമം O, A, B എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിലാണ്. അപ്പോൾ



ചിത്രം 7.9

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{[100(0) + 150(0.5) + 200(0.25)]\ \text{g m}}{(100 + 150 + 200)\ \text{g}}$$

$$= \frac{75 + 50}{450}\text{m} = \frac{125}{450}\text{m} = \frac{5}{18}\text{m}$$

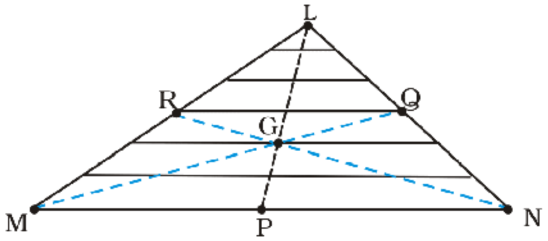
$$Y = \frac{[100(0) + 150(0) + 200(0.25\sqrt{3})]\ \text{g m}}{450\ \text{g}}$$

$$= \frac{50\sqrt{3}}{450}\text{m} = \frac{\sqrt{3}}{9}\text{m} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\text{m}$$

ചിത്രത്തിൻ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം C യിലാണ്. എന്തുകൊണ്ടാണ് ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം ജ്യാമിതീയ മധ്യബിന്ദുവിൽ അല്ലാതെപോയത്?

ഉദാഹരണം 7.2: ഒരു ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള തകിടിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കണ്ടെത്തുക.

ഉത്തരം: ചിത്രം 7.10 ൽ കാണിച്ചതുപോലെ ത്രികോണമായ *LMN* നെ *MN* ന് സമാന്തരമായി നേരിയ പാളികളായി വിഭജിക്കാൻ കഴിയും.



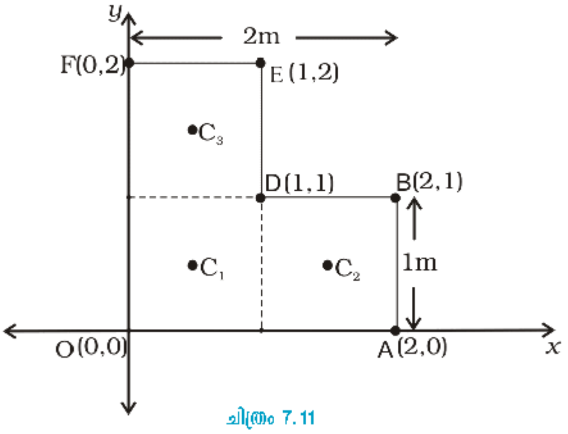
ചിത്രം 7.10

സമമിതി പ്രകാരം ഒരോ നേരിയ പാളിക്കും അവയുടെ ജ്യാമിതീയ മധ്യകേന്ദ്രത്തിലായി ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം ഉണ്ട്. മധ്യബിന്ദുക്കളെല്ലാം യോജിപ്പിക്കുകവഴി നമുക്ക് *LP* എന്ന മധ്യരേഖ ലഭിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് മുഴുവൻ ത്രികോണരൂപത്തിന്റെയും ദ്രവ്യകേന്ദ്രം രേഖ *LP* യിൽ എവിടെയെങ്കിലുമായിരിക്കുമെന്ന് കരുതാം. അതേപോലെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം മറ്റു മധ്യരേഖകളായ *MQ* വിലും *NR* ലുമാണെന്നും വാദിക്കാം. ഈ മൂന്നു മധ്യരേഖകളെയും യോജിപ്പിച്ചാൽ അവ കൃത്യമായി സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദുവാണ്, അതായത് ത്രികോണ രൂപത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലാണ് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രമെന്ന് കണ്ടെത്താം. ◀

ഉദാഹരണം 7.3: ഏകസമാനമായ (*Uniform*) *L* ആകൃതിയുള്ള ഒരു അടുക്കിന്റെ (നേരിയ പരന്ന ഫലകം) ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം തന്നിരിക്കുന്ന അളവുകൾക്കനുസരിച്ച് കണ്ടെത്തുക. ഫലകത്തിന്റെ ദ്രവ്യമാനം 3 കി.ഗ്രാം.

ഉത്തരം:

ചിത്രം 7.11 ൽ കാണിച്ചതുപോലെ *x*, *y* അക്ഷങ്ങൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുക. ഫലകത്തിന്റെ മൂലകളുടെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ (ചിത്രത്തിൽ) രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. *L* ആകൃതിയുള്ള ഫലകത്തെ നമുക്ക് 1 മീറ്റർ വശങ്ങളുള്ള മൂന്നു സമചതുര ഖണ്ഡങ്ങളാക്കാൻ സാധിക്കും. സമമിതി പ്രകാരം ഓരോ ഖണ്ഡത്തിന്റെയും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം C_1, C_2, C_3 എന്ന് കണ്ടെത്താം. കാരണം, അവയുടെ ജ്യാമിതീയ മധ്യബിന്ദുക്കളാണവ. ഇനി ഇവയുടെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ ക്രമമായി എടുക്കാം അതായത് (1/2, 1/2),(3/2, 1/2),(1/2, 3/2). സമചതുരങ്ങളുടെ മാസുകൾ മധ്യകേന്ദ്രങ്ങളായ ഈ സ്ഥാനങ്ങളിൽ കേന്ദ്രീകരിക്കുന്നതായി കണക്കാക്കാം. *L* രൂപത്തിന്റെ മൊത്തം ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം ഈ മൂന്നു ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രങ്ങളുടെയും മധ്യത്തിലായിരിക്കും.



ചിത്രം 7.11

അതിനാൽ

$$X = \frac{[1(1/2)+1(3/2)+1(1/2)]\,\text{kg m}}{(1+1+1)\,\text{kg}} = \frac{5}{6}\,\text{m}$$

$$Y = \frac{[[1(1/2)+1(1/2)+1(3/2)]]\,\text{kg m}}{(1+1+1)\,\text{kg}} = \frac{5}{6}\,\text{m}$$

L രൂപത്തിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കിടക്കുന്നത് *OD* രേഖയിലാണ്. കണക്കുകൂട്ടലുകളില്ലാതെതന്നെ ഇതു നമുക്ക് ഊഹിക്കാൻ കഴിഞ്ഞിരിക്കുന്നു. എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് പറയാനാവുമോ? മൂന്നു ചതുരങ്ങൾ ചേർന്നാണ് *L* രൂപമുണ്ടാകുന്നത്. ഇവയോരോന്നിന്റെയും മാസ് (Mass) വ്യത്യസ്തമായാൽ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കണ്ടെത്തുന്നതെങ്ങിനെയായിരിക്കും? ◀

7.3 ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനം (Motion of Centre of Mass)

ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ നിർവചനം, കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ഭൗതികപ്രാധാന്യത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാനുള്ള കരുത്ത് നൽകുന്നുവെന്നു പറയാം. സമവാക്യം (7.4 *d*) യെ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന വിധത്തിൽ നമുക്കു മാറ്റിയെഴുതാം:

$$M\mathbf{R} = \sum m_i \mathbf{r}_i = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \ldots + m_n \mathbf{r}_n \qquad (7.7)$$

സമയാനുസൃതമായി സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുഭാഗങ്ങളും അവകലനത്തിന് (*Differentiation*) വിധേയമാക്കിയാൽ ലഭിക്കുന്നത് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$M\frac{d\mathbf{R}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \ldots + m_n\frac{d\mathbf{r}_n}{dt}$$

അല്ലെങ്കിൽ

$$MV = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots\ldots\ldots + m_n v_n \qquad (7.8)$$

ഇതിൽ v_1 ($= dr_1/dt$) എന്നത് ആദ്യത്തെ കണത്തിന്റെ പ്രവേഗം, v_2 (dr_2/dt) എന്നത് രണ്ടാമത്തെ കണത്തിന്റെ പ്രവേഗം എന്നിങ്ങനെ. അതുപോലെ, ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗം v ($= dR/dt$). നമ്മൾ എടുത്തിട്ടുള്ള മാസുകൾ m_1, m_2 ... മുതലായവ സമയക്രമത്തിൽ മാറുന്നില്ലെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. അതുകൊണ്ട് സമയത്തിന് ആനുപാതികമായി സമവാക്യത്തെ അവകലനത്തിന് വിധേയമാക്കുമ്പോൾ അവ സ്ഥിരസംഖ്യയായി പരിഗണിക്കപ്പെടുന്നു. സമവാക്യം (7.8) നെ അവകലനത്തിന് വിധേയമാക്കിയാൽ നമുക്ക് ലഭിക്കുക താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയാണ്.

$$M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} + \ldots + m_n\frac{d\mathbf{v}_n}{dt}$$

അല്ലെങ്കിൽ

$$M\mathbf{A} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \ldots + m_n\mathbf{a}_n \tag{7.9}$$

ഇതിൽ a_1 (dv_1/dt)എന്നത് ഒന്നാമത്തെ കണത്തിന്റെ ത്വരണം (*Acceleration*) a_2 (dv_2/dt) രണ്ടാമത്തെ കണത്തിന്റെ ത്വരണം എന്നിങ്ങനെ.

ഇനി, ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമപ്രകാരം ഒന്നാമത്തെ കണത്തിനുമേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെട്ട ബലം കണക്കാക്കുന്നത് $F_1 = m_1 a_1$ എന്നാണ്. അതേപോലെ രണ്ടാമത്തെ കണത്തിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം $F_2 = m_2 a_2$ എന്നിങ്ങനെ എഴുതാം. അതിനാൽ സമവാക്യം (7.9) താഴെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മാറ്റിയെഴുതാവുന്നതാണ്.

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n \tag{7.10}$$

അതിനാൽ ഒരു കണികാവ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ മാസിനെ അതിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ത്വരണവുമായി ഗുണിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഫലം ആ കണികാവ്യൂഹത്തിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന എല്ലാ ബലങ്ങളുടെയും സദിശസങ്കലനഫലമാണെന്നു വരുന്നു.

ഒന്നാമത്തെ കണികക്കുമേലുള്ള F_1 എന്ന ബലത്തെക്കുറിച്ചു ചിന്തിക്കുമ്പോൾ അത് ഒറ്റപ്പെട്ടു നിൽക്കുന്ന ഒരു ബലമല്ലെന്നും, എല്ലാ ബലത്തിന്റെയും സദിശസങ്കലനമാണ് അതിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നതെന്നും കൂടി മനസ്സിലാക്കണം. അങ്ങനെ ഓരോ കണത്തിന്റെ കാര്യത്തിലും ഇത് ബാധകമാണ്. ഓരോ കണത്തിന്റെയും, മേലെയുള്ള ഈ ബലങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിൽ, വ്യവസ്ഥക്കു പുറത്തുള്ള **ബാഹ്യബലങ്ങളും** വ്യവസ്ഥക്കകത്തുള്ള കണങ്ങൾ തന്നെ പരസ്പരം ചെലുത്തുന്ന **ആന്തരികബലങ്ങളും** ഉൾപ്പെടുന്നു. ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമപ്രകാരം ഈ ആന്തരികബലങ്ങൾ പരസ്പരം തുല്യവും വിപരീതവുമായ ജോടികളായതിനാൽ അന്യോന്യം റദ്ദാക്കുകയും അതുകൊണ്ട്, സമവാക്യം (7.10) ഉപയോഗിച്ചുള്ള ഈ ബലങ്ങളുടെ മൊത്തം പരിണതി പൂജ്യമായിത്തീരുകയും ചെയ്യുന്നു. അതുകൊണ്ട് ബാഹ്യബലങ്ങൾ മാത്രമേ സമവാക്യം (7.10) അനുസരിച്ചുള്ള ബലത്തിൽ സംഭാവന ചെയ്യുന്നുള്ളൂ. അതുകൊണ്ട് സമവാക്യം (7.10)നെ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന വിധം വീണ്ടും മാറ്റിയെഴുതാവുന്നതാണ്.

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_{ext} \tag{7.11}$$

ഇതിൽ F_{ext} എന്നത് വ്യവസ്ഥയിലെ കണങ്ങളുടെ മേൽ ചെലുത്തപ്പെടുന്ന ബാഹ്യബലങ്ങളുടെ മൊത്തം തുകയാണ്.

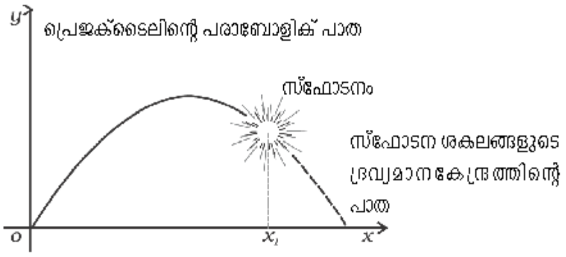
സമവാക്യം 7.11 ന്റെ നിർവചന പ്രകാരം, ***ഒരു കണികാവ്യൂഹത്തിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിൽ എല്ലാ കണികകളുടെയും മാസ് കേന്ദ്രീകരിക്കുന്നതുപോലെയും അതിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന എല്ലാ ബാഹ്യബലങ്ങളും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിലേക്ക് പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നതുപോലെയുമാണ് കണികാവ്യൂഹത്തിന്റെ ചലനം.***

ഒരു വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനം മനസ്സിലാക്കാൻ, വ്യവസ്ഥയിലെ കണികകളുടെ ആന്തരിക ബലത്തെപ്പറ്റിയുള്ള അറിവ് ആവശ്യമില്ല, ഇതിന് ബാഹ്യബലത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ധാരണ മാത്രം മതിയാവും. സമവാക്യം (7.11) ലഭിക്കുന്നതിന് വ്യവസ്ഥയിലെ കണങ്ങളുടെ സ്വഭാവങ്ങളെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിക്കേണ്ട കാര്യമില്ല. നാനാവിധത്തിലുള്ള ആന്തരികചലനങ്ങൾക്ക് നിരന്തരം വിധേയമാകുന്ന അനേകം കണികകളുടെ സഞ്ചയമായിരിക്കാം ഒരു വ്യവസ്ഥ. അല്ലെങ്കിൽ അത്, ഒരു പൂർണസ്ഥാനാന്തരചലനത്തിലോ അല്ലെങ്കിൽ സ്ഥാനാന്തരചലനവും പരിക്രമണചലനവും കൂടിച്ചേർന്നുള്ള അവസ്ഥയിലോ ഉള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തുവായിരിക്കും. തന്നിരിക്കുന്ന വ്യവസ്ഥയോ, അതിലടങ്ങിയിരിക്കുന്ന സ്വതന്ത്ര കണികകളുടെ ചലനങ്ങളോ എന്തായിരുന്നാലും, ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനം സമവാക്യം (7.11) അനുസരിച്ചായിരിക്കും.

മുൻ അധ്യായങ്ങളിൽ വ്യാപ്തിതവസ്തുക്കളെ ഒറ്റ കണികയായി പരിഗണിക്കുന്നതിനു പകരം, ഇനി നമുക്ക് അവയെ കണികകളുടെ വ്യൂഹങ്ങളായി പരിഗണിക്കാം. ഒരു വ്യാപ്തിതവസ്തുവിന്റെ ആകെ മാസ് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിൽ കേന്ദ്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നുവെന്നും ഈ വ്യൂഹത്തിലെ എല്ലാ ബാഹ്യബലങ്ങളും പ്രവർത്തിക്കുന്നത് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിലൂടെയാണെന്നും സങ്കൽപിക്കാം. ഇപ്രകാരം, ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റ ചലനം മനസിലാക്കുന്നതിലൂടെ, വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തെക്കുറിച്ച് എളുപ്പം പഠിക്കാം.

വസ്തുക്കളിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലങ്ങളുടെ വിശകലനത്തിലും അതുമായി ബന്ധപ്പെട്ടു വരുന്ന പ്രശ്നങ്ങളുടെ നിർധാരണത്തിലും നാം നേരത്തെ അവലംബിച്ചിരുന്ന രീതി പ്രക്രിയകളുടെ വിശദാംശങ്ങൾ ഒന്നും പരിഗണിക്കാതെയും ന്യായീകരിക്കാതെയുമായിരുന്നു.

കണികകളുടെ ഭ്രമണചലനമോ ആന്തരിക ചലനങ്ങളോ പരിഗണിക്കേണ്ടതില്ലായെന്നോ അവ നിലനിൽക്കുന്നില്ലായെന്നോയുള്ള മുൻധാരണയാണ് നാം പുലർത്തിയത്. ഇനി അതിന്റെ ആവശ്യമില്ല. കറങ്ങുന്നതോ അല്ലാത്തതോ ആയ ദൃഢവസ്തുക്കളുടെയും, പലതരം ആന്തരികചലനങ്ങളുള്ള കണങ്ങളുടെ ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെയും സ്ഥാനാന്തര ചലനത്തെ എങ്ങനെ വേർതിരിക്കാമെന്നു നാം കണ്ടു കഴിഞ്ഞു.



ചിത്രം 7.12: ഒരു പ്രക്ഷേപത്തിന്റെ (*projectile*) തുടർച്ചയായ പരാബൊളിക് (*parabolic*) പാതയിൽ, ഏതെങ്കിലും ഭാഗത്ത് ഒരു സ്ഫോടനം നടന്നാലും സ്ഫോടനശകലങ്ങളുടെ ദ്രവ്യകേന്ദ്രത്തിന്റെ സഞ്ചാരപഥം സമവക്രരേഖയിൽ തന്നെയായിരിക്കും.

ചിത്രം 7.12, സമവാക്യം (7.11)ന്റെ ഏറ്റവും നല്ല വിശദീകരണമാണ്. ഒരു പ്രക്ഷേപം (*projectile*) അനുവർത്തിക്കുന്ന സ്വാഭാവികമായ പരാബൊളിക് സഞ്ചാരപഥത്തിന്റെ (*trajectory* - പ്രക്ഷേപപഥം) ഇടക്ക് അന്തരീക്ഷത്തിലത് ഒരു സ്ഫോടനത്തിന് വിധേയമായിചെറുകഷണങ്ങളായി മാറിയെന്നിരിക്കട്ടെ. സ്ഫോടനത്തിലേക്കു നയിക്കുന്നത് ആന്തരിക ബലങ്ങളാണ്. ആന്തരികബലങ്ങൾ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനത്തിലേക്ക് ഒന്നും സംഭാവന ചെയ്യുന്നില്ല. വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന മൊത്തം ബാഹ്യബലം ഗുരുത്വാകർഷണമാണ്. അതിന്റെ മൂല്യം സ്ഫോടനത്തിനു മുമ്പും പിമ്പും ഒന്നുതന്നെയാണ്. തൻമൂലം ബാഹ്യബലത്തിന്റെ സ്വാധീനത്തിലുള്ള ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനത്തിന് വ്യതിയാനം വരുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് സ്ഫോടനമൊന്നും നടന്നിട്ടില്ലായിരുന്നെങ്കിലുള്ള അതേ പ്രക്ഷേപപഥത്തിലൂടെ പാരബോളാകൃതിയിലുള്ള പാതയിൽ അത് സഞ്ചാരം തുടരുന്നു.

7.4. ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ രേഖീയ ആക്കം (Linear momeutum of a system of particles)

ഒരു കണികയുടെ രേഖീയ ആക്കത്തെക്കുറിച്ചുള്ള നിർവചനം നമുക്കു വീണ്ടും പരിഗണിക്കാം.

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v} \tag{7.12}$$

ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം ആക്കം ഉപയോഗിച്ച് എഴുതിയാൽ

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{7.13}$$

ഇവിടെ F എന്നത് കണികക്കു മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലമാണ്. n മാസുകൾ m_1, m_2, ...m_n എന്നിവയും, പ്രവേഗങ്ങൾ യഥാക്രമം $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ...$\mathbf{v}_n$ എന്നിവയും ആയിട്ടുള്ള n കണികകളുടെ ഒരു വ്യവസ്ഥ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ കണങ്ങൾ പരസ്പരം പ്രവർത്തന-പ്രതിപ്രവർത്തനങ്ങളിൽ ഏർപ്പെടുകയും അതോടൊപ്പം തന്നെ അവയിൽ ബാഹ്യബലം അനുഭവപ്പെടുകയും ചെയ്യുന്നു. ഒന്നാമത്തെ കണത്തിന്റെ രേഖീയആക്കം $m_1\mathbf{v}_1$ രണ്ടാമത്തേതിന്റേത് $m_2\mathbf{v}_2$ എന്ന ക്രമത്തിൽ ഇവിടെ സങ്കൽപ്പിക്കാം.

n എണ്ണം കണങ്ങളുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയിൽ ഓരോ സ്വതന്ത്രകണികയുടെയും ആക്കസദിശങ്ങളുടെ തുക (*vector sum*) ആയാണ് ആ വ്യവസ്ഥയുടെ രേഖീയ ആക്കം നിർവചിക്കപ്പെടുന്നത്. അതായത്

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_n$$

$$= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n \tag{7.14}$$

ഇത് സമവാക്യം (7.8) മായി താരതമ്യം ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാം.

$$\mathbf{P} = M\,\mathbf{V} \tag{7.15}$$

അതായത്, ഒരു **കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ആക്കത്തിന്റെ ആകത്തുക, ആ വ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്തം മാസും അതിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗവും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.** സമവാക്യം (7.15) സമയത്തിനനുസൃതമായി അവകലനം (*Differentiate*) ചെയ്താൽ ലഭിക്കുന്നത്

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = M\mathbf{A} \tag{7.16}$$

സമവാക്യം (7.16) സമവാക്യം (7.11)മായി താരതമ്യം ചെയ്താൽ

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \tag{7.17}$$

(ഇത് ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥക്ക് ബാധകമായ ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമത്തിന്റെ പ്രസ്താവനയാണ്).

ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യബലത്തിന്റെ തുക പൂജ്യമാണെന്ന് സങ്കൽപിച്ചാൽ, സമവാക്യം (7.17) ൽ നിന്നു ലഭിക്കുന്നത്.

$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$ എന്നാണ്.

അഥവാ $\mathbf{P}$ = ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ ആകുന്നു. (7.18a)

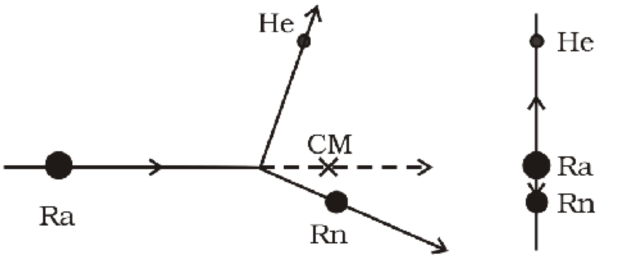
അതായത് കണികാവ്യവസ്ഥക്കുമേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന മൊത്തം ബാഹ്യബലം പൂജ്യമാവുമ്പോൾ, ആ വ്യവസ്ഥയുടെ ആകെ രേഖീയ ആക്കം സ്ഥിരമായിരിക്കും. ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ രേഖീയ ആക്ക സംരക്ഷണനിയമമാണ് ഇത്. ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെ മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ആകെ ബാഹ്യബലം പൂജ്യമാവുന്നിടത്ത്, വ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗം സ്ഥിരമായി തുടരുന്നു എന്നാണ് ഇതുകൊണ്ട് അർഥമാക്കുന്നത്. (കണികാവ്യവസ്ഥയെക്കുറിച്ചുള്ള ഈ അധ്യായത്തിൽ, വ്യവസ്ഥയിലെ മൊത്തം മാസ് (*Mass*) സ്ഥിരമായിരിക്കും എന്ന കാഴ്ചപ്പാടാണു സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നത്).

ഇവിടെ ആന്തരികബലത്തെക്കുറിച്ച് ആലോചിക്കുമ്പോൾ, അത് കണങ്ങൾ അന്യോന്യം ചെലുത്തുന്ന ബലമാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കണം. ഓരോ സ്വതന്ത്രകണത്തിനും സങ്കീർണങ്ങളായ സഞ്ചാരപഥങ്ങളുണ്ടാവാം. അനുഭവപ്പെടുന്ന വ്യവസ്ഥയിന്മേൽ ബാഹ്യബലം പൂജ്യം ആണെങ്കിൽ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗം സ്ഥിരമായിരിക്കും; ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം ഒരു സ്വതന്ത്രകണത്തെപ്പോലെ നേർരേഖയിലൂടെ സമപ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കും.

സമവാക്യം (7.18*a*)യുടെ സദിശം (*vector*) മൂന്ന് അദിശ (*scalar*) സമവാക്യത്തിന് തുല്യമാണ്. അതായത്

$$P_x = c_1, P_y = c_2, P_z = c_3 \qquad (7.18\,b)$$

ഇവിടെ P_x, P_y, P_z എന്നിവ യഥാക്രമം *x, y, z* - അക്ഷങ്ങളിലുള്ള രേഖീയ ആക്ക (*linear momentum*) സദിശം **P** യുടെ ഘടകങ്ങളാണ്. c_1, c_2, c_3 എന്നിവ സ്ഥിരം സംഖ്യകളുമാണ്.



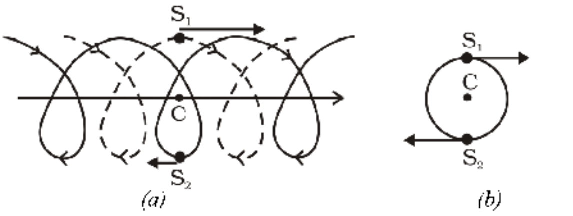
ചിത്രം. 7.13 (a) വിഭജിക്കപ്പെടുന്ന ഒരു ഘനമൂലക അണുകേന്ദ്രം -റേഡിയം (Ra), ചെറിയ അണുകേന്ദ്രമായ-റാഡോൺ (Rn) ആയും, ഒരു (He) ആൽഫാകണമായും മാറുന്ന വ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം സമചലനത്തിലാണ് (uniform motion)

(b) നിശ്ചലാവസ്ഥയിലിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രവും നിശ്ചലമായിരിക്കും. മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അണുവിഭജനം ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം നിശ്ചലമായിരിക്കുന്ന ഒരു റേഡിയം (Ra)അണുകേന്ദ്രത്തിൽ നടക്കുമ്പോൾ. ഇവിടെ രണ്ട് ഉൽപ്പന്ന അണുകേന്ദ്രങ്ങളും എതിർദിശകളിൽ അകന്നുപോകുന്നത് രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന്, ചലനാവസ്ഥയിലുള്ള റേഡിയം (*Ra*) പോലെ അസ്ഥിരമായ ഒരു ഘനമൂലകത്തിന്റെ അണുകേന്ദ്രം വിഭജിക്കപ്പെട്ട് ഒരു റാഡോൺ (*Rn*) അണുകേന്ദ്രവും ഒരു ആൽഫാകണവും (*He*) ഉണ്ടാകുന്നു. ഈ വിഘടനത്തിനു കാരണം അണുകേന്ദ്രത്തിലെ ഭൗതികസങ്കീർണതകളാണ് - അത് വേറെ പഠനശാഖയാണ്. ബാഹ്യബലങ്ങളൊന്നും അതിനകത്ത് പ്രവർത്തിക്കുന്നേയില്ല. ആണവവിഘടനം തുടങ്ങുന്നതിന് മുമ്പും ശേഷവും ആ വ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്തം രേഖീയ ആക്കം ഒന്നുതന്നെയാണ്. ആണവക്ഷയത്തിൽ നിന്നുൽഭവിക്കുന്ന രണ്ടു വ്യത്യസ്ത അണുകേന്ദ്രങ്ങളുടെയും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം സഞ്ചരിക്കുന്നത് റേഡിയം അണുകേന്ദ്രം സഞ്ചരിക്കുമായിരുന്ന അതേ സഞ്ചാരപാതയിലൂടെയായിരിക്കും (ചിത്രം 7.13 *a*).

നിശ്ചലാവസ്ഥയിലുള്ള ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രമുള്ള ഒരു റേഡിയം അണുകേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള അവലംബകത്തിലൂടെ (*Frame of reference*) വീക്ഷിച്ചാൽ ആണവവിഘടനത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കണികകൾ വിപരീതദിശയിലും അവയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം നിശ്ചലാവസ്ഥയിലും ചിത്രം 07.13 (b) യിൽ കാണിച്ചതുപോലെ തുടരുന്നതായി കാണാം.

ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ള അവലംബകങ്ങളാണ് മുകളിൽ വിവരിച്ച റേഡിയോ ആക്ടീവ് വിഘടനത്തേപ്പോലുള്ള അവസരങ്ങളിൽ കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ പരീക്ഷണശാലകളെ ആധാരമാക്കിയുള്ള അവലംബകത്തേക്കാൾ സൗകര്യപ്രദവും ഫലപ്രദവുമായി കാണപ്പെടുന്നത്.



ചിത്രം7.14.a *a*) രണ്ടു നക്ഷത്രങ്ങളുടെ സഞ്ചാരപഥങ്ങൾ. S_1 (കുത്തുവരകൾ), S_2(തെളിഞ്ഞ വര) എന്നിവ ചേർന്ന് ഒരു ദ്വന്ദ്വ വ്യവസ്ഥയുണ്ടാക്കുകയും അവയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം *C* ഏകസമാന (*uniform*) സഞ്ചാരം നടത്തുകയും ചെയ്യുന്നു.

b) അതേ ദ്വന്ദ്വവ്യവസ്ഥയിൽ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം *C* നിശ്ചലമാണെങ്കിൽ ഉള്ള സഞ്ചാര പഥം.

ജ്യോതിശാസ്ത്രത്തിൽ ദ്വന്ദ്വനക്ഷത്രങ്ങൾ (*Binary stars*) കാണപ്പെടുന്നത് സർവസാധാരണമാണ്. ബാഹ്യബലങ്ങളൊന്നും ഈ വ്യവസ്ഥയിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നില്ലെങ്കിൽ, ദ്വന്ദ്വനക്ഷത്രങ്ങളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം സ്വതന്ത്രകണത്തെപ്പോലെ സഞ്ചരിക്കുന്നു (ചിത്രം7.14*a*). തുല്യമാസുള്ള രണ്ടു നക്ഷത്രങ്ങളുടെ സഞ്ചാരപഥങ്ങളാണ്

ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. അത് സങ്കീർണമാണെന്നു തോന്നിയേക്കാം. എന്നാൽ ഒരു നിശ്ചലദ്രവ്യമാനകേന്ദ്ര അവലംബകത്തിലൂടെ സങ്കൽപിച്ചാൽ രണ്ടു നക്ഷത്രങ്ങളും വൃത്താകാരപാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നതായി കാണപ്പെടും. അപ്പോൾ ഇരു നക്ഷത്രങ്ങളുടെയും സ്ഥാനങ്ങൾ നേർക്കുനേർ വിപരീതസ്ഥാനങ്ങളിലായിരിക്കും (ചിത്രം7.14*b*). ഇവിടെയെടുത്തിട്ടുള്ള നിർദിഷ്ട അവലംബകത്തിൽ ഇരുനക്ഷത്രങ്ങളുടെയും പ്രക്ഷേപപഥം (i) ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ നേർരേഖയിലുള്ള സമചലനത്തിന്റെയും (ii) ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ചുറ്റിക്കൊണ്ടുള്ള നക്ഷത്രങ്ങളുടെ വൃത്താകാരപരിക്രമണപഥത്തിന്റെയും സംയുക്തമാണ്.

ഈ രണ്ട് ഉദാഹരണങ്ങളിൽനിന്ന് ഒരു വ്യവസ്ഥയിലെ ചലനത്തെ, ***ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ സഞ്ചാരം,*** എന്നും ***ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ചുറ്റിക്കൊണ്ടുള്ള സഞ്ചാരം*** എന്നും വേർതിരിച്ചു കാണുന്നത് ആ വ്യവസ്ഥയുടെ ചലനങ്ങളെ സംബന്ധിക്കുന്ന പഠനങ്ങളെ ഏറെ എളുപ്പമാക്കുന്നുവെന്നു കാണാൻ കഴിയും.

7.5. രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ സദിശഗുണനഫലം (Vector product of two vectors)

സദിശത്തെക്കുറിച്ചും അതിന്റെ ഭൗതികശാസ്ത്രപരമായ ഉപയോഗരീതികളെക്കുറിച്ചും നമ്മൾ ഏറെ മനസിലാക്കിക്കഴിഞ്ഞു. അധ്യായം 6 ൽ (പ്രവൃത്തി, ഊർജം, പവർ) രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ ബലവും (*Force*) സ്ഥാനാന്തരവും (*Displacement*) അദിശ (*Scalar*) ഗുണിതഫലത്തെ കുറിച്ച് വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഭൗതികത്തിലെ ഒരു പ്രധാന പരിമാണമായ പ്രവൃത്തിയെ നിർവചിക്കുന്നത് രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ അദിശഗുണിതഫലമെന്നാണ്. ഇനി ഇവിടെ വിവരിക്കാൻ പോകുന്നത് രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ മറ്റൊരുതരം ഗുണിതത്തെപ്പറ്റിയാണ്. ഇതിലെ ഗുണിതഫലം ഒരു സദിശമാണ്. പരിക്രമണചലനത്തിലുള്ള രണ്ടു പ്രധാനപ്പെട്ട അളവുകളാണ് ***ചുഴറ്റൽബലവും (moment of force) കോണീയ ആക്കവും (Angular momentum)***. ഇവ സദിശഗുണിതഫലങ്ങളായി പരിഗണിക്കുന്നു.

സദിശഗുണിതഫലത്തിന്റെ നിർവചനം (*Definition of vector product*)

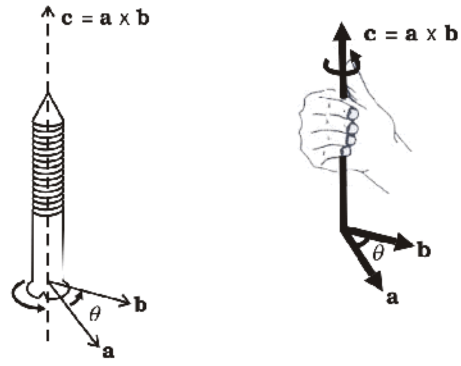
a, b എന്നിവ രണ്ടു സദിശങ്ങളാണ്. അവയുടെ ഗുണിതഫലം *c* ഒരു സദിശമായിത്തീരുന്നത് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾ അനുസരിച്ചാണ്.

(i) ***c*** യുടെ പരിമാണം $c = ab\ sin\theta$ ആയിരിക്കണം. ഇതിൽ *a,b* എന്നിവ യഥാക്രമം ***a, b*** യുടെ അളവുകളും θ എന്നത് ഈ രണ്ടു സദിശങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണളവുമാണ്.

(ii) ***a,b*** എന്നിവ നിലനിൽക്കുന്ന തലത്തിന് ലംബമാണ് ***c*** യുടെ ദിശ.

(iii) ഒരു വലംപിരി ആണിയുടെ തലഭാഗം ***a,b*** എന്നിവയുള്ള പ്രതലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുകയും അത് പ്രതലത്തിന് ലംബമായിരിക്കുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ, പിരിയാണിയെ ***a*** യിൽനിന്ന് ***b*** യിലേക്കു തിരിക്കുമ്പോൾ, അതിന്റെ അഗ്രഭാഗം മുന്നേറുന്ന ദിശയാണ് ***c*** യുടെ ദിശ.

ഈ ***വലംകൈ പിരിയാണി നിയമം (Right hand screw rule)*** ചിത്രം 7.15*a* യിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



(a) (b)

ചിത്രം 7.15 (a) രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ സദിശ ഗുണിതത്തിന്റെ ദിശ നിർണ്ണയിക്കാനായുള്ള **വലംകൈ പിരിയാണി നിയമം**

(b) സദിശ ഗുണിതഫലത്തിന്റെ ദിശ വിവരിക്കാനായുള്ള **വലതു കൈ നിയമം** (Rule of the right hand)

ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിലും പ്രസ്താവിക്കാം. ***a, b*** ഉൾക്കൊള്ളുന്ന തലത്തിനു വരച്ചിരിക്കുന്ന ലംബരേഖയിൽ നിങ്ങളുടെ വലതുകരം ഉപയോഗിച്ചു ചുറ്റിപ്പിടിച്ചിരിക്കുമ്പോൾ ചുറ്റിയിരിക്കുന്ന വിരലുകളുടെ ദിശ ***a*** യിൽ നിന്നും ***b*** യിലേക്കാണെങ്കിൽ നിവർന്നിരിക്കുന്ന തള്ളവിരലിന്റെ ദിശ ***c*** യുടേതായിരിക്കും.

രണ്ടു സദിശങ്ങളായ ***a*** യും ***b*** യും തമ്മിൽ (ഒരു വൃത്തത്തിൽ) രണ്ടു കോണളവുണ്ടാക്കുന്നുവെന്ന് നാം ഓർക്കേണ്ടതുണ്ട് (ചിത്രം 7.15(a)). ഒരു കോണളവ് θ യും മറ്റൊരു കോണളവ് $(360^\circ - \theta)$ യുമാണ്. മുകളിലത്തെ നിയമങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് പ്രയോഗിക്കാനാണ് ഉദ്ദേശിക്കുന്നതെങ്കിൽ പരിക്രമണം ചെയ്യപ്പെടുന്നതായി കാണിക്കേണ്ടത് ചെറിയ കോണളവിൽക്കൂടിയാണ് $(<180^\circ)$. അതായത് ***a*** യിൽ നിന്ന് ***b*** യിലേക്ക്. ഇവിടെ ആ കോണളവ് θ യാണ്.

സദിശഗുണിതത്തിന് ഗുണനചിഹ്നം (*Cross*) ഉപയോഗിക്കുന്നതിനാൽ അതിനെ ക്രോസ് പ്രൊഡക്ട് (*Cross product*) എന്നും പറയാറുണ്ട്.

നേരത്തെ നാം കണ്ടതുപോലെ

- രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ അദിശഗുണിതഫലം ക്രമനിയമം അനുസരിക്കുന്നു അതായത് $a \cdot b = b \cdot a$

  എന്നാൽ സദിശഗുണിതഫലം ക്രമനിയമം പാലിക്കില്ല. അതായത് $a \times b \neq b \times a$

$a \times b$ ആയാലും $b \times a$ ആയാലും ഗുണിതഫലത്തിന്റെ പരിമാണത്തിൽ മാറ്റമൊന്നുമുണ്ടാവില്ല ($ab \sin\theta$). കൂടാതെ, അവ രണ്ടും a യും b യുമുള്ള തലത്തിന് ലംബമായിട്ടുള്ളവയുമാണ്. പക്ഷേ, വലംപിരിയാണിയുടെ പരിക്രമണം $a \times b$ എന്ന കാര്യത്തിൽ a യിൽനിന്ന് b യിലേക്കാണ്. അതേസമയത്ത് $b \times a$ യുടെ കാര്യത്തിൽ പരിക്രമണം b യിൽനിന്ന് a യിലേക്കാണ്. ഇത് കാണിക്കുന്നത് ഇരുസദിശങ്ങളും പരസ്പരം വിപരീതദിശയിലായിരിക്കും എന്നാണ്. അതുകൊണ്ട്

$a \times b = -b \times a$. എന്നെഴുതാം.

- സദിശഗുണിതത്തിന്റെ മറ്റൊരു സവിശേഷത പ്രതിപതനത്തിനു വിധേയമാകുമ്പോൾ അതിന്റെ സ്വഭാവത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ളതാണ്. പ്രതിപതനത്തിൽ (ഒരു കണ്ണാടിപ്രതിബിംബം) നമുക്ക് ലഭിക്കുക $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$. എന്നിങ്ങനെയാണ്. സദിശത്തിലെ എല്ലാ ഘടകങ്ങളുടെയും ചിഹ്നം മാറിയാൽ ലഭിക്കുക $a \to -a$, $b \to -b$. അപ്പോൾ പ്രതിഫലനത്തിൽ $a \times b$ ക്ക് സംഭവിക്കുന്നതെന്താണ്?

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \to (-\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

അതായത് $a \times b$ യ്ക്ക് പ്രതിപതനത്തിൽ മാറ്റം വരുന്നില്ല.

- സദിശവും അദിശവുമായ ഗുണിതങ്ങൾ വിതരണനിയമം പാലിക്കുന്നു:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

- ഇനി $c = a \times b$ യെ ഘടകരൂപത്തിലെഴുതുവാൻ ശ്രമിക്കാം. ഇതിലേക്കായി കുറച്ചു പ്രാഥമികവസ്തുതകൾ മനസ്സിലാക്കേണ്ടതുണ്ട്.

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ (0 ഒരു ശൂന്യസദിശമാണ്. അതായത് പൂജ്യം അളവുള്ള സദിശം). $a \times a$ യുടെ അളവ് $a^2 \sin 0 = 0$ ആയതിനാലാണിത്.

ഇത് താഴെ പറയുന്ന ഫലങ്ങളിലേക്കു നയിക്കുന്നു.

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0},\quad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0},\quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$$

(ii) $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$

$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ യുടെ പരിമാണം $\sin 90^\circ$ ആണെന്ന് ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതാണ്. ഇതിനു കാരണം $\hat{\mathbf{i}}$ ക്കും $\hat{\mathbf{j}}$ ക്കും യൂണിറ്റ് പരിമാണമാണെന്നുള്ളതാണ്. കൂടാതെ അവ തമ്മിലുള്ള കോൺ 90^0 യാണ്. അതുകൊണ്ട് അത് ഒരു യൂണിറ്റ് സദിശമാണ് (*Unit vector*). ഗുണനഫലമായി കിട്ടേണ്ട യൂണിറ്റ് സദിശം $\hat{\mathbf{i}}$ യും $\hat{\mathbf{j}}$ യുമുള്ള തലത്തിന് ലംബമായിരിക്കുകയും വലംപിരിയാണിനിയമം പാലിക്കുകയും വേണം. അതുകൊണ്ട് ഇത് $\hat{\mathbf{k}}$ ആയി കിട്ടും. അതിനാലാണ് മുകളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ഫലം ലഭിച്ചിട്ടുള്ളത്. അതുപോലെ നമുക്ക് $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}$ യും $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$ യും ആയി കിട്ടും.

സദിശ ഗുണനഫലത്തിന്റെ (*cross product*) ക്രമനിയമത്തിൽ (*commutation*) നിന്നു ലഭിക്കുന്നത് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ബന്ധങ്ങളാണ്:

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}},\quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}},\quad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}$$

മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന സദിശഗുണനഫലത്തിൽ $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ എന്നിവയുടെ ബന്ധങ്ങൾ രൂപപ്പെട്ടുവന്നിട്ടുള്ളത് ചാക്രികമായാണെങ്കിൽ, സദിശഗുണിതഫലങ്ങൾ പോസിറ്റീവായിരിക്കും. അത് ചാക്രികമല്ലാതിരുന്നാൽ സദിശഗുണിതഫലങ്ങൾ നെഗറ്റീവും ആയിരിക്കും.

a, b എന്നിവയെ ഘടകരൂപത്തിലെഴുതിയാൽ

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}) \times (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}})$$
$$= a_xb_y\hat{\mathbf{k}} - a_xb_z\hat{\mathbf{j}} - a_yb_x\hat{\mathbf{k}} + a_yb_z\hat{\mathbf{i}} + a_zb_x\hat{\mathbf{j}} - a_zb_y\hat{\mathbf{i}}$$
$$= (a_yb_z - a_zb_y)\hat{\mathbf{i}} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{\mathbf{j}} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{\mathbf{k}}$$

മുകളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ബന്ധം ലഭ്യമാക്കാനായി യൂണിറ്റ് സദിശങ്ങളുടെ ഗുണിതഫലം (*cross products*) ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു. $a \times b$ എളുപ്പം ഓർമയിൽ നിലനിർത്താനായി ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റ് (Determinant) രൂപം എഴുതാവുന്നതാണ്.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

ഉദാഹരണം 7.4: $\mathbf{a} = (3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k})$ യും $\mathbf{b} = (-2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})$ യും ആയാൽ അവയുടെ സദിശങ്ങളുടെ ഗുണിതവും അദിശ ഗുണിതവും കാണുക

ഉത്തരം

അദിശ ഗുണിതം

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}) \cdot (-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$$
$$= -6 - 4 - 15$$
$$= -25$$

സദിശ ഗുണിതം

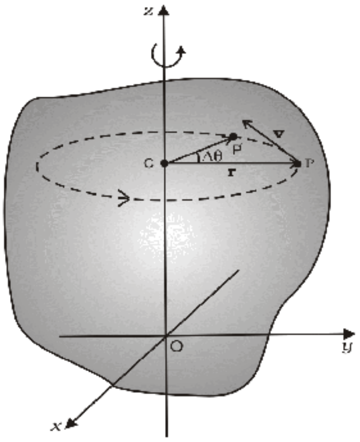
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$$

കുറിപ്പ് $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -7\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$ ◀

7.6 കോണീയപ്രവേഗവും രേഖീയപ്രവേഗവുമായി അതിനുള്ള ബന്ധവും (Angular Velocity And Its Relation With Linear Velocity)

ഈ വിഭാഗത്തിൽ നാം പഠിക്കാൻ പോകുന്നത് കോണീയ പ്രവേഗമെന്താണെന്നും പരിക്രമണചലനത്തിൽ അതിനുള്ള ധർമമെന്താണെന്നുമാണ്. ഒരു പരിക്രമണചലന വ്യവസ്ഥയിൽ എല്ലാ കണങ്ങളും വൃത്താകാരപാതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. അവയുടെ രേഖീയ പ്രവേഗം കോണീയപ്രവേഗവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. തൊട്ടുമുമ്പുള്ള ഭാഗത്തിൽ പഠിച്ചതുപോലെ ഈ രണ്ടു പരിമാണങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സദിശഗുണിതപരമാണ്.

ചിത്രം 7.4 ൽ ശ്രദ്ധിച്ചാൽ, ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ചുറ്റിക്കൊണ്ട് പരിക്രമണചലനം നടത്തുന്ന ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ എല്ലാ കണങ്ങളും വൃത്താകാരപാതയിൽ സഞ്ചരിക്കുമെന്നും, ഈ സഞ്ചാരപാത ബന്ധപ്പെട്ട അക്ഷവുമായി ലംബാവസ്ഥയിലായിരിക്കുമെന്നും മനസ്സിലാക്കാം. ചിത്രം 7.16 ൽ ചിത്രം 7.4 ന്റെ വിവരണം ആവർത്തിക്കുകയാണെങ്കിലും ഇവിടെ ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് ചുറ്റുമായി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ഒരു ദൃഢവസ്തുവിലെ ***P*** സ്ഥാനത്തുള്ള ഒരു കണത്തിന്റെ മാത്രം സഞ്ചാരപാതയായ വൃത്തമേ കാണിച്ചിട്ടുള്ളൂ. ആ കണം അക്ഷത്തിലെ (ഇവിടെ z -അക്ഷം) C എന്ന കേന്ദ്രം ആധാരമാക്കിയാണ് പരിക്രമണം നടത്തുന്നത്. ***P*** എന്ന കണത്തിൽ നിന്ന് അതിന്റെ അക്ഷകേന്ദ്രമായ C യിലേക്കുള്ള ലംബരേഖയാണ് പരിക്രമണ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം (***radius***) ***r.P*** എന്ന കണത്തിന്റെ രേഖീയ പ്രവേഗം ***v*** കൂടി ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്. ആ കണിക അക്ഷകേന്ദ്രം C ക്കു ചുറ്റുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന സഞ്ചാര വൃത്തത്തിൽ ***P*** എന്ന സ്ഥാനത്തുള്ള തൊടുവര (***Tangent***)യിലാണ് സദിശം ***v*** കിടക്കുന്നത്.



ചിത്രം 7.16 ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ (z-അക്ഷം)

ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണചലനം. **P** എന്ന കണിക **z** അക്ഷത്തിലുള്ള **C** എന്ന കേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള വൃത്തപാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നു.

Δt ഇടവേളക്കു ശേഷം, കണികയുടെ സ്ഥാനം **P** യിൽ നിന്ന് P' ൽ എത്തിയെന്നിരിക്കട്ടെ. (ചിത്രം 7.16).

കോൺ PCP', Δt സമയത്തിൽ P എന്ന കണത്തിന്റെ കോണീയ സ്ഥാനമാറ്റം $\Delta\theta$ യെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഈ ഇടവേളയിൽ ശരാശരി കോണീയപ്രവേഗം കണക്കാക്കുന്നത് $\Delta\theta/\Delta t$ എന്നാണ്. ഇടവേള Δt പൂജ്യത്തോടടുക്കുമ്പോൾ (നിസ്സാര സമയം) $\Delta\theta/\Delta t$ അനുപാതം *തൽക്ഷണ കോണീയപ്രവേഗമായി* (***instantaneous angular velocity***), $(d\theta/dt)$ മാറും. *തൽക്ഷണ കോണീയ പ്രവേഗം* രേഖപ്പെടുത്തുന്നത് ω (ഒമേഗ) എന്ന പ്രതീകം ഉപയോഗിച്ചാണ്. ഒരു പരിക്രമണചലനത്തിലെ രേഖീയപ്രവേഗത്തിന്റെ (***linear velocity***) അളവായ **v**, ആ കണികയുടെ തൽക്ഷണ കോണീയപ്രവേഗമായ ω യുമായി $v = \omega r$ എന്ന സമവാക്യത്തിലൂടെ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ r എന്നത് വൃത്തത്തിന്റെ ആരം ആണ്.

$v = \omega r$ എന്ന ബന്ധം ഒരു ദൃഢവസ്തുവിലെ എല്ലാ കണങ്ങൾക്കും ഒരുപോലെ ബാധകമാണ്. നിശ്ചല അക്ഷത്തിൽനിന്ന് ലംബിതഅകലം r_i യിലുള്ള ഒരു കണികയുടെ രേഖീയ പ്രവേഗം v_i ,

$v_i = \omega r_i$ എന്ന സമവാക്യത്തിലൂടെ കണ്ടെത്താം (7.19)

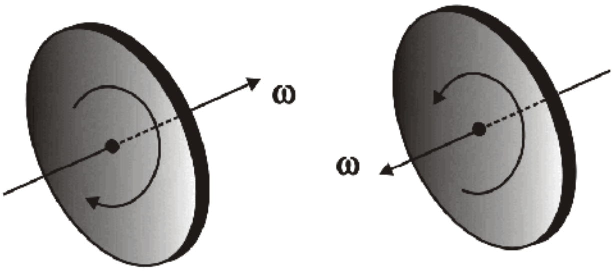
ഇവിടെ i എന്നത് ഒന്നു മുതൽ n വരെയുള്ള കണങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിൽ ഏതുമാവാം (കണങ്ങളുടെ മൊത്തം എണ്ണം n എന്നെടുക്കുന്നു).

ഒരു കണിക അക്ഷത്തിൽ തന്നെയാണെങ്കിൽ അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് അതിലേക്കുള്ള ദൂരം പൂജ്യമായിരിക്കും, അതായത് r=0. അതിനാൽ $v = \omega$, r=0. ആ കണിക നിശ്ചലമാണെന്നു വരുന്നു. അതുവഴി അക്ഷവും നിശ്ചലമാണെന്ന് ഈ ഗണിത സമവാക്യത്തിലൂടെയും ബോധ്യമാവുന്നു. കോണീയപ്രവേഗം ω എല്ലാ കണികകൾക്കും ഒന്നുതന്നെയതിനാൽ അത് മുഴുവൻ വസ്തുവിന്റെയും കോണീയ പ്രവേഗമായികണക്കാക്കാം.

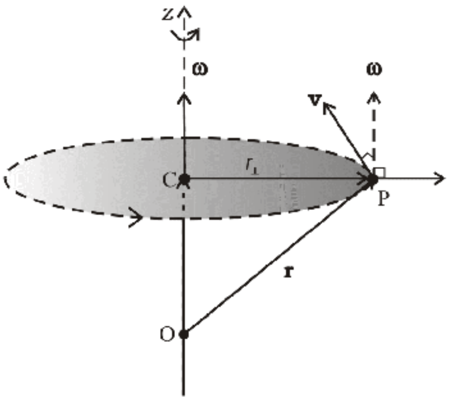
പൂർണ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിൽ ഒരു വസ്തുവിന്റെ എല്ലാ ഭാഗങ്ങൾക്കും ഏതു സമയത്തും ഒരേ പ്രവേഗമായിരിക്കുമെന്ന് നമുക്കറിയാം. അതുപോലെതന്നെ പൂർണ പരിക്രമണചലനത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ എല്ലാ കണങ്ങൾക്കും ഏത് സമയത്തും ഒരേ കോണീയ പ്രവേഗമായിരിക്കും. ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ചുറ്റിയുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണചലനത്തിന്റെ ഈ പ്രത്യേകത (7.1) വിഭാഗത്തിൽ പരാമർശിച്ചിട്ടുള്ള വസ്തുവിലെ കണികകളുടെ അക്ഷത്തിനു ലംബമായ തലത്തിലൂടെയുള്ള വൃത്തപാതയിലെ ചലനംതന്നെയാണ്.

നമ്മുടെ ചർച്ച ഇവിടെയെത്തുമ്പോഴേക്കും കോണീയ പ്രവേഗം ഒരു അദിശം (***scalar***) എന്ന കാഴ്ചപ്പാടിലേക്ക് എത്തുന്നതായി തോന്നിയേക്കാം. യഥാർഥത്തിൽ അത്

ഒരു സദിശം (***vector***) തന്നെയാണ്. ഇക്കാര്യം ഇവിടെ കൂടുതൽ വിശദീകരിക്കാൻ ഉദ്ദേശിക്കുന്നില്ലെങ്കിലും ആ കാഴ്ചപ്പാടോടുകൂടിയാണ് ഇനി മുന്നോട്ടു പോകേണ്ടത്. നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ചുറ്റിയുള്ള ഒരു പരിക്രമണത്തിൽ, കോണീയപ്രവേഗ സദിശം സറിതിചെയ്യുന്നത് പരിക്രമണാക്ഷത്തിന്മേലാണ്. അതിന്റെ ദിശ (***direction***), വലംപിരിയാണിയെ പരിക്രമണത്തിന്റെ ദിശയിൽ തിരിച്ചാൽ അതിന്റെ അഗ്രം നീങ്ങുന്ന ദിശയിലായിരിക്കും (ചിത്രം 7.17 *a*). മുമ്പു സൂചിപ്പിച്ചതുപോലെ ഈ സദിശത്തിന്റെ പരിമാണം $\omega = d\theta/dt$ എന്നാണ്.



ചിത്രം 7.17a ഒരു വലംപിരിയാണിയുടെ തലഭാഗം വസ്തുവിനൊപ്പം പരിക്രമണത്തിലാവുമ്പോൾ ആണിയുടെ അഗ്രഭാഗം മുന്നേറുന്ന ദിശയാണ് കോണീയ പ്രവേഗ (ω) ത്തിന്റെ ദിശ വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണ സ്വഭാവം ഘടികാരദിശയോ എതിർദിശയോ ആയാൽ അതിനനുസരിച്ച് ω യുടെ ദിശയും മാറും.



ചിത്രം 7.17 b കോണീയ പ്രവേഗ സദിശം ω ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തിലൂടെ ഒരു നിശ്ചിത ദിശയിലാണ്. കണിക **P** യുടെ രേഖീയ പ്രവേഗം $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$. അത് ω , **r** എന്നിവക്ക് ലംബവുമാണ്. കണികയുടെ വൃത്ത സഞ്ചാരപഥത്തിന്റെതൊടുവര (**tangent**) യിലൂടെയാണ് **v** യുടെ ദിശ.

സദിശ ഗുണിതഫലമായ $\omega \times r$ ചേർച്ച കാണിക്കുന്നത് ഏതിനോടാണെന്നു നോക്കാം. ചിത്രം *7.17 **b*** പരിശോധിച്ചാൽ *P* എന്ന കണികയുടെ വൃത്താകാരപാതയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചിത്രം 7.16 ന്റെ തന്നെ മറ്റൊരു രൂപമാണെന്ന് കാണാം. ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സദിശം ω യുടെ ദിശ നിശ്ചല അക്ഷമായ *z* ൽ കൂടിയാണെന്നും ദൃഢവസ്തുവിലെ *P* എന്ന കണത്തിന്റെ മൂലബിന്ദു *O* ആധാരമാക്കിയുള്ള സ്ഥാനസദിശം $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ യാണെന്നും കാണാം.

ഇവിടെ മൂലബിന്ദു പരിക്രമണാക്ഷത്തിൽ വരത്തക്കവണ്ണം തിരഞ്ഞെടുത്തിരിക്കുന്നുത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

അതുകൊണ്ട് $\omega \times \mathbf{r} = \omega \times \mathbf{OP} = \omega \times (\mathbf{OC} + \mathbf{CP})$ (*OC*യുടെയും *CP*യുടെയും സദിശ സങ്കലനമാണ് *OP*) $\omega \times \mathbf{OC} = 0$ (ω, **OC** യിലൂടെ ആയതിനാൽ)

$$\omega \times \mathbf{r} = \omega \times \mathbf{CP}$$

$\omega \times \mathbf{CP}$ എന്ന സദിശം ω ക്ക് ലംബമാണ്. അതായത് അക്ഷം *z* നും *P* എന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള കണം പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ആരം *CP* ക്കും ലംബമായിരിക്കും. അതിനാൽ *P* യിലൂടെ വൃത്തത്തിനു വരക്കുന്നു തൊടുവരയിലൂടെയായിരിക്കും (***tangent***) ഇതിന്റെ ദിശ. ω യും *CP* യും പരസ്പരം ലംബമായിരിക്കുന്നതിനാൽ $\omega \times CP$ യുടെ അളവ് $\omega\,(CP)$ ആണ്. അതുകൊണ്ട് *CP* യെ രേഖപ്പെടുത്താൻ *r* നു പകരം, $r_\perp$ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$\omega r_\perp$ പരിമാണമുള്ള ഒരു സദിശമാണ് $\omega \times r$. അത് *P* എന്ന കണത്തിന്റെ സഞ്ചാരവൃത്തത്തിലെ തൊടുവരയിൽക്കൂടിയുള്ളതുമാണ്. *P* യിലെ രേഖീയ പ്രവേഗസദിശമായ **v** ക്കും അതേ പരിമാണവും ദിശയുമായിരിക്കും. അങ്ങനെ,

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \tag{7.20}$$

സമവാക്യം (7.20), ഒരു അഗ്രം ഉറപ്പിച്ചിട്ടുള്ള പമ്പരം പോലുള്ള ദൃഢവസ്തുക്കളുടെ പരിക്രമണത്തിൽപ്പോലും അനുയോജ്യമാണ്. ഇവിടെ **r** പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത്, അഗ്രം ഉറപ്പിച്ച ബിന്ദു ആധാരമാക്കി എടുത്തിട്ടുള്ള സ്ഥാനസദിശ (*Position vector*) മാണ്.

ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ചുറ്റിയുള്ള പരിക്രമണത്തിൽ, സദിശമായ ω യുടെ ദിശ സമയക്രമത്തിൽ മാറ്റത്തിനു വിധേയമാവുന്നില്ല. എന്നാൽ അതിന്റെ പരിമാണത്തിൽ മാറ്റമുണ്ടായേക്കാം. സാധാരണ മിക്ക പരിക്രമണങ്ങളിലും ω യുടെ പരിമാണവും ദിശയും സമയക്രമത്തിൽ മാറുന്നതായാണ് കാണപ്പെടുന്നത്.

7.6.1 കോണീയത്വരണം (Angular Acceleration)

പരിചിതമയ സ്ഥാനാന്തര ചലനത്തിന്റെ പിൻബലത്തോടെ പരിക്രമണചലനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ആശയങ്ങൾ നാം വികസിപ്പിച്ചെടുത്തുകൊണ്ടിരിക്കുകയാണ്. സ്ഥാനാന്തര ചലനത്തിലെ രേഖീയസ്ഥാനമാറ്റം (*Linear displacement*) പ്രവേഗം തുടങ്ങിയ സദിശങ്ങൾക്ക് അനുരൂപമായി പരിക്രമണചലനത്തിൽ കോണീയസ്ഥാനമാറ്റവും (*angular displacement*) കോണീയപ്രവേഗവുമാണ് (ω) കാണുവാൻ കഴിയുന്നത്. അതുകൊണ്ടുതന്നെ, സ്ഥാനാന്തര ചലനത്തിൽ പ്രവേഗമാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ത്വരണത്തിനുപകരം പരിക്രമണചലനത്തിൽ കോണീയ ത്വരണം എന്ന ആശയവും കൊണ്ടുവരുവാൻ സാധിക്കും. കോണീയത്വരണം α നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്നത്

സമയക്രമത്തിൽ കോണീയപ്രവേഗനിരക്കിലുള്ള വ്യത്യാസം എന്നാണ്. അതിന്റെ സമവാക്യം ആണ്,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{7.21}$$

പരിക്രമണാക്ഷം നിശ്ചലമാണെങ്കിൽ, ω ദിശയും അതുകൊണ്ട് α ദിശയും സ്ഥിരമായിരിക്കും. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ മുകളിലെ സദിശസമവാക്യം ഒരു അദിശസമവാക്യത്തിലേക്കു ചുരുക്കാവുന്നതാണ്.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{7.22}$$

7.7 ടോർക്കും കോണീയ ആക്കവും (Torque and angular momentum)

ഈ ഭാഗത്തിൽ നമ്മൾ പരിചയപ്പെടുന്നത്, രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ സദിശ ഗുണിതം എന്ന നിർവചനത്തിൽ, വരുന്ന രണ്ട് ഭൗതികപരിമാണങ്ങളായ ടോർക്കും, കോണിയ ആക്കവുമാണ്. ദൃഢവസ്തുക്കളുടെ ചലനത്തിൽ ഇവയുടെ പ്രാധാന്യം പിന്നാലെ ബോധ്യപ്പെടും.

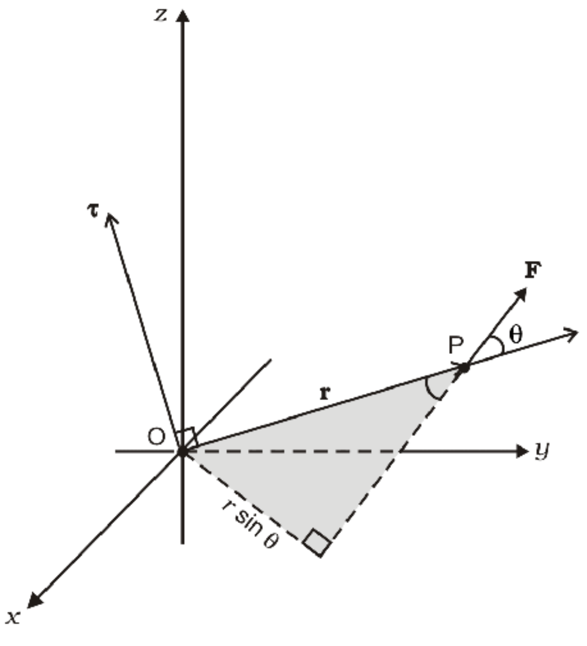
7.7.1 ബലത്തിന്റെ മൊമെന്റ് അഥവാ ടോർക്ക് [Moment of force (Torque)]

ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ ചലനത്തിലെ പൊതുവായ സവിശേഷതകളാണ് സ്ഥാനാന്തരചലനവും പരിക്രമണചലനവും; ഇവ രണ്ടും കൂടിച്ചേർന്നുള്ള ചലനാവസ്ഥയും. ഒരു വസ്തുവിനെ ഒരു സ്ഥാനത്തോ അല്ലെങ്കിൽ രേഖയിലോ ഉറപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ, അതിന് പിന്നെ പരിക്രമണചലനത്തിനുള്ള സാധ്യത മാത്രമേ ഉണ്ടാവുകയുള്ളൂ. ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിന് മാറ്റം വരുത്തണമെങ്കിൽ ഒരു ബലം ആവശ്യമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം. അതായത് അതിന് വേഗവ്യത്യാസം, അഥവാ ത്വരണമുണ്ടാവണം. ഇതുപോലെ പരിക്രമണചലനത്തെ പ്രദാനം ചെയ്യുന്നത് എന്തായിരിക്കും?

ഈ ചോദ്യത്തിനുള്ള ഉത്തരം തേടുന്നതിലേക്കായി, അടക്കുകയോ തുറക്കുകയോ ചെയ്യാവുന്ന ഒരു വാതിലിന്റെ ഉദാഹരണത്തിലേക്ക് പോകാവുന്നതാണ്. വാതിൽ എന്ന ദൃഢവസ്തു, അതിന്റെ ഒരു ഭാഗം കട്ടിളയിൽ വിജാഗിരിയാൽ ഉറപ്പിച്ചിട്ടുള്ളതും കട്ടിളയെന്ന നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി തിരിയാൻ അല്ലെങ്കിൽ പരിക്രമണത്തിന് സാധ്യമായതുമായ ഒന്നാണ്.

വാതിലിന് പരിക്രമണചലനം നടക്കണമെങ്കിൽ തീർച്ചയായും വാതിൽ നീങ്ങേണ്ട ദിശയിൽ ഒരു ബലം നൽകേണ്ടതുണ്ട്. അല്ലാത്തപക്ഷം വാതിൽ അനങ്ങുകയില്ല. പക്ഷേ, ഏതെങ്കിലും വിധത്തിൽ ഒരു ബലം നൽകിയതുകൊണ്ട് ഒരു കാര്യവുമില്ല. വിജാഗിരിയുള്ളിടത്താണ് ബലം നൽകുന്നതെങ്കിൽ വാതിൽ അനങ്ങില്ല. ഫലപ്രദമായ ഒരു പരിക്രമണ ചലനം വാതിലിൽ ഉണ്ടാക്കണമെങ്കിൽ വാതിലിന്റെ പുറം അരികിൽ വാതിലിന്റെ തലത്തിന് ലംബമായി ഒരു നിശ്ചിത അളവിൽ ബലം പ്രയോഗിക്കണം. കേവലം ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നുവെന്നതിലപ്പുറം, പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം എവിടെയാണ്, എങ്ങനെയാണ് എന്നൊക്കെയുള്ളത് പരിക്രമണചലന വിഷയത്തിൽ പ്രധാനമാണ്.

ബലത്തിന്റെ *(Force)* പരിക്രമണത്തിലെ സദൃശം *(Analogue)* ബലത്തിന്റെ മൊമന്റ് *(Moment of force)* ആണ്. ഇത് ടോർക്ക് *എന്നും ബലയുഗ്മം (couple,) എന്നുമുള്ള പേരിൽ പല സന്ദർഭങ്ങളിലും ഈ പാഠത്തിൽ വരുന്നുണ്ട്.*) ടോർക്കിന്റെ നിർവചനത്തിലേക്ക് എത്തുന്നതിനായി ഒരു കണികയുടെ ചലന സവിശേഷതകൾ മാത്രം പരിഗണിക്കാം. പിന്നീട് ഈ ആശയം കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്തം കാര്യത്തിലേക്കും ദൃഢവസ്തുവിലേക്കും അതിന്റെ പരിക്രമണചലന വ്യത്യാസങ്ങളിലേക്കും വ്യാപിപ്പിക്കും. അതുപോലെ ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ കോണീയ ത്വരണ ***(Angular acceleration)*** ത്തിലേക്കും ഇതിനെ പിന്നീട് ബന്ധിപ്പിക്കും.



ചിത്രം 7.18 *$\tau = \mathbf{r} \times F$, τ എന്നത് r ഉം F ഉം ഉള്ള തലത്തിന് ലംബമാണ്. അതിന്റെ ദിശ വലംപിരിയാണി നിയമത്തിന് അനുസൃതമാണ്.*

മൂലബിന്ദു *(origin)* ***'O'*** ആധാരമാക്കി **r** എന്ന സ്ഥാന സദിശമുള്ള *(position vector)* ***P*** എന്ന ബിന്ദുവിലിരിക്കുന്ന സ്വതന്ത്രകണത്തിന്മേൽ ഒരു ബലം പ്രയോഗിച്ചാൽ ആ കണത്തെ സ്വാധീനിക്കുന്ന ടോർക്ക് *(moment of force)* ഒരു സദിശ ഗുണിതമായി നിർവചിക്കാം.

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (7.23)$$

ടോർക്ക് ***(moment of force)*** ഒരു സദിശ പരിമാണമാണ്. അതിന്റെ പ്രതീകം ഗ്രീക്ക് ലിപിയിലുള്ള τ (ടൗ) ആണ്. അതിന്റെ പരിമാണം താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$\tau = r\,F \sin\theta \qquad (7.24a)$$

ഇതിൽ r എന്നത് സ്ഥാനസദിശമായ **r** ന്റെ പരിമാണമാണ്. അതായത് OP യുടെ നീളം. ബലമായ **F** ന്റെ പരിമാണമാണ് F. **r** ഉം **F** ഉം തമ്മിലുള്ള കോണളവ് θ

ടോർക്കിന്റെ ഡൈമെൻഷൻ ***(Dimension)*** $M L^2 T^{-2}$ ആണ്. ഇത് *പ്രവൃത്തി (work), ഊർജം (energy)* എന്നിവയുടെ ഡൈമെൻഷനു സമാനമാണ്. എന്നാൽ അത് പ്രവൃത്തി എന്ന ഭൗതികപരിമാണത്തിൽനിന്ന് എത്രയോ വ്യത്യാസപ്പെട്ടതാണ്. ടോർക്ക് ഒരു സദിശവും പ്രവൃത്തി അദിശവുമാണെന്നത് ഒരു പ്രധാന വ്യത്യാസമാണ്. **SI** യൂണിറ്റിൽ ടോർക്ക് കുറിക്കുന്നത് ന്യൂട്ടൺ മീറ്ററിലാണ് **(Nm)** ടോർക്കിന്റെ അളവുകൾ കണക്കാക്കുന്നത് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന പ്രകാരവുമാണ്.

$$\tau = (r \sin\theta)F = r_{\perp}F \qquad (7.24b)$$

$$\text{അല്ലെങ്കിൽ} \quad \tau = r\,F \sin\theta = rF_{\perp} \qquad (7.24c)$$

ഇതിൽ $r_{\perp} = r \sin\theta$ എന്നത് മൂലബിന്ദുവിൽനിന്ന് ബലം **F** പ്രവർത്തിക്കുന്ന രേഖയിലേക്കുള്ള അകലം കുറിക്കുന്ന ലംബരേഖയും $F_{\perp}$ (= $F\sin\theta$) എന്നത് **r** ന് ലംബദിശയിലുള്ള **F**ന്റെ ഘടകവുമാണ്. ഇതിൽ $r = 0$, $F = 0$ ആയാൽ $\tau = 0$ ആയിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ $\theta = 0$ അഥവാ 180°. അപ്പോൾ ടോർക്ക് ഇല്ലാതാവണമെങ്കിൽ ബലങ്ങളുടെ സാന്നിദ്ധ്യം പൂജ്യമാവുകയോ ബലത്തിന്റെ പ്രവർത്തനരേഖ മൂലബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുകയോ ചെയ്യണം.

r x F ഒരു സദിശഗുണിതം ആയതിനാൽ രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ സദിശഗുണിതത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ അതിനു ബാധകമാണ്. ഇനി, **F** ന്റെ ദിശ നേരെ വിപരീതമാവുകയാണെങ്കിൽ, ടോർക്കിന്റേത് എതിർദിശയായിരിക്കും. എന്നാൽ, **r** ന്റെയും **F** ന്റെയും ദിശകൾ വിപരീതങ്ങളാകുമ്പോൾ, ടോർക്കിന്റെ ദിശ അതേപോലെ തുടരുന്നു.

7.7.2. ഒരു കണികയുടെ കോണീയ ആക്കം (Angular momentum of a particle)

ബലത്തിന്റെ ***(Force)*** സദൃശ ***(Analogue)*** മായി ടോർക്കിനെ കാണുമ്പോൾ, രേഖീയ ആക്കത്തിനുള്ള ***(Linear momentum)*** പരിക്രമണത്തിലെ സദൃശമായി കോണീയ ആക്ക ***(angular momentum)*** ത്തെയും നമുക്ക് കാണേണ്ടതാണ്. ആദ്യം ഒരു സ്വതന്ത്രകണികയുടെ കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ നിർവചനം എന്താണെന്നു നോക്കാം. ഒരു കണികയുടെ ചലനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് ഈ നിർവചനത്തിന്റെ ഉപയോഗസാധ്യതകളെക്കുറിച്ച് ആലോചിക്കാം. പിന്നീട് ഈ നിർവ്വചനത്തെ കണികാവ്യവസ്ഥയിലേക്കും ദൃഢവസ്തുക്കൾ ഉൾപ്പെടെയുള്ളവയുടെ ചലനങ്ങളിലേക്കും വിപുലപ്പെടുത്താം.

ടോർക്കിനെപ്പോലെ ബലത്തിന്റെ മൊമന്റ് ***(Moment of force)*** ഒരു സദിശഗുണിതമാണ്. ഇതിനെ ആക്കത്തിന്റെ മൊമന്റായും സൂചിപ്പിക്കാറുണ്ട്. ഈ വസ്തുതയിൽ നിന്നുതന്നെ കോണീയ ആക്കത്തെ നിർവചിക്കേണ്ടതെങ്ങിനെയെന്ന് സങ്കൽപിക്കാവുന്നതാണ്.

മൂലബിന്ദു ***(origin)*** O യെ ആധാരമാക്കി ***r*** സ്ഥാന സദിശ ***p*** രേഖീയ ആക്കവും m മാസുമുള്ള ഒരു കണത്തെ സങ്കൽപിക്കുക. O എന്ന മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഈ കണത്തിന്റെ കോണീയ ആക്കം **l** താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നവിധം നിർവചിക്കാനാവും.

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad (7.25a)$$

കോണീയ ആക്കസദിശത്തിന്റെ പരിമാണം താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$l = r\,p \sin\theta \qquad (7.26a)$$

ഇതിൽ p എന്നത് **p** യുടെ പരിമാണവും θ. എന്നത് ***r*** ന്റെയും ***p*** യുടെയും ഇടയിലുള്ള കോണളവുമാണ്. ഇത് താഴെ കാണിച്ച വിധം എഴുതാവുന്നതാണ്

$$l = r\,p_{\perp} \quad \text{അഥവാ} \quad r_{\perp}p \qquad (7.26b)$$

ഇതിൽ $r_{\perp}$ (= $P \sin\theta$) എന്നത് കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു **p** യുടെ ദിശാസൂചകരേഖയുടെ ലംബിത അകലവും, $P_{\perp}$ (= $P \sin\theta$) എന്നത് **r** ന് ലംബദിശയിലുള്ള **p** യുടെ ഒരു ഘടകവുമാണ്. രേഖീയ ആക്കം ഇല്ലാതാവുകയോ ($P=0$), കണിക കേന്ദ്രത്തിൽ ആയിരിക്കുകയോ ($r = 0$) അല്ലെങ്കിൽ **p** യുടെ ദിശാസൂചകരേഖ മൂല ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുകയോ ($\theta = 0^{\circ}$ അഥവാ 180°) ചെയ്യുമ്പോൾ കോണീയ ആക്കം പൂജ്യമാകും.

ഭൗതികപരിമാണങ്ങളായ ബലത്തിന്റെ മൊമന്റും (***moment of a force***) കോണീയ ആക്കവും (***angular momentum***) തമ്മിൽ വളരെ പ്രധാന്യമേറിയ ഒരു ബന്ധമുണ്ട്. ബലത്തിന്റെയും (*force*) രേഖീയ ആക്കത്തിന്റെയും (*linear momuntum*) പരസ്പരബന്ധത്തിന് സമാനമായ പരിക്രമണചലനത്തിലെ സാദൃശ്യമാണിത്. ഒരു കണികയുടെ കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ നിർവചനത്തിനായി സമയത്തിനാധാരമായി **l = r x p** യെ അവകലനം ചെയ്താൽ മതി

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

അവകലനത്തിനുള്ള ഗുണനഫലനിയമം ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുഭാഗത്ത് പ്രയോഗിച്ചാൽ,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

കണികയുടെ പ്രവേഗം v dr/dt യും $\mathbf{p}$ $m\mathbf{v}$ ആണ്. അതിനാൽ $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\ \mathbf{v} = 0$,

(രണ്ടു സമാന്തര സദിശങ്ങളുടെ സദിശഗുണിതം പൂജ്യമാകുന്നതിനാൽ). $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$, ആയതിനാൽ,

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}$$

അതിനാൽ $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\tau}$

അല്ലെങ്കിൽ $$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \qquad (7.27)$$

അങ്ങനെ, സമയക്രമത്തിൽ ഒരു കണികയുടെ കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ നിരക്കിൽ വരുന്ന വ്യത്യാസം കണത്തിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന കോണീയ ആക്കത്തിന് തുല്യമാണ്. ഒരു സ്വതന്ത്രകണികയുടെ സറാനാന്തര ചലനത്തിനുള്ള ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം നിയമത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നയിത് $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിക്രമണ സദൃശമാണ്.

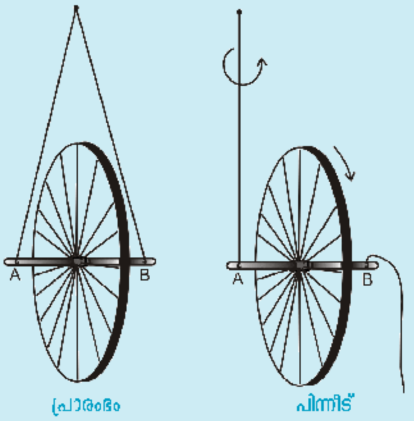
ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയ്ക്കുള്ള ടോർക്കും കോണീയ ആക്കവും (Torque and angular momentum for a system of particles)

ഒരു ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ആകെ കോണീയ ആക്കം ലഭിക്കുന്നതിന് ഓരോ കണത്തിന്റെയും കോണീയ ആക്കങ്ങൾ സദിശപരമായി കൂട്ടിയെടുത്താൽ മതി. n എണ്ണം കണങ്ങളുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയിലിത് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \ldots + \mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{l}_i$$

$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ എന്നത് കണിക i യുടെ കോണീയ ആക്കം ആണ്. ഇതിൽ $\mathbf{r}_i$ എന്നത് തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള i എന്ന കണികയുടെ സ്ഥാനസദിശമാണ് (*position vector*). $\mathbf{p}_i$ $(m_i\mathbf{v}_i)$ എന്നതാകട്ടെ, ആ കണത്തിന്റെ രേഖീയ ആക്കവുമാണ് (*കണത്തിന് m_i മാസും v_i പ്രവേഗമുണ്ട്*). ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയിലെ ആകെ കോണീയ ആക്കത്തെ ഇനി താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാനാകും.

ഒരു സൈക്കിൾ റിം ഉപയോഗിച്ചുള്ള പരീക്ഷണം



സൈക്കിൾ റിം എടുത്ത് അതിന്റെ അക്ഷം ഇരുവശത്തേക്കും നീട്ടുക. നീട്ടിയ അക്ഷത്തിന്റെ രണ്ട് അറ്റങ്ങളിലും ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ രണ്ടു ചരടു കെട്ടുക. രണ്ടു ചരടു ഒരു കൈകൊണ്ട് ചേർത്തു പിടിച്ച് റിം ലംബമായി നിർത്തുക. ഒരു ചരടുമാത്രം പിടിച്ച് മറ്റേ ചരട് വിടുമ്പോൾ ലംബ നിലയിലുള്ള റിം മറിഞ്ഞു വീഴുന്നു. രണ്ടു ചരടു ഒരു കൈകൊണ്ട് പിടിച്ച് മറ്റേ കൈകൊണ്ട് റിം ശക്തമായി കറക്കുക. റിം നല്ല വേഗത്തിൽ കറങ്ങിക്കൊണ്ടിരിക്കുമ്പോൾ B എന്ന സ്ഥാനത്തുള്ള ചരട് വിടുമ്പോൾ എന്തു സംഭവിക്കുന്നുവെന്ന് നിരീക്ഷിക്കുക.

റിം ലംബനിലയിൽ കറക്കം തുടരുന്നു. അതോടൊപ്പം നിങ്ങൾ പിടിച്ചിരിക്കുന്ന A ചരടിന് ചുറ്റുമെന്ന പോലെ റിം തിരിയുന്ന തലം കറങ്ങുന്നു. അതായത് റിമ്മിന്റെ അക്ഷം ചരട് A യെ ആധാരമാക്കി പുരസ്സരണം നടത്തുന്നു. (precesses) അല്ലെങ്കിൽ കോണീയ ആക്കം പുരസ്സരണം ചെയ്യുന്നുവെന്നു പറയാം. ഇവിടെ കറങ്ങുന്ന റിം ഒരു കോണീയ ആക്കം ഉണ്ടാക്കുന്നുണ്ട്. A ചരടിന്മേൽ റിം കറങ്ങിക്കൊണ്ടിരിക്കുമ്പോൾ ഒരു ടോർക്ക് ഉടലെടുക്കുന്നു. ടോർക്ക് എന്താണെന്നും അതിന്റെ ദിശ എന്താണെന്നും കണ്ടെത്തുക. കോണീയ ആക്കത്തിന്മേൽ (angular momentum) വരുന്ന ടോർക്കിന്റെ സ്വാധീനത്താൽ കോണീയ ആക്കം, ടോർക്കിനും കോണീയ ആക്കത്തിനും ലംബമായ ദിശയിലുള്ള ഒരു അക്ഷത്തിനെ ആധാരമാക്കി പുരസ്സരണത്തിനു വിധേയമാവും. ഈ പ്രസ്താവനകളെല്ലാം തെളിയിക്കുവാൻ ശ്രമിക്കുക.

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad (7.25b)$$

ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ കോണീയ ആക്കം തരുന്ന സമവാക്യം (7.25 *b*) ഒരു കണികയുടെ കോണീയ ആക്കം നൽകുന്ന സമവാക്യം (7.26 *a*) യുടെ സാമാന്യവൽക്കരണമാണ്. സമവാക്യം (7.23 *a*) ഉം (7.25 *b*) യും ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \mathbf{l}_i\right) = \sum_i \frac{d\mathbf{l}_i}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i \qquad (7.28a)$$

ഇതിൽ τ_i എന്നത് i എന്ന കണികയിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ടോർക്കാണ്.

$$\tau_i = \mathbf{r}_i \times F_i$$

i എന്ന കണികയിൻ മേലുള്ള ബലം F_i എന്നത്, ആ കണികക്കു മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ആകെ ബാഹ്യബലങ്ങളുടെ തുകയായ F_i^{ext} ന്റെയും ആ വ്യവസ്ഥയിലെ മറ്റു കണികകൾ i എന്ന കണികയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ആന്തരികബലങ്ങളുടെ തുക F_i^{int} ന്റെയും സദിശ തുകയാണ്. അതുകൊണ്ട് ആകെ ടോർക്കിന് കാരണമാകുന്ന ബാഹ്യബലത്തെയും ആന്തരികബലത്തെയും വേർതിരിച്ച് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന വിധം എഴുതാവുന്നതാണ്.

$$\tau = \sum_i \tau_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

$$\tau = \tau_{ext} + \tau_{int},$$

ഇതിൽ $\tau_{ext} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}$ -ഉം

$\tau_{int} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{int}$ -ഉം ആണ്.

ഇവിടെ നമ്മൾ അനുമാനിക്കേണ്ടത് ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമപ്രകാരമുള്ള 'ഒരു വ്യവസ്ഥയിലെ രണ്ടു കണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബലം തുല്യവും വിപരീതവുമായിരിക്കു'മെന്ന് മാത്രമല്ല, ഈ 'രണ്ടു ബലങ്ങളും പ്രവർത്തിക്കുന്നത് രണ്ടു കണങ്ങളെയും യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയിൽ കൂടി ആയിരിക്കും' എന്നതുകൂടിയാണ്. ഇങ്ങനെ എടുക്കുമ്പോൾ ഇവിടെ ടോർക്കിന്റെ സമവാക്യത്തിൽ കാണപ്പെട്ട ആന്തരികബലങ്ങളുണ്ടാക്കുന്ന ടോർക്ക് പൂജ്യമായിരിക്കുമെന്നു കാണാം. അതായത് $\tau_{int} = 0$. അതിനാൽ, വ്യവസ്ഥയിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ടോർക്ക് ബാഹ്യ ടോർക്കുകളുടെ ആകെത്തുക മാത്രമായിത്തീരുകയും ചെയ്യുന്നു.

$\tau = \tau_{ext}$

$\tau = \Sigma\tau_i$ ആയതിനാൽ, അത് സമവാക്യം (7.28 a) പ്രകാരം

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \tau_{ext} \qquad (7.28\ b)$$

അതിനാൽ, **ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ആകെ കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ** (*angular momentum*) സമയാശ്രിത **നിരക്ക്** (*ഇവിടെ അവലംബകം മൂലബിന്ദുവായി എടുത്തിരിക്കുന്നു*) **വ്യവസ്ഥയിലെ അതേ ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യ ടോർക്കുകളുടെ തുകക്ക് തുല്യമായിരിക്കും.** ടോർക്കുകൾക്ക് ഹേതുവായിട്ടുള്ളത് ബാഹ്യബലങ്ങൾ മാത്രമായിരിക്കുമെന്ന് നേരത്തെ മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ഒരു വ്യവസ്ഥക്കുള്ളിലെ ഒരു കണികയുടെ കാര്യത്തിൽ പരാമർശിക്കപ്പെട്ട സമവാക്യം (7.23) ന്റെ തന്നെ ഒരു പൊതു ആവിഷ്കാരമാണ് സമവാക്യം (7.28 b). നമുക്ക് പരിഗണിക്കാൻ കേവലം ഒരു കണിക മാത്രമേയുള്ളുവെങ്കിൽ അതിൽ ആന്തരികബലമോ അവയുണ്ടാക്കുന്ന ടോർക്കുകളോ ഒന്നുംതന്നെ ഉണ്ടാവില്ല. സമവാക്യം (7.28 b) താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിക്രമണ സദൃശമാണ്.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \qquad (7.17)$$

സമവാക്യങ്ങളായ (7.17) ഉം (7.28 b) ഉം എല്ലാ കണികാവ്യവസ്ഥകൾക്കും സ്വീകാര്യമായതാണ്. എല്ലാത്തരം ആന്തരികചലനങ്ങളോടും കൂടിയ ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ കാര്യത്തിലായാലും ബാധകമാണ്.

കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ സംരക്ഷണം (Conservation of Angular Momentum)

$\tau_{ext} = 0$ ആകുമ്പോൾ സമവാക്യം 7.28 b താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ചുരുങ്ങുന്നു.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

അല്ലെങ്കിൽ $\mathbf{L}$ = ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ (7.29a)

ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ആകെ ബാഹ്യടോർക്ക് (*external torque*) പൂജ്യമാവുന്നിടത്ത് ആ വ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്തം കോണീയ ആക്കം സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നുവെന്നോ അല്ലെങ്കിൽ സ്ഥിരതയുള്ളതായിരിക്കും എന്നോ പറയാം. സമവാക്യം (7.29 a) മൂന്നു അദിശസമവാക്യങ്ങൾക്കു സമാനമാണ്.

$$L_x = K_1,\ L_y = K_2,\ L_z = K_3 \qquad (7.29\ b)$$

ഇവിടെ K_1, K_2, K_3 എന്നിവ സ്ഥിരസംഖ്യകളാണ്. L_x, L_y, L_z എന്നിവ യഥാക്രമം x,y,z അക്ഷങ്ങളിലെ കോണീയ ആക്ക സദിശം (*Angular momentum vector*) $\mathbf{L}$ ന്റെ ഘടകങ്ങളുമാണ്. കോണീയ ആക്കം സംരക്ഷിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നുവെന്നതുകൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത് ഈ മൂന്നു ഘടകങ്ങളും സംരക്ഷിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു, അല്ലെങ്കിൽ സ്ഥിരതയിൽ തുടരുന്നുവെന്നാണ്.

സമവാക്യം (7.29 a) എന്നത് സമവാക്യം (7.18 a)ന്റെ പരിക്രമണസദൃശമാണെന്നു പറയാം. അതായത് ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥക്കുള്ള ആകെ രേഖീയ ആക്കത്തിന്റെ സംരക്ഷണനിയമമാണത്. സമവാക്യം (7.18 a) പോലെ ത്തന്നെ ഈ സമവാക്യവും നിരവധി സന്ദർഭങ്ങളിൽ പ്രായോഗികപ്രാധാന്യമുള്ളതായി കണ്ടുവരുന്നു. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ചിലത് ഈ അധ്യായത്തിൽ പിന്നീട് കാണാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 7.5: മൂലബിന്ദുവിനെ (*origin*) അവലംബിച്ചുള്ള $7\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$ എന്ന ബലത്തിന്റെ ടോർക്ക് കണ്ടെത്തുക. ബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് സ്ഥാന സദിശം (*position vector*) $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ഉള്ള ഒരു കണത്തിന്മേലാണ്.

ഉത്തരം: ഇവിടെ $\mathbf{r}=\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$

$$\mathbf{F}=7\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}-5\hat{\mathbf{k}}\ .$$

ടോർക്ക് കണ്ടെത്താനുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റ് സമവാക്യം $\tau = \mathbf{r} \times F$ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ

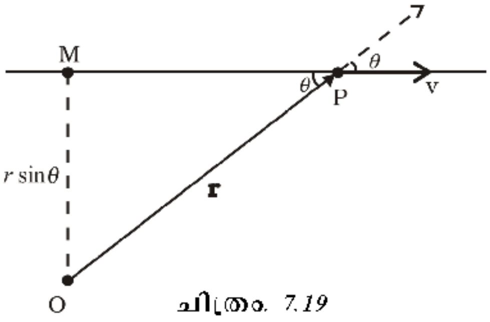
$$\tau=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ 1 & -1 & 1\\ 7 & 3 & -5\end{vmatrix}=(5-3)\hat{\mathbf{i}}-(-5-7)\hat{\mathbf{j}}+(3-(-7))\hat{\mathbf{k}}$$

അല്ലെങ്കിൽ $\tau=2\hat{\mathbf{i}}+12\hat{\mathbf{j}}+10\hat{\mathbf{k}}$ ◀

ഉദാഹരണം 7.6: സ്ഥിരപ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു സ്വതന്ത്രകണികയുടെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള കോണീയ ആക്കം ചലനത്തിലുടനീളം സ്ഥിരമായിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഉത്തരം:

t സമയത്ത് **v** എന്ന സ്ഥിരപ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന കണം *P* എന്ന ബിന്ദുവിലാണെന്നിരിക്കട്ടെ. *O* എന്ന സാങ്കൽപ്പികബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി (*t*) സമയത്തുള്ള കോണീയ ആക്കമാണ് കണ്ടെത്തേണ്ടത്.



ചിത്രം. 7.19

കോണീയ ആക്കം $\mathbf{l}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}$ അതിന്റെ പരിമാണം *mvr* sin *θ* ആണ്. ഇതിൽ *θ* എന്നത് **r** നും **v** യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോണളവാണ് (ചിത്രം 7.19). കണത്തിന്റെ സ്ഥാനം സമയക്രമത്തിൽ മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നുണ്ടെങ്കിലും **v** യുടെ ദിശാരേഖ സ്ഥിരമായി തുടരുന്നതിനാൽ $OM = r\sin\theta$ ആയിരിക്കും. അത് ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയാണ്. **l** ന്റെ ദിശ **r** ഉം **v** യും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന തലത്തിന് ലംബമാണ്. അത് ഈ പുസ്തകത്താളിലെ ചിത്രത്തിന്റെ തലത്തിന് ലംബമാണ്. അതിന്റെ ദിശയും സമയക്രമത്തിൽ മാറുന്നില്ല.

അങ്ങനെ **l** പരിമാണപരമായും ദിശാപരമായും ഒരുപോലെ തുടരുന്നതിനാൽ സംരക്ഷിതമാണെന്നു പറയാം. ഈ കണത്തിനുമേൽ ഏതെങ്കിലും ബാഹ്യടോർക്ക് (external torque) പ്രവർത്തിക്കുന്നുണ്ടോ? ◀

ഉത്തരം കണ്ടെത്തുവാൻ ശ്രമിക്കൂ.

7.8 ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ സന്തുലനാവസ്ഥ (Equilibrium of a Rigid Body)

കണികാവ്യവസ്ഥകളുടെ പൊതുചലന സവിശേഷതകളേക്കാളുപരിയായി, ദൃഢവസ്തുക്കളുടെ ചലനവ്യവസ്ഥകൾ സംബന്ധിച്ച കൂടുതൽ കാര്യങ്ങൾ വിശകലനം ചെയ്യാം.

ദൃഢവസ്തുക്കൾക്കുമേൽ ബാഹ്യബലങ്ങൾ ചെലുത്തുന്ന സ്വാധീനങ്ങളെപ്പറ്റി ഒന്നുകൂടി നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം. (*ഇനിമുതൽ 'ബാഹ്യ' എന്നുള്ള വിശേഷണം ഒഴിവാക്കിക്കൊണ്ട് ബലം എന്നു മാത്രമേ സൂചിപ്പിക്കുന്നുള്ളൂ, കാരണം ഇനിയുള്ള ഭാഗങ്ങളിൽ പരാമർശിക്കുന്നത് ബാഹ്യബലത്തേയും ടോർക്കിനേയും കുറിച്ചുമാത്രമാണ്*) ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തര (*translational*) ചലനാവസ്ഥകളിൽ ബലങ്ങൾ മാറ്റങ്ങളുണ്ടാക്കുന്നു. സമവാക്യം (7.17) പ്രകാരം അവ വസ്തുവിന്റെ മൊത്തം രേഖീയ ആക്കത്തിൽ മാറ്റങ്ങൾക്ക് കാരണമാകുന്നു. വസ്തുക്കളിൽ ബലങ്ങളുടെ സ്വാധീനങ്ങൾ ഇതുമാത്രമാണെന്ന് കരുതുന്നത് ശരിയാവില്ല. വസ്തുവിന്മേൽ ആകെയുള്ള ടോർക്ക് എല്ലായ്പ്പോഴും പൂജ്യം ആകണമെന്ന് നിർബന്ധമില്ല. അത്തരം ടോർക്ക് ദൃഢവസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണ ചലനാവസ്ഥക്ക് കാതലായ മാറ്റങ്ങളുണ്ടാക്കുന്നവയാണ്, അതായത് സമവാക്യം (7.28 *b*) പ്രകാരം അത് വസ്തുവിന്റെ കോണീയ ആക്കത്തിന്മേൽ വ്യതിയാനങ്ങളുണ്ടാക്കാൻ പ്രാപ്തമായതാണ്.

ഒരു ദൃഢവസ്തു യാന്ത്രിക സംതുലന (*mechanical equilibrium*) ത്തിലാവുന്നത്, അതിന്റെ രേഖീയ ആക്കവും കോണീയ ആക്കവും സമയത്തിനൊത്ത് മാറാതിരിക്കുമ്പോഴാണ്. അഥവാ വസ്തുവിന് രേഖീയത്വരണമോ (*linear acceleration*) കോണീയത്വരണമോ (*angular acceleration*) ഉണ്ടാവാത്ത അവസ്ഥയിലാണ്. ഇതിനർത്ഥം:

(1) ഒരു ദൃഢ വസ്തുവിന്മേലുള്ള ആകെ ബലം, അതായത് സദിശ ബലങ്ങളുടെ തുക പൂജ്യമായിരിക്കും

$$\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\ldots+\mathbf{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i=\mathbf{0} \qquad (7.30a)$$

വസ്തുവിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ആകെ ബലം പൂജ്യമാവുമ്പോൾ, വസ്തുവിന്റെ രേഖീയ ആക്കത്തിന് മാറ്റം വരുന്നില്ല. അതായത് സമവാക്യം (7.30*a*), വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനത്തിനുള്ള നിബന്ധനയാണ്.

(2) ആകെ ടോർക്ക് (അതായത് ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ ടോർക്കുകളുടെ സദിശസങ്കലനം), പൂജ്യമാവുമ്പോൾ,

$$\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i = 0 \qquad (7.30b)$$

വസ്തുവിന്മേലുള്ള ടോർക്കിന്റെ ആകെ തുക പൂജ്യമാണെങ്കിൽ, വസ്തുവിന്റെ കോണീയ ആക്കം സമയക്രമത്തിൽ മാറ്റത്തിനു വിധേയമാകുന്നില്ല. സമവാക്യം (7.30 *b*) യിലൂടെ ലഭ്യമാകുന്നത് വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണ സംതുലനാവസ്ഥയുടെ നിബന്ധനയാണ്.

ടോർക്ക് നിർവചിക്കാൻ ആധാരമായെടുത്ത മൂലബിന്ദു (*origin*) മാറ്റുകയാണെങ്കിൽ സമവാക്യം (7.30 *b*) പ്രകാരമുള്ള പരിക്രമണ സന്തുലനാവസ്ഥയിൽ വസ്തു തുടരുമോ എന്ന ചോദ്യം സ്വാഭാവികമായും ഉയർന്നു വരാവുന്നതാണ്. ഒരു ദൃഢവസ്തുവിൽ സമവാക്യം (7.30 *a*) പ്രകാരമുള്ള സ്ഥാനാന്തര സന്തുലനാവസ്ഥ നിലനിൽക്കുന്നുവെങ്കിൽ, മൂലബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനമാറ്റം കൊണ്ട് മാറ്റം സംഭവിക്കില്ല. അതായത് ടോർക്കിന് ആധാരമായി എടുത്ത ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനത്തെ അപേക്ഷിച്ച് പരിക്രമണ സംതുലനാവസ്ഥ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല. ഒരു ബലയുഗ്മത്തിന്റെ (*couple*) സവിശേഷമായ ഉദാഹരണത്തിലൂടെ (ഉദാ- 7.7) ഈ ഫലം തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ട്. സ്ഥാനാന്തര സന്തുലനത്തിലുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തുവിൽ രണ്ടു ബലങ്ങൾ പ്രയോഗിക്കുന്നതിനെപ്പറ്റിയാണത്. ഇത്തരം അനേകം ബലങ്ങൾ പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ എങ്ങനെയാണ് ഈ നിബന്ധനകൾ പാലിക്കപ്പെടേണ്ടത് എന്നത് പരിശീലനപ്രശ്നമായി എടുത്തുകൊണ്ട് നിങ്ങൾക്ക് ചെയ്തുനോക്കാം.

സമവാക്യങ്ങൾ (7.30 *a*) ഉം സമവാക്യം (7.30 b) യും സദിശങ്ങളാണ്. അവ ഒരോന്നും മൂന്നു വീതം അദിശ സമവാക്യങ്ങളാക്കി മാറ്റാൻ കഴിയും. സമവാക്യം (7.30 a) താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾക്ക് സമാനമാണ്.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \,,\; \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \;\; \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \qquad (7.31a)$$

ഇവിടെ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} എന്നിവ $\mathbf{F}_i$ ബലങ്ങളുടെ x, y, z ഘടകങ്ങളാണ്. അതുപോലെ സമവാക്യം (7.30 b) യും മൂന്നു അദിശ സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാൻ കഴിയും.

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_{ix} = 0 \,,\; \sum_{i=1}^{n} \tau_{iy} = 0 \,,\; \sum_{i=1}^{n} \tau_{iz} = 0 \qquad (7.31b)$$

ഇതിൽ τ_{ix}, τ_{iy}, τ_{iz} എന്നിവ യഥാക്രമം ടോർക്ക് (torque) τ_i യുടെ x, y, z ഘടകങ്ങളാണ്.

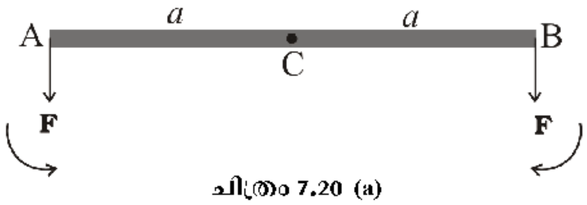
ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ യാന്ത്രികസന്തുലനാവസ്ഥക്കായി സമവാക്യങ്ങൾ (7.31 a) യും (7.31 b) യും സ്വതന്ത്രമായ ആറു നിബന്ധനകൾ തരുന്നു. ഒട്ടുമിക്ക സാഹചര്യങ്ങളിലും വസ്തുവിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലങ്ങളെല്ലാംതന്നെ ഒരേ തലത്തിലുള്ളതായിരിക്കും (coplanar). ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ യാന്ത്രിക സന്തുലനാവസ്ഥ സാധ്യമാകാൻ ഇതിൽ മൂന്നു നിബന്ധനകൾ മാത്രം പാലിച്ചാൽ മതി. ഇതിൽ രണ്ടെണ്ണം സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനം സംബന്ധിച്ചുള്ളതാണ്; തന്നിരിക്കുന്ന തലത്തിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ലംബഅക്ഷങ്ങളിലൂടെയുള്ള ബലഘടകങ്ങളുടെ തുക പൂജ്യമായിരിക്കണം. മൂന്നാമത്തെ നിബന്ധന പരിക്രമണസന്തുലനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടതാണ്; ബലം പ്രവർത്തിക്കുന്ന തലത്തിനു ലംബമായി വരുന്ന ഏതെങ്കിലും അക്ഷത്തിലൂടെയുള്ള ടോർക്കുഘടകങ്ങളുടെ തുക പൂജ്യമായിരിക്കണം.

മുൻ അധ്യായങ്ങളിൽ നാം പരിഗണിച്ച, ഒരു കണികയുടെ സന്തുലനാവസ്ഥയുടെ നിബന്ധനകളെ, ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ നിബന്ധനകളുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്. ഒരു കണത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ പരിക്രമണചലനത്തിന്റെ സാഹചര്യം പരിഗണിക്കേണ്ടതല്ലാത്തതിനാൽ, സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനത്തിനുള്ള നിബന്ധനകൾ (7.30 a) മാത്രമേ പ്രയോഗികമാവുന്നുള്ളൂ. അതിനാൽ, ഒരു കണിക സന്തുലനാവസ്ഥ കൈവരിക്കണമെങ്കിൽ അതിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന എല്ലാ ബലങ്ങളുടെയും സദിശ സങ്കലനം (vector sum) പൂജ്യമായിരിക്കണം. ഈ ബലങ്ങളെല്ലാംതന്നെ ഒരു കണികയ്ക്കുമേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നതിനാൽ അവ ഏകബിന്ദു ബലങ്ങളായിരിക്കും. സന്തുലനത്തിൽ കീഴിൽ വരുന്ന ഏകബിന്ദു ബലങ്ങളെക്കുറിച്ച് (concurrent force) മുൻ അധ്യായങ്ങളിൽ വിവരിച്ചിട്ടുള്ളതാണല്ലോ.

ചില വസ്തുക്കൾ ഭാഗികമായ സന്തുലനനിലയിൽ ഉണ്ടായേക്കാം. അതായത്, സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനത്തിലുള്ളവക്ക് ചിലപ്പോൾ പരിക്രമണ സന്തുലനാവസ്ഥയില്ലാതിരിക്കാം. അല്ലെങ്കിൽ പരിക്രമണസന്തുലനത്തിലുള്ളവക്ക് സ്ഥാനാന്തരസന്തുനലാവസ്ഥ ഇല്ലാതെയുമായിരിക്കും.

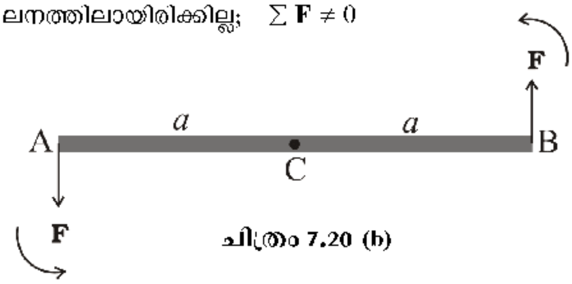
AB എന്ന ഒരു വണ്ണം കുറഞ്ഞ ദണ്ഡിന് നിസ്സാര മാസ് ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ദണ്ഡിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളായ A യിലും B യിലും ചിത്രം-7 -20 (a) ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു

പോലെ ഒരേ പരിമാണങ്ങളുള്ള രണ്ടു ബലങ്ങൾ ലംബ മായി പ്രയോഗിക്കുന്നു.



ചിത്രം 7.20 (a)

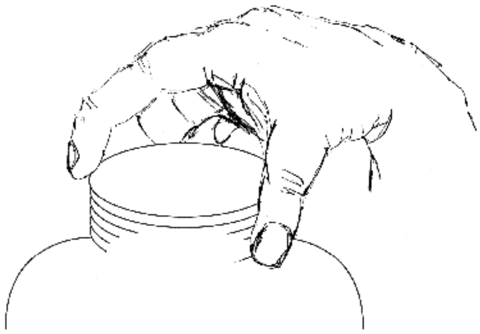
AB യുടെ മധ്യഭാഗം 'C' ആണ്; CA= CB = a. ബലങ്ങ ളുടെ മൊമന്റ് (moment of the force) A യിലും B യിലും ഒരേ അളവിലായിരിക്കും (*a F*). എന്നാൽ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചതുപോലെ വിപരീതവുമായിരിക്കും. അതു കൊണ്ട് ദണ്ഡിന്മേലുള്ള മൊത്തം മൊമന്റ് (moment) പൂജ്യമായിരിക്കും. ഈ വ്യവസ്ഥ പരിക്രമണസന്തു ലനാവസ്ഥയിലായിരിക്കുമെങ്കിലും, സ്ഥാനാന്തരസന്തു ലനത്തിലായിരിക്കില്ല; $\sum \mathbf{F} \neq 0$



ചിത്രം 7.20 (b)

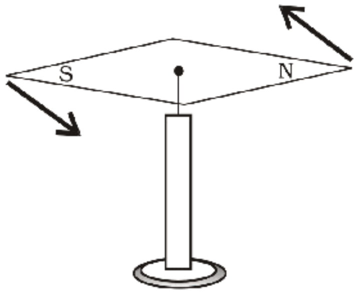
ചിത്രം 7-20 (b) യിൽ കാണിച്ചതുപോലെ, B എന്ന സ്ഥാനത്തുള്ള ബലം A യിലുള്ളതിന് നേർ വിപരീത മാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇപ്പോൾ, ദണ്ഡിന് ലംബമായിട്ടു ള്ളതും തുല്യവും വിപരീതവുമായ ബലം A യിലും B യിലും കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഇവ ഇവിടെ രണ്ടു തുല്യ മൊമെന്റുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു, അവ രണ്ടും ഒരേ ദിശയിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നതിനാൽ അവ രണ്ടും ദണ്ഡിനെ ഘടി കാര വിപരീതദിശയിൽ (*anticlockwise*) അഥവാ അപ്ര ദക്ഷിണ ദിശയിൽ പരിക്രമണം ചെയ്യാൻ പ്രേരിപ്പി ക്കുന്നു. വസ്തുവിന്മേലുള്ള മൊത്തം ബലം പൂജ്യ മാണ്; അതിനാൽ വസ്തു സ്ഥാനാന്തരസന്തുലന ത്തിലാണെന്നു പറയാം. എന്നാലത് പരിക്രമണ സന്തുലനത്തിലല്ല. ദണ്ഡ് ഒരിടത്തും ഉറപ്പിച്ചിട്ടില്ലെങ്കിൽ പോലും, അത് പൂർണ്ണ പരിക്രമണത്തിന് വിധേയമാകും. (അതായത് സ്ഥാനാന്തരമില്ലാത്ത പരിക്രമണം).

ഒരു ജോടി ബലങ്ങൾ തുല്യവും വിപരീതവുമായി വ്യത്യസ്ത രേഖയിലൂടെ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുമ്പോൾ അതിനെ ബലയുഗ്മം (couple) അഥവാ ടോർക്ക് എന്നു പറയുന്നു. ഒരു ബലയുഗ്മം സ്ഥാനാന്തരമില്ലാത്ത പരിക്രമണചലനം ഉണ്ടാക്കുന്നു.



ചിത്രം 7.21 (a) കൈവിരലുകൾ അടപ്പിൽ ഒരു ബലയുഗ്മം പ്രയോഗിക്കുന്നു.

ഒരു കുപ്പിയുടെ അടപ്പ് തിരിച്ചു തുറക്കുമ്പോൾ, നമ്മുടെ വിരലുകൾ അടപ്പിന്റെ വശങ്ങളിൽ ഒരു ബലയുഗ്മം (7-21 a) പ്രയോഗിക്കുന്നുണ്ട് (ചിത്രം 7-21 (b). മറ്റൊരു പരിചിതമായ ഉദാഹരണമാണ്. ഭൂമിയുടെ കാന്തിക മണ്ഡലത്തിൽ സ്വതന്ത്രമായിവച്ചിട്ടുള്ള കാന്തസൂചി യുടേത്. ഭൂമിയുടെ കാന്തികമണ്ഡലം കാന്തസൂചിയുടെ ഉത്തരധ്രുവത്തിലും ദക്ഷിണധ്രുവത്തിലും തുല്യമായ ബലംപ്രയോഗിക്കുന്നു. കാന്തസൂചിയുടെ ഉത്തര ധ്രുവത്തിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം വടക്കുഭാഗ ത്തേക്കും ദക്ഷിണധ്രുവത്തിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം തെക്കുഭാഗത്തേക്കുമാണ്. കാന്തസൂചി എപ്പോ ഴൊക്കെ കൃത്യമായി തെക്കു-വടക്ക് നിശ്ചലമായി നിൽക്കാതിരിക്കുന്നുവോ ആ സമയങ്ങളിലെല്ലാം ഈ രണ്ടു ബലങ്ങളും പ്രയോഗിക്കപ്പെടും. അവ ഒരേ രേഖയി ലായിരിക്കില്ല പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത്. അതിനാൽ ഭൂമിയുടെ കാന്തികമണ്ഡലത്തിന്റെ ഫലമായി കാന്ത സൂചിയിൽ ഒരു ബലയുഗ്മം ഉണ്ടാകുന്നു.

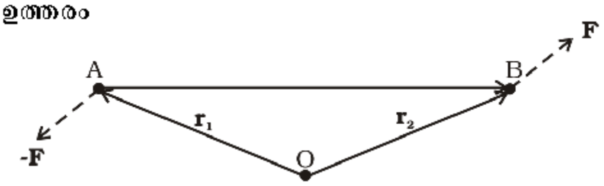


ചിത്രം 7.21 (b) ഭൂമിയുടെ കാന്തികമണ്ഡലം കാന്തസൂചിയുടെ ഇരുധ്രുവങ്ങളിലും തുല്യവും വിപരീതവുമായ ബലം പ്രയോ ഗിക്കുന്നു. ഈ രണ്ടു ബലങ്ങളും ചേർന്ന് ബലയുഗ്മ (couple) ത്തിന് ഇടയാക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം. 7.7

ബലയുഗ്മ (couple) ത്തിന്റെ മൊമന്റ് (moment), അതു കണക്കാക്കുവാൻ ആധാരമാക്കിയ ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഉത്തരം



ചിത്രം 7.22

ചിത്രം 7.22ൽ കാണിച്ചതുപോലെ, ഒരു ദൃഢവസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലയുഗ്മം പരിഗണിക്കുക. ബലങ്ങളായി **F** ഉം **- F** ഉം യഥാക്രമം B, A എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ മൂലബിന്ദു 'O'വിനെ അവലംബിച്ചിട്ടുള്ള $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ എന്നീ സ്ഥാനസദിശങ്ങളുണ്ട്. മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ടോർക്കിനെ ഇനി കണക്കാക്കിനോക്കാം.

ബലയുഗ്മത്തിന്റെ മൊമന്റ് (moment of the couple) = ബലയുഗ്മം സൃഷ്ടിക്കുന്ന രണ്ട് ടോർക്കുകളുടെ തുക

$$= \mathbf{r}_1 \times (-\mathbf{F}) + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}$$

$$= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}$$

$$= (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}$$

ഇവിടെ $\mathbf{r}_1 + \mathbf{AB} = \mathbf{r}_2$ അതുകൊണ്ട് $\mathbf{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

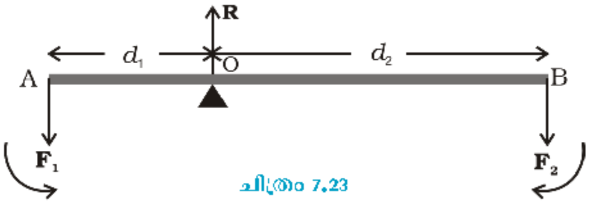
അതിനാൽ ബലയുഗ്മത്തിന്റെ മൊമന്റ് **AB** × **F** എന്നാകുന്നു.

ഇത് മൂലബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല.

അതായത് മൊമന്റ് കണക്കാക്കുവാൻ നാം ആധാരമാക്കിയ ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല.

7.8.1 മൊമന്റുകളുടെ തത്വം (Principle of moments)

മാസ് തീരെകുറഞ്ഞതും, നീളമുള്ളതും നിവർന്നതുമായ ഒരു ദണ്ഡ് അതിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി താങ്ങി നിർത്തുവാൻ (pivot) കഴിഞ്ഞാൽ അത് ഒരു ഉത്തോലകം (lever) ആകും. പിവട്ട് ചെയ്തിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ ആധാരബിന്ദു (fulcrum) എന്നു പറയുന്നു. കുട്ടികൾ കളിസ്ഥലങ്ങളിലുപയോഗിക്കുന്ന, ഉയരുകയും താഴുകയും ചെയ്യുന്ന കളിപ്പലക (see saw) ഉത്തോലകത്തിന് ഏറ്റവും നല്ല ഉദാഹരണമാണ്. F_1, F_2 എന്നീ ബലങ്ങൾ പരസ്പരം സമാന്തരവും ഉത്തോലക തലത്തിന് ലംബവുമാണ് (ചിത്രം 7.23). രണ്ടു ബലങ്ങളും പ്രവർത്തിക്കുന്നത് ആധാരബിന്ദുവിൽ (fulcrum) നിന്ന് യഥാക്രമം d_1,d_2 എന്നീ അകലങ്ങളിലാണ്.



ചിത്രം 7.23

ഉത്തോലകം യാന്ത്രിക സന്തുലനത്തിലുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയാണ്. ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ (fulcrum) പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന എതിർബലമായി (Reaction) R നെ കരുതാം. അതിനാൽ R എന്നത് F_1, F_2 എന്നീ ബലങ്ങൾക്ക് വിപരീതമാകും. സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനത്തിലാണ് ഉത്തോലകമെങ്കിൽ

$$R - F_1 - F_2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

പരിക്രമണസന്തുലനം (Rotational Equilibrium) പരിഗണിക്കേണ്ടതിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിനെ അവലംബിച്ചുള്ള മൊമന്റാണെടുക്കേണ്ടത്; മൊമന്റുകളുടെ തുക പൂജ്യമായിരിക്കും.

$$d_1F_1 - d_2F_2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

സാധാരണ മൊമന്റുകൾ അപ്രദക്ഷിണ വിപരീത ദിശയിലാവുമ്പോൾ പോസിറ്റീവായും (+). പ്രദക്ഷിണദിശയിലാവുമ്പോൾ നെഗറ്റീവായും (-) കണക്കാക്കുന്നു. R പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് ആധാരബിന്ദുവിലൂടെത്തന്നെയായതിനാൽ ആധാരബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഇതിന്റെ മൊമന്റ് പൂജ്യമായിരിക്കും.

ഉത്തോലകങ്ങളിൽ ബലം F_1 സാധാരണ ആയി കണ്ടുവരുന്നത് ഉത്തോലകം ഉപയോഗിച്ച് ഉയർത്തേണ്ട ഭാരമായാണ്. അതിനെ രോധമെന്നും (ഭാരം - load) ആധാരബിന്ദു O മുതൽ ദണ്ഡിന്റെ F_1 വരെയുള്ള ദൂരത്തെ രോധഭുജമെന്നും *(load arm)* വിളിക്കുന്നു. F_1 ഭാരത്തെ ഉയർത്താൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന ബലം F_2 വിനെ യത്നമെന്നും *(effort)*-ആധാരകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് F_2 വരെയുള്ള ദൂരത്തെ യത്നഭുജമെന്നും *(effort arm)* പറയുന്നു.

സമവാക്യം (ii) താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാവുന്നതാണ്.

$$d_1F_1 = d_2\,F_2 \qquad (7.32a)$$

അഥവാ ***രോധഭുജം*** x ***രോധം (ഭാരം)*** = ***യത്നഭുജം*** x ***യത്നം***

ഈ സമവാക്യം ഒരു ഉത്തോലകത്തിനുള്ള മൊമന്റിന്റെ തത്വം (Principle of moments) എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ഇവിടെ F_1 / F_2 വിനെ യാന്ത്രികലാഭമെന്നും (mechanical advantage) പറയുന്നു.

ഇതിനെ ഒരു സമവാക്യമായി താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാം.

$$\text{M.A. (യാന്ത്രികലാഭം)} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1} \qquad (7.32b)$$

ഇനി യത്നഭുജം d_2 രോധഭുജത്തേക്കാൾ നീളമുള്ളതാണെങ്കിൽ യാന്ത്രികലാഭം 1 ൽ കൂടുതലായിരിക്കും യാന്ത്രികലാഭം 1 ൽ കൂടുതലാണെന്നതിനർഥം ഒരു ചെറിയ യത്നത്തിലൂടെ കൂടുതൽ ഭാരം ഉയർത്താനാവുന്നുവെന്നാണ്. ഉത്തോലകങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളായി

നിങ്ങളുടെ ചുറ്റും നിരവധി മാതൃകകൾ കണ്ടെത്താനാവും. ത്രാസിന്റെ ദണ്ഡ് ഒരു ഉത്തോലകമാണ്. കൂടുതൽ ഉത്തോലകങ്ങൾ കണ്ടെത്തി ആധാരകേന്ദ്രം *(fulcrum)* യത്നം *(effort)* യത്നഭുജം *(effort arm)*, രോധം (ഭാരം - load), രോധഭുജം *(load arm)* എന്നിവ ഓരോ ഉദാഹരണത്തിന്റേതും വേർതിരിച്ച് മനസിലാക്കുക.

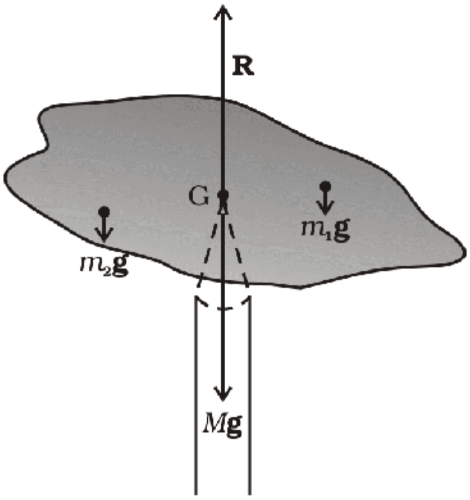
ഉത്തോലകതലത്തിനു ലംബമല്ലാത്ത നിലയിൽ തലവുമായി ഏതെങ്കിലും ഒരു കോണളവ് ഉണ്ടാക്കുന്നവിധത്തിലാണ് സമാന്തരബലങ്ങളായ F_1 ഉം F_2 ഉം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നതെങ്കിൽപ്പോലും അവിടങ്ങളിലൊക്കെ മൊമന്റിന്റെ തത്വം പാലിക്കപ്പെടും.

7.8.2. ഗുരുത്വകേന്ദ്രം (Centre of Gravity)

നിങ്ങളിൽ പലയാളുകളും നോട്ടുബുക്കുകൾ ഒരു വിരലിൽ സന്തുലനം ചെയ്ത് നിർത്താൻ ശ്രമിച്ചിട്ടുണ്ടാവും. ചിത്രം 7.24ൽ വളരെ എളുപ്പത്തിൽ ചെയ്യാൻ കഴിയുന്ന അതേപോലുള്ള ഒരു പരീക്ഷണമാണ് വിവരിക്കുന്നത്. പ്രത്യേക ആകൃതിയൊന്നുമില്ലാത്ത ഒരു കാർഡ് ബോർഡ് കഷണവും കൂർത്ത അഗ്രമുള്ള പെൻസിൽപോലുള്ള ഒരു വസ്തുവുമെടുക്കുക. കാർഡ് ബോർഡിനെ പെൻസിൽമുനയിൽ സന്തുലനം ചെയ്തു നിർത്താനൊന്നു ശ്രമിക്കുക. നിർത്താനുള്ള ഒരു ബിന്ദു കാണ്ടെത്താനായേക്കും. പലതവണത്തെ പരിശ്രമത്തിനുശേഷം പെൻസിൽമുനയിൽ കാർഡ്ബോർഡ് തിരശ്ചീനമായി നിർത്താൻ സാധിക്കും.

G എന്ന ഈ ബിന്ദുവാണ് കാർഡ്ബോർഡിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം (centre of gravity, C.G). കാർഡ്ബോർഡിനെ യാന്ത്രിക സന്തുലനാവസ്ഥയിൽ നിർത്തുന്നതിനാവശ്യമായ എതിർബലം നേരെ മുകളിലേക്കു പ്രയോഗിക്കുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്. ചിത്രം 7.24 ൽ കാണിച്ചതുപോലെ പെൻസിൽ മുന Gയിൽ ചെലുത്തുന്ന ബലം കാർഡ്ബോർഡിന്റെ ഭൂഗുരുത്വ ബലത്തിന് അല്ലെങ്കിൽ ഭാരത്തിന് (Mg) തുല്യവും വിപരീതവുമായ ബലമാണ്. അതിനാൽ കാർഡ്ബോർഡ് സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനത്തിലാവുന്നു. ഇവിടെ കാർഡ്ബോർഡ് പരിക്രമണ സന്തുലനത്തിലുമാണ്. അങ്ങനെയല്ലായിരുന്നെങ്കിൽ, അസന്തുലിതടോർക്ക്മൂലം കാർഡ്ബോർഡ് നിലതെറ്റി താഴെ വീഴുമായിരുന്നു. കാർഡ്ബോർഡിന്റെ നിർമിതിയിലടങ്ങിയിരിക്കുന്ന ഓരോ കണത്തിന്മേലും ഗുരുത്വാകർഷണം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നതിനാൽ ($m_1 g$, $m_2 g$ എന്നിങ്ങനെ) കാർഡ്ബോർഡിന്മേൽ അവയുണ്ടാക്കുന്ന ടോർക്കുകളും അനുഭവപ്പെടുന്നുണ്ട്.

കാർഡ്ബോർഡിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം(CG) സ്ഥിതിചെയ്യുന്നത് ഓരോ കണത്തിന്മേലും പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ഭൂഗുരുത്വ



ചിത്രം 7.24 പെൻസിൽ മുനയിന്മേൽ തിരശ്ചീനനിലയിൽ നിർത്തിയിരിക്കുന്ന കാർഡ് ബോർഡ് കഷണം താങ്ങി നിർത്തുന്ന G എന്ന ബിന്ദുവാണ് കാർഡ് ബോർഡിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം.

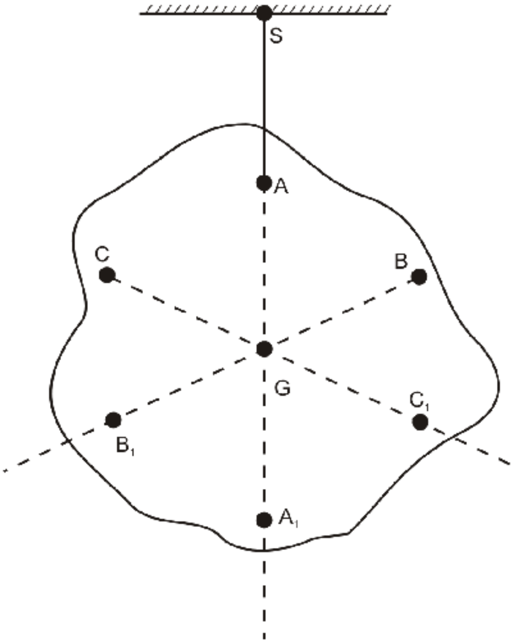
ബലംമൂലം ഉണ്ടാകുന്ന ടോർക്കിന്റെ ആകത്തുക പൂജ്യമാകുന്ന ഒരു സ്ഥാനത്താണ്.

ഒരു വ്യാപ്തിതവസ്തുവിന്റെ (extended body) ഗുരുത്വകേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കി (CG) i എന്ന കണികയുടെ സ്ഥാനസദിശം $\mathbf{r}_i$ ആണെങ്കിൽ കണികയിൽമേൽ ഗുരുത്വബലം മൂലമുള്ളതും CG യെ അവലംബിച്ചുള്ളതുമായ ടോർക്ക്, $\tau_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}$ എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ CG ആധാരമായുള്ള മൊത്തം ഗുരുത്വാകർഷണ ടോർക്ക് പൂജ്യവുമായിരിക്കും; അതായത്:

$$\tau_g = \sum \tau_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g} = \mathbf{0} \qquad (7.33)$$

അതുകൊണ്ട് ഒരു വസ്തുവിന്മേലുള്ള ആകെ ഗുരുത്വാകർഷണ ടോർക്ക് പൂജ്യമാകുന്ന സ്ഥാനമാണതിന്റെ ഗുരുത്വ കേന്ദ്രമെന്ന് നിർവചിക്കാം. സമവാക്യം (7.33)ൽ ഗുരുത്വത്വരണം $\mathbf{g}$ എല്ലാ കണികകൾക്കും ഒരു പോലെ ബാധകമാണ്. മാത്രമല്ല $\mathbf{g}$ യുടെ വില പൂജ്യം അല്ലതാനും. അതിനാൽ $\mathbf{g}$ യെ ഒരു പൊതുഘടകമായി സങ്കലനത്തിൽ നിന്നും പുറത്തെടുക്കാം. അതുകൊണ്ട് $\sum m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ ($\mathbf{r}_i$) CG യെ ആധാരമാക്കിയാണെടുത്തിട്ടുള്ളത്. നേരത്തെ നാം കണ്ട വിഭാഗം 7.2 ലെ സമവാക്യം (7.4 a) അടിസ്ഥാനമാക്കി ആലോചിച്ചാൽ, സങ്കലന ഫലം പൂജ്യമായാൽ മൂലബിന്ദു തന്നെയായിരിക്കും വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രമെന്ന് മനസിലാക്കാം. ഗുരുത്വബലം ഏകസമാനമായിട്ടുള്ളിടത്തും, ഗുരുത്വാകർഷണമില്ലാത്തിടത്തും ഗുരുത്വകേന്ദ്രവും, ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രവും ഒരേ ബിന്ദു ആകുന്നു. വസ്തു ചെറുതാണെങ്കിൽ $\mathbf{g}$ വസ്തുവിന്റെ വിവിധ ഭാഗങ്ങളിലൊരുപോലെ അനുഭവപ്പെടും.

എന്നാൽ വസ്തു വിസ്തൃതമായി വരുന്തോറും വസ്തുവിന്റെ ഓരോ ഭാഗങ്ങളിലും "g" യുടെ മൂല്യത്തിൽ മാറ്റമുണ്ടാകുന്നു. അപ്പോൾ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രവും ഗുരുത്വകേന്ദ്രവും ഒന്നാകണമെന്നില്ല. അടിസ്ഥാനപരമായി ഇവ രണ്ടും രണ്ട് സങ്കൽപങ്ങളാണ്. ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം, വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യവിതരണത്തെ മാത്രം ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. അതിന് ഗുരുത്വവുമായി ബന്ധമില്ല.



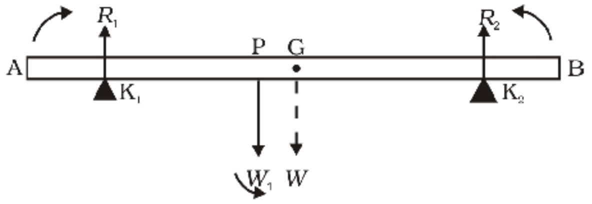
ചിത്രം.7.25 നിശ്ചിത ആകൃതി ഇല്ലാത്ത ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രനിർണയം. വസ്തുവിനെ താങ്ങി നിർത്തിയിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ വരക്കുന്ന ലംബരേഖ AA_1 ആണെന്ന് കാണാം.

വിഭാഗം 7.2 ൽ ക്രമരൂപത്തിലുള്ളതും ഏകതാനവുമായ നിരവധി വസ്തുക്കളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രങ്ങളുടെ സ്ഥാനങ്ങൾ കണ്ടെത്തുന്നതിനെപ്പറ്റി മനസ്സിലാക്കിക്കഴിഞ്ഞു. വസ്തുക്കൾ ചെറുതാണെങ്കിൽ മാത്രം അവിടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കണ്ടെത്താൻ ഉപയോഗിച്ച രീതികളിലൂടെ അവയുടെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം കണ്ടെത്താം.

(ചിത്രം 7.25) ആകൃതിരഹിത വസ്തുവായ കാർഡ്ബോർഡിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം (CG) കണ്ടെത്താനുള്ള മറ്റൊരു വഴിയാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. കാർഡ്ബോർഡ് ബിന്ദു A യിൽ കെട്ടിയിരിക്കുന്ന ചരട് ഉപയോഗിച്ചു തൂക്കിയിടുക. A യിൽ നിന്നുള്ള ലംബരേഖ കടന്നുപോകുന്നത് ഗുരുത്വകേന്ദ്രത്തിലൂടെയായിരിക്കും. രേഖ AA_1 കാർഡ്ബോർഡ് പ്രതലത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തുക. ഇതേപോലെ B,C എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിലും വസ്തു തൂക്കിയിട്ട് ലംബരേഖകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. എല്ലാ രേഖകളും സന്ധിക്കുന്ന സ്ഥാനത്തായിരിക്കും ആ വസ്തുവിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം (CG). ഈ രീതിയെന്തുകൊണ്ട് ഗുരുത്വകേന്ദ്രം തരുന്നുവെന്നു വിശദീകരിക്കുവാൻ ശ്രമിക്കുക. വസ്തു ചെറുതായതിനാൽ അതിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കൂടി ഈ രീതിയിൽ കണ്ടെത്താനാവും.

ഉദാഹരണം 7.8 : 4 കിലോഗ്രാം മാസും 70 സെ.മീ. നീളവുമുള്ള ഒരു ലോഹദണ്ഡിനെ രണ്ടറ്റത്തു നിന്നും 10 സെ.മീ. വീതം അകലെയുള്ള വായ്ത്തലകളിൽ (knife edge) വച്ചിരിക്കുന്നു. ഒരു അഗ്രത്തു നിന്നു 30 സെ.മീ. ദൂരത്ത് ദണ്ഡിൽ 6 കി.ഗ്രാം ഭാരം തൂക്കിയിടുന്നു. വായ്ത്തലകളിൽ മുകളിലേക്കുള്ള ബലം കണ്ടെത്തുക. (ദണ്ഡിന്റെ പരിച്ഛേദം ഏകതാനവും (uniform) ഏകജാതീയവു (homogeneous) മാണ്.

ഉത്തരം:



ചിത്രം.7.26

ചിത്രത്തിന്റെ ABഎന്ന ദണ്ഡും K_1, K_2 എന്ന വായ്ത്തലയും (knife edge) കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്. ദണ്ഡിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം G യിലും തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്ന ഭാരം P യിലുമാണ്. ദണ്ഡിന്റെ ഭാരം W പ്രവർത്തിക്കുന്നത് അതിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം G യിൽ കൂടിയാണ്. ദണ്ഡിന്റെ പരിച്ഛേദം ഏകസമാനവും ഏകജാതീയവുമായതിനാൽ, ഗുരുത്വകേന്ദ്രം G അതിന്റെ മധ്യഭാഗത്തു തന്നെയായിരിക്കും. AB=70 സെ.മീ, AG = 35 സെ.മീ, AP=30 സെ.മീ. PG=5 സെ.മീ, $AK_1=BK_2$= 10 സെ.മീ, $K_1G=K_2G$ = 25 സെ.മീ. ഇനി ദണ്ഡിന്റെ ഭാരം W=4 കി.ഗ്രാം, തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്ന ഭാരം W_1= 6 കി.ഗ്രാം R_1,R_2 എന്നിവ വായ്ത്തല ഭാഗത്തിന്റെ മുകളിലേക്കുള്ള എതിർ ബലത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ദണ്ഡിന്റെ സ്ഥാനാന്തരസന്തുലനത്തിനായി

$R_1 + R_2 - W_1 - W = 0$ എന്നെഴുതാം (i)

W_1, W എന്നിവ ലംബനിലയിൽ താഴേക്കു പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ R_1, R_2 എന്നിവ ലംബനിലയിൽ മുകളിലേക്കാണ് പ്രയോഗിക്കുന്നത്.

പരിക്രമണസന്തുലനം പരിഗണിക്കുമ്പോൾ, ബല മൊമെന്റുകളാണ് (moment of the force) കണക്കിലെടുക്കേണ്ടത്. ഇതു കണക്കാക്കുവാൻ സൗകര്യപ്രദമായ ഒരു സ്ഥാനം, G ആണ്. R_2 വിന്റെയും W_1 ന്റെയും മൊമെന്റുകൾ അപ്രദക്ഷിണദിശയിലാണ് (+ve), എന്നാൽ R_1ന്റെ മൊമന്റ് പ്രദക്ഷിണദിശയിലുമാണ് (-ve).

പരിക്രമണസന്തുലനത്തിനായി താഴെ കാണിച്ചതുപോലെ എഴുതാവുന്നത്:

$$R_1\,(K_1G) + W_1\,(PG) + R_2\,(K_2G) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

W =4.00 gN എന്നു തന്നിട്ടുണ്ട്; W_1=6.00 gN എന്നും തന്നിരിക്കുന്നു. ഇതിൽ **g** ഗുരുത്വത്വരണമാണ്, അത് 9.8 മീ/(സെക്കന്റ്)^2 എന്നെടുക്കാം. (i) ൽ മൂല്യങ്ങളുടെ സംഖ്യ ചേർത്താൽ

$$R_1 + R_2 - 4.00g - 6.00g = 0$$

$$\text{or} \quad R_1 + R_2 = 10.00g \ \text{N} \qquad \text{(iii)}$$

$$= 98.00 \ \text{N}$$

(ii) ൽ നിന്ന് , $-\,0.25\,R_1 + 0.05\,W_1 + 0.25\,R_2 = 0$

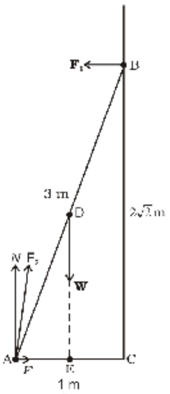
അല്ലെങ്കിൽ $R_1 - R_2 = 1.2g \ \text{N} = 11.76 \ \text{N}$ (iv)

(iii), (iv) ൽ നിന്നും $R_1 = 54.88$ N, $R_2 = 43.12$N

ഇതിൽനിന്നു ലഭിക്കുന്നത് K_1ൽ 55 N ഉം K_2വിൽ 43 N എന്നിങ്ങനെയാണ്.

> **ഉദാഹരണം 7.9:** 3 മീറ്റർ നീളവും 20 കി.ഗ്രാം ഭാരവുമുള്ള ഒരു ഏണി ഘർഷണരഹിതമായ ഒരു ചുമരിൽ ചാരിവക്കുന്നു. അതിന്റെ അടിഭാഗം തറയിലിരിക്കുന്നത് ചുമരിൽനിന്ന് ഒരു മീറ്റർ അകലെയാണ്. ചുവരിന്റെയും തറയുടെയും പ്രതിപ്രവർത്തന ബലം കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം:



ചിത്രം 7.27

ഏണി 3 മീറ്റർ നീളമുള്ളതാണ്. അതിന്റെ തറയിൽ തൊടുന്ന ഭാഗം ചുമരിൽനിന്ന് 1 മീറ്റർ അകലെയാണ്. പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തപ്രകാരം BC = 2√2. ഏണിയിന്മേലുള്ള ബലം W അതിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം D യിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നു. പ്രതിപ്രവർത്തന ബലങ്ങളായ F_1,F_2 എന്നിവ യഥാക്രമം ചുമരിലും തറയിലുമാണ് പ്രവർത്തിക്കുന്നത്. ചുമർ ഘർഷണരഹിതമായതിനാൽ , F_1 ബലം ചുമരിന് ലംബമാണ്. F_2 ബലത്തെ രണ്ടു ഘടകങ്ങളായി തിരിക്കാം. സ്വാഭാവികപ്രതിപ്രവർത്തന ബലം N ഉം ഘർഷണബലം F ഉം. Fഎന്ന ബലം ഏണി ചുമരിൽനിന്ന് അകലുന്നതിനെ ചെറുക്കുന്നു അതുകൊണ്ട് അത് പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് ചുമരിലേക്കുള്ള ദിശയിലാണ്.

സന്തുലനത്തിനായി ലംബദിശയിലുള്ള ബലങ്ങൾ എടുത്താൽ

$$N - W = 0 \qquad \text{(i)}$$

തിരശ്ചീനദിശയിലുള്ള ബലങ്ങൾ എടുത്താൽ,

$$F \quad F_1 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

പരിക്രമണസന്തുലനത്തിനായി 'A' യെ അവലംബിച്ചുള്ള ബലങ്ങളുടെ മൊമെന്റുകളെടുത്താൽ ലഭിക്കുന്നത്

$$2\sqrt{2}\,F_1 - (1/2)\ W = 0 \qquad \text{(iii)}$$

ഇനി, $W = 20 \ \text{kg} = 20 \times 9.8 \ \text{N} = 196.0 \ \text{N}$

(i) ൽ നിന്ന്$N = 196.0 \ N$

(iii) ൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്നത്

$$F_1 = W/4\sqrt{2} = 196.0 / 4\sqrt{2} = 34.6 \ \text{N}$$

(ii) ൽ നിന്നു ലഭിക്കുന്നത് $F = F_1 = 34.6$ N

$$F_2 = \sqrt{F^2 + N^2} = 199.0 \ \text{N}$$

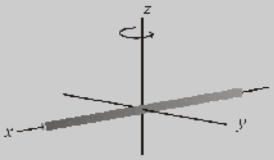
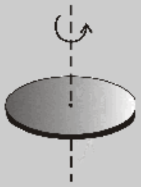
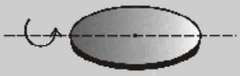
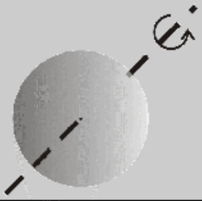
F_2 ബലം തിരശ്ചീന തലവുമായി α എന്ന കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്നു.

$$\tan\alpha = N/F = 4\sqrt{2}\,, \quad \alpha = \tan^{\ 1}(4\sqrt{2}) \approx 80^\circ$$ ◀

7.9 മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ (Moment of Intertia)

നമുക്ക് പരിചിതമായ സ്ഥാനാന്തര ചലനത്തിനൊപ്പം പരിക്രമണചലനം കൂടിയാണ് നാം ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. ഈ പാഠത്തിൽ ഇനിയും ഒരു പ്രധാനപ്പെട്ട ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം കണ്ടെത്തേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്. ***പരിക്രമണചലനത്തിൽ മാസിന്റെ (mass) സദൃശം (analogue) എന്താണ്?*** ഈ വിഭാഗത്തിൽ ഇതിനുള്ള ഉത്തരം കണ്ടെത്താനുള്ള ശ്രമമാണ് നടത്തുന്നത്. അതിലേക്കുള്ള ചർച്ചകൾ ലഘൂകരിക്കുന്നതിനായി ഉറപ്പിച്ച അല്ലെങ്കിൽ നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണ ചലനങ്ങൾ മാത്രമേ ഇവിടെ പരിഗണിക്കുന്നുള്ളൂ. പരിക്രമണത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജം സംബന്ധിച്ച ഒരു സമവാക്യം ഉണ്ടാക്കാൻ ശ്രമിച്ചു നോക്കാം. നമുക്കറിയാവുന്നതുപോലെ ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണത്തിൽ, ആ വസ്തുവിലെ ഓരോ കണികയും വൃത്താകാരത്തിൽ അക്ഷത്തിനു ചുറ്റുമായി, സമവാക്യം (7.19) പ്രകാരം ഉള്ള ഒരു രേഖീയ പ്രവേഗത്തോടെ സഞ്ചരിക്കുന്നു (ചിത്രം 7.10 നോക്കുക). അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് ഒരു നിശ്ചിത അകലത്തിലുള്ള കണികയെ സംബന്ധിച്ച്, രേഖീയ പ്രവേഗം $\upsilon_i = r_i\omega$. എന്നാണ്. അപ്പോൾ ആ കണികയുടെ ഗതികോർജം

പട്ടിക–7.1 നിശ്ചിത അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ക്രമരൂപങ്ങളുടെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ

	വസ്തു	അക്ഷം	ചിത്രം	I
(1)	R ആരമുള്ള കനം കുറഞ്ഞ വൃത്തവളയം	വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതും തലത്തിനു ലംബമായിട്ടുള്ളതും		MR^2
(2)	R ആരമുള്ള കനം കുറഞ്ഞ വൃത്തവളയം	വ്യാസരേഖ		$MR^2/2$
(3)	L നീളമുള്ള വണ്ണം കുറഞ്ഞ ദണ്ഡ്	മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ ദണ്ഡിന്റെ നീളത്തിന് ലംബമായി		$M\ L^2/12$
(4)	R ആരമുള്ള വൃത്തതകിട്	തകിടിനു ലംബമായി കേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നത്		$MR^2/2$
(5)	R ആരമുള്ള വൃത്തതകിട്	വ്യാസരേഖ		$MR^2/4$
(6)	R ആരമുള്ള പൊള്ളയായ സിലിണ്ടർ	സിലിണ്ടറിന്റെ അക്ഷരേഖ		MR^2
(7)	R ആരമുള്ള സിലിണ്ടർ	സിലിണ്ടറിന്റെ അക്ഷം		$MR^2/2$
(8)	R ആരമുള്ള ഗോളം	വ്യാസരേഖ		$2MR^2/5$

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$ എന്നാണ്.

ഇതിൽ m_i എന്നത് കണികയുടെ മാസാണ്. വസ്തുവിന്റെ ആകെ ഗതികോർജം K, ഓരോ കണികയുടെയും ഗതികോർജങ്ങളുടെ ആകത്തുകയാണ്.

$$K = \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (m_i r_i^2 \omega^2)$$

ഇതിൽ 'n' എന്നത് ആകെ കണങ്ങളുടെ എണ്ണമാണ്. കോണീയപ്രവേഗം ω എല്ലാ കണങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചും ഒരുപോലെയാണ്. അതുകൊണ്ട് സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് ω യെ പൊതുവായി കണക്കാക്കി സങ്കലനത്തിനു

പുറത്തേക്കു കൊണ്ടുവന്നാൽ

$$K = \frac{1}{2}\omega^2 (\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2)$$

ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണ സ്വഭാവത്തെ വ്യക്തമാക്കാനുതകുന്ന ***മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ*** **(moment of inertia)** എന്ന പുതിയ അളവിനെ (parameter) ഇവിടെ നിർവചിക്കാനാകും. അത് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതു പോലെ എഴുതാം.

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (7.34)$$

ഈ നിർവചനം മുകളിലത്തെ സമവാക്യത്തിലേക്കു കൊണ്ടുവരുമ്പോൾ

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (7.35)$$

ഇവിടെ ശ്രദ്ധിക്കാനുള്ളത് I എന്ന ഭൗതിക പരിമാണം കോണീയപ്രവേഗത്തിന്റെ പരിമാണത്തിൽ നിന്നു സ്വതന്ത്രമാണെന്നാണ്. പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ദൃഢവസ്തുവിനെയും പരിക്രമണഅക്ഷത്തിനെയുമാണിത് ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നത്.

ഒരു പരിക്രമണവസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജത്തിനുള്ള സമവാക്യം (7.35) ഉം രേഖീയചലനത്തിനുള്ള (സ്ഥാനാന്തരം) ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യാവുന്നതാണ്. രേഖീയ ചലനത്തിൽ

$$K = \frac{1}{2} m\, v^2$$

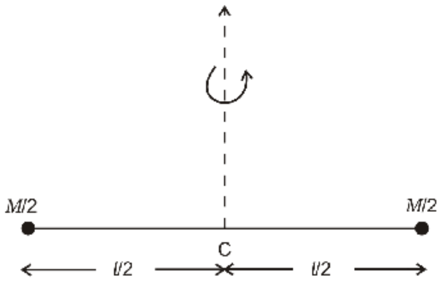
ഇവിടെ 'm' വസ്തുവിന്റെ മാസും (*mass*), **'v'** അതിന്റെ പ്രവേഗവുമാണ്. കോണീയപ്രവേഗം ω *യും (ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണ ചലനം)* രേഖീയപ്രവേഗം 'v' യും തമ്മിലുള്ള സാദൃശ്യം നമ്മൾ നേരത്തേ കണ്ടിട്ടുള്ളതാണ്. അതിനാൽ, മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ I എന്നത് മാസിന്റെ പരിക്രമണ സദൃശം ആയി പരിഗണിക്കുന്നു. മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുടെ (*moment of inertia*) പങ്ക് രേഖീയചലനത്തിൽ മാസിന്റേതു തന്നെയാണ്.

ഇനി സമവാക്യം (7.34) ന്റെ നിർവചന പ്രകാരം, മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കണക്കാക്കാൻ രണ്ടു ലഘു മാർഗങ്ങൾ നോക്കാം.

(a) ആരം R ഉം മാസ് M ഉം ഉള്ള ഒരു നേരിയ വൃത്തവളയം പരിഗണിക്കുക. അത് കോണീയപ്രവേഗം ω യോടുകൂടി അതിന്റെ തലത്തിലൂടെ അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിനു ചുറ്റുമായി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നത് പരിഗണിക്കുക. വളയത്തിന്റെ ഓരോ മാസ് ശകലവും അക്ഷത്തിൽനിന്ന് R അകലത്തിലാണ്. അവ Rω വേഗത്തിലാണ് ചലിക്കുന്നത്. അതുകൊണ്ട് ഗതികോർജം

$$K = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2$$

സമവാക്യം (7.35) ഉമായി താരതമ്യം ചെയ്താൽ വളയത്തിന്റെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ $I = MR^2$ എന്നാണ് ലഭിക്കുക.



ചിത്രം 7.28 കനം കുറഞ്ഞ 1 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ദണ്ഡ് ഇരു അഗ്രങ്ങളിലും ഓരോ മാസ്സുമായി ഘടിപ്പിച്ച മാസുകളുമായി ദ്രവ്യകേന്ദ്രത്തിലൂടെയുള്ള അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി പരിക്രമണത്തിലാണ്. നിശ്ചല അക്ഷം ദണ്ഡിന് ലംബമാണ്. വ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്തം പിണ്ഡം M ആണ്.

(b) ഇനി, ദൃഢവും മാസ് തീരെ പരിമിതമായതും 1 മീറ്റർ നീളമുള്ളതും ഇരുഭാഗത്തും ചെറിയ മാസുകളോടു കൂടിയതുമായ ഒരു ദണ്ഡ് പരിഗണിക്കുക. ഈ ദണ്ഡ് ദ്രവ്യകേന്ദ്രത്തിലൂടെയുള്ള അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നു. അക്ഷം ദണ്ഡിന് ലംബമാണ് (ചിത്രം 7.28). ഓരോ മാസും (M/2) അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് l/2 ദൂരത്തിലാണ്. അതിനാൽ, പിണ്ഡങ്ങളുടെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ

$$I = \frac{M}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = I = Ml^2/4 \text{ ആണ്.}$$

പട്ടിക 7.1 ൽ നമുക്കു പരിചിതമായ ചില രൂപങ്ങളുടെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. വസ്തുക്കളെല്ലാം ക്രമമായ ആകാരമുള്ളതും വ്യക്തമായ അക്ഷമുള്ളവയുമാണ്.

ഒരു വസ്തുവിന്റെ മാസ് അതിന്റെ രേഖീയ ചലനാവസ്ഥയിലെ മാറ്റത്തെ ചെറുക്കുന്നതിനാൽ അത് ആ വസ്തുവിന്റെ രേഖീയചലന ജഡത്വത്തിന്റെ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതേപോലെ, മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഒരു പരിക്രമണ ചലനാവസ്ഥയിലെ മാറ്റത്തെ ചെറുക്കുന്നു. അതിനാൽ ഇത് വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണജഡത്വത്തിന്റെ അളവാണ്. വസ്തുവിന്റെ വിവിധ ഭാഗങ്ങൾ അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്ത അകലങ്ങളിൽ എങ്ങനെ വിതരണം ചെയ്തിരിക്കുന്നുവെന്നതിനെ ആസ്പദമാക്കിയാണ് ഇതിന്റെ വില തിട്ടപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നത്. ഒരു വസ്തുവിന്റെ മാസിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്തമായി, മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ ഒരു സ്ഥിര അളവല്ല, മറിച്ച് അക്ഷത്തെയാധാരമാക്കി വസ്തുവിന്റെ മാസ് എങ്ങനെ വിതരണം ചെയ്തിരിക്കുന്നുവെന്നതിനേയും അക്ഷത്തിന്റെ ചരിവിനേയും സ്ഥാനത്തേയും

ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരളവാണ്. ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണ അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി അതിന്റെ മാസ് എങ്ങനെ വിതരണം ചെയ്യപ്പെട്ടുവെന്നത് അളക്കുന്നതിനായി നമുക്ക് ഒരു പുതിയ ഭൗതിക അളവിനെ ഇവിടെ നിർവചിക്കുന്നത് ഉചിതമായിരിക്കും. ഇത് **ആരമിക ഭ്രമണം** (radius of gyration) എന്നറിയപ്പെടുന്നു. അത് മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുമായും വസ്തുവിന്റെ മൊത്തം മാസുമായും ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

പട്ടിക 7.1 ൽ നോക്കിയാൽ അതിലെ എല്ലാ മാതൃകകളിലും $I = Mk^2$ എന്ന് എഴുതാവുന്നതായി ബോധ്യപ്പെടും. ഇവിടെ k ക്ക് നീളത്തിന്റെ ഡൈമെൻഷനാണുള്ളത്. ഒരു ദണ്ഡിനെ സംബന്ധിച്ച് (ഏകമാനം) അതിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ലംബരേഖ പരിക്രമണ A £ ansb Sq ¡¶ Xnb nÂ k^2 $L^2/12$, അതായത് k $L/\sqrt{12}$. അതേപോലെ വൃത്താകാര തകിടിനെ സംബന്ധിച്ച് k $R/2$, അതിന്റെ വ്യാസം ആധാരമായിട്ടുള്ളതാണ്. k എന്ന നീളം വസ്തുവിന്റെ ജ്യാമിതീയ സവിശേഷതകളേയും അതിന്റെ പരിക്രമണാക്ഷത്തിന്റെ പ്രത്യേകതയേയും ഉൾക്കൊള്ളുന്നു. ഇതിനെ, **ആരമികഭ്രമണം** *(Radius of gyration)* എന്നുപറയുന്നു. **ഒരു വസ്തുവിന്റെ അക്ഷത്തിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ആരമിക ഭ്രമണം** *(Radius of gyration)* **നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്നത് വസ്തുവിന്റെ ആകെ മാസിന് തുല്യമായ മാസുള്ളതും വസ്തുവിനുള്ള അക്ഷത്തിന് ആധാരമായി മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയ്ക്ക് തുല്യമായ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ ഉള്ളതുമായ ഒരു വസ്തുവിന്റെ അക്ഷത്തിൽ നിന്നുമുള്ള അകലമെന്നാണ്.** അതിനാൽ, ഒരു ദൃഢ വസ്തുവിന്റെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ വസ്തുവിന്റെ മാസ്, ആകൃതി, അതിന്റെ വലുപ്പം, പരിക്രമണാക്ഷത്തെ അവലംബിച്ചുള്ള മാസിന്റെ വിതരണത്തെയും, പരിക്രമണാക്ഷത്തിന്റെ സ്ഥാനം, ചരിവ് എന്നിവയൊക്കെയും ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു.

സമവാക്യം (7.34) പ്രകാരമുള്ള നിർവ്വചനത്തിൽ നിന്നും മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുടെ ഡൈമെൻഷൻ ML^2 ഉം അതിന്റെ SI യൂണിറ്റ് kgm^2 ആണ്.

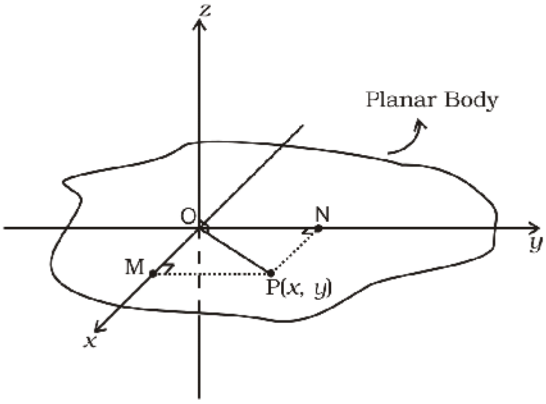
ഒരു വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണജഡത്വത്തിന്റെ അളവായ I എന്നത് അത്യന്തം പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്നതും അധികം പ്രായോഗിക പ്രാധാന്യമുള്ളതുമായ ഒരു പരിമാണമാണ്. യന്ത്രങ്ങൾ, പ്രധാനമായും ആവിയന്ത്രം, മോട്ടോർവാഹനയന്ത്രങ്ങൾ മുതലായവയിൽ പരിക്രമണ ചലനമുണ്ടാക്കുന്നത് ഉയർന്ന മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുള്ള വൃത്താകാര ഡിസ്കുകളാണ്. ഇതാണ് ചാലക ചക്രം (Flywheel) എന്നറിയപ്പെടുന്നത്. അതിന്റെ ഉയർന്ന മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ മൂലം, ചാലകചക്രം വാഹനത്തിന്റെ പെട്ടെന്നുള്ള വേഗവർധനവിനേയും വേഗശോഷണത്തേയും ഒരുപോലെ ചെറുക്കുന്നു. അത് സാവധാനത്തിൽ മാത്രമേ വേഗവ്യത്യാസത്തിനു വഴങ്ങുകയുള്ളൂ പെട്ടെന്നുള്ള വേഗച്ചാട്ടത്തെ അനുവദിക്കുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് സുഖകരമായ പ്രവർത്തനങ്ങൾക്കും യാത്രക്കും ഇത് സഹായിക്കും.

7.10 ലംബവും സമാന്തരവുമായ അക്ഷ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ (Theorems of Perpendicular and Parallel axes)

ഈ രണ്ടു തത്വങ്ങളും മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുമായി ബന്ധപ്പെട്ടവയാണ്. ആദ്യമായി ലംബാക്ഷങ്ങളുടെ സിദ്ധാന്തത്തെക്കുറിച്ചും അതുപയോഗിച്ച് ലഘുവും ഏതാനും ക്രമരൂപങ്ങളുടെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കണ്ടെത്തുവാനുള്ള ലഘുമാർഗങ്ങളെക്കുറിച്ചു പഠിക്കാം.

ലംബ അക്ഷ സിദ്ധാന്തം (Theorem of Perpendicular Axes)

ഈ തത്വം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് പൊതുവേ പരന്ന (planar body-lamina) വസ്തുക്കളിലാണ്. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, വളരെ കനംകുറഞ്ഞ, നിരപ്പായ വസ്തുക്കളിൽ പ്രയോഗിക്കാവുന്നതാണ് ഈ തത്വം. വസ്തുക്കളുടെ മറ്റ് അളവുകളേക്കാൾ തീരെ കുറഞ്ഞതാണ് ഇതിന്റെ കനം. (നീളം, വീതി, ആരം എന്നിവയെ അപേക്ഷിച്ച് ചെറുതായിരിക്കും). ചിത്രം 7.29 ഈ തത്വം വിശദീകരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 7.29 ലംബാക്ഷതത്വം ഒരു പരന്ന വസ്തുവിൽ പ്രായോഗികമാക്കുന്നു. X,Y എന്നീ അക്ഷങ്ങൾ പ്രതലത്തിൽ പരസ്പരം ലംബമായവയും Z-അക്ഷം പ്രതലത്തിനും മറ്റു രണ്ട് അക്ഷങ്ങൾക്കും ലംബമായതുമാണ്.

ഒരു പരന്ന വസ്തുവിന്റെ തലത്തിനു ലംബമായ അക്ഷത്തിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ ആ അക്ഷം പ്രതലത്തിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുന്നതും, പ്രതലത്തിലടങ്ങിയതും പരസ്പരം ലംബമായതുമായ രണ്ട് അക്ഷങ്ങളെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുടെ തുകയായിരിക്കും.

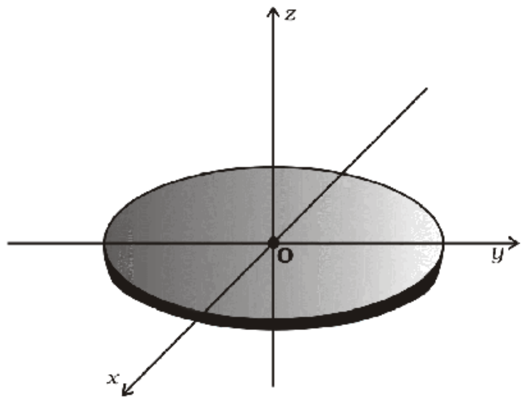
ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് ഒരു നിരപ്പായ വസ്തുവാണ്. O എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി പ്രതലത്തിനു ലംബമായുള്ള അക്ഷമാണ് Z-അക്ഷം. പ്രതലത്തിലുള്ള പരസ്പരം ലംബമായ മറ്റ് രണ്ട് അക്ഷങ്ങൾ X,Y എന്നിവ O യിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു. അതായത് മൂന്നു അക്ഷങ്ങ

ളും O എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. ലംബാക്ഷ തത്ത്വമനുസരിച്ച്

$$I_z = I_x + I_y \qquad (7.36)$$

ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ ഈ തത്വത്തിന്റെ പ്രയോജനത്തെക്കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കാം

ഉദാഹരണം 7.10: ഒരു വൃത്തതകിടിന്റെ ഏതെങ്കിലുമൊരു വ്യാസരേഖയെ ആധാരമാക്കി തകിടിന്റെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ എന്താണെന്ന് കാണുക.



ചിത്രം 7.30: ഒരു തകിടിന്റെ വ്യാസത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ അതിന്റെ മധ്യത്തിൽ കൂടിയുള്ള ലംബാക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള **M.I (moment of interia)** പ്രകാരമുള്ളത്

ഉത്തരം: വൃത്തത്തകിടിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലൂടെ അതിന്റെ പ്രതലത്തിനു ലംബമായി കടന്നുപോകുന്ന അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ $MR^2/2$ എന്നെടുക്കാം. ഇതിൽ M തകിടിന്റെ മാസും R അതിന്റെ ആരവുമാണ് (പട്ടിക 7.1). തകിടിനെ ഒരു പരന്നവസ്തുവായി കണക്കാക്കാം. അതിനാൽ ലംബാക്ഷങ്ങളുടെ തത്വം ഇവിടെ പ്രയോഗിക്കാനാകും. ചിത്രം 7.30 ൽ കാണിച്ചതുപോലെ, തകിടിന്റെ കേന്ദ്രം O, X, Y, Z എന്നീ മൂന്ന് അക്ഷങ്ങളുടെ മൂലബിന്ദുവായി എടുക്കുക. ഇതിൽ X,Y എന്നീ അക്ഷരേഖകൾ തകിടിന്റെ പ്രതലത്തിലും Z-അക്ഷം തകിടിന്റെ പ്രതലത്തിനു ലംബവുമാണ്. ലംബാക്ഷങ്ങളുടെ തത്വപ്രകാരം.

$$I_z = I_x + I_y$$

ഇനി, X,Y എന്നീ അക്ഷങ്ങൾ യഥാർഥ തകിടിന്റെ രണ്ട് വ്യാസരേഖകൾ തന്നെയാണ്. സമമിതി (symmetry) പ്രകാരം തകിടിന്റെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ ഏതു വ്യാസത്തിനും ഒരുപോലെ ബാധകാണ്. അതിനാൽ

$$I_x - I_y$$

അതുകൊണ്ട് $I_z - 2I_x$ എന്നു കിട്ടും.

എന്നാൽ. $I_z = MR^2/2$

അതായത്. $I_x = I_z/2 = MR^2/4$

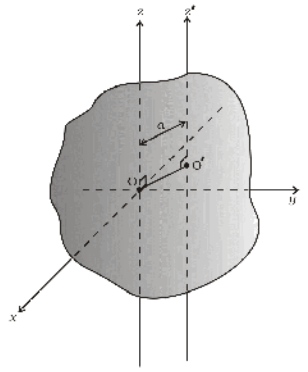
അതുകൊണ്ട്, ഒരു വൃത്തതകിടിന്റെ ഏതെങ്കിലും വ്യാസത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ചുറ്റുമുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ $MR^2/4$ ആയിരിക്കും.

അതേപോലെ ഒരു വളയത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും വ്യാസത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കണ്ടെത്തുക. ഈ തത്ത്വം ഒരു ഖരസിലിണ്ടറിനുകൂടി ബാധകമാകുമോയെന്നു പരിശോധിക്കുക.

7.10.1 സമാന്തര അക്ഷസിദ്ധാന്തം (Theorem of Parallel Axes)

ഏത് ആകൃതിയുള്ള വസ്തുവിലും പ്രയോഗിക്കാവുന്ന ഒരു തത്വമാണിത്. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ അറിയാമെങ്കിൽ അതിനു സമാന്തരമായ ഏതൊരക്ഷത്തിനെയും ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ നിർണ്ണയിക്കാൻ ഈ സിദ്ധാന്തം നമ്മെ സഹായിക്കും. ഈ തത്വമിവിടെ പ്രസ്താവിക്കുക മാത്രമേ ചെയ്യുന്നുള്ളൂ. അതിന്റെ വിശദമായ തെളിവുകൾ ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യുന്നില്ല. ഈ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ഉപയോഗം മനസ്സിലാക്കുന്നതിലേക്കായി ചില ചെറിയ ഉദാഹരണങ്ങൾ ഇവിടെ നൽകുക മാത്രമേ ചെയ്യുന്നുള്ളൂ. ഈ സിദ്ധാന്തം താഴെ പറയും പ്രകാരം പ്രസ്താവിക്കാൻ കഴിയും.

ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു അക്ഷത്തിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ, ആ അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന അക്ഷത്തിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുടെയും, വസ്തുവിന്റെ മാസും അക്ഷങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ലംബദൂരത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും തമ്മിലുള്ള ഗുണിതത്തിന്റെയും തുകയാണ്.



ചിത്രം 7.31 സമാന്തരാക്ഷസിദ്ധാന്തം. a ദൂരത്താൽ വേർതിരിക്കപ്പെട്ട രണ്ട് സമാന്തര അക്ഷങ്ങളാണ് Z, Z' എന്നിവ. O എന്നത് വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രമാണ്, $OO' = a$

* *Note: Kinematic- ശുദ്ധഗതികം. ദ്രവ്യവ്യൂഹത്തെ പരിഗണിക്കാതെ കണങ്ങളുടെ ചലനത്തെ സംബന്ധിച്ച പഠനം- ബലതന്ത്രത്തിലെ ഒരു ശാഖ*

* * *:Degree of freedom -അണുവിന്റെയോ തന്മാത്രയുടെയോ സ്വതന്ത്രമായ ചലന ഘടകങ്ങളിൽ ഒന്ന് (സ്ഥാനാന്തരം, കമ്പനം, പരിക്രമണം തുടങ്ങിയവ)*

ചിത്രം 7.31 ൽ ഉള്ളതുപോലെ Z ഉം Z' ഉം രണ്ടു സമാന്തര അക്ഷങ്ങളും അവ തമ്മിലുള്ള അകലം a യും ആണ്. Z- അക്ഷം ആ വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യകേന്ദ്രത്തിലൂടെ, അതായത് 'O' യിൽക്കൂടി കടന്നുപോവുന്നു. സമാന്തരാക്ഷ സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്

$$I_{z'} \quad I_z + Ma^2 \qquad (7.37)$$

ഇതിൽ I_z ഉം $I_{z'}$ ഉം യഥാക്രമം Z- അക്ഷത്തിനെയും Z'- അക്ഷത്തിനെയും ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യകളാണ്. M എന്നത് വസ്തുവിന്റെ ആകെ പിണ്ഡവും a എന്നത് രണ്ട് സമാന്തര അക്ഷങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ലംബദൂരവുമാണ്.

ഉദാഹരണം 7.11: M മാസും l നീളവുമുള്ള ഒരു ദണ്ഡിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരഗ്രത്തിലൂടെ ദണ്ഡിനു ലംബമായി കടന്നു പോകുന്ന അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം:

ദണ്ഡിന്റെ പിണ്ഡം M ഉം നീളം l -ഉം ആണ്, $I=Ml^2/12$ സമാന്തര അക്ഷതത്ത്വം ഉപയോഗിച്ച് $I' \quad I+Ma^2$, ഇവിടെ $a=l/2$ ആണ്.

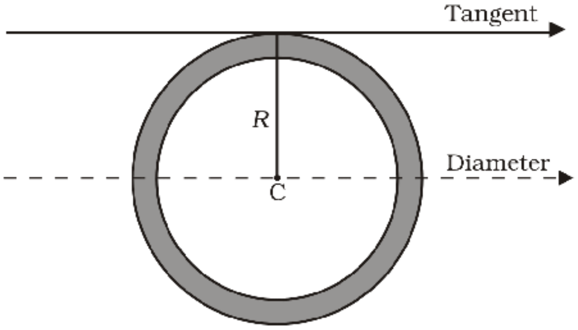
അതുകൊണ്ട് $I' = M\dfrac{l^2}{12} + M\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 = \dfrac{Ml^2}{3}$

ഇതിന്റെ സാധ്യത മറ്റൊരുതരത്തിൽ നമുക്കു പരിശോധിച്ചു നോക്കാം. I എന്നത് 2 M മാസ്സുള്ളതും $2l$ നീളമുള്ളതുമായ ഒരു ദണ്ഡിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയുടെ പകുതിയാണ്. അതായത്

$$I' = 2M.\frac{4l^2}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{Ml^2}{3}$$ ◀

ഉദാഹരണം 7.12 പുറത്തെ തൊടുവരയെ ആധാരമാക്കി ഒരു വൃത്ത വളയത്തിന്റെ മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉത്തരം: വളയത്തിന്റെ പുറംപ്രതലത്തിലെ ബിന്ദുവിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവര (tangent) ക്ക് സമാന്തരമായി വളയ വൃത്തത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലുമൊരു വ്യാസം ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇങ്ങനെയുള്ള രണ്ടു സമാന്തരരേഖകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം വളയത്തിന്റെ ആരം R ആണ്. സമാന്തര അക്ഷതത്വമുപയോഗിച്ചാൽ



ചിത്രം 7.32

$$I_{\text{സ്പർശരേഖ}} = I_{\text{വ്യാസം}} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$ ◀

7.11. ഒരു നിശ്ചലഅക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണത്തിന്റെ ഗതികം (Kinematics of Rotational Motion about a Fixed Axis)

സ്ഥാനാന്തരചലനവും പരിക്രമണചലനവും തമ്മിൽ ബന്ധപ്പെടുന്ന സദൃശം (analogy) മുൻപ് സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ളതാണ്. ഉദാഹരണത്തിന് സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിലെ രേഖീയപ്രവേഗം v യുടെ അതേ സ്ഥാനം തന്നെയാണ് പരിക്രമണചലനത്തിൽ കോണീയപ്രവേഗം ω ക്ക് ഉള്ളത്. ഇത്തരത്തിലുള്ള മറ്റു സദൃശങ്ങൾ കണ്ടെത്തി ചർച്ച ചെയ്യുവാനാണ് ഈ വിഭാഗത്തിൽ ശ്രമിക്കുന്നത്. ഒരു നിശ്ചലഅക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണചലനത്തിൽ മാത്രം കേന്ദ്രീകരിച്ചാണ് നാം ഇവിടെയിതു ചെയ്യുന്നത്.

ഈ ചലനത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്നത് ഡിഗ്രീസ് ഓഫ് ഫ്രീഡത്തിൽ (degrees of freedom)** ഒന്നു മാത്രമാണ്. അതായത്, ചലനത്തെ വിശദീകരിക്കാൻ ഏതെങ്കിലും ഒരു സ്വതന്ത്ര ചരത്തിന്റെ (variable) ആവശ്യം മാത്രമേ ഇവിടെ വരുന്നുള്ളു എന്നർത്ഥം. രേഖീയചലനത്തിൽ ഇത് സ്ഥാനാന്തരമാണ്. ഈ വിഭാഗത്തിലെ ചർച്ച ശുദ്ധ ഗതിക (kinematic) ത്തിലേക്ക് പരിമിതപ്പെടുത്തേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. ഗതികത്തെ (dynamics)പ്പറ്റിയുള്ള ചർച്ചകളിലേക്ക് പിന്നീട് നമുക്ക് പോകാം.

കോണീയസ്ഥാനമാറ്റമെന്തെന്നു വ്യക്തമാക്കുവാൻ പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന വസ്തുവിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു P പരിഗണിക്കാം. (ചിത്രം 7.33) വസ്തു ചലിക്കുന്ന തലത്തിലുള്ള P യുടെ കോണീയ സ്ഥാനമാറ്റം θ ആ വസ്തുവിന് മൊത്തമായുണ്ടാകുന്ന കോണീയസ്ഥാനമാറ്റമാണ്. P യുടെ ചലനതലത്തിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു നിശ്ചിത

ദിശയെ ആസ്പദമാക്കിയാണ് θ അളക്കുക. ഇവിടെ അത് x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായിട്ടുള്ള x^{1} – അക്ഷമായിട്ടാണ് എടുത്തിട്ടുള്ളത്. (ചിത്രം ശ്രദ്ധിക്കുക). ചിത്രത്തിൽ ZP യുടെ പരിക്രമണ അക്ഷവും, പരിക്രമണതലം x-y തലവുമായിട്ടാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. t = 0 എന്ന സമയത്തെ കോണീയ സ്ഥാനമാറ്റം θ_0 കൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

കോണീയ സ്ഥാനമാറ്റത്തിന്റെ വ്യത്യാസനിരക്ക് $\omega = d\theta/dt$, കോണീയപ്രവേഗമാണ്. പരിക്രമണാക്ഷം നിശ്ചലമായതിനാൽ, കോണീയപ്രവേഗം ഒരു സദിശമായി കരുതേണ്ടതില്ല. കൂടാതെ കോണീയത്വരണം, $\alpha = d\omega/dt$ എന്നും എടുത്തിരിക്കുന്നു.

പരിക്രമണത്തിലെ ശുദ്ധഗതികപരിമാണങ്ങളായ, കോണീയസ്ഥാനമാറ്റം (θ), കോണീയപ്രവേഗം (ω), കോണീയത്വരണം (α) എന്നിവ ഓരോന്നും രേഖീയചലനത്തിലെ ശുദ്ധഗതിക പരിമാണങ്ങളുമായി യഥാക്രമം അനുപൂരകമാകുന്നത് യഥാക്രമം സ്ഥാനമാറ്റം (x), പ്രവേഗം (v), ത്വരണം (a) എന്നിവയുമായാണ്. രേഖീയ ചലനത്തിൽ സ്ഥിര ത്വരണമാണെങ്കിൽ ശുദ്ധഗതികത്തിലെ സമവാക്യങ്ങൾ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന വിധമാകും.

$$v = v_0 + at \quad \text{(a)}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{(b)}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \quad \text{(c)}$$

ഇതിൽ x_0 – *പ്രാരംഭ സ്ഥാനമാറ്റവും* v_0 = *ആദ്യ പ്രവേഗവുമാണ്*. ഇവിടെ ആദ്യം - (initial) എന്നതുകൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത് t = 0 സമയത്തുള്ള അളവുകളാണ്.

ഇതിനോട് അനുയോജ്യമാകുന്ന സ്ഥിരകോണീയത്വരണമുള്ള ഒരു പരിക്രമണചലനത്തിന്റെ ശുദ്ധഗതിക സമവാക്യങ്ങൾ താഴെ കാണിക്കുന്നു.

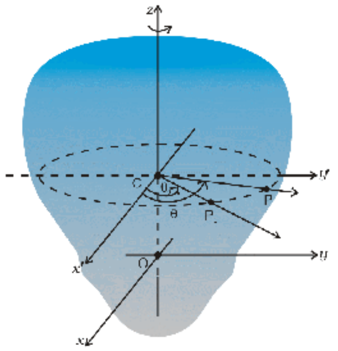
$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (7.38)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (7.39)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (7.40)$$

ഇതിൽ θ_0 = ഒരു പരിക്രമണവസ്തുവിന്റെ പ്രാരംഭ കോണീയ സ്ഥാനമാണ്.

ω_0 = വസ്തുവിന്റെ പ്രാരംഭ കോണീയ പ്രവേഗവുമാണ്.



ചിത്രം–7.33: ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ കോണീയസ്ഥാനം വ്യക്തമാകുന്ന ചിത്രം.

ഉദാഹരണം–7.13: അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങളിൽ നിന്നും സമവാക്യം 7.38 ലഭ്യമാക്കുക.

ഉത്തരം: കോണീയത്വരണം ഏകതാനമാണ്, അതിനാൽ

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = constant \quad \text{(i)}$$

ഈ സമവാക്യം സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$\omega = \int \alpha \, dt + c$$

$= \alpha t + c$ (α ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയെന്ന നിലയിൽ)

$t = 0$ ആകുമ്പോൾ $\omega = \omega_0$ (തന്നിരിക്കുന്നു) ഇതുപ്രകാരം (i) ൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്നത് $t = 0$ ആകുമ്പോൾ, $\omega = c = \omega_0$

അതിനാൽ $\omega = \alpha t + \omega_0$

$\omega = d\theta/dt$ എന്ന നിർവ്വചന സമവാക്യം **7.38** ൽ ആരോപിച്ച ശേഷം സമാകലനം ചെയ്താൽ സമവാക്യം 7.39 ലഭിക്കുന്നു. ഈ സമവാക്യവും, സമവാക്യം 7.40 ന്റെയും രൂപീകരണം പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങളായി ചെയ്യുക.

ഉദാഹരണം : 7.14 ഒരു മോട്ടോർ ചക്രത്തിന്റെ കോണീയ വേഗത 1200 rpm ൽ നിന്ന് 3120 rpm ലേക്ക് 16 സെക്കന്റിൽ എത്തുന്നു. (i) അതിന്റെ കോണീയത്വരണം എത്ര? ഇതിന്റെ ത്വരണം ഏകമാനമാണെന്ന് എടുക്കുക? (ii) ഈ സമയം കൊണ്ട് യന്ത്രം എത്ര പ്രാവശ്യം തിരിയും?

ഉത്തരം:

(i) ഇവിടെ ഉപയോഗിക്കേണ്ട സമവാക്യം $\omega = \omega_0 + \alpha t$ എന്നാണ്.

ω_0 = പ്രാരംഭ കോണീയവേഗം, റേഡിയൻ/സെക്കന്റിൽ (rad/s)

$= 2\pi \times$ കോണീയ വേഗം പരിക്രമണം/സെക്കന്റ് (rev/s)

$= \dfrac{2\pi \times \text{കോണീയ വേഗത പരിക്രമണം/മി.ൽ}}{60 \text{ സെ/മി}}$

$= \dfrac{2\pi \times 1200}{60}$ rad/s

π = 40 rad/s

അതുപോലെ ω = അന്തിമകോണീയ വേഗത rad/s ൽ

$$= \frac{2\pi \times 3120}{60} \text{ rad/s}$$

$$= 2\pi \times 52 \text{ rad/s}$$

$$= 104\,\pi \text{ rad/s}$$

∴ കോണീയത്വരണം

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} \qquad = 4\ \pi \quad \text{rad/s}^2$$

യന്ത്രത്തിന്റെ കോണീയത്വരണം = 4π rad/s²

(ii) t സമയത്തിലുള്ള കോണീയ സ്ഥാനമാറ്റം കണക്കാക്കുന്നതിന്:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$= (40\pi \times 16 + \frac{1}{2} \times 4\pi \quad .6^2) \text{ rad}$$

$$= (640\pi + 512\pi) \text{ rad}$$

$$= 1152\pi \text{ rad}$$

തിരിയലുകളുടെ എണ്ണം = $\dfrac{1152\pi}{2\pi} = 576$ ◀

7.12 ഒരുനിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണചലനത്തിന്റെ ഗതികം (Dynamics of rotational motion about a fixed axis)

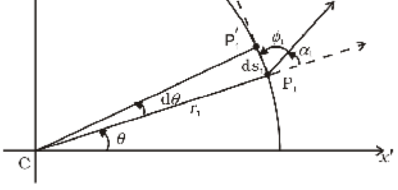
പട്ടിക 7.2 ൽ രേഖീയചലനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട അളവുകളും അവയുടെ പരിക്രമണചലനത്തിലെ സദൃശ (analogue) ങ്ങളും കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഈ രണ്ടു ചലനങ്ങളുടെയും ശുദ്ധഗതികം മുമ്പ് താരതമ്യം ചെയ്തു കഴിഞ്ഞതാണ്. കൂടാതെ, പരിക്രമണചലനത്തിൽ, മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയും ടോർക്കും നിർവഹിക്കുന്ന അതേ ധർമ്മങ്ങൾ തന്നെയാണ് രേഖീയചലനത്തിൽ യഥാക്രമം മാസും ബലവും അനുവർത്തിക്കുന്നതെന്ന് നാം മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽനിന്നും പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന മറ്റു സദൃശങ്ങൾ എന്തൊക്കെയാവാമെന്ന് ഊഹിക്കാൻ കഴിയേണ്ടതാണ്. ഉദാഹരണത്തിന്, $dx \rightarrow d\,\theta$,യുടേയും $= \tau \rightarrow F$ ന്റെയും പരസ്പരബന്ധം നമുക്കറിയാം, രേഖീയ ചലനത്തിൽ പ്രവൃത്തിയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $F\,dx$ ആണെന്നും അതുപോലെ ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണചലനത്തിൽ അത് $\tau\,d\,\theta$ ആയിരിക്കണമെന്ന് നമുക്ക് അനുമാനിക്കാവുന്നതാണ്. അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഇത്തരം അനുരൂപങ്ങളെ ഗതികത്തിന്റെ പരിഗണനവെച്ച് കുറച്ചുകൂടി നന്നായി വ്യക്തമാക്കേണ്ടതുണ്ടെന്ന് തോന്നുന്നു. ഇക്കാര്യത്തിനാണ് ഇനി നാം ശ്രമിക്കുന്നത്.

അതിന്റെ മുന്നോടിയായി, ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തിനു ചുറ്റുമുള്ള പരിക്രമണചലനത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ ഒരു ലഘൂകരണം കൊണ്ടുവരേണ്ടതുണ്ട്. അക്ഷം നിശ്ചലമായതിനാൽ, നിശ്ചലഅക്ഷത്തിന്റെ ദിശയിൽ കൂടിയുള്ള ടോർക്കുകളുടെ ഘടകങ്ങൾ മാത്രമേ പരിഗണനയിലേക്ക് കൊണ്ടുവരേണ്ടതുള്ളൂ. ഈ ഘടകങ്ങൾക്കു മാത്രമാണ് വസ്തുവിനെ നിശ്ചലഅക്ഷത്തിന് ആധാരമാക്കി പരിക്രമണം ചെയ്യിക്കുവാൻ സാധിക്കുന്നത്. പരിക്രമണാക്ഷത്തിന് ലംബമായിട്ടുള്ള ടോർക്കിലെ ഘടകം അക്ഷത്തെ അതിന്റെ സ്ഥാനത്തു നിന്ന് തിരിക്കാനുള്ള പ്രവണത കാണിക്കുന്നുണ്ട്. എന്നാൽ ടോർക്കിന്റെ ലംബിത ഘടകത്തിന്റെ *(ബാഹ്യ)* ഇത്തരം സ്വാധീനത്തെ നിയന്ത്രിക്കാനും റദ്ദാക്കാനുമായി ആവശ്യമായ മറ്റൊരു ബലം അതിനെതിരായി ഉണ്ടാകുമെന്നു തന്നെയാണ് പ്രതീക്ഷിക്കേണ്ടത്. അതിനാൽ അക്ഷത്തിന്റെ സ്ഥാനസ്ഥിരത സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നു. അതുകൊണ്ട് ലംബിത ടോർക്ക് കണക്കിലെടുക്കേണ്ട കാര്യമില്ല. ഇതുകൊണ്ട് അർഥമാക്കുന്നത് ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്മേലുള്ള ടോർക്കിന്റെ ഘടകങ്ങളിൽ പരിഗണിക്കപ്പെടേണ്ടവയും അല്ലാത്തവയും ഉണ്ടെന്നാണ് താഴെ പറയുന്നതു പോലെ അവയെ സൂചിപ്പിക്കാം.

(i) അക്ഷത്തിന് ലംബമായിട്ടുമുള്ള തലത്തിലെ ബലങ്ങളെ മാത്രമേ ഇവിടെ പരിഗണിക്കേണ്ടതുള്ളൂ: അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി വരുന്ന ബലങ്ങൾ അക്ഷത്തിന് ലംബമായ ടോർക്കായി പരിണമിക്കുമെങ്കിലും ആയത് ഇവിടെ കണക്കിലെടുക്കേണ്ട കാര്യമില്ല.

(ii) അക്ഷത്തിന് ലംബമായിട്ടുള്ള സ്ഥാനസദിശ ഘടങ്ങൾ (position vectors) മാത്രമേ പരിഗണിക്കേണ്ടതുള്ളൂ. അക്ഷത്തിൽ കൂടിയുള്ള സമാന്തരമായ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ അക്ഷത്തിന് ലംബമായ ടോർക്കിന് കാരണമാകാനിടയുണ്ട്. അതിനാൽ അവയെ കണക്കിലെടുക്കേണ്ട.

ഒരു ടോർക്ക് മൂലമുള്ള പ്രവൃത്തി (Work done by a torque)



ചിത്രം-7.34 ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തിനെ ആധാരമാക്കി കറങ്ങുന്ന ഒരു വസ്തുവിലെ ഒരു കണികയിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന F_1 ബലം. ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി. അക്ഷത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന 'C' എന്ന കേന്ദ്രത്തിനു ചുറ്റുമായി ഒരു വൃത്താകാര സഞ്ചാരപാതയിലാണ് ഇവിടെ കണിക സഞ്ചരിക്കുന്നത്. P_1, P'_1 എന്ന ചാപം (arc-ds_1) കണികയുടെ സ്ഥാനമാറ്റം കാണിക്കുന്നു.

ചിത്രം 7.34 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് ഒരു നിശ്ചലാക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഛേദതലമാണ്. ഇവിടെ സ്ഥിരാക്ഷമായി എടുത്തിരിക്കുന്നത് പേപ്പറിനു ലംബദിശയിൽ സങ്കൽപിച്ചിരിക്കുന്ന z അക്ഷമാണ്. നാം നേരത്തേ സൂചിപ്പിച്ച രീതിയിലുള്ള അക്ഷത്തിനു ലംബമായ തലത്തിലൂടെ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം മാത്രമേ ഇവിടെ നാം പരിഗണിക്കുന്നുള്ളൂ. വസ്തുവിലെ ഒരു ബിന്ദുവായ P_1 ലൂടെ അക്ഷത്തിന്റെ ലംബതലത്തിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ഇത്തരത്തിലുള്ള ഒരു ബലമാണ് F_1 എന്നു സങ്കൽപിക്കാം. (ചിത്രം 7.33 ശ്രദ്ധിക്കുക). ഈ ലംബതലത്തെ നമുക്ക് x'-y' തലമായിട്ടെടുക്കാം. [x'-y' തലം പേപ്പറിന്റെ തലം തന്നെയാണ് എന്ന് കാണുവാൻ കഴിയും]. ഇവിടെ P_1 അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുവായ C കേന്ദ്രമാക്കി r_1 ആരമുള്ള വൃത്തപാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നു. അതിനാൽ $CP_1 = r_1$.

Δt സമയത്ത്, ഈ ബിന്ദു P1'സ്ഥാനത്തെത്തുന്നു. കണികയുടെ സ്ഥാനമാറ്റം ചിത്രത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $d\,\mathbf{s}_1$ ആണ്. അതിനാൽ, $ds_1 = r_1\, d\theta$ യും അതിന്റെ ദിശ P_1 സ്ഥാനത്തുകൂടിയുള്ള തൊടുവരയിലൂടെയുമാണ്. ഇവിടെ, കണികയുടെ കോണീയ സ്ഥാനമാറ്റം $d\theta$ ആണ്, $d\theta = \angle P_1CP_1'$. കണികയുടെ ബലം ചെയ്ത പ്രവൃത്തി

$$dW_1 \quad \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{ds}_1 = F_1 ds_1 \cos\phi_1 = F_1 (r_1\, d\theta) \sin\alpha_1$$

ϕ_1 എന്നത് F_1 ന്റേയും ആരസദിശം OP_1 ന്റെയും ഇടയിലുള്ള കോൺ ആണ്. അതായത് $\phi_1 + \alpha_1 = 90^0$

അതുകൊണ്ട് $\phi_1 = (90 - \alpha_1)$ (ചിത്രം 7.34). തന്മൂലം cos $\phi_1 = \cos(90 - \alpha_1) = \sin\alpha_1$. ഇവിടെ $\mathbf{OP_1 x F_1}$ എന്നത് മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള $\mathbf{F}_1$ ന്റെ ടോർക്ക് ആണ്. ഇവിടെ $OP_1 = OC + CP_1$ (ചിത്രം 7.17 b പരിശോധിക്കുക). OC അക്ഷത്തിൽ കൂടിത്തന്നെ ആയതിനാൽ അതിൽ നിന്നും ഉത്ഭവിക്കുന്ന ടോർക്ക് ഇവിടെ പരിഗണനക്കു എടുക്കേണ്ടതില്ല. F_1 ന്റെ പ്രവർത്തനംമൂലം ഫലപ്രദമായിവരുന്ന ടോർക്ക് $\tau_1 = CP \times F_1$ ആണ്. അതിന്റെ ദിശ പരിക്രമണാക്ഷത്തിലൂടെയാണ്. അതിന്റെ അളവ് $\tau_1 = r_1 F_1 \sin\theta$ എന്നുമാണ്. അതുകൊണ്ട്, ഈ ടോർക്ക് ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി

$$dW = \tau_1 d\theta$$

വസ്തുവിന്മേൽ ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നുണ്ടെങ്കിൽ, അവയെല്ലാം ചെയ്ത പ്രവൃത്തി ഒരുമിച്ചുകൂട്ടി മൊത്തം പ്രവൃത്തി ലഭ്യമാക്കാം. ഇവിടെ കോണീയസ്ഥാനമാറ്റത്തിന്റെ അളവ് $d\theta$ എല്ലാ കണികകൾക്കും ഒരുപോലെയാണ്. അതിനാൽ എല്ലാ ടോർക്കുകളും നിശ്ചല അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണ്. അതുകൊണ്ട് ആകെ ടോർക്കുകളുടെ അളവ് τ കണക്കാക്കുന്നത് എല്ലാ ടോർക്കുകളുടെയും ബലങ്ങളുടെയും ബീജഗണിത തുകയെടുത്തുകൊണ്ടാണ്. അതായത്

$$dW = (\tau_1 + \tau_2 + \ldots) d\theta$$

$$dW = \tau d\theta \qquad (7.41)$$

പട്ടിക– 7.2 സ്ഥാനാന്തരം പരിക്രമണ ചലനങ്ങളുടെ താരതമ്യം

	രേഖീയചലനം			പരിക്രമണചലനം		
1	സ്ഥാനമാറ്റം	(displacement)	x	കോണീയസ്ഥാനമാറ്റം	(angular displacement)	θ
2	പ്രവേഗം	(velocity)	$v = dx/dt$	കോണീയപ്രവേഗം	(angular velocity)	$\omega \quad d\theta/dt$
3	ത്വരണം	(acceleration)	$a = dv/dt$	കോണീയത്വരണം	(angular acceleration)	$\alpha = d\omega/dt$
4	മാസ്	(mass)	M	മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ	(moment of inertia)	I
5	ബലം	(force)	F = Ma	ടോർക്ക്	(torque)	$\tau = I\alpha$
6	പ്രവൃത്തി	(work)	$dW \quad Fds$	പ്രവൃത്തി	(work)	$W \quad \tau d\theta$
7	ഗതികോർജം	(kinetic energy)	$K \quad Mv^2/2$	ഗതികോർജം	(kinetic energy)	$K \quad I\omega^2/2$
8	പവർ	(power)	$P = Fv$	പവർ	(power)	$P = \tau\omega$
9	രേഖീയ ആക്കം	(linear momentum)	$P = Mv$	കോണീയ ആക്കം	(angular momentum)	$L = I\omega$

ഈ സൂചനയിലൂടെ ലഭിക്കുന്നത്, ഒരു വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണത്തിൽ നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് ആധാരമായി പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ആകെ (ബാഹ്യ) ടോർക്ക് τ മൂലം ചെയ്യപ്പെട്ട പ്രവൃത്തിയാണ്. ഇതേപോലുള്ള മറ്റൊരു, സമവാക്യം

$dW = F\,ds$ നമുക്ക് പരിചിതമാണ്.

ഇത് രേഖീയ സമാന്തരചലനത്തിനുള്ള പ്രവൃത്തിയുടേതാണ്. സമവാക്യം (7.41) ൽ ഇരുവശങ്ങളും dt കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്നത്

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

അഥവാ $P = \tau\omega$ (7.42)

ഇത് തൽക്ഷണ പവർ ആണ്. ഇത് രേഖീയ ചലനത്തിലെ പവറുമായി $(P = Fv)$ താരതമ്യം ചെയ്യുവാൻ കഴിയും.

ഒരു യഥാർഥ ദൃഢവസ്തുവിൽ ആന്തരികചലനങ്ങൾ ഉണ്ടാവില്ല. അതിനാൽ ബാഹ്യ ടോർക്ക് മൂലം ചെയ്യപ്പെടുന്ന പ്രവൃത്തി, ശോഷണത്തിനു (dissipiate) വിധേയമാവാതെ വസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജത്തെ വർധിപ്പിക്കുന്നതിനായി ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്നു. വസ്തുവിന്മേൽ ചെയ്യപ്പെടുന്ന പ്രവൃത്തിയുടെ നിരക്ക് സമവാക്യം (7.42) ലൂടെ ലഭിക്കുന്നുണ്ട്. ഇതിനെ നമുക്ക് ഗതികോർജത്തിന്റെ വർധനാനിരക്കിലേക്ക് മാറ്റിയെഴുതാം. ഗതികോർജത്തിന്റെ വർധന നിരക്ക്

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\frac{(2\omega)}{2}\frac{d\omega}{dt}$$

മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ സമയത്തിനനുസരിച്ച് മാറ്റത്തിന് വിധേയമാവുന്നില്ലെന്നാണ് കരുതപ്പെടുന്നത്. ഒരു വസ്തുവിന്റെ മാസിന് മാറ്റം സംഭവിക്കുന്നില്ലെന്ന് പറയുന്നതും ഇതേ അർഥത്തിലാണ്. അതിനാൽ വസ്തു എപ്പോഴും ദൃഢമായിരിക്കും. അതുപോലെ വസ്തുവിനെ സംബന്ധിച്ച് അതിന്റെ അക്ഷത്തിന്റെ സ്ഥാനവും മാറുന്നില്ല.

$\alpha = d\omega/dt$, ആയതിനാൽ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\,\omega\,\alpha$$ എന്നു ലഭിക്കും

ചെയ്യപ്പെട്ട പ്രവൃത്തിയുടെ നിരക്കും ഗതികോർജത്തിലെ വർധനയും ഒരു സമീകരണത്തിലേക്കു കൊണ്ടുവന്നാൽ താഴെ കാണിച്ചതു പ്രകാരം എഴുതാം.

$$\tau\omega = I\,\omega\,\alpha$$

$$\tau = I\alpha \qquad (7.43)$$

സമവാക്യം (7.43) രേഖീയചലനത്തിലെ ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം തരുന്ന

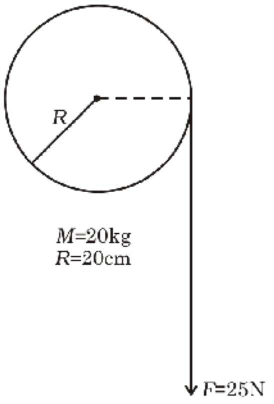
$F = ma$ എന്ന സമവാക്യത്തിനു സമാനമാണിത്.

ബലം ത്വരണത്തെ സൃഷ്ടിക്കുന്നതുപോലെ ടോർക്ക് ഒരു വസ്തുവിൽ കോണീയ ത്വരണം സൃഷ്ടിക്കുന്നു. കോണീയത്വരണം പ്രയോഗിക്കപ്പെട്ട ടോർക്കിന് നേർ ആനുപാതികവും വസ്തുവിന്റെ മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യക്ക് വിപരീത ആനുപാതത്തിലുമായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട്, സമവാക്യം (7.43) ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണചലനത്തിലെ ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം നിയമമായി അറിയപ്പെടുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.15. 20kg മാസും 20 cm ആരവുമുള്ള ഒരു ഫ്ളൈവീൽ (Flywheel) (ചാലകചക്രം) തിരശ്ചീനമായി ഉറപ്പിച്ചിട്ടുള്ള അക്ഷത്തിൽ ഘർഷണ രഹിത ബെയറിംഗ് ഉപയോഗിച്ച് ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഫ്ളൈവീലിന്റെ റിമ്മിനു ചുറ്റും നീളമുള്ള ഒരു ചരട് ചുറ്റിയിരിക്കുന്നു. (ചരടിന്റെ മാസ് നിസാരമാണ്) ചിത്രം 7.35 ൽ കാണുന്ന രീതിയിൽ 25 N ബലം ഉപയോഗിച്ച് ചരടിനെ ക്രമായി വലിക്കുന്നു.

a) ചക്രത്തിന്റെ കോണീയത്വരണം കണക്കാക്കുക
b) ചരട് 2 മീറ്റർ വലിക്കപ്പെട്ടതിന് ശേഷം വലിക്കലിന്റെ ഫലമായി ചെയ്യപ്പെട്ട പ്രവൃത്തി കണക്കാക്കുക.
c) ഇതേ സ്ഥാനത്തുതന്നെ ചക്രത്തിന്റെ ഗതികോർജം കണക്കാക്കുക. ചക്രം നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്ന് ചലനം ആരംഭിച്ചതായി കരുതുക.
d) മുകളിൽപറഞ്ഞ (b), (c) എന്നിവയുടെ ഉത്തരങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യുക.

ഉത്തരം:



ചിത്രം–7.35

(a) ഇവിടെ പ്രയോഗിക്കേണ്ടത് $I\alpha \quad \tau$ എന്ന സമവാക്യമാണ്.

ടോർക്ക് $\tau = FR$
$= 25 \times 0.20$ Nm ($R = 0.20$m ആയതിനാൽ)
$= 5.0$ Nm

I = ചാലക ഫ്ളൈവീലിന്റെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ

$$= \frac{MR^2}{2}$$

$$= \frac{20.0 \times (0.2)^2}{2} = 0.4 \text{ kg m}^2$$

α = കോണീയത്വരണം
$= 5.0$ N m/0.4 kg m^2 = 12.5 s^{-2}

(b) 2 മീറ്റർ ചരട് വലിച്ചപ്പോൾ ചെയ്യപ്പെട്ട പ്രവൃത്തി
= 25 N × 2m = 50 J

(c) അന്തിമ കോണീയപ്രവേഗം ω എന്നിരിക്കട്ടെ.

നേടിയ ഗതികോർജത്തിന്റെ അളവ് = $\frac{1}{2}I\omega^2$.

ഫ്ളൈവീലിന്റെ ചക്രത്തിന്റെ ചലനം പ്രാരംഭാവസ്ഥയിൽ നിന്നുതന്നെ കണക്കിലെടുക്കുന്നതിനാൽ

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta, \quad \omega_0 = 0$$

കോണീയ സ്ഥാനാന്തരം വലിച്ചെടുത്ത ചരടിന്റെ നീളം ÷ ചക്രത്തിന്റെ ആരം
= 2m/0.2 m = 10 rad

$$\omega^2 = 2 \times 12.5 \times 10.0 = 250\,(\text{rad/s})^2$$

$$\therefore \text{ കൈവരിച്ച ഗതികോർജം} = \frac{1}{2} \times 0.4 \times 250 = 50 \text{ J}$$

(d) ഉത്തരങ്ങൾ ഒരേപോലെ വന്നിരിക്കുന്നു. അതായത്, *ചക്രം നേടിയ ഗതികോർജം=ബലം ചെയ്ത പ്രവൃത്തി.* ഇവിടെ ഘർഷണം മൂലം ഊർജം നഷ്ടപ്പെടുന്നില്ല. ◀

7.13 ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണത്തിലെ കോണീയ ആക്കം (Angular momentum in case of rotation about a fixed axis)

ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ കോണീയ ആക്കത്തെക്കുറിച്ച് വിഭാഗം 7.7 ൽ പഠിച്ചതാണല്ലോ. ഒരു ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ആകെ കോണീയ ആക്കത്തിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് ആ വ്യവസ്ഥയിൽ ആ ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ബാഹ്യ ടോർക്കുകളുടെ തുകക്ക് തുല്യമായിരിക്കുമെന്ന് ഈ പഠനങ്ങളിലൂടെ നമ്മൾ മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ബാഹ്യടോർക്കുകൾ പൂജ്യമാകുന്നിടത്ത് വ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്ത കോണീയ ആക്കം സംരക്ഷിതമായിരിക്കും.

ഇപ്പോൾ നമ്മൾ മനസ്സിലാക്കാൻ പോകുന്നത്, ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണത്തിൽ വരുന്ന കോണീയ ആക്കത്തെക്കുറിച്ചാണ്. ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്തം കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ പൊതു സമവാക്യം താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad (7.25b)$$

പരിക്രമണത്തിലുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തുവിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു കണികയുടെ കോണീയ ആക്കത്തെ ആദ്യം പരിഗണിക്കാം. അതിനുശേഷം ഓരോ കണത്തിന്റെയും സംഭാവനകൾ കൂട്ടിയെടുത്തുകൊണ്ട് വസ്തുവിന്റെയാകെ L കണ്ടെത്താവുന്നതാണ്. ഒരു കണികയെ സംബന്ധിച്ച് $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ആണ്. തൊട്ടുമുമ്പത്തെ വിഭാഗത്തിൽ കണ്ടതുപോലെ $\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \mathbf{OC} + \mathbf{CP}$ (ചിത്രം7.17b). $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ എന്നായാൽ,

$$\mathbf{l} = (\mathbf{OC} \times m\,\mathbf{v}) + (\mathbf{CP} \times m\,\mathbf{v})$$

രേഖീയപ്രവേഗം $\mathbf{v}$ യുടെ പരിമാണം P എന്ന സ്ഥാനത്തെ കണികയെ സംബന്ധിച്ച് തന്നിരിക്കുന്നത് $v = \omega r_1$ എന്നാണ്. ഇതിൽ, r_1 എന്നത് പരിക്രമണാക്ഷത്തിൽ നിന്ന് P യിലേക്കുള്ള ലംബദൂരവും CP യുടെ നീളവുമാണ്. P എന്ന കണികയുടെ വൃത്താകാര പാതയിൽ ഉള്ള തൊടുവരയിലൂടെയാണ് v യുടെ ദിശ. വലംകൈ നിയമമുപയോഗിച്ച് പരിശോധിക്കുമ്പോൾ $\mathbf{CP} \times \mathbf{v}$ നിശ്ചലാക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണെന്ന് കാണാനാവും. അക്ഷത്തിൽ (Z അക്ഷം) കൂടിയുള്ള യൂണിറ്റ് സദിശം $\hat{\mathbf{k}}$ യാണ്. അതിനാൽ

$$\mathbf{CP} \times m\,\mathbf{v} = r_1\,(mv)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= m r_1^2 \omega\,\hat{\mathbf{k}} \quad (v = \omega r \text{ ആയതിനാൽ})$$

അതുപോലെ $\mathbf{OC} \times \mathbf{v}$ നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് ലംബമാണെന്ന് പരിശോധിച്ചു നോക്കാവുന്നതാണ്. നിശ്ചല അക്ഷത്തിലൂടെയുള്ള l ഘടകത്തെ $\mathbf{l}_z$ എന്ന് എഴുതിയാൽ

$$\mathbf{l}_z = \mathbf{CP} \times m\,\mathbf{v} = m r^2 \omega\,\hat{\mathbf{k}}$$

അതുകൊണ്ട് $\quad \mathbf{l} = \mathbf{l}_z + \mathbf{OC} \times m\,\mathbf{v}$

$\mathbf{l}_z$ നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാണ്, എന്നാൽ l സമാന്തരമല്ല. കണികയെ സംബന്ധിച്ച് പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, l എന്ന കോണീയ ആക്കം, പരിക്രമണാക്ഷത്തിലൂടെയുള്ളതല്ല, അതായത് ഒരു കണത്തെ സംബന്ധിച്ച്, l ഉം ω യും സമാന്തരമായിരിക്കണമെന്നില്ല. ഇക്കാര്യം സ്ഥാനാന്തരചലനവുമായി ഒത്തുനോക്കുന്നത് നന്നായിരിക്കും. സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിൽ ഒരു കണികയെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം p യും v യും എപ്പോഴും

പരസ്പരം സമാന്തരമാണ്.

ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ ആകെ കോണീയ ആക്കം കൂട്ടിയെടുക്കുന്നതിന്, ഓരോ കണികയുടെയും പങ്ക് ഒരുമിച്ചു ചേർക്കേണ്ടതുണ്ട്.

അതായത്:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i = \sum \mathbf{l}_{iz} + \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

L ന്റെ Z അക്ഷത്തിന്റെ ലംബവും Z അക്ഷത്തിലൂടെ ഉള്ളതുമായ ഘടകങ്ങളെ $L_{\perp}$ എന്നും Z എന്നും എടുത്താൽ

$$\mathbf{L}_{\perp} = \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \mathbf{v}_i \qquad (7.44a)$$

ഇതിൽ m_i യും $\mathbf{v}_i$ യും യഥാക്രമം i എന്ന കണികയുടെ മാസും പ്രവേഗവുമാണ്; $\mathbf{C}_i$ എന്നത് ആ കണിക സഞ്ചരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവുമാണ്.

കൂടാതെ $$\mathbf{L}_z = \sum \mathbf{l}_{iz} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \omega\, \hat{\mathbf{k}}$$

അല്ലെങ്കിൽ $$\mathbf{L}_z = I\omega\, \hat{\mathbf{k}} \qquad (7.44b)$$

j എന്ന കണികയുടെ അക്ഷത്തിൽനിന്നുള്ള ദൂരം ആണ് r_i. ഒരു അക്ഷത്തിന് ആധാരമായി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ നിർവചിക്കുന്നത് $I = \Sigma m_i r_i^2$ എന്നാണ്) അതായത്,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_{\perp} \qquad (7.44c)$$

ഒരു അക്ഷത്തിൽ പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ദൃഢവസ്തുക്കളെന്ന നിലയിൽ ഈ അധ്യായത്തിൽ പരിഗണിച്ചവയെല്ലാംതന്നെ സമമിതി (symmetric) യിലുള്ള വസ്തുക്കളാണ്. അതായത് പരിക്രമണാക്ഷം അവയുടെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സമമിതി അക്ഷമായിരിക്കും. ഇത്തരം വസ്തുക്കളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന OC യുടെ ഒരു വിലക്ക് ഒരു നിശ്ചിത പ്രവേഗം $\mathbf{v}_i$ ഉണ്ടായിരിക്കും. ഈ ബിന്ദുവിന് വ്യാസ വിപരീത ദിശയിലുള്ള ബിന്ദുവിലെ കണത്തിന് $-\mathbf{v}_i$ പ്രവേഗവുമുണ്ടായിരിക്കും. സ്വാഭാവികമായും ഇത്തരം കണങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന ടോർക്കുകൾ വിപരീതവും തുല്യവുമായിരിക്കും. അതിനാൽ ഇത്തരം കണികകളുടെ ടോർക്കുകൾ കൂടിച്ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന $\mathbf{L}_{\perp}$ പൂജ്യമാവും. അതായത് $\mathbf{L}_{\perp} = 0$ അതുകൊണ്ട്

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z = I\omega\, \hat{\mathbf{k}} \qquad (7.44d)$$

പരിക്രമണ അക്ഷത്തെ സംബന്ധിച്ച് സമമിതിയിലല്ലാത്ത വസ്തുക്കളാകുമ്പോൾ, L എന്നത് L_zന് സമാനമാവുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് L പരിക്രമണാക്ഷത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുകയുമില്ല. പട്ടിക 7.1 പരിശോധിച്ച് $L = L_z$എന്ന് കരുതാനാവാത്ത ഉദാഹരണം ഏതാണെന്ന് പറയാനാകുമോ?

ഇനി സമവാക്യം (7.44 b) യെ അവകലനം ചെയ്തു നോക്കാം. $\hat{\mathbf{k}}$ എന്നത് ഒരു നിശ്ചിത (സ്ഥിരസംഖ്യ) സദിശം ആയതിനാൽ,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_z) = \left(\frac{d}{dt}(I\omega)\right)\hat{\mathbf{k}}$$

സമവാക്യം (7.28b) ൽ നിന്നും

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$ എന്നെഴുതാം

ഒരു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണത്തെ കുറിച്ച് ചർച്ചചെയ്യുമ്പോൾ, തൊട്ടുമുമ്പുള്ള വിഭാഗത്തിൽ കണ്ടതുപോലെ, പരിക്രമണ അക്ഷത്തിൽ കൂടിയുള്ള ബാഹ്യ ടോർക്കുകളുടെ ഘടകങ്ങളെ മാത്രമേ കണക്കിലെടുക്കേണ്ടതുള്ളൂ. ഇത് അർഥമാക്കുന്നത് $\tau = \tau\, \hat{\mathbf{k}}$ എന്നാണ്. $L = L_z + L_{\perp}$ ആയതിനാൽ L_z ന്റെ ദിശ (സദിശം) കൃത്യമായി നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളതാണ്. അതായത്

$$\frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = \tau\, \hat{\mathbf{k}} \qquad (7.45a)$$

കൂടാതെ $$\frac{d\mathbf{L}_{\perp}}{dt} = 0 \qquad (7.45b)$$

അതായത്, ഒരു നിശ്ചലഅക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണത്തിൽ നിശ്ചല അക്ഷത്തിന് ലംബമായ കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ ഘടകം ഒരു സ്ഥിര മൂല്യമുള്ളതായിരിക്കും.

$\mathbf{L}_z = I\omega\, \hat{\mathbf{k}}$ സമവാക്യം (7.45 -a) ആയതുകൊണ്ട്

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = \tau \qquad (7.45c)$$

ടോർക്ക് സമയത്തിനൊപ്പം മാറുന്നില്ലെങ്കിൽ

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

കൂടാതെ സമവാക്യം (7.45 c) യിൽനിന്ന്

$$\tau = I\alpha \qquad (7.43)$$

ഈ സമവാക്യം നേരത്തേതന്നെ (പ്രവൃത്തിഗതികോർജ വിശകലനത്തിലൂടെ) ലഭ്യമായതാണ്.

7.13.1 കോണീയആക്കത്തിന്റെ സംരക്ഷണം (Conservation of Angular Momentum)

ഒരു സ്ഥിര അക്ഷത്തെ അവലംബിച്ചുകൊണ്ടുള്ള പരിക്രമണത്തിന്റെ പശ്ചാത്തലത്തിൽ നാം കോണീയ ആക്കസംരക്ഷണനിയമം വീണ്ടും പരിഗണിക്കുകയാണ്. സമവാക്യം (7.45 c) പ്രകാരം ബാഹ്യ ടോർക്ക് പൂജ്യമാവുമ്പോൾ,

$$Lz = I\omega = \text{സ്ഥിരസംഖ്യ} \quad (7.46)$$

സമമിതിയുള്ള വസ്തുക്കളെ സംബന്ധിച്ച്, സമവാക്യം (7.44 *d*) പ്രകാരം Lz നു പകരം L എന്നെഴുതാം. (L ഉം Lz ഉം യഥാക്രമം **L**, **Lz** എന്നിവയുടെ പരിമാണങ്ങളാണ്.)

ഇത് പരിക്രമണസറിരാക്ഷമുള്ള കണികാവ്യവസ്ഥ യുടെ കോണീയആക്കസംരക്ഷണ നിയമം ആയി പരി ഗണിക്കാം. സമവാക്യം (7.29 *a*) ക്ക് തുല്യം. സമവാക്യം (7.46) ആവട്ടെ നമ്മുടെ നിത്യജീവിതത്തിൽ പല സന്ദർഭ ങ്ങളിലായി നാം കടന്നുവരുന്ന നിരവധി പ്രായോഗിക കാര്യങ്ങളിലടങ്ങിയതാണ്. നിങ്ങൾക്ക് ഒരു സുഹൃ ത്തുമായി ചേർന്ന് ചെയ്തുനോക്കാവുന്ന ഒരു പരീക്ഷ ണമാണ് ഇനി പറയുന്നത്:

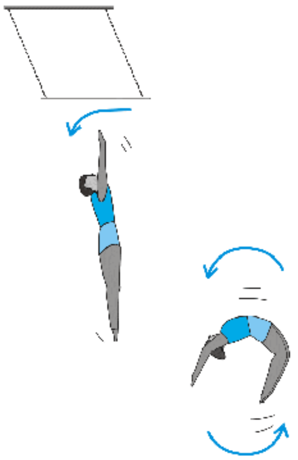
നിങ്ങളിൽ ഒരാൾ വട്ടത്തിൽ കറക്കാവുന്ന ഒരു കസേര യിൽ കൈകൾ മടക്കിവച്ചു കൊണ്ടും കാലുകൾ തറ യിൽ തൊടാതെയും ഇരിക്കുക. മറ്റൊരാളോട് കസേര പെട്ടെന്ന് കറക്കാൻ പറയുക. കസേര ഒരു കോണീയ വേഗം കൈവരിക്കുന്ന ഘട്ടത്തിൽ ഇരിക്കുന്നയാൾ കൈകൾ തിരശ്ചീനമായി നിവർത്തുക. എന്തു സംഭവി ക്കുന്നു? കോണീയവേഗം കുറയുന്നു. ഇനി കൈകൾ ശരീരത്തോടടുപ്പിച്ച് വെക്കുമ്പോഴേക്കും കോണീയ വേഗം വർധിക്കുന്നതായി അനുഭവപ്പെടും. കോണീയ ആക്കസംരക്ഷണനിയമത്തിന്റെ പ്രായോഗികത വെളി വാക്കുന്ന ഒരു അനുഭവമാണ് ഈ പരീക്ഷണം. ഈ പരിക്രമണ ചലനത്തിൽ ഘർഷണം കാര്യമായി പരിഗ ണിക്കേണ്ടതില്ലെങ്കിൽ, കസേരയുടെ പരിക്രമണ അക്ഷ ത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ബാഹ്യ ടോർക്കുകളൊന്നും നിലവിലില്ല. അതിനാൽ $I\omega$ മാറുന്നില്ല. കൈകൾ വിടർത്തു മ്പോൾ പരിക്രമണാക്ഷത്തിന് ആധാരമാക്കിയുള്ള I ൽ ഒരു വർധന സംഭവിക്കുന്നു. അതായത്, കോണീയ വേഗത ω യിൽ കുറവുവരുന്നു. ഇനി കൈകൾ വീണ്ടും ശരീരത്തോട് അടുപ്പിക്കുമ്പോൾ നേരെ തിരിച്ചുള്ള അനു ഭവം ഉണ്ടാവുകയും ചെയ്യും.

ഒരു സർക്കസ്സിലെ കായികാഭ്യാസിയും ഒരു ഡൈവിങ് അഭ്യാസിയും ഈ തത്വത്തിന്റെ ആനുകൂല്യം മുതലാ ക്കുന്നവരാണ്. അതുപോലെ സ്കേറ്റിംഗ് നടത്തുന്നവ രും, വിവിധതരം നൃത്തങ്ങൾ അഭ്യസിക്കുന്നവരും അതി ശയകരമായി ഒറ്റക്കാലിൽ പാദാഗ്രത്തിൽ നിന്ന് തിരി ഞ്ഞുകൊണ്ട് നൃത്തം (*pirouette*) ചെയ്യുന്നവരും ഈ തത്വത്തെ ഉപയോഗിക്കുന്നവരാണ്.

ചിത്രം 7-36 (a) കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ സംരക്ഷണം സംബ ന്ധിച്ച പരീക്ഷണം. പെൺകുട്ടി ചക്രക്കസേരയിൽ ഇരുന്നു കൊണ്ട് കൈകൾ വിരിച്ചും ശരീരത്തോടടുപ്പിച്ചും പരീക്ഷണം നടത്തുന്നു.

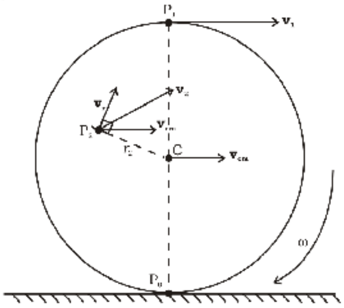
7.14. ഉരുളൽ ചലനം (Rolling motion)

നിത്യജീവിതത്തിൽ സർവസാധാരണമായി കണ്ടുവരുന്ന ചലനമാണ് ഉരുളൽ ചലനം. സഞ്ചാരത്തിനുപയോഗി ക്കുന്ന നാനാതരം ചക്രങ്ങൾക്കുള്ളത് ഉരുളൽ ചലന ങ്ങളാണ്. ഒരു ഡിസ്ക് ഉദാഹരണമായി എടുക്കാം. അത് പ്രതലങ്ങളിലൂടെ ഉരുളുന്ന മറ്റു വസ്തുക്കൾക്കും ശരി യായിരിക്കും. നിരങ്ങുകയോ, തെന്നുകയോ ചെയ്യാതെ ഡിസ്ക് നിരന്തരമായി ഉരുളുന്നുവെന്ന് സങ്കൽപിക്കുക. ഇതിനർത്ഥം, പ്രതലവുമായി സമ്പർക്കത്തിലുള്ള തകി ടിന്റെ സ്പർശ ബിന്ദു എല്ലായ്പ്പോഴും പ്രതലത്തിൽ നിശ്ചലാവസ്ഥയിലായിരിക്കും.



ചിത്രം 7.36 b) ഒരു ശരീരാഭ്യാസി കോണീയ ആക്ക സംര ക്ഷണ നിയമം പ്രയോജനപ്പെടുത്തി പ്രകടനം നട ത്തുന്നു.

നേരത്തേ സൂചിപ്പിച്ചപോലെ ഒരു ഉരുളൽചലനം, പരിക്രമണചലനത്തിന്റെയും സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിന്റെയും സംയോജിതരൂപമാണ്. ഒരു കണികാ വ്യവസ്ഥയുടെ സ്ഥാനാന്തരചലനം അതിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനമാണ്.



ചിത്രം 7.37 നിരപ്പായ പ്രതലത്തിലൂടെയുള്ള ഒരു വൃത്തത്തകിടിന്റെ തെന്നലുകളില്ലാത്ത ഉരുളൽ ചലനം. പ്രതലത്തിൽ സ്പർശിക്കുന്ന സമയത്ത് തകിടിന്റെ p_0 എന്ന ബിന്ദു നിശ്ചലാവസ്ഥയിലായിരിക്കും. തകിടിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗം v_{cm}ആണ്. Cയിൽ കൂടിയുള്ള അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള കോണീയപ്രവേഗം ω യോടു കൂടിയാണ് ഡിസ്ക് ചലിക്കുന്നത്. v_{cm}= Rω, ഇതിൽ R തകിടിന്റെ ആരമാണ്.

ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗം v_{cm} എന്നെടുത്തിരിക്കുന്നതിനാൽ തകിടിന്റെ സ്ഥാനാന്തരത്തിലെ പ്രവേഗം അതുതന്നെയാണെന്ന് കണക്കാക്കാം. ഉരുൾചലനത്തിലുള്ള തകിടിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം അതിന്റെ ജ്യാമിതീയ കേന്ദ്രത്തിൽതന്നെയായതിനാൽ (ചിത്രം 7.37) C യുടെ പ്രവേഗവും v_{cm} തന്നെയാണ്. അത് പ്രതലനിരപ്പിന് സമാന്തരവുമാണ്. തകിടിന്റെ പരിക്രമണചലനം C യിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്ന അതിന്റെ സമമിതീയ അക്ഷം ആധാരമാക്കിയാണ്. അതുകൊണ്ട് തകിടിന്റെ P_0, P_1, P_2 എന്നീ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് രണ്ടുവിധത്തിലുള്ള ചലനങ്ങളുണ്ട്; ഒന്ന് സ്ഥാനാന്തര പ്രവേഗമായ v_{cm} ഓടുകൂടിയുള്ളതും, മറ്റേത് പരിക്രമണം മൂലമുണ്ടാകുന്ന രേഖീയപ്രവേഗം v_r ഓടുകൂടിയും. ഒരു അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള തകിടിന്റെ പരിക്രണചലനത്തിൽ v_rന്റെ പരിമാണം $v_r = r\omega$ എന്നാണ്, ഇതിൽ ω, പരിക്രമണത്തിന്റെ കോണീയ പ്രവേഗവും r എന്നത് ബിന്ദുവിലേക്ക് അക്ഷത്തിൽനിന്നുള്ള ദൂരവുവാണ് (അതായത് C യിൽ നിന്ന്). തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ C ആസ്പദമാക്കിയുള്ള ആരസദിശ (*radius vector*) ത്തിന് ലംബമായാണ് പ്രവേഗം v_r ന്റെ ദിശ. ചിത്രം 7.37 ൽ P_2 എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ പ്രവേഗമായ v_2 വും അതിന്റെ ഘടകങ്ങളായ v_r , v_{cm} എന്നിവയും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ v_r കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് CP_2 വിന് ലംബമായിട്ടാണ്. v_2 എന്നത് P_0P_2 എന്ന രേഖക്ക് ലംബമാണെന്ന് എളുപ്പത്തിൽ തിരിച്ചറിയാനാവും. അതിനാൽ P_0വിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും ω ക്ക് സമാന്തരവുമായി പോകുന്ന രേഖയെ പരിക്രമണത്തിന്റെ ക്ഷണിക അക്ഷം (*instantaneous axis*) എന്നു പറയുന്നു.

P_0 വിൽ, പരിക്രമണംമൂലം ഉണ്ടാകുന്ന രേഖീയ പ്രവേഗം v_r സ്ഥാനാന്തരപ്രവേഗമായ v_{cm} നു തികച്ചും വിപരീതമായിരിക്കുമെന്ന് കാണാവുന്നതാണ്. കൂടാതെ ഇവിടെ v_r ന്റെ പരിമാണം $R\omega$ ആകുന്നു, തകിടിന്റെ ആരമാണ് R. p_0 ക്ഷണിക വിരാമാവസ്ഥയിലേക്കെത്തുന്നതിന് $v_{cm} = R\omega$ എന്ന നിബന്ധന ആവശ്യമായി വരുന്നു. അതിനാൽ നിരങ്ങിനീങ്ങാതെ ഉരുളുന്നതിന് തകിട് പാലിക്കേണ്ട നിബന്ധനയാണ് താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

$$v_{cm} = R\omega \qquad (7.47)$$

സാന്ദർഭികമായി, തകിടിന്റെ മുകൾഭാഗത്തെ ബിന്ദുവായ P_1 ലെ പ്രവേഗം v_1 ആണെന്നും അതിന്റെയും അളവ് v_{cm}+ $R\omega$ അഥവാ 2 v_{cm} ആണെന്നും പറയേണ്ടിവരും, ഇത് പ്രതലനിരപ്പിന് സമാന്തരവുമാണല്ലോ. സമവാക്യം (7.47) എല്ലാത്തരം ഉരുളൽ വസ്തുവിനും ബാധകമാണ്.

7.14.1. ഉരുളൽ ചലനത്തിന്റെ ഗതികോർജം (Kinetic Energy of Rolling Motion)

ഒരു ഉരുളൽചലനവസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജത്തെ വിശദീകരിക്കുന്ന ഒരു ഗണിതവാക്യം ഉണ്ടാക്കുക എന്നതാണ് അടുത്തതായി ചെയ്യേണ്ടത്. ഒരു ഉരുളൽചലനവസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജത്തെ രണ്ടു വിധത്തിൽ വേർതിരിക്കാനാവും. സ്ഥാനാന്തര ഗതികോർജമെന്നും പരിക്രമണ ഗതികോർജമെന്നും. ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ സവിശേഷതയുടെ ഫലമായി, അതിന്റെ ഗതികോർജത്തിൽ (K) അതിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനം മൂലമുള്ള ഗതികോർജം (സ്ഥാനാന്തരം)($MV^2/2$) എന്നും, ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ചുറ്റിക്കൊണ്ട് പരിക്രമണം മൂലമുള്ള ഗതികോർജം (K') എന്നും ഉള്ള രണ്ടു ഘടകങ്ങൾ ഉള്ളതായി കാണാം. അതിനാൽ

$$K = K' + MV^2 / 2 \qquad (7.48)$$

ഈ പൊതുഫലത്തെ ഉരുളൽചലനത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ പ്രയോഗിക്കാനാവും. പരിശീലന പ്രശ്നം 7.31 കാണുക. ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തിന്റെ ഗതികോർജ്ജം അതായത് സ്ഥാനാന്തര ഗതികോർജം $K = mv^2_{cm}/2$ ആണ്. ഇതിൽ m മാസ്സും v_{cm} ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗവുമാണ്. ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണവും കൂടി ഉൾപ്പെടുന്നതാണ് ഉരുളൽചലനം എന്നതിനാൽ, K' പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത് വസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണം കൊണ്ടുള്ള ഗതികോർജം ആണ്; $K' = I\omega^2/2$, ഇതിൽ I എന്നത് ഉചിതമായ അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയാണ്. ഇവിടെ അത് ഉരുളൽ വസ്തുവിന്റെ സമമിതീയ അക്ഷം കൂടിയാണ്. അതിനാൽ ഉരുളൽ വസ്തുവിന്റെ ഗതികോർജം താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാവുന്നതാണ്.

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m\, \upsilon_{cm}^2 \qquad (7.49a)$$

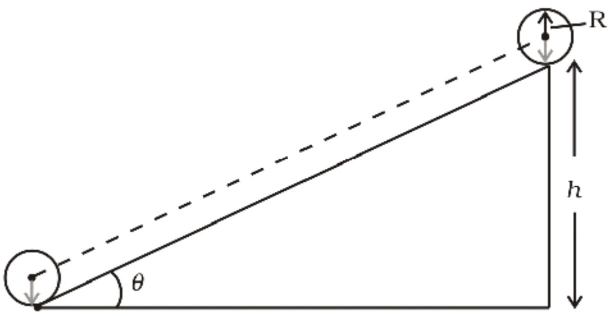
ഇതിൽ Iക്കു പകരം Mk^2 ചേർക്കുന്നു, k = വസ്തുവിന് യോജിക്കുന്ന വിധത്തിലുള്ള റേഡിയസ് ഓഫ് ജൈറേഷനും $v_{cm} = R\omega$ യുമാണ്. അങ്ങനെയാവുമ്പോൾ

$$K = \frac{1}{2} \frac{m k^2 \upsilon_{cm}^2}{R^2} + \frac{1}{2} m\, \upsilon_{cm}^2$$

അല്ലെങ്കിൽ $$K = \frac{1}{2} m\, \upsilon_{cm}^2 \left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right) \qquad (7.49b)$$

സമവാക്യം (7.49 b) ഏതുതരം ഉരുളൽ ചലനവസ്തുവിനും ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്, ഉദാ. തകിടുകൾ, സിലിണ്ടർ, വളയം, ഗോളം തുടങ്ങിയവ.

ഉദാഹരണം: 7.16: മൂന്നു വസ്തുക്കൾ – ഒരു വളയം, ഒരു ഘന സിലിണ്ടർ, ഒരു ഗോളം എന്നിവ ഒരു ചരിവു പലകയിലൂടെ തെന്നിപ്പോകാതെ താഴേക്കുരുളുന്നു. മൂന്നും നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്നാണ് ആരംഭിക്കുന്നത്. മൂന്നിന്റെയും ആരങ്ങൾ ഒരേ അളവിലുള്ളതാണ്. ഏത് വസ്തുവിനാണ് തറയിലേക്കെത്തുമ്പോൾ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പ്രവേഗമുണ്ടാവുക?



ചിത്രം 7.38

ഉത്തരം: ഇവിടെ ഉരുൾവസ്തുവിന്റെ ഊർജസംരക്ഷണ നിയമം കണക്കിലെടുക്കേണ്ടതാണ്. അതായത് ഘർഷണം മൂലം ഊർജ നഷ്ടം സംഭവിക്കുന്നില്ല. താഴേക്ക് ഉരുളുന്നതിലൂടെ വസ്തുവിന്റെ സ്ഥിതികോർജ (= mgh) നഷ്ടത്തിന് തുല്യമായി ഗതികോർജം വസ്തുവിന് ലഭ്യമാകുന്നു (ചിത്രം 7.38). വസ്തുക്കൾ നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്ന് ആരംഭിച്ചതിനാൽ നേടിയ ഗതികോർജം അന്തിമ ഗതികോർജത്തിന്റെ അളവായിരിക്കും. സമവാക്യം (7.49b) യിൽനിന്ന്, $K = \frac{1}{2} m v^2 \left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)$. ഇതിൽ v വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ അന്തിമപ്രവേഗമാണ്. K ക്കു പകരം mgh ഉം ഈ സമീകരണത്തിലേക്ക് കൊണ്ടുവന്നാൽ

$$mgh = \frac{1}{2} m\, \upsilon^2 \left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)$$

അഥവാ $$\upsilon^2 = \left(\frac{2gh}{1 + k^2/R^2}\right)$$

ഇത് ഉരുളൽവസ്തുവിന്റെ മാസിനെ കണക്കിലെടുക്കാതെയുള്ള സമവാക്യമാണ്.

വളയത്തിനു $k^2 = R^2$ ആയതുകൊണ്ട്

$$\upsilon_{ring} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1}},$$

$$= \sqrt{gh}$$

ഖര സിലിണ്ടറിനു $k^2 \;\; R^2/2$

$$\upsilon_{disc} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1/2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

ഖര ഗോളത്തിനായി $k^2 = 2R^2/5$

$$\upsilon_{ഗോളം} = \sqrt{\frac{2gh}{1+2/5}}$$

$$= \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

ഫലങ്ങൾ പരിശോധിക്കുമ്പോൾ ചരിവു പലകയുടെ താഴേക്കെത്തുമ്പോഴേക്കും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗം ഏറ്റവും കൂടുതൽ കാണിക്കുന്നത് ഗോളത്തിന്റേതും ഏറ്റവും കുറവു കാണിക്കുന്നത് വളയത്തിന്റേതുമാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

എല്ലാ വസ്തുക്കൾക്കും ഒരേ മാസ്സാണെങ്കിൽ, ഏതു വസ്തുവിനായിരിക്കും കൂടുതൽ പരിക്രമണഗതികോർജം അന്തിമമായി ഉണ്ടാവുക? ◀

സംഗ്രഹം

1. മാതൃകാപരമായി, ഒരു ദൃഢവസ്തുവിൽ വിവിധ കണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള പരസ്പര അകലങ്ങൾ, അതിന്മേൽ ബലങ്ങൾ പ്രയോഗിക്കപ്പെട്ടാൽ പോലും മാറ്റാൻ സാധിക്കാത്തതാണ്.

2. ഒരു ദൃഢവസ്തു ഒരു സ്ഥാനത്ത് ഉറപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ അതിനു പരിക്രമണചലനം മാത്രമേ സാദ്ധ്യമാകൂ. ഏതെങ്കിലും രീതിയിൽ ഉറപ്പിച്ചിട്ടില്ലാത്ത ഒരു ദൃഢവസ്തുവാണെങ്കിൽ അതിന് സ്ഥാനാന്തരചലനമോ സ്ഥാനാന്തരചലനവും പരിക്രമണചലനവും ചേർന്നുള്ള ചലനാവസ്ഥയോ ഉണ്ടാകാം

3. ഒരക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണത്തിൽ ഒരു ദൃഢവസ്തുവിലെ എല്ലാ കണികകളും അക്ഷത്തിനു ലംബമായ പ്രതലത്തിലൂടെയുള്ളതും അക്ഷത്തിൽ വൃത്തകേന്ദ്രം വരുന്നതുമായ വൃത്തപാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കും. പരിക്രമണചലനത്തിലുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ എല്ലാ കണികകൾക്കും ഒരേസമയത്ത് ഒരേ കോണീയ പ്രവേഗമായിരിക്കും ഉണ്ടാവുക.

4. ഒരു പൂർണ സ്ഥാനാന്തരചലനത്തിലുള്ള ദൃഢവസ്തുവിന്റെ എല്ലാ കണങ്ങൾക്കും ഒരേ സമയത്ത് ഒരേ പ്രവേഗമായിരിക്കും ഉണ്ടാവുക.

5. കോണീയപ്രവേഗം ഒരു സദിശമാണ്. പരിക്രമണാക്ഷത്തിലൂടെ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന അതിന്റെ പരിമാണം $\omega = d\theta/dt$. ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തെ ചുറ്റിയുള്ള പരിക്രമണത്തിൽ സദിശം ω ക്ക് ഒരു നിശ്ചിത ദിശയുണ്ടായിരിക്കും.

6. രണ്ടു സദിശങ്ങളായ ***a, b*** എന്നിവയുടെ സദിശഗുണനം അഥവാ ക്രോസ് ഗുണനം (*cross product*) രേഖപ്പെടുത്തുന്നത് ***a*** x ***b*** എന്നാണ്. ഈ സദിശത്തിന്റെ പരിമാണം $ab\, sin\theta$ യാണ്. ഇതിന്റെ ദിശ വലംപിരിയാണി നിയമമോ വലംകൈനിയമമോ അനുസരിച്ചു നിർണയിക്കാം.

7. ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തെ ചുറ്റിക്കൊണ്ടുള്ള ഒരു ദൃഢവസ്തുവിലെ കണികകളുടെ രേഖീയപ്രവേഗം $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ ആയിരിക്കും, ഇതിൽ ***r*** എന്നത് നിശ്ചിത അക്ഷത്തിൽ ഉൾപ്പെട്ട മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള കണികയുടെ സ്ഥാനസദിശമാണ് (*position vector*). ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഉറപ്പിച്ചിട്ടുള്ള ദൃഢവസ്തുവിന്റെ പരിക്രമണകാര്യങ്ങളിലേക്കും ഈ ബന്ധം ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ***r*** എന്നത് ആ ബിന്ദുവിനെ മൂലബിന്ദു (*origin*) ആയി പരിഗണിച്ചുകൊണ്ടുള്ള പ്രസ്തുത കണത്തിന്റെ സ്ഥാനസദിശമായിരിക്കും.

8. ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ നിർവ്വചിക്കുന്ന സ്ഥാനസദിശം താഴെ കാണിച്ചരിക്കുന്നതുപോലെയാണ്.
$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

9. ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ പ്രവേഗം $\mathbf{V} = \mathbf{p}/M$ എന്നാണ്. ഇതിൽ **p** എന്നത് വ്യവസ്ഥയുടെ രേഖീയആക്കം ആണ്. ഒരു വസ്തുവിന്റെ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെ മുഴുവൻ മാസും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിൽ കേന്ദ്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയും വസ്തുവിൽ/വ്യവസ്ഥയിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെട്ട മുഴുവൻ ബലവും ഈ ബിന്ദുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നപോലെയുമാണ് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനം. പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യബലങ്ങളുടെ തുക പൂജ്യമാവുന്നിടത്ത്, വ്യവസ്ഥയുടെ മൊത്തം രേഖീയ ആക്കം സ്ഥിരതയുള്ളതായിരിക്കും.

10 n കണികകളുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെ മൂലബിന്ദുവിനെ (*origin*) ആധാരമാക്കിയുളള കോണീയ ആക്കം താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതാണ്.
$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$
n കണികകളുള്ള ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെ മൂലബിന്ദുവിനെ (*origin*) ആധാരമാക്കിയുളള *ടോർക്ക്* τ (*torque or moment of force*) താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതാണ്.
$$\tau = \sum_{1} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$
F_i കണിക i യിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യബലങ്ങളും, ആന്തരിക ബലങ്ങളും ഉൾപ്പെട്ടതാണ്. കണികകൾക്കിടയിലുള്ള

ബലം അവയെ പരസ്പരം ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയിലൂടെയുള്ളതും, ഈ ബലങ്ങൾ ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമം ബാധകമായതും കൊണ്ട് $t_{int} = 0$ എന്നെഴുതാം. അതിനാൽ $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \tau_{ext}$

11. ഒരു ദൃഢവസ്തു യാന്ത്രിക സംതുലനാവസ്ഥയിലാവുന്ന നിബന്ധനകൾ:

1) അത് സ്ഥാനാന്തര സംതുലനത്തിലായിരിക്കണം. അതായത് അതിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന പരിണത ബലം പൂജ്യമായിരിക്കണം: $\sum F_i = 0$

2) അത് പരിക്രമണ സംതുലനാവസ്ഥയിലായിരിക്കണം, അതായത് അതിന്മേലുള്ള ബാഹ്യ ടോർക്ക് പൂജ്യമായിരിക്കണം $\sum \tau_i = \sum r_i \times F_i = 0$

12 ഒരു വ്യാപ്തിതവസ്തുവിന്റെ (extended body) ഗുരുത്വാകർഷണകേന്ദ്രം സ്ഥിതിചെയ്യുന്നത് വസ്തുവിന്മേലുള്ള മൊത്തം ഗുരുത്വാകർഷണ ടോർക്കുകൾ പൂജ്യമാകുന്ന ബിന്ദുവിലാണ്.

13 ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ അക്ഷത്തിനെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ നിർവ്വചിക്കുന്നത് $I = \sum m_i r_i^2$ എന്നാണ്. ഇതിൽ r_i എന്നത് അക്ഷത്തിൽനിന്നും കണിക i ലേക്കുള്ള ലംബ ദൂരമാണ്. പരിക്രമണത്തിന്റെ ഗതികോർജം $K = \frac{1}{2} I\omega^2$ ആകുന്നു.

14 ഏതെങ്കിലും ഒരു അക്ഷം ആധാരമാക്കി മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കണ്ടുപിടിക്കുവാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന സിദ്ധാന്തമാണ് സമാന്തര അക്ഷങ്ങളുടെ തത്വം. ഇത് $I'_z = I_z \; Ma^2$ എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ I_z എന്നത് I'_z നിർണ്ണയിക്കാനെടുത്ത അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്ന അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയും, M വസ്തുവിന്റെ മാസും a അക്ഷങ്ങൾക്കിടയിലെ ദൂരവുമാണ്.

15 ഗതികം, ശുദ്ധഗതികം എന്നിവ ആസ്പദമാക്കി വിശകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള പരിക്രമണം രേഖീയ ചലനവുമായി സാദൃശ്യം കാണിക്കുന്നു.

16 ഒരു നിശ്ചലഅക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി (z- അക്ഷം എന്നു പറയാം) പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ഒരു ദൃഢവസ്തുവിനെ സംബന്ധിച്ച് $L_z \; I\omega$,

I എന്നത് അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയാണ്. പൊതുവേ അത്തരം വസ്തുക്കളെ സംബന്ധിച്ച് കോണീയ ആക്കം L പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് പരിക്രമണാക്ഷത്തിലൂടെ ആകണമെന്നില്ല. അക്ഷത്തെ കേന്ദ്രമാക്കി സമമിതിയുള്ള ഒരു വസ്തുവാണെങ്കിൽ മാത്രമേ L പരിക്രമണാക്ഷത്തിലൂടെ ആയിരിക്കുകയുള്ളൂ. അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ $|\mathbf{L}| - L_z - I\omega$ ആയിരിക്കും. ഒരു നിശ്ചലഅക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ഒരു ദൃഢവസ്തുവിന്റെ കോണീയ ത്വരണം കാണുവാൻ $I\alpha = \tau$ എന്ന ബന്ധം ഉപയോഗിക്കാം. വസ്തുവിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യടോർക്ക് പൂജ്യമാണെങ്കിൽ, നിശ്ചല അക്ഷത്തെ (z- അക്ഷം) ആധാരമാക്കിയുള്ള കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ ഘടകം, L_z ($I\omega$) സ്ഥിരതയുള്ളതായിരിക്കും.

17 തെന്നൽ സ്വഭാവമില്ലാത്ത ഒരു ഉരുൾ ചലനത്തിൽ $v_{cm} = R\omega$. ഇതിൽ v_{cm} എന്നത് സ്ഥാനാന്തര പ്രവേഗ (ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ) മാണ്. R ആരവും m വസ്തുവിന്റെ മാസുമാണ്. ഉരുളൽ ചലനത്തിൽ അത്തരം വസ്തുക്കൾക്കുള്ള ഗതികോർജം സ്ഥാനാന്തര ചലനത്തിന്റെയും പരിക്രമണ ചലനത്തിന്റെയും ഗതികോർജങ്ങളുടെ തുകയായിരിക്കും. $K = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

പരിമാണങ്ങൾ	ചിഹ്നം	ഡൈമെൻഷൻ	യൂണിറ്റ്	പരാമർശം
കോണീയപ്രവേഗം (*angular velocity*)	ω	T^{-1}|	rad s^{-}	$v = \omega \times r$
കോണീയആക്കം (*Ang. momentum*)	L	| $ML^2 T^{-1}$|	J s	$L = r \times p$
ടോർക്ക് (*torque*)	τ	| $ML^2 T^{-2}$|	N m	$\tau = r \times F$
മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ(*moment of inertia*)	I	| ML^2|	kg m^2	$I = \sum m_i r_i^2$

വിചിന്തന വിഷയങ്ങൾ

1. ഒരു വ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനത്തെപ്പറ്റി അറിയുന്നതിന് ആ വ്യവസ്ഥയിലെ ആന്തരിക ബലങ്ങളെപ്പറ്റി അറിയേണ്ട കാര്യമില്ല. ഇക്കാര്യത്തിന് വസ്തുവിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബാഹ്യ ബലങ്ങളെപ്പറ്റിയുള്ള അറിവുകൾ മാത്രം മതിയാകും.

2. ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ചലനത്തെ രണ്ടായി വിഭജിച്ചു പഠിക്കുന്നത് പ്രയോജനപ്രദമായി കാണാറുണ്ട്. ഒന്ന് അതിന്റെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തിന്റെ ചലനവും രണ്ടാമത്തേത് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ചലനവും. ഇത്തരം വിഭജനത്തിന്റെ ഉദാഹരണമാണ് ഒരു കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ഗതികോർജം K കണ്ടെത്തുവാനുപയോഗിക്കുന്ന മാർഗ്ഗങ്ങളിൽ ഒന്ന്. ഇവിടെ K കണക്കാക്കുന്നത് ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ഗതികോർജം $K^{\prime}$ ന്റെയും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ ഗതികോർജമായ $1/2MV^2$ ന്റെയും തുകയായാണ്. അതായത് $K=K^{\prime}+1/2MV^2$

3. നിശ്ചിത വലുപ്പമുള്ള വസ്തുക്കളെ (അഥവാ കണികാ വ്യവസ്ഥകളെ സംബന്ധിച്ച) ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം, കണികൾക്കുള്ള രണ്ടാം ചലനനിയമത്തിനേയും മൂന്നാം ചലനനിയമത്തിനേയും അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ളതാണ്.

4. ഒരു കണികാ വ്യവസ്ഥയിൽ സമയ ക്രമത്തിലുണ്ടാവുന്ന കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ നിരക്ക് വ്യത്യാസം വ്യവസ്ഥയുടെ മേലുള്ള ടോർക്കിന്റെ സ്വാധീനത്തിലാണ് ഉണ്ടാകുന്നത്. കണികാ വ്യവസ്ഥയുടെ കാര്യത്തിൽ ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലനനിയമം മാത്രമല്ല, മൂന്നാം നിയമപ്രകാരം രണ്ടുകണങ്ങൾ പരസ്പരം ബന്ധപ്പെടുന്ന നേർരേഖയിലൂടെ ചെലുത്തുന്ന തുല്യവും വിപരീതവുമായ ബലങ്ങളുടെ കാര്യവും കൂടി ഉൾപ്പെടുന്നു.

5. മൊത്തം ബാഹ്യ ബലങ്ങളുടെ അഭാവവും മൊത്തം ബാഹ്യ ടോർക്കുകളുടെ അഭാവവും സ്വതന്ത്ര അവസ്ഥകളാണ്. ഒന്നില്ലെങ്കിലും മറ്റേത് ഉണ്ടായിരിക്കാം, ഉദാഹരണത്തിന് ഒരു ബലയുഗ്മത്തിൽ (*couple*), മൊത്തംബാഹ്യബലങ്ങൾ പൂജ്യമാവുമ്പോൾ, മൊത്തം ടോർക്ക് പൂജ്യമാവുന്നില്ല.

6. ഒരു വ്യവസ്ഥയിലേക്ക് പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന മൊത്തം ബാഹ്യ ബലങ്ങൾ പൂജ്യമാണെങ്കിൽ, മൂലബിന്ദുവിന്റെ (*origin*) സ്വാധീനത്തിൽ നിന്ന് മൊത്തം ടോർക്ക് സ്വതന്ത്രമായിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ മൂലബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം മൊത്തം ടോർക്കിനെ ബാധിക്കില്ല.

7. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രവും അതിന്റെ ദ്രവ്യകേന്ദ്രവും ഒന്നാക്കുന്നത് വസതുവിന്റെ വിവിധ ഭാഗങ്ങളിലുള്ള ഗുരുത്വമണ്ഡലത്തിന് വ്യത്യാസം ഇല്ലാത്തതുകൊണ്ടു മാത്രമാണ്.

8. സദിശങ്ങളായ കോണീയ ആക്കം L ഉം കോണീയ പ്രവേഗം ω ഉം പരസ്പരം സമാന്തരമാകണമെന്നില്ല. എന്നിരുന്നാലും, സമമിതീയമായ ഒരു ദൃഢവസ്തു നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന (ഈ അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യപ്പെട്ട) അവസരത്തിൽ $L \quad I\omega$ എന്ന ബന്ധം സൗകര്യപ്രദമാണ്. ഇതിൽ I എന്നത് നിശ്ചല അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യയാണ്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

7.1. സമമാസ് സാന്ദ്രതയുള്ള ഇനി പറയുന്ന രൂപങ്ങളുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം കണ്ടെത്തുക ഗോളം, സിലിണ്ടർ, വളയം, സമചതുരക്കട്ട. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം വസ്തുവിനകത്തുതന്നെ ആയിരിക്കണമെന്നുണ്ടോ?

7.2. ഒരു HCl തന്മാത്രയിൽ, രണ്ടു ആറ്റങ്ങളുടെ അണുകേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വിഭജന ദൂരം 1.27 Å (1Å- 10^{-10} മീ) തന്മാത്രയുടെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രം (CM) വരുന്നത് എവിടെയാണെന്ന് കണക്കാക്കുക. ഹൈഡ്രജന്റെ അണുവിനേക്കാളും 35.5 ഇരട്ടി ദ്രവ്യമാനമുള്ളതാണ് ക്ലോറിൻ അണുകേന്ദ്രം. അണുവിന്റെ ഏതാണ്ടു മുഴുവൻ മാസ്സും അണുകേന്ദ്രത്തിൽ കേന്ദ്രീകരിക്കുന്നു.

7.3 ഒരു നിരപ്പായ തറയിലൂടെ *v* പ്രവേഗത്തിൽ ഏകസമാനമായി നീങ്ങിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്ന നീണ്ട ഒരു ചക്രവണ്ടിയിൽ ഒരഗ്രത്ത് ഒരു കുട്ടി നിശ്ചലനായിരിക്കുന്നു. കുട്ടി അവിടെനിന്ന് എഴുന്നേൽക്കുകയും അങ്ങോട്ടുമിങ്ങോട്ടും പല രീതിയിൽ നീങ്ങുകയും ചെയ്താൽ ട്രോളിയുടെ (ട്രോളി + കുട്ടി) ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തിന്റെ (CM) വേഗത്തിന് എന്തു സംഭവിക്കുന്നു?

7.4 സദിശങ്ങളായ **a**യുടേയും **b** യുടെയും ഇടയിലുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. അത് **a** x **b** യുടെ അളവിന്റെ പകുതിയാണെന്ന് കണക്കാക്കുക.

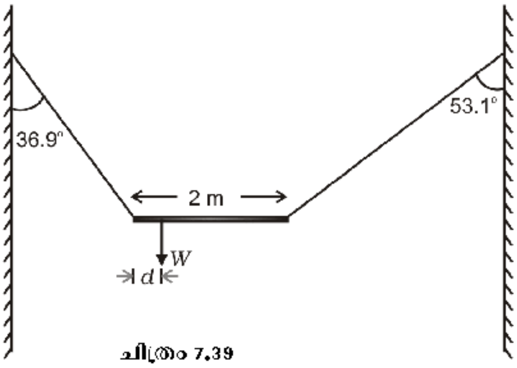
7.5 മൂന്നു സദിശങ്ങൾ **a,b, c** ഉള്ള ഒരു സമാന്തരികപ്പെട്ടിയുടെ ഉള്ളളവ് **a.(**ℓ x **c)** യുടെ മൂല്യത്തിന് തുല്യമാണെന്ന് കണ്ടെത്തുക.

7.6 ഒരു കണത്തിന്റെ കോണീയ ആക്കം L ന്റെ x, y, z അക്ഷങ്ങളിലൂടെയുള്ള ഘടകങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക, അതിന്റെ സ്ഥാന സദിശം **r** ന്, x, y, z ഘടകങ്ങളും ആക്കം **p** ക്ക്, p_x, p_y, p_z ഘടകങ്ങളുമുണ്ട്. കണം x- y തലത്തിലൂടെ മാത്രമേ സഞ്ചരിക്കുന്നുള്ളുവെങ്കിൽ അതിന്റെ കോണീയ ആക്കത്തിന് ഒരു z ഘടകം മാത്രമേയുള്ളുവെന്ന് തെളിയിക്കുക.

7.7 m മാസ്സും v വേഗവുമുള്ള രണ്ട് കണങ്ങൾ, d അകലത്തിലുള്ള സമാന്തര രേഖകളിലൂടെ എതിർ ദിശകളിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു, കോണീയ ആക്കം ഏത് ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി എടുത്താലും, ഈ കണികാ വ്യവസ്ഥയുടെ കോണീയ ആക്ക സദിശം ഒരുപോലെയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

7.8 സമമല്ലാത്തതും W ഭാരമുള്ളതുമായ ഒരു ബാർ ചിത്രത്തിൽ (7.39) കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്നു (ചരടിന്റെ അളവുകൾ ബാധകമല്ല). ചരടുകൾ ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്ന കുത്തനെയുള്ള തൂണുകളുമായി ചരടുകളുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ 36.9^0 യും 53.1^0 യുമാണ്. ബാർ -2 മീറ്റർ നീളമുള്ളതാണ്. ബാറിന്റെ ഇടതു അറ്റത്തുനിന്ന് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള അകലം d കണക്കാക്കുക.

7.9. ഒരു കാറിന്റെ ഭാരം 1800 കി.ഗ്രാം. അതിന്റെ ആക്സിലുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 1.8 മീ. അതിന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം മുൻഭാഗ ആക്സിലിൽ നിന്ന് 1.5 മീ. പിന്നിലാണ്. നിരപ്പായ തറ മുൻഭാഗത്തെയും പിൻഭാഗത്തെയും ചക്രങ്ങളിൽ ചെലുത്തുന്ന ബലം കണ്ടെത്തുക.



ചിത്രം 7.39

7.10 (a) തൊടുവരയെ ആസ്പദമാക്കി ഒരു ഗോളത്തിന്റെ മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കാണുക. ഗോളത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വ്യാസത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ $2MR^2/5$ ആണ്. ഇതിൽ M ഗോളത്തിന്റെ മാസ്സും R അതിന്റെ ആരവുമാണ്.

(b) M മാസ്സും R ആരവുമുള്ള ഒരു ഡിസ്കിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വ്യാസത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ $MR^2/4$ ആണ്. ഡിസ്കിന്റെ തലത്തിനു ലംബമായി അതിന്റെ അരികിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ കാണുക.

7.11 തുല്യ അളവിലുള്ള ടോർക്ക് പൊള്ളയായ ഒരു സിലിണ്ടറിലും ഒരു ഖരഗോളത്തിലും പ്രയോഗിക്കുന്നു, രണ്ടിനും ഒരേ മാസ്സും ആരവുമാണ്. സിലിണ്ടർ അതിന്റെ സമമിതീയ അക്ഷത്തിൽ കറങ്ങുന്നു, ഗോളം അതിന്റെ മധ്യത്തിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന അക്ഷത്തിന്മേൽ കറങ്ങുന്നു. ഒരു നിശ്ചിത സമയത്തിനുശേഷം ഏതു വസ്തുവിനാണ് കൂടുതൽ കോണീയ വേഗം കൈവരിക്കാനാവുക?

7.12 ഒരു ഖരസിലിണ്ടറിന് മാസ് 20 കി.ഗ്രാം., അത് അതിന്റെ അക്ഷത്തിന്മേൽ 100 $rad\ s^{-1}$.എന്ന വേഗതയിൽ കറങ്ങുന്നു. സിലിണ്ടറിന്റെ ആരം 0.25 മീ. ആണ്. സിലിണ്ടറിന്റെ പരിക്രമണത്തോടനുബന്ധിച്ചുള്ള ഗതികോർജം എത്ര? കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ അളവെത്ര?

7.13 a) ഒരു തിരിയുന്ന മേശക്കു നടുവിലായി കൈകൾ വിരിച്ച നിലയിൽ ഒരു കുട്ടി നിൽക്കുന്നു. മേശ 40 rev/min എന്ന വേഗത്തിൽ കറങ്ങുന്നു. കുട്ടി കൈകൾ ശരീരത്തോടടുപ്പിച്ച് മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ 2/5 ഭാഗം കുറച്ചുവെങ്കിൽ കുട്ടിയുടെ കോണീയ വേഗമെത്ര? മേശ ഘർഷണരഹിതമായി കറങ്ങുന്നുവെന്ന് സങ്കൽപിക്കുക.

b) കുട്ടിയുടെ പുതിയ പരിക്രമണ ഗതികോർജം പ്രാരംഭ പരിക്രമണോർജത്തിൽ നിന്ന് വർധിച്ചതായി തെളിയിക്കുക. ഗതികോർജത്തിലെ ഈ വർദ്ധനവ് എങ്ങനെ വിശദീകരിക്കും.

7.14 നിസ്സാര മാസുള്ള ഒരു ചരട്, 3 കി.ഗ്രം ഭാരവും 40 സെ.മീ. ആരവുമുള്ള ഒരു പൊള്ളയായ സിലിണ്ടറിൽ ചുറ്റിവെച്ചിരിക്കുന്നു. ചരട് 30 N ബലംകൊടുത്ത് വലിക്കുമ്പോൾ സിലിണ്ടറിനുണ്ടാകുന്ന കോണീയ ത്വരണമെന്താണ്? ഇവിടെ തെന്നൽ (*slipping*) പരിഗണിക്കേണ്ടതില്ല.

7.15 ഒരു റോട്ടറിന്റെ 200 $rad\ s^{-1}$ കോണീയ വേഗത എന്ന അതേ നിലയിൽ നിലനിർത്തുന്നതിനായി അതിന്

180 $N\ m$ ടോർക്ക് നൽകേണ്ടതുണ്ട്. ഇതു ചെയ്യുന്നതിനായി യന്ത്രത്തിന് വേണ്ടുന്ന പവർ എത്ര? യന്ത്രം 100 % ക്ഷമതകാണിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. (ഘർഷണമില്ലാതിരിക്കുമ്പോൾ ഏകസമാന കോണീയ പ്രവേഗ ത്തിലുള്ള ടോർക്ക് പൂജ്യമായിരിക്കും, എന്നാൽ പ്രയോഗതലത്തിൽ ഘർഷണത്തെ അതിജീവിക്കാനായി ടോർക്ക് നൽകേണ്ടിവരും.)

7.16 സമാനമായ ഒരു തകിടിന് R ആരം ആണ്. $R/2$ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തഭാഗം അതിൽനിന്ന് മുറിച്ചു മാറ്റിയിരിക്കുന്നു. ആ ദ്വാരത്തിന്റെ മധ്യത്തിലേക്ക് തകിടിന്റെ യഥാർഥ മധ്യത്തിൽനിന്നുള്ള അകലം $R/2$ ആണ്. തകിടിന്റെ ബാക്കിവരുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രം കണ്ടെത്തുക.

7.17 ഒരു മീറ്റർ ദണ്ഡിന്റെ മധ്യത്തിൽ ഒരു നൈഫ് എഡ്ജിൽ വെച്ച് ദണ്ഡിനെ തിരശ്ചീനമായി നിർത്തുന്നു. 5 ഗ്രാം വീതമുള്ള 2 നാണയങ്ങൾ ഒന്നിനു മുകളിൽ ഒന്നായി 12-ാം സെ.മീ. ബിന്ദുവിൽ വെക്കുമ്പോൾ ദണ്ഡിനെ തുലനാവസ്ഥയിലാക്കാൻ നൈഫ് എഡ്ജ് 45-ാം സെ.മീ. ബിന്ദുവിലേക്ക് മാറ്റുന്നു. മീറ്റർ ദണ്ഡിന്റെ മാസ് കണക്കാക്കുക.

7.18 ഒരു ഖരഗോളത്തിനെ ഒരേ ഉയരമുള്ളതും എന്നാൽ വിവിധ ചരിവുകളുള്ളതുമായ ചരിവുപലകകളിലൂടെ താഴേക്ക് ഉരുട്ടുന്നു. 1) ചരിവുകൾ മാറുമ്പോൾ അത് ഒരേ വേഗതയിൽതന്നെ താഴെയെത്തുമോ? 2) താഴെക്കെത്താൻ ഏറ്റവും കൂടുതൽ സമയമെടുക്കുന്നതേത് ചരിവിലാണ്? എന്തുകൊണ്ട്?

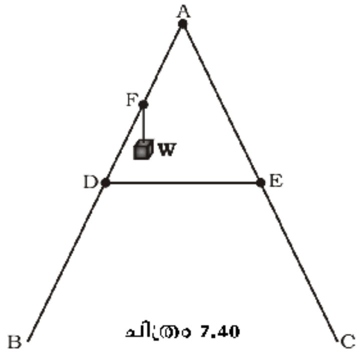
7.19 100 കി.ഗ്രാം ഭാരവും 2 മീറ്റർ ആരവുമുള്ള ഉരുൾച്ചക്രം ഒരു നിരപ്പായ പ്രതലത്തിലൂടെ ഉരുളുമ്പോൾ അതിന്റെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തിന്റെ വേഗത 20 സെ.മീ /സെ. ആണ്. ചക്രത്തെ നിർത്താൻ എത്ര പ്രവൃത്തി ചെയ്യേണ്ടി വരും?

7.20 ഓക്സിജൻ തന്മാത്രയുടെ മാസ് $5.30 \times 10^{-26}\ kg$ ആണ്. ഇതിലെ രണ്ടു അണുക്കളുടെ സംയോജന രേഖക്ക് ലംബമായതും തന്മാത്രാ മധ്യത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ $1.94 \times 10^{-46}\ kg\ m^2$ ആണ്. ഒരു വാതകത്തിലെ ഇത്തരം തന്മാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗത 500 m/s ആണെന്നും പരിക്രമണത്തിലെ ഗതികോർജം സ്ഥാനികചലനത്തിലെ ഗതികോർജത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണെന്നും കരുതുന്നു. തന്മാത്രയുടെ ശരാശരി കോണീയപ്രവേഗം കണക്കാക്കുക.

7.21 30 ഡിഗ്രി ചരിവുള്ള ചരിവുപലകയിലൂടെ ഒരു ഖരസിലിണ്ടർ ഉരുണ്ടു കേറുന്നു. പലകയുടെ ചുവട്ടിലായിരുന്നപ്പോൾ സിലിണ്ടറന്റെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ വേഗത 5 m/s. (1) സിലിണ്ടർ മുകളിലേക്ക് എത്രദൂരം പോകും? (2) അത് തിരിച്ച് താഴെ എത്താൻ എടുക്കുന്ന സമയമെത്ര?

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

7.22 ചിത്രം 7.40 ൽ കാണിച്ചതുപോലെ, ഒരു ഏണിയുടെ രണ്ടുവശങ്ങൾ 1.6 മീറ്റർ വീതം നീളമുള്ള BA യും CA യും വെച്ചിരിക്കുന്നു. പകുതിയോളം ഉയരത്തിൽ 0.5 മീ.നീളത്തിലുള്ള DE ചരട് ഇരുവശങ്ങളെയും യോജിപ്പിച്ച് കെട്ടിയിട്ടുണ്ട്. 40 കി.ഗ്രലാം ഭാരം B യിൽനിന്ന് 1.2 മീറ്റർ അകലെയായി BA വശത്ത് F ൽ തൂക്കിയിരിക്കുന്നു. തറ ഘർഷണരഹിതവും ഏണിയുടെ ഭാരം പരിഗണിക്കത്തക്കതുമല്ല എന്ന സങ്കൽപത്തിൽ. ചരടിലുള്ള വലിവുബലം കണക്കാക്കുക, തറ ഏണിയിൽ ചെലുത്തുന്ന ബലം എത്ര? ($g = 9.8\ m/s^2$) (സൂചന: ഏണിയുടെ ഇരുവശങ്ങളിലുമുള്ള സംതുലനാവസ്ഥ പ്രത്യേകം പരിഗണിക്കേണ്ടതാണ്)



ചിത്രം 7.40

7.23 തിരിഞ്ഞുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു പ്ലാറ്റ്ഫോമിൽ ഒരു മനുഷ്യൻ തിരശ്ചീനമായി വിരിച്ചുപിടിച്ച രണ്ടു കൈകളിലും 5 കി.ഗ്രാം ഭാരം വീതം പിടിച്ചു കൊണ്ട് നിൽക്കുന്നു. പ്ലാറ്റ്ഫോമിന്റെ കോണീയവേഗം ഒരു മിനുട്ടിൽ 30 കറക്കം വീതമാണ്. അയാൾ കൈകൾ ശരീരത്തോട് ചേർത്തുപിടിക്കുമ്പോൾ ഭാരങ്ങൾ 90 സെ.മീ. ദൂരത്തു നിന്ന് 20 സെ.മീ.ദൂരത്തിലാവുന്നു. പ്ലാറ്റ്ഫോമിന്റെയും മനുഷ്യന്റേതും ഒന്നിച്ചുള്ള ടോർക്ക് 7.6 $kg\ m^2$ ന് തുല്യമാണ്. (1) പുതിയ കോണീയ വേഗതയെത്ര? (ഘർഷണം ഒഴിവാക്കുന്നു) (2) ഈ പ്രക്രിയയിൽ ഗതികോർജം സംരക്ഷിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടോ? ഇല്ലെങ്കിൽ എവിടെയാണ് മാറ്റം സംഭവിച്ചത്?

7.24 10 ഗ്രം ഭാരവും 500 *m/s* വേഗതയുമുള്ള ഒരു വെടിയുണ്ട, 1 മീ. വീതിയും 12 കി.ഗ്രാം ഭാരവുമുള്ള ഒരു വാതിലിന്റെ മധ്യത്തിലായി തുളഞ്ഞു കയറിയിരിക്കുന്നു. വാതിലിന്റെ ഒരറ്റം ലംബിതഅക്ഷത്തിൽ ഉറപ്പിച്ചതും ഘർഷണരഹിതമായി പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നതുമാണ്. വെടുയുണ്ട കയറിയതിനുശേഷം വാതിലിന്റെ കോണീയ വേഗം കണക്കാക്കുക. (സൂചന: ഒരറ്റം ഉറപ്പിച്ച ലംബിത അക്ഷത്തെ ചുറ്റുന്ന വാതിലിന്റെ മൊമന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ $ML^2/3$)

7.25 മധ്യത്തിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നതും പ്രതലത്തിനു ലംബമായിട്ടുള്ളതുമായ അക്ഷങ്ങളെ ആധാരമാക്കി പ്രതലത്തിനു ലംബമായ മൊമെന്റ് ഓഫ് ഇനർഷ്യ I_1, I_2 ഉള്ള രണ്ടു വൃത്തത്തകിടുകളുടെ കോണീയ വേഗങ്ങൾ യഥാക്രമം ω_1 , ω_2 ആണ്. അവയുടെ പരിക്രമണാക്ഷങ്ങൾ ഒന്നിച്ചുവരത്തക്ക തരത്തിൽ മുഖാമുഖം ചേർത്തു വെക്കുന്നു. (1) തകിടുകളുടെ ഈ ദ്വന്ദ്വ വ്യവസ്ഥയുടെ കോണീയവേഗമെത്ര? (2) ഇരു തകിടുകളുടെയും പ്രരംഭ ഗതികോർജങ്ങളുടെ തുകയേക്കാൾ കുറവാണ് യോജിച്ച വ്യവസ്ഥയുടെ ഗതികോർജമെന്ന് തെളിയിക്കുക. ഈ ഊർജ്ജനഷ്ടത്തെ എങ്ങനെ വിശദീകരിക്കും? ($\omega_1 \neq \omega_2$ എന്നെടുക്കുക).

7.26 (*a*) ലംബാക്ഷങ്ങളുടെ തത്വം തെളിയിക്കുക *(സൂചന: മൂലബിന്ദു (origin) വിൽ നിന്നും x -y തലത്തിലെ (x,y) ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ വർഗം* $(x^2 + y^2)$ ആണ്.)

(*b*) സമാന്തര അക്ഷങ്ങളുടെ (x, y) ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള തത്വം തെളിയിക്കുക (*സൂചന: ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം തന്നെ മൂലബിന്ദുവായി (origin)* തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നുവെങ്കിൽ $\Sigma m_i r_i = 0$)

7.27 ഒരു ചരിവുതലത്തിലൂടെ താഴേക്കുരുണ്ടുവരുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ (വലയമോ തകിടോ സിലിണ്ടറോ ഗോളമോ ആകാം) ചുവട്ടിലെ പ്രവേഗം

$$v^2 = \frac{2gh}{\left(1+\dfrac{k^2}{R^2}\right)}$$

എന്നു തെളിയിക്കുക (ഇവിടെ h = ചരിവു പലകയുടെ ഉയരം, k = വസ്തുവിന്റെ സമമിതി അക്ഷത്തെയാധാരമാക്കിയുള്ള റേഡിയസ് ഓഫ് ജൈറേഷൻ, R = വസ്തു ആരം. മുകളിലുള്ള വിരാമാവസ്ഥയിൽ നിന്നും വസ്തുവിന്റെ ചലനം ആരംഭിക്കുന്നുവെന്നു സങ്കൽപിക്കുക.

7.28 അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള കോണീയ വേഗത ω_0 ഉള്ള ഒരു തകിട് ഘർഷണരഹിതമായ ഒരു മേശമേൽ (സ്ഥാനാന്തരത്തിനുള്ള തള്ളൽ കൊടുക്കാതെ) മെല്ലെ വെക്കുന്നു. തകിടിന്റെ ആരം *R* ആണ്. ചിത്രം 7.41 ൽ കാണിച്ചതുപോലെ തകിടിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ *A, B, C*എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ രേഖീയ പ്രവേഗങ്ങൾ എന്താണ്? ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ദിശയിലേക്ക് തകിട് ഉരുളാൻ സാദ്ധ്യതയുണ്ടോ?

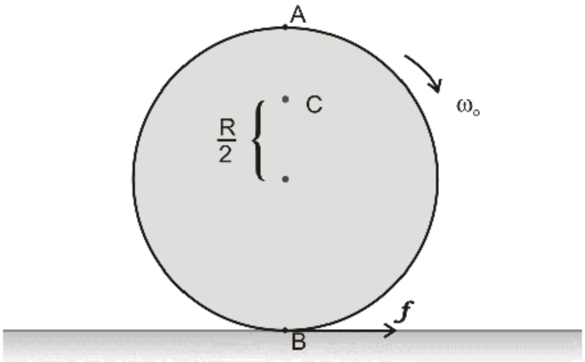
7.29 ചിത്രം 7.41 ൽ കാണിച്ച തകിട് കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ദിശയിൽ ഉരുളുന്നതിന് ഘർഷണം എന്തുകൊണ്ട് ആവശ്യമായിവരുന്നു എന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

(*a*) സുഗമമായ ഉരുളൽ തുടങ്ങുന്നതിനുമുമ്പ് എന്തായിരിക്കും *B* എന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള ഘർഷണബലത്തിന്റെ ഘർഷണടോർക്കിന്റെ ദിശ.

(*b*) സുഗമമായ ഉരുളൽ തുടങ്ങിയ ശേഷം ഘർഷണ ബലം എന്തായിരിക്കും?

7.30. 10 സെ.മീ. വീതം ആരമുള്ള ഒരു ഖരതകിടും ഒരു വളയവും, തിരശ്ചീനതലമുള്ള മേശപ്പുറത്ത് ഒരുമിച്ചു വെക്കുന്നു. അവയുടെ പ്രരംഭ കോണീയ വേഗത 10 π *rad* s^{-1} ന് ആണ്. ഇവയിൽ ഏതാണ് ഏറ്റവും ആദ്യം ഉരുളൽ ആരംഭിക്കുക? ഗതികഘർഷണ ഗുണാങ്കം, $\mu = 0.2$ ആണ്.

7.31. 30 ഡിഗ്രി ചരിവുള്ള ഒരു പലകയിലൂടെ 10 കി.ഗ്രം ഭാരവും 15 സെ.മീ. ആരവുമുള്ള ഒരു സിലിണ്ടർ സുഗ



ചിത്രം 7.41

മമായി ഉരുളുന്നു. സ്ഥിതഘർഷണ (*static friction*) ഗുണാങ്കം $\mu = 0.25$ ആണ്.

(*a*) സിലിണ്ടറിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ഘർഷണബലം എത്രയായിരിക്കും?

(*b*) ഉരുളൽ നേരത്ത് ഘർഷണത്തിനെതിരെ നടക്കുന്ന പ്രവൃത്തി എത്രയാണ്?

(*c*) പലകയുടെ ചരിവുകോൺ θ വർധിപ്പിക്കുമ്പോൾ, അത് എത്രയാകുന്നതു മുതലാണ് സിലിണ്ടർ സുഗമമായ ഉരുളൽ കൂടാതെ തെന്നുന്ന (*skid*) സ്വഭാവം പ്രകടിപ്പിക്കുക?

7.32. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശ്രദ്ധാപൂർവ്വം വായിച്ച്, അവ ശരിയാണോ തെറ്റാണോ എന്ന് കാര്യകാരണ സഹിതം പ്രസ്താവിക്കുക

(a) ഉരുളൽ വേളയിൽ ഘർഷണബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് വസ്തുവിന്റെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്ര (*CM*)ത്തിന്റെ ചലന ദിശയിലാണ്.

(b) ഉരുളൽ നേരത്ത് സ്പർശബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനത്തുള്ള ക്ഷണികവേഗത പൂജ്യമായിരിക്കും.

(c) ഉരുളൽ നേരത്ത് സ്പർശബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനത്തുള്ള ക്ഷണികത്വരണം പൂജ്യമായിരിക്കും.

(d) സുഗമമായ ഉരുളൽചലനത്തിന് ഘർണത്തിനെതിരെയുള്ള പ്രവൃത്തി പൂജ്യമായിരിക്കണം.

(c) പൂർണമായും ഘർഷണരഹിതമായ ചരിവുപലകയിലൂടെ താഴേക്ക് സുഗമമായി ഉരുളുന്ന ഒരു ചക്രം തെന്നൽ (ഉരുളലല്ല) ചലനത്തിലേക്കു മാറ്റപ്പെടും.

7.33 ഒരു കണികാ വ്യവസ്ഥയുടെ ചലനത്തെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തിന്റെചലനമെന്നും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ചലനമെന്നും രണ്ടായി വിഭജിക്കാം.

(a) $\mathbf{p} = \mathbf{p}_i + m_i \mathbf{V}$ എന്ന് കാണിക്കുക.

ഇതിൽ $\mathbf{p}_i$ എന്നത് കണം i യുടെ ആക്കമാണ്, $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തെ അപേക്ഷിച്ചുള്ള i സ്ഥാനത്തെ കണം i യുടെ പ്രവേഗമാണ് $\mathbf{v}_i$. ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തിന്റെ നിർവചനത്തെ ആധാരമാക്കി $\Sigma \mathbf{p}_i = 0$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(b) $K - K' \ {}^{1}/_{2}MV^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഇതിൽ K എന്നത് വ്യവസറയുടെ ആകെയുള്ള ഗതികോർജമാണ്. K'എന്നത് വ്യവസറയുടെ ദ്രവ്യമാന കേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കി കണികകളുടെ പ്രവേഗമൂലമുണ്ടാകുന്ന ഗതികോർജവും $MV^2/2$. മൊത്തത്തിലുള്ള സ്ഥാനാന്തര ചലനത്തിന്റെ ഗതികോർജവുമാണ്. ഫലം വിഭാഗം 7.14 ൽ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്.

(c) $\mathbf{L} = \mathbf{L} + \mathbf{R} \times M\mathbf{V}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

ഇതിൽ $\mathbf{L}' = \Sigma\, \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ എന്നത് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ചുറ്റിയുള്ള വ്യവസറയുടെ കോണീയ ആക്കമാണ്. ഇവിടെ പ്രവേഗം കണക്കാക്കുന്നത് ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ അപേക്ഷിച്ചാണ്. $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$ എന്ന് ഓർമ്മിക്കുക. ബാക്കിയുള്ള പ്രതീകങ്ങൾ ഈ അധ്യായത്തിൽ പൊതുവേ ഉപയോഗിച്ചവയാണ്. $\mathbf{L}$ ഉം $M\mathbf{R} \times \mathbf{V}$ ഉം യഥാക്രമം കണികാവ്യവസറയുടെ ദ്രവ്യകേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള കോണീയ ആക്കങ്ങളാണ്.

(d) $d\mathbf{L}/\mathrm{dt} = \Sigma\, \mathbf{r}_i \times \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{dt}$ എന്നു തെളിയിക്കുക

കൂടാതെ

$d\mathbf{L}/\mathrm{dt} = \tau^{1}_{ext}$ തെളിയിക്കുക.

ഇതിൽ τ^{1}_{ext} എന്നത് കണികാവ്യവസ്ഥയുടെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തെ ആധാരമാക്കി കണികാവ്യവസ്ഥയിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന എല്ലാ ബാഹ്യ ടോർക്കുകളുടെയും തുകയാണ്.

(സൂചന: ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെയും ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമത്തിന്റെയും നിർവ്വചനം ഉപയോഗിക്കുക. രണ്ടു കണികകൾ പരിസ്പരം പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം അവ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയിൽ കൂടി യായിരിക്കും.)

പ്ലൂട്ടോ - ഒരു കുള്ളൻഗ്രഹം (Pluto - A Dwarf Planet)

അന്താരാഷ്ട്ര ജ്യോതിശാസ്ത്ര സംഘടന (IAU) അതിന്റെ ആസ്ഥാനമായ ചെക്ക് റിപ്പബ്ലിക്കിലെ പ്രാഗിൽ 2006 ആഗസ്റ്റ് 24-നു ചേർന്ന യോഗത്തിൽ, നമ്മുടെ സൗരയൂഥത്തിലെ ഗ്രഹങ്ങളെ സംബ ന്ധിച്ച് ഒരു പുതിയ നിർവചനം അംഗീകരിച്ചു. പുതിയ നിർവചമനുസരിച്ച് പ്ലൂട്ടോവിന് ഒരു ഗ്രഹമായി തുടരാനാവില്ല. അതിനർഥം സൗരയൂഥത്തിൽ ഗ്രഹപദവിയുള്ള എട്ട് ഗ്രഹങ്ങൾ മാത്രമേ ഉണ്ടാവുക യുള്ളു എന്നാണ്. അതായത് ബുധൻ, ശുക്രൻ, ഭൂമി, ചൊവ്വ, വ്യാഴം, ശനി, യുറാനസ്, നെപ്ട്യൂൺ എന്നിവ. സംഘടനയുടെ തീരുമാനപ്രകാരം, സൗരയുഥത്തിൽ (കൃത്രിമ ഉപഗ്രഹങ്ങളൊഴിച്ച്,) 'ഗ്രഹം', 'മറ്റു വസ്തുക്കൾ' എന്നിവ ഉൾപ്പെടുന്ന ആകാശഗോളങ്ങളെ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മൂന്നു തരത്തിൽ വേർതിരിക്കുന്ന നിർവചനം അംഗീകരിച്ചു.

1. ഒരു വാനവസ്തുവായ ഗ്രഹത്തിന് (*a*) സൂര്യനു ചുറ്റും സ്ഥിരമായ ഒരു പരിക്രമണപഥമുണ്ടായിരി ക്കണം (*b*) ദൃഢവസ്തുവിന്റെ സാധാരണബലങ്ങളെ അതിജീവിക്കുന്ന ഗുരുത്വബലത്തിനാവശ്യ മായത്ര മാസുമുണ്ടായിരിക്കണം, അതുപോലെ ദ്രവസ്ഥിതിക (*hydrostatic*) സന്തുലനം ആർജിക്കുന്നതരത്തിലുള്ള ആകൃതിയായിരിക്കണം (ഗോളാകൃതി), (*c*) സമീപസ്ഥഗ്രഹങ്ങളുടെ പരിക്രമണ പാതയിൽ മുറിച്ചു കടക്കാത്തവിധം വ്യക്തമായ പരിക്രമണപാതയുണ്ടായിരിക്കണം.
2. ഒരു കുള്ളൻ ഗ്രഹത്തിന് (*a*) സൂര്യന് ചുറ്റുമായി ഒരു സഞ്ചാരപാതയുണ്ടായിരിക്കണം, (*b*) ദൃഢ വസ്തുവിന്റെ സാധാരണബലങ്ങളെ അതിജീവിക്കുന്ന തരത്തിൽ അതിന് സ്വന്തമായ ഗുരുത്വബലവും അതിനാവശ്യമായ മാസുമുണ്ടായിരിക്കണം, അതുപോലെ ദ്രവസ്ഥിതികാ സന്തുലനത്തിലുള്ള ആകൃ തിയായിരിക്കണം (ഏകദേശം ഗോളാകൃതി), (*c*) അയൽഗോളങ്ങളുമായി കൃത്യമായി വേർതിരി ക്കുന്ന വ്യക്തമായ പരിക്രമണപഥം ഉണ്ടാവണമെന്നില്ല, (*d*) എന്നാൽ അതൊരു ഉപഗ്രഹം ആയിരിക്കുകയില്ല.
3. 'മറ്റു വസ്തുക്കൾ' അതായത് കൃത്രിമ ഉപഗ്രഹങ്ങളൊഴിച്ച്, സൗരയൂഥത്തിലെ എല്ലാതരം ചെറു വസ്തുക്കളും അറിയപ്പെടുന്നത് 'സൗരയൂഥത്തിലെ ക്ഷുദ്ര വസ്തുക്കൾ' (*small solar-system bodies*)എന്നാണ്.

സൗരയൂഥത്തിലെ എട്ടു ഗ്രഹങ്ങളിൽ നിന്നും വ്യത്യസ്തമായി പ്ലൂട്ടോയുടെ സൗരപരിക്രമണപാത വ്യക്തതയില്ലാത്തതാണ്. അത് ചിലപ്പോൾ നെപ്ട്യൂണിന്റെ പരിക്രമണപാതയുടെ ഉള്ളിലേക്ക് കട ന്നുവരും. മറ്റുവസ്തുക്കളായി ഇപ്പോളറിയപ്പെടുന്നത് ക്ഷുദ്രഗ്രഹങ്ങൾ (*asteroids*), സൗരയുഥത്തിന്റെ ബാഹ്യമേഖലയിൽ നിന്നെത്തുന്ന ട്രാൻസ് നെപ്ട്യൂണിയൻ വസ്തുക്കൾ (*trans-neptunian objects - TNOs*) വാൽനക്ഷത്രങ്ങൾ (*comets*) എന്നിവയാണ്.

ആകാശഗോളങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പുതിയ നിർവചനങ്ങൾ അംഗീകരിക്കപ്പെട്ടതോടെ പ്ലൂട്ടോക്ക് ഗ്രഹപദവി നഷ്ടമാവുകയും അത് ട്രാൻസ് - നെപ്ട്യൂണിയൻ വസ്തു എന്ന പുതിയ ഗണത്തിൽ ഉൾപ്പെട്ട ഒരു കുള്ളൻ ഗ്രഹമായി നിർവചിക്കപ്പെടുകയും ചെയ്തു.

M5L5W6

അധ്യായം 8

ഗുരുത്വാകർഷണം (GRAVITATION)

8.1 ആമുഖം
8.2 കെപ്ലറുടെ നിയമങ്ങൾ
8.3 സാർവിക ഗുരുത്വാകർഷണ നിയമം
8.4 ഗുരുത്വസ്ഥിരാങ്കം
8.5 ഭൂഗുരുത്വത്വരണം
8.6 ഭൗമോപരിതലത്തിന് താഴെയും മുകളിലുമുള്ള ഭൂഗുരുത്വത്വരണം
8.7 ഗുരുത്വസ്ഥിതികോർജം
8.8 പലായനവേഗം
8.9 ഭൗമോപഗ്രഹങ്ങൾ
8.10 പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ഒരു ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ ഊർജം
8.11 ഭൂസ്ഥിര, ധ്രുവീയ ഉപഗ്രഹങ്ങൾ
8.12 ഭാരമില്ലായ്മ
സംഗ്രഹം
വിചിന്തന വിഷയങ്ങൾ
പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ
കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

8.1 ആമുഖം

എല്ലാ വസ്തുക്കളെയും ഭൂമി അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലേക്ക് ആകർഷിക്കുന്നുവെന്നത് വളരെക്കാലം മുമ്പുതന്നെ നമുക്കറിയാവുന്ന കാര്യമാണ്. മുകളിലേക്കെറിയുന്ന ഏതൊരു വസ്തുവും തിരിച്ച് ഭൂമിയിലേക്കു പതിക്കുന്നത്, മലമുകളിൽനിന്ന് താഴേക്ക് ഇറങ്ങുന്നതിനേക്കാൾ കൂടുതൽ ക്ഷീണമാണ് മലകയറുമ്പോൾ അനുഭവപ്പെടുന്നത്, മഴത്തുള്ളികൾ മേഘങ്ങളിൽനിന്ന് താഴേക്കു തന്നെ വീഴുന്നത് തുടങ്ങി നിരവധി പ്രതിഭാസങ്ങൾ നമുക്ക് പരിചിതമാണ്. മാസിൽ വ്യത്യാസമുള്ള വസ്തുക്കളാണെങ്കിലും അവ ഒരേ ത്വരണത്തോടെയാണു ഭൂമിയിലേക്കു പതിക്കുന്നതെന്ന് തിരിച്ചറിഞ്ഞത് ഇറ്റാലിയൻ ഭൗതിക ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഗലീലിയോ (Galileo 1564-1642) യായിരുന്നു. ഈ വസ്തുത വിശദീകരിക്കാൻ അദ്ദേഹം പരസ്യമായി ഒരു പ്രദർശനം തന്നെ സംഘടിപ്പിച്ചതായി പറയപ്പെടുന്നു. ചരിവുതലത്തിലൂടെ താഴേക്കുരുളുന്ന വസ്തുക്കളിൽ നടത്തിയ പരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെ അദ്ദേഹം കണ്ടെത്തിയ ഭൂഗുരുത്വത്വരണത്തിന്റെ മൂല്യം, പിൽക്കാലത്ത് നിർണയിക്കപ്പെട്ട മൂല്യത്തോടു വളരെ അടുത്തു നിൽക്കുന്നതാണ്.

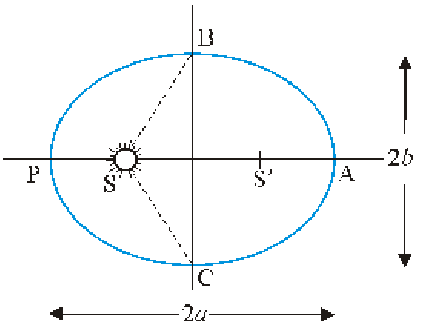
തങ്ങളുമായി ബന്ധമില്ലെന്നു തോന്നിയിട്ടും, നക്ഷത്രങ്ങളെയും ഗ്രഹങ്ങളെയും അവയുടെ ചലനങ്ങളെയും പുരാതനകാലം തൊട്ട് തന്നെ വിവിധ രാജ്യക്കാർ നിരീക്ഷിച്ചുവന്നിരുന്നു. പല നക്ഷത്രങ്ങളും വർഷങ്ങളോളം ആകാശത്തു സ്ഥാനമാറ്റമില്ലാതെ കാണുന്നതും ഈ നക്ഷത്രങ്ങളുടെ പശ്ചാത്തലത്തിൽ ഗ്രഹങ്ങൾ ക്രമമായ ചലനങ്ങളിലേർപ്പെടുന്നതും അവരിൽ കൗതുകമുണ്ടാക്കി. ഗ്രഹചലനങ്ങളെക്കുറിച്ചു രേഖപ്പെടുത്തപ്പെട്ട ഏറ്റവും ആദ്യത്തെ മാതൃക, ഏതാണ്ട് 2000 വർഷങ്ങൾക്കുമുമ്പ് ടോളമി (Ptolemy) ആവിഷ്കരിച്ച 'ഭൗമകേന്ദ്ര' (Geocentric) സിദ്ധാന്തമാണ്. ഇതിൽ സൂര്യനും നക്ഷത്രങ്ങളും മറ്റെല്ലാ ഗ്രഹങ്ങളും ഉൾപ്പെടെയുള്ള ആകാശഗോളങ്ങൾ ഭൂമിക്കു ചുറ്റും പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നതായാണ് വിശദീകരിക്കുന്നത്. ആകാശഗോളങ്ങളെല്ലാം വർത്തുളപാതയിൽ മാത്രം സഞ്ചരിക്കുന്നതായി അക്കാലത്ത് കരുതപ്പെട്ടിരുന്നു. നമുക്കു കാണാൻ കഴിയുന്ന ഗ്രഹചലനങ്ങൾ വിശദീകരിക്കാൻ സങ്കീർണ്ണമായ ചലനമാതൃകകൾ ടോളമി മുന്നോട്ടുവച്ചു. ഗ്രഹങ്ങൾ വർത്തുളപാതകളിൽ (Circular Orbits) സഞ്ചരിക്കുന്നതായും ഈ വർത്തുള പാതകളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ ഭൂമിയെ വലയംചെയ്യുന്ന വലിയ വർത്തുളപാതകളിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നതായും അദ്ദേഹം വിശദീകരിച്ചു. 400 വർഷങ്ങൾക്കിപ്പുറം സമാനമായ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ ഇന്ത്യൻ ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രജ്ഞരും ആവിഷ്കരിക്കുകയുണ്ടായി. എന്നാൽ സൂര്യൻ ഗ്രഹങ്ങളുടെ കേന്ദ്രമാ

ണെന്ന കുറേക്കൂടി മനോഹരമായ 'സൗരകേന്ദ്ര' (Heliocentric) മാതൃക ആര്യഭടൻ (എ.ഡി.അഞ്ചാം നൂറ്റാണ്ട്) അദ്ദേഹത്തിന്റെ പുസ്തകത്തിൽ വിശദീകരിക്കുന്നുണ്ട്. ആയിരം വർഷങ്ങൾക്കുശേഷം പോളിഷ് സന്ന്യാസി നിക്കൊളാസ് കോപ്പർനിക്കസ് (Nicolas Copernicus 1473-1543) അവതരിപ്പിച്ച കൃത്യതയുള്ള മാതൃകയിൽ, നിശ്ചലമായതും കേന്ദ്രത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതുമായ സൂര്യനു ചുറ്റും ഗ്രഹങ്ങൾ വൃത്തപാതകളിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നുവെന്ന് വിശദമാക്കി. അദ്ദേഹത്തിന്റെ സിദ്ധാന്തം ക്രിസ്തീയസഭക്ക് അനഭിമതമായിരുന്നു. അതുകൊണ്ടു തന്നെ, അദ്ദേഹത്തെ പിന്തുണച്ച ഗലീലിയോക്ക് തന്റെ വിശ്വാസങ്ങളുടെ പേരിൽ വിചാരണ നടപടികൾ നേരിടേണ്ടിവന്നു. ഗലീലിയോയുടെ സമകാലികനായ ഡെൻമാർക്കുകാരൻ ടൈക്കോ ബ്രാഹെ (Tycho Brahe 1546-1601) എന്ന മഹാനായ ശാസ്ത്രകാരൻ നഗ്നനേത്രങ്ങൾകൊണ്ട് ഗ്രഹങ്ങളെ നിരീക്ഷിക്കാൻ തന്റെ ജീവിതകാലം മുഴുവൻ ചെലവഴിച്ചു. അങ്ങനെ സമാഹരിച്ച വിവരങ്ങളെ അദ്ദേഹത്തിന്റെ സഹായിയായിരുന്ന ജോഹാനസ് കെപ്ലർ (Johannes Kepler 1571-1640) പിന്നീട് ഗണിതപരമായി വിശകലനം ചെയ്തു. കെപ്ലറുടെ നിയമങ്ങൾ (Kepler's laws) എന്ന പേരിൽ ഇപ്പോൾ അറിയപ്പെടുന്ന മൂന്ന് മനോഹരനിയമങ്ങൾ ഈ ഡാറ്റയിൽനിന്ന് അദ്ദേഹം ഉരുത്തിരിച്ചെടുത്തു. സാർവിക ഗുരുത്വനിയമം (universal law of gravitation) പ്രസ്താവിച്ചുകൊണ്ട് ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ ഒരു മഹത്തായ കാൽവയ്പ് നടത്താൻ ന്യൂട്ടനെ പ്രാപ്തനാക്കിയത് കെപ്ലറുടെ ഈ നിയമങ്ങളാണ്.

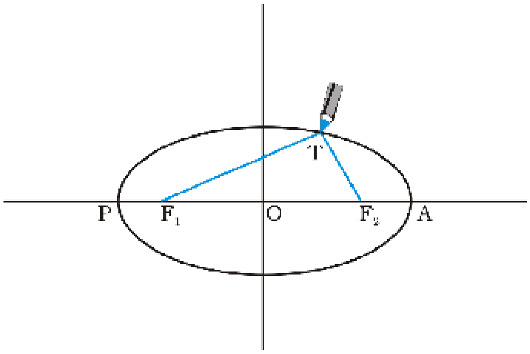
8.2 കെപ്ലറുടെ നിയമങ്ങൾ (Kepler's Laws)

ഗ്രഹചലനങ്ങളെ സംബന്ധിച്ച് മൂന്നു നിയമങ്ങളാണ് ജോഹാനസ് കെപ്ലർ ആവിഷ്കരിച്ചത്. അവ താഴെ കൊടുത്തവിധത്തിൽ പ്രസ്താവിക്കാം.

1. പരിക്രമണപാതകളുടെ നിയമം (Law of Orbits)



ചിത്രം 8.1(a) സൂര്യനു ചുറ്റും ഒരു ഗ്രഹം ചലിക്കുന്ന ദീർഘവൃത്തപാത. സൂര്യനോട് ഏറ്റവും അടുത്ത ബിന്ദുവാണ് P. ഏറ്റവും അകന്ന ബിന്ദു A യും. P യെ പെരിഹീലിയൺ എന്നും A യെ അപ്ഹീലിയൺ എന്നും പറയുന്നു. AP യുടെ പകുതി ദൂരമാണ് സെമിമേജർ അക്ഷം.



ചിത്രം 8.1(b) ദീർഘവൃത്തം വരയ്ക്കുന്ന വിധം. F_1, F_2 എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഒരു ചരടിന്റെ അഗ്രങ്ങൾ ഉറപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ചരടിൽ ഒരു പെൻസിലിന്റെ മുനയുള്ള ഭാഗം ചേർത്ത് വലിച്ചു പിടിച്ച് ചുറ്റും ചലിപ്പിക്കുന്നു.

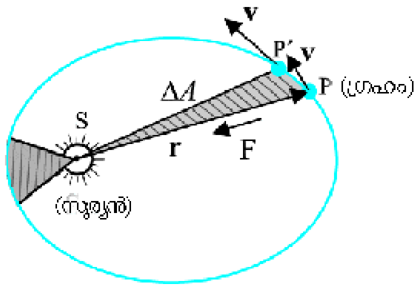
എല്ലാ ഗ്രഹങ്ങളും ദീർഘവൃത്താകാര പരിക്രമണപാതങ്ങളിലൂടെ (Elliptical orbits), അതിന്റെ ഫോക്കസുകളിലൊന്നിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന സൂര്യനു ചുറ്റും ചലിക്കുന്നു. (ചിത്രം 8.1 a). ഗ്രഹചലനങ്ങൾക്കു വൃത്തപാതകൾ മാത്രം നിഷ്കർഷിച്ച കോപ്പർനിക്കസിന്റെ മാതൃകയിൽ നിന്നുള്ള വലിയമാറ്റമാണ് ഈ നിയമം.

നമുക്കുപരിചിതമായ വൃത്തം ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ (Ellipse) ഒരു സവിശേഷരൂപമാണ്. ദീർഘവൃത്തങ്ങൾ താഴെ പറയുന്നതരത്തിൽ ലളിതമായി വരക്കാവുന്നതാണ്.

കടലാസിൽ F_1, F_2 എന്നീ രണ്ടുബിന്ദുക്കൾ രേഖപ്പെടുത്തി, അവയിൽ രണ്ട് ആണികൾ തറക്കുക. നീളമുള്ള ഒരു ചരടെടുത്ത് അതിന്റെ അഗ്രങ്ങൾ ഈ ആണികളിൽ കെട്ടുക. ചരട് എപ്പോഴും വലിഞ്ഞുനിൽക്കത്തക്ക രീതിയിൽ ഒരു പെൻസിൽ ഉപയോഗിച്ച് ആണികൾക്കു ചുറ്റും ഒരു വലയം വരക്കുക (ചിത്രം 8.1b). ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന അടഞ്ഞ വലയമാണ് (closed loop) ദീർഘവൃത്തം. ദീർഘവൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു (T) വിലേക്ക് F_1, F_2 എന്നിവയിൽനിന്നുള്ള അകലങ്ങളുടെ തുക എല്ലായ്പ്പോഴും ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായിരിക്കും (ഉപയോഗിച്ച ചരടിന്റെ ആകെ നീളമായിരിക്കും ഇത്). ഇവിടെ F_1 ഉം F_2 വും ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ഫോക്കസുകൾ എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. F_1, F_2 എന്നിവയെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖ നീട്ടി വരച്ചാൽ ചിത്രം (8.1 b) യിൽ കാണുന്ന രീതിയിൽ ദീർഘവൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളായ P യിലും A യിലും എത്തും. രേഖ PA യുടെ മധ്യബിന്ദു ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം എന്നും PO = AO എന്ന നീളത്തെ ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ സെമിമേജർ അക്ഷം എന്നും വിളിക്കുന്നു. ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ രണ്ട് ഫോക്കസുകളും കൂടിച്ചേർന്ന് ഒന്നായിത്തീർന്നാൽ, അത് നമുക്ക് സുപരിചിതമായ വൃത്തമായിത്തീരും. അതിന്റെ സെമിമേജർ അക്ഷം ഈ വൃത്തത്തിന്റെ ആരവുമായിരിക്കും.

2. പരപ്പളവുകളുടെ നിയമം (Law of areas)

ഒരു ഗ്രഹത്തെയും സൂര്യനെയും തമ്മിൽ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖ തുല്യ ഇടവേളകളിൽ തുല്യ പരപ്പളവുകൾ ഉണ്ടാക്കി സഞ്ചരിക്കുന്നു (ചിത്രം 8.2). ഗ്രഹങ്ങൾ സൂര്യനിൽ നിന്ന് അകലെയാകുമ്പോൾ സാവധാനത്തിലും അടുത്താവുമ്പോൾ കൂടുതൽ വേഗത്തിലും സഞ്ചരിക്കുന്നു എന്ന നിരീക്ഷണത്തിൽ നിന്നാണ് ഈ നിയമം ഉടലെടുക്കുന്നത്.



ചിത്രം 8.2 P എന്ന ഗ്രഹം സൂര്യനു ചുറ്റും ദീർഘവൃത്താകാരപാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നു. Δt എന്ന വളരെ കുറഞ്ഞ സമയംകൊണ്ട് ഉണ്ടാക്കുന്ന പരപ്പളവാണ് ഷെയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്ന ഭാഗം ΔA

3. പരിക്രമണകാലങ്ങളുടെ നിയമം (Law of Periods)

ഒരു ഗ്രഹത്തിന്റെ പരിക്രമണകാലത്തിന്റെ (Period of revolution) വർഗം ദീർഘവൃത്തസഞ്ചാരപാതയുടെ സെമിമേജർ അക്ഷത്തിന്റെ (semi-major axis) ക്യൂബിന് ആനുപാതികമായിരിക്കും.

താഴെ കൊടുത്ത പട്ടിക സൂര്യനു ചുറ്റുമുള്ള ഗ്രഹങ്ങളുടെ ഏകദേശ പരിക്രമണ കാലവും അവയുടെ സെമിമേജർ അക്ഷങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങളും നൽകുന്നു.

പട്ടിക 8.1: താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഗ്രഹചലനങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള ഡാറ്റ കെപ്ലറുടെ പരിക്രമണ കാലത്തെ സംബന്ധിച്ച നിയമത്തെ സ്ഥിരീകരിക്കുന്നു.

a – സെമിമേജർ അക്ഷം, 10^{10}m ന്റെ യൂണിറ്റുകളിൽ

T – ഗ്രഹങ്ങളുടെ പരിക്രമണകാലം, വർഷങ്ങളിൽ (y)

Q – (T^2/a^3) അനുപാതം, 10^{-34} y^2m^{-3} ന്റെ യൂണിറ്റുകളിൽ

ഗ്രഹം	a	T	Q
ബുധൻ	5.79	0.24	2.95
ശുക്രൻ	10.8	0.615	3.00
ഭൂമി	15.0	1	2.96
ചൊവ്വ	22.8	1.88	2.98
വ്യാഴം	77.8	11.9	3.01
ശനി	143	29.5	2.98
യുറാനസ്	287	84	2.98
നെപ്റ്റ്യൂൺ	450	165	2.99
പ്ലൂട്ടോ*	590	248	2.99

ഏത് കേന്ദ്രീയബലത്തിനും (Central force) ബാധകമായുള്ള കോണീയ ആക്ക (Angular momentum) സംരക്ഷണനിയമത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി പരപ്പളവുകളുടെ നിയമം (Law of areas) മനസിലാക്കാൻ കഴിയും. കേന്ദ്രബലം എന്നത് സൂര്യനെയും ഗ്രഹത്തെയും ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന സദിശത്തിലൂടെ ഗ്രഹത്തിൻമേൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ബലമാണ്. സൂര്യൻ ആധാരബിന്ദുവി (Origin) ലാണെന്നും ഗ്രഹത്തിന്റെ സ്ഥാനവും ആക്കവും സൂചിപ്പിക്കുന്ന സൂചകങ്ങൾ യഥാക്രമം r, p എന്നിവയാണെന്നും കരുതുക. m മാസുള്ള ഗ്രഹം Δt സഞ്ചാരസമയംകൊണ്ട് നിർമിക്കുന്ന പരപ്പളവ് ΔA താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിലായിരിക്കും (ചിത്രം 8.2),

$$\Delta A = 1/2\,(\mathbf{r} \times \mathbf{v}\,\Delta t) \tag{8.1}$$

അതിനാൽ,

$$\Delta A / \Delta t = 1/2\,(\mathbf{r} \times \mathbf{p})/m, \text{ (കാരണം, } \mathbf{v} = \mathbf{p}/m)$$

$$= \mathbf{L} / (2\,m) \tag{8.2}$$

ഇവിടെ, **v** പ്രവേഗവും **L** കോണീയ ആക്കവുമാണ്; ഇത് **(r × p)** ക്ക് തുല്യവുമാണ്. **r** ന്റെ ദിശയിലുള്ള ഒരു കേന്ദ്രീയബലത്തെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം, ഗ്രഹം പരിക്രമണം ചെയ്യുമ്പോൾ **L** എന്നത് ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായിരിക്കും. ആയതിനാൽ, മുകളിലുള്ള സമവാക്യം (8.2) പ്രകാരം ΔA/Δt ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായിരിക്കും. ഇതാണ് പരപ്പളവുകളുടെ നിയമം. ഗുരുത്വാകർഷണം ഒരു കേന്ദ്രബലമായതിനാലാണ് പരപ്പളവുകളുടെ നിയമം അതിന് ബാധകമാകുന്നത്.

ജോഹാനസ് കെപ്ലർ (1571–1630) ജോഹാനസ് കെപ്ലർ ജർമൻ വംശജനായ ശാസ്ത്രജ്ഞനാണ്. ടൈക്കോ ബ്രാഹേയുടെയും സഹപ്രവർത്തകരുടെയും കഠിന പ്രയത്നങ്ങളിലൂടെയുള്ള നിരീക്ഷണങ്ങൾ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തി ഗ്രഹചലനങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട മൂന്ന് നിയമങ്ങൾ അദ്ദേഹം രൂപീകരിക്കുകയുണ്ടായി. ബ്രാഹേയുടെ ഒരു സഹായിയായിരുന്നു കെപ്ലർ. നീണ്ട പതിനാറുവർഷമെടുത്താണ് അദ്ദേഹം മൂന്നു ഗ്രഹനിയമങ്ങളിൽ എത്തിച്ചേർന്നത്. ഒരു ടെലിസ്കോപ്പിൽ വന്നു പതിക്കുന്ന പ്രകാശത്തിന് എന്തു സംഭവിക്കുന്നുവെന്ന് ആദ്യമായി വിശദീകരിച്ച അദ്ദേഹം ജ്യാമിതീയപ്രകാശികത്തിന്റെ (Geometrical optics) ഉപജ്ഞാതാവായും അറിയപ്പെടുന്നു.

▶ **ഉദാഹരണം 8.1** : ചിത്രം 8.1 (a) യിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന P എന്ന പെരിഹീലിയണിൽ ഗ്രഹത്തിന്റെ വേഗം v_P വും, സൂര്യനും ഗ്രഹവും തമ്മിലുള്ള ദൂരം (SP) r_P യും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. $\{r_P, v_P\}$ എന്നിവയെ തത്തുല്യമായ അഫീലിയണിലുള്ള അളവുകൾ $\{r_A, v_A\}$ എന്നിവയുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തുക. ഒരേ സമയമെടുത്താണോ ഗ്രഹം BAC, CPB എന്നീ ഭാഗങ്ങളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നത്?

* പേജ് 182 ൽ ബോക്സിൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾകൂടി വായിക്കുക.

ഉത്തരം: r_p യും v_p യും പരസ്പരം ലംബമാണെന്ന് സൂക്ഷ്മവിശകലനത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാമെന്നതിനാൽ, P യിലെ കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ കേവലവില $L_p = m_p r_p v_p$

അതുപോലെ, $L_A = m_p r_A v_A$

കോണീയ ആക്കസംരക്ഷണപ്രകാരം,

$$m_p r_p v_p = m_p r_A v_A$$

അഥവാ, $\frac{v_p}{v_A} = \frac{r_A}{r_p}$ $r_A > r_p$ ആയതിനാൽ, $v_p > v_A$

ചിത്രം 8.1 ലെ SB, SC എന്നീ സദിശ ആരങ്ങളും ദീർഘവൃത്തവും അതിരായിട്ടുള്ള പരപ്പളവ് SBAC, പരപ്പളവ് SBPC യെക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കും. കെപ്ലറുടെ രണ്ടാം നിയമപ്രകാരം, തുല്യസമയം കൊണ്ട് തുല്യപരപ്പളവ് ഉണ്ടാക്കുന്നു. ആയതിനാൽ, CPB കടക്കാനെടുക്കുന്നതിനേക്കാൾ കൂടുതൽ സമയമെടുത്താണ് ഗ്രഹം BAC കടന്നുപോകുന്നത്.

8.3 സാർവിക ഗുരുത്വനിയമം (Universal Law of Gravitation)

മരത്തിൽനിന്നും താഴേക്കു വീഴുന്ന ആപ്പിളിന്റെ നിരീക്ഷണമാണ്, ഭൂഗുരുത്വാകർഷണത്തിന്റെയും കെപ്ലറുടെ നിയമങ്ങളുടെയും വിശദീകരണത്തിലേക്ക് നയിച്ച സാർവികഗുരുത്വനിയമത്തിൽ എത്തിച്ചേരാൻ ന്യൂട്ടണു പ്രചോദനമായതെന്നു പറയപ്പെടുന്നു. ന്യൂട്ടന്റെ വാദഗതിയനുസരിച്ച്, R_m ആരമുള്ള ഒരു പരിക്രമണ പാതയിലൂടെ കറങ്ങുന്ന ചന്ദ്രന് ഭൂമിയുടെ ഗുരുത്വാകർഷണംകൊണ്ട് ഒരു അഭികേന്ദ്രത്വരണം ഉണ്ടായിരിക്കും. അതിന്റെ കേവലവില,

$$a_m = \frac{V^2}{R_m} = \frac{4\pi^2 R_m}{T^2} \quad \text{------------ (8.3)}$$

ഇതിൽ, ചന്ദ്രന്റെ വേഗമായ V യെ പരിക്രമണകാലം (T) യുമായി $V = 2\pi R_m/T$ എന്ന രീതിയിൽ ബന്ധിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. പരിവൃത്തി T ഏകദേശം 27.3 ദിവസങ്ങളും അക്കാലത്ത് അറിയാമായിരുന്ന R_m ന്റെ മൂല്യം ഏകദേശം 3.84×10^8m ഉം ആണ്. ഈ വിലകൾ സമവാക്യം (8.3) ൽ ആരോപിച്ചാൽ, നമുക്കു ലഭിക്കുന്ന a_m ന്റെ മൂല്യം ഭൂമിയുടെ ആകർഷണബലം കൊണ്ടുണ്ടാവുന്ന ഭൗമോപരിതലത്തിലെ ഭൂഗുരുത്വത്വരണം (Acceleration due to gravity) g യേക്കാൾ വളരെ കുറഞ്ഞതായിരിക്കും.

കേന്ദ്രബലങ്ങൾ (Central Forces)

ആധാരബിന്ദുവിനെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ള ഒരു കണത്തിന്റെ കോണീയ ആക്കത്തിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് (Time rate of change of angular momentum) $\frac{dl}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ആണെന്ന് നമുക്കു അറിയാം. F ബലംകൊണ്ട് ഒരു കണികക്കുണ്ടാകുന്ന ടോർക്ക് $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ പൂജ്യമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ കോണീയ ആക്കം സ്ഥിരമായിരിക്കും. ഒന്നുകിൽ **F** പൂജ്യമാവുകയോ അല്ലെങ്കിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് **r** ലൂടെയാവുകയോ ചെയ്യുമ്പോഴാണ് ഇങ്ങനെ സംഭവിക്കുന്നത്. രണ്ടാമത്തെ വ്യവസ്ഥ നിറവേറ്റുന്ന ബലങ്ങളിലാണ് നമുക്ക് താൽപ്പര്യം. ഈ നിബന്ധന പാലിക്കുന്നവയാണ് കേന്ദ്രബലങ്ങൾ (Central forces). ഒരു 'കേന്ദ്ര'ബലം എല്ലായ്പ്പോഴും നിശ്ചിത ബിന്ദുവിലേക്കോ ബിന്ദുവിൽനിന്നോ ആയിരിക്കും അനുഭവപ്പെടുക. അതായത്, ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിനെ അപേക്ഷിച്ച് പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലത്തിന്റെ സ്ഥാനസദിശത്തിലൂടെ (position vector) യായിരിക്കും (താഴെ കൊടുത്ത ചിത്രം കാണുക). കൂടാതെ, കേന്ദ്രീയബലം **F** ന്റെ കേവലവില **r** നെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. **r** എന്നത് നിശ്ചിത സ്ഥാനത്തുനിന്നു ബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ദൂരമാണ്; **F = F(r).**

കേന്ദ്രീയബലംകൊണ്ടുള്ള ചലനത്തിൽ കോണീയ ആക്കം എപ്പോഴും സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നു. ഇതിൽനിന്നും ലഭിക്കുന്ന രണ്ട് സുപ്രധാന ഫലങ്ങളിവയാണ്:

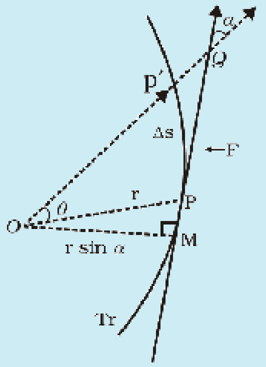
(1) കേന്ദ്രീയബലംകൊണ്ടുള്ള ഒരു കണത്തിന്റെ ചലനം എല്ലായ്പ്പോഴും ഒരു തലത്തിൽ മാത്രം ഒതുങ്ങി നിൽക്കുന്നു.

(2) കേന്ദ്രീയബലത്തെ അപേക്ഷിച്ച് ഒരു കണത്തിന്റെ സ്ഥാനസദിശത്തിന് ഒരു സ്ഥിര ഏരിയൽ പ്രവേഗമുണ്ട് (Areal velocity). മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ആ വസ്തു കേന്ദ്ര ബലത്തിന്റെ സ്വാധീനത്തിനനുസരിച്ച് നീങ്ങുന്നതിനാൽ, സ്ഥാനസദിശം തുല്യ ഇടവേളകളിൽ തുല്യ പരപ്പളവ് ഉണ്ടാക്കി സഞ്ചരിക്കുന്നു.

ഈ രണ്ടു ഫലങ്ങളും നമുക്ക് തെളിയിക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. ഏരിയൽ പ്രവേഗം താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളതാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാമല്ലോ: $dA/dt = \frac{1}{2} r v \sin \alpha$

സൂര്യന്റെ ഗുരുത്വബലം കൊണ്ട് ഒരു ഗ്രഹത്തിനുണ്ടാകുന്ന ചലനത്തിൽ നമുക്ക് മുകളിലെ ചർച്ചയുടെ ഫലം പ്രയോഗിച്ചുനോക്കാം. സൂര്യനു വളരെ ഭാരമുള്ളതിനാൽ നിശ്ചലാസ്ഥയിലാണെന്നു പരിഗണിക്കാം.

ഗ്രഹത്തിന്മേൽ സൂര്യന്റെ ഗുരുത്വബലം സൂര്യന്റെ ദിശയിലാണ്. ഈ ബലവും $F = F(r)$ എന്ന നിബന്ധനയെ പാലിക്കുന്നുണ്ട്, കാരണം $F=\frac{Gm_1 m_2}{r^2}$ ആണ്. ഇതിൽ m_1, m_2 എന്നിവ ഗ്രഹത്തിന്റെയും സൂര്യന്റെയും മാസുകളും G ഗുരുത്വസ്ഥിരാങ്കവുമാണ്. അതിനാൽ, മുകളിൽ ചർച്ചചെയ്ത (1), (2) എന്നീ രണ്ടു ഫലങ്ങളും ഗ്രഹചലനങ്ങളിൽ പ്രയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. ഫലം (2) കെപ്ലറുടെ പ്രശസ്തമായ രണ്ടാം നിയമമാണെന്നു കാണാം.



കേന്ദ്രീയബലത്തിൽ ഒരു വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന സഞ്ചാരപഥമാണ് Tr. P എന്ന സ്ഥാനത്ത് ബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് OP യിലൂടെയാണ്. ആധാര ബിന്ദുവായെടുക്കുന്ന O ബലത്തിന്റെ കേന്ദ്രവുമാണ്. Δt സമയംകൊണ്ട്, ആ വസ്തു P യിൽനിന്ന് P' ലേക്ക് നീങ്ങുന്നു. ചാപം $PP' = \Delta s = v\,\Delta t$. സഞ്ചാരപാതയിലെ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ വരക്കുന്ന സ്പർശരേഖ PQ, P യിലെ പ്രവേഗത്തിന്റെ ദിശ തരുന്നു. Δt സമയം കൊണ്ട് ഉണ്ടാകുന്ന POP′ ഖണ്ഡത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $POP' \approx (r \sin\alpha)\, PP'/2 = (r\, v \sin\alpha)\, \Delta t/2.)$

ഭൂഗുരുത്വം കാരണമുള്ള ബലം അകലത്തിനനുസരിച്ച് കുറയുന്നുവെന്ന് ഇതിൽനിന്നു വ്യക്തമാകുന്നു. ഭൂകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള അകലത്തിന്റെ വിപരീതവർഗത്തിനനുസരിച്ച് ഭൂഗുരുത്വബലം കുറയുന്നുവെന്ന് അനുമാനിച്ചാൽ, $a_m \propto R_m^{-2}$ എന്നെഴുതാം. ഭൂഗുരുത്വത്വരണം ആണല്ലോ g. അതിനാൽ $g \propto R_E^{2}$ എന്നുമെഴുതാം. ഇവിടെ R_E സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ഭൂമിയുടെ ആരമാണ്. മേൽ പ്രസ്താവിച്ച രണ്ടു ബന്ധങ്ങളുമുപയോഗിച്ചാൽ ലഭിക്കുന്നത്,

$$\frac{g}{a_m} = \frac{R_m^2}{R_E^2} = 3600 \qquad (8.4)$$

ഇത് g യുടെ മൂല്യവുമായും ($9.8\ ms^{-2}$) സമവാക്യം (8.3) പ്രകാരം ലഭിക്കുന്ന a_m ന്റെ മൂല്യവുമായും യോജിക്കുന്നതായി കാണാം. ഈ നിരീക്ഷണങ്ങളാണ് താഴെ കൊടുത്ത സാർവികഗുരുത്വനിയമം പ്രസ്താവിക്കുന്നതിലേക്ക് ന്യൂട്ടനെ നയിച്ചത്.

പ്രപഞ്ചത്തിലുള്ള എല്ലാ വസ്തുക്കളും പരസ്പരം ആകർഷിക്കുന്നു, അവ തമ്മിലുള്ള പരസ്പരാകർഷണബലം മാസുകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന് നേർ അനുപാതത്തിലും അവ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിന്റെ വർഗത്തിനു വിപരീതാനുപാതത്തിലുമായിരിക്കും.

ന്യൂട്ടന്റെ പ്രസിദ്ധമായ 'മാത്തമാറ്റിക്കൽ പ്രിൻസിപ്പിൾസ് ഓഫ് നാചുറൽ ഫിലോസഫി' (ചുരുക്കത്തിൽ 'പ്രിൻസിപ്പിയ') എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിൽനിന്നാണ് ഈ ഉദ്ധരണി.

ഗണിതപരമായി, ന്യൂട്ടന്റെ ഗുരുത്വാകർഷണനിയമം ഇങ്ങനെയെഴുതാം: പോയിന്റ് മാസ് m_2 വിൻമേൽ മറ്റൊരു പോയിന്റ് മാസ് m_1 കൊണ്ടുണ്ടാവുന്ന ബലത്തിന്റെ കേവലവില,

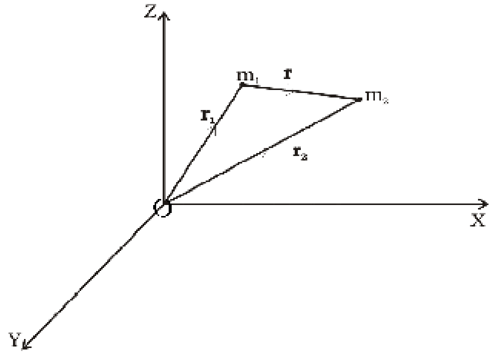
$$|\mathbf{F}| = G\,\frac{m_1\ m_2}{r^2} \qquad \text{--------}\ (8.5)$$

സമവാക്യം (8.5) സദിശരൂപത്തിലെഴുതിയാൽ,

$$\mathbf{F} = G\,\frac{m_1\ m_2}{r^2}\left(-\hat{\mathbf{r}}\right) = -G\,\frac{m_1\ m_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$= -G\,\frac{m_1\ m_2}{|\mathbf{r}|^3}\,\hat{\mathbf{r}}$$

ഇതിൽ G എന്നത് സാർവിക ഗുരുത്വസ്ഥിരാങ്കവും, $\hat{\mathbf{r}}$ എന്നത് m_1 ൽനിന്ന് m_2 വിലേക്കുള്ള യൂണിറ്റ് സദിശ (unit vector) വുമാണ്. കൂടാതെ ചിത്രം 8.3ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ഉം ആണ്.

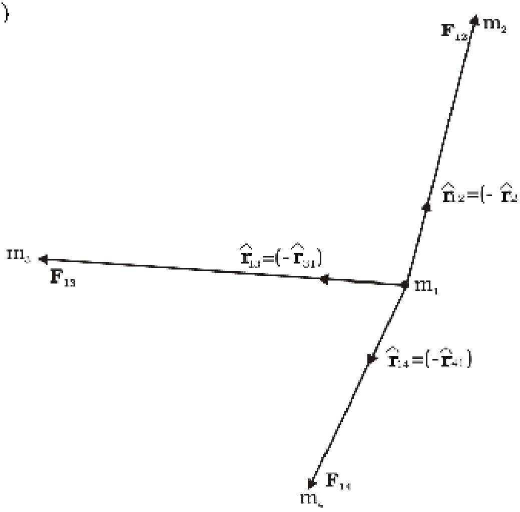


ചിത്രം8.3 m_1 നുമേൽ m_2 പ്രയോഗിക്കുന്ന ഗുരുത്വബലം r ലൂടെയായിരിക്കും ഇതിൽ സദിശം r എന്നത് $(r_2 - r_1)$ ആയിരിക്കും.

ഗുരുത്വബലം 'ആകർഷണ' സ്വഭാവമുള്ളതാണ്. അതായത്, $-\mathbf{r}$ ന്റെ ദിശയിലൂടെയാണ് ബലം F അനുഭവപ്പെടുന്നത്. ന്യൂട്ടന്റെ മൂന്നാം ചലനനിയമപ്രകാരം m_1 ൽ m_2 പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം തീർച്ചയായും $-\mathbf{F}$ ആയിരിക്കും. ഇതുപ്രകാരം, ഒന്നാമത്തെ വസ്തുവിനുമേൽ രണ്ടാമത്തെ വസ്തു പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം $\mathbf{F}_{12}$

വും രണ്ടാമത്തെ വസ്തുവിൽ ഒന്നാമത്തെ വസ്തു പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം F_{21} വും തമ്മിൽ $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ എന്ന് ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

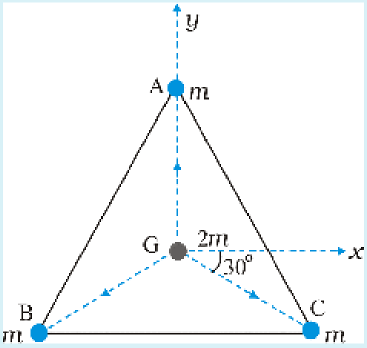
സമവാക്യം (8.5) ബിന്ദുസമാനവസ്തുക്കൾക്കുള്ളതാണ് (Point objects). സ്ഥൂലവസ്തുക്കളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് സമവാക്യം ഉപയോഗിക്കേണ്ടിവരുമ്പോൾ ഈ വസ്തുത നമ്മുടെ മനസ്സിലുണ്ടാകേണ്ടതുണ്ട്. പോയിന്റ് മാസുകളുടെ ഒരു ശേഖരമാണുള്ളതെങ്കിൽ, അതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിൻമേലുള്ള ഗുരുത്വബലം മറ്റു പോയിന്റ് മാസുകളോരോന്നും പ്രയോഗിക്കുന്ന ഗുരുത്വാകർഷണബലങ്ങളുടെ സദിശതുകയായിരിക്കും. (ചിത്രം 8.4)



ചിത്രം 8.4 പോയിന്റ് മാസ് m_1 ൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ഗുരുത്വബലം m_2, m_3, m_4 എന്നീ മാസുകൾ പ്രയോഗിക്കുന്ന ഗുരുത്വബലങ്ങളുടെ സദിശതുകയായിരിക്കും. m_1 മേലുള്ള ആകെ ബലം,

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Gm_2\, m_1}{r_{21}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{21} + \frac{Gm_3\, m_1}{r_{31}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{31} + \frac{Gm_4\, m_1}{r_{41}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{41}$$

ഉദാഹരണം 8.2: ഒരു സമഭുജത്രികോണം ABC യുടെ മൂന്നു മൂലകളിൽ m kg വീതമുള്ള മൂന്നു തുല്യ മാസുകൾ വച്ചിരിക്കുന്നു. (a) ത്രികോണമധ്യം G യിൽ വച്ചിട്ടുള്ള 2m മാസിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ബലം എന്ത്? (b) A യിലുള്ള മാസ് ഇരട്ടിയാക്കിയാൽ ബലം എന്തായിരിക്കും? AG − BG − CG − 1m എന്നെടുക്കുക. (ചിത്രം 8.5 കാണുക)



ചിത്രം 8.5 ΔABC യുടെ മൂന്നു മൂലകളിൽ മൂന്ന് തുല്യ മാസുകൾ വച്ചിരിക്കുന്നു. 2m മാസ് ത്രികോണമധ്യം Gയിൽ വച്ചിരിക്കുന്നു.

ഉത്തരം: (a) GC യും പോസിറ്റീവ് x അക്ഷവും തമ്മിലുള്ള കോണളവ് 30° ആണ്. അതുതന്നെയാണ് GBയും നെഗറ്റീവ് x അക്ഷവും തമ്മിലുള്ള കോണളവും. ഓരോ ബലവും സദിശരീതിയിൽ എഴുതിയാൽ

$$\mathbf{F}_{GA} = \frac{Gm\,(2m)}{1}\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{F}_{GB} = \frac{Gm\,(2m)}{1}\left(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30^{o} - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^{o}\right)$$

$$\mathbf{F}_{GC} = \frac{Gm\,(2m)}{1}\left(+\hat{\mathbf{i}}\cos 30^{o} - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^{o}\right)$$

സൂപ്പർ പൊസിഷൻ തത്വവും (superposition principle) സദിശസങ്കലനനിയമവും (law of vector addition) ഉപയോഗിച്ചാൽ, 2m മേലുള്ള പരിണത ഗുരുത്വ ബലം F_R ലഭിക്കുക.

$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{GA} + \mathbf{F}_{GB} + \mathbf{F}_{GC}$

$F_R - 2\,Gm^2\mathbf{j} - 2\,Gm^2\,(-\,\mathbf{i}\cos 30^0 - \mathbf{j}\sin 30^0)$

$2\,Gm^2\,(\mathbf{i}\cos 30^0 - \mathbf{j}\sin 30^0) - 0$

മറ്റൊരു തരത്തിൽ ചിന്തിച്ചാൽ, സമമിതിയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലും പരിണതബലം പൂജ്യമായിരിക്കുമെന്ന് നമുക്ക് പ്രതീക്ഷിക്കാനാകും.

(b) വെർട്ടെക്സ് A യിലുള്ള മാസ് ഇരട്ടിയാക്കിയാൽ,

$\mathbf{F}_{GA} = \dfrac{G2m\cdot 2m}{1}\,\mathbf{j} = 4Gm^2\mathbf{j}$ സമമിതി പ്രകാരം $\mathbf{F}_{GB}$, $\mathbf{F}_{GC}$ ബലങ്ങളുടെ x ഘടകങ്ങൾ റദ്ദാക്കപ്പെടുന്നു. അതേസമയം y ഘടകം നിലനിൽക്കുന്നു. കൂടാതെ $(\mathbf{F}_{GB})\,y - (\mathbf{F}_{GC})\,y \;\therefore\; \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_{GC} + \mathbf{F}_{GB} + \mathbf{F}_{GC}$ അല്ലെങ്കിൽ

$\mathbf{F}_R - 2\,Gm^2\mathbf{j} + 4\,Gm^2\mathbf{j} - 2\,Gm^2\mathbf{j}$

ഭൂമിയെപ്പോലുള്ള ഒരു സ്ഥൂലവസ്തുവും ഒരു പോയിന്റ് മാസും തമ്മിലുള്ള ഗുരുത്വബലത്തിൽ, സമവാക്യം (8.5) നേരിട്ട് ബാധകമാക്കാനാകില്ല. സ്ഥൂലവസ്തുവിലെ ഓരോ പോയിന്റ് മാസും തന്നിരിക്കുന്ന പോയിന്റ് മാസിൽ ഒരു ബലം പ്രയോഗിക്കും. എന്നാൽ ഈ ബലങ്ങൾ എല്ലാം ഒരേ ദിശയിലായിരിക്കില്ല. ആകെ ബലം ലഭിക്കുന്നതിനു സ്ഥൂലവസ്തുവിലെ ഓരോ പോയിന്റ് മാസും പ്രയോഗിക്കുന്ന ഈ ബലങ്ങളെ സദിശപരമായി സങ്കലനം നടത്തേണ്ടതുണ്ട്. ഇത് കലനം (Calculus) ഉപയോഗിച്ച് എളുപ്പത്തിൽ നടത്താവുന്നതാണ്. രണ്ട് പ്രത്യേക സന്ദർഭങ്ങളിൽ, ഇങ്ങനെ ചെയ്യുമ്പോൾ ലളിതമായ ഒരു നിയമം ലഭിക്കുന്നു:

(1) **സമസാന്ദ്രതയുള്ള ഗോളീയഷെല്ലും (spherical shell), അതിനു തൊട്ടു പുറത്തുള്ള ഒരു പോയിന്റ് മാസും തമ്മിലുള്ള ആകർഷണബലം, ഗോളീയഷെല്ലിന്റെ മുഴുവൻ മാസും അതിന്റെ മധ്യത്തിൽ കേന്ദ്രീകരിച്ചിരിക്കുന്ന പോലെയായിരിക്കും. ഷെല്ലിന്റെ വിവിധ ഭാഗങ്ങൾ കാരണമുള്ള**

ഗുരുത്വബലത്തിന് അതിന്റെ കേന്ദ്രവും പോയിന്റ് മാസും തമ്മിൽ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയിലൂടെ ഘടകങ്ങളുള്ളതുപോലെ, ഈ നേർരേഖക്ക് ലംബമായ ദിശയിലും ഘടകങ്ങളുണ്ട്. ഷെല്ലിന്റെ എല്ലാ ഭാഗങ്ങളിലുമുള്ള ബലങ്ങളുടെ തുക കാണുമ്പോൾ ഈ നേർരേഖക്ക് ലംബമായി വരുന്ന ഘടകങ്ങൾ റദ്ദാക്കപ്പെടുകയും, അതിന്റെ കേന്ദ്രവും പോയിന്റ് മാസും തമ്മിലുള്ള നേർരേഖയിലൂടെ അനുഭവപ്പെടുന്ന ബലം മാത്രം അവശേഷിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഈ ബലത്തിന്റെ കേവലവിലമുകളിൽ കൊടുത്തതുപോലെയായിരിക്കും.

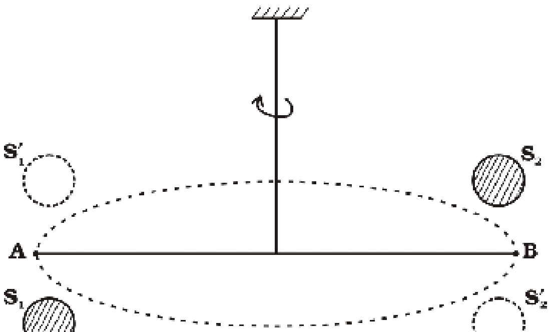
(2) സമസാന്ദ്രതയുള്ള ഗോളീയഷെല്ലിന്റെ ഉൾവശത്തിരിക്കുന്ന ഒരു പോയിന്റ് മാസിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ആകർഷണബലം പൂജ്യമായിരിക്കും. ഗോളീയ ഷെല്ലിന്റെ ഉൾഭാഗത്തിരിക്കുന്ന ഒരു പോയിന്റ് മാസിനെ അതിന്റെ വിവിധഭാഗങ്ങൾ വിവിധദിശകളിലേക്ക് ആകർഷിക്കുന്നു. ഈ ബലങ്ങൾ പരസ്പരം പൂർണമായും റദ്ദാക്കപ്പെടുന്നു എന്ന വസ്തുതയാണ് നമ്മെ പ്രസ്തുത നിഗമനത്തിലെത്തിച്ചത്.

ന്യൂട്ടന്റെ പ്രിൻസിപ്പിയ (Newton's Principia)

1619 ഓടെ കെപ്ലർ ഗ്രഹചലനങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള തന്റെ മൂന്നാംനിയമം രൂപപ്പെടുത്തിയിരുന്നു. ഏതാണ്ട് 70 വർഷങ്ങൾക്കു ശേഷം 1687ൽ പ്രസിദ്ധീകരിക്കപ്പെട്ട, പ്രിൻസിപ്പിയ എന്ന ചുരുക്കപ്പേരിൽ അറിയപ്പെടുന്ന ഫിലോസഫിയ നാച്ചുറാലിസ് പ്രിൻസിപ്പിയ മാത്തമാറ്റിക്ക (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) എന്ന ന്യൂട്ടന്റെ പ്രസിദ്ധമായ ഗ്രന്ഥത്തിലാണ് സാർവിക ഗുരുത്വനിയമത്തിന്റെ പ്രഖ്യാപനം ഉൾക്കൊള്ളുന്നത്. 1685 കാലഘട്ടത്തിൽ, എഡ്മണ്ട് ഹാലി ('ഹാലിയുടെ ധൂമകേതു' വിന് പേരിട്ടിരിക്കുന്നത് ഇദ്ദേഹത്തോടുള്ള ബഹുമാനാർഥമാണ്), കേംബ്രിഡ്ജിൽ ന്യൂട്ടനെ സന്ദർശിക്കുകയും വിപരീതവർഗനിയമത്തിന്റെ സ്വാധീനത്താൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരപാതയെക്കുറിച്ച് അദ്ദേഹത്തോട് ചോദിക്കുകയും ചെയ്തു. അതൊരു ദീർഘവൃത്താകാര പാതയായിരിക്കുമെന്ന് മറുപടി കൊടുക്കാൻ ന്യൂട്ടന് യാതൊരു സംശയവും ഇല്ലായിരുന്നു. എന്തെന്നാൽ, പ്ലേഗ് പൊട്ടിപ്പുറപ്പെട്ടതു കാരണം കേംബ്രിഡ്ജിൽ നിന്ന് തന്റെ ഫാം ഹൗസിലേക്കു മടങ്ങാൻ നിർബന്ധിതനായ 1665 നോടടുത്തുള്ള കാലഘട്ടങ്ങളിൽ അദ്ദേഹം ഈ മേഖലയിൽ നിരവധി ഗവേഷണങ്ങൾ നടത്തിയിട്ടുണ്ട്. നിർഭാഗ്യവശാൽ, തന്റെ കണ്ടുപിടിത്തങ്ങൾ രേഖപ്പെടുത്തിയ കടലാസുകൾ ന്യൂട്ടന് നഷ്ടപ്പെടുകയുണ്ടായി. ന്യൂട്ടന്റെ പ്രവർത്തനങ്ങൾ പുസ്തകരൂപത്തിൽ പ്രസിദ്ധീകരിക്കാൻ ഹാലി അദ്ദേഹത്തിനുമേൽ സമ്മർദ്ദം ചെലുത്തുകയും അതിനാവശ്യമായ ചെലവുകൾ വഹിച്ചുകൊള്ളാമെന്ന് ഏൽക്കുകയും ചെയ്തു. 18 മാസത്തെ കഠിന പ്രയത്നം കൊണ്ട്, ന്യൂട്ടൻ ഈ ലക്ഷ്യം ഭംഗിയായി പൂർത്തീകരിക്കുകയുണ്ടായി. പ്രിൻസിപ്പിയ അത്യപൂർവമായ ഒരു ഉത്കൃഷ്ട ശാസ്ത്രഗ്രന്ഥമാണ്; ലഗ്രാഞ്ജെയുടെ വാക്കുകളിൽ അത് 'മനുഷ്യ മനസ്സിന്റെ ഏറ്റവും മഹത്തായ നിർമിതി'യാണ്. ഇന്ത്യൻ ജ്യോതിശാസ്ത്രജ്ഞനും നോബൽസമ്മാനജേതാവുമായ എസ്. ചന്ദ്രശേഖർ 'പ്രിൻസിപ്പിയ'യെക്കുറിച്ചുള്ള അദ്ദേഹത്തിന്റെ പ്രബന്ധം തയാറാക്കാൻ 10 വർഷം ചെലവഴിക്കുകയുണ്ടായി. അദ്ദേഹത്തിന്റെ പുസ്തകം 'ന്യൂട്ടൻസ് പ്രിൻസിപ്പിയ ഫോർ ദ കോമൺ റീഡർ' (Newton's Principia for the Common Reader), ന്യൂട്ടന്റെ രീതികളിലുള്ള സൗന്ദര്യവും വ്യക്തതയും അതിശയകരമായ മിതത്വവും കൃത്യമായി ചൂണ്ടിക്കാണിക്കുന്നു.

8.4 ഗുരുത്വസ്ഥിരാങ്കം (The Gravitational Constant)

1798 ൽ ഇംഗ്ലീഷ് ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഹെൻറി കാവൻഡിഷ് ആണ് സാർവിക ഗുരുത്വനിയമത്തിൽ വരുന്ന ഗുരുത്വസ്ഥിരാങ്കത്തിന്റെ മൂല്യം പരീക്ഷണത്തിലൂടെ ആദ്യമായി കണ്ടെത്തിയത്. ഇതിനായി അദ്ദേഹം ഉപയോഗിച്ചിരുന്ന ഉപകരണത്തിന്റെ രേഖാചിത്രമാണ് ചിത്രം 8.6 ൽ കാണുന്നത്.



ചിത്രം 8.6 : കാവൻഡിഷിന്റെ പരീക്ഷണത്തിനുപയോഗിച്ച സംവിധാനങ്ങളുടെ രേഖാചിത്രം. A, B എന്നി മാസുകളുടെ ഇരുവശങ്ങളിലും വച്ചിട്ടുള്ള വലിയ ഗോളങ്ങളാണ് S_1 ഉം S_2 വും (ഷേയ്ഡ് ചെയ്തവ). വലിയ ഗോളങ്ങൾ മാസുകളുടെ മറുവശത്തേക്കു കൊണ്ടുപോകുമ്പോൾ (കുത്തുകളിട്ട വൃത്തം കൊണ്ട് കാണിച്ചപോലെ), ടോർക്കിന്റെ ദിശ എതിരാവുന്നതു കൊണ്ട് ദണ്ഡ് AB ചെറുതായി കറങ്ങുന്നു. കറക്കത്തിന്റെ കോണളവ് പരീക്ഷണത്തിലൂടെ അളക്കാവുന്നതാണ്.

AB എന്ന ദണ്ഡിന്റെ രണ്ട് അഗ്രങ്ങളിൽ ചെറിയ ഈയ ഗോളങ്ങൾ ഘടിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഒരു നേർത്ത വയർ ഉപയോഗിച്ച് മുകളിൽനിന്ന് ഈ ദണ്ഡിനെ തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്നു. രണ്ട് വലിയ ഈയഗോളങ്ങൾ ചെറിയ ഗോളങ്ങൾക്കു സമീപം വിപരീതവശങ്ങളിലായി കൊണ്ടുവരുന്നു. വലിയ ഗോളങ്ങൾ, അവക്ക് സമീപമുള്ള ചെറിയ ഗോളങ്ങളിൽ, ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ തുല്യവും വിപരീതവുമായ ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നു. ദണ്ഡിൽ ഒരു പരിണതബലം ഇല്ലെങ്കിലും, ദണ്ഡിന്റെ നീളത്തിന്റെ F മടങ്ങ് വരുന്ന ഒരു ടോർക്ക് ഉണ്ടാകുന്നുണ്ട്. ഇതിൽ F എന്നത് ഏതെങ്കിലും ഒരു വലിയ ഗോളവും അതിനടുത്തുള്ള ചെറിയ ഗോളവും തമ്മിലുള്ള ആകർഷണബലമാണ്. തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്ന വയർ ഈ ടോർക്ക് മൂലം തിരിക്കപ്പെടുകയും പുനഃസ്ഥാപന ടോർക്ക് ഗുരുത്വടോർക്കിന് തുല്യമാകുന്നതുവരെ ഇത് തുടരുകയും ചെയ്യുന്നു. നൂൽ തിരിയുന്ന കോണളവ് θ ആയാൽ, വയറിലുണ്ടാകുന്ന പുനഃസ്ഥാപന ടോർക്ക് θ ക്ക് ആനുപാതികവും $\tau\theta$ ക്ക് തുല്യവുമായിരിക്കും. ഇവിടെ τ എന്നത് യൂണിറ്റ് കോണളവിന്റെ പുനസ്ഥാപന ടോർക്ക് ആണ്. മൂല്യം അറിയാവുന്ന ഒരു ടോർക്ക് നൂലിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കുകയും അതുമൂലം തിരിയുന്ന കോൺ അളക്കുകയും ചെയ്തുകൊണ്ട് τ എളുപ്പത്തിൽ നിർണയിക്കാൻ കഴിയും. ഗോളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ഗുരുത്വാകർഷണബലം, പ്രവർത്തിക്കുന്നത് ഗോളകേന്ദ്രങ്ങളിൽ അവയുടെ മാസുകൾ കേന്ദ്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയാണ്. ഒരു വലിയ ഗോളവും അതിന് സമീപമുള്ള ചെറിയ ഗോളവും തമ്മിലുള്ള അകലം d യും അവയുടെ മാസുകൾ M, m എന്നിങ്ങനെയും ആണെങ്കിൽ, അവ തമ്മിലുള്ള ഗുരുത്വാകർഷണബലം

$$F = G\frac{Mm}{d^2} \quad \text{------------} \quad (8.6)$$

ദണ്ഡ് AB യുടെ നീളം L ആയാൽ, F നിമിത്തമുണ്ടാകുന്ന ടോർക്ക് F ഉം L ഉം തമ്മിലുള്ള ഗുണിതമായിരിക്കും. സന്തുലനാവസ്ഥയിൽ, ഇത് പുനസ്ഥാപന ടോർക്കിന് തുല്യമായിരിക്കുമെന്നതിനാൽ,

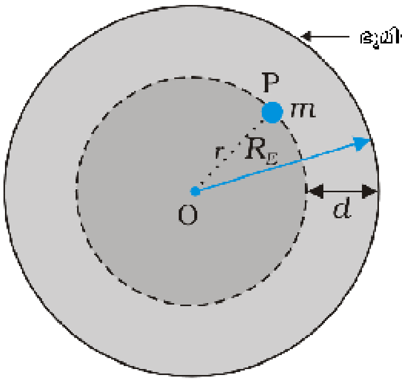
$$G\frac{Mm}{d^2}L = \tau\,\theta \quad \text{------------} \quad (8.7)$$

θ അളക്കുന്നതിലൂടെ ഈ സമവാക്യത്തിൽനിന്ന് G കണക്കാക്കാൻ കഴിയുന്നു. കാവൻഡിഷിന് ലഭിച്ച G യുടെ മൂല്യം പുതിയ പരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെ കൃത്യത വരുത്തിക്കൊണ്ടിരുന്നു. നിലവിലെ അംഗീകൃത മൂല്യം $G = 6.67\times10^{-11}$ N m²/kg² ആണ്.

8.5 ഭൂഗുരുത്വത്വരണം (Acceleration due to Gravity of the Earth)

കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് വെളിയിലേക്കു വരുന്തോറും ആരങ്ങൾ വർധിച്ചുവരുന്ന അനേകം ഏകകേന്ദ്ര ഗോളീയ ഷെല്ലുകളുടെ (spherical shells) ഒരു സമുച്ചയമായി നമുക്ക് ഭൂമിയെ സങ്കൽപിക്കാം. ഭൂമിക്ക് പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദു ഈ ഷെല്ലുകൾക്കെല്ലാം പുറത്തായതിനാൽ, ഈ ഷെല്ലുകളുടെയെല്ലാം പൊതുകേന്ദ്രത്തിൽ അവയുടെ മാസുകൾ കേന്ദ്രീകരിക്കപ്പെട്ടതുപോലെയാണ് അവ പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഗുരുത്വത്വബലം പ്രയോഗിക്കുന്നത്. ഷെല്ലുകളുടെയെല്ലാം മാസുകൾ ചേർന്നാൽ ഭൂമിയുടെ മാസ് ആകുന്നതിനാൽ, ഭൂമിക്ക് പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ഗുരുത്വബലം ഭൂമിയുടെ മുഴുവൻ മാസും അതിന്റെ മധ്യത്തിൽ കേന്ദ്രീകരിച്ചതുപോലെയായിരിക്കും.

ഭൂമിയുടെ ഉള്ളിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിനെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം സ്ഥിതി വ്യത്യസ്തമാണ്. ചിത്രം 8.7 ഇത് വിശദീകരിക്കുന്നുണ്ട്.



ചിത്രം 8.7 : M_E മാസും R_E ആരവുമുള്ള ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിനു താഴെ d ആഴത്തിലുള്ള ഒരു ഖനിയിൽ m മാസുള്ള ഒരു വസ്തു സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. ഭൂമിയെ നമ്മൾ ഗോളീയ സമമിതിയുള്ള (spherical Symmetry) ഒരു വസ്തുവായി പരിഗണിക്കുന്നു.

ഭൂമി നിർമിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത് ഏകകേന്ദ്ര ഷെല്ലുകൾ കൊണ്ടാണെന്നും മാസ് m ഉള്ള ഒരു വസ്തു ഭൂകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് r ദൂരം അകലെയാണെന്നും സങ്കൽപിക്കുക. P എന്ന ബിന്ദു r ആരമുള്ള ഗോളത്തിനു പുറത്താണു കിടക്കുന്നത്. r നേക്കാൾ കൂടിയ ആരമുള്ള ഷെല്ലുകളെ സംബന്ധിച്ച് P അവക്കുള്ളിലായതുകൊണ്ട്, മുമ്പു പ്രസ്താവിച്ച ഫലമനുസരിച്ച് P ക്ക് വെളിയിലുള്ള ഷെല്ലുകളുടെ മാസ് P യിലിരിക്കുന്ന m മാസിൽ ഗുരുത്വബലമൊന്നും പ്രയോഗിക്കുന്നില്ല. ആരം $\le$ r ആയ ഷെല്ലുകൾ r ആരമുള്ള ഒരു ഗോളം രൂപീകരിക്കു

ന്നതായി സങ്കൽപിക്കാം. P എന്ന ബിന്ദു അതിന്റെ ഉപരിതലത്തിലാണ് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നത്. അതിനാൽ, ഈ ചെറിയ ഗോളത്തിന്റെ മാസ് M_r ഗോളമധ്യത്തിൽ കേന്ദ്രീകരിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതുപോലെ ഈ ഗോളം P യിലുള്ള മാസ് m നു മേൽ ഒരു ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നു. P യിലുള്ള m മാസിന്മേലുള്ള ബലത്തിന്റെ അളവ് താഴെ കൊടുത്തതായിരിക്കും.

$$F = \frac{Gm\,(M_r)}{r^2} \qquad \text{---------} \quad (8.9)$$

ഭൂമിയെ പൂർണമായും സമസാന്ദ്രതയുള്ള ഗോളമായി സങ്കല്പിച്ചാൽ അതിന്റെ മാസ് $M_E = \frac{4\pi}{3} R_E^3\,\rho$ ആയിരിക്കും. ഇതിൽ M_E ഭൂമിയുടെ മാസും R_E ആരവും ρ സാന്ദ്രതയുമാണ്. r ആരമുള്ള ഗോളത്തിന്റെ മാസ് $M_r = \frac{4\pi}{3} r^3\,\rho$ ഉം ആണ്. അതിനാൽ,

$$F = Gm\left(\frac{4\pi}{3}\rho\right)\frac{r^3}{r^2} = Gm\left(\frac{M_E}{R_E^3}\right)\frac{r^3}{r^2}$$

$$= \frac{Gm\,M_E}{R_E^{\,3}}\,r \qquad \text{-----------} \,(8.10)$$

m മാസ് ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിലാണെങ്കിൽ $r = R_E$ യും സമവാക്യം (8.10) പ്രകാരം ഗുരുത്വബലം താഴെ കൊടുത്തപോലെ എഴുതാം:

$$F = G\,\frac{M_E m}{R_E^2} \qquad \text{----------} \,(8.11)$$

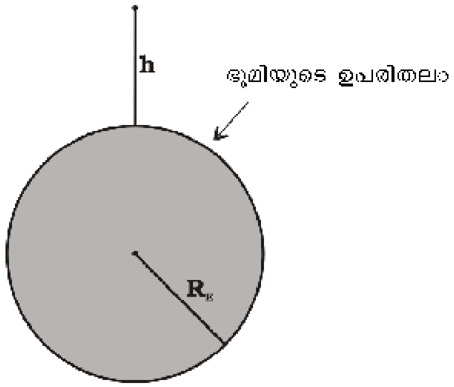
m മാസിന്മേൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ത്വരണം സാധാരണ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത് g എന്ന പ്രതീകം ഉപയോഗിച്ചാണ്. ഇത് ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാം ചലന നിയമമനുസരിച്ച് ബലം F മായി ബന്ധിപ്പിച്ചാൽ, F = mg അപ്പോൾ,

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM_E}{R_E^2} \qquad \text{----------} \,(8.12)$$

ത്വരണം g അനായാസം അളക്കാവുന്നതാണ്. R_E യുടെ മൂല്യം നമുക്ക് പരിചിതമായ ഒന്നാണ്. കാവൻഡിഷിന്റെ പരീക്ഷണത്തിൽനിന്നു (അല്ലെങ്കിൽ മറ്റു വിധത്തിൽ) ലഭിച്ച G യുടെ അളവുമായി g, R_E എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ, സമവാക്യം (8.12) ൽ നിന്ന് M_E നിർണയിക്കാനാവും. കാവൻഡിഷ് ഭൂമിയുടെ ഭാരമളന്നു' എന്ന പ്രശസ്തമായ പ്രസ്താവനക്കു കാരണമിതായിരിക്കാം.

8.6 ഭൗമോപരിതലത്തിനു താഴെയും മുകളിലുമുള്ള ഭൂഗുരുത്വത്വരണം (Acceleration due to gravity below and above the surface of Earth)

ചിത്രം 8.8 (a) യിൽ കാണിച്ചതുപോലെ ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിനു മുകളിലായി h ഉയരത്തിൽ ഒരു പോയിന്റ് മാസ് പരിഗണിക്കുക. ഭൂമിയുടെ ആരത്തെ R_E എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം. ഈ ബിന്ദു ഭൂമിക്കു പുറത്തായതിനാൽ ഭൂകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു അതിലേക്കുള്ള ദൂരം (R_E h) ആയിരിക്കും.



(a)

ചിത്രം 8.8 (a) ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിനു മുകളിൽ h ഉയരത്തിലുള്ള g.

പോയിന്റ് മാസ് m ൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ബലത്തെ F(h) എന്നു സൂചിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ, സമവാക്യം (8.5) ൽനിന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത് ഇപ്രകാരമായിരിക്കും:

$$F(h) = \frac{GM_E m}{(R_E + h)^2} \qquad \text{----------} \,(8.13)$$

പോയിന്റ് മാസിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ത്വരണം $F(h)/m = g(h)$ എന്നത്

$$g(h) = \frac{F(h)}{m} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} \;.\; \text{-----------} \,(8.14)$$

ഇത് ഉപരിതലത്തിലെ g യുടെ മൂല്യത്തെക്കാൾ കുറവാണല്ലോ.

$h << R_E$ ആയാൽ, സമവാക്യം (8.14) ന്റെ വലതുവശം (RHS) വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ

$$g(h) = \frac{GM_E}{R_E^2(1 + h/R_E)^2} = g\,(1 + h/R_E)^{-2}$$

$\frac{h}{R_E} << 1$ ആകുന്നിടത്ത്, ബൈനോമിയൽ വിപുലീകരണം (Binomial Expansion) ഉപയോഗിച്ചാൽ കിട്ടുക,

$$g(h) \cong g\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \quad \text{---------- (8.15)}$$

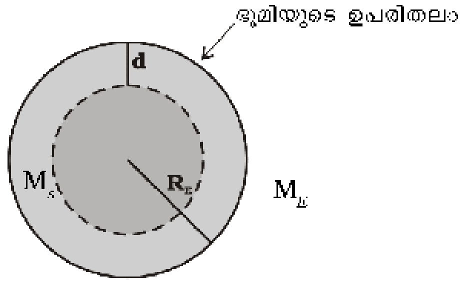
സമവാക്യം (8.15) അനുസരിച്ച് ചെറിയ ഉയരങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം g യുടെ മൂല്യം $(1 - 2h/R_E)$ എന്ന രീതിയിലാണ് കുറയുന്നത്.

ഇനി, ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽനിന്ന് d ആഴത്തിലുള്ള ഒരു പോയിന്റ് മാസ് പരിഗണിക്കുക (ചിത്രം 8.8 b). ഭൂകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് അതിലേക്കുള്ള ദൂരം ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചതുപോലെ $(R_E - d)$ ആണ്.

ഭൂമിയെ $(R_E - d)$ ആരമുള്ള ഒരു ചെറിയ ഗോളത്താലും d കനമുള്ള ഒരു ഗോളീയ ഷെല്ലിനാലും നിർമിക്കപ്പെട്ടതായി കരുതാം. മുമ്പ് സൂചിപ്പിച്ച പാഠഭാഗമനുസരിച്ച്, d കനമുള്ള ബാഹ്യ ഷെൽകൊണ്ട് m മാസിലുള്ള ബലം പൂജ്യമാണെന്നു മനസ്സിലാക്കാം. $(R_E - d)$ ആരമുള്ള ചെറിയ ഗോളത്തെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം പോയിന്റ് മാസ് അതിനു പുറത്താണ്. അതിനാൽ, മുമ്പു പ്രസ്താവിച്ചപോലെ ഈ ചെറിയ ഗോളംകൊണ്ടുള്ള ബലം അതിന്റെ മുഴുവൻ മാസും ഗോളത്തിന്റെ കേന്ദ്രബിന്ദുവിലാണെന്ന വിധത്തിലായിരിക്കും. ചെറിയ ഗോളത്തിന്റെ മാസ് M_s ആണെങ്കിൽ,

$$M_s \,/\, M_E = (R_E - d)^3 \,/\, R_E^3 \quad \text{---------- (8.16)}$$

കാരണം, ഗോളത്തിന്റെ മാസ് അതിന്റെ ആരത്തിന്റെ ക്യൂബിന് ആനുപാതികമാണ്.



(b)

ചിത്രം 8.8 (b) d ആഴത്തിലുള്ള g. ഇതിൽ $(R_E - d)$ ആരമുള്ള ചെറിയ ഗോളം മാത്രമേ g ഉണ്ടാകാൻ കാരണമാകുന്നുള്ളൂ.

അതിനാൽ, പോയിന്റ് മാസിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ബലം

$$F(d) = G\, M_s\, m \,/\, (R_E - d)^2 \quad \text{----------- (8.17)}$$

മുകളിലെ സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് M_s നു പകരം വില നൽകിയാൽ,

$$F(d) = G\, M_E\, m\,(R_E - d) \,/\, R_E^3 \quad \text{----------- (8.18)}$$

സമവാക്യം (8.18) ൽ നിന്നു d ആഴത്തിലുള്ള ഗുരുത്വത്വരണം $g(d) = \frac{F(d)}{m}$

അതായത് $g(d) = \frac{F(d)}{m} = \frac{GM_E}{R_E^3}(R_E - d)$

$$= g\,\frac{R_E - d}{R_E} = g(1 - d/R_E) \qquad (8.19)$$

അതുകൊണ്ട്, d ആഴത്തിലുള്ള ഗുരുത്വത്വരണം ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽനിന്ന് താഴേക്കുപോകുംതോറും $(1\text{-}d/R_E)$ എന്ന തോതിൽ കുറയുന്നു. ഭൂഗുരുത്വത്വരണത്തെ സംബന്ധിച്ച ഏറ്റവും ശ്രദ്ധേയമായ കാര്യം, അതിന്റെ മൂല്യം ഏറ്റവും കൂടുതൽ ഭൗമോപരിതലത്തിലാണെന്നും മുകളിലേക്കോ താഴേക്കോ പോകുമ്പോൾ അത് കുറഞ്ഞുകൊണ്ടിരിക്കുന്നുവെന്നതുമാണ്.

8.7 ഗുരുത്വസ്ഥിതികോർജം (Gravitational Potential Energy)

ഒരു പ്രത്യേക സ്ഥാനത്തിരിക്കുന്ന വസ്തുവിൽ സംഭരിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഊർജം എന്ന തരത്തിൽ സ്ഥിതികോർജം (Potential energy) എന്ന ആശയത്തെക്കുറിച്ച് നാം മുമ്പ് ചർച്ചചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ഒരു വസ്തുവിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന ബലം മൂലം അതിന് സ്ഥാനമാറ്റം ഉണ്ടായാൽ, വസ്തുവിൽ ആ ബലം ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിയുടെ അളവ് അതിന്റെ സ്ഥിതികോർജത്തിലുള്ള മാറ്റമായി കാണപ്പെടും. മുമ്പ് നാം മനസ്സിലാക്കിയതുപോലെ, ഒരു ബലംചെയ്ത പ്രവൃത്തി പാതയെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ലെങ്കിൽ അത്തരം ബലങ്ങളാണ് സംരക്ഷിതബലങ്ങൾ (Conservative forces).

ഗുരുത്വബലം ഒരു സംരക്ഷിതബലമാണ്. ഈ ബലംകൊണ്ടുണ്ടാകുന്ന സ്ഥിതികോർജമാണ് ഗുരുത്വ സ്ഥിതികോർജം (Gravitational Potential energy). ഇതിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഒരു സമവാക്യം നമുക്ക് കണ്ടെത്താം. ഭൗമോപരിതലത്തിനു മുകളിൽ ഭൂമിയുടെ ആരത്തേക്കാൾ വളരെ കുറഞ്ഞ അകലത്തിൽ (ഭൗമോപരിതലത്തിനടുത്ത്) ചില സ്ഥാനങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഗുരുത്വബലം പ്രായോഗികമായി ഒരു സ്ഥിരമൂല്യമുള്ളതായിരിക്കും. അത് mg ക്ക് തുല്യവും ഭൂമിയുടെ കേന്ദ്രത്തിനു നേരെയുമായിരിക്കും. ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽ നിന്ന് h_1 ഉയരത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവും, അതിന് നേരെ മുകളിൽ h_2 ഉയരത്തിലുള്ള മറ്റൊരു ബിന്ദുവും പരിഗണിക്കുക. ഒന്നാമത്തെ ബിന്ദുവിൽനിന്ന് m മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിനെ രണ്ടാമത്തെ ബിന്ദുവിലേക്ക് ഉയർത്തുന്നതിനാവശ്യമായ പ്രവൃ

ത്തിയെ W_{12} എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

W_{12} = ബലം × സ്ഥാനാന്തരം

= $mg(h_2 - h_1)$ --------(8.20)

ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽനിന്ന് h ഉയരത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിലെ സ്ഥിതികോർജം W(h) നെ,

$$W(h) = mgh + W_o \quad \text{-------- (8.21)}$$

എന്നെഴുതിയാൽ (ഇതിൽ W_o – ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ); ഇതിൽനിന്ന് വ്യക്തമാവുന്നത്

$$W_{12} = W(h_2) - W(h_1) \text{--------(8.22)}$$

എന്നാണ്.

ഒരു വസ്തുവിനെ ചലിപ്പിക്കുന്ന പ്രവൃത്തി എന്നത്, അതിന്റെ അവസാനസ്ഥാനത്തും ആദ്യസ്ഥാനത്തും ഉള്ള സ്ഥിതികോർജങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായിരിക്കും. W_o എന്ന സ്ഥിരാങ്കം സമവാക്യം (8.22) ൽ റദ്ദാവുന്നതായി കാണാവുന്നതാണ്. മുകളിലെ സമവാക്യത്തിൽ h = 0 എന്ന് കൊടുത്താൽ നമുക്ക് W(h = 0) = W_o എന്നു കിട്ടും. h = 0 എന്നത് ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതിനാൽ, ഭൗമോപരിതലത്തിലെ സ്ഥിതികോർജമാണ് W_o.

നാമിപ്പോൾ രൂപീകരിച്ച ഫലം ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിനു മുകളിൽ ഏത് ഉയരത്തിലുമുള്ള സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് സാധുവായിരിക്കില്ല. ഗുരുത്വാകർഷണബലം mg ഒരു സ്ഥിരമൂല്യമാണെന്ന നിഗമനത്തിനു ഇവിടെ സാധുതയില്ല എന്നതാണ് ഇതിനു കാരണം. എന്നിരുന്നാലും, നാം നടത്തിയ ചർച്ചകളിൽ നിന്ന് മനസ്സിലാക്കാനാകുന്നത്, ഭൂമിക്കു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിലെ ഒരു വസ്തുവിൻമേൽ ഭൂമിയുടെ കേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള ഗുരുത്വബലം

$$F = \frac{G M_E m}{r^2} \text{----------(8.23)}$$

എന്നാണ്. ഇതിൽ M_E – ഭൂമിയുടെ മാസ്, m – വസ്തുവിന്റെ മാസ് r – ഭൂമിയുടെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് വസ്തുവിലേക്കുള്ള ദൂരം $r = r_1$ ൽനിന്ന് $r = r_2$ വിലേക്ക് $(r_2 > r_1)$ ലംബപാതയിലൂടെ ഒരു വസ്തുവിനെ ഉയർത്താനുള്ള പ്രവൃത്തിയാണ് കണക്കാക്കുന്നതെങ്കിൽ, സമവാക്യം (8.20) നു പകരം ലഭിക്കുന്നത് താഴെ കൊടുക്കുന്നതായിരിക്കും.

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{G M m}{r^2} dr$$

$$= -G M_E m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \text{-------(8.24)}$$

അതിനാൽ, സമവാക്യം (8.21) ന്റെ സ്ഥാനത്ത് r അകലത്തിലുള്ള സ്ഥിതികോർജം W(r) നെ താഴെ കാണിച്ച രീതിയിൽ ബന്ധപ്പെടുത്താം.

$$W(r) = -\frac{G M_E m}{r} + W_1 , \text{ -------- (8.25)}$$

ഈ സമവാക്യം r > R ആകുമ്പോഴാണ് സാധുവാകുന്നത്. അതിനാൽ, ഒരിക്കൽക്കൂടി $W_{12} = W(r_2) - W(r_1)$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു. സമവാക്യം (8.25) ൽ, r അനന്തമാണെന്ന് കരുതിയാൽ ലഭിക്കുക, W (r = ∞) = W_1. അതിനാൽ, അനന്തതയിലെ സ്ഥിതികോർജം W_1 ആകുന്നു. (8.22), (8.24) എന്നീ സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന് രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള സ്ഥിതികോർജ വ്യത്യാസത്തിന് മാത്രമേ വ്യക്തമായ അർഥമുള്ളുവെന്നു ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതാണ്. W_1 നെ പൂജ്യത്തിന് തുല്യമാക്കിയാൽ, ഒരു ബിന്ദുവിലെ സ്ഥിതികോർജമെന്നത് അനന്തതയിൽനിന്ന് ഒരു വസ്തുവിനെ ആ ബിന്ദുവിലേക്ക് മാറ്റാൻ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിയായിരിക്കും.

ഒരു ബിന്ദുവിലിരിക്കുന്ന വസ്തുവിൻമേൽ ഭൂമിയുടെ ഗുരുത്വബലംകൊണ്ടുള്ള അതിന്റെ സ്ഥിതികോർജം നമ്മൾ കണ്ടെത്തിക്കഴിഞ്ഞു. അത് ആ വസ്തുവിന്റെ മാസിന് ആനുപാതികമാണ്. ഭൂഗുരുത്വബലംകൊണ്ടുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിലെ ഗുരുത്വപൊട്ടൻഷ്യൽ (Gravitational Potential) നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത് ആ ബിന്ദുവിലെ യൂണിറ്റ് മാസിന്റെ സ്ഥിതികോർജം എന്നാണ്. മുമ്പു നടത്തിയ ചർച്ചകളിൽ നിന്ന്, r അകലത്തിലിരിക്കുന്ന m_1, m_2 എന്നീ മാസുകളുള്ള രണ്ടു വസ്തുക്കളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഗുരുത്വസ്ഥിതികോർജം താഴെ കൊടുത്ത രീതിയിലാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

$$V = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$ ($r \to \infty$ ആകുമ്പോൾ V = 0 എന്നെടുക്കുകയാണെങ്കിൽ)

കണികകളുടെ ഒരു ഒറ്റപ്പെട്ട വ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ സ്ഥിതികോർജം, സാധ്യമായ എല്ലാ ജോടി ഘടകകണങ്ങളുടെയും ഊർജങ്ങളുടെ (മുകളിലെ സമവാക്യം അനുസരിച്ച്) തുകയായിരിക്കും.

സൂപ്പർപൊസിഷൻ തത്വത്തിന്റെ പ്രയോഗത്തിന് ഒരു ഉദാഹരണമാണിത്.

ഉദാഹരണം 8.3: *l* വശമുള്ള ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ മൂലകളിൽ വച്ചിട്ടുള്ള നാലു വസ്തുക്കൾ ചേർന്ന വ്യൂഹത്തിന്റെ സ്ഥിതികോർജം കണ്ടെത്തുക. കൂടാതെ, സമചതുരത്തിന്റെ മധ്യത്തിലുള്ള സ്ഥിതികോർജവും കാണുക.

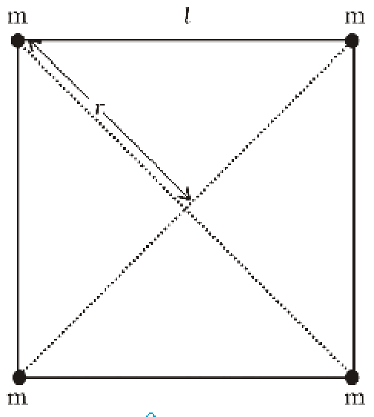
ഉത്തരം:

l വശമുള്ള ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ മൂലകളിലുള്ള നാല് മാസുകൾ പരിഗണിക്കുക; (ചിത്രം. 8.9 കാണുക). *l*

അകലത്തിലുള്ള നാല് മാസ് ജോടികളും $\sqrt{2}l$ അകലമുള്ള രണ്ടു വികർണജോടികളുമുണ്ട്. അതിനാൽ,

$$W(r) = -4\frac{Gm^2}{l} - 2\frac{Gm^2}{\sqrt{2}\,l}$$

$$= -\frac{2Gm^2}{l}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -5.41\frac{Gm^2}{l}$$ സമചതുരത്തിന്റെ മധ്യത്തിലുള്ള സ്ഥിതികോർജവും $\left(r = \sqrt{2}\,l/2\right)$ എന്നത് $U(r) \quad -4\sqrt{2}\frac{Gm}{l}$



ചിത്രം 8.9

8.8 പലായനവേഗം (Escape Speed)

മുകളിലേക്കെറിഞ്ഞ കല്ല് തിരികെ ഭൂമിയിൽ പതിക്കുന്നതായി നാം കണ്ടിട്ടുണ്ട്. യന്ത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് എറിയുന്നതെങ്കിൽ, ആ വസ്തുവിനെ നമുക്ക് കൂടുതൽ കൂടുതൽ പ്രാരംഭവേഗത്തിൽ എറിയാനും അങ്ങനെ ആ വസ്തുവിന് കൂടുതൽ ഉയരത്തിൽ എത്തിച്ചേരാനുമാകും. നിങ്ങളുടെ മനസ്സിൽ ഇപ്പോൾ ഉയർന്നുവരുന്ന സ്വാഭാവികമായ ഒരു ചോദ്യം ഇതാവാം: 'ഭൂമിയിൽ തിരിച്ചുവീഴാതിരിക്കത്തക്ക വിധം ഉയർന്ന പ്രാരംഭവേഗത്തിൽ ഒരു വസ്തുവിനെ നമുക്ക് എറിയാനാകുമോ?' ഈ ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം കണ്ടെത്താൻ ഊർജസംരക്ഷണനിയമം സഹായിക്കും. എറിയപ്പെട്ട വസ്തു അനന്തതയിലെത്തിയെന്നും അവിടെ അതിന്റെ വേഗം V_f ആണെന്നും കരുതുക. ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഊർജം അതിന്റെ സ്ഥിതികോർജത്തിന്റെയും ഗതികോർജത്തിന്റെയും തുകയാണല്ലോ. അനന്തതയിലെ ഗുരുത്വാകർഷണ സ്ഥിതികോർജത്തെ W_1 എന്ന് മുമ്പ് നമ്മൾ സൂചിപ്പിട്ടുണ്ട്. എറിയപ്പെട്ട വസ്തുവിന്റെ അനന്തതയിലെ ആകെ ഊർജം,

$$E(\infty) = W_1 + \frac{mV_f^2}{2} \text{ --------- } (8.26)$$

ഭൂകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് $(h - R_E)$ അകലെയുള്ള ബിന്ദുവിൽനിന്ന് V_i പ്രാരംഭവേഗത്തിൽ ഒരു വസ്തുവിനെ എറിഞ്ഞാൽ, തുടക്കത്തിൽ അതിന്റെ ഊർജം

$$E(h+R_E) = \frac{1}{2}mV_i^2 - \frac{GmM_E}{(h+R_E)} + W_1 \text{ ---- } (8.27)$$

എന്നായിരിക്കും. ഊർജസംരക്ഷണ നിയമപ്രകാരം സമവാക്യങ്ങൾ (8.26) ഉം (8.27) ഉം തുല്യമായിരിക്കണം. അതിനാൽ

$$\frac{mV_i^2}{2} - \frac{GmM_E}{(h+R_E)} = \frac{mV_f^2}{2} \text{ ------- } (8.28)$$

സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുഭാഗത്തുള്ളത് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യം പൂജ്യമായുള്ള ഒരു പോസിറ്റീവ് അളവാണ്. അതിനാൽ ഇടതുഭാഗത്തുള്ള അളവും അത് പോലെത്തന്നെയായിരിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഒരു വസ്തു അനന്തതയിലെത്തുന്നത് അതിന്റെ V_i താഴെ പറയും പ്രകാരമാവുമ്പോഴാണ്,

$$\frac{mV_i^2}{2} - \frac{GmM_E}{(h+R_E)} \geq 0 \text{ --------- } (8.29)$$

സമവാക്യത്തിന്റെ ഇടതുഭാഗത്തുള്ള അളവ് പൂജ്യത്തിന് തുല്യമാവുമ്പോഴാണ് V_i യുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യം ലഭിക്കുന്നത്. ആയതിനാൽ, അനന്തതയിലെത്താൻ (ഭൂമിയിൽനിന്ന് പലായനം ചെയ്ത്) ഒരു വസ്തുവിന് ആവശ്യമായ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വേഗത കിട്ടാൻ

$$\frac{1}{2}m\left(V_i^2\right)_{min} = \frac{GmM_E}{h+R_E} \text{ ------ } (8.30)$$

വസ്തുവിനെ എറിയുന്നത് ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽ നിന്നാണെങ്കിൽ, h = 0, നമുക്ക് ലഭിക്കുക

$$\left(V_i\right)_{min} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \text{ -------- } (8.31).$$

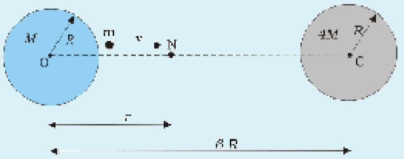
$g = GM_E / R_E^2$ എന്ന ബന്ധം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുക

$$\left(V_i\right)_{min} = \sqrt{2gR_E} \qquad (8.32).$$

g യുടെയും R_E യുടെയും മൂല്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ, $(V_i)_{min} \approx 11.2$ km/s എന്നു ലഭിക്കും. ഇതിനെ പലായനവേഗ (Escape speed) മെന്നും, ചിലപ്പോൾ പലായനപ്രവേഗമെന്നും പറയുന്നു.
ചന്ദ്രന്റെ ഉപരിതലത്തിൽനിന്ന് എറിയപ്പെടുന്ന ഒരു വസ്തുവിനെ സംബന്ധിച്ചും സമവാക്യം (8.32) പ്രയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. സമവാക്യത്തിൽ കാണുന്ന g ക്കു

പകരം ചന്ദ്രോപരിതലത്തിലെ ഗുരുത്വ ത്വരണവും R_E യ്ക്കു പകരം ചന്ദ്രന്റെ ആരവും ഉപയോഗിച്ചാൽ മതി. രണ്ടിന്റെയും മൂല്യങ്ങൾ ഭൂമിയുടേതിനേക്കാൾ ചെറുതും അതിനാൽത്തന്നെ ചന്ദ്രനിലെ പലായനവേഗം ഭൂമിയുടേതിന്റെ ഏതാണ്ട് അഞ്ചിലൊന്നുമാണ് (2.3 km/s). ചന്ദ്രന് അന്തരീക്ഷം ഇല്ലാതിരിക്കാനുള്ള കാരണവുമിതാണ്. ചന്ദ്രോപരിതലത്തിൽ വാതകതന്മാത്രകൾ രൂപപ്പെട്ടാൽ, അവയ്ക്ക് ഇതിനേക്കാൾ കൂടിയ പ്രവേഗം ഉണ്ടാവുകയും ചന്ദ്രന്റെ ഗുരുത്വവലിവിൽനിന്ന് രക്ഷപ്പെടുകയും ചെയ്യും.

ഉദാഹരണം 8.4 : തുല്യ ആരം (R) ഉള്ളതും എന്നാൽ M, 4M എന്നിങ്ങനെ മാസുകളുള്ളതുമായ രണ്ടു സമരൂപഗോളങ്ങളുടെ (Uniform solid spheres) കേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം ചിത്രം 8.10 ൽ കാണിച്ചപോലെ 6R ആണ്. രണ്ടു ഗോളങ്ങളും ഉറപ്പിച്ചുവച്ചിരിക്കുന്നു. M മാസുള്ള ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിൽനിന്ന് രണ്ടാമത്തെ ഗോളത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലേക്കു നേരിട്ട് m മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിനെ വിക്ഷേപിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തെ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിലെത്താൻ പ്രക്ഷേപിതത്തിനുണ്ടാകേണ്ട (projectile) ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വേഗത്തിനുള്ള സൂത്രവാക്യം കണ്ടെത്തുക.



ചിത്രം 8.10

ഉത്തരം:

രണ്ടു ഗോളങ്ങൾ പരസ്പരം എതിർദിശയിലുള്ള രണ്ടു ഗുരുത്വാകർഷണബലങ്ങൾ ഈ പ്രക്ഷേപിതത്തിന്മേൽ പ്രയോഗിക്കുന്നു. രണ്ടു ബലങ്ങൾ പരസ്പരം കൃത്യമായി റദ്ദാക്കപ്പെടുന്ന ബിന്ദുവിനെയാണ് ഉദാസീനബിന്ദു N (Neutral point) എന്നു നിർവചിക്കുന്നത്. ON = r ആണെങ്കിൽ,

$$\frac{G\,M\,m}{r^2} \quad \frac{4\,G\,M\,m}{(6R\;\;r)^2}$$

$$(6R-r)^2 = 4r^2$$

$$6R - r = \pm 2r$$

$r = 2R$ അല്ലെങ്കിൽ $r = -6R$.

നിർവീര്യബിന്ദുവിന് $r = -6R$ എന്ന മൂല്യം ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ യോജിക്കുകയില്ല.

അതിനാൽ $ON = r = 2R$.

N ൽ എത്താൻ കഴിയുന്ന വേഗത്തിൽ ആ വസ്തുവിനെ വിക്ഷേപിച്ചാൽ മതിയാകും. അതിനുശേഷം, 4M ന്റെ കൂടിയ ഗുരുത്വാകർഷണവലിവ് ലഭ്യമാകും. M ന്റെ ഉപരിതലത്തിലുള്ള യാന്ത്രികോർജം

$$E_i \quad \frac{1}{2}m\,v^2 - \frac{G\,M\,m}{R} - \frac{4\,G\,M\,m}{5\,R}$$

നിർവീര്യബിന്ദു N ൽ, വേഗം പൂജ്യത്തോടടുക്കുന്നു. N ലെ യാന്ത്രികോർജം പൂർണമായും സ്ഥിതികോർജമായിരിക്കും.

$$E_N = \quad \frac{G\,M\,m}{2\,R} \quad \frac{4\,G\,M\,m}{4\,R}$$

യാന്ത്രികോർജ സംരക്ഷണനിയമമനുസരിച്ച്

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R} - \frac{4GM}{5R} = -\frac{GM}{2R} - \frac{GM}{R}$$

$$v^2 = \frac{2\,G\,M}{R}\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)$$

$$v = \left(\frac{3\,G\,M}{5\,R}\right)^{1/2}$$

ഇവിടെ സൂചിപ്പിക്കേണ്ട ഒരു കാര്യം; N ൽ പ്രക്ഷേപത്തിന്റെ വേഗം പൂജ്യമാണ്. എന്നാൽ 4M മാസുള്ള വലിയ ഗോളത്തിൽ ഇടിക്കുമ്പോൾ പൂജ്യമാകുന്നുമില്ല. ഈ വേഗത്തിന്റെ കണക്കുകൂട്ടൽ വിദ്യാർഥികൾക്ക് ഒരു പരിശീലനപ്രശ്നമായി മാറ്റിവെക്കുന്നു.

8.9 ഭൗമോപഗ്രഹങ്ങൾ (Earth Satellites)

ഭൂമിയെ ചുറ്റിക്കറങ്ങുന്ന വസ്തുക്കളാണ് ഭൗമോപഗ്രഹങ്ങൾ. ഈ ചലനം സൂര്യനു ചുറ്റും ഗ്രഹങ്ങളുടെ ചലനത്തിന് സമാനമായതുകൊണ്ടുതന്നെ കെപ്ലറുടെ ചലനനിയമങ്ങൾ ഇവിടെയും ബാധകമാണ്. വിശേഷിച്ച്, ഭൂമിക്കു ചുറ്റുമുള്ള അവയുടെ പരിക്രമണപാതകൾ വൃത്താകാരമോ ദീർഘവൃത്താകാരമോ ആകുമ്പോൾ. ഭൂമിയുടെ ഒരേയൊരു സ്വാഭാവിക ഉപഗ്രഹമാണ് ചന്ദ്രൻ. അതിന്റെ പരിക്രമണപാത ഏറെക്കുറേ വൃത്താകാരവും പരിക്രമണകാലം ഏകദേശം 27.3 ദിവസങ്ങളുമാണ്. ഇത് ഏകദേശം ചന്ദ്രന്റെ ഭ്രമണകാലയളവിന് തുല്യവുമാണ്. 1957 മുതൽ വാർത്താവിനിമയം, ഭൗമഭൗതികം, കാലാവസ്ഥാപഠനം തുടങ്ങിയ മേഖലകളിലെ പ്രായോഗിക ഉപയോഗങ്ങൾക്കായി കൃത്രിമഭൗമ ഉപഗ്രഹങ്ങൾ വിക്ഷേപിക്കാൻ സാങ്കേതികവിദ്യയുടെ പുരോഗതി ഇന്ത്യ ഉൾപ്പെടെ നിരവധി രാജ്യങ്ങളെ പ്രാപ്തമാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

ഭൂമിയുടെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് $(R_E + h)$ അകലത്തിൽ വൃത്താകാരപാതയിലുള്ള ഒരു ഉപഗ്രഹത്തെ പരിഗണിക്കുക. ഇതിൽ R_E ഭൂമിയുടെ ആരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. m ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ മാസും V അതിന്റെ വേഗവുമാണെങ്കിൽ, ഈ പരിക്രമണപാതക്കാവശ്യമായ അഭികേന്ദ്രബലം

$$F\ (\text{അഭികേന്ദ്രം}) = \frac{mV^2}{(R_E + h)} \quad \text{--------} \ (8.33)$$

ഇത് കേന്ദ്രത്തെ ലാക്കാക്കിയുള്ളതാണ്. ഗുരുത്വാകർഷണബലമാണ് ഈ അഭികേന്ദ്രബലം നൽകുന്നത്. അത്,

$$F\ (\text{ഗുരുത്വം}) = \frac{G\,m\,M_E}{(R_E + h)^2} \quad \text{---------} \ (8.34)$$

(8.33), (8.34) എന്നീ സമവാക്യങ്ങളുടെ വലതുവശങ്ങൾ തുലനം ചെയ്യുമ്പോൾ m റദ്ദാക്കപ്പെടുന്നു, അപ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുക

$$V^2 = \frac{G\,M_E}{(R_E + h)} \qquad (8.35)$$

അതായത്, h കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് V കുറയുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്. h = 0 ആവുമ്പോൾ സമവാക്യം (8.35) ൽ നിന്ന് വേഗത V ലഭിക്കുന്നത്,

$$V^2 \quad (h = 0) = GM / R_E = gR_E \qquad \text{------} \ (8.36)$$

ഇവിടെ നമ്മൾ $g = GM / R_E^2$ എന്ന ബന്ധം ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു. ഓരോ പരിക്രമണപാതയിലും V വേഗത്തിൽ ഉപഗ്രഹം $2\pi(R_E + h)$ ദൂരം സഞ്ചരിക്കുന്നു. അതിനാൽ അതിന്റെ പരിക്രമണകാലം T

$$T = \frac{2\pi(R_E + h)}{V} = \frac{2\pi(R_E + h)^{3/2}}{\sqrt{G\,M_E}} \qquad \text{----------} \ (8.37)$$

സമവാക്യം (8.35) ൽനിന്ന് V യുടെ മൂല്യം പകരം നൽകുകയും ശേഷം സമവാക്യം (8.37) ന്റെ ഇരുവശത്തിന്റെയും വർഗം കാണുകയും ചെയ്താൽ ലഭിക്കുക,

$$T^2 = k\ (R_E + h)^3 \quad \text{-----} \qquad (8.38)$$

(ഇവിടെ $k = 4\pi^2 / GM_E$)

ഭൂമിക്കു ചുറ്റുമുള്ള ഉപഗ്രഹങ്ങളുടെ ചലനത്തിൽ പ്രയോഗിക്കാവുന്ന കെപ്ലറുടെ മൂന്നാം നിയമമാണിത് (Law of Periods). ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തോടു വളരെ അടുത്തുള്ള ഒരു ഉപഗ്രഹത്തെ സംബന്ധിച്ച് R_E യുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ h അവഗണിക്കാവുന്നതാണ്.

> ▶ **ഉദാഹരണം 8.5:** ചൊവ്വാഗ്രഹത്തിന് രണ്ട് ഉപഗ്രഹങ്ങളുണ്ട് ഫോബോസും ഡീമോസും. (i) ഫോബോസിന്റെ പരിക്രമണകാലം 7 മണിക്കൂർ 39 മിനിറ്റും പരിക്രമണ ആരം 9.4×10^3 km മാണ്. ചൊവ്വയുടെ മാസ് കണക്കാക്കുക. (ii) ചൊവ്വയും ഭൂമിയും സൂര്യനെ ചുറ്റി വൃത്താകാര പാതയിലാണ് സഞ്ചരിക്കുന്നതെന്ന് കരുതുക. അതിൽ ചൊവ്വയുടെ പരിക്രമണപാതയുടെ ആരം ഭൂമിയുടേതിന്റെ 1.52 മടങ്ങുമാണ്. ഒരു ചൊവ്വാ വർഷത്തിന്റെ ദൈർഘ്യം എത്ര ദിവസങ്ങളായിരിക്കും?

അത്തരം ഉപഗ്രഹങ്ങളുടെ T യെ T_0 എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുകയും അത് താഴെ കൊടുക്കുന്ന രീതിയിൽ പ്രതിപാദിക്കുകയും ചെയ്യാം.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{R_E / g} \quad \text{----------} \ (8.39)$$

$g = 9.8\ m\ s^{-2}$. $R_E = 6400$ km എന്നിങ്ങനെയുള്ള വിലകൾ നൽകിയാൽ ലഭിക്കുക,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{6.4 \times 10^6}{9.8}}\ \ s$$

ഇത് ഏകദേശം 85 മിനിറ്റാണ്.

ഉത്തരം:

(i) സമവാക്യം (8.38) ൽ ഭൂമിയുടെ മാസിനു പകരം ചൊവ്വയുടെ മാസ് M_m കൊടുക്കുക.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_m} R^3$$

$$M_m = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2}$$

$$= \frac{4 \times (3.14)^2 \times (9.4)^3 \times 10^{18}}{6.67 \times 10^{-11} \times (459 \times 60)^2}$$

$$M_m = \frac{4 \times (3.14)^2 \times (9.4)^3 \times 10^{18}}{6.67 \times (4.59 \times 6)^2 \times 10^{-5}}$$

$= 6.48 \times 10^{23}$ kg.

(ii) കെപ്ലറുടെ മൂന്നാമത്തെ നിയമം ഒരിക്കൽക്കൂടി നമുക്കുപയോഗിക്കാം:

$$\frac{T_M^2}{T_E^2} = \frac{R_{MS}^3}{R_{ES}^3}$$

ഇതിൽ, R_{MS} ചൊവ്വയിൽനിന്നു സൂര്യനിലേക്കുള്ള ദൂരവും R_{ES} ഭൂമിയിൽനിന്നു സൂര്യനിലേക്കുള്ള ദൂരവുമാണ്.

$\therefore\ T_M = (1.52)^{3/2} \times 365$

$= 684$ ദിവസങ്ങൾ

> ▶ **ഉദാഹരണം 8.6:** ഭൂമിയുടെ ഭാരം കാണൽ: താഴെ ചില ഡാറ്റ തന്നിരിക്കുന്നു. $g = 9.81\ ms^{-2}$. $R_E = 6.37 \times 10^6$ m, ചന്ദ്രനിലേക്കുള്ള ദൂരം $R = 3.84 \times 10^8$ m, ചന്ദ്രന്റെ പരിക്രമണകാലം 27.3 ദിവസങ്ങൾ. രണ്ട് വ്യത്യസ്ത മാർഗങ്ങളിലൂടെ ഭൂമിയുടെ മാസ് M_E കാണുക.

ബുധൻ, ചൊവ്വ ഒഴികെയുള്ള എല്ലാ ഗ്രഹങ്ങളുടെയും പരിക്രമണപഥം ഏതാണ്ട് വൃത്താകൃതിയിലാണ്. ഉദാഹരണമായി, ഭൂമിയുടെ സെമിമൈനർ അക്ഷവും സെമിമേജർ അക്ഷവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതം,

$b/a = 0.99986$

ഉത്തരം:

സമവാക്യം (8.12) ഉപയോഗിച്ചാൽ,

$$M_E = \frac{g\,R_E^2}{G}$$

$$= \frac{9.81 \times \left(6.37 \times 10^{6}\right)^{2}}{6.67 \times 10^{-11}}$$

$= 5.97 \times 10^{24}$ kg.

ചന്ദ്രൻ ഭൂമിയുടെ ഉപഗ്രഹമാണ്. കെപ്ലറുടെ മൂന്നാം നിയമത്തിന്റെ രൂപീകരണത്തിൽനിന്ന് സമവാക്യം (8.38) കാണുക).

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G M_E}$$

$$M_E = \frac{4\pi^2 R^3}{G T^2}$$

$$= \frac{4 \times 3.14 \times 3.14 \times (3.84)^3 \times 10^{24}}{6.67 \times 10^{-11} \times (27.3 \times 24 \times 60 \times 60)^2}$$

$$= 6.02 \times 10^{24} \text{ kg}$$

രണ്ട് മാർഗങ്ങളും ഏതാണ്ട് ഒരേ ഉത്തരമാണ് നല്കുന്നത്. വ്യത്യാസം 1% ൽ താഴെ മാത്രമാണ്. ◀

▶ **ഉദാഹരണം 8.7:** സമവാക്യം (8.38) ലെ സ്ഥിരാങ്കം k യെ ദിവസങ്ങളിലും കിലോമീറ്ററുകളിലും കണക്കാക്കുക. $k = 10^{-13}$ $s^2 m^{-3}$ എന്നു തന്നിരിക്കുന്നു. ചന്ദ്രൻ ഭൂമിയിൽനിന്ന് 3.84×10^5 km അകലെയാണുള്ളത്. അതിന്റെ പരിക്രമണകാലം എത്ര ദിവസങ്ങളായിരിക്കും?

ഉത്തരം:

$k = 10^{-13}$ $s^2 m^{-3}$ എന്നു തന്നിട്ടുണ്ട്,

$$k = 10^{-13}\left[\frac{1}{(24 \times 60 \times 60)^2} d^2\right]\left[\frac{1}{(1/1000)^3 \text{km}^3}\right]$$

$= 1.33 \times 10^{-14}$ d^2 km^{-3}

സമവാക്യം (8.38) ഉം തന്നിരിക്കുന്ന k യുടെ മൂല്യവും ഉപയോഗിച്ച് ചന്ദ്രന്റെ പരിക്രമണകാലം

$T^2 = (1.33 \times 10^{-14})(3.84 \times 10^5)^3$

$T = 27.3$ d

$(R_E + h)$ നു പകരം ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ സെമിമേജർ അക്ഷം കൊടുക്കുകയാണെങ്കിൽ, ദീർഘവൃത്തത്തിലും സമവാക്യം (8.38) നമുക്ക് ഉപയോഗിക്കാനാകും. അപ്പോൾ ഈ ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഫോക്കസിൽ ആയിരിക്കും ഭൂമി.

8.10 പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ഒരു ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ ഊർജം (Energy of an Orbiting Satellite)

വൃത്തപാതയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ ഗതികോർജം, സമവാക്യം (8.35) ഉപയോഗിച്ചാൽ,

$$KE = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{G m M_E}{2(R_E + h)}, \quad \text{-----} \ (8.40)$$

അനന്തതയിലെ ഗുരുത്വസ്ഥിതികോർജം പൂജ്യമെന്ന് പരിഗണിക്കുമ്പോൾ, ഭൂമിയുടെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് $(R_E + h)$ അകലത്തിലുള്ള സ്ഥിതികോർജം

$$P.E = -\frac{G m M_E}{(R_E + h)} \quad \text{----------} \ (8.41)$$

K.E പോസിറ്റീവും P.E നെഗറ്റീവുമാണ്. എന്നാൽ P.E യുടെ കേവലവിലയുടെ പകുതിയാണ് K.E. അതിനാൽ, ആകെ ഊർജം

$$E = K.E + P.E = -\frac{G m M_E}{2(R_E + h)} \quad \text{------} \ (8.42)$$

വർത്തുളപാതയിൽ ചുറ്റുന്ന ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ ആകെ ഊർജം നെഗറ്റീവും അതിന്റെ കേവലവില ഗതികോർജത്തിന്റെ ഇരട്ടിയുമാണ്.

പരിക്രമണപാത ദീർഘവൃത്തമാകുമ്പോൾ K.E യും P.E യും ഓരോ ബിന്ദുവിലും വ്യത്യാസപ്പെട്ടുകൊണ്ടിരിക്കും. വൃത്താകാരപാതയിലെന്നപോലെ ആകെ ഊർജം സ്ഥിരവും നെഗറ്റീവുമായിരിക്കുമെന്നാണ് നമ്മൾ പ്രതീക്ഷിക്കുന്നത്. കാരണം, മുമ്പ് നാം ചർച്ച ചെയ്തതുപോലെ ആകെ ഊർജം പോസിറ്റീവോ പൂജ്യമോ ആയാൽ ഈ വസ്തുക്കൾ അനന്തതയിലേക്ക് രക്ഷപ്പെടുന്നു. ഉപഗ്രഹങ്ങൾ ഭൂമിയിൽനിന്ന് എപ്പോഴും ഒരു നിശ്ചിത ദൂരം അകലെയായതിനാൽ അവയുടെ ഊർജം പോസിറ്റീവോ പൂജ്യമോ ആകാൻ കഴിയില്ല.

▶ **ഉദാഹരണം 8.8:** ഭൂമിക്കു ചുറ്റും ഏതാണ്ട് $2R_E$ ആരത്തിലുള്ള വൃത്താകാരപരിക്രമണപാതയിലൂടെ 400 kg മാസുള്ള ഒരു ഉപഗ്രഹം സഞ്ചരിക്കുന്നുണ്ടെന്ന് കരുതുക. $4R_E$ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്താകാരപരിക്രമണപാതയിലേക്ക് അതിനെ മാറ്റണമെങ്കിൽ എത്രമാത്രം ഊർജം ആവശ്യമായിവരും? ഗതികോർജത്തിലും സ്ഥിതികോർജത്തിലുമുള്ള മാറ്റങ്ങൾ എന്തെല്ലാം?

ഉത്തരം:

തുടക്കത്തിൽ,

$$E_i = \frac{G M_E m}{4 R_E}$$

എന്നാൽ അവസാനം,

$$E_f = \frac{G M_E m}{8 R_E}$$

ആകെ ഊർജത്തിലെ മാറ്റം

$\Delta E = E_f - E_i$

$$\frac{G M_E m}{8 R_E} \left(\frac{G M_E}{R_E^2}\right)\frac{m R_E}{8}$$

$$\Delta E = \frac{g\,m\,R_E}{8} = \frac{9.81 \times 400 \times 6.37 \quad 10^6}{8} = 3.13 \quad 10^9 J$$

ഗതികോർജം കുറയുകയും അത് ΔE യെ അനുകരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. $\Delta K = K_f - K_i = -3.13 \times 10^9 J$ സ്ഥിതികോർജത്തിലെ മാറ്റം ആകെ ഊർജമാറ്റത്തിന്റെ ഇരട്ടിയാണ്. $\Delta V = V_f - V_i = -6.25 \times 10^9 J$

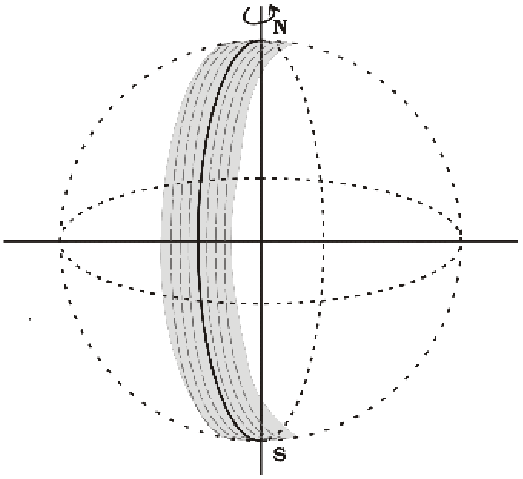
8.11 ഭൂസ്ഥിര ഉപഗ്രഹങ്ങളും ധ്രുവീയ ഉപഗ്രഹങ്ങളും (Geostationary and Polar satellites)

$(R_E + h)$ ന്റെ മൂല്യം ക്രമീകരിച്ച് സമവാക്യം (8.37) ലെ T യെ 24 മണിക്കൂർ ആക്കുമ്പോൾ ശ്രദ്ധേയമായ ഒരു പ്രതിഭാസം കാണാം. ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ പരിക്രമണ കാലം 24 മണിക്കൂർ ആകും. ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ വൃത്താകാര പരിക്രമണപഥം ഭൂമധ്യരേഖാപ്രതലത്തിലും അതിന്റെ പരിക്രമണകാലം ഭൂമിയുടെ (സ്വന്തം അച്ചുതണ്ടിലുള്ള) ഭ്രമണകാലത്തിന് തുല്യവുമാണെങ്കിൽ, അത്തരം ഒരു ഉപഗ്രഹം ഭൂമിയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നു നോക്കുമ്പോൾ നിശ്ചലമായിരിക്കുന്നതായി കാണപ്പെടും. R_E യോട് താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ, ഇവിടെ നമ്മൾ പരിഗണിക്കുന്ന $(R_E + h)$ വളരെ കൂടുതലായിരിക്കും.

$$R_E + h = \left(\frac{T^2 G M_E}{4\pi^2}\right)^{1/3} \qquad \text{---------} \ (8.43)$$

T = 24 മണിക്കൂർ ആയാൽ, h ലഭിക്കുന്നത് 35,800 km ആയിരിക്കും. R_E യെ അപേക്ഷിച്ച് ഇത് വളരെ കൂടുതലാണ്. വൃത്താകാരപരിക്രമണപാതയിൽ ഭൂമധ്യരേഖാപ്രതലത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന T = 24 മണിക്കൂർ ആയ ഉപഗ്രഹങ്ങളെ ഭൂസ്ഥിര ഉപഗ്രഹങ്ങൾ (Geostationary Satellites) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഭൂമിയും അതേ ആവർത്തനകാലത്തിൽ (Period) ഭ്രമണം ചെയ്യുന്നതിനാൽ, ഭൂമിയിൽ എവിടെനിന്നു നോക്കിയാലും ഈ ഉപഗ്രഹം നിശ്ചലമായി കാണപ്പെടുമെന്ന് വ്യക്തമാണ്. ഭൂമിക്കു മുകളിൽ ഇത്രയധികം ഉയരത്തിൽ ഉപഗ്രഹത്തെ എത്തിക്കാൻ വളരെ ശക്തികൂടിയ റോക്കറ്റുകൾ ആവശ്യമാണ്. എന്നാൽ നിരവധി പ്രായോഗിക നേട്ടങ്ങൾ ലക്ഷ്യം വച്ചുകൊണ്ടാണ് ഇത്തരം ഉപഗ്രഹങ്ങൾ വിക്ഷേപണം ചെയ്യുന്നത്.

ഒരു നിശ്ചിത ആവൃത്തിക്കു മുകളിലുള്ള വൈദ്യുതകാന്തികതരംഗങ്ങൾ അയണോസ്ഫിയറിൽനിന്ന് പ്രതിഫലിക്കപ്പെടുന്നില്ലായെന്ന് നമുക്കറിയാം. റേഡിയോ പ്രക്ഷേപണത്തിനുപയോഗിക്കുന്ന 2 MHz മുതൽ 10 MHz വരെ ആവൃത്തിയുള്ള റേഡിയോ തരംഗങ്ങൾ ഈ ക്രാന്തിക ആവൃത്തിക്ക് (critical frequency) താഴെയുള്ളതാണ്. അതുകൊണ്ട് അവ അയണോസ്ഫിയറാൽ പ്രതിഫലിപ്പിക്കപ്പെടുന്നു. ഭൂമിയുടെ വക്രത കാരണം നേരിട്ടുള്ള തരംഗങ്ങൾ എത്താൻ പരാജയപ്പെടുന്ന സ്ഥലങ്ങളിൽ ഒരു ആന്റിനയിൽനിന്നുള്ള റേഡിയോ പ്രക്ഷേപണം അങ്ങനെയാണ് എത്തിച്ചേരുന്നത്. ടെലിവിഷൻ സംപ്രേഷണത്തിലും മറ്റു വാർത്താവിനിമയ രീതികളിലും ഉപയോഗിക്കുന്ന തരംഗങ്ങൾ വളരെ കൂടിയ ആവൃത്തിയുള്ളവയും അതുകൊണ്ട് തന്നെ ദൃഷ്ടിരേഖക്കപ്പുറം (line of sight) സ്വീകരിക്കപ്പെടാൻ കഴിയാത്തവയുമാണ്. പ്രക്ഷേപണ കേന്ദ്രത്തിനു മുകളിൽ സ്ഥിരമായി കാണപ്പെടുന്ന ഒരു ഭൂസ്ഥിര ഉപഗ്രഹത്തിന് ഈ സിഗ്നലുകൾ സ്വീകരിക്കാനും ഭൂമിയിലെ വിശാലമായ സ്ഥലങ്ങളിലേക്കു തിരികെ പ്രക്ഷേപണം ചെയ്യാനും സാധിക്കും. വാർത്താവിനിമയരംഗത്ത് വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ഭൂസ്ഥിര ഉപഗ്രഹങ്ങളാണ് ഇന്ത്യ വിക്ഷേപിച്ച ഇൻസാറ്റ് (INSAT) ഉപഗ്രഹശ്രേണിയിലേത്.



ചിത്രം 8.11 ഒരു ധ്രുവീയ ഉപഗ്രഹം. ഒരു പരിക്രമണത്തിനിടെ ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിലുള്ള ഒരു ചെറുഭാഗം (ഷേഡ് ചെയ്ത് കാണിച്ചിരിക്കുന്നു) ഉപഗ്രഹത്തിൽനിന്നു ദൃശ്യമാകുന്നു. ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ അടുത്ത പരിക്രമണത്തിൽ, ഭൂമി അതിന്റെ അച്ചുതണ്ടിൽ ഒരൽപ്പം കറങ്ങുന്നതിനാൽ, തൊട്ടടുത്തുള്ള ഒരു ചെറുഭാഗം ദൃശ്യമാകും

മറ്റൊരു കൂട്ടം ഉപഗ്രഹങ്ങളെ ധ്രുവീയ ഉപഗ്രഹങ്ങൾ (Polar satellite) എന്നു വിളിക്കുന്നു (ചിത്രം 8.11). ഇവ താഴ്ന്ന ഉന്നതി (h; 500 to 800 km) ഉപഗ്രഹങ്ങളാണ്. അവ ഭൂമിയുടെ ധ്രുവങ്ങൾക്ക് ചുറ്റും തെക്കുവടക്കു ദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു എന്നാൽ ഭൂമി അതിന്റെ അച്ചുതണ്ടിൽ പടിഞ്ഞാറുകിഴക്കു ദിശയിലാണ് കറങ്ങുന്നത്. ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ പരിക്രമണകാലം ഏകദേശം 100 മിനിറ്റ് ആയതിനാൽ ഒരു ദിവസത്തിൽ പലതവണ അത് ഭൂമിയെ ചുറ്റിക്കറങ്ങുന്നു. ഭൂമിയിൽനിന്ന് അതിന്റെ ഉയരം 500 മുതൽ 800 km ആയതിനാൽ, അതിൽ ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന ക്യാമറക്ക് ഭൂമിയുടെ ചെറുഭാഗങ്ങളെ

ബഹിരാകാശത്തേക്ക് ഇന്ത്യയുടെ കുതിപ്പ്

1975 ൽ താഴ്ന്നവിതാനത്തിലുള്ള പരിക്രമണപാതയിലുള്ള ഉപഗ്രഹമായ ആര്യഭട്ട വിക്ഷേപിച്ചുകൊണ്ടാണ് ഇന്ത്യ ബഹിരാകാശയുഗത്തിലേക്കു പ്രവേശിക്കുന്നത്. പദ്ധതിയുടെ ആദ്യവർഷങ്ങളിൽ വിക്ഷേപണവാഹനങ്ങൾ ലഭ്യമാക്കിയിരുന്നത് പഴയ സോവിയറ്റ് യൂണിയനായിരുന്നു. രോഹിണി പരമ്പരയിലെ ഉപഗ്രഹങ്ങളെ ബഹിരാകാശത്തേക്ക് അയക്കുന്നതിനായി 1980 കളുടെ തുടക്കത്തിൽ തദ്ദേശീയമായ വിക്ഷേപണവാഹനങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു. 1980കളുടെ അവസാനം ധ്രുവീയ ഉപഗ്രഹങ്ങളെ ബഹിരാകാശത്തേക്ക് അയക്കുന്നതിനുള്ള പദ്ധതി ആരംഭിച്ചു. ഐ.ആർ.എസ്. (ഇന്ത്യൻ റിമോട്ട് സെൻസിങ് സാറ്റലൈറ്റുകൾ) എന്ന പേരിൽ ഉപഗ്രഹങ്ങളുടെ ഒരു പരമ്പര ആരംഭിച്ചു. ഭാവിയിൽ ഈ പദ്ധതി തുടരുമെന്ന് പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു. സർവേകൾ, കാലാവസ്ഥാപ്രവചനങ്ങൾ, ബഹിരാകാശത്തുള്ള പരീക്ഷണങ്ങൾ എന്നിവക്ക് ഈ ഉപഗ്രഹങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ഇൻസാറ്റ് (ഇന്ത്യൻ നാഷണൽ സാറ്റലൈറ്റ്) പരമ്പരയിലുള്ള ഉപഗ്രഹങ്ങൾ 1982 മുതൽ ആശയവിനിമയത്തിനും കാലാവസ്ഥാപ്രവചനത്തിനുമായി പ്രവർത്തനസജ്ജമാക്കിയിട്ടുണ്ട്. യൂറോപ്യൻ വിക്ഷേപണവാഹനങ്ങൾ ഇൻസാറ്റ് പരമ്പരയിൽ ഉപയോഗപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. ഒരു പരീക്ഷണാത്മക ആശയവിനിമയ ഉപഗ്രഹം (ജിസാറ്റ് 1) സ്പെയ്സിലേക്ക് അയച്ചുകൊണ്ട് 2001 ൽ ഇന്ത്യ അതിന്റെ ഭൂസ്ഥിരവിക്ഷേപണശേഷി പരീക്ഷിച്ചു.

1984 ൽ രാകേഷ് ശർമ ആദ്യമായി ഇന്ത്യൻ ബഹിരാകാശയാത്രികനായി. നിരവധി കേന്ദ്രങ്ങൾ ഒരു കുടക്കു കീഴിൽ പ്രവർത്തിപ്പിക്കുന്ന സ്ഥാപനമാണ് ഇന്ത്യൻ സ്പേസ് റിസർച്ച് ഓർഗനൈസേഷൻ (ഐ.എസ്. ആർ.ഒ.). അതിന്റെ പ്രധാന വിക്ഷേപണകേന്ദ്രം ചെന്നൈ നഗരത്തിൽനിന്ന് 100 കിലോമീറ്റർ വടക്കുള്ള ശ്രീഹരിക്കോട്ടയി (SHAR) ലാണ്. നാഷണൽ റിമോട്ട് സെൻസിങ് ഏജൻസി (എൻ.ആർ.എസ്.എ) ഹൈദരാബാദിനു സമീപമാണ്. അഹമ്മദാബാദിലെ ഫിസിക്കൽ റിസർച്ച് ലബോറട്ടറി (PRL) ആണ് ബഹിരാകാശ-അനുബന്ധ മേഖലകളിലെ ദേശീയ ഗവേഷണകേന്ദ്രം.

മാത്രമേ ഒരു പരിക്രമണത്തിൽ കാണാൻ കഴിയൂ. തുടർന്നുള്ള പരിക്രമണങ്ങളിൽ സമീപഭാഗങ്ങൾ കാണാനാകുന്നു. അങ്ങിനെ ഒരു ദിവസംകൊണ്ട് പല ഭാഗങ്ങളായി ഭൂമിയെ പൂർണമായും വീക്ഷിക്കാൻ കഴിയുന്നു. ഈ ഉപഗ്രഹങ്ങൾക്ക് ധ്രുവപ്രദേശവും ഭൂമധ്യരേഖാപ്രദേശവും അടുത്തും വ്യക്തമായും കാണാനാവും. ഇത്തരം ഉപഗ്രഹങ്ങളിൽനിന്നു ശേഖരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ വിദൂരസംവേദനം, കാലാവസ്ഥാപഠനം, അതുപോലെ ഭൂമിയുടെ പാരിസ്ഥിതികപഠനങ്ങൾ എന്നിവക്ക് വളരെയധികം സഹായകമാണ്.

8.12 ഭാരമില്ലായ്മ (Weightlessness)

ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഭാരം ഭൂമി അതിനെ ആകർഷിക്കുന്ന ബലമാണ്. ഒരു പ്രതലത്തിൽ നിൽക്കുമ്പോൾ നമ്മുടെ ഭാരത്തെ സംബന്ധിച്ച് നാം ബോധമുള്ളവരാണ്. കാരണം, നമ്മെ നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിലനിർത്താൻ ഉപരിതലം നമ്മുടെ ഭാരത്തിനു വിപരീതമായ ഒരു ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നുണ്ട്. നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് അഥവാ മേൽക്കൂരയിൽനിന്ന് തൂക്കിയിട്ടിരിക്കുന്ന സ്പ്രിങ് ബാലൻസ് ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഭാരം അളക്കുമ്പോൾ ഇതേ തത്വമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഗുരുത്വാകർഷണത്തിന് എതിരായ ഒരു ബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നില്ലെങ്കിൽ ആ വസ്തു താഴെ വീഴും. ഇവിടെ ഇത് ആ വസ്തുവിന്മേൽ സ്പ്രിങ് പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലത്തിന് തുല്യമാണ്. ഗുരുത്വാകർഷണവലിവു കാരണം സ്പ്രിങ് അല്പം താഴേക്ക് വലിച്ചുനീട്ടപ്പെടുകയും അതിനാൽ ആ സ്പ്രിങ് വസ്തുവിൽ ലംബമായി മുകളിലേക്കുള്ള ഒരു ബലം പ്രയോഗിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

ഇനി, ത്രാസിന്റെ മുകളറ്റം മുറിയുടെ മേൽക്കൂരയിൽ ബന്ധിപ്പിച്ചിട്ടില്ലെന്നു കരുതുക. സ്പ്രിങ്ങിന്റെ രണ്ടഗ്രങ്ങളും അതുപോലെ ആ വസ്തുവും ഒരേ ത്വരണ (g) ത്തോടെ ചലിക്കുന്നു. സ്പ്രിങ് വലിച്ചുനീട്ടപ്പെടുകയോ ഭൂഗുരുത്വത്വരണവിധേയമായി താഴേക്കു വീഴുന്ന വസ്തുവിൻമേൽ മുകളിലേക്ക് ഏതെങ്കിലും ബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടുകയോ ചെയ്യുന്നില്ല. അതു വലിച്ചുനീട്ടപ്പെടാത്തതിനാൽ സ്പ്രിങ് ത്രാസിൽ രേഖപ്പെടുത്തപ്പെടുന്ന ഭാരം പൂജ്യമായിരിക്കും. ആ വസ്തു ഒരു മനുഷ്യനായിരുന്നുവെങ്കിൽ, അവളിൽ/അവനിൽ മുകളിലേക്കൊരു ബലം പ്രയോഗിക്കപ്പെടാത്തതിനാൽ അയാൾക്ക് ഭാരം അനുഭവപ്പെടുകയില്ല. ഇങ്ങനെ ഒരു വസ്തു, സ്വതന്ത്രമായ വീഴ്ചയിലാണെങ്കിൽ (Free fall) അത് ഭാരരഹിതമാണ്, ഈ പ്രതിഭാസത്തെ സാധാരണ ഭാരമില്ലായ്മ (weightlessness) എന്നു പറയുന്നു.

ഭൂമിയെ ചുറ്റിക്കറങ്ങുന്ന ഉപഗ്രഹത്തിലെ ഓരോ ഘടകത്തിനും ഭൂകേന്ദ്രത്തിലേക്ക് ഒരു ത്വരണം അനുഭവപ്പെടുന്നു. ഇത് ആ സ്ഥലത്തെ ഭൂഗുരുത്വ ത്വരണത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും. അതായത്, ഒരു ഉപഗ്രഹത്തിനുള്ളിലുള്ള എല്ലാ വസ്തുക്കളും താഴേക്ക് വീണുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന അവസ്ഥയിലാണ്. നമ്മൾ ഉയരത്തിൽനിന്ന് ഭൂമിയിലേക്കു പതിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നതുപോലെയാണിത്. ഇപ്രകാരം, മനുഷ്യവാഹിനിയായ ഒരു ഉപഗ്രഹത്തിന് ഉള്ളിലുള്ളവർക്ക് ഗുരുത്വാകർഷണം അനുഭവപ്പെടുന്നില്ല. നമ്മെ സംബന്ധിച്ച് ഗുരുത്വാകർഷണമാണ് ലംബദിശയെ നിർവചിക്കുന്നത്. അതുകൊണ്ടുതന്നെ അവർക്ക് തിരശ്ചീനമോ ലംബമോ ആയ ദിശകളൊന്നുമില്ല, എല്ലാ ദിശകളും ഒരുപോലെയായിരിക്കും. ഒരു ഉപഗ്രഹത്തിൽ ഒഴുകി നീങ്ങുന്ന ബഹിരാകാശ യാത്രികരുടെ ചിത്രങ്ങൾ ഈ വസ്തുത വ്യക്തമാക്കുന്നു.

ഗുരുത്വതരംഗങ്ങൾ (Gravitational Waves)

ആൽബർട്ട് ഐൻസ്റ്റൈൻ 1915ൽ മുന്നോട്ടുവച്ച പൊതുആപേക്ഷികതാസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ (General Theory of Relativtiy) സുപ്രധാനമായ ഒരു പ്രവചനമാണ് ഗുരുത്വതരംഗങ്ങൾ (Gravitational Waves). ഗുരുത്വാകർഷണത്തെ (Gravtiy) ഏറ്റവും തൃപ്തികരമായി വിശദീകരിക്കുന്ന ശാസ്ത്രസിദ്ധാന്തമാണ് പൊതുആപേക്ഷികതാ സിദ്ധാന്തം. ഈ സിദ്ധാന്തപ്രകാരം ഭാരമുള്ള ഒരു വസ്തുവിന് അതിനു ചുറ്റുമുള്ള സ്ഥലത്തിന്റെയും (space) സമയത്തിന്റെയും (time) ഘടനയെ മാറ്റാൻ കഴിയും. ഭാരമുള്ള വസ്തുക്കളുടെ ചലനം സ്ഥലകാലങ്ങളിൽ (space-time) ഓളങ്ങൾ സൃഷ്ടിക്കുന്നുവെന്നും ഈ സിദ്ധാന്തം പ്രവചിക്കുന്നു. മിക്കപ്പോഴും ഈ ഗുരുത്വതരംഗങ്ങൾ ഒരുതരത്തിലുമുള്ള നിരീക്ഷണങ്ങൾക്കും വഴങ്ങാത്ത അതിദുർബല പ്രതിഭാസങ്ങളാണ്. പക്ഷേ, അതീവഭാരമുള്ള വസ്തുക്കൾ അതിവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ ശക്തമായ ഗുരുത്വതരംഗങ്ങൾ പുറപ്പെടുവിക്കും. 130 കോടി പ്രകാശവർഷങ്ങൾക്കകലെ രണ്ടു തമോഗർത്തങ്ങൾ (Black holes) കൂട്ടിയിടിച്ചപ്പോൾ പുറപ്പെടുവിച്ച ഗുരുത്വതരംഗങ്ങൾ 2015 സെപ്തംബർ 14 ന് അമേരിക്കയിലെ ലൈഗോ (LIGO) നിരീക്ഷണശാലകൾ കണ്ടെത്തിയത് ജ്യോതിശാസ്ത്രത്തിൽ ഒരു പുതിയ ശാഖയുടെ തുടക്കം കുറിച്ചു. ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലെ 2017 വർഷത്തെ നോബൽസമ്മാനം ലൈഗോയുടെ മുഖ്യശിൽപ്പികളായ അമേരിക്കൻ ശാസ്ത്രജ്ഞർ റെയ്നർ വൈസ്സ് (Rainer Weiss), ബാരി സി. ബാരിഷ് (Barry C. Barish), കിപ് എസ്. തോൺ (Kip S. Thorne) എന്നിവർ പങ്കുവച്ചു.

ഗുരുത്വതരംഗങ്ങൾ വൈദ്യുതകാന്തികതരംഗങ്ങളിൽ നിന്നു തീർത്തും വ്യത്യസ്തമാണ്. ഗുരുത്വതരംഗങ്ങളുടെ ശക്തമായ സ്രോതസ്സുകളിൽ പലതും ഒരുതരത്തിലുള്ള പ്രകാശവും പുറപ്പെടുവിക്കുകയില്ല. ഇത്തരം പ്രതിഭാസങ്ങളെ നിരീക്ഷിക്കാനുള്ള ഒരേയൊരു മാർഗമാണ് ഗുരുത്വതരംഗങ്ങൾ. അതുകൊണ്ടു തന്നെ പ്രപഞ്ചത്തിലേക്കുള്ള ഒരു പുതിയ ജാലകമാണ് ഈ നൂതന ശാസ്ത്രശാഖ തുറന്നുതരുന്നത്. ലൈഗോയും യൂറോപ്യൻ നിരീക്ഷണശാലയായ വിർഗോയും ഒരു അന്താരാഷ്ട്ര ശാസ്ത്രകൂട്ടായ്മയുടെ ഭാഗമാണ്. ഈ കൂട്ടായ്മയുടെ ഭാഗമായി ഇന്ത്യയിലും ഒരു ലൈഗോ നിരീക്ഷണശാല സ്ഥാപിക്കാനുള്ള ശ്രമത്തിലാണ് ഇന്ത്യൻ ശാസ്ത്രസംഘം. ഗുരുത്വതരംഗങ്ങളുടെ സൈദ്ധാന്തികപഠനത്തിൽ നിർണായക സംഭാവനകൾ നൽകിയ ഇന്ത്യൻ ശാസ്ത്രസമൂഹത്തിന് ലൈഗോ ഇന്ത്യ പ്രവർത്തനസജ്ജമാകുന്നതോടെ ഗുരുത്വതരംഗങ്ങളുടെ പ്രായോഗികപഠനത്തിലും സുപ്രധാന പങ്കുവഹിക്കാൻ കഴിയുമെന്നു പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു.

സംഗ്രഹം

1. ന്യൂട്ടന്റെ സാർവിക ഗുരുത്വനിയമം പ്രസ്താവിക്കുന്നത് r അകലത്തിലിരിക്കുന്ന m_1, m_2 എന്നീ മാസുകൾ തമ്മിലുള്ള ഗുരുത്വബലത്തിന്റെ അളവ് $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ ആയിരിക്കുമെന്നാണ്. ഇതിൽ, G സാർവിക ഗുരുത്വസ്ഥിരാങ്കവും $6.672 \quad 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} അതിന്റെ മൂല്യവുമാണ്.

2. m മാസുള്ള ഒരു വസ്തുവിൽ M_1, M_2, ….M_n മാസുകൾ പ്രയോഗിക്കുന്ന പരിണത ഗുരുത്വബലം കാണേണ്ട സന്ദർഭങ്ങളിൽ, സൂപ്പർപൊസിഷൻ തത്വം ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഗുരുത്വനിയമമുപയോഗിച്ച് M_1, M_2, ….M_n എന്നീ മാസുകൾ കൊണ്ടുള്ള ബലങ്ങൾ F_1, F_2, ….F_n എന്നിങ്ങനെയാണെന്നു കരുതുക. സൂപ്പർപൊസിഷൻ തത്വത്തിൽ ഓരോ ബലവും സ്വതന്ത്രമായും മറ്റു വസ്തുക്കളുടെ സ്വാധീനമില്ലാതെയുമാണ് പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നത്. സദിശസങ്കലനം വഴി പരിണതബലം F_R ലഭിക്കുന്നു.

$$F_R = F_1 + F_2 + \ldots\ldots + F_n = \sum_{i-1}^{n} F_i$$

ഇതിൽ ഉപയോഗിച്ച Σ എന്ന പ്രതീകം സങ്കലനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

3. കെപ്ലറുടെ ഗ്രഹചലനനിയമങ്ങൾ പ്രസ്താവിക്കുന്നത്

(a) എല്ലാ ഗ്രഹങ്ങളും ദീർഘവൃത്താകാര പരിക്രമണപാതകളിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നു, ഈ ദീർഘ വൃത്തപാതയുടെ ഒരു ഫോക്കസിലാണ് സൂര്യനുള്ളത്.

(b) സൂര്യനിൽനിന്ന് ഗ്രഹത്തിലേക്കു വരക്കുന്ന ആരസദിശം, തുല്യസമയങ്ങളിൽ തുല്യ പരപ്പളവ് ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഗ്രഹത്തിന്മേൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ഗുരുത്വബലം കേന്ദ്രീയ ബലമാണെന്നും അതിനാൽ കോണീയ ആക്കം സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നുവെന്നുമുള്ള വസ്തുതയാണ് ഇതിന്റെ പിൻബലം.

(c) ഒരു ഗ്രഹത്തിന്റെ പരിക്രമണകാലത്തിന്റെ വർഗം ദീർഘവൃത്തപാതയുടെ സെമിമേജർ അക്ഷത്തിന്റെ ക്യൂബിന് നേരനുപാതത്തിലാണ്. ഗ്രഹത്തിന്റെ പരിക്രമണകാലം T യും സൂര്യനു ചുറ്റുമുള്ള ഗ്രഹത്തിന്റെ വൃത്താകാര പരിക്രമണപാതയുടെ ആരം R ഉം തമ്മിൽ ബന്ധിപ്പിക്കുന്നത് $T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G M_s}\right) R^3$

എന്നാണ്. ഇതിൽ M_s സൂര്യന്റെ മാസ് ആണ്. മിക്ക ഗ്രഹങ്ങൾക്കും സൂര്യനു ചുറ്റും ഏതാണ്ട് വൃത്താകാരമായ പരിക്രമണപഥങ്ങളാണുള്ളത്. ദീർഘവൃത്താകാര പരിക്രമണപഥങ്ങളെ സംബന്ധിച്ച് മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമവാക്യം സാധുവാകുന്നത് R നു പകരം സെമിമേജർ അക്ഷം കൊടുക്കുമ്പോഴാണ്.

4. ഗുരുത്വത്വരണം

(a) ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽനിന്ന് h ഉയരത്തിൽ

$$g(h) = \frac{G M_E}{(R_E + h)^2}$$

$$\approx \frac{G M_E}{R_E^2}\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \quad h << R_E \text{ ആകുമ്പോൾ}$$

$$g(h) = g(0)\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \quad \text{ഇവിടെ } g(0) = \frac{G M_E}{R_E^2}$$

$h << R_E$ ആകുമ്പോൾ

(b) ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽനിന്ന് d ആഴത്തിൽ

$$g(d) = \frac{G M_E}{R_E^2}\left(1 \quad \frac{d}{R_E}\right) = g(0)\left(1 \quad \frac{d}{R_E}\right)$$

5. ഗുരുത്വാകർഷണബലം ഒരു സംരക്ഷിതബലം (Conservative force) ആയതിനാൽ, ഒരു സ്ഥിതികോർജഫലനം നിർവചിക്കാവുന്നതാണ്. r ദൂരം അകലെയിരിക്കുന്ന രണ്ടു വസ്തുക്കളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഗുരുത്വസ്ഥിതികോർജം

$$V = \frac{G m_1 m_2}{r}$$

ഇതിൽ $r \to \infty$ ആകുമ്പോൾ V പൂജ്യമായെടുക്കുന്നു. കണികകളുടെ ഒരു വ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ സ്ഥിതികോർജം ഓരോ ജോടി കണങ്ങളുടെയും സ്ഥിതികോർജങ്ങളുടെ തുകയായിരിക്കും, അതിലെ ഓരോ ജോടിയെയും മുകളിലെ സമവാക്യത്തിന്റെ രൂപത്തിലുള്ള പദങ്ങൾ കൊണ്ട് പ്രതിനിധീകരിക്കാവുന്നതാണ്. ഈ നിർദേശം സൂപ്പർപൊസിഷൻ തത്വം അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ളതാണ്.

6. M മാസുള്ള ഭീമാകാരമായ ഒരു വസ്തുവിന്റെ സമീപം m മാസും v വേഗവുമുള്ള ഒരു കണത്തെ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഒരു ഒറ്റപ്പെട്ട വ്യൂഹം ഉണ്ടെങ്കിൽ, ആ കണത്തിന്റെ ആകെ യാന്ത്രികോർജം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതായിരിക്കും.

$$E \quad \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{r}$$

അതായത്, ആകെ യാന്ത്രികോർജം എന്നത് ഗതികോർജത്തിന്റെയും സ്ഥിതികോർജത്തിന്റെയും തുകയാണ്. ആകെ ഊർജം ഒരു ചലനസ്ഥിര മൂല്യമാണ്.

7. $M >> m$ ആധാരമാക്കി a ആരമുള്ള ഒരു വൃത്താകാര പരിക്രമണപാതയിലൂടെ m സഞ്ചരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, (ഇതിൽ $M >> m$) ഈ വ്യൂഹത്തിന്റെ ആകെ ഊർജം

$$E = -\frac{G\,M\,m}{2a}$$

മുകളിൽ അഞ്ചാമത്തെ പോയന്റിൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന പ്രകാരം സ്ഥിതികോർജത്തിൽ സൗകര്യപൂർവം ഒരു സ്ഥിരാങ്കം തിരഞ്ഞെടുത്താണ് ഇതെഴുതുന്നത്. ഏതൊരു ബന്ധിതവ്യൂഹത്തിനും ആകെ ഊർജം നെഗറ്റീവാണ്. അതായത്, ദീർഘവൃത്ത പരിക്രമണപഥം പോലെ സഞ്ചാരപാത സംവൃതമാകുന്ന ഒരു വ്യൂഹത്തിന് ഗതിക-സ്ഥിതികോർജങ്ങൾ

$$K = \frac{G\,M\,m}{2a}$$

$$V = -\frac{G\,M\,m}{a}$$

8. ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽനിന്നുള്ള പലായനവേഗം

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E}$$

അതിന്റെ മൂല്യം 11.2 km s^{-1}

9. ഗോളീയ സമമിതിയിൽ മാസ് വിതരണം ചെയ്യപ്പെട്ട ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഷെല്ലിനോ ഘനഗോളത്തിനോ പുറത്താണ് ഒരു കണിക സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതെങ്കിൽ, ഗോളത്തിന്റെ മാസ് മുഴുവൻ കേന്ദ്രത്തിൽ കേന്ദ്രീകരിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത് പോലെയാണ് അത് ആ കണികയെ ആകർഷിക്കുന്നത്.

10. ഏകസമാനമായ ഒരു ഗോള ഷെല്ലിനുള്ളിലാണ് ഒരു കണികയുള്ളതെങ്കിൽ അതിന്മേലുള്ള ഗുരുത്വാകർഷണബലം പൂജ്യമായിരിക്കും. ഒരു കണിക ഒരു ഏകസമാന ഘനഗോളത്തിനുള്ളിലാണെങ്കിൽ, കണികയിന്മേൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ബലം ഗോളത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലേക്കായിരിക്കും. ഈ ബലം പ്രയോഗിക്കുന്നത് ആ കണികക്ക് ഉൾഭാഗത്തുള്ള ഗോളീയ മാസ് ആയിരിക്കും.

11. ഒരു ഭൂസ്ഥിര ഉപഗ്രഹം സഞ്ചരിക്കുന്നത് ഭൂമധ്യരേഖാതലത്തിലുള്ള ഭൂകേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഏകദേശം 4.22×10^4 km അകലത്തിലുള്ള വൃത്താകാര പരിക്രമണപാതയിലൂടെയാണ്.

ഭൗതിക അളവ്	പ്രതീകം	ഡൈമെൻഷൻ	യൂണിറ്റ്	കുറിപ്പ്
ഗുരുത്വ സ്ഥിരാങ്കം	G	$[M^{-1} L^3 T^{-2}]$	$N\ m^2\ kg^{-2}$	6.67×10^{-11}
ഗുരുത്വ സ്ഥിതികോർജം	$V(r)$	$[M L^2 T^{-2}]$	J	$-\frac{GMm}{r}$ (അദിശം)
ഗുരുത്വ പൊട്ടൻഷ്യൽ	$U(r)$	$[L^2 T^{-2}]$	$J\ kg^{-1}$	$-\frac{GM}{r}$ (അദിശം)
ഗുരുത്വ തീവ്രത	**E** അഥവാ **g**	$[L T^{-2}]$	$m\ s^{-2}$	$\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ (സദിശം)

വിചിന്തന വിഷയങ്ങൾ

1. മറ്റൊരു വസ്തുവിന്റെ ഗുരുത്വാകർഷണ സ്വാധീനംകൊണ്ട് ഒരു വസ്തുവിനുണ്ടാകുന്ന ചലനം പരിഗണിച്ചാൽ താഴെ കൊടുത്ത അളവുകൾ സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നവയാണ്.

(a) കോണീയ ആക്കം

(b) ആകെ യാന്ത്രികോർജം

രേഖീയ ആക്കം സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നുമില്ല.

2. കോണീയ ആക്കത്തിന്റെ സംരക്ഷണം കെപ്ലറുടെ രണ്ടാം നിയമത്തിലേക്കു നയിക്കുന്നു. എന്നിരുന്നാലും, ഇത് ഗുരുത്വാകർഷണത്തിന്റെ വിപരീതവർഗനിയമത്തിന് പ്രത്യേകമായല്ല. ഏത് കേന്ദ്രീയ ബലത്തിനും ഇത് ബാധകമാണ്.

3. കെപ്ലറുടെ മൂന്നാംനിയമത്തിൽ (സമവാക്യം 8.1 കാണുക) $T^2 = K_S R^3$. വൃത്താകൃതിയിലുള്ള പരിക്രമണങ്ങളിലുള്ള എല്ലാ ഗ്രഹങ്ങൾക്കും K_S എന്ന സ്ഥിരാങ്കം ഒരുപോലെയായിരിക്കും.
ഇത് ഭൂമിയെ ചുറ്റിക്കറങ്ങുന്ന ഉപഗ്രഹങ്ങൾക്കും ബാധകമാണ്. [സമവാക്യം (8.38)]
4. ഒരു ബഹിരാകാശയാത്രിക ബഹിരാകാശപേടകത്തിൽ ഭാരമില്ലായ്മ അനുഭവിക്കുന്നു. ബഹിരാകാശത്തെ ആ സ്ഥാനത്ത് ഗുരുത്വബലം കുറവാണ് എന്നതുകൊണ്ടല്ല ഇങ്ങനെ തോന്നുന്നത്. ബഹിരാകാശയാത്രികയും ഉപഗ്രഹവും ഭൂമിയിലേക്കുള്ള സ്വതന്ത്രപതനത്തിലാണ് എന്നതുകൊണ്ടാണ്.
5. r അകലത്തിലുള്ള രണ്ട് വസ്തുക്കളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടുള്ള ഗുരുത്വസ്ഥിതികോർജം $V = -\dfrac{G m_1 m_2}{r}$ + ഒരു സ്ഥിരാങ്കം. ഈ സ്ഥിരാങ്കത്തിന് ഏതു വിലയും നൽകാം. ഏറ്റവും ലളിതമായ വില പൂജ്യം തന്നെയാണ്. ഈ വില സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, $r \to \infty$ ആകുമ്പോൾ $V \to 0$. ഗുരുത്വഊർജത്തിന്റെ പൂജ്യത്തിന്റെ സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതും സ്ഥിതികോർജത്തിന്റെ സ്ഥിരാങ്കം തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നതും സമാനമാണ്. സ്ഥിരാങ്കത്തിന്റെ തെരഞ്ഞെടുപ്പു വഴി ഗുരുത്വബലം മാറ്റപ്പെടുന്നില്ലെന്ന് മനസ്സിലാക്കുക.
6. ഒരു വസ്തുവിന്റെ മൊത്തം യാന്ത്രികോർജം അതിന്റെ ഗതികോർജത്തിന്റെയും (എപ്പോഴും പോസിറ്റീവ്) സ്ഥിതികോർജത്തിന്റെയും ആകെത്തുകയാണ്. അനന്തതയെ ആധാരമാക്കുമ്പോൾ (അതായത് അനന്തതയിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥിതികോർജം പൂജ്യമാണെന്ന് സങ്കൽപിക്കുകയാണെങ്കിൽ), ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഗുരുത്വാകർഷണസ്ഥിതികോർജം നെഗറ്റീവാണ്. ഒരു ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ ആകെ ഊർജം നെഗറ്റീവാണ്.
7. സ്ഥിതികോർജത്തിന് സാധാരണ കണ്ടുവരുന്ന ഗണിതാവിഷ്കാരമായ mgh യഥാർഥത്തിൽ പോയിന്റ് 6 ൽ ചർച്ചചെയ്ത ഗുരുത്വസ്ഥിതികോർജത്തിലെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ ഒരു ഏകദേശനമാണ് (approximation).
8. രണ്ടു കണികകൾ തമ്മിലുള്ള ഗുരുത്വബലം കേന്ദ്രീയമാണെങ്കിലും പരിമിതമായ രണ്ടു ദൃഢവസ്തുക്കൾ തമ്മിലുള്ള ബലം അവയുടെ ഗുരുത്വകേന്ദ്രങ്ങളെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയിലൂടെയാവണമെന്നില്ല. ഗോളീയ സമമിതിയുള്ള ഒരു വസ്തുവിനെ സംബന്ധിച്ച് അതിനു പുറത്തുള്ള ഒരു വസ്തുവിന്മേലുള്ള ബലം അതിന്റെ മൊത്തം മാസും കേന്ദ്രത്തിൽ കേന്ദ്രീകരിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്ന തരത്തിലാണ്.
9. ഗോളീയമായ ഒരു ഷെല്ലിനുള്ളിലെ ഒരു കണത്തിന്മേലുള്ള ഗുരുത്വബലം പൂജ്യമാണ്. അകത്തുള്ള കണികകളിൽ പുറത്തുള്ള മറ്റു വസ്തുക്കൾ ഗുരുത്വാകർഷണബലം പ്രയോഗിക്കുന്നത് (വൈദ്യുത ബലങ്ങളെ പ്രതിരോധിക്കുന്ന ലോഹഷെല്ലിൽനിന്നു വ്യത്യസ്തമായി) ഈ ഷെൽ തടയുന്നില്ല. ഗുരുത്വാകർഷണത്തിൽ നിന്ന് മറച്ചുപിടിക്കൽ (gravitational shielding) സാധ്യമല്ല.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

8.1 ചുവടെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരമെഴുതുക.

(a) ഒരു പൊള്ളയായ ചാലകത്തിനുള്ളിൽ വച്ചാൽ, വൈദ്യുതബലങ്ങളിൽനിന്ന് ഒരു ചാർജിനെ മറച്ചുപിടിക്കാൻ കഴിയും. പൊള്ളയായ ഗോളത്തിനകത്തോ സമാന ചുറ്റുപാടിലോ ഉള്ള ഒരു വസ്തുവിനെ സമീപസ്ഥദ്രവ്യങ്ങളുടെ ഗുരുത്വാകർഷണസ്വാധീനത്തിൽനിന്ന് മറക്കാൻ കഴിയുമോ?

(b) ഭൂമിയെ ചുറ്റുന്ന ഒരു ചെറിയ ബഹിരാകാശവാഹനത്തിനകത്തുള്ള ഒരു ബഹിരാകാശയാത്രികക്ക് ഗുരുത്വാകർഷണം കണ്ടെത്താൻ കഴിയില്ല. ഭൂമിക്കുചുറ്റും പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ബഹിരാകാശ നിലയം ഏറെ വലുപ്പത്തിലുള്ളതാണെങ്കിൽ, ഗുരുത്വാകർഷണം കണ്ടെത്താനാകുമെന്ന് യാത്രികക്ക് പ്രതീക്ഷിക്കാമോ?

(c) ഭൂമിക്കുമേൽ സൂര്യനുണ്ടാക്കുന്നതും ചന്ദ്രനുണ്ടാക്കുന്നതുമായ ഗുരുത്വാകർഷണബലങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്താൽ, ചന്ദ്രന്റെ ഗുരുത്വാകർഷണവലിവിനേക്കാൾ വലുതാണ് സൂര്യന്റെ വലിവ്. (തുടർന്നുള്ള പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങളിൽ ലഭ്യമായ ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച് നിങ്ങൾക്ക് ഇത് സ്വയം പരിശോധിക്കാനാകും). എന്നിരുന്നാലും, ചന്ദ്രന്റെ ഗുരുത്വാകർഷണവലിവുകൊണ്ടുള്ള വേലിയേറ്റ-വേലിയിറക്ക സ്വാധീനങ്ങൾ സൂര്യന്റേതിനേക്കാൾ കൂടുതലാണ്. എന്തുകൊണ്ട്?

8.2 ശരിയായത് തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

(a) ഉയരം വർധിക്കുന്നതിനനുസരിച്ച് ഗുരുത്വാകർഷണംമൂലം ഉണ്ടാകുന്ന ത്വരണം വർധിക്കുന്നു/ കുറയുന്നു.

(b) ആഴം വർധിക്കുന്നതിനനുസരിച്ച് ഗുരുത്വാകർഷണം മൂലം ഉണ്ടാകുന്ന ത്വരണം വർധിക്കുന്നു/ കുറയുന്നു. (ഏകസാന്ദ്രതയുള്ള ഒരു ഗോളമായി ഭൂമിയെ പരിഗണിക്കുക).

(c) ഗുരുത്വാകർഷണംമൂലം ഉണ്ടാകുന്ന ത്വരണം ഭൂമിയുടെ/വസ്തുവിന്റെ മാസിൽ നിന്നു സ്വതന്ത്രമാണ്.

(d) ഭൂമിയുടെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് r_2, r_1 അകലങ്ങളിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടക്കുള്ള

സ്ഥിതികോർജവ്യത്യാസത്തിന് $mg(r_2 \quad r_1)$ എന്ന സമവാക്യത്തേക്കാൾ കൂടുതൽ/കുറവ് കൃത്യതയുള്ള താണ് $GMm(1/r_2 \quad 1/r_1)$ എന്നത്.

8.3 ഭൂമിയുടേതിനേക്കാൾ രണ്ടിരട്ടി വേഗത്തിൽ സൂര്യനെ ചുറ്റുന്ന ഒരു ഗ്രഹം ഉണ്ടെന്നു കരുതുക. ഭൂമിയുടേതിനെ അപേക്ഷിച്ച് അതിന്റെ പരിക്രമണപഥത്തിന്റെ വലുപ്പം എന്തായിരിക്കും?

8.4 വ്യാഴത്തിന്റെ ഉപഗ്രഹങ്ങളിൽ ഒന്നായ Io യുടെ പരിക്രമണകാലം 1.769 ദിവസവും, പരിക്രമണപഥത്തിന്റെ ആരം 4.22×10^8 മീറ്ററുമാണ്. വ്യാഴത്തിന്റെ മാസ് സൂര്യന്റെ മാസിന്റെ ഏതാണ്ട് ആയിരത്തിലൊന്നായിരിക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

8.5 ഒരു സൗരമാസുള്ള 2.5×10^{11} നക്ഷത്രങ്ങളെ നമ്മുടെ ഗാലക്സി ഉൾക്കൊള്ളുന്നതായി കരുതുക. ഗാലക്സിയുടെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് 50,000 പ്രകാശവർഷം അകലെയുള്ള ഒരു നക്ഷത്രം ഒരു പരിക്രമണം പൂർത്തിയാക്കാനെത്ര സമയമെടുക്കും? ക്ഷീരപഥത്തിന്റെ വ്യാസം 10^5 ly എന്നെടുക്കുക.

8.6 ശരിയായത് തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

(a) അനന്തതയിലെ സ്ഥിതികോർജം പൂജ്യമായാൽ, പരിക്രമണം ചെയ്യുന്ന ഒരു ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ ആകെ ഊർജം അതിന്റെ ഗതികോർജത്തിന്റെ/സ്ഥിതികോർജത്തിന്റെ നെഗറ്റീവാണ്.

(b) ഭൂമിയുടെ ഗുരുത്വാകർഷണസ്വാധീനത്തിൽനിന്ന് പുറത്തേക്ക് ഒരു പരിക്രമണ ഉപഗ്രഹത്തെ വിക്ഷേപിക്കാൻ ആവശ്യമായ ഊർജം, ഭൂമിയുടെ സ്വാധീനത്തിനപ്പുറത്ത് അതേ ഉയരത്തിലേക്ക് (ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ) ഒരു സ്ഥിരവസ്തുവിനെ എത്തിക്കുന്നതിന് ആവശ്യമായ ഊർജത്തേക്കാൾ കൂടുതലാണ്/കുറവാണ്.

8.7 ഭൂമിയിൽനിന്ന് ഒരു വസ്തുവിന്റെ പലായനവേഗത്തെ സ്വാധീനിക്കുന്നത്
(എ) വസ്തുവിന്റെ മാസ്, (ബി) അതിനെ വിക്ഷേപിച്ച സ്ഥലം, (സി) വിക്ഷേപണദിശ,
(ഡി) വസ്തു വിക്ഷേപിക്കപ്പെട്ട സ്ഥലത്തിന്റെ സമുദ്രനിരപ്പിൽനിന്നുള്ള ഉയരം

8.8 വളരെ ദീർഘവൃത്താകാരമായ പരിക്രമണപഥത്തിലൂടെ ഒരു ധൂമകേതു സൂര്യനെ പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നു. ധൂമകേതുവിന് അതിന്റെ പരിക്രമണപാതയിലുടനീളം സ്ഥിരമായത് ഏതൊക്കെ?
(എ) രേഖീയ വേഗം, (ബി) കോണീയവേഗം, (സി) കോണീയ സംവേഗം, (ഡി) ഗതികോർജം, (ഇ) സ്ഥിതികോർജം, (എഫ്) ആകെ ഊർജം

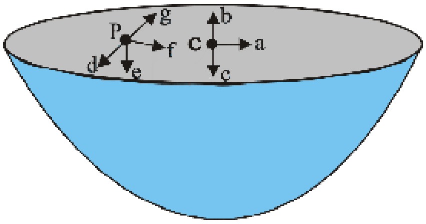
ധൂമകേതു സൂര്യന് വളരെ അടുത്തെത്തുമ്പോൾ സംഭവിക്കാവുന്ന അതിന്റെ മാസ് നഷ്ടം അവഗണിക്കുക.

8.9 താഴെ പറയുന്ന ലക്ഷണങ്ങളിൽ ഏതാണ് ശൂന്യാകാശത്തിൽ ഒരു ബഹിരാകാശയാത്രികന് ഉണ്ടാകാൻ സാധ്യതയുള്ളത്? (എ) വീർത്ത കാലടി, (ബി) വീർത്ത മുഖം, (സി) തലവേദന, (ഡി) ദിശാപ്രശ്നം.

8.10 സമസാന്ദ്രതയുള്ളതും അർധഗോളാകൃതിയിലുള്ളതുമായ ഒരു ഷെല്ലിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലെ ഗുരുത്വാകർഷണ തീവ്രതക്ക് ഏത് അമ്പടയാളം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള ദിശയാണുള്ളത് (ചിത്രം 8.12 കാണുക).
(i) a, (ii) b, (iii) c, (iv) 0

8.11 മുകളിൽ കൊടുത്ത പ്രശ്നത്തിൽ, P എന്ന ഒരു ബിന്ദുവിലെ ഗുരുത്വ തീവ്രതയുടെ ദിശാസൂചകം ഏത് അമ്പടയാളം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കപ്പെടുന്നു? (i) d, (ii) e, (iii) f, (iv) g.

8.12 ഒരു റോക്കറ്റ് ഭൂമിയിൽനിന്ന് സൂര്യനിലേക്കു വിക്ഷേപിക്കുന്നു. റോക്കറ്റിന്മേൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ഗുരുത്വബലം പൂജ്യമാകുന്നത് ഭൂകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് എത്ര അകലത്തിലാണ്? സൂര്യന്റെ മാസ് = $2 \quad 10^{30}$ kg, ഭൂമിയുടെ മാസ് = 6×10^{24} kg. മറ്റു ഗ്രഹങ്ങളുടെ സ്വാധീനങ്ങളെ അവഗണിക്കുക (പരിക്രമണ ആരം = $1.5 \quad 10^{11}$ m).



ചിത്രം 8.12

8.13 നിങ്ങൾ എങ്ങനെയാണ് 'സൂര്യനെ തൂക്കിനോക്കുന്നത്', അതായത് അതിന്റെ മാസ് കണക്കാക്കുന്നത്? സൂര്യനു ചുറ്റുമുള്ള ഭൂമിയുടെ ശരാശരി പരിക്രമണ ആരം 1.5×10^8 കിലോമീറ്ററാണ്.

8.14 ഭൗമവർഷത്തിന്റെ ഏതാണ്ട് 29.5 മടങ്ങു വരും ഒരു ശനിവർഷം. ഭൂമി സൂര്യനിൽനിന്ന് 1.50×10^8 കിലോമീറ്റർ അകലെയാണെങ്കിൽ ശനിയിലേക്ക് സൂര്യനിൽനിന്നുള്ള ദൂരം എത്രയാണ്?

8.15 ഒരു വസ്തുവിന് ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽ 63 N ഭാരമുണ്ട്. ആ വസ്തു ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിനു മുകളിൽ ഭൂമിയുടെ ആരത്തിന്റെ പകുതി ഉയരത്തിലിരിക്കുകയാണെങ്കിൽ അതിൽ ഭൂമി പ്രയോഗിക്കുന്ന ഗുരുത്വബലം എന്തായിരിക്കും?

8.16 ഭൂമിയെ ഏകസാന്ദ്രതയുള്ള ഒരു ഗോളമായി കണക്കാക്കിയാൽ, അതിന്റെ ഉപരിതലത്തിൽ 250 N ഭാരമുള്ള ഒരു വസ്തുവിന് ഭൂമിയുടെ ആരത്തിന്റെ പകുതി ദൂരം ആഴത്തിലേക്കു പോയാൽ എന്തു ഭാരമുണ്ടായിരിക്കും?

8.17 ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽനിന്ന് 5 km s^{-1} വേഗത്തിൽ ഒരു റോക്കറ്റ് ലംബമായി വിക്ഷേപിക്കുന്നു. ഭൂമിയിലേക്കു മടങ്ങിവരുന്നതിനു മുൻപ് റോക്കറ്റിന് ഭൂമിയിൽ നിന്ന് എത്ര അകലത്തിലേക്കു പോകാനാകും? [ഭൂമിയുടെ മാസ് = $6.0 \quad 10^{24}$ kg; ഭൂമിയുടെ ശരാശരി ആരം = $6.4 \quad 10^6$ m; $G = 6.67 \quad 10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$].

8.18 ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽ ഒരു വസ്തുവിന്റെ പലായനവേഗം 11.2 km s^{-1} ആണ്. ഇതിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങ് വേഗത്തിൽ ഒരു വസ്തുവിനെ വിക്ഷേപിക്കുന്നു. ഭൂമിയിൽനിന്ന് വളരെ അകലെയാകുമ്പോൾ ആ വസ്തുവിന്റെ വേഗം എന്തായിരിക്കും? സൂര്യന്റെയും മറ്റു ഗ്രഹങ്ങളുടെയും സാന്നിധ്യം അവഗണിക്കുക.

8.19 ഭൗമോപരിതലത്തിൽനിന്ന് 400 കിലോമീറ്റർ ഉയരത്തിൽ ഒരു ഉപഗ്രഹം ഭൂമിയെ ചുറ്റിക്കറങ്ങുന്നു. ഭൂമിയുടെ ഗുരുത്വാകർഷണബലത്തിന് പുറത്തേക്ക് ഉപഗ്രഹത്തെ വിക്ഷേപിക്കാൻ റോക്കറ്റിന്മേൽ എത്രമാത്രം ഊർജം ചെലവാക്കണം? [സാറ്റലൈറ്റിന്റെ മാസ് = 200 kg, ഭൂമിയുടെ മാസ് = $6.0 \ 10^{24}$ kg, = $6.4 \quad 10^6$ m; $G = 6.67 \quad 10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$].

8.20 ഒരു സോളാർ മാസുള്ള (= 2×10^{30} kg) രണ്ടു നക്ഷത്രങ്ങൾ നേർക്കുനേരെ കൂട്ടിയിടിക്കുന്നതിനായി പരസ്പരം അടുക്കുന്നു. അവ പരസ്പരം 10^9 km അകലെയാകുമ്പോൾ, അവയുടെ വേഗം അവഗണിക്കാവുന്നതാണ്. അവ കൂട്ടിയിടിക്കുന്ന വേഗം എന്തായിരിക്കും? ഓരോ നക്ഷത്രത്തിന്റെയും ആരം 10^4 km ആണ്. നക്ഷത്രങ്ങൾ കൂട്ടിയിടിക്കുന്നതുവരെ അവ ആകൃതിവ്യതിയാനം ഉണ്ടാകുന്നില്ലെന്നു കരുതുക. (G യുടെ അറിയപ്പെടുന്ന മൂല്യം ഉപയോഗിക്കുക)

8.21 100 kg മാസും 0.10 m ആരവുമുള്ള രണ്ടു വലിയ ഗോളങ്ങൾ ഒരു തിരശ്ചീനമേശയിൽ 1.0 m അകലത്തിൽ വച്ചിരിക്കുന്നു. ഗോളങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന രേഖയുടെ മധ്യത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഗുരുത്വബലവും പൊട്ടൻഷ്യലും എന്തായിരിക്കും? ആ സ്ഥാനത്തുവച്ചിട്ടുള്ള ഒരു വസ്തു സന്തുലിതാവസ്ഥയിൽ ആണോ? ആണെങ്കിൽ, സന്തുലിതാവസ്ഥ സ്ഥിരമോ അസ്ഥിരമോ?

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

8.22 നിങ്ങൾ പഠിച്ചതുപോലെ, ഒരു ഭൂസ്ഥിര ഉപഗ്രഹം ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽനിന്ന് ഏകദേശം 36,000 km ഉയരത്തിൽ ഭൂമിയെ പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നു. ഈ ഉപഗ്രഹത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത് ഭൂമിയുടെ ഗുരുത്വാകർഷണ പൊട്ടൻഷ്യൽ എന്തായിരിക്കും? (അനന്തതയിലെ സ്ഥിതികോർജം പൂജ്യം എന്നെടുക്കുക). ഭൂമിയുടെ മാസ് = 6.0×10^{24} kg, ആരം 6400 km.

8.23 സൂര്യന്റെ 2.5 മടങ്ങ് മാസുള്ള ഒരു നക്ഷത്രം 12 km വലുപ്പത്തിലേക്ക് ചുരുങ്ങുകയും 1.2revs^{-1} വേഗത്തോടെ കറങ്ങുകയും ചെയ്യുന്നു. (ഇത്തരത്തിൽ വളരെ ഞെരുങ്ങിയ (compact) നക്ഷത്രങ്ങളെ ന്യൂട്രോൺ നക്ഷത്രങ്ങൾ (neutron stars) എന്നു വിളിക്കുന്നു, ചില നക്ഷത്രവസ്തുക്കളായ (stellar objects) പൾസറുകൾ (pulsars) ഈ വിഭാഗത്തിൽപ്പെടുന്നു). അതിന്റെ മധ്യരേഖാഭാഗത്ത് വച്ചിട്ടുള്ള ഒരു വസ്തു ഗുരുത്വാകർഷണത്താൽ അതിന്റെ ഉപരിതലത്തിൽത്തന്നെ നിൽക്കുമോ? (സൂര്യന്റെ പിണ്ഡം = $2 \quad 10^{30}$ kg)

8.24 ചൊവ്വയിൽ ഒരു ബഹിരാകാശവാഹനം എത്തിച്ചേർന്നിരിക്കുന്നു. സൗരയൂഥത്തിനു പുറത്തേക്ക് അതിനെ എത്തിക്കാൻ ചെലവഴിക്കേണ്ടിവരുന്ന ഊർജം എത്ര? [ബഹിരാകാശവാഹനത്തിന്റെ മാസ് = 1000 kg സൂര്യന്റെ മാസ് = $2 \quad 10^{30}$ kg; ചൊവ്വയുടെ മാസ് = 6.4×10^{23} kg; ചൊവ്വയുടെ ആരം = 3395 km; ചൊവ്വയുടെ പരിക്രമണപാതയുടെ ആരം = 2.28×10^8 km; $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}].

8.25 ചൊവ്വയുടെ ഉപരിതലത്തിൽനിന്ന് കുത്തനെ 2 km s^{-1} വേഗത്തിൽ ഒരു റോക്കറ്റ് വിക്ഷേപിക്കുന്നു. ചൊവ്വയിലെ അന്തരീക്ഷപ്രതിരോധം കാരണം അതിന്റെ ആദ്യ ഊർജത്തിന്റെ 20% നഷ്ടപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ, എത്ര ദൂരം സഞ്ചരിച്ചാണ് റോക്കറ്റ് ഉപരിതലത്തിൽ തിരിച്ചെത്തുക? [ചൊവ്വയുടെ മാസ് = 6.4×10^{23} kg; ചൊവ്വയുടെ ആരം = 3395 km; $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N $m^2 kg^{-2}$].

ഉത്തരസൂചിക

അധ്യായം 2

2.1 (a) 10^{6}; (b) 1.5×10^4; (c) 5 ; (d) 11.3, 1.13×10^4.

2.2 (a) 10^7; (b) 10^{-16} ; (c) 3.9×10^1 ; (d) 6.67×10^{-8}.

2.5 500

2.6 (c)

2.7 0.035 mm

2.9 94.1

2.10 (a) 1 ; (b) 3 ; (c) 4 ; (d) 4 ; (e) 4 ; (f) 4.

2.11 8.72 m^2; 0.0855 m^3

2.12 (a) 2.3 kg ; (b) 0.02 g

2.13 13%; 3.8

2.14 (b) യും (c) യും ഡൈമെൻഷനനുസരിച്ച് തെറ്റാണ്. സൂചന : ത്രികോണമിതി ഫലനങ്ങൾക്ക് ഡൈമെൻഷനില്ല.

2.15 $m = m_0 (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ ആണ് ശരിയായ സൂത്രവാക്യം.

2.16 $\cong 3 \times 10^{-7}$ m^3

2.17 $\cong 10^4$. വാതകത്തിലെ തന്മാത്രാന്തര ദൂരം തന്മാത്രയുടെ വലുപ്പത്തേക്കാൾ വളരെ ചെറുതാണ്.

2.18 ഒരു നിരീക്ഷകന്റെ കണ്ണിൽ സമീപമുള്ള വസ്തുക്കളുണ്ടാക്കുന്ന കോണളവ് വളരെകലെയുള്ള വസ്തുക്കളുണ്ടാക്കുന്ന കോണളവിനേക്കാൾ വലുതാണ്. നാം സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ വളരെയകലെയുള്ള വസ്തുക്കൾക്കുണ്ടാകുന്ന കോണീയമാറ്റം സമീപത്തുള്ള വസ്തുക്കൾക്കുണ്ടാകുന്നതിനേക്കാൾ ചെറുതാണ്. അതിനാൽ അകലെയുള്ള വസ്തുക്കൾ നമ്മോടൊപ്പം സഞ്ചരിക്കുന്നതായും സമീപത്തുള്ള വസ്തുക്കൾ എതിർദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നതായും അനുഭവപ്പെടുന്നു.

2.19 $\cong 3 \times 10^{16}$ m; ഒരു പാഴ്സക് എന്ന നീളത്തിന്റെ യൂണിറ്റ് ഏകദേശം 3.084×10^{16} മീറ്ററിനു തുല്യമാണ്.

2.20 1.32 പാഴ്സക്, 2.64″ (ചാപത്തിന്റെ സെക്കന്റ്)

2.23 1.4×10^3 kg m^{-3} സൂര്യന്റെ മാസ്സാന്ദ്രത ദ്രാവകങ്ങളുടെയും ഖരങ്ങളുടെയും സാന്ദ്രതയുടെ പരിധിയിൽ വരും. ഈ ഉയർന്ന സാന്ദ്രതക്ക് കാരണം സൂര്യന്റെ ഉള്ളിലുള്ള പാളികൾ പുറമേയുള്ള പാളികളിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന അകത്തേക്കുള്ള ഗുരുത്വബലം മൂലമാണ്.

2.24 1.429×10^5 km

2.25 സൂചന: $\tan \theta$ ക്ക് ഡൈമെൻഷനില്ല. ശരിയായ സൂത്രവാക്യം $\tan \theta = v/v'$ ഇവിടെ v' എന്നത് മഴയുടെ വേഗമാണ്.

2.26 കൃത്യത $1/10^{11}$ നും $1/10^{12}$ നുമിടയിൽ

2.27 $\cong 0.7 \times 10^3$ kg m^{-3}. ഖരാവസ്ഥയിൽ ആറ്റങ്ങൾ ഞെരുക്കിയടുക്കിയിരിക്കുന്നു. അതിനാൽ അറ്റോമിക മാസ്സാന്ദ്രത ഖരത്തിന്റെ മാസ് സാന്ദ്രതക്ക് അടുത്തായിരിക്കും.

2.28 $\cong 0.3 \times 10^{18}$ kg m^{-3} – അണുകേന്ദ്രസാന്ദ്രത വസ്തുവിന്റെ അറ്റോമികസാന്ദ്രതയുടെ 10^{15} മടങ്ങായിരിക്കും.

2.29 3.84×10^8 m

2.30 55.8 km

2.31 2.8×10^{22} km

2.32 3,581 km

2.33 സൂചന : $e^4/(16\,\pi^2\,\epsilon_0^2 m_p\, m_e^2 c^3\, G)$ യുടെ ഡൈമെൻഷൻ സമയത്തിന്റെ ഡൈമെൻഷനാണ്.

അധ്യായം 3

3.1 (a), (b)

3.2 (a) A....B, (b) A....B, (c) B....A, (d) മാറ്റമില്ല, (e) B....A.... ഒരിക്കൽ

3.4 37 സെക്കന്റ്

3.5 1000 km/h

3.6 3.06 m s^{-2}; 11.4 s

3.7 1250 m (സൂചന: A യെ അപേക്ഷിച്ച് B യുടെ ചലനം നിരീക്ഷിക്കുക)

3.8 1 m s^{-2} (സൂചന: A യെ അപേക്ഷിച്ച് B യുടെയും C യുടെയും ചലനം നിരീക്ഷിക്കുക)

3.9 T = 9 min, വേഗം = 40 km/h. സൂചന: $v\,T\,/\,(\,v - 20\,) = 18;\; v\,T\,/\,(\,v + 20\,) = 6$

3.10 (a) കുത്തനെ താഴേക്ക് (b) പൂജ്യം പ്രവേഗം, 9.8 m s^{-2} തുടരണം താഴേക്ക്

(c) $x > 0$ (മുകളിലേക്കും താഴേക്കുമുള്ള ചലനം, $v < 0$ (മുകളിലേക്ക്), $v > 0$ (താഴേക്ക്), $a > 0$ (എല്ലായ്പ്പോഴും)

(d) 44.1 m, 6 s.

3.11 (a) ശരി (b) തെറ്റ്; (c) ശരി (വസ്തു അതേക്ഷണത്തിൽ അതേ വേഗതയിൽ തട്ടി തിരികെ വരുകെയാണെങ്കിൽ ത്വരണം അനന്തമാകും. ഇത് സംഭവ്യമല്ല. (d) തെറ്റ് (ചലനദിശ പോസിറ്റീവ് ദിശയായി കണക്കാക്കിയാൽ മാത്രമേയിത് ശരിയാകൂ)

3.14 (a) 5 km h^{-1}, 5 km h^{-1}; (b) 0, 6 km h^{-1}; (c) $\frac{15}{8}$ km h^{-1}, $\frac{45}{8}$ km h^{-1}

3.15 വളരെ ചെറിയൊരിടവേളയിൽ സ്ഥാനാന്തരത്തിന്റെ പരിമാണം പാതദൈർഘ്യത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.

3.16 നാലു ഗ്രാഫുകളും സാധ്യമല്ല. (a) ഒരേ സമയത്ത് ഒരു വസ്തുവിന് രണ്ട് വ്യത്യസ്ത സ്ഥാനങ്ങൾ സാധ്യമല്ല; (b) ഒരേ സമയത്ത് ഒരു വസ്തുവിന് വിപരീതദിശകളിലുള്ള പ്രവേഗം സാധ്യമല്ല; (c)വേഗം എല്ലായ്പ്പോഴും പോസിറ്റീവാണ്; (d) വസ്തുവിന്റെ ആകെ പാതദൈർഘ്യം സമയത്തിനനുസരിച്ച് ഒരിക്കലും കുറയില്ല.

3.17 ഇല്ല, തെറ്റ്. (x-t ഗ്രാഫ് ഒരു വസ്തുവിന്റെ സഞ്ചാരപാതയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നില്ല. സന്ദർഭം: ഒരു വസ്തുവിനെ ടവറിനുമുകളിൽ നിന്നും ($x = 0$) $t = 0$ സമയത്ത് താഴേക്കിടുന്നു.

3.18 105 m s^{-1}

3.19 (a) മിനുസമായ തറയിലിരിക്കുന്ന ഒരു പന്തിനെ കാലുകൊണ്ടുതട്ടിയാൽ അത് ഒരു ചുവരിൽ തട്ടി കുറഞ്ഞ വേഗതയിൽ തിരിച്ചുവരികയും എതിർചുവരിൽ വന്നിടിച്ച് ചലനം നിലക്കുന്നു; (b) മുകളിലേക്ക് ആദ്യ പ്രവേഗത്തോടെ എറിഞ്ഞ ഒരു പന്ത് തറയിൽ തട്ടി തിരികെ വരുമ്പോൾ ഓരോ പ്രാവശ്യവും തിരികെ വരുന്നത് കുറഞ്ഞ പ്രവേഗത്തിലായിരിക്കും. (c) സമചലനത്തിലുള്ള ഒരു ക്രിക്കറ്റ് പന്തിനെ വളരെ ചെറിയ സമയത്തിൽ ഒരു ബാറ്റ് കൊണ്ടടിച്ച് തിരികെ പായിക്കുന്നു.

3.20 $x < 0, v < 0, a > 0$; $x > 0, v > 0, a < 0$; $x < 0, v > 0, a > 0$.

3.21 മുന്നിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ, രണ്ടിൽ ഏറ്റവും കുറവ് ഒന്നിലും രണ്ടിലും $v > 0$, മുന്നിൽ $v < 0$.

3.22 ത്വരണത്തിന്റെ അളവ് രണ്ടിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ, വേഗം മുന്നിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ; $v > 0$ ഒന്നിലും രണ്ടിലും, മൂന്നിലും; ഒന്നിലും മൂന്നിലും $a > 0$, രണ്ടിൽ $a < 0$; A, B, C, D ഇവയിൽ $a = 0$.

3.23 സമത്വരണത്തോടുകൂടിയ ചലനത്തിൽ സമയ അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് ചരിഞ്ഞിരിക്കുന്ന നേർരേഖ; സമചലനത്തിൽ സമയ അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായിരിക്കും.

3.24 10 s, 10 s

3.25 (a) 13 km h^{-1} ; (b) 5 km h^{-1}; (c) ഏത് രക്ഷിതാവ് നിരീക്ഷിച്ചാലും രണ്ടു ദിശയിലും 20 സെക്കന്റും കുട്ടിയുടെ വേഗം 9 km h^{-1} രണ്ട് ദിശയിലും, ഉത്തരത്തിന് മാറ്റമില്ല.

3.26 $x_2 - x_1 = 15\,t$ (രേഖീയഭാഗം); $x_2 - x_1 = 200 + 30\,t - 5\,t^2$ (വക്രഭാഗം).

3.27 (a) 60 m, 6 m s^{-1} ; (b) 36 m, 9 m s^{-1}

3.28 (c), (d), (f)

അധ്യായം 4

4.1 ഉള്ളളവ് (വ്യാപ്തം), മാസ്സ്, വേഗത, സാന്ദ്രത, മോളുകളുടെ എണ്ണം, കോണീയ ആവൃത്തി തുടങ്ങിയവ അദിശങ്ങളാണ്. ബാക്കിയുള്ളവ സദിശങ്ങളും.

4.2 പ്രവൃത്തി, വൈദ്യുത കറന്റ്

4.3 ഇംപൾസ് (ആവേഗം)

4.4 (c) ഉം (d) ഉം മാത്രമാണ് അർഥപൂർണ്ണമായത്

4.5 (a) T, (b) F, (c) F, (d) T, (e) T

4.6 സൂചന: ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഏതൊരു രണ്ടു വശങ്ങളുടെയും തുക ഒരിക്കലും മൂന്നാമത്തെ വശത്തെക്കാൾ ചെറുതായിരിക്കില്ല, മാത്രമല്ല, അവയുടെ വ്യത്യാസം, മൂന്നാമത്തെ വശത്തെക്കാൾ വലുതായിരിക്കുകയുമില്ല. കൊലീനിയർ ആയ സദിശങ്ങൾക്ക് സമത്വം സാധുവായിരിക്കും.

4.7 (a) ഒഴികെ മറ്റെല്ലാ പ്രസ്താവനകളും ശരിയാണ്.

4.8 ഓരോന്നിനും 400 m വീതം; B

4.9 (a) O; (b) O; (c) 21.4 km h^{-1}

4.10 പ്രാരംഭദിശയുമായി 60° കോണളവിൽ സ്ഥാനാന്തരം 1 കി.മീ ആകുന്നു. മൂന്നാമത്തെ വളവിൽ ആകെ ദൂരം = 1.5 കി.മീ; ശൂന്യ സ്ഥാനാന്തരം; ആറാമത്തെ വളവിൽ സഞ്ചരിച്ച ആകെ ദൂരം 3 കി.മീ; 866 മീ., 30°, എട്ടാമത്തെ വളവിൽ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം 4 കി.മീ.

4.11 (a) 49.3 km h^{-1} ; (b) 21.4 km h^{-1}. അല്ല, ശരാശരി വേഗതയുടെയും ശരാശരി പ്രവേഗത്തിന്റെയും അളവു തുല്യമായിരിക്കുന്നത് ഋജുവായ പാതകളിൽ മാത്രമാണ്.

4.12 തെക്കു ദിശയിൽ ലംബവുമായി ഏകദേശം 18° കോണളവിൽ

4.13 15 min, 750 m

4.14 പായ്മരം ഏകദേശം കിഴക്കു ദിശയിൽ ആയിരിക്കും.

4.15 150.5 m

4.16 50 m

4.17 9.9 m s^{-2}, വർത്തുളപാതയിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിലും അനുഭവപ്പെടുന്ന ത്വരണം ആരത്തിലൂടെ വൃത്ത കേന്ദ്രത്തിലേക്കായിരിക്കും.

4.18 6.4 g

4.19 (a) തെറ്റ് (ശരിയാകുന്നത് സമവർത്തുള ചലനത്തിൽ മാത്രം)

(b) ശരി, (c) ശരി

4.20 (a) $\mathbf{v}(t) = (3.0\,\hat{\mathbf{i}} - 4.0t\,\hat{\mathbf{j}})$ $\hat{\mathbf{a}}(t) = -4.0\,\hat{\mathbf{j}}$

(b) 8.54 m s^{-1}, x- അക്ഷവുമായി 70° കോണളവിൽ

4.21 (a) 2 s, 24 m, 21.26 m s^{-1}

4.22 $\sqrt{2}$, x- അക്ഷവുമായി 45° കോണളവിൽ; $\sqrt{2}$, x-അക്ഷവുമായി – 45° കോണളവിൽ; $\left(5/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}\right)$.

4.23 (b) ഉം (e) ഉം

4.24 (e) മാത്രമാണ് ശരിയായത്.

4.25 182 m s^{-1}

4.27 ഇല്ല, ചാക്രീയ ചലനങ്ങളെ സാമാന്യമായി സദിശങ്ങളായി പരിഗണിക്കാറില്ല.

4.28 ഒരു പ്രതലത്തെ സദിശവുമായി ബന്ധിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.

4.29 ഇല്ല.

4.30 ലംബവുമായി $\sin^{-1}(1/3) = 19.5°$ കോണളവിൽ; 16 കി.മീ.

4.31 0.86 m s^{-2}, പ്രവേഗദിശയുമായി 54.5° കോണളവിൽ.

അധ്യായം 5

5.1 (a) മുതൽ (d) വരെ. ഒന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് സഫലബലം പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല.

(c) വൈദ്യുതകാന്തികബലവും ഗുരുത്വബലവും സൃഷ്ടിക്കുന്നവയിൽ നിന്നെല്ലാം വളരെ അകലെയായതിനാൽ ഒരു ബലവും പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല.

5.2 ഓരോ പ്രശ്നത്തിലും അനുഭവപ്പെടുന്ന ഒരേയൊരു ബലം കുത്തനെ താഴേക്കു പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന 0.5 N മാത്രമാണ് (വായുവിന്റെ രോധം അവഗണിച്ചാൽ). ഗോലിയുടെ ചലനം കുത്തനെയല്ലെങ്കിൽ പോലും ഉത്തരത്തിനു മാറ്റമുണ്ടാകുകയില്ല. ഏറ്റവും ഉയർന്ന ബിന്ദുവിൽ ഗോലി നിശ്ചലാവസ്ഥയിലല്ല. ഗോലിക്ക് അതിന്റെ ചലനത്തിലുടനീളം തിരശ്ചീനദിശയിൽ പ്രവേഗത്തിന്റെ ഒരു ഘടകമുണ്ട്.

5.3 (a) കുത്തനെ താഴേക്ക് 1N (b) (a) യിലേതിനു തുല്യം.

(c) (a) യിലേതിനു തുല്യം; ഒരു ക്ഷണത്തിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന ബലം ആ ക്ഷണത്തിലെ അവസ്ഥകൾക്കനുസരിച്ചുള്ളതാണ്, അല്ലാതെ പൂർവസ്ഥിതിയനുസരിച്ചല്ല.

(d) ട്രെയിനിന്റെ ചലനദിശയിൽ O. 1N

5.4 (i) T

5.5 $a = -2.5 ms^{-2}$ $v = u + at$ ഉപയോഗിച്ച് $0 = 15 - 2.5\ t$. അതായത് $t = 6.0 s$.

5.6 $a = \frac{1.5}{25} = 0.06 ms^{-2}$, $F = 3 \times 0.06 = 0.18 N$, ചലനദിശയിൽ

5.7 8N ബലത്തിന്റെ ദിശയിൽ നിന്നു $\tan^{-1}\left(3/4\right) = 37^{o}$ കോണളവിൽ പരിണതബലം 10N പ്രവർത്തിക്കുന്നു. പരിണിതബലത്തിന്റെ ദിശയിൽ ത്വരണം $= 2 ms^{-2}$

5.8 $a = -2.5 ms^{-2}$ മന്ദീകരണബലം $= 465 \times 2.5 = 1.2 \times 10^{3} N$

5.9 $F = 20{,}000 \times 10 = 20000 \times 5.0$ അതായത് $F = 3.0 \times 10^{5} N$

5.10 $a = -20 ms^{-2}, 0 \leq t \leq 30 s$

$t = -5 s, x = ut = -10 \times 5 = -50 m$

$t = 25 s, x = ut + \frac{1}{2} at^{2} = (10 \times 25 - 10 \times 625) m = -6 km$

t = 100s, 30s വരെയുള്ള ചലനത്തെ ആദ്യം പരിഗണിക്കുക.

$x_1 = 10 \times 30 - 10 \times 900 = -8700 m$

$t = 30 s$ ആകുമ്പോൾ $u = 10 - 20 \times 30 = -590 ms^{-1}$

30s മുതൽ 100s വരെയുള്ള ചലനത്തിൽ

$x_2 = -590 \times 70 = -41300 m$

$x = x_1 + x_2 = -50 km$

5.11 (a) കാറിന്റെ പ്രവേഗം (t=10s ആകുമ്പോൾ) $= 0 + 2 \times 10 = 20 ms^{-1}$ ഒന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് പ്രവേഗത്തിന്റെ തിരശ്ചീനദിശയിലുള്ള ഘടകം എല്ലായ്പ്പോഴും $20 ms^{-1}$ ആയിരിക്കും. ലംബദിശയിൽ പ്രവേഗത്തിനുള്ള ഘടകം (t = 11s ആകുമ്പോൾ) $= 0 + 10 \times 1 = 10 ms^{-1}$.

t = 11s ആകുമ്പോൾ കല്ലിന്റെ പ്രവേഗം $= \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500} = 22.4 ms^{-1}$. ഈ പ്രവേഗത്തിന്റെ ദിശ തിരശ്ചീന ദിശയിൽ നിന്ന് $\tan^{-1}(1/2)$ കോണളവിലാണ്.

(b) ലംബമായി താഴേക്ക് $10 ms^{-2}$.

5.12 (a) പരമാവധി ദൂരത്തിൽ (extreme position) ഗോളത്തിന്റെ വേഗം പൂജ്യമാണ്. ചരടിനെ മുറിക്കുമ്പോൾ ഗോളം കുത്തനെ താഴേക്കു പതിക്കും.

(b) സന്തുലിതസ്ഥാനത്ത് (equilibrium position) ഗോളത്തിന് തിരശ്ചീനദിശയിൽ ഒരു പ്രവേഗമുണ്ട്. ചരടു മുറിച്ചാൽ ഗോളം പരാബോളയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള പാതയിലൂടെ താഴേക്കു പതിക്കും.

5.13 തറയിൽ അയാൾ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലത്തെയാണ് യന്ത്രം സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. മൂന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് ഈ ബലം തറ അയാളിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന N എന്ന ലംബബലത്തിന് തുല്യവും വിപരീതവുമാണ്.

(a) $N = 70 \times 10 = 700 N$, ഉപകരണത്തിലെ അളവ് 70 kg

(b) $70 \times 10 - N = 70 \times 5$, ഉപകരണത്തിലെ അളവ് 35 kg

(c) $N - 70 \times 10 = 70 \times 5$, ഉപകരണത്തിലെ അളവ് 105 kg

(d) $70 \times 10 - N = 70 \times 10$, ഉപകരണത്തിലെ അളവ് പൂജ്യമായിരിക്കും

5.14 (a) ഈ മൂന്ന് ഇടവേളകളിലും ത്വരണവും തന്മൂലം ബലവും പൂജ്യമായിരിക്കും.

(b) t = 0 ആകുമ്പോൾ $3 kg ms^{-1}$ (c) t = 4s ആകുമ്പോൾ $-3 kg\ ms^{-1}$

5.15 20 kg മാസിനെ വലിക്കുകയാണെങ്കിൽ

$600 - T = 20\ a$, $T = 10\ a$

$a = 20 ms^{-2}$, $T = 200 N$.

10kg മാസിനെ വലിക്കുകയാണെങ്കിൽ

$a = 20 ms^{-2}$, $T = 400 N$.

5.16 $T - 8 \times 10 = 8a, 12 \times 10 - T = 12a$
അതായത് $a = 2ms^{-2}, T = 96N$.

5.17 ആക്കസംരക്ഷണതത്വമനുസരിച്ച് ആകെ ആക്കം പൂജ്യമായിരിക്കണം. രണ്ട് ആക്ക സദിശങ്ങൾ തമ്മിൽ സങ്കലനം ചെയ്യുമ്പോൾ, അവ തുല്യവും വിപരീതവുമാണെങ്കിൽ മാത്രമേ പൂജ്യം ലഭിക്കുകയുള്ളൂ.

5.18 ഓരോ പന്തിലുമുണ്ടാകുന്ന ആവേഗത്തിന്റെ അളവ് $= 0.05 \times 12 = 0.6kgms^{-1}$. രണ്ട് ആവേഗങ്ങളും വിപരീത ദിശയിലാണ്.

5.19 ആക്ക സംരക്ഷണതത്വമുപയോഗിച്ച്
$100\ V = 0.02 \times 80$
$v = 0.016ms^{-1} = 1.6cms^{1}$

5.20 ആദ്യദിശയുടെയും അന്തിമദിശയുടെയും സമഭാജിയിലൂടെയാണ് ആവേഗത്തിന്റെ ദിശ. അതിന്റെ പരിമാണം $0.15 \times 2 \times 15 \times \cos 22.5^{\circ} = 4.2kgms^{-1}$.

5.21 $V = 2\pi \times 1.5 \times \frac{40}{60} = 2\pi ms^{-1}$.

$T = \frac{mv^2}{R} = \frac{0.25 \times 4\pi^2}{1.5} = 6.6N$.

$200 = \frac{mv^2_{max}}{R}$ ഇതിൽ നിന്നും $v^2_{max} = 35ms^{-1}$

5.22 ഒന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് ശരിയുത്തരം (b) ആണ്.

5.23 (a) ശൂന്യാകാശത്തു വച്ച് കുതിരയും വണ്ടിയും ചേർന്ന വ്യൂഹത്തിന്മേൽ ഒരു ബലവും പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല. കുതിരയും വണ്ടിയും പരസ്പരം പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലങ്ങൾ റദ്ദു ചെയ്യപ്പെടുന്നു. (മൂന്നാം ചലനനിയമം). തറയിൽ സറിതിചെയ്യുമ്പോൾ ഈ വ്യൂഹവും തറയും തമ്മിലുണ്ടാകുന്ന സമ്പർക്ക ബലം (ഘർഷണം) ഇവ നിശ്ചലവാസറയിൽ നിന്നും ചലിക്കുന്നതിനു കാരണമാകുന്നു.

(b) ഇരിപ്പിടവുമായി നേരിട്ടു സമ്പർക്കത്തിലില്ലാത്ത ശരീരഭാഗത്തിന്റെ ജഡത്വം മൂലം.

(c) ഒരു പുല്ലുവെട്ടി യന്ത്രത്തെ വലിക്കുകയോ ഉന്തുകയോ ചെയ്യുന്നത് ചരിഞ്ഞ ദിശയിൽ ബലം പ്രയോഗിച്ചു കൊണ്ടാണ്. നാം ഉന്തുമ്പോൾ ലംബദിശയിൽ സന്തുലനാവസറയിലിരിക്കണമെങ്കിൽ ലംബബലം (N) യന്ത്രത്തിന്റെ ഭാരത്തേക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കണം. ഇത് ഘർഷണം f കൂടുന്നതിന് കാരണമാകുന്നു. ($f \alpha$ N). തന്മൂലം യന്ത്രത്തെ ചലിപ്പിക്കാൻ കൂടുതൽ ബലം ആവശ്യമായി വരുന്നു. പുല്ലുവെട്ടി യന്ത്രത്തെ വലിച്ചു കൊണ്ടുപോകുമ്പോൾ സംഭവിക്കുന്നത് ഇതിനു നേർവിപരീതമായയാണ്.

(d) ആക്കവ്യത്യാസത്തിന്റെ നിരക്കും അതുവഴി പന്തിനെ പിടിച്ചു നിറുത്താനാവശ്യമായ ബലവും കുറക്കുന്നതിനുവേണ്ടി.

5.24 $x = 0$ യിലെയും $x = 2cm$ ലെയും ചുമരുകളിൽ നിന്നും ഓരോ 2 സെക്കന്റിനു ശേഷം, $1cms^{-1}$ സ്ഥിര വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിനു ലഭിക്കുന്ന ആവേഗത്തിന്റെ പരിമാണം $0.04kg \times 0.02ms^{-1} = 8 \times 10^{-4}kgms^{-1}$ ആണ്.

5.25 സഫലബലം $= 65kg \times 1ms^{-2} = 65N$

$a_{max} = \mu_s g = 2ms^{-2}$

5.26 ശരിയായ ഉത്തരം (a). $mg + T_2 = \frac{mv_2^2}{R}$, $T_1 - \frac{mv_1^2}{R}$ ഇവ ശ്രദ്ധിക്കുക.
ഗുണപാഠം: ഒരു വസ്തുവിൽ അനുഭവപ്പെടുന്ന യഥാർഥ ബലങ്ങളെയും (ഉദാ: വലിവുബലം, ഗുരുത്വബലം മുതലായവ) അവയുടെ ആഘാതങ്ങളെയും സംബന്ധിച്ച് ആശയക്കുഴപ്പമുണ്ടാകരുത്. ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ $\frac{v_2^2}{R}$ അഥവാ $\frac{v_1^2}{R}$ എന്ന അഭികേന്ദ്രത്വരണം ഇത്തരത്തിലുള്ളതാണ്.

5.27 (a) 'സ്വതന്ത്രവസ്തു' : ജോലിക്കാരും യാത്രക്കാരും
തറ വ്യൂഹത്തിൻമേൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം = F, മുകളിലേക്ക്
വ്യൂഹത്തിന്റെ ഭാരം = mg, താഴേക്ക്
$\therefore F - mg = ma$
$F - 300 \times 10 = 300 \times 15$

F = 7.5× 10^3 N മുകളിലേക്ക്.

മൂന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച് ജീവനക്കാരും യാത്രക്കാരും തറയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം = 7.5 × 10^3N, താഴേക്ക്

(b) 'സ്വതന്ത്രവസ്തു': ഹെലികോപ്റ്ററും ജോലിക്കാരും യാത്രക്കാരും.

വ്യൂഹത്തിൻമേൽ വായു പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം = R, മുകളിലേക്ക് വ്യൂഹത്തിന്റെ ഭാരം = mg താഴേക്ക്

$\therefore$ R - mg = ma R - 1300× 10 = 1300× 15

R = 3.25 × 10^4 N മുകളിലേക്ക്

മൂന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച്, ഹെലികോപ്റ്റർ വായുവിൽ പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം (പ്രവർത്തനം)= 3.25× 10^4N, താഴേക്ക്

(c) 3.25 × 10^4 N, മുകളിലേക്ക്

5.28 ഓരോ സെക്കന്റിലും ചുമരിൽ പതിക്കുന്ന ജലത്തിന്റെ മാസ് = 10^3kgm^{-3} × 10^{-2}m^2 × 15ms^{-1}= 150kgs^{-1}
ചുമര് പ്രയോഗിക്കുന്ന ബലം = ഓരോ സെക്കന്റിലും ജലത്തിനുണ്ടാകുന്ന ആക്കനഷ്ടം
= 150kgs^{-1} × 15ms^{-1} = 2.25 × 10^3N

5.29 (a) 3mg (താഴേക്ക്) (b) 3mg (താഴേക്ക്) (c) 4mg (മുകളിലേക്ക്)

5.30 ചിറകുകളിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ലംബബലം N ആണെങ്കിൽ

$N\cos\theta = mg$, $N\sin\theta = \frac{mv^2}{R}$, ഇതിൽ നിന്ന് $R = \frac{v^2}{g\tan\theta} = \frac{200\times200}{10\times\tan5} = 15km$ എന്നു ലഭിക്കും.

5.31 ട്രെയിനിന്റെ ചക്രങ്ങളുടെ അരികിൽ റെയിൽപ്രയോഗിക്കുന്ന പാർശ്വികമർദ്ദം (lateral thrust) ചലനത്തിനാവശ്യമായ അഭികേന്ദ്രബലം നൽകുന്നു. മൂന്നാം ചലനനിയമമനുസരിച്ച്, റെയിലിന്മേൽ ട്രെയിൻ തുല്യവും വിപരീതവുമായ ഒരു എതിർബലം പ്രയോഗിക്കുന്നുണ്ട്. ഇത് റെയിലിന്റെ തേയ്മാനത്തിനിത് കാരണമാകുന്നു.

ബാങ്കിങ്ങിന്റെ കോൺ = $\tan^{-1}\left(\frac{v^2}{Rg}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{15\times15}{30\times10}\right) = \simeq 37^o$

5.32 അയാൾ സന്തുലനാവസ്ഥയിലിരിക്കുമ്പോൾ അനുഭവപ്പെടുന്ന ബലങ്ങളെ പരിഗണിക്കുക. അയാളുടെ ഭാരം, കയറുമൂലമുള്ള ബലം, കൂടാതെ തറ പ്രയോഗിക്കുന്ന ലംബബലം.
(a) 750 N, (b) 250 N (b) യിലെ രീതിയാണ് അയാൾ അവലംബിക്കേണ്ടത്

5.33 (a) T - 400 = 240, T = 640 N (b) 400 - T = 160, T = 240 N
(c) T = 400 N (c) T = 0
പ്രശ്നം (a) യിൽ കയർ മുറിഞ്ഞുപോകുന്നതായി മനസ്സിലാക്കാം.

5.34 A, B എന്നീ വസ്തുക്കളും ദൃഢമായ ഇടഭിത്തിയും തമ്മിൽ പരിപൂർണമായും സമ്പർക്കത്തിലാണെന്ന് നമുക്കു സങ്കൽപിക്കാം. അപ്പോൾ ഇടഭിത്തി പ്രയോഗിക്കുന്നതും B യിൽ അനുഭവപ്പെടുന്നതുമായ സ്വയം ക്രമീകരിക്കാൻ കഴിവുള്ള ലംബബലം (പ്രതിപ്രവർത്തനം) 200N ആണ്. ആസന്നചലനം ഇല്ലാത്തതിനാൽ ഘർഷണബലം പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല. A ക്കും B ക്കും ഇടയിലുള്ള പ്രവർത്തന – പ്രതിപ്രവർത്തന ബലങ്ങളും 200 N ആണ്. ഇടഭിത്തി മാറ്റിക്കഴിയുമ്പോൾ ഗതിഘർഷണം പ്രവർത്തിക്കാൻ തുടങ്ങുന്നു.
A യുടെയും B യുടെയും ത്വരണം = |200-(150 × 0.15)|/15 = 11.8ms^{-2}
A യിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ഘർഷണബലം = 0.15 × 50 = 7.5N
200 - 7.5 - F_{AB} = 5 × 11.8
F_{AB} = 1.3 × 10^2 N; ചലനത്തിന് എതിർദിശയിൽ, F_{BA} = 1.3 × 10^2 N; ചലനത്തിന്റെ ദിശയിൽ

5.35 (a) ട്രോളിക്കും കട്ടക്കും ഇടയിലുണ്ടാകാനിടയുള്ള ആപേക്ഷിക ആസന്നചലനത്തെ പ്രതിരോധിക്കാനാവശ്യമായ പരമാവധി ഘർഷണബലം = 150×0.18 = 27 N. ഇത് കട്ടക്ക് ട്രോളിയോടൊപ്പം ത്വരണം നൽകുന്നതിനാവശ്യമായ ഘർഷണബലമായ 150 × 0.5 = 7.5 N നേക്കാൾ കൂടുതലാണ്. ട്രോളി സ്ഥിരപ്രവേഗത്തോടെ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ നിരീക്ഷകനെ (inertial) ചലിപ്പിക്കുന്നതിനാവശ്യമായ അവാസ്തവിക ബലങ്ങളൊന്നും പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല. ഘർഷണബലവും പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല.

(b) ത്വരണത്തോടു കൂടി സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു നിരീക്ഷകന് ഘർഷണബലത്തെ അതേ അളവിലുള്ള ഒരു കപട ബലം എതിർക്കുന്നതായി തോന്നും. ഈ ബലം പെട്ടി നിരീക്ഷകനെ അപേക്ഷിച്ച് സ്ഥിരമായിരിക്കാൻ പ്രേരിപ്പിക്കുന്നു. ട്രോളി ഏകമാന പ്രവേഗത്തിൽ ചലിക്കുവാൻ തുടങ്ങുമ്പോൾ ഈ കപട ബലം അപ്രത്യക്ഷമാകുകയും ചെയ്യും.

5.36 ഘർഷണം മൂലം പെട്ടിക്കു ലഭിക്കുന്ന ത്വരണം = $\mu_g = 0.15 \times 10 = 1.5 ms^{-2}$. പക്ഷേ, ട്രക്കിന്റെ ത്വരണം കൂടുതലാണ്. ട്രക്കിനെ അപേക്ഷിച്ച് പെട്ടിക്കുള്ള ത്വരണം $0.5 ms^{-2}$ ആണ്. ഇതിന്റെ ദിശ ട്രക്കിന്റെ പിൻ ഭാഗത്തേക്കാണ്. പെട്ടി ട്രക്കിൽ നിന്നു താഴെ വീഴുന്നതിനെടുക്കുന്ന സമയം = $\sqrt{\frac{2\times 5}{0.5}} = \sqrt{20}s$

ഈ സമയം കൊണ്ട് ട്രക്ക് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം = $\frac{1}{2}\times 2\times 20 = 20m$

5.37 ഡിസ്കിനോടൊപ്പം നാണയവും പരിക്രമണം ചെയ്യുന്നതിന് ആവശ്യമായ അഭികേന്ദ്രബലം നൽകുന്നതിന് ഘർഷണബലം പര്യാപ്തമായിരിക്കണം. അതായത് $\frac{mv^2}{r} \le \mu$ mg ഇവിടെ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ എന്നത് ഡിസ്കിന്റെ കോണീയ ആവൃത്തിയാണ്. μ, ω എന്നിവയുടെ പ്രത്യേക വിലകൾക്കനുസരിച്ച് $r \le \mu g/\omega^2$ ആയിരിക്കും. ഈ നിബന്ധന അനുസരിക്കുന്നത് സമീപത്തുള്ള നാണയമാണ് (കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 4cm അകലെ).

5.38 ഏറ്റവും മുകളിലെ സ്ഥാനത്ത്, N + mg = $\frac{mv^2}{R}$ ഇവിടെ N എന്നത് മോട്ടോർ സൈക്കിളുകാരനിൽ അറയുടെ മേൽക്കൂര പ്രയോഗിക്കുന്ന ലംബബലമാണ് (താഴേക്കുള്ളത്). N=0 ആകുമ്പോഴുള്ള വേഗമാണ് ഏറ്റവും മുകളിലുള്ള സ്ഥാനത്ത് സാധ്യമായ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വേഗം.

അതായത് $V_{min} = \sqrt{Rg} = \sqrt{25\times 10} = 16 ms^{-1}$.

5.39 അയാളുടെ മേൽ ഭിത്തി പ്രയോഗിക്കുന്ന N എന്ന തിരശ്ചീനബലമാണ് ആവശ്യമായ അഭികേന്ദ്രബലം നൽകുന്നത്. $N = mR\omega^2$. ഘർഷണബലം f (കുത്തനെ മുകളിലേക്കു പ്രവർത്തിക്കുന്നത്) mg എന്ന ഭാരത്തെ പ്രതിരോധിക്കുന്നു. വീപ്പയുടെ ചുവട് മാറ്റികഴിഞ്ഞാലും അയാൾ ചുമരിൽ പറ്റിച്ചേർന്നു നിൽക്കണമെങ്കിൽ $mg = f < \mu N$ ആയിരിക്കണം. അതായത് $mg < mR\omega^2$

വീപ്പയുടെ ഭ്രമണത്തിനാവശ്യമായ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ കോണീയ വേഗം $\omega_{min} = \sqrt{g/\mu R} = 5 s^{-1}$.

5.40 കമ്പിയുടെ കേന്ദ്രവുമായി ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്ന ആരസദിശം കുത്തനെ താഴേക്കുള്ള ദിശയുമായി θ കോണളവിൽ വരുമ്പോഴുള്ള മുത്തിന്റെ സ്വതന്ത്രബലചിത്രം പരിഗണിക്കുക.

നമുക്ക് $mg = N\cos\theta$

$mR\sin\theta\,\omega^2 = N\sin\theta$ എന്നിങ്ങനെ അറിയാം. ഈ സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്ന് $\cos\theta = g/R\omega^2$ എന്നു ലഭിക്കും.

$\cos\theta \le 1$ ആകയാൽ മുത്ത് ഏറ്റവും താഴ്ന്ന സ്ഥാനത്തുതന്നെ നിലനിൽക്കണമെങ്കിൽ $\omega \le \sqrt{\frac{g}{R}}$ ആയിരിക്കണം.

$\omega = \sqrt{\frac{2g}{R}}$ ആകുമ്പോൾ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ അതായത് $\theta = 60°$

അധ്യായം 6

6.1 (a) +ve (b) –ve (c) –ve (d) + ve (e) – ve

6.2 (a) 882 J ; (b) –247 J; (c) 635 J ; (d) 635 J;

സഫലബലം ഒരു വസ്തുവിൽ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി അതിന്റെ ഗതികോർജ്ജ വ്യത്യാസത്തിന് തുല്യമാണ്.

6.3 (a) $x > a$; 0 (c) $x < a,\ x > b$; $-V_1$

(b) $-\infty < x < \infty$; V_1 (d) $-b/2 < x < -a/2,\ a/2 < x < b/2$; $-V_1$

6.5 (a) റോക്കറ്റ് (b) ഒരു സംരക്ഷിതബലം ഒരു പാതയിൽ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി സ്ഥിതികോർജ്ജ വ്യത്യാസത്തിന്റെ നെഗറ്റീവിന് തുല്യമാണ്. ഒരു പരിക്രമണത്തിൽ സ്ഥിതികോർജ്ജ വ്യത്യാസമില്ല. (c) ഗതികോർജം കൂടുന്നു. എന്നാൽ സ്ഥിതികോർജം കുറയുന്നു. (d) 2-ാമത്തെ പ്രശ്നത്തിൽ

6.6 (a) കുറയുന്നു (b) ഗതികോർജം (c) ബാഹ്യബലം (d) ആകെ രേഖീയ ആക്കവും ആകെ ഊർജവും (2 വസ്തുക്കളടങ്ങിയ വ്യൂഹം ഒറ്റപ്പെട്ടതാണെങ്കിൽ)

6.7 (a) F ; (b) F ; (c) F ; (d) F (മിക്കപ്പോഴും ശരിയാണ്. എന്നാൽ എല്ലായ്പ്പോഴും അല്ല എന്തുകൊണ്ട്?)

6.8 (a) ഇല്ല

(b) അതെ

(c) ഒരു ഇലാസ്തികതയില്ലാത്ത കൂട്ടിമുട്ടലിൽ രേഖീയ ആക്കം സംരക്ഷിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

(d) ഇലാസ്തികം

6.9 (b) t

6.10 (c) $t^{3/2}$

6.11 12 J

6.12 ഇലക്ട്രോണിന് വേഗം കൂടുതലാണ്. $v_e / v_p = 13.5$

6.13 ഓരോ പകുതിയിലും 0.082 J ; – 0.163 J

6.14 അതെ, (തന്മാത്ര+ഭിത്തി) വ്യൂഹത്തിന്റെ ആക്കം സംരക്ഷിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. തുടക്കത്തിൽ ചുമര് നിശ്ചലമാണെന്ന് സങ്കൽപിക്കാം. അപ്പോൾ ചുമരിനു ലഭിക്കുന്ന പിൻവാങ്ങൽ ആക്കം, ചുമരിന്റെയും പുറത്തേക്കുപോകുന്ന തന്മാത്രയുടെയും ആകെ ആക്കം അകത്തേക്കു വരുന്ന തന്മാത്രയുടെ ആക്കത്തിനു തുല്യമാകുന്ന വിധത്തിലായിരിക്കും. എന്നിരുന്നാലും ചുമരിന്റെ മാസ് വലുതായതിനാൽ ചുമരിന് പിൻവാങ്ങൽ ആക്കം മൂലം ലഭിക്കുന്ന പ്രവേഗം വളരെ ചെറുതാണ്. ഗതികോർജം സംരക്ഷിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതിനാൽ കൂട്ടിമുട്ടൽ ഇലാസ്തികമാണ്.

6.15 43.6 kW

6.16 (b)

6.17 മുഴുവൻ ആക്കവും അത് മേശപ്പുറത്തിരിക്കുന്ന പന്തിലേക്കു കൈമാറ്റം ചെയ്യുന്നതിനാൽ അൽപം പോലും ഉയരുന്നില്ല.

6.18 5.3 m s^{-1}

6.19 27 km h^{-1} (വേഗത്തിനു മാറ്റമില്ല)

6.20 50 J

6.21 (a) $m = \rho A v t$ (b) $K = \rho A v^3 t / 2$ (c) $P - 4.5$ kW

6.22 (a) 49,000 J (b) 6.45×10^{-3} kg

6.23 (a) 200 m^2 (b) ഒരു വലിയ വീടിന്റെ 14m × 14m അളവിലുള്ള മേൽക്കൂരയുമായി താരതമ്യം ചെയ്യാവുന്നതാണ്.

6.24 21.2 cm, 28.5 J

6.25 ഇല്ല. കുത്തനെയുള്ള പ്രതലത്തിലിരിക്കുന്ന കല്ല് ആദ്യം താഴെയെത്തുന്നു; അതെ, അവ രണ്ടും v എന്ന ഒരേ വേഗത്തിൽ താഴെയെത്തുന്നു [കാരണം $mgh = (1/2)\, m\, v^2$]

$v_B = v_C = 14.1 \text{ m s}^{1}$, $t_B - 2\sqrt{2}$ s , $t_C - 2\sqrt{2}$ s

6.26 0.125

6.27 രണ്ടു പ്രശ്നത്തിലും 8.82 J

6.28 തുടക്കത്തിൽ കുട്ടി ട്രോളിക്ക് ഒരു ആവേഗം നൽകുന്നു. തുടർന്ന് ട്രോളിയുടെ പുതിയ പ്രവേഗത്തെ അപേക്ഷിച്ച് 4 m s^{1} എന്ന സ്ഥിരമായ ആപേക്ഷിക പ്രവേഗത്തോടെ ഓടുന്നു. പുറത്തു നിൽക്കുന്ന ഒരു നിരീക്ഷകനിൽ ആക്കസംരക്ഷണനിയമം ആരോപിക്കുക. 10.36 m s^{1}, 25.9 m.

6.29 (V) ഒഴികെ മറ്റുള്ളവയെല്ലാം അസാധ്യമാണ്.

അധ്യായം 7

7.1 ഓരോന്നിന്റെയും ജാമിതീയകേന്ദ്രം. ഇല്ല. വലയം, പൊള്ളയായ ഗോളം, പൊള്ളയായ സിലിണ്ടർ, പൊള്ളയായ ക്യൂബ് ഇവയിലേതുപോലെ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രം വസ്തുവിന് പുറത്താണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്.

7.2 H, C1ന്യൂക്ലിയസ്സുകളെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന രേഖയിൽ അഗ്രത്തുനിന്നും 1.24 Å ദൂരത്തായി സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

7.3 വ്യൂഹത്തിൽ ബാഹ്യബലം പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല. അതിനാൽ ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന്റെ (ട്രോളിയും കുട്ടിയും ചേർന്നത്) വേഗം മാറ്റമില്ലാതെ തുടരും (v ക്ക് തുല്യമായിരിക്കും) ട്രോളിയുടെ പുറത്തു കൂടി ഓടുമ്പോൾ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ബലങ്ങൾ ഈ വ്യൂഹത്തെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം ആന്തരിക ബലങ്ങളാണ്.

7.6 $l_z \quad xp_y - yp_x$, $l_x \quad yp_z - zp_y$, $l_y \quad zp_x - xp_z$

7.8 72 cm

7.9 മുൻഭാഗത്തെ ഓരോ ചക്രത്തിലും 3675 N. പിൻഭാഗത്തെ ഓരോ ചക്രത്തിലും 5145 N.

7.10 (a) 7/5 MR^2 (b) 3/2 MR^2

7.11 ഗോളം

7.12 ഗതികോർജം = 3125 J;

കോണീയ ആക്കം = 62.5 J s

7.13 (a) 100 rev/min (കോണീയ ആക്കസംരക്ഷണം ഉപയോഗിക്കുക).

(b) പരിക്രമണചലനത്തിലെ ആദ്യ ഗതികോർജത്തിന്റെ 2.5 മടങ്ങാണ് പുതിയ ഗതികോർജം. കുട്ടി തന്റെ ആന്തരിക ഊർജം പരിക്രമണ ഗതികോർജം വർദ്ധിപ്പിക്കുന്നതിനായി ഉപയോഗിക്കുന്നു.

7.14 $25\ s^{2}$; $10\ m\ s^{2}$

7.15 36 kW

7.16 മുറിച്ചുമാറ്റിയ ഭാഗത്തിന്റെ എതിർവശത്തായി യഥാർത്ഥ വൃത്തതകിടിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും R/6 അകലത്തിൽ.

7.17 66.0 g

7.18 (a) അതെ; (b) അതെ, (c) ചരിവുകുറവുള്ള തലം (Ea α sin θ)

7.19 4J

7.20 6.75×10^{12} rad s^{1}

7.21 (a) 3.8 m (b) 3.0 s

7.22 വലിവുബലം = 98 N, N_B = 245 N, N_C = 147 N.

7.23 (a) 59 rev/min. (b) ഇല്ല. ഗതികോർജം വർധിപ്പിക്കുന്നു. അയാൾ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിമൂലമാണ് ഗതികോർജം വർധിക്കുന്നത്

7.24 0.625 rad s^{-1}

7.27 (a) കോണീയ ആക്ക സംരക്ഷണമനുസരിച്ച് പൊതുവായ കോണീയ ആക്കം

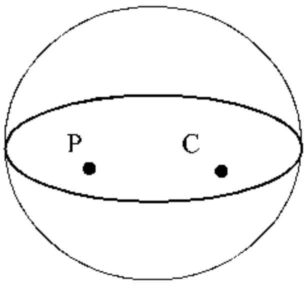
$\omega = (I_1\,\omega_1 + I_2\,\omega_2) / (I_1 + I_2)$

(b) രണ്ടു തകിടുകൾക്കും പൊതുവായ കോണീയ വേഗം ω ലഭിക്കുന്ന തരത്തിൽ പരസ്പരമുള്ള ഘർഷണ സമ്പർക്കംമൂലം ഊർജം നഷ്ടപ്പെടുന്നത് മൂലമാണിതു സംഭവിക്കുന്നത്. ഘർഷണ ടോർക്കുകൾ വ്യൂഹത്തിനെ സംബന്ധിച്ച് ആന്തരടോർക്കുകൾ ആയതിനാൽ കോണീയ ആക്കത്തിന് മാറ്റമുണ്ടാകുന്നില്ല.

7.28 A യുടെ പ്രവേഗം $\omega_0 R$ ഇത് അമ്പടയാളത്തിന്റെ അതേ ദിശയിലാണ്;

B യുടെ പ്രവേഗം $\omega_0 R$ ഇത് അമ്പടയാളത്തിന്റെ വിപരീത ദിശയിലാണ്

C യുടെ പ്രവേഗം $\omega_0 R/2$. ഇത് അമ്പടയാളത്തിന്റെ അതേദിശയിലാണ്. ഘർഷണമില്ലാത്ത ഒരു പ്രതലത്തിൽ വൃത്തതകിടിന് ഉരുളൽചലനം സാധ്യമല്ല.



7.29 (a) B യിലെ ഘർഷണബലം B യുടെ പ്രവേഗത്തെ പ്രതിരോധിക്കുന്നു. അതിനാൽ ഘർഷണബലം അമ്പടയാളത്തിന്റെ അതേ ദിശയിലാണ്. ഘർഷണടോർക്ക് എപ്പോഴും കോണീയചലനത്തെ എതിർക്കുന്നു. ω_o യും τ യും പേപ്പറിന്റെ തലത്തിന് ലംബമായി പ്രവർത്തിക്കുന്നു. ω_o തലത്തിന് ഉള്ളിലേക്കും τ തലത്തിന് പുറത്തേക്കും.

(b) B എന്ന സമ്പർക്കബിന്ദുവിന്റെ പ്രവേഗത്തെ ഘർഷണബലം കുറക്കുന്നു. ഈ പ്രവേഗം പൂജ്യമാകുമ്പോഴാണ് പൂർണമായ ഉരുളൽ ചലനം സാധ്യമാകുന്നത്. ഇപ്രകാരം സംഭവിക്കുമ്പോൾ ഘർഷണബലം അപ്രത്യക്ഷമാകുന്നു.

7.30 ആദ്യപ്രവേഗമായ പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും ദ്രവ്യമാനകേന്ദ്രത്തിന് ത്വരണം സംഭവിക്കാൻ ഘർഷണബലം കാരണമാകുന്നു. ആദ്യ കോണീയ വേഗമായ ω_oയിൽ നിന്നും മന്ദീകരണം സംഭവിക്കാൻ ഘർഷണബലം കാരണമാകുന്നു. ചലനസമവാക്യങ്ങളെ താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന വിധം രൂപീകരിക്കാം.

$\mu_k m g = m a$

$\mu_k m g R = -I\alpha$, ഇതിൽ നിന്നും

$v = \mu_k g t,\ \omega = \omega_o - \mu_k m g R t / I$

എന്നു ലഭിക്കും

ഉരുളൽ ചലനത്തിൽ നിന്നും

$v = R\,\omega$

വലയത്തിന് $I = m R^2$

ഉരുളൽചലനം $t = \omega_o R/2\,\mu_k g$ ആകുമ്പോൾ ആരംഭിക്കുന്നു

വൃത്തതകിടിന് $I = ½\, m R^2$

തകിടിന്റെ ഉരുളൽ ചലനം $t = R\,\omega_o/3\,\mu_k g$ യിൽ ആരംഭിക്കുന്നു

അതായത് ഇവ തുല്യമാണെങ്കിൽ പോലും വൃത്തതകിട് വലയത്തേക്കാൾ മുൻപേ ഉരുളൽ ചലനം ആരംഭിക്കുന്നു.

$R = 10$ cm

$\omega_o = 10\pi$ rad s^{-1}, $\mu_k = 0.2$ ഈ വിലകൾ ഉപയോഗിച്ച് യഥാർത്ഥ സമയങ്ങൾ കണക്കാക്കാൻ സാധിക്കും.

7.31 (a) 16.4 N

(b) Zero

(c) ഏകദേശം 37°

അധ്യായം 8

8.1 (a) ഇല്ല

(b) കഴിയും, ബഹിരാകാശവാഹനം അദ്ദേഹത്തെ സംബന്ധിച്ച് വളരെ വലുതാണെങ്കിൽ g യിലെ വ്യത്യാസം തിരിച്ചറിയാനാകും.

(c) അകലത്തിന്റെ വിപരീതവർഗത്തിന് ആനുപാതികമായ ബലത്തിൽനിന്ന് വ്യത്യസ്തമായി വേലിയേറ്റ സ്വാധീനങ്ങൾ അകലത്തിന്റെ വിപരീത ക്യൂബിന് ആനുപാതികമാണ്.

8.2 (a) കുറയുന്നു; (b) കുറയുന്നു; (c) വസ്തുവിന്റെ മാസ്; (d) കൂടുതൽ

8.3 0.63 ഭാഗം കുറഞ്ഞതായിരിക്കും.

8.5 3.54×10^{8} വർഷം

8.6 (a) ഗതികോർജം, (b) കുറവാണ്

8.7 (d) വസ്തു വിക്ഷേപിക്കപ്പെട്ട സ്ഥലത്തിന്റെ സമുദ്രനിരപ്പിൽനിന്നുള്ള ഉയരം

പലായനപ്രവേഗം വസ്തുവിന്റെ മാസിനെയോ വിക്ഷേപണദിശയെയോ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല. അത് വസ്തുവിനെ വിക്ഷേപിച്ച സ്ഥലത്തെ ഗുരുത്വ പൊട്ടൻഷ്യലുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. പൊട്ടൻഷ്യൽ ആ സ്ഥാനത്തെ അക്ഷാംശവുമായും സമുദ്രനിരപ്പിൽനിന്നുള്ള ഉയരവുമായും (നേരിയ തോതിൽ) ബന്ധപ്പെട്ടു കിടക്കുന്നതിനാൽ, പലായനപ്രവേഗം (വേഗം) ഈ ഘടകങ്ങളുമായി (നേരിയ തോതിൽ) ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

8.8 കോണീയ സംവേഗവും ആകെ ഊർജവും ഒഴികെ മറ്റു ഭൗതിക അളവുകളെല്ലാം ഒരു പരിക്രമണ പാതയിൽ മാറുന്നുണ്ട്.

8.9 (b), (c), (d) എന്നിവ

8.10,11 ഈ രണ്ടു പ്രശ്നങ്ങളിലും അർധഗോളത്തെ പൂർണവൃത്തമാക്കി മാറ്റുക. P യിലും C യിലും പൊട്ടൻഷ്യൽ ഒരു സ്ഥിരമായതിനാൽ തീവ്രത പൂജ്യമായിരിക്കും. അതിനാൽ, ഈ അർധഗോളത്തെ സംബന്ധിച്ച്, (c) യും (c) യും ആണ് ശരിയായവ.

8.12 2.6×10^{8} m

8.13 2.0×10^{30} kg

8.14 1.43×10^{12} m

8.15 28 N

8.16 125 N

8.17 ഭൂമിയുടെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് 8.0×10^{6} m

8.18 31.7 km/s

8.19 5.9×10^{9} J

8.20 2.6×10^{6} m/s

8.21 0, 2.7×10^{-8} J/kg; മധ്യബിന്ദുവിൽ വച്ച ഒരു വസ്തു അസ്ഥിര സന്തുലനാവസ്ഥയിലായിരിക്കും.

8.22 -9.4×10^{6} J/kg

8.23 $GM/R^2 = 2.3 \times 10^{12}$ m s^{-2} , $\omega^2 R = 1.1 \times 10^6$ ms^{-2} ; ഇവിടെ, ω എന്നത് ഭ്രമണത്തിന്റെ കോണീയ വേഗമാണ്. നക്ഷത്രത്തിന്റെ ഭ്രമണഅവലംബകത്തിൽ, അതിന്റെ മധ്യരേഖാപ്രദേശത്തെ പുറത്തേക്കുള്ള അപകേന്ദ്രബലത്തേക്കാൾ വളരെ കൂടുതലാണ് അകത്തേക്കുള്ള ബലം. ആ വസ്തു അവിടെ ഒട്ടിനിൽക്കുന്നു. (അപകേന്ദ്രബലം കാരണം പറന്നു പോകുന്നില്ല). ഭ്രമണത്തിന്റെ കോണീയവേഗം 2000 മടങ്ങു വർധിച്ചാൽ, ആ വസ്തു പറന്നുപോയിരിക്കുമെന്ന് മനസ്സിലാക്കുമല്ലോ.

8.24 3×10^{11} J

8.25 495 km

****