# ഹയർ സെക്കന്ററി കോഴ്സ്

# സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ്

## ക്ലാസ് - XI

കേരളസർക്കാർ
പൊതുവിദ്യാഭ്യാസ വകുപ്പ്
2019

## ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

## പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീസഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യപൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

***Prepared by*** :
**State Council of Educational Research and Training (SCERT)**
Poojappura, Thiruvananthapuram - 695012, Kerala.

*Website* : www.scertkerala.gov.in *e-mail* : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471 - 2341883, Fax : 0471 - 2341869
Typesetting and Layout : SCERT
© Department of Education, Government of Kerala
*To be printed in quality paper - 80gsm map litho (snow-white)*

# ആമുഖം

ഏതു വിജ്ഞാനവും മാതൃഭാഷയിൽ പഠിക്കാനും പ്രകാശനം ചെയ്യാനും സാധിക്കും. അതിനുള്ള അവസരം പഠിതാക്കൾക്ക് ഒരുക്കേണ്ടത്, ഏതൊരു പഠന സമ്പ്രദായത്തിന്റെയും അനിവാര്യതയാണ്. അതിന്റെ തുടക്കമെന്ന നിലയ്ക്കാണ് ഹയർസെക്കന്ററി തലത്തിൽ ഭാഷേതര വിഷയങ്ങളിലെ പാഠപുസ്തകങ്ങൾ മലയാളത്തിൽ പ്രസിദ്ധീകരിക്കുന്നത്.

മാതൃഭാഷയിലൂടെയുള്ള വിദ്യാഭ്യാസം, ജ്ഞാനസമ്പാദനത്തിനുള്ള സുഗമമാർഗം എന്നതിനോടൊപ്പം സാംസ്കാരികതനിമയുടെ തിരിച്ചറിയൽ കൂടിയാണ്. അതുകൊണ്ടാണ് വികസിതരാജ്യങ്ങൾ മാതൃഭാഷയെ മുഖ്യബോധന മാധ്യമമായി സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇന്ത്യയിലാകട്ടെ, ദേശീയതലത്തിലുള്ള പ്രധാന പരീക്ഷകളെല്ലാം പ്രാദേശിക ഭാഷകളിൽക്കൂടി നടത്തുന്നതിനുള്ള സംവിധാനവും ഉണ്ടായി വരികയാണ്. ഈയൊരു സാഹചര്യത്തിൽ നമ്മുടെ കുട്ടികളും മാതൃഭാഷയുടെ ശക്തിസൗന്ദര്യങ്ങൾ തിരിച്ചറിഞ്ഞ് വിവിധ വിഷയങ്ങളിൽ ജ്ഞാനനിർമിതിയിൽ ഏർപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്. അതിന് അവരെ സജ്ജരാക്കുകയാണ് ഈ പാഠപുസ്തകങ്ങളുടെ മുഖ്യ ലക്ഷ്യം.

പരിഭാഷപ്പെടുത്തിയ പുസ്തകങ്ങളിൽ അതത് വിഷയങ്ങളിലെ സാങ്കേതിക പദങ്ങൾ പരമാവധി മലയാളത്തിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. നമ്മുടെ ഭാഷയിൽ ചിരപരിചിതമായ ഇംഗ്ലീഷ് പദങ്ങളെ അതേപടി സ്വീകരിച്ചിട്ടുമുണ്ട്. വിവർത്തനത്തിന് തീർത്തും വഴങ്ങാത്ത പദങ്ങളെ അതേരീതിയിൽ തന്നെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു. മാതൃഭാഷയിൽ പഠിക്കുന്നവർക്ക് ആശയഗ്രഹണം സുഗമമാക്കുന്ന വിധത്തിലാണ് പാഠപുസ്തകരചന നടത്തിയിരിക്കുന്നത്. അതോടൊപ്പം മലയാളഭാഷയുടെ വളർച്ചയ്ക്കും ഈ പ്രവർത്തനം സഹായകമാകുമെന്ന് കരുതുന്നു.

പാഠപുസ്തകവിവർത്തന രംഗത്ത് നമ്മുടെ രാജ്യത്ത് നടന്ന വലിയൊരു കാൽവെപ്പാണ് ഇത്. പ്രഥമ സംരംഭമെന്നനിലയിൽ പല പരിമിതികളും പരിഭാഷയിൽ വന്നിട്ടുണ്ടാകാം. ക്ലാസ്മുറിയിൽ പ്രയോഗത്തിൽ വരുമ്പോഴാണ് അവയെല്ലാം കൂടുതൽ ബോധ്യപ്പെടുക. തുടർന്ന് വരുന്ന ഘട്ടങ്ങളിൽ അവയൊക്കെ പരിഹരിക്കുന്നതിന് എല്ലാ അഭ്യുദയകാംക്ഷികളിൽ നിന്നും വിശിഷ്യ അധ്യാപകർ, വിദ്യാർത്ഥികൾ എന്നിവരിൽ നിന്നും അഭിപ്രായങ്ങളും നിർദേശങ്ങളും പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു.

**ഡോ. ജെ. പ്രസാദ്**

ഡയറക്ടർ,

എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി. കേരളം

## ശില്പശാലയിൽ പങ്കെടുത്തവർ

**മനോജ്.കെ**
എച്ച്.എസ്.എസ്., പനങ്ങാട്,
തൃശ്ശൂർ

**അൻവർ ഷമീം. ഇസഡ്.എ**
ഗവ. മോഡൽ എച്ച്.എസ്.എസ്, ചീരാൽ,
വയനാട്

**ബിജു.ജി.വി**
ഗവ.വി. എച്ച്. എസ്. എസ്., വിതുര,
തിരുവനന്തപുരം

**സജിഷ്കുമാർ. എം.**
എം.എൻ.കെ.എം.എച്ച്.എസ്.എസ് ചിറ്റിലംചേരി,
പാലക്കാട്

**ഹാസിം.എം.സി**
ഗവ. എച്ച്. എസ്. എസ്., അരോളി,
കണ്ണൂർ

**സന്തോഷ്.വി.സി**
ഗവ. എച്ച്. എസ്. എസ്., മൂക്കന്നൂർ,
എറണാകുളം

## വിഷയ വിദഗ്ധർ

**വേണുഗോപാലൻ. പി. കെ**
അസോസിയേറ്റ് പ്രൊഫ. (റിട്ട), ശ്രീ കേരളവർമ്മ കോളജ്,തൃശ്ശൂർ

**സജയൻ.റ്റി**
അസ്സിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫ., ഗവൺമെന്റ് കോളജ്, മലപ്പുറം

**ഡോ. എ. പി. കുട്ടികൃഷ്ണൻ**
സ്റ്റേറ്റ് പ്രോജക്റ്റ് ഡയറക്ടർ, സമഗ്രശിക്ഷാ, കേരളം

## അക്കാദമിക് കോ-ഓർഡിനേറ്റർ

**ഡോ.എം.പി.നാരായണനുണ്ണി**
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി

*Prepared by:* State Council of Educational Research & Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram -12, Kerala. E-mail:scertkerala@gmail.com
*Type setting by:* SCERT Computer Lab.
©
Government of Kerala
Education Department
2018

# ഉള്ളടക്കം

Y2L7R8


1. സാംഖ്യകം – വ്യാപ്തിയും വികാസവും) 7

2. ഡാറ്റാശേഖരണം 19

3. വർഗീകരണവും പട്ടികയാക്കലും 36

4. ഡയഗ്രങ്ങളും ഗ്രാഫുകളും 66

5. കേന്ദ്രപ്രവണത 86

6. പ്രകീർണ്ണനം 144

7. സ്ക്യൂനസ്സും കർട്ടോസിസും (ചരിവും കൂർമതയും) 170

8. സംഭാവ്യത 196

9. സോപാധിക സംഭാവ്യത 229

10. പ്രതിരൂപണ തന്ത്രങ്ങൾ 250

## പാഠപുസ്തകത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന സൂചനകൾ

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

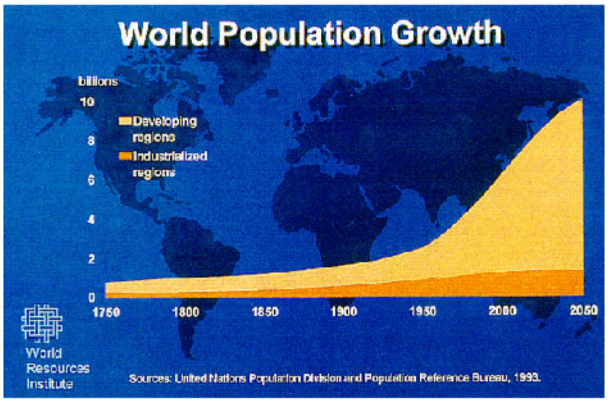
വിവരണം

നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

# 1 സാംഖ്യകം - വ്യാപ്തിയും വികാസവും (Statistics - Scope and Development)

## ആമുഖം

മാനുഷിക പ്രവർത്തനങ്ങളിലെ ഏറ്റവും ശ്രേഷ്ഠമായ കാര്യങ്ങളിലൊന്നാണ് തീരുമാനമെടുക്കുക എന്നത്. ദിനംപ്രതി നാം ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ വ്യക്തിപരമായതോ കൂട്ടായതോ ആയ തീരുമാനങ്ങൾ എടുക്കുന്നുണ്ട്. അനിശ്ചിതമായ നിബന്ധനകൾക്ക് വിധേയമായാണ് സാധാരണയായി ഇത്തരം തീരുമാനങ്ങൾ എടുക്കുന്നത്. പലപ്പോഴും യഥാർഥ ജീവിതത്തിൽ നാം അഭിമുഖീകരിക്കുന്ന ഇത്തരം പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് അഥവാ സാഹചര്യങ്ങൾക്ക് വ്യക്തമായ പരിഹാരം ഉണ്ടാകാറില്ല. ഇത്തരം ഘട്ടങ്ങളിൽ ഇവയ്ക്ക് ശാസ്ത്രീയവും ബുദ്ധിപരവുമായ തീരുമാനം എടുക്കുന്നതിന് സാംഖ്യക രീതികൾ നമ്മെ സഹായിക്കും. അടുത്തകാലങ്ങളിലായി സാംഖ്യകശാസ്ത്രത്തിന്റെ വളർച്ച, മാനുഷിക പ്രവർത്തനങ്ങളുടെ എല്ലാ തലത്തിലും അനുഭവവേദ്യമായിട്ടുണ്ട്. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് എന്നത് കേവലം ഡാറ്റയുടെ ശേഖരണവും അവയുടെ ചാർട്ടുകളും പട്ടികകളും ഉപയോഗിച്ചുള്ള പ്രതിനിധീകരണവും മാത്രമല്ല, ശേഖരിക്കപ്പെട്ട ദത്തങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള അനുമാനങ്ങളുടെ ശാസ്ത്രവും അനിശ്ചിതത്ത്വങ്ങളിൽ തീരുമാനങ്ങൾ കൈക്കൊള്ളുവാനുള്ള രീതിശാസ്ത്രവുമാണ്.




ഡയറ്റീഷ്യൻ ഭക്ഷണക്രമം ഒരുക്കുക, ഇൻഷുറൻസ് വിദഗ്ധൻ (ആക്ചറി) ലൈഫ് ഇൻഷുറൻസ് പ്രീമിയം കണക്കാക്കുക, ക്വാളിറ്റി കൺട്രോളർ ഉൽപ്പന്നം സ്വീകരിക്കുകയോ നിരാകരിക്കുകയോ ചെയ്യുക, അദ്ധ്യാപിക കുട്ടികളുടെ കഴിവുകൾ താരതമ്യം ചെയ്യുക, വിദഗ്ധർ സാമ്പത്തിക പ്രവണതകൾ പ്രവചിക്കുക, ന്യൂസ്പേപ്പറുകൾ തെരഞ്ഞെടുപ്പ് ഫലം പ്രവചിക്കുക തുടങ്ങി അനിശ്ചിതത്ത്വം നിറഞ്ഞ എല്ലാ സാഹചര്യങ്ങളെയും ഈ ശാസ്ത്രമേഖല ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.

അനിശ്ചിതത്ത്വം നിറഞ്ഞ എല്ലാ സാഹചര്യങ്ങളെയും ഇപ്പോഴത്തെ നിലയിൽ കൈകാര്യം ചെയ്യാൻ കഴിയുമെന്നത് അതിശയോക്തിപരമാണ്. എന്നാൽ പുതിയ തന്ത്രങ്ങൾ അനുദിനം വികസിക്കുകവഴി ഇത്തരം അവസരങ്ങൾ കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള യുക്തിപരവും വ്യവസ്ഥാപിതവുമായ ചട്ടക്കൂടുകൾ നൽകാൻ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന് കഴിയുന്നു.

പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ മധ്യത്തിൽ കളികളിലെ വിജയസാധ്യതകളെ വിശകലനം ചെയ്യുന്നതിനായി ഉപയോഗപ്പെടുത്തിയ സംഭാവ്യത (Probability) യുടെ പഠനത്തിലാണ് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ ചരിത്രം തുടങ്ങുന്നത്. വിദഗ്ധർ സംഭാവ്യതാസിദ്ധാന്തം, ആക്ചറിയൽ സയൻസിലും സാമൂഹികശാസ്ത്രത്തിന്റെ ചില മേഖലകളിലും പ്രയോഗിച്ചു തുട

ങ്ങിയിട്ടുണ്ട്. ഇന്ന് അനിശ്ചിതത്ത്വം നിറഞ്ഞ മാനുഷിക ഉദ്യമങ്ങളുടെ എല്ലാതലത്തിലും ഇതിന്റെ പ്രയോഗം കാണുവാൻ കഴിയും. എല്ലാ പഠനമേഖലകളിലുമെന്നപോലെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിനും രണ്ടു തരം കാഴ്ചപ്പാടുകൾ ഉണ്ട് – സൈദ്ധാന്തികവും പ്രായോഗികവും.

സൈദ്ധാന്തിക സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിൽ നിയമങ്ങൾ, സൂത്രവാക്യങ്ങൾ, തത്വങ്ങൾ എന്നിവ ഉൾപ്പെടുന്നു. യഥാർഥജീവിതത്തിലെ പ്രശ്നങ്ങളിൽ മേൽപ്പറഞ്ഞവയുടെ പ്രയോഗമാണ് പ്രായോഗിക സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിൽ ഉൾപ്പെടുന്നത്.

പ്രയോഗിക സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിനെ വിവരണാത്മക (Descriptive) സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സെന്നും അനുമാന (Inferential) സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സെന്നും രണ്ടായി തരംതിരിക്കാം. വിവരണാത്മക സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ദത്തങ്ങളെ വിശകലനം ചെയ്യുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ, അനുമാന സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് തീരുമാനങ്ങൾ എടുക്കുവാനുള്ള രീതികളാണ് മുന്നോട്ട് വയ്ക്കുന്നത്.

## 1.1 സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ ചരിത്രം (History of Statistics)

സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് എന്ന വാക്കിന്റെ ഉത്ഭവം ലാറ്റിൻ വാക്കായ "STATUS" എന്നതിൽ നിന്നോ ഇറ്റാലിയൻ വാക്കായ "STATISTA" എന്നതിൽ നിന്നോ ആണ് എന്ന് അനുമാനിക്കപ്പെടുന്നു. ഇവയുടെ അർഥം രാഷ്ട്രം അല്ലെങ്കിൽ ഭരണകൂടം എന്നാണ്. 1602 ൽ ഷേക്സ്പിയർ ഹാംലറ്റ് എന്ന നാടകത്തിൽ "സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് എന്ന വാക്ക് ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്. പഴയകാലത്ത് ഭരണാധികാരികൾ ഔദ്യോഗിക കാര്യങ്ങൾക്കായിരുന്നു സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്. അക്കാലത്ത് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ പ്രയോഗം പരിമിതമായിരിക്കുമെങ്കിലും ഭരണാധികാരികൾ ഭൂമി, കൃഷി, വാണിജ്യം, ജനസംഖ്യ, രാജ്യത്തിന്റെ ആസ്തി, നികുതി തുടങ്ങിയവയുടെ വിവരങ്ങൾ അറിയുന്നത് ആവശ്യമായിരുന്നു.

സർ റൊണാൾഡ് എയ്ല്മർ ഫിഷർ

' വിവിധ രാജ്യങ്ങളുടെ രാഷ്ട്രമീമാംസ' എന്ന അർഥത്തിലാണ് 1749 ൽ ജർമൻ സർവകലാശാലയിലെ Gottfried Achenwall സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക് (statistik) എന്ന വാക്ക് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്.

1771-ൽ ഡബ്ള്യൂ ഹൂപ്പർ എന്ന ഇംഗ്ലീഷുകാരൻ "സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ്" എന്ന വാക്ക്, ബാരൺ. ബി. എഫ് ബിഫോർഡിന്റെ "Elements of Universal Erudition" എന്ന പുസ്തകത്തിന്റെ വിവർത്തനത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഈ പുസ്തകത്തിൽ ലോകത്തിലെ എല്ലാ ആധുനിക രാഷ്ട്രങ്ങളുടെയും രാഷ്ട്രീയ വ്യവസ്ഥകളെ പറ്റി പഠിക്കുന്ന ഒരു ശാസ്ത്രമായി സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. പഴയ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സും പുതിയ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സും തമ്മിൽ വലിയ അന്തരമുണ്ട്. പക്ഷേ ഇപ്പോഴത്തെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ ഭാഗമായി പഴയ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് കൂടി ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്.

18-ാം ശതകത്തിൽ ഇംഗ്ലീഷ് സാഹിത്യകാരന്മാർ അവരുടെ കൃതികളിൽ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് എന്ന വാക്ക് ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്. 19-ാം ശതകത്തിന്റെ അന്ത്യത്തിലും ധാരാളം പഠനങ്ങൾ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിൽ നടന്നിട്ടുണ്ട്.

20-ാം ശതകത്തിൽ വില്യം.എസ്. ഗോസറ്റ് (William S Gosset) ചെറിയതരം ഡാറ്റ അടിസ്ഥാനമാക്കി തീരുമാനങ്ങൾ എടുക്കുന്ന രീതികൾ വികസിപ്പിച്ചെടുത്തു. ഈ കാലഘട്ടത്തിൽ ധാരാളം സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിഷ്യൻമാർ പുതിയ സിദ്ധാന്തങ്ങളും രീതികളും പ്രയോഗങ്ങളും രൂപപ്പെടുത്തുന്നതിൽ സജീവമായിരുന്നു.

ഇലക്ട്രോണിക് കമ്പ്യൂട്ടറുകളുടെ ആഗമനം ആധുനിക സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ വികാസത്തിൽ തീർച്ചയായും ഒരു വലിയ ഘടകമാണ്. സർ റൊണാൾഡ് എയ്ല്മർ ഫിഷർ ( Sir. Ronald Aylmer Fisher) ആധുനിക സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ പിതാവ് എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

## 1.2 സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ നിർവചനങ്ങൾ (Definitions of Statistics)

1. സംഖ്യാപരമായ ഡാറ്റകളുടെ ശേഖരണവും അവതരണവും വ്യാഖ്യാനവുമാണ് "സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് - Croxton & Cowden

2. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് എന്നത് സാമൂഹികമോ പ്രകൃതിസഹജമോ ആയ പ്രതിഭാസങ്ങളുടെ പരസ്പരബന്ധങ്ങളെ പ്രദർശിപ്പിക്കുന്നതിന് ചിട്ടയായി ക്രമീകരിച്ച അളവുകളാണ് - Conner

3. "സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് എന്നത് പ്രായോഗിക ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഒരു ശാഖയും നിരീക്ഷണ ഡാറ്റയുടെ ഗണിതവിശകലനവുമായി കണക്കാക്കാം"- A.R.Fisher.

4. വ്യത്യസ്ത ഘടകങ്ങളാൽ സ്വാധീനിക്കപ്പെട്ട, മുൻകൂട്ടി നിശ്ചയിച്ച ഉദ്ദേശത്തിനായി വ്യവസ്ഥാപിതരീതിയിൽ ശേഖരിച്ച, കണക്കെടുപ്പിലൂടെയോ കണക്കുകൂട്ടലിലൂടെയോ അളന്നു തിട്ടപ്പെടുത്തിയ, ഒരു പരിധിവരെ കൃത്യത പുലർത്തുന്ന പരസ്പര ബന്ധമുള്ള ഒരു കൂട്ടം വസ്തുതകളാണ് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് - Horace Secrist.

ഈ നിർവചനങ്ങൾ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ ചില സുപ്രധാന സവിശേഷതകളെ ചൂണ്ടിക്കാണിക്കുന്നു.

i) **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് എന്നത് വസ്തുതകളുടെ കൂട്ടമാണ്:** ഇതിനർഥം സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ഒരു ഏകവില അല്ല. ഉദാഹരണമായി ഒരു രാജ്യത്തിന്റെ ഒരു വർഷത്തെ ദേശീയ വരുമാനം സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് അല്ല. എന്നാൽ രണ്ടോ അതിലധികമോ വർഷത്തേത് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ആണ്.

ii) **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പല ഘടകങ്ങളാൽ സ്വാധീനിക്കപ്പെടുന്നതാണ്:.** ഉദാഹരണത്തിന് ഒരു ഉൽപ്പന്നത്തിന്റെ വില്പന അതിന്റെ വില, ഗുണനിലവാരം, മത്സരം, ഉപഭോക്താക്കളുടെ വരുമാനം തുടങ്ങിയവയെ ആശ്രയിക്കുന്നു.

iii) **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ഒരു പരിധിവരെ കൃത്യതയുള്ളതാണ്:** തെറ്റായ കണക്കുകൾ വിശകലനം ചെയ്താൽ നിഗമനങ്ങളും തെറ്റായിരിക്കും. ആയതുകൊണ്ട് നിഗമനങ്ങൾ അനിവാര്യമായും കൃത്യമായ കണക്കുകൾ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ളതായിരിക്കണം.

iv) **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് വളരെ ചിട്ടയോടെ ശേഖരിക്കപ്പെടണം:** ആസൂത്രണമില്ലാതെ ശേഖരിക്കപ്പെട്ട ഡാറ്റ വിശ്വസനീയമല്ല. കൂടാതെ അവ തെറ്റായ നിഗമനങ്ങളിലേക്ക് നയിക്കുകയും ചെയ്യും. മുൻകൂട്ടി നിശ്ചയിച്ച ഉദ്ദേശത്തോടെയായിരിക്കണം ഇതു ശേഖരിക്കപ്പെടേണ്ടത്.

v) **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പരസ്പര ബന്ധത്തോടെ ക്രമീകരിക്കേണ്ടതാണ് :** ഒരാൾ പരസ്പരം ബന്ധമില്ലാത്ത ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അത്തരം ഡാറ്റ ആശയക്കുഴപ്പത്തിലാക്കുകയും യുക്തിപരമായ നിഗമനങ്ങളിലേക്ക് നയിക്കാതിരിക്കുകയും ചെയ്യും. ഡാറ്റ സമയകാലങ്ങൾക്കനുസരിച്ച് താരതമ്യം ചെയ്യാവുന്നതായിരിക്കണം.

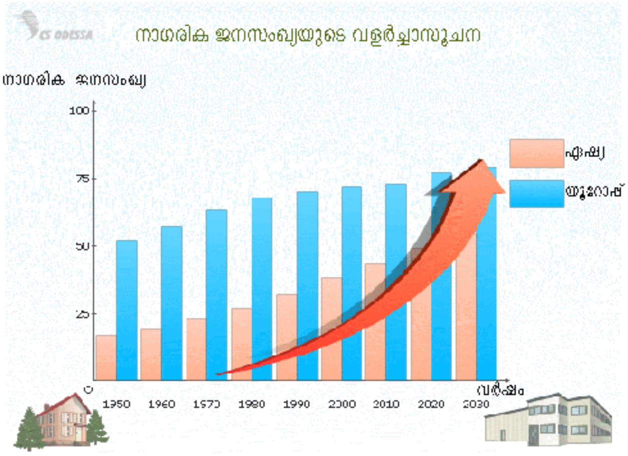
## 1.3 സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ ധർമങ്ങൾ (Functions of Statistics)

1. **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് സങ്കീർണ്ണത ലഘൂകരിക്കുന്നു:** സങ്കീർണ്ണമായ ഡാറ്റയെ എളുപ്പം മനസ്സിലാവുന്ന തരത്തിലേക്ക് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് മാറ്റുന്നു.
2. **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് വസ്തുതകളെ കൃത്യമായും സംഗ്രഹീത രൂപത്തിലും അവതരിപ്പിക്കുന്നു:** സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് വസ്തുതകളെ സംഗ്രഹിച്ചുകൊണ്ട് സംഖ്യാപരമായി കൃത്യതയോടെ അവതരിപ്പിക്കുന്നു.
3. **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് താരതമ്യം സാധ്യമാക്കുന്നു:** വർത്തമാനകാലത്തിലേയും ഭൂതകാലത്തിലേയും വിലകൾ തമ്മിൽ താരതമ്യം നടത്തി, ഭാവിയെക്കുറിച്ചുള്ള പ്രവചനം നടത്തുവാനുള്ള ധാരാളം രീതികൾ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് സാധ്യമാക്കുന്നു.

4. **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് മാനുഷിക അറിവും അനുഭവവും വികസിപ്പിക്കുന്നു:** അവ്യക്തവും കൃത്യതയില്ലാത്തതുമായ അഭിപ്രായങ്ങളെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് വ്യക്തവും കൃത്യതയുള്ളതുമാക്കുന്നു.
5. **നയരൂപീകരണത്തിനും അനുമാനങ്ങളുടെ പരിശോധനയ്ക്കും ഭാവികാര്യങ്ങളുടെ പ്രവചനത്തിനും സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് സഹായിക്കുന്നു:** വ്യവസായം-സാമ്പത്തികം-വാണിജ്യം തുടങ്ങിയ മേഖലകളിലെ പ്രധാനനയങ്ങൾ, തീരുമാനമെടുക്കൽ, പ്രവചനങ്ങൾ തുടങ്ങിയവ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് രീതികളുടെ സഹായത്താലാണ് ചെയ്തുവരുന്നത്.

## 1.4. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ വ്യാപ്തിയും പ്രാധാന്യവും (Scope and Importance of Statistics)

1. **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സും ആസൂത്രണവും:** ആധുനിക കാലഘട്ടത്തിൽ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ആസൂ



ത്രണത്തിനും നയരൂപീകരണത്തിനും ഒഴിച്ചുകൂടാനാവാത്ത ഒരു ഉപാധിയാണ്. ജീവിതത്തിൽ വിവിധ ഘട്ടങ്ങളിലെ അനിശ്ചിതാവസ്ഥയും സങ്കീർണ്ണതയും പരിഹരിക്കുന്നതിന് ആസൂത്രണം ഒഴിച്ചു കൂടാനാവാത്തതാണ്.

2. **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സും സാമ്പത്തികശാസ്ത്രവും:** സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ഡാറ്റയും സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് തന്ത്രങ്ങളും (സമയ ശ്രേണി, ഡിമാൻഡ് വിശകലനം തുടങ്ങിയവ) സാമ്പത്തികശാസ്ത്രത്തിലെ പ്രശ്നപരിഹരണത്തിനുതകുന്നവയാണ്.

3. **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സും വ്യവസായവും:** ഗുണനിലവാര നിയന്ത്രണത്തിനായി വ്യവസായത്തിൽ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഉൽപ്പാദന മേഖലയിൽ ഉൽപ്പന്നങ്ങളുടെ ഗുണനിലവാരം ഉറപ്പുവരുത്തുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്നു. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ ഉപകരണങ്ങളായ പ്ലാനുകൾ, ചാർട്ടുകൾ തുടങ്ങിയവ വളരെയധികം ഉപകാരപ്രദമാണ്.

4. **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സും ഗണിതശാസ്ത്രവും:** സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സും ഗണിതശാസ്ത്രവും തമ്മിൽ അടുത്ത ബന്ധമുണ്ട്. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് തന്ത്രങ്ങൾ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ വിവിധങ്ങളായ പ്രായോഗികഫലങ്ങളാണ്.

5. **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സും ആരോഗ്യശാസ്ത്രവും:** ആരോഗ്യശാസ്ത്രത്തിൽ രോഗത്തിന്റെ കാരണങ്ങൾ, വിവിധ മരുന്നുകളുടെ പ്രയോഗങ്ങളുടെ ഫലം തുടങ്ങിയവയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റകളുടെ ശേഖരണം, അവതരണം, വിശകലനം എന്നിവയ്ക്ക് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് രീതികൾ ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്.

6. **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സും മനശ്ശാസ്ത്രവും വിദ്യാഭ്യാസവും:** മനശ്ശാസ്ത്രത്തിലും വിദ്യാഭ്യാസത്തിലും സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന് വിപുലമായ പ്രയോഗികതലങ്ങളുണ്ട്. ഒരു പരീക്ഷയുടെ വിശ്വാസ്യതയും സാധുതയും കണക്കാക്കുന്നതിന്, IQ അളക്കുന്നതിന്, ഘടക വിശകലനത്തിന് എല്ലാം വ്യാപകമായി സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ഉപയോഗിക്കുന്നു.

7. **സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സും നേതൃത്വപാഠവും** : ഉൽപ്പാദനം, വിപണനം, ധനകര്യം, ബാങ്കിങ്, നിക്ഷേപം, അക്കൗണ്ടിങ്, തുടങ്ങിയ വിവിധ മേഖലകളിൽ തീരുമാനമെടുക്കുന്നതിനാവശ്യമായ വിവരങ്ങൾ ലഭ്യമാക്കുന്നതിൽ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് വിശകലനം ധാരാളമായി ഉപയോഗിക്കുന്നു.

### പ്രവർത്തനം

ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ പ്രാധാന്യവും ധർമങ്ങളും വിശദമാക്കുന്നതിന് പത്രങ്ങളുടെയും മാസികകളുടെയും സഹായത്താൽ ഒരു റിപ്പോർട്ട് തയാറാക്കുക.

## 1.5 സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ പരിമിതികൾ (Limitations of Statistics)

1. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ഉപയോഗിക്കാൻ സാധിക്കാത്ത ചില സന്ദർഭങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ ആശയങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന്, സൗന്ദര്യം, ബുദ്ധി, ധൈര്യം തുടങ്ങി നേരിട്ട് അളന്നു തിട്ടപ്പെടുത്തുവാൻ സാധിക്കാത്തവ. സംഖ്യാവൽക്കരണം സാധ്യമല്ലാത്ത ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിലെല്ലാം സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന് പരിമിതികളുണ്ട്.

2. ശരാശരി സ്വഭാവത്തെ വ്യക്തമാക്കുന്ന സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പൊതുപ്രവണകളെ ആണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് വ്യക്തിഗത ഇനങ്ങളെപ്പറ്റി പഠിക്കുന്നില്ല, മറിച്ച്

കാര്യങ്ങൾ സംഗ്രഹിച്ച് കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് നദിയുടെ ശരാശരി ആഴം ഒരു കരയിൽ നിന്നും മറ്റേ കരയിലേക്ക് എത്തുന്നതുവരെ 4 അടിയാണെന്നു പറഞ്ഞാൽ തെറ്റിദ്ധരിക്കപ്പെടാം. ആഴം 4 അടിയിൽ കൂടുതൽ വരുന്ന ഭാഗങ്ങൾ അതിനിടയിൽ ഉണ്ടായെന്നു വരാം.

3. ഒരു പ്രത്യേക ഉദ്ദേശത്തിനായി ശേഖരിക്കപ്പെട്ട സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ഡാറ്റ മറ്റൊരു സന്ദർഭത്തിൽ അനുയോജ്യമാകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു വ്യക്തി ശേഖരിച്ച ഡാറ്റ മറ്റൊരാൾക്ക് ഉപയോഗപ്രദമാകണമെന്നില്ല.
4. ഗണിതംപോലെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പൂർണ്ണമായും കൃത്യതയുള്ളതല്ല. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ ഈ പരിമിതികളെക്കുറിച്ച് തീർച്ചയായും ബോധവാന്മാരായിരിക്കണം.

### സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ ദുരുപയോഗങ്ങൾ (Misuse of Statistics)

സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ ദുരുപയോഗമാണ് ഈ ശാസ്ത്രത്തിനെ അപകീർത്തിപ്പെടുത്തുന്നതിനും ജനങ്ങളുടെ ഇടയിൽ വിശ്വാസ്യത ഇല്ലാത്തതാക്കുന്നതിനുമുള്ള മുഖ്യകാരണം.

ദുരുപയോഗത്തിന്റെ മുഖ്യകാരണങ്ങൾ താഴെ പറയുന്നവയാണ്.

1. ഡാറ്റയുടെ ഉറവിടം നൽകപ്പെടുന്നില്ല.
2. തെറ്റായ ഡാറ്റ.
3. യഥാർഥ പ്രാതിനിധ്യമില്ലാത്ത സാമ്പിൾ.
4. അപര്യാപ്തമായ സാമ്പിൾ.
5. നീതിയുക്തമല്ലാത്ത താരതമ്യങ്ങൾ.
6. അനാവശ്യമായ നിഗമനങ്ങൾ.
7. സന്ദർഭത്തിന് അനുയോജ്യമല്ലാത്ത സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ഉപാധികൾ.

## 1.6 സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ ചില പ്രായോഗികതലങ്ങൾ (Applied areas of Statistics)

### 1. ആക്ച്വറിയൽ ശാസ്ത്രം (Actuarial science)

ഇൻഷുറൻസ് മേഖലയിലും സാമ്പത്തികമേഖലയിലും ഉണ്ടാകുന്ന നഷ്ടസാധ്യതകളെ അളക്കുന്നതിന് ഗണിതശാസ്ത്രവും സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സും ഉപയോഗിച്ചുള്ള പഠനമേഖലയാണ് ആക്ചറിയൽ ശാസ്ത്രം. ഈ മേഖലയിലെ വിദഗ്ധരെ ആക്ചറികൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു. പല രാജ്യങ്ങളിലും ആക്ചറികൾ അവരുടെ വൈദഗ്ധ്യം പ്രയാസമേറിയ പരീക്ഷകളിലൂടെ തെളിയിക്കേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്. ആക്ചറി

യൽ ശാസ്ത്രം പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ട അനവധി വിഷയങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നു. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ്, ഡാറ്റ, ഗണിതം, സാമ്പത്തികശാസ്ത്രം, കമ്പ്യൂട്ടർ പ്രോഗ്രാമിങ് തുടങ്ങി പലതും ഇതിൽ ഉൾപ്പെടുന്നുണ്ട്. കാലങ്ങളായി ഇൻഷ്വറൻസ് പ്രീമിയം കണക്കാക്കുന്നതിനുവേണ്ട പട്ടികകൾ രൂപീകരിക്കുന്നതിന് ആക്ചറി ശാസ്ത്രത്തിലെ ഡിറ്റർമിനിസ്റ്റിക് മോഡലുകൾ ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. ആധുനിക സാമ്പത്തിക സിദ്ധാന്തങ്ങളുടേയും മറ്റു മോഡലുകളുടേയും സംയോജനം, അതിവേഗ കമ്പ്യൂട്ടറുകളുടെ വ്യാപനം എന്നിവമൂലം ഈ ശാസ്ത്രം കഴിഞ്ഞ 30 വർഷത്തിൽ വിപ്ലവാത്മകമായ മാറ്റങ്ങളിലൂടെ കടന്നുപോയിട്ടുണ്ട്.

**2. ജൈവസാംഖ്യകം – (Bio-Statistics)**

ജൈവ-സാംഖ്യകം (ബയോമെട്രി, ബയോമെട്രിക്സ് എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു) എന്നത് ജീവശാസ്ത്രത്തിലെ വിവിധ മേഖലകളിലുള്ള സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ പ്രയോഗമാണ്. ജൈവ-സാംഖ്യകത്തിന്റെ ശാസ്ത്രം എന്നത് ജീവശാസ്ത്രപരമായ പരീക്ഷണങ്ങളുടെ രൂപകൽപ്പനയാണ്, പ്രത്യേകിച്ച് ഔഷധം, കൃഷി, മത്സ്യകൃഷി എന്നീ മേഖലകളിൽ. ഈ മേഖലകളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റ ശേഖരണം, വിവരണം, വിശകലനം, അനുമാനം, ക്രോഡീകരണം എന്നിവ ഇതിൽ ഉൾപ്പെടും. ഔഷധങ്ങളേയും ആരോഗ്യത്തേയും പ്രത്യേകം പ്രതിപാദിക്കുന്ന ശാഖ ആരോഗ്യ-ജൈവ സാംഖ്യകം (Medical Bio Statistics) എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

**3. കാർഷിക സാംഖ്യകം (Agricultural Statistics)**

കാർഷിക മേഖലയിലെ ഗവേഷണങ്ങൾ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ രീതികളെയും നിർവഹണ ക്രമത്തേയും അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയാണ് നടക്കുന്നത്. അനുമാനങ്ങൾ പരിശോധിക്കുന്നതിലും പരാമീറ്റേർസ് കണക്കാക്കുന്നതിലുമെല്ലാം ഇത് ഉപയോഗിക്കുന്നു. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റ്ക്സ് രീതികളും തത്ത്വങ്ങളും കാർഷിക പ്രവർത്തനങ്ങളിലെ പലതരത്തിലുള്ള പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നതിന് അത്യാവശ്യമാണ്. ജൈവികവും കാർഷികവുമായ ഡാറ്റയിൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന വൈവിധ്യം മനസ്സിലാക്കുന്നതിനും വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നതിനും സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ആവശ്യമാണ്. കാർഷികോൽപ്പാദനം, മൃഗസംരക്ഷണം, കാർഷികരംഗത്തെ യന്ത്രവൽക്കരണം, കാർഷിക സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്രം, ജലസേചനം എന്നിങ്ങനെ കൃഷിശാസ്ത്രത്തിലെ വിവിധ ശാഖകളിൽ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ഫലപ്രദമായി ഉപയോഗിക്കുന്നു.

**പ്രവർത്തനം**

വിവിധപഠനമേഖലകളിലുള്ള സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ വ്യത്യസ്തശാഖകളുടെ പട്ടിക തയാറാക്കുക.

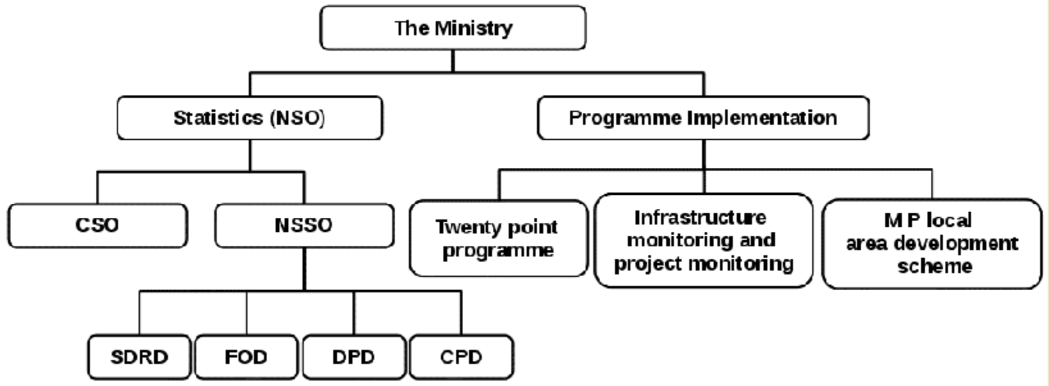
## 1.7 ഔദ്യോഗിക സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് (Official Statistics)

സർക്കാർ ഏജൻസികൾ പൊതുസ്ഥാപനങ്ങൾ പോലുള്ള അന്താരാഷ്ട്ര സംഘടനകൾ എന്നിവ പ്രസിദ്ധീകരിച്ച സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ആണ് ഔദ്യോഗിക സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ്. ഇത് ഒരു

പൗരന്റെ ജീവിതത്തിലെ എല്ലാ പ്രധാന മേഖലകളിലേയും ഗുണപരവും ഗണപരവുമായ വിവരങ്ങൾ തരുന്നു. പൊതുജനങ്ങൾക്ക് ലഭ്യമാകുന്ന സാമ്പത്തികവും സാമൂഹികവുമായ വികസനം സംബന്ധിച്ച വിവരങ്ങൾ നൽകുക വഴി ഗവൺമെന്റിന്റെ നയങ്ങളുടെ പ്രയോജനം വിലയിരുത്താൻ ഔദ്യോഗിക സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് അവസരമൊരുക്കുന്നു. ഇത് ഗവൺമെന്റ് നയങ്ങളുടെ സ്വീകാര്യത മെച്ചപ്പെടുത്തുന്നതിന് സഹായിക്കും.

### സാംഖ്യക പദ്ധതി നിർവഹണ മന്ത്രാലയം (MOSPI)

സാംഖ്യക വിഭാഗവും പദ്ധതി നിർവഹണ വിഭാഗവും ലയിച്ചതിനുശേഷം ഒരു സ്വതന്ത്ര മന്ത്രാലയമായി സാംഖ്യക പദ്ധതി നിർവഹണ മന്ത്രാലയം (MOSPI)1999 ൽ നിലവിൽ വന്നു. ഈ മന്ത്രാലയത്തിന്റെ രണ്ടു വിഭാഗങ്ങളാണ് സാംഖ്യകവും പദ്ധതി നിർവഹണവും. ദേശീയ സാഖ്യക കാര്യാലയം (NSO- National Statistical Organisation) എന്നറിയപ്പെടുന്ന സാംഖ്യക വിഭാഗം, കേന്ദ്രസാംഖ്യക കാര്യാലയം (CSO - Central Statistical Office), ദേശീയ സാമ്പിൾ സർവെ കാര്യാലയം (NSSO-National Sample Survey Office) എന്നിവ ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.




SDRD - Suvey Design and Research Division

FOD - Field Operations Division

DPD - Data Processing Division

CPD - Co-ordination and Publication Division

### കേന്ദ്രസാംഖ്യക കാര്യാലയം (CSO)

NSO യുടെ രണ്ടു വിഭാഗങ്ങളിലൊന്നാണ് CSO. രാജ്യത്തെ സാംഖ്യക പ്രവർത്തനങ്ങളുടെ ഏകോപനമാണ് ഇതിന്റെ മുഖ്യചുമതല. സാംഖ്യക നിലവാരം ആവിഷ്കരിക്കുകയും നിലനിർത്തുകയും ചെയ്യുക എന്നതും CSO യുടെ ഉത്തരവാദിത്തമാണ്.

ദേശീയ അക്കൗണ്ടുകളുടെ സമാഹാരണം, ദേശീയ തലത്തിലുള്ള സാമ്പത്തിക-വ്യാവസായിക സർവെ, വ്യാവസായിക സൂചികയുടെ സമാഹരണം, ഉപഭോക്തൃ വില സൂചിക കണക്കാക്കൽ , വിവിധതരത്തിലുള്ള സാമൂഹിക സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പരിശീലനം, അന്തർദേശീയ സഹകരണം, വ്യാവസായിക തരംതിരിക്കൽ തുടങ്ങിയവയെല്ലാം CSO കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നു.

CSO യുടെ തലവൻ ഡയറക്ടർ ജനറൽ ആണ്. അദ്ദേഹത്തിന്റെ കീഴിൽ 5 അഡീഷണൽ ഡയറക്ടർ ജനറൽമാർ ഉണ്ട്. അവർ താഴെ പറയുന്ന മേഖലകൾ കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നു. ദേശീയ അക്കൗണ്ട് വിഭാഗം, സാമൂഹ്യസാംഖ്യക വിഭാഗം, സാമ്പത്തിക സാംഖ്യക വിഭാഗം, പരിശീലന വിഭാഗം, ഏകോപന പ്രസിദ്ധീകരണ വിഭാഗം. ഡൽഹിയിലെ സർദാർ പട്ടേൽ ഭവനിലാണ് CSO സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്. CSO യുടെ വ്യവസായശാഖ കൊൽക്കത്തയിലാണ്. കമ്പ്യൂട്ടർ കേന്ദ്രം ഡൽഹിയിലെ ആർ.കെ. പുരത്തുമാണ്.

## ദേശീയ സാമ്പിൾ സർവെ കാര്യാലയം (NSSO)

ഇന്ത്യാഗവൺമെന്റിന്റെ കീഴിലെ ദേശീയ സാമ്പിൾ സർവ്വെ സംഘടനയാണ് ഇന്ന് ദേശീയ സാമ്പിൾ സർവെ കാര്യാലയം എന്നറിയപ്പെടുന്നത്. സാമൂഹിക, സാമ്പത്തിക സർവ്വേകൾ കൃത്യമായും നടത്തുന്ന ഇന്ത്യയിലെ ഏറ്റവും വലിയ സംഘടനയാണിത്. 1950 ലാണ് ഇത് സ്ഥാപിതമായത്.

NSSO - ന് നാല് വിഭാഗങ്ങളാണുള്ളത്.

1. സർവെ ഡിസൈൻ ആന്റ് റിസർച്ച് ഡിവിഷൻ (എസ്.ഡി.ആർ.ഒ)
2. ഫീൽഡ് ഓപ്പറേഷൻസ് ഡിവിഷൻ (എഫ്.ഒ.ഡി)
3. ഡാറ്റാ പ്രോസസിങ് ഡിവിഷൻ (ഡി.പി.ഡി)
4. കോ-ഓർഡിനേഷൻ ആൻഡ് പബ്ലിക്കേഷൻ ഡിവിഷൻ (സിപിഡി)

### പദ്ധതി നിർവഹണ വിഭാഗം

പദ്ധതി നിർവഹണ വിഭാഗത്തിന് മൂന്ന് ശാഖകൾ ഉണ്ട്.

1. ഇരുപതിന പരിപാടി
2. അടിസ്ഥാന സൗകര്യങ്ങളുടേയും പദ്ധതികളുടെയും നിരീക്ഷണം.
3. എം.പി. മാരുടെ പ്രാദേശിക വികസനപദ്ധതി.

ഇവ കൂടാതെ ദേശീയ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് കമ്മീഷൻ എന്ന വിഭാഗം കൂടിയുണ്ട്. കൂടാതെ സ്വതന്ത്ര സ്ഥാപനമായ **ISI** യും ഇതിന്റെ കീഴിലാണ്.

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

ഇന്ത്യയിലെ പ്രധാനപ്പെട്ട സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ സംഘടന (ഓഫീസ്)കളെ കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യുക.

## ഇന്ത്യൻ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ ഇൻസ്റ്റിറ്റ്യൂട്ട് (ISI - Indian Statistical Institute)

ഗവേഷണം, അധ്യാപനം, പ്രായോഗികപഠനം, പ്രകൃതിശാസ്ത്രം, സാമൂഹികശാസ്ത്രം എന്നിവയ്ക്കുവേണ്ടി പ്രൊഫ. പ്രശാന്ത് ചന്ദ്ര മഹലനോബീസ് സ്ഥാപിച്ച ഒരു ദേശീയ പ്രാധാന്യമുള്ള സ്ഥാപനമാണ് ISI. 1931, ഡിസംബർ 17ന് കൽക്കട്ടയിലാണ് ഇത് സ്ഥാപിച്ചത്. ISI പ്രസിദ്ധീകരിക്കുന്ന ജേണലാണ് "SANKHYA"

പ്രൊഫ. പി.സി.മഹലനോബിസ് ഇന്ത്യൻ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ പിതാവ് എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. സ്വാതന്ത്ര്യാനന്തര കാലത്ത് സാമ്പത്തിക ആസൂത്രണം, സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ വികസനം എന്നിവയിലെ അദ്ദേഹത്തിന്റെ ശ്രദ്ധേയമായ സംഭാവനകളെ അംഗീകരിച്ചുകൊണ്ട് ഭാരത സർക്കാർ എല്ലാ വർഷവും അദ്ദേഹത്തിന്റെ ജന്മദിനമായ ജൂൺ 29 ന് ദേശീയ സാംഖ്യക ദിനമായി ആഘോഷിക്കുന്നു. ഔദ്യോഗിക സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ പ്രാധാന്യം ദേശീയതലത്തിൽ ഉയർത്തിക്കാട്ടി അന്നേദിവസം സെമിനാറുകൾ, ചർച്ചകൾ മൽസരങ്ങൾ തുടങ്ങിയവ സംഘടിപ്പിച്ച് ഈ ദിനം ആഘോഷിക്കുന്നു.

### സാമ്പത്തിക സാംഖ്യക വകുപ്പ് , കേരളം (Economics and Statistics Department, Kerala)

കേരള സമ്പദ് ഘടനയിലെ വിവിധ മേഖലകളിൽ വ്യവസ്ഥാപിതമായ ഡാറ്റ ശേഖരണം, സമാഹരണം, വിവിധ സ്ഥിതിവിവരക്കണക്കുകളുടെ വിശകലനം, വ്യാഖ്യാനം, പ്രചരണം എന്നിവയ്ക്കായുള്ള സംസ്ഥാന സർക്കാറിന്റെ ഉത്തരവാദിത്തപ്പെട്ട ഒരു ഏജൻസിയാണിത്. ഈ വകുപ്പ് സംസ്ഥാനത്തിന്റെ സാംഖ്യകവ്യവസ്ഥയുടെ നാഡീകേന്ദ്രമാണ്. ഡയറക്ടറാണ് ഇതിന്റെ തലവൻ. ഡയറക്ടറെ കൂടാതെ, 14 ജില്ലാതല ഓഫീസറും ഒന്നോ അതിലധികമോ അഡീഷണൽ ജില്ലാ ഓഫീസർമാരും ഒരു വിലനിലവാര സൂപ്പർവൈസറി ഓഫീസറും രണ്ടു ഗവേഷക ഓഫീസർമാരും ഉണ്ട്.

താലൂക്ക് തലത്തിൽ താലൂക്ക് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ഓഫീസ് ഉണ്ട്. സംസ്ഥാനത്തെ ഏറ്റവും താഴെ തട്ടിലെ ഒരു സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് കാര്യാലയമാണിത്. ആകെ 61 താലൂക്ക് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ഓഫീസുകൾ നിലവിലുണ്ട്.

#### പ്രവർത്തനം

അടുത്തുള്ള സാമ്പത്തിക സാംഖ്യക വകുപ്പ് കാര്യാലയം സന്ദർശിച്ച് അവയുടെ പ്രവർത്തനത്തെ പറ്റി വിശദമായി ഒരു റിപ്പോർട്ട് തയാറാക്കുക.

### നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

*സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് എന്ന പഠനശാഖയുടെ പ്രയോഗം എല്ലാ മേഖലയിലുമുണ്ട്. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ഇല്ലാതെ നമുക്ക് നമ്മുടെ ബഡ്ജറ്റ് തയാറാക്കാനോ, നികുതി അടക്കുവാനോ, കളികൾ അതിന്റെ പൂർണതയിൽ ആസ്വദിക്കാനോ, ക്ലാസ് മുറികളിൽ വിദ്യാർഥികളുടെ നിലവാരം അളക്കുവാനോ സാധിക്കുകയില്ല. ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ ചരിത്രം, പ്രാധാന്യം, വികാസം, വ്യാപ്തി, നിർവചനങ്ങൾ എന്നിവയാണ് ചർച്ച ചെയ്തത്. ജീവിതത്തിന്റെ എല്ലാ തുറകളിലും സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പ്രയോഗിക്കുന്നുണ്ട്. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ വിവിധ ശാഖകൾ ഇവിടെ വിശദീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. കേന്ദ്രഗവൺമെന്റിന്റെ*

*സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് മന്ത്രാലയവും പ്രസിദ്ധമായ ISI യും അവയുടെ പ്രവർത്തനങ്ങളും നാം ഇവിടെ കാണുകയുണ്ടായി. കൂടാതെ സാമ്പത്തിക സാംഖ്യക വകുപ്പിനെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു ധാരണയും നമുക്കുണ്ടായി.*

### പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പഠിക്കുന്നതിലൂടെ പഠിതാവ്:

- സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ ചരിത്രം, നിർവചനം, വികാസം, വ്യാപ്തി എന്നിവ വിവരിക്കുന്നു.
- വിവിധ മേഖലകളിൽ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ പ്രാധാന്യം തിരിച്ചറിയുന്നു.
- സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ വ്യത്യസ്ത ശാഖകളെ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നു.
- MOSPI, CSO, NSSO, ISI, സാമ്പത്തിക സാംഖ്യക വകുപ്പ് എന്നിവയുടെ പ്രവർത്തനങ്ങളെ വിശദീകരിക്കുന്നു.

### വിലയിരുത്തൽ ഇനങ്ങൾ

1) "സംഖ്യാപരമായ ഡാറ്റകളുടെ ശേഖരണവും അവതരണവും വ്യാഖ്യാനവുമാണ് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ്".ഈ നിർവചനം ആരുടേതാണ്?

a) RA Fisher b) Horace Secrist
c) Croxton & Cowden d) Corner

2) ആധുനിക സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ പിതാവ് എന്നറിയപ്പെടുന്നത്?

a) Corner b) R A Fisher
c) Mahalanobis c)Gosset

3) ഗണിതത്തിന്റെയും സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെയും രീതികൾ ഇൻഷുറൻസ് അപകടമേഖലയിലും സാമ്പത്തിക വ്യവസായ മേഖലയിലും പ്രയോഗിക്കുന്ന പഠനശാഖയാണ്.

a) ജൈവസാംഖ്യകം b) കാർഷിക സാംഖ്യകം
c) ആക്ചറിയൽ ശാസ്ത്രം d) ഉൽപ്പാദന സാംഖ്യകം

4) CSO സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്

a) മുംബൈ b) കൊൽക്കത്ത
c) ന്യൂഡൽഹി d) ചെന്നൈ

5) സാമൂഹിക-സാമ്പത്തിക സർവെ നിരന്തരമായി നടത്തുന്ന ഇന്ത്യയിലെ ഏറ്റവും വലിയ സംഘടനയാണ്.

a) CSO b) NSSO c) ISI d) NASA

6) ഐ.എസ്.ഐ സ്ഥാപിച്ചത്.

a) P C Mahalanobis b) R A Fisher c) Horace Secrist d) C R Rao

7) ഐ.എസ്.ഐ സമിതി ചെയ്യുന്നത്

a) കൊൽക്കത്ത b) ബംഗലൂരു c) ചെന്നൈ d) പൂന

8) ദേശീയ സാംഖ്യദിനം ആചരിക്കുന്നത്?

a) ജൂൺ 1 b) ജൂൺ 29 c) ജൂലൈ 4 d) ജൂലൈ 29

9) ഇന്ത്യൻ സാംഖ്യകശാസ്ത്രത്തിന്റെ പിതാവ് എന്നറിയപ്പെടുന്നത്...... ആണ്.

a) R A Fisher b) S P Gupta
c) C R Rao d) P C Mahalanobis

10) ഐ.എസ്.ഐ പ്രസിദ്ധീകരിക്കുന്ന ജേർണൽ ആണ്.

a) Statistica b) Sankhya c) Sample Surveys d) Census

11) കേരളത്തിലെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ കേന്ദ്ര നാഡീവ്യൂഹത്തിന്റെ പേര് എഴുതുക.

12) "ഈ ശതാബ്ദക്കാലത്ത് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് മാനുഷികസംരഭത്തിന്റെ എല്ലാ ഘട്ടങ്ങളിലും പ്രയോഗികത ഉണ്ടാക്കിയിട്ടുണ്ട്" – ഈ പ്രസ്താവനയെക്കുറിച്ച് പ്രതികരിക്കുക.

13) Horace Secrist ന്റെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിനെക്കുറിച്ചുള്ള നിർവചനത്തെ വിമർശനാത്മകമായി നിങ്ങൾ എങ്ങനെ സമീപിക്കും?

14) വിവിധ മേഖലകളിൽ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ വ്യാപ്തിയെക്കുറിച്ച് പരിശോധിക്കുക.

15) "മഞ്ഞുമൂടിക്കിടക്കുന്ന കാലാവസ്ഥയിൽ സംഭവിക്കുന്ന അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം തെളിമയുള്ള കാലാവസ്ഥയേക്കാൾ കുറവാണ്, ആയതിനാൽ മഞ്ഞിൽ ഡ്രൈവ് ചെയ്യുന്നതാണ് നല്ലത്" ഈ പ്രസ്താവനയുമായി നിങ്ങൾ യോജിക്കുന്നുണ്ടോ? എന്തുകൊണ്ട്?

16) താഴെ പറയുന്ന പഠനശാഖകളിൽ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ പ്രാധാന്യത്തെക്കുറിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

a) ആക്ചറിയൽ ശാസ്ത്രം b) ജൈവ സഖ്യകം c) കാർഷിക സഖ്യകം

17) താഴെ പറയുന്നവയ്ക്ക് ലഘുകുറിപ്പ് തയാറാക്കുക.

a) CSO b) NSSO c) ISI

18) NSSO യുടെ വിഭാഗങ്ങൾ ഏതെല്ലാം?

19) സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ ചില ദുരുപയോഗങ്ങൾ പ്രസ്താവിക്കുക.

20) സംസ്ഥാന സാമ്പത്തിക സഖ്യകകാര്യാലയത്തെപ്പറ്റി ഒരു ലഘുക്കുറിപ്പ് തയാറാക്കുക.

**ഉത്തരങ്ങൾ**

1) c 2) b 3) c 4) c 5) b 6) a 7) a 8) b 9) d 10) b

P8A6T3

# 2 ഡാറ്റാശേഖരണം (Collection of Data)

## ആമുഖം

സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് എന്നത് ഡാറ്റയുടെ ശേഖരണം, ചിട്ടപ്പെടുത്തൽ, വിശകലനം, വ്യാഖ്യാനം, അവതരണം എന്നിവയെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനമാണെന്ന് അധ്യായം ഒന്നിൽ നാം മനസ്സിലാക്കി. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പഠിക്കുന്നതിനുള്ള ആദ്യപടി ഡാറ്റ ശേഖരണമാണ്, ഈ അധ്യായത്തിൽ ഇതിനെക്കുറിച്ച് വിശദമായി പ്രതിപാദിക്കുന്നു.

## 2.1. ഡാറ്റാശേഖരണം (Collection of Data)

ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ വ്യത്യസ്തതരം ഡാറ്റകൾ ശേഖരിക്കുന്നതിനുള്ള സാഹചര്യം നമുക്കുണ്ടാവാറുണ്ട്. അധ്യാപകൻ വിദ്യാർഥിയുടെ ഒരു പരീക്ഷയിലെ സ്കോറുകൾ സംബന്ധിച്ച വിവരങ്ങൾ ശേഖരിക്കുന്നു, ഒരു പത്രപ്രവർത്തകൻ സമീപകാല സാമൂഹിക വിഷയങ്ങളെ സംബന്ധിച്ച വിവരങ്ങൾ ശേഖരിക്കുന്നു. വരാനിരിക്കുന്ന തെരഞ്ഞെടുപ്പിൽ വോട്ടർമാരുടെ തീരുമാനം എന്താകും എന്നതിനെക്കുറിച്ച് രാഷ്ട്രീയക്കാരൻ വിവരങ്ങൾ ശേഖരിക്കുന്നു. എന്നിങ്ങനെ പലവിധത്തിൽ ഡാറ്റാശേഖരണം നടക്കുന്നുണ്ട്.

ഡാറ്റം (datum) എന്നതിന്റെ ബഹുവചനമാണ് ഡാറ്റ (data). ആവശ്യമായ വിവരം ലഭ്യമാക്കുന്ന അളവിനെയോ, ഫലത്തെയോ, വസ്തുതയെയോ, പ്രാപ്താങ്കത്തേയോ (observation) ആണ് ഡാറ്റ എന്നത് കൊണ്ട് അർഥമാക്കുന്നത്.

വിവിധ സ്രോതസ്സുകളിൽ നിന്നും ഒരു പ്രത്യേക ആവശ്യത്തിനായി വ്യവസ്ഥാപിതമായി ഡാറ്റകൾ ശേഖരിക്കുന്നതിനെ ഡാറ്റാശേഖരണം എന്നു പറയുന്നു.

നമുക്കാവശ്യമുള്ള ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുന്നതിനുള്ള നേടുന്നതിനുള്ള ജനപ്രിയ ഉപകരണങ്ങളാണ് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ സർവ്വേകൾ. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ സർവേകളുമായി ഇടപഴകുന്നതിനു മുമ്പ്, താഴെ പറയുന്ന പദങ്ങൾ നാം മനസ്സിലാക്കേണ്ടതുണ്ട്.

### സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ അന്വേഷണം (Statistical Investigation)

വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ട പ്രക്രിയയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലുള്ള ഡാറ്റയുടെ ശേഖരണവും വർഗ്ഗീകരണവും അവതരണവും വിശകലനവും വ്യാഖ്യാനവും ചേർന്നതാണ് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ അന്വേഷണം. ഒരു അന്വേഷണം നടത്താൻ അധികാരപ്പെട്ട ആൾ അന്വേഷകൻ (Investigator) എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ഒരു സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ അന്വേഷണത്തിൽ പ്രശ്നത്തെ രൂപപ്പെടുത്തുക, ഡാറ്റ ശേഖരണരീതികൾ നിർദ്ദേശിക്കുക, ശരിയായ രീതിയിലുള്ള വിവിധഘട്ടങ്ങളെ ക്രമീകരിക്കുക, ഡാറ്റയെ വിശകലനം ചെയ്യുക, ഫലത്തെ വ്യാഖ്യാനിക്കുക എന്നീ കാര്യങ്ങൾ അന്വേഷകൻ നിർവഹിക്കുന്നു. സാധാരണയായി, പഠനമണ്ഡലത്തിൽ നിന്നും ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുന്നതിന് അന്വേഷകൻ ചില വ്യക്തികളെ

നിയമിക്കുന്നു. ഇത്തരം ആളുകളെ വിവരസമ്പാദകൻ (Enumerator) എന്നു വിളിക്കുന്നു. വിവരസമ്പാദകൻ അന്വേഷണ നടപടിക്രമങ്ങൾ പൂർണ്ണമായും അറിയണമെന്നില്ല. അന്വേഷകന് വേണ്ട ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുക എന്നതാണ് അയാളുടെ/അവളുടെ ചുമതല. വിവരസമ്പാദകൻ ചെയ്യേണ്ട പ്രവർത്തനങ്ങളെ പരിശീലിപ്പിക്കുകയും പരിശോധിക്കുകയും ചെയ്യുക എന്നത് അന്വേഷകന്റെ ചുമതലയാണ്. വിവരസമ്പാദകൻ ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുന്ന പ്രക്രിയയെ വിവരസമ്പാദനം (Enumeration) എന്നു പറയുന്നു.

## സമഷ്ടിയും സാമ്പിളും (Population and Sample)

പഠനവിധേയമാക്കുന്ന മുഴുവൻ വ്യക്തികളോ വസ്തുക്കളോ ഘടകങ്ങളോ ചേർന്നതാണ് സമഷ്ടി. തെരഞ്ഞെടുപ്പ് പ്രചരണതന്ത്രം ആവിഷ്കരിക്കുമ്പോൾ, ഒരു രാഷ്ട്രീയക്കാരനെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം ആ നിയോജകമണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ അംഗീകൃത വോട്ടർമാരും ചേർന്നതാണ് സമഷ്ടി. സമഷ്ടിയിലെ ഓരോ അംഗത്തിൽ നിന്നും ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുകയാണെങ്കിൽ അത്തരം അന്വേഷണത്തെ സെൻസസ് (Census) എന്ന് വിളിക്കുന്നു. സമഷ്ടിയിലെ വസ്തുക്കളുടെ എണ്ണത്തിനനുസരിച്ച് സമഷ്ടിയെ പരിമിതമെന്നും അനന്തമെന്നും തരംതിരിക്കാം. സമഷ്ടിയിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന വ്യക്തികളുടെ എണ്ണം പരിമിതമാണെങ്കിൽ അതിനെ പരിമിത സമഷ്ടി എന്ന് പറയുന്നു. കേരള യൂണിവേഴ്സിറ്റിയിലെ 2013 -14 വർഷത്തെ വിദ്യാഭ്യാസ നിലവാരം സംബന്ധിച്ച പഠനം പരിഗണിക്കുമ്പോൾ കേരള സർവകലാശാലയിലെ ആ വർഷത്തെ എല്ലാ വിദ്യാർഥികളും ഒരു പരിമിത സമഷ്ടിയായി കണക്കാക്കാം.

പരിമിതമല്ലാത്തതോ വളരെ വലിപ്പമേറിയതോ ആയ സമഷ്ടി അനന്തസമഷ്ടി എന്നറിയപ്പെടുന്നു. 18 വയസ്സിന് മുകളിലുള്ള വ്യക്തികളുടെ ലഹരിഉപയോഗത്തെക്കുറിച്ച് പഠനം നടത്തുകയാണെങ്കിൽ ലോകത്തിലെ 18 വയസ്സിന് മുകളിലുള്ള എല്ലാ വ്യക്തികളുമടങ്ങുന്നതാണ് സമഷ്ടി. ഇതിനെ അനന്തസമഷ്ടിയായി കരുതാം.

സമഷ്ടി അനന്തമാണെങ്കിൽ സമഷ്ടിയിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളെയും പഠനവിധേയമാക്കുക പ്രായോഗികമല്ല. അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ സമഷ്ടിക്ക് പകരം സമഷ്ടിയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഒരുഭാഗം എടുക്കുന്നു. ഇത്തരത്തിൽ സമഷ്ടിയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഭാഗത്തെ സാമ്പിൾ (Sample) എന്ന് പറയുന്നു. സാമ്പിളിൽ നിന്ന് ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുന്ന രീതിയെ പ്രതിരൂപണം (Sampling) അഥവാ സാമ്പിൾ സർവെ (Sample survey) എന്ന് പറയുന്നു. വിവിധ പ്രതിരൂപണ രീതികളും പ്രതിരൂപണ മാതൃകങ്ങളും അവയുടെ തെരഞ്ഞെടുക്കലുകളും അവസാന അധ്യായത്തിൽ പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്.

BC 4500 നും BC 3000 നുമിടയിൽ ബാബിലോണിയക്കാരും ഈജിപ്തുകാരും സെൻസസിനായി ഉപയോഗിച്ചിരുന്ന ഡാറ്റ ശേഖരണരീതികൾ വിവരണാത്മക സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ (Descriptive statistics) ആരംഭമായി കണക്കാക്കാം. കൂടാതെ, റോമൻ ചക്രവർത്തി അഗസ്റ്റസ് (BC 27 മുതൽ AD 17 വരെ) തന്റെ സാമ്രാജ്യത്തിലെ പൗരന്മാരുടെ ജനന-മരണങ്ങളെക്കുറിച്ചും ഓരോരുത്തർക്കും സ്വന്തമായുള്ള വളർത്തുമൃഗങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെക്കുറിച്ചും ഓരോ പൗരനും വർഷന്തോറും വിളവെടുക്കുന്ന ധാന്യത്തിന്റെ അളവിനെക്കുറിച്ചും സർവേകൾ നടത്തിയിട്ടുണ്ട്. ഇന്ത്യയിൽ 2000 വർഷങ്ങൾക്ക് മുമ്പ് പ്രത്യേകിച്ച് ചന്ദ്രഗുപ്തമൗര്യന്റെ ഭരണകാലത്ത് (BC 324 മുതൽ BC 300 വരെ) ഭരണാവശ്യത്തിനായി സ്ഥിതിവിവരകണക്കുകൾ ശേഖരിക്കുന്നതിനുള്ള

> കാര്യക്ഷമമായ സംവിധാനം നിലവിലുണ്ടായിരുന്നു. കൗടില്യന്റെ അർഥശാസ്ത്ര ത്തിൽ (ഏകദേശം 300 ബി.സി) ജനനമരണവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റാ ശേഖരണ ത്തിന്റെ സംവിധാനത്തെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്.
>
> അക്ബർ ചക്രവർത്തിയുടെ കാലഘട്ടത്തിൽ നടന്ന ഭരണപരവും സാംഖ്യകവുമായ സർവെയെക്കുറിച്ച് ഒരു വിശദവിവരണം അബുൽ-ഫാസിൽ എഴുതിയ ഐൻ-ഇ-അക്ബാരി ( Ain-i-Akbari) യിൽ നൽകുന്നുണ്ട്.

#### സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ സർവെ

സാമ്പിൾ യൂണിറ്റിൽ നിന്നോ സമഷ്ടിയിൽ നിന്നോ ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുന്ന പ്രക്രിയയാണ് സർവെ. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ സർവെ ഒന്നുകിൽ സെൻസസ് രീതിയിലോ അല്ലെങ്കിൽ പ്രതി രൂപണ രീതിയിലോ ആകാം. സാമ്പിൾ ഉപയോഗിച്ച് സമഷ്ടിയെക്കുറിച്ചുള്ള വിവരങ്ങൾ ശേഖരിക്കുക എന്നതാണ് ഒരു സാമ്പിൾ സർവെ നടത്തുന്നതിന്റെ ഉദ്ദേശ്യം.

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. ഡാറ്റ, സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ അന്വേഷണം, സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ സർവെ എന്നിവ വിവരിക്കുക.
2. സമഷ്ടി, സാമ്പിൾ ഇവ എന്തെന്ന് വേർതിരിച്ചെഴുതുക.
3. ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ പരിമിതവും
4. അനന്തവുമായ സമഷ്ടിയെ വിശദീകരിക്കുക.

## 2.2. ചരങ്ങൾ (Variables)

ഒരു പ്രദേശത്തെ ഒരുകൂട്ടം ആളുകളെ പരിഗണിക്കുക. ലിംഗം, വയസ്സ്, കണ്ണിന്റെ നിറം, ബുദ്ധിശക്തി, ഉയരം, ഭാരം, രക്തസമ്മർദ്ദം എന്നിങ്ങനെയുള്ള പല ഘടകങ്ങളിലും ഈ കൂട്ടത്തിലെ അംഗങ്ങളിൽ വ്യത്യസ്തത കാണപ്പെടുന്നു. ഒന്നിൽ നിന്നും മറ്റൊന്നിലേക്ക് മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വിലയ്ക്ക് മാറ്റം സംഭവിക്കുന്നവയാണ് ചരങ്ങൾ. മേൽപ്പറഞ്ഞ ചരങ്ങളിൽ ലിംഗം, കണ്ണിന്റെ നിറം, ബുദ്ധിശക്തി എന്നിവ സംഖ്യാപരമായി അളക്കു വാൻ കഴിയുന്നതല്ല. അവയെ ഗുണാത്മകചരങ്ങൾ (Qualitative Variables അഥവാ Attributes) എന്നുവിളിക്കുന്നു. ഗുണാത്മക ചരമെന്നത് അവയുടെ സാന്നിധ്യം കൊണ്ട് തിരിച്ചറിയുന്നതോ ഘടകത്തിന്റെ വ്യത്യസ്ത വിഭാഗങ്ങളിലൂടെ തിരിച്ചറിയുന്നതോ ആയി രിക്കും. ഉയരം, ഭാരം, വയസ്സ്, രക്തസമ്മർദ്ദം എന്നീ മറ്റു ചരങ്ങൾ സംഖ്യാപരമായി അള ക്കാൻ കഴിയുന്നവയാണ്. അവയെ ഗണാത്മകചരങ്ങൾ (Quantitative Variables) എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ഗണാത്മകചരങ്ങൾക്ക് സംഖ്യാപരമായ വിലയുണ്ടായിരിക്കും. ഗണാത്മകചരങ്ങൾ സ്വീക രിക്കുന്ന വിലയനുസരിച്ച് അവയെ വീണ്ടും വേറിട്ട ചരം, (Discrete variable), തുടർചരം (continuous variable) എന്നിങ്ങനെ തരംതിരിക്കാം. പ്രത്യേക വിലകൾ മാത്രം സ്വീകരി ക്കുന്ന ചരങ്ങളെ വേറിട്ടചരം എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഒരു കുടുംബത്തിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചരം 0,1,2,3,...... എന്നിങ്ങനെയുള്ള വിലകളല്ലാതെ മറ്റൊന്നും സ്വീകരിക്കുന്നില്ല. അതായത്, തുടർച്ചയായ രണ്ട് വിലകൾക്കിടയിൽ പ്രത്യേക ഇടവേള ഉണ്ട്. ഇത് വേറിട്ട ചരത്തിന് ഒരു ഉദാഹരണമാണ്. നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള വിലകളുടെ ശ്രേണിയിൽ നിന്ന് (മേഖലയിൽ നിന്ന്) ഏത് വിലയും സ്വീകരിക്കുന്ന ചരങ്ങളാണ്

തുടർചരം. ഒരു തുടർചരത്തിന്റെ രണ്ട് വിലകൾക്കിടയ്ക്ക് അനിശ്ചിതമായ വിലകൾ ഉണ്ടായിരിക്കാം. ഉയരം, ഭാരം, സമയം എന്നിങ്ങനെയുള്ളവ തുടർചരങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. ഉൾപ്പെടുന്ന ചരത്തിന്റെ തരം അനുസരിച്ച് ഡാറ്റയെ വേറിട്ട അല്ലെങ്കിൽ തുടർ ഡാറ്റ എന്നിങ്ങനെ തരംതിരിച്ചിരിക്കുന്നു.

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. ചരങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങൾ എഴുതുക
2. വേറിട്ട ചരങ്ങൾക്കും തുടർചരങ്ങൾക്കും ഉദാഹരണങ്ങൾ എഴുതുക.
3. ഗുണാത്മകചരം, വേറിട്ട ഗണാത്മകചരം, തുടർഗണാത്മകചരം എന്നിവയ്ക്ക് ഇവിടെ സൂചിപ്പിച്ചതല്ലാതെ വേറെ ഉദാഹരണങ്ങൾ എഴുതുക.

## അളവുകളുടെ തലങ്ങൾ (Levels of Measurement)

**നാമപരമായ, ക്രമപരമായ, സംഖ്യാപരമായ ഡാറ്റ (Nominal, Ordinal, Cardinal Data)**

എസ്.എസ്. സ്റ്റീവൻസ് (1906-1973) ഡാറ്റയെ നാമപരം, ക്രമപരം, സംഖ്യാപരം എന്നിങ്ങനെ വ്യത്യസ്ത അളവുതലങ്ങളിൽ വിശദീകരിച്ചു. നമ്മൾ പരിഗണിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ സ്വഭാവത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് ഈ വർഗീകരണം. ലിംഗം, ദേശം തുടങ്ങിയവ പോലുള്ള വിഭാഗങ്ങളെ തരംതിരിച്ച് പേര് നൽകുന്നതിന് നാമപരമായ അളവുതലം ഉപയോഗിക്കുന്നു. ആൺ, പെൺ എന്നീ തരത്തിലുള്ള വർഗീകരണം നാമപരമായ ഡാറ്റയ്ക്ക് ഉദാഹരണമാണ്. ഹയർസെക്കണ്ടറി ഏകജാലക പ്രവേശനത്തിന് അപേക്ഷാഫോറം പൂരിപ്പിക്കുമ്പോൾ തിരുവനന്തപുരത്തിന് 01, കാസറഗോഡിന് 14 എന്നിങ്ങനെ കോഡുകൾ നൽകുന്നു. ഇതും നാമപരമായ ഡാറ്റയാകുന്നു. ഇവിടെ സംഖ്യ കേവലം തിരിച്ചറിയാനുള്ള അടയാളമാണ്. അതിന് സംഖ്യാപരമായ പ്രാധാന്യമില്ല. ഓരോ വിഭാഗത്തിലും എത്ര ആളുകൾ വീതം ഉണ്ട് എന്നറിയുക എന്നത് മാത്രമാണ് ഇത്തരം അളവുകളുടെ പ്രയോജനം. അതായത് 10000 പേർ തിരുവനന്തപുരത്തുകാർ, 9700 കാസറഗോഡുകാർ എന്നിങ്ങനെ ചരങ്ങളുടെ വിലകൾ

തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ അടിസറാനത്തിൽ ഡാറ്റയ്ക്ക് ക്രമം നൽകുന്നതിന് ക്രമപരമായ അളവുതലത്തിൽ കഴിയുന്നു. ഒരു കൂട്ടം ജനങ്ങളുടെ വിദ്യാഭ്യാസയോഗ്യത പരിഗണിക്കുമ്പോൾ, സെക്കണ്ടറി, ഹയർ സെക്കണ്ടറി, ബിരുദം, ബിരുദാന്തരബിരുദം എന്നിങ്ങനെ തരംതിരിക്കാവുന്നതാണ്. സെക്കണ്ടറി-1, ഹയർസെക്കണ്ടറി-2, ബിരുദം-3, ബിരുദാനന്തരബിരുദം-4 എന്നിങ്ങനെ കോഡുകൾ നൽകാൻ കഴിയും. വിദ്യാഭ്യാസ യോഗ്യത അടിസ്ഥാനമാക്കുമ്പോൾ ബിരുദം ഹയർസെക്കണ്ടറിയേക്കാൾ ഉയർന്നതലം ആകയാൽ കോഡ് 3 നിശ്ചയമായും കോഡ് -1 നേക്കാൾ ഉയർന്നതായിരിക്കും. അതായത് ക്രമപര തലത്തിൽ, ഓരോ വിഭാഗത്തിനും നൽകിയ കോഡുകൾക്ക് നിശ്ചിതക്രമം ഉണ്ടായിരിക്കും.

ഗണാത്മക ചരത്തെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ഡാറ്റ സംഖ്യാപരമായ ഡാറ്റയാണ്. ഒരു ക്ലാസിലെ വിദ്യാർഥികളുടെ ഉയരം, സ്കൂൾ അധ്യാപകരുടെ മാസശമ്പളം, ക്ലാസിലെ വിദ്യാർഥികളുടെ മാർക്കുകൾ എന്നിവ സംഖ്യാപരമായ ഡാറ്റയ്ക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. നാമപരവും ക്രമപരവും സംഖ്യാപരവുമായ ഡാറ്റ താരതമ്യം ചെയ്യുക.
2. നാമപരവും ക്രമപരവും സംഖ്യാപരവുമായ ഡാറ്റക്ക് ഉദാഹരണങ്ങൾ എഴുതുക.

## 2.3. ഡാറ്റാ ഇനങ്ങൾ (Types of Data)

### പ്രാഥമിക ഡാറ്റയും ദ്വിതീയ ഡാറ്റയും (Primary data and Secondary data)

ശേഖരിച്ച അസംസ്കൃത വസ്തുതകളെയും സംഖ്യകളെയുമാണ് ഡാറ്റ എന്നത് കൊണ്ട് അർഥമാക്കുന്നത്. നിലവിലുള്ള സ്രോതസ്സുകളിൽ നിന്നോ, പരീക്ഷണങ്ങൾ നടത്തിയോ സർവേകൾ നടത്തിയോ ഡാറ്റാ ശേഖരിക്കാവുന്നതാണ്. ഈ ശേഖരണ സ്രോതസ്സുകളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ, സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ ഡാറ്റയെ പ്രാഥമികം (Primary) ദ്വിതീയം (Secondary) എന്നിങ്ങനെ തരംതിരിക്കാവുന്നതാണ്. ഒരു അന്വേഷകൻ (Investigator) തന്റെ സ്വന്തം ആവശ്യത്തിനായി വിവരദാതാക്കളിൽ നിന്ന് നേരിട്ട് ശേഖരിക്കുന്ന ഡാറ്റയാണ് പ്രാഥമിക ഡാറ്റ. ഇത് പ്രകൃത്യാ പുതുമയുള്ളതാകുന്നു. വെസ്സൽ എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞന്റെ അഭിപ്രായത്തിൽ, അന്വേഷണപ്രക്രിയയിൽ പ്രഥമമായി ശേഖരിക്കുന്ന ഡാറ്റ പ്രാഥമിക ഡാറ്റ എന്നറിയപ്പെടുന്നു. അനുയോജ്യമായ സർവെ തന്ത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് അത് ശേഖരിക്കുന്നു.

നിലവിലുള്ള സ്രോതസ്സുകളിൽ നിന്ന് ശേഖരിക്കുന്ന പ്രസിദ്ധീകരിച്ചതോ പ്രസിദ്ധീകരിക്കാത്തതോ ആയ ഡാറ്റയാണ് ദ്വിതീയ ഡാറ്റ (secondary data). ദ്വിതീയ ഡാറ്റ നമുക്കാവശ്യമുള്ള ഘടനയിലാകണമെന്നില്ല. ഇത്തരം ഡാറ്റ മറ്റ് വ്യക്തികൾ ശേഖരിച്ചതായിരിക്കുകയും ഇപ്പോൾ അത് മറ്റൊരാവശ്യത്തിനായി ഉപയോഗിക്കുന്നതുമായിരിക്കും. എം.എം. ബ്ലയറിന്റെ അഭിപ്രായത്തിൽ മറ്റാവശ്യങ്ങൾക്കായി ശേഖരിച്ചതും ഇപ്പോഴും നിലനിൽക്കുന്നതുമായ ഡാറ്റയാണ് ദ്വിതീയഡാറ്റ.

### പ്രാഥമികഡാറ്റയും ദ്വിതീയഡാറ്റയും തമ്മിലുള്ള താരതമ്യം

| പ്രാഥമിക ഡാറ്റ | ദ്വിതീയ ഡാറ്റ |
|---|---|
| മൗലിക സ്വഭാവമുള്ളത് | മൗലിക സ്വഭാവമില്ലാതാകുന്നു. |
| ഇത് അസംസ്കൃതരൂപത്തിലാണ് | പൂർണ്ണമായ ഉൽപന്ന രൂപത്തിലാണ് |
| ശേഖരണത്തിന് കൂടുതൽ സമയവും ധനവും ആവശ്യമാണ്. | കുറഞ്ഞ സമയവും ധനവും മതി |
| ഡാറ്റ ശേഖരണത്തിന് പരിശീലനം ലഭിച്ച ആളുകളെ ആവശ്യമാണ് | അന്വേഷകൻ ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുമ്പോൾ ശ്രദ്ധാലുവാകേണ്ടതുണ്ട് |
| പ്രാഥമികഡാറ്റ ഉപയോഗശേഷം ദ്വിതിയ ഡാറ്റയാകുന്നു | ദ്വിതീയ ഡാറ്റ പ്രാഥമിക ഡാറ്റയായി പരിവർത്തനം ചെയ്യാൻ കഴിയില്ല. |

## 2.4 ചോദ്യാവലിയും ഷെഡ്യൂളും (Questionnaire and Schedule)

ഒരു പ്രത്യേക ആവശ്യത്തിനോ ആവശ്യങ്ങൾക്കോ ആയി ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുന്നതിന് യുക്തിപരമായി ക്രമീകരിച്ചിട്ടുള്ള ചോദ്യങ്ങളുടെ ശ്രേണിയാണ് ചോദ്യാവലിയും ഷെഡ്യൂളും.

### ചോദ്യാവലി (Questionnaire)

തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട വിവരദാതാക്കൾക്ക് തപാലിലൂടെയോ ഇ-മെയിൽ വഴിയോ ആണ് ചോദ്യാവലി സാധാരണയായി അയയ്ക്കാറുള്ളത്. വിവരദാതാവിന് ചോദ്യാവലി പൂരിപ്പിക്കുവാൻ നിശ്ചിതസമയം അനുവദിക്കുകയും അതിനുശേഷം അന്വേഷകന് തിരിച്ചു നൽകുകയും ചെയ്യുന്നു. ലഭ്യമാകുന്ന ഡാറ്റയുടെ നിലവാരം എന്നത് ചോദ്യങ്ങളുടെ നിലവാരത്തേയും വിവരദാതാക്കളുടെ സത്യസന്ധതയെയും ആശ്രയിച്ചിരിക്കും.

വിവരദാതാവ് പൂരിപ്പിക്കേണ്ടതുള്ളതിനാൽ അവർ സാക്ഷരരാകേണ്ടത് അത്യാവശ്യമാണ്. വിവരദാതാക്കൾ പരക്കെ ചിതറികിടക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഈ രീതിയാണ് അനുയോജ്യം. അപൂർണ്ണമായ വിവരങ്ങൾ ലഭ്യമാകാനുള്ള സാധ്യത വളരെ കൂടുതലാണ് എന്നുള്ളതാണ് ഈ രീതിയുടെ പ്രധാന പോരായ്മ.

### ഷെഡ്യൂൾ (Schedule)

വിവരദാതാക്കൾ സമീപസ്ഥരാവുകയോ നിരക്ഷരരാവുകയോ ആണെങ്കിൽ വിവരസമ്പാദകന് ഒരുകൂട്ടം ചോദ്യങ്ങളുമായി വിവരശേഖരണത്തിന് വിവരദാതാവിനെ നേരിട്ട് സമീപിക്കുവാൻ കഴിയും. ഇത്തരം ചോദ്യങ്ങൾ ചോദ്യാവലി (Questionnaire) പോലെ വിശദമായവ ആകണമെന്നില്ല. അതിൽ ഉപയോഗിച്ച പദങ്ങളുടെ വിശദീകരണക്കുറിപ്പുകളോ വിവരണങ്ങളോ ഉണ്ടാകണമെന്നില്ല. ഡാറ്റ ശേഖരണത്തിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന ഇത്തരം ചോദ്യങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തെ ഷെഡ്യൂൾ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ ചോദ്യാവലി തന്നെ ഒരു ഷെഡ്യൂളായി ഉപയോഗിക്കാം.

*ചോദ്യാവലിയും ഷെഡ്യൂളുകളും തമ്മിലുള്ള താരതമ്യം*

| ചോദ്യാവലി | ഷെഡ്യൂൾ |
|---|---|
| ഇത് പലപ്പോഴും തപാൽ വഴിയാണ് അയയ്ക്കുന്നത്. | വിവരദാതാവിന്റെ അടുത്തേക്ക് വിവരസമ്പാദകൻ ഷെഡ്യൂൾകൊണ്ടു പോകേണ്ടതുണ്ട്. |
| വിവരദാതാക്കൾ ഉത്തരം പൂരിപ്പിക്കുന്നു | വിവരസമ്പാദകർ ഉത്തരങ്ങൾ പൂരിപ്പിക്കുന്നു |
| വിവരദാതാവ് സാക്ഷരനാവേണ്ടതുണ്ട് | വിവരദാതാവ് സാക്ഷരനാവേണ്ടതില്ല. |
| നിലവാരമുള്ള ചോദ്യങ്ങളും വിവരദാതാവിന്റെ സത്യസന്ധതയുമാണ് വിജയത്തിനടിസ്ഥാനം | വിവരസമ്പാദകന്റെ സത്യസന്ധതയും കാര്യക്ഷമതയുമാണ് വിജയത്തിനടിസ്ഥാനം |
| അപൂർണ്ണ വിവരങ്ങൾ ലഭിക്കാനുള്ള സാധ്യത കൂടുതലാണ്. | വിവരസമ്പാദകൻ ചോദ്യങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുന്നതിനാൽ അപൂർണ്ണവിവരങ്ങൾ ലഭിക്കാനുള്ള സാധ്യത കുറവാണ്. |

*നല്ല ചോദ്യാവലിക്കുണ്ടാകേണ്ട മേന്മകൾ*

ഒരു ചോദ്യാവലി തയാറാക്കുമ്പോൾ താഴെപ്പറയുന്ന കാര്യങ്ങൾ മനസ്സിൽ സൂക്ഷിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

1. ആവശ്യമുള്ള എല്ലാ വിവരങ്ങളും ലഭ്യമാക്കാൻ കഴിവുള്ളതായിരിക്കണം ചോദ്യങ്ങൾ.
2. ചോദ്യങ്ങളുടെ ഭാഷയും വാചകഘടനയും വിവരദാതാവിന് സൗകര്യപ്രദമായിരിക്കണം.
3. വ്യത്യസ്തമായ അർഥം വരുന്ന വാക്കുകളും സാങ്കേതിക പദങ്ങളും ചോദ്യങ്ങളിൽ ഉൾപ്പെടുത്തരുത്. അത്തരം ചോദ്യങ്ങൾക്ക് വ്യത്യസ്തമായ ഉത്തരങ്ങളാകും വിവരദാതാക്കൾ നൽകുക.
4. ശരി/തെറ്റ് എന്നീ ഉത്തരങ്ങൾ വരുന്ന ചോദ്യങ്ങൾ, ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതാവുന്ന ചോദ്യങ്ങൾ തുടങ്ങിയവയ്ക്ക് മുൻഗണന കൊടുക്കണം.
5. വ്യക്തിപരമായ ചോദ്യങ്ങൾ ഒഴിവാക്കണം.
6. ആവശ്യമായ അടിക്കുറിപ്പുകൾ നൽകണം.
7. സാധാരണയായി ചോദ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം 20 മുതൽ 25 വരെയാകണം.
8. ചോദ്യങ്ങൾ യുക്തിപരമായ ക്രമത്തിലായിരിക്കണം.
9. ചോദ്യങ്ങൾ സ്വയം വിശദീകരണാത്മകം ആയിരിക്കണം
10. ചോദ്യാവലി വിവരദാതാവിന്റെ മനസ്സിനിണങ്ങുന്ന തരത്തിൽ ആകർഷകമായിരിക്കണം .
11. ചോദ്യങ്ങൾ വ്യക്തമായിരിക്കണം.

ഒരിക്കൽ ചോദ്യാവലി തയാറാക്കി കഴിഞ്ഞാൽ, ആ ചോദ്യാവലി ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ചെറിയ ഗ്രൂപ്പിൽ ഒരു മുൻപരിശോധന നടത്തുന്നത് അഭികാമ്യമായിരിക്കും. ഇതിനെ പ്രാരംഭ വിവരശേഖരണം (Pilot-survey) എന്നു പറയുന്നു.

ചോദ്യങ്ങളുടെ അർഹതയും വിശ്വാസ്യതയും പരിശോധിക്കാൻ ഇത് അന്വേഷകന് സഹായകരമാകുന്നു.

#### ചോദ്യാവലി തയാറാക്കൽ

ഒരു വില്ലേജിൽ താമസിക്കുന്ന ജനങ്ങളുടെ സാമൂഹിക-സാമ്പത്തിക പഠനത്തിനായി തയാറാക്കിയ ചോദ്യാവലിയുടെ മാതൃക ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

ജനങ്ങളുടെ സാമൂഹിക-സാമ്പത്തിക നിലയെക്കുറിച്ച്
ഡാറ്റശേഖരിക്കുന്നതിനുള്ള ചോദ്യാവലി

1. പേര് :
2. മേൽവിലാസം :
3. കുടുംബത്തിലെ അംഗങ്ങൾ :

   സ്ത്രീകളുടെ എണ്ണം ☐ പുരുഷൻമാരുടെ എണ്ണം ☐

4. കുടുംബാംഗങ്ങളുടെ വയസ്സ് : (ഓരോ വിഭാഗത്തിലെയും അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം അതാത് ചതുരത്തിനുള്ളിൽ എഴുതുക)

   എ) 10 ൽ താഴെ ☐ ബി) 10-20 ☐
   സി) 20-50 ☐ ഡി) 50 നു മുകളിൽ ☐

5. താമസിക്കുന്നത് :

   എ) സ്വന്തം വീട് ☐ ബി) വാടകയ്ക്ക് ☐

6. വീടിന്റെ തരം :

   എ) താൽക്കാലികം ☐ ബി) കെട്ടുറപ്പുള്ളത് ☐

7. ശുചിമുറി സൗകര്യം :

   എ) അനുയോജ്യമായത് ☐ ബി) അനുയോജ്യമല്ലാത്തത് ☐

8. ജലലഭ്യത :

   എ) സ്വന്തം കിണർ ☐ ബി പഞ്ചായത്ത് നൽകുന്ന വെള്ളം ☐
   സി) മറ്റ് ഉറവിടങ്ങൾ ☐

9. വൈദ്യുതീകരിച്ച വീട്

   അതെ ☐ അല്ല ☐

10. വീട്ടിലെ ഇലക്ട്രോണിക് ഉപകരണങ്ങളുടെ വിശദവിവരം: (ഓരോ ഇനത്തിന്റെയും എണ്ണം അതാത് ചതുരത്തിൽ എഴുതുക)

   എ) ബൾബുകൾ ☐ ബി) ഫ്രിഡ്ജ് ☐
   സി) ഫാൻ ☐ ഡി) ടെലിവിഷൻ ☐
   ഇ) ട്യൂബുകൾ ☐ എഫ്) മിക്സർഗ്രൈൻഡർ ☐
   ജി) മറ്റുള്ളവ ☐

11. പാചകരീതി :

   എ) വിറക് ☐ ബി) മണ്ണെണ്ണ ☐
   സി) ഗ്യാസ് ☐ ഡി) വൈദ്യുതി ☐

12. തൊഴിൽ :

എ) സർക്കാർ ജോലി ☐ ബി) സർക്കാരിതര ജോലി ☐
സി) സ്വന്തം കച്ചവടം ☐ ഡി) കൃഷി ☐
ഇ) മറ്റുള്ളവ ☐

13. കുടുംബത്തിന്റെ മാസവരുമാനം (രൂപയിൽ)

എ) 8000 ൽ താഴെ ☐ ബി) 8000 - 20000 ☐
സി) 20000 - 50000 ☐ ഡി) 50000 ന് മുകളിൽ ☐

14. കുട്ടികളുടെ വിദ്യാഭ്യാസത്തിന് പ്രതിമാസം നിങ്ങൾ ചെലവഴിക്കുന്ന തുക

എ) 500 ൽ താഴെ ☐ ബി) 500 - 2000 ☐
സി) 2000 - 4000 ☐ ഡി) 4000 ന് മുകളിൽ ☐

15. നിങ്ങൾക്ക് സ്വന്തമായി വാഹനമുണ്ടോ?

ഉണ്ട് ☐ ഇല്ല ☐

16. ഉണ്ട് എങ്കിൽ, ഓരോ വിഭാഗത്തിലെയും വാഹനങ്ങളുടെ എണ്ണം നൽകുക.

എ) ഇരുചക്രം ☐ ബി) മൂന്ന് ചക്രം ☐
സി) കാർ ☐ ഡി) മറ്റുള്ളവ ☐

17. ഏകദേശം പ്രതിമാസ ചെലവ്

എ) 5000ൽ താഴെ ☐ ബി) 5000 - 15000 ☐
സി) 15000-20000 ☐ ഡി) 20000 ന് മുകളിൽ ☐

18. നിങ്ങളുടെ കുടുംബവുമൊത്ത് ഇടയ്ക്കിടെ ബാഹ്യ യാത്രയിൽ താൽപ്പര്യമുണ്ടോ?

ഉണ്ട് ☐ ഇല്ല ☐

19. ഉണ്ട് എങ്കിൽ, ഒറ്റയാത്രയ്ക്ക് നിങ്ങളുടെ ചെലവിന്റെ ഏകദേശ രൂപം

എ) 2000 ൽ താഴെ ☐ ബി) 2000 - 5000 ☐
സി) 5000 ന് മുകളിൽ ☐

20. നിങ്ങളുടെ യഥാർഥ വരുമാനം കൊണ്ട് നിങ്ങളുടെ ജീവിതനിലവാരം ശരിയായി നിലനിർത്താൻ കഴിയുമോ?

ഉണ്ട് ☐ ഇല്ല ☐

21. നിങ്ങളുടെ കുടുംബത്തെക്കുറിച്ചുള്ള മറ്റെന്തെങ്കിലും വിവരങ്ങൾ (ഒന്നോ രണ്ടോ വാചകത്തിൽ വിശദീകരിക്കുക)

(** ഈ ഡാറ്റ പഠനാവശ്യത്തിന് മാത്രമേ ഉപയോഗിക്കുകയുള്ളൂ.)

## 2.5 പ്രാഥമിക ഡാറ്റ ശേഖരണരീതികൾ (Methods of primary data collection)

*നേരിട്ടുള്ള വ്യക്തിഗത അഭിമുഖം (Direct personal interview)*

അന്വേഷണ മേഖല ചെറുതാണ് എങ്കിൽ, അന്വേഷകന് അഥവാ വിവരസമ്പാദകന് എല്ലാ വിവരദാതാക്കളെയും നേരിൽ കാണുന്നതിനും തൽസറല അന്വേഷണം നടത്തുന്നതിനും സാധിക്കും. ഈ രീതിയെ നേരിട്ടുള്ള വ്യക്തിഗത അഭിമുഖം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഈ രീതിയുടെ വിജയം വിവരസമ്പാദകന്റെ കാര്യശേഷി അനുസരിച്ചായിരിക്കും. ആവശ്യമുള്ള എല്ലാ വിവരങ്ങളും ലഭ്യമാക്കുന്നതിന് വിവരസമ്പാദകൻ കുശലതയുള്ളവനായിരിക്കണം. ഡാറ്റയെ വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നതിനാവശ്യമായ അധികവിവരം ശേഖരിക്കുവാൻ വിവരസമ്പാദകന് ഈ രീതി സഹായകരമാണ്.

*പരോക്ഷ വാമൊഴി അന്വേഷണം (Indirect oral inverstigation)*

ഒരു പട്ടണത്തിലെ താമസക്കാരനെക്കുറിച്ച് അന്വേഷകന് ഡാറ്റ ശേഖരിക്കണമെന്ന് കരുതുക. ആ താമസക്കാരനെക്കുറിച്ച് നമുക്കാവശ്യമുള്ള വിവരങ്ങൾ തരാൻ കഴിവുള്ള മൂന്നാമതൊരാളെ അന്വേഷകൻ സമീപിക്കുന്ന രീതിയാണ് പരോക്ഷ വാമൊഴി അന്വേഷണം. ഈ രീതിയിൽ വിവരം തരുന്ന ആളെ സാക്ഷി എന്നു വിളിക്കുന്നു. വിവരദാതാവ് വിവരങ്ങൾ തരുന്നതിൽ വിമുഖത കാണിക്കുകയോ അല്ലെങ്കിൽ വിവരദാതാവ് ലഭ്യമാകാതിരിക്കുകയോ ആകുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഈ രീതി ഉപയോഗപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്. ഇടനിലക്കാരൻ അഥവാ സാക്ഷിയുടെ സത്യസന്ധതയേയും യോഗ്യതയേയും വലിയ തോതിൽ ആശ്രയിച്ചായിരിക്കും വിവരങ്ങളുടെ വിശ്വാസ്യത എന്നത് ഈ രീതിയുടെ പോരായ്മയാണ്.

*നേരിട്ടുള്ള നിരീക്ഷണം (Direct observation)*

പത്രപ്രവർത്തകർ അഥവാ ബഹുജനമാധ്യമങ്ങൾ വിവരശേഖരണത്തിന് വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതിയാണിത്. കനത്തമഴയും വെള്ളപ്പൊക്കവും ബാധിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു പ്രദേശത്തിന്റെ തത്സമയ വിവരം നൽകേണ്ട സാഹചര്യം ഒരു അന്വേഷകന് ആവശ്യമായി എന്ന് കരുതുക. വിവരശേഖരണത്തിനായി മുൻകൂട്ടി തയാറാക്കിയ ചോദ്യങ്ങളൊന്നും അവിടെ ഉണ്ടായിരിക്കുകയില്ല. അന്വേഷകൻ എന്താണോ നിരീക്ഷിച്ചത് അതിൽ നിന്നും ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുന്നു. അത് വ്യവസ്ഥാപിതമായ രീതിയിലാകണമെന്നില്ല. ആ സ്ഥലത്ത് നിന്ന് പരമാവധി വിവരങ്ങൾ ശേഖരിക്കുന്നതിന് അന്വേഷകൻ പൂർണ്ണ സജ്ജമായിരിക്കണം. വിവരങ്ങളുടെ ഗുണനിലവാരം അന്വേഷകന്റെ സത്യസന്ധതയെ വലിയൊരളവുവരെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഡാറ്റ ശേഖരണം

*ടെലഫോൺ അഭിമുഖം (Telephone interview)*

ചില കാര്യങ്ങളിൽ, മുഖത്തോടുമുഖം നോക്കിയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം നൽകാൻ വിവരദാതാക്കൾക്ക് വിമുഖത ഉണ്ടാവാറുണ്ട്. അങ്ങനെയുള്ള സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഡാറ്റാശേഖരണത്തിന് മറ്റൊരു രീതി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നത് ഉചിതമായിരിക്കും. അത്തരത്തിലുള്ള ഒരു രീതിയാണ് ടെലഫോൺ അഭിമുഖം. ഈ രീതിയിൽ, അന്വേഷകൻ വിവരദാതാവിൽ നിന്ന് നേരിട്ടല്ലാതെ, എന്നാൽ വ്യക്തിഗതമായി ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുന്നു. നേരിട്ടുള്ള വ്യക്തിഗത മുഖാമുഖത്തിനേക്കാൾ ചിലവ് കുറഞ്ഞതും സമയമെടുക്കാത്തതുമാണ്. ഈ രീതി ടെലഫോൺ കണക്ഷനുകൾ വളരെ കുറവുള്ള ഗ്രാമപ്രദേശങ്ങളിൽ പ്രായോഗികമല്ല എന്നത് പോരായ്മയാകുന്നു.

*ഷെഡ്യൂളുകളും തപാൽ മുഖേനയുള്ള ചോദ്യാവലികളും (Schedules and Mailed questionnaires )*

പ്രാഥമിക ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുന്നതിനുള്ള ഏറ്റവും ജനപ്രിയമേറിയ രീതികളാണ് ചോദ്യാവലികളും ഷെഡ്യൂളുകളും. ചോദ്യാവലിയിൽ ഉത്തരം നൽകുന്ന ആൾ തന്നെ ഉത്തരങ്ങൾ പൂരിപ്പിക്കുന്നു, എന്നാൽ ഷെഡ്യൂളിൽ അന്വേഷകനായിരിക്കും ഉത്തരങ്ങൾ പൂരിപ്പിക്കുന്നത്. ഉത്തരം നൽകുന്നവർക്ക് ചോദ്യാവലി തപാൽവഴി അയച്ച് കൊടുക്കുന്ന പതിവ് നിലവിലുണ്ട്. ആയതിനാൽ അതിനെ തപാൽ മുഖേനയുള്ള ചോദ്യാവലി രീതി എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

*ലക്ഷ്യ സംഘ ചർച്ച (Focus group discussion)*

പരിശീലനം ലഭിച്ച ഒരാളുടെ കീഴിൽ നടത്തുന്ന ഒരു ചെറിയ സംഘ ചർച്ചയാണ് ലക്ഷ്യ സംഘ ചർച്ച (എഫ്.ജി.ഡി). ഭാവി പദ്ധതികളിൽ മികച്ച തീരുമാനങ്ങൾ എടുക്കുന്നതിനായി ഒരു നിർദ്ദിഷ്ട വിഷയത്തെക്കുറിച്ച് കൂടുതൽ അഭിപ്രായങ്ങൾ ശേഖരിക്കുവാൻ ഇത് ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് ശ്രീമതി. രമ ഒരു പ്രദേശത്ത് ഒരു അംഗണവാടി തുടങ്ങാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. തന്നാൽ കഴിയുന്നിടത്തോളം ശിശുസംരക്ഷണം സാധ്യമാക്കുകയാണ് അവരുടെ ലക്ഷ്യം. അതിനുവേണ്ടി ആ പ്രദേശത്തെ നാലു വയസ്സിന് താഴെയുള്ള കുട്ടികളുടെ മാതാപിതാക്കളെ ക്ഷണിക്കുകയും ഫോക്കസ് ഗ്രൂപ്പ് ചർച്ച സംഘടിപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. മാതാപിതാക്കൾക്ക് ശിശുസംരക്ഷണത്തെക്കുറിച്ചും പ്രാദേശികമായി നടപ്പാക്കിയ മറ്റു പരിപാടികളെക്കുറിച്ചും സ്വന്തം അഭിപ്രായങ്ങൾ ഉണ്ട്. വളരെ സുസജ്ജമായ രീതിയിൽ സ്ഥാപനം തുടങ്ങാൻ ശ്രീമതി. രമയ്ക്ക് അവരുടെ നിർദ്ദേശങ്ങൾ സഹായകരമാകും. ഇവിടെ ശ്രീമതി. രമ അന്വേഷകയാണ്. അവരുടെ പ്രത്യേക ഉദ്ദേശത്തിനായി ലക്ഷ്യ സംഘ ചർച്ചയിലൂടെ വിവരങ്ങൾ ശേഖരിക്കുന്നു.

## 2.6. ദ്വിതീയഡാറ്റ സ്രോതസ്സുകൾ (Sources of Secondary data)

ശേഖരിച്ച് വിലയിരുത്തപ്പെട്ട, പ്രസിദ്ധീകരിച്ചതോ അല്ലാത്തതോ ആയ ഏതൊരു വിവര സ്രോതസ്സും ദ്വിതീയ ഡാറ്റ സ്രോതസ്സ് ആകാം.

*ദ്വിതീയ ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുമ്പോൾ അന്വേഷകൻ താഴെ പറയുന്ന കാര്യങ്ങൾ അറിഞ്ഞിരിക്കേണ്ടതാണ്.*

- ശേഖരിച്ച ഡാറ്റയുടെ ഭൂപ്രദേശം.
- ഡാറ്റ ശേഖരിച്ച സമയം.
- ഡാറ്റ ശേഖരണത്തിൽ ഉൾപ്പെട്ടപദങ്ങളും നിർവചനങ്ങളും.
- ഡാറ്റ ശേഖരിച്ച വ്യക്തിയും അത് ശേഖരിക്കാനുണ്ടായ ഉദ്ദേശ്യവും.

*ദ്വിതീയ ഡാറ്റയുടെ ചില സ്രോതസ്സുകൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.*

- സർക്കാർ പ്രസിദ്ധീകരണങ്ങൾ.
- പഞ്ചായത്തുകളിലും മുൻസിപ്പാലിറ്റികളിലും ഉള്ള ഓഫീസ് രേഖകൾ.
- വിവിധ ഗവേഷണ സംഘടനകളുടെ സർവെ റിപ്പോർട്ട്.
- ജേർണലിലും പത്രങ്ങളിലും മറ്റു പ്രസിദ്ധീകരണങ്ങളിലുമുള്ള സർവെ അവലോകനങ്ങൾ
- വെബ് സൈറ്റുകൾ.

## നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

*സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പഠിക്കുന്നതിനുള്ള ആദ്യപടി ഡാറ്റ ശേഖരണമാണ്. വിവരങ്ങളുടെ ക്രമീകൃതമായ കൂടിച്ചേരലാണിത്. ഡാറ്റാശേഖരണത്തിനുള്ള ഉപകരണങ്ങളാണ് സാംഖിക സർവേകൾ. ഒരു ചരത്തെക്കുറിച്ചുള്ള വിവരമാണ് ഡാറ്റ. ഒരു ചരമെന്നത് ഗുണാത്മകമോ ഗണാത്മകമോ ആകാം. വേറിട്ട ചരമോ തുടർചരമോ ആകാം. സെൻസസ്, സാമ്പിൾ സർവെ എന്നിവ രണ്ട് സർവെ മാർഗങ്ങളാകുന്നു. വിവര ഉറവിടത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഡാറ്റയെ പ്രാഥമികമോ, ദ്വിതീയമോ, ആയി തരംതിരിക്കാവുന്നതാണ്. നേരിട്ടുള്ള വ്യക്തിഗത അഭിമുഖം, നേരിട്ടല്ലാതെ വ്യക്തിഗത അന്വേഷണം, നേരിട്ടുള്ള നിരീക്ഷണം, ടെലഫോൺ അഭിമുഖം, തപാൽ മുഖേനയുള്ള ചോദ്യാവലികൾ, അന്വേഷകൻ മുഖേനയുള്ള ഷെഡ്യൂളുകൾ, ഫോക്കസ്സ് ഗ്രൂപ്പ് ചർച്ചകൾ എന്നിവ പ്രാഥമിക ഡാറ്റ ശേഖരണ രീതികളാണ്. ഒരു മൂന്നാംകക്ഷി ശേഖരിച്ച് പ്രസിദ്ധീകരിച്ചതോ, പ്രസിദ്ധീകരിക്കാത്തതോ ആയ ഡാറ്റ, അന്വേഷകൻ അയാളുടെ ആവശ്യത്തിനായി ഉപയോഗിച്ചാൽ അത് ദ്വിതീയ ഡാറ്റയായി കണക്കാക്കുന്നു. ദ്വിതീയ ഡാറ്റയെ നമുക്കാവശ്യമായ രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റുന്നതിന് പരിശീലനം ലഭിച്ച ആളുകൾ ആവശ്യമാണ്.*

### പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പഠിക്കുന്നതിലൂടെ പഠിതാവ്:

- സമഷ്ടിയും സാമ്പിളും വേർതിരിക്കുന്നു.
- അന്വേഷകൻ, അന്വേഷണം, വിവരസമ്പാദകൻ, വിവരസമ്പാദനം എന്നിവ തിരിച്ചറിയുന്നു.
- ചരങ്ങളെയും സറിരസംഖ്യകളെയും വർഗീകരിക്കുന്നു.
- ഗുണാത്മകചരങ്ങളും ഗണാത്മകചരങ്ങളും വേർതിരിക്കുന്നു.

- വേറിട്ടതും തുടർച്ചയായതുമായ ചരങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം കണ്ടെത്തുന്നു.
- പ്രാഥമികവും ദ്വിതീയവുമായ ഡാറ്റകളെ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നു.
- ചോദ്യാവലിയും ഷെഡ്യൂളും തിരിച്ചറിയുന്നു.
- ചോദ്യാവലി തയാറാക്കുന്നു.
- ഡാറ്റശേഖരണരീതികൾ വിശദീകരിക്കുന്നു.
- ദ്വിതീയഡാറ്റ സ്രോതസ്സുകൾ തിരിച്ചറിയുന്നു.

### വിലയിരുത്തൽ ഇനങ്ങൾ

1. നിറത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ദത്തങ്ങൾ തരംതിരിക്കാവുന്നതാണ്. അവ അളക്കുന്നത്......... അളവ് തോതിലാണ്.

   (a) നാമപരം (b) ക്രമപരം (c) സംഖ്യാപരം

2. പഠനവിധേയമാക്കുന്ന ആളുകളുടെ കൂട്ടത്തെ .........എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

3. സമഷ്ടിയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഭാഗത്തെ ..... എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

4. ഒരു തൊഴിലാളി ഓരോ വർഷവും ഹാജരാകാത്ത ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം... തരം ഡാറ്റയാണ്.

   (a) നാമപരം (b) ഗുണാത്മകം (c) വേറിട്ടചരം (d) തുടർ

5. ഒരു സർവെ നടത്തപ്പെടുന്നതിനു മുമ്പ്, ചോദ്യാവലി ഉപയോഗിച്ചുള്ള മുൻപരിശോധനയെ ..... എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

6. ഇന്ത്യയിലെ കാഴ്ചയില്ലാത്തവരുടെ സമഷ്ടി എന്നത് ...... ആകുന്നു.

   (a) ഒരു ഊഹ സമഷ്ടി (b) ഒരു സാമ്പിൾ

   (c) ഒരു അനന്ത സമഷ്ടി (d) ഒരു പരിമിത സമഷ്ടി

7. താഴെപറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് ഡാറ്റയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത്.

   (a) ഏകവില (b) രണ്ട് വിലകൾ മാത്രമുള്ള കൂട്ടം

   (c) ഒരു കൂട്ടം വിലകൾ (d) മുകളിൽ പറഞ്ഞതെല്ലാം.

8. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നത്.

   (a) ഗുണാത്മക വിവരങ്ങൾ (b) പരിമാണാത്മക വിവരങ്ങൾ

   (c) (എ) യും (ബി) യും (d) (എ)യും അല്ല, (ബി)യും അല്ല.

9. ഇന്ത്യയിലെ ഒരു കാർഷിക പ്രസിദ്ധീകരണത്തിൽ നിന്നെടുത്ത ഡാറ്റ ...... ആയി പരിഗണിക്കുന്നു.

   (a) പ്രാഥമിക ഡാറ്റ (b) ദ്വിതീയ ഡാറ്റ

10. വിവരദാതാക്കൾ ..... ആണെങ്കിൽ തപാൽ മുഖേനയുള്ള ചോദ്യാവലി രീതി അന്വേഷണത്തിന് സ്വീകരിക്കാവുന്നതാണ്.

    (a) നഗരത്തിൽ താമസിക്കുന്നവർ (b) ഉയർന്ന വരുമാനമുള്ളവർ

    (c) സാക്ഷരർ

11. പൂർണ്ണ വിവരസമ്പാദനം അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള പഠനം ... എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

    (a) സാമ്പിൾ സർവെ (b) പൈലറ്റ് സർവെ

    (c) ഇതൊന്നുമല്ല.

12. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ ഡാറ്റകൾ ശേഖരിക്കുന്നത്

    (a) ഒരു ആവശ്യവുമില്ലാതെ (b) ഒരു പ്രത്യേക ആവശ്യത്തിന്

    (c) ഏതെങ്കിലും ആവശ്യത്തിന്

13. ഒരു സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ സമഷ്ടിയിലടങ്ങുന്നത്.

    (a) അനന്തമായ ഇനങ്ങൾ (b) പരിമിതമായ ഇനങ്ങൾ

    (c) (a) യും (b) യും (a) (a)യും അല്ല, (b)യും അല്ല.

14. പ്രാഥമിക ഡാറ്റയും ദ്വിതീയ ഡാറ്റയും താരതമ്യം ചെയ്യുക.

15. ചോദ്യാവലിയും ഷെഡ്യൂളും എന്തെന്ന് വേർതിരിച്ചെഴുതുക.

16. താഴെപറയുന്ന ഇനങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള ഏത് തരം ഡാറ്റയാണ് പഠനത്തിന് നൽകുന്നത്.

    (a) രക്തഗ്രൂപ്പ് (b) കുടുംബം (c) വെള്ളച്ചാട്ടങ്ങളുടെ ഉയരം

17. ഒരു ചോദ്യാവലി തയാറാക്കുമ്പോൾ ഓർത്തിരിക്കേണ്ട കാര്യങ്ങളെന്തെല്ലാം?

18. ദ്വിതീയ ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുമ്പോൾ ഓർത്തിരിക്കേണ്ട കാര്യങ്ങളെന്തെല്ലാം?

19. വിവിധ പ്രാഥമിക ശേഖരണ രീതികളെക്കുറിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

20. ദ്വിതീയ ഡാറ്റയുടെ പ്രധാനപ്പെട്ട സ്രോതസ്സുകളെന്തെല്ലാം?

21. താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ വേറിട്ട ചരം, തുടർചരം ഏതെല്ലാമാണെന്ന് കാണുക.

    (a) ഓഹരിക്കമ്പോളത്തിൽ ഓരോ ദിവസവും വിൽക്കുന്ന ഓഹരികളുടെ എണ്ണം.

    (b) ഒരു കാലാവസ്ഥാ പഠനകേന്ദ്രത്തിൽ ഓരോ അരമണിക്കൂറിലും രേഖപ്പെടുത്തുന്ന താപനില

    (c) ഒരു കമ്പനി നിർമിച്ച ടെലിവിഷൻ ട്യൂബുകളുടെ ആയുർ ദൈർഘ്യം.

(d) ഒരു കമ്പനിയിലെ തൊഴിലാളികളുടെ വാർഷിക വരുമാനം

(c) ഒരു വ്യക്തിയുടെ പ്രായം

(f) ഒരു പൂവിന്റെ ഇതളുകളുടെ എണ്ണം.

22. താഴെ പറയുന്ന സാഹചര്യങ്ങളിലെ ഡാറ്റയെ ഗുണാത്മകമെന്നോ ഗണാത്മകമെന്നോ തരംതിരിക്കുക.

(a) ഒരു കൂട്ടം ജനങ്ങളുടെ രാഷ്ട്രീയ മുൻഗണന.

(b) ഒരു പട്ടണത്തിലെ നൂറ് കുടുംബങ്ങളിലെ കുടുംബവലിപ്പം (കുടുംബത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം)

(c) തിരുവനന്തപുരം ജില്ലയിൽ സംസ്ഥാന സിലബസിൽ പഠിച്ച് കൊണ്ടിരിക്കുന്ന പ്ലസ് വൺ വിദ്യാർഥികളുടെ IQ സ്കോർ

(d) ഒരു നഗരത്തിലെ തൊഴിൽ രഹിതരായ ഒരു കൂട്ടം യുവാക്കളുടെ വിദ്യാഭ്യാസ യോഗ്യത.

23. താഴെ പറയുന്നവയെ പരിമിത സമഷ്ടി, അനന്ത സമഷ്ടി എന്നിങ്ങനെ തരംതിരിക്കുക.

(a) ഒറ്റ പൂർണ്ണസംഖ്യകളുടെ സമഷ്ടി.

(b) ഒരു ആശുപത്രിയിലെ 200 നവജാത ശിശുക്കളുടെ ഭാരം

(c) ഒരു സ്കൂളിലെ പതിനഞ്ച് വയസ്സുള്ള കുട്ടികളുടെ ഉയരം

(d) ഒരു നാണയം കറക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന തലയുടെ എണ്ണം.

24. താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയെ ക്രമപരം, നാമപരം, സംഖ്യാപരം എന്നിങ്ങനെ വേർതിരിക്കുക.

(a) ടെലഫോൺ നമ്പരുകൾ

(b) ക്ലാസിൽ വിദ്യാർഥികൾക്ക് നൽകുന്ന റോൾ നമ്പറുകൾ

(c) ഒരു പരീക്ഷയ്ക്ക് ശേഷം ക്ലാസിലെ കുട്ടികൾക്ക് നൽകുന്ന റാങ്കുകൾ.

(d) ഒരു സ്ഥാപനത്തിൽ പുതിയതായി രൂപകൽപ്പന ചെയ്ത പദ്ധതിയോടുള്ള വിവരദാതാക്കളുടെ മനോഭാവം, 1-ശക്തമായി എതിർക്കപ്പെടേണ്ടവ, 2-എതിർക്കപ്പെടേണ്ടവ, 3-ശക്തമായി അനുകൂലിക്കപ്പെടേണ്ടതില്ലാത്തവ, 4-അനുകൂലിക്കപ്പെടേണ്ടവ, 5-വളരെ ശക്തമായി അനുകൂലിക്കപ്പെടേണ്ടവ എന്നിങ്ങനെ രേഖപ്പെടുത്തുന്നത്.

(e) ഒരു ജലസംഭരണിയിലെ ഒരോ അരമണിക്കൂറിലുമുള്ള ജലത്തിന്റെ അളവ്.

(f) ഒരു കടയിൽ പ്രദർശിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന വീട്ടുപകരണത്തിന്റെ വില.

25. കണ്ണൂർ ജില്ലയിലെ ഹയർ സെക്കണ്ടറി വിദ്യാർഥികളുടെ പഠനരീതിയെക്കുറിച്ചും അവർക്ക് ലഭ്യമായ സൗകര്യത്തെക്കുറിച്ചും വിവരങ്ങൾ നേടുന്നതിന് ഒരു സർവെ നടത്തുവാൻ തീരുമാനിച്ചു. ഈ ആവശ്യത്തിനായി ഒരു ചോദ്യാവലി തയാറാക്കുക.

26. സ്കൂൾ സമയത്തിന് ശേഷം കുട്ടികൾ സമയം ചെലവിടുന്നതിനെക്കുറിച്ച് സമയത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാൻ അവർക്കിടയിൽ തന്നെ ഒരു സർവെ നടത്തുവാൻ പോകുന്നു. ഈ ആവശ്യത്തിനായി ഒരു ചോദ്യാവലി തയാറാക്കുക.

27. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശരിയോ തെറ്റോ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുക. തെറ്റാണെങ്കിൽ ആ പ്രസ്താവന തിരുത്തുക.

(a) വിശകലനത്തിന് പര്യാപ്തമായ വിവരങ്ങൾ പ്രാഥമിക ഡാറ്റയിൽ നിന്ന് ലഭിക്കാത്ത സാഹചര്യങ്ങളിൽ സാധാരണയായി ദ്വിതീയ ഡാറ്റ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

(b) ദ്വിതീയഡാറ്റ കാര്യമായ സൂക്ഷ്മ പരിശോധന കൂടാതെ തന്നെ മുഖവിലക്കെടുക്കാവുന്നതാണ്.

(c) ദ്വിതീയഡാറ്റ ചിട്ടപ്പെടുത്തുക എന്നത് വളരെ ശ്രമകരമായ ജോലിയാണ്.

(d) പ്രയോഗത്തിൽ വരുത്തുന്നതിന് മുമ്പ് ചോദ്യാവലിക്ക് ഒരു മുൻ പരിശോധന ആവശ്യമാണ്.

28. താഴെ പറയുന്നവയിൽ ഏതുതരം പഠനമാണ് നിങ്ങൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നത്. (സെൻസസ് അഥവാ പ്രതിരൂപണം). കാരണം വിശദമാക്കുക.

(a) ഒരു ഔഷധത്തിന്റെ ഫലപ്രാപ്തി.

(b) ഒരു കമ്പനിയിലെ 250 ജീവനക്കാരുടെ വേതന വിതരണത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുന്നതിന്.

(c) ഒരു മുഖലേപനത്തിന്റെ വിപണനത്തിൽ മാധ്യമങ്ങളുടെ പങ്കിനെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനം.

(d) ഒരു ആശുപത്രിയിലെ അതിതീവ്ര പരിചരണ വിഭാഗത്തിൽ പ്രവേശിപ്പിക്കുന്ന രോഗികളുടെ ഹൃദയമിടിപ്പിനെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനം.

(e) ഒരു പ്രത്യേകതരം പൂവിനുണ്ടാകുന്ന ദലങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനം.

(f) ഒരു ഇലക്ട്രിക് ബൾബിന്റെ ആയുസ്സിനെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനം

29. താഴെ പറയുന്ന സാഹചര്യങ്ങളിൽ നിങ്ങൾ നിർദ്ദേശിക്കുന്ന പ്രാഥമിക ഡാറ്റാശേഖരണ രീതി ഏത്? കാരണങ്ങൾ വിശദമാക്കുക.

(a) നിങ്ങൾ ഒരു കമ്പനിയുടെ മാർക്കറ്റിങ് മാനേജരായി നിയമിതനായി എന്ന് കരുതുക. നിരവധി ഓപ്ഷനുകളുള്ള അലക്കുയന്ത്രം കമ്പനി അവതരിപ്പിക്കുന്നു. പുതിയ ഉപകരണത്തെക്കുറിച്ച് അഭിപ്രായം ശേഖരിക്കുന്നതിനായി നിങ്ങളുടെ തൊഴിൽദാതാവ് നിങ്ങളോട് ആവശ്യപ്പെടുന്നു.

(b) ഈ വർഷത്തെ നെഹ്റു ട്രോഫി വള്ളം കളിയുടെ വിവരണം ഒരു മാധ്യമത്തിന് വേണ്ടി തയാറാക്കുന്നതിന്.

(c) ഒരു സ്ഥാപനത്തിൽ ഷിഫ്റ്റ് സമ്പ്രദായം ആരംഭിക്കുന്നതിന്.

30. ഒരു മാധ്യമത്തിന്റെ റിപ്പോർട്ടർ എന്നനിലയ്ക്ക് നിങ്ങൾക്ക് ഒരു ഐ.എ.എസ്. റാങ്ക് ജേതാവിനെ അഭിമുഖം ചെയ്യുന്നതിനുള്ള അവസരം ലഭിക്കുന്നു. ഡാറ്റാ ശേഖരണത്തിന് ഏത് രീതി നിങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കും? മറ്റുള്ള പ്രാഥമിക ഡാറ്റാ ശേഖരണ രീതികൾ എഴുതുക.

**ഉത്തരങ്ങൾ**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) a | 2) സമഷ്ടി | 3) സാമ്പിൾ | 4) വേറിട്ട | 5) പൈലറ്റ് സർവെ |
| 6) d | 7) c | 8) c | 9) b | 10) c |
| 11) c | | 12) b | 13) c | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 22) | (a) ഗുണാത്മകം | (b) പരിണാമാത്മകം | (c) പരിണാമാത്മകം |
| | (d) ഗുണാത്മകം | | |
| 23) | (a) അനന്തം | (b) പരിമിതം | (c) പരിമിതം |
| | (d) പരിമിതം | | |
| 24) | (a) നാമപരം | (b) ക്രമപരം | (c)ക്രമപരം |
| | (d) നാമപരം | (e) സംഖ്യാപരം | (f) സംഖ്യാപരം |
| 27) | (a) തെറ്റ് | (b) ശരി | (c) ശരി |
| | (d)ശരി | | |

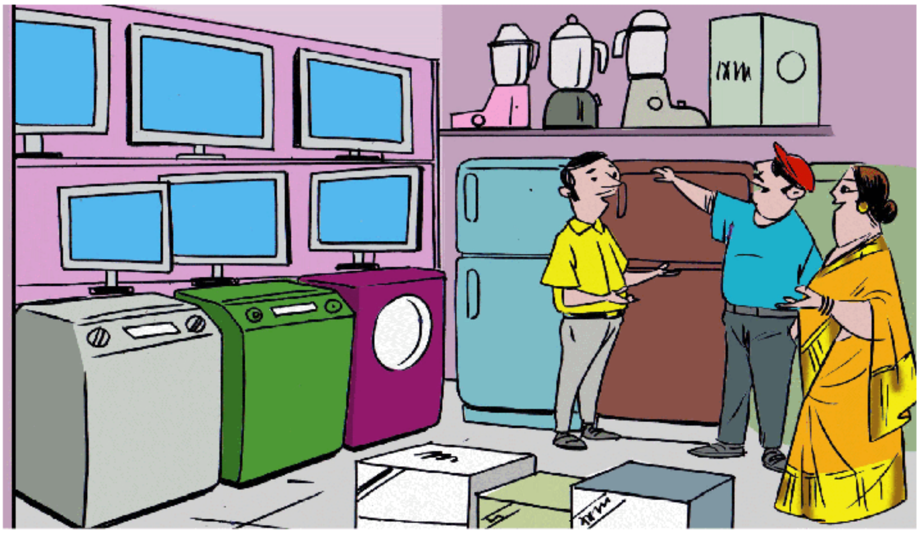
C9K9Q1

# 3 വർഗീകരണവും പട്ടികയാക്കലും (Classification and Tabulation)

## ആമുഖം

ഒരു ഗവേഷണ പഠനത്തിനാവശ്യമായ ഡാറ്റ, സ്രോതസ്സുകളിൽ നിന്നും ശേഖരിക്കുവാനുള്ള വിവിധ ഉപാധികളെക്കുറിച്ചാണ് കഴിഞ്ഞ അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്തത്. ശേഖരിക്കപ്പെടുന്ന വിവരങ്ങൾ ചോദ്യാവലിയിലോ ഷെഡ്യൂളുകളിലോ ആണ് രേഖപ്പെടുത്തുന്നത്. ഇവയെ അസംസ്കൃത ഡാറ്റ (raw data) എന്നു പറയുന്നു. അസംസ്കൃത ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച് നേരിട്ട് നിഗമനങ്ങളിലേക്ക് എത്താനോ അഭിപ്രായങ്ങൾ രൂപീകരിക്കുവാനോ സാധ്യമല്ല. അതുകൊണ്ട് തന്നെ അസംസ്കൃത ഡാറ്റയെ സമഗ്രവും സമ്പൂർണ്ണവുമായ ഒരു സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ അപഗ്രഥനത്തിന് പര്യാപ്തമാക്കുംവിധം ഭംഗിയായും ക്രമാനുഗതമായും അവതരിപ്പിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

ഒരു ഹൈപ്പർമാർക്കറ്റിൽ അനവധി ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ ഉണ്ടാകുമെങ്കിലും നമുക്കാവശ്യമുള്ള വസ്തുക്കൾ തെരഞ്ഞെടുക്കാൻ താരതമ്യേന എളുപ്പമാണ്. ഒരേ ഇനത്തിൽപ്പെട്ട ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ പ്രത്യേകം പ്രത്യേകം ഇടങ്ങളിൽ അടുത്തടുത്തായി ക്രമീകരിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നതാണ് ഇതിന് കാരണം. കൃത്യമായ ആസൂത്രണത്തോടു കൂടി ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ ഭംഗിയിലും അടുക്കും ചിട്ടയിലും പ്രദർശിപ്പിച്ചിട്ടില്ലെങ്കിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു വസ്തുവിനെ കണ്ടെത്തുക എന്നത് പ്രയാസമാണ്. അസംസ്കൃത ഡാറ്റയെ ശാസ്ത്രീയമായും വ്യവസ്ഥാപിതമായും ക്രമപ്പെടുത്തിയാൽ മാത്രമേ തുടർന്നുള്ള പഠനങ്ങൾക്ക് ലളിതമായും കാര്യക്ഷമമായും ഉപയോഗപ്പെടുത്താൻ സാധിക്കുകയുള്ളൂ. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ അപഗ്രഥനത്തിന് ഉതകുന്നവിധം അസംസ്കൃത ഡാറ്റയെ ശാസ്ത്രീയമായും വ്യവസ്ഥാപിതമായും ക്രമീകരിക്കുന്ന പ്രക്രിയയെ വർഗീകരണം (classification) എന്നു പറയുന്നു.



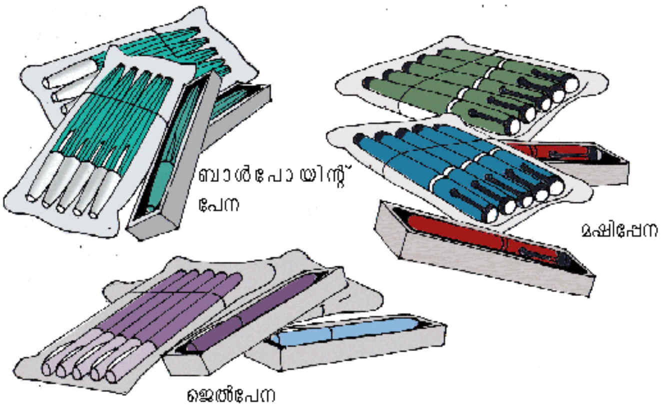
സവിശേഷമായ സ്വഭാവങ്ങൾക്കനുസരിച്ച് വ്യത്യസ്തമായ ഗ്രൂപ്പുകളായി ഡാറ്റയെ ക്രമപ്പെടുത്തുന്ന പ്രക്രിയയാണ് വർഗീകരണം (Classification).

## 3.1. വിവിധതരം വർഗീകരണങ്ങൾ (Types of Classification)

ചില ഇലക്ട്രോണിക്സ് ഹൈപ്പർ മാർക്കറ്റുകളിൽ ടിവി, ഫ്രിഡ്ജ്, എ.സി., ഗ്രൈൻഡർ, വാഷിങ് മെഷീൻ തുടങ്ങിയ ഉപകരണങ്ങൾ പ്രത്യേകം പ്രത്യേകം ഇടങ്ങളിൽ പ്രദർശിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നത് കാണാം. മറ്റു ചില ഷോറൂമുകളിലാവട്ടെ വിവിധ കമ്പനികളുടെ ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ വിവിധ ഇടങ്ങളിലായിരിക്കും സൂക്ഷിച്ചിരിക്കുന്നത് . രണ്ട് കടകളിലും വർഗീകരണത്തിന് രണ്ട് മാനദണ്ഡങ്ങളാണ് പരിഗണിച്ചിരിക്കുന്നത് . ഇതേപോലെ ദത്തങ്ങളുടെ വർഗീകരണത്തിലും വിവിധ മാനദണ്ഡങ്ങൾ പരിഗണിക്കാറുണ്ട്.

വിവിധതരം പേനകളുടെ വിപണനം നടത്തുന്ന ഒരു മൊത്തവ്യാപാര സ്ഥാപനത്തിൽ നിങ്ങൾ നിയമിതനായി എന്ന് കരുതുക. അവിടെ കുറേ പേനകൾ ഒരു പെട്ടിയിൽ സൂക്ഷിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതിൽ ഒരു പേന മാത്രമുള്ള പാക്കറ്റുകളും അഞ്ചെണ്ണം വീതമുള്ള പാക്കറ്റുകളും ഉണ്ട്. ചിലത് ബാൾപോയിന്റ് പേനയാണ്, ചിലത് ജെൽപേനകളാണ് മറ്റു ചിലത് മഷിപ്പേനകളാണ്. ഇന്ത്യ, തായ്‌ലാന്റ്, ചൈന, ജപ്പാൻ എന്നീ വിവിധ രാജ്യങ്ങളിൽ നിർമിച്ച പേനകൾ എല്ലാ വിഭാഗങ്ങളിലുമായി ഉണ്ട്. പേനകൾ പെട്ടിയിലാക്കിയിരിക്കുന്നത് ഫെബ്രുവരി മുതൽ ജൂൺ വരെയുള്ള വിവിധ മാസങ്ങളിൽ ആണ്. സ്ഥാപന മാനേജർ പേനകൾ തരംതിരിക്കാൻ ആവശ്യപ്പെട്ടു എന്ന് കരുതുക. നിങ്ങൾ ഇത് എങ്ങനെ ചെയ്യും?

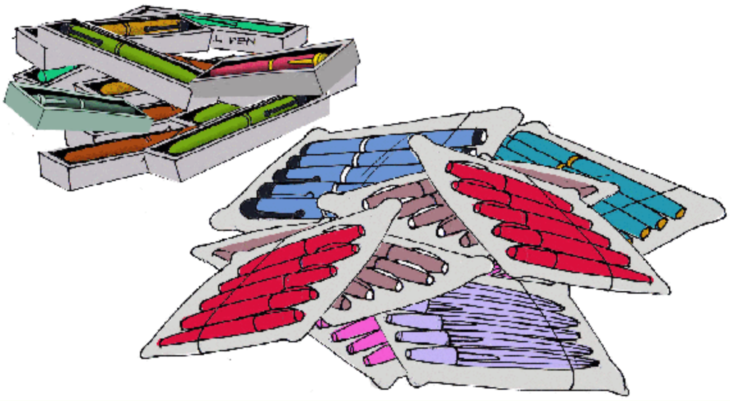
പേനകളുടെ സ്വഭാവത്തിനനുസരിച്ച് വിവിധ ഗ്രൂപ്പുകളായി തരംതിരിക്കാൻ സാധിക്കുമല്ലോ. ഉദാഹരണത്തിന് ബാൾപോയിന്റ് പേനകൾ, ജെൽ പേനകൾ, മഷിപ്പേനകൾ എന്നിങ്ങനെ വ്യത്യസ്ത ഗ്രൂപ്പുകളായി തരംതിരിക്കാം. ഇവിടെ വർഗീകരണത്തിനായി പേനകളുടെ ഒരു സ്വഭാവ ഗുണമാണല്ലോ (Quality) പരിഗണിച്ചിരിക്കുന്നത്. അതിനാൽ



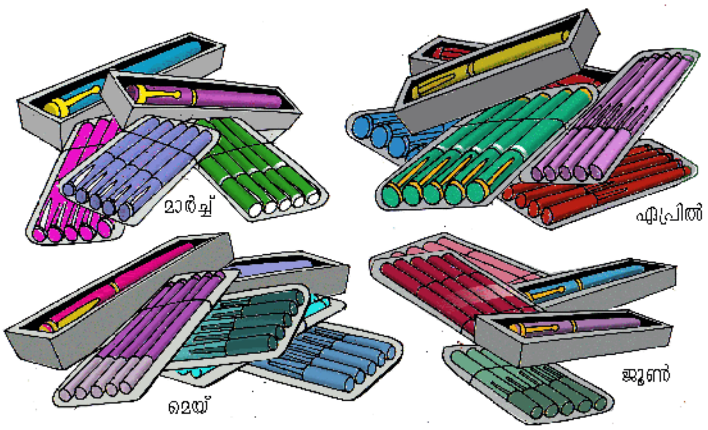

ഇത്തരം വർഗീകരണങ്ങളെ ഗുണാത്മക വർഗീകരണം (Qualitative classification) എന്ന് പറയുന്നു.

നിറം, വിദ്യാഭ്യാസ യോഗ്യത, മതവിശ്വാസം, ലിംഗവ്യത്യാസം തുടങ്ങി കൃത്യമായി അളന്ന് തിട്ടപ്പെടുത്താൻ സാധിക്കാത്ത ഡാറ്റയുടെ സ്വഭാവഗുണങ്ങളെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ള വർഗീകരണത്തെ ഗുണാത്മക വർഗീകരണം (Qualitative classification) എന്ന് പറയുന്നു.

അഞ്ച് പേനകളുടെ പായ്കറ്റുകൾ ഒരു വിഭാഗമായും ഒരുപേന മാത്രമുള്ളത് മറ്റൊരു വിഭാഗമായും തരംതിരിക്കുകയാണെങ്കിൽ നമുക്ക് മുകളിലത്തേതിൽ നിന്ന് വിഭിന്നമായ രണ്ട് ഗ്രൂപ്പുകളാണല്ലോ ലഭിക്കുക. ഇവിടെ പരിഗണിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ളത് പേനകളുടെ എണ്ണം എന്ന ഒരു അളവാണ്. അതുകൊണ്ടു തന്നെ ഇത്തരം വർഗീകരണങ്ങളെ ഗണാത്മക വർഗീകരണം (Quantitative classification) എന്നു വിളിക്കുന്നു.



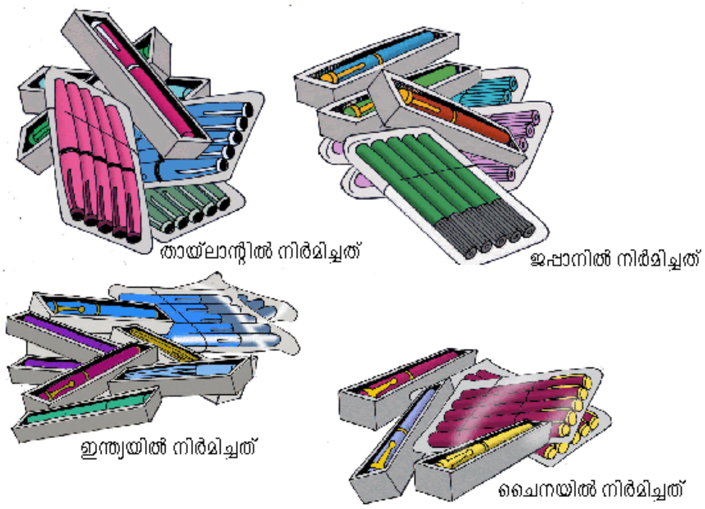
ഉയരം, ഭാരം, എണ്ണം, പരപ്പളവ് തുടങ്ങി അളന്ന് തിട്ടപ്പെടുത്താൻ സാധിക്കുന്ന വസ്തുതകളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി നടത്തുന്ന വർഗീകരണത്തെ ഗണാത്മക വർഗീകരണം (Quantitative classification) എന്നുപറയുന്നു.




പേനകൾ പായക്കറ്റിലാക്കിയ മാസങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ വേണമെങ്കിലും അവയെ തരംതിരിക്കാം. അപ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത് മറ്റൊരുതരം വർഗീകരണമാണ്. ഇവിടെ പരിഗണിച്ചിരിക്കുന്നത് കാലഗണനയാണ്. അതുകൊണ്ടു തന്നെ ഇത്തരം വർഗീകരണങ്ങൾ കാലാനുസൃത വർഗീകരണം (Chronological Classifcation) എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

വർഷം, മാസം, ദിവസം, മണിക്കൂർ തുടങ്ങിയ സമയബന്ധിതമായ ചരങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ഡാറ്റയെ വർഗീകരിക്കുന്ന രീതിയെ കാലാനുസൃത വർഗീകരണം (Chronological Classifcation) എന്നുപറയുന്നു.

പേനകൾ നിർമിച്ചിരിക്കുന്ന രാജ്യങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് അവയെ വർഗീകരിക്കുന്നതെങ്കിൽ നമുക്ക് അവയെ നാല് വിഭാഗങ്ങളാക്കാൻ സാധിക്കുന്നു. ഡാറ്റയെ ഭൂമിശാസ്ത്രപരമായ പ്രത്യേകതകൾക്കനുസരിച്ച് ഇങ്ങനെ വർഗീകരിക്കുന്നതിനെ ഭൂമിശാസ്ത്രപര വർഗീകരണം (Geographical Classifcation) എന്നുപറയുന്നു.




ഭൂഖണ്ഡം, രാജ്യം, സംസ്ഥാനം, ജില്ല, വില്ലേജ് തുടങ്ങിയ ഭൂമിശാസ്ത്രപരമായ പ്രത്യേകതകളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ഡാറ്റയെ വർഗീകരിക്കുന്നതിനെ ഭൂമിശാസ്ത്രപര വർഗീകരണം (Geographical classification) എന്നു പറയുന്നു.

## 3.2. ഡാറ്റയുടെ പട്ടികയാക്കൽ (Tabulation of Data)

വർഗീകരിക്കപ്പെട്ട ഡാറ്റകളെ നമുക്ക് വിവിധ രീതികളിൽ അവതരിപ്പിക്കാൻ സാധിക്കും. വാചക രൂപത്തിലോ (Textual Presentation) പട്ടിക രൂപത്തിലോ (Tabular Presentation) ഡയഗ്രങ്ങളായോ (Diagrammatic Presentation) ഗ്രാഫുകളായോ (Graphical presentation) ആണ് സാധാരണയായി ഡാറ്റകളെ അവതരിപ്പിക്കുന്നത്.

ഡാറ്റകളുടെ വർഗീകരണത്തിലൂടെ ലഭിച്ച സവിശേഷമായ അറിവുകളെ വാചക രൂപത്തിൽ നേരിട്ട് അവതരിപ്പിക്കുന്ന രീതിയാണ് എഴുത്തു രൂപം (Textual Presentation) എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നത്. ഇത്തരത്തിൽ പേനകളുടെ വർഗീകരണങ്ങളിൽ ലഭിച്ച വിവരങ്ങൾ ചുവടെ പറയും പ്രകാരം അവതരിപ്പിക്കാൻ സാധിക്കും.

പെട്ടിയിൽ ആകെ 260 പൊതി പേനകളുണ്ട്. 136 പൊതികളിൽ ഓരോ പേന വീതം മാത്രമാണുള്ളത് 124 പൊതികളിൽ അഞ്ച് പേന വീതമുണ്ട്. 101 പൊതികൾ നിർമിച്ചത് ഇന്ത്യയിലാണ്. 106 പൊതികൾ നിർമിച്ചത് ചൈനയിലും 31 പൊതികൾ തായ്‌ലാന്റിലും 22 പൊതികൾ ജപ്പാനിലും നിർമിച്ചു. 81 പൊതികൾ ബാൾ പോയിന്റ് പേനകളും 86 പൊതികൾ ജെൽ പേനകളും 93 പൊതികൾ മഷിപ്പേനകളും ആണ്. ഫെബ്രുവരിയിൽ 53 പൊതി പേനകളും മാർച്ച്, ഏപ്രിൽ, മെയ്, ജൂൺ മാസങ്ങളിൽ യഥാക്രമം 50, 47, 47, 63 എന്നിങ്ങനെ പൊതികളും നിർമിച്ചിട്ടുണ്ട്. പെട്ടിയിൽ ആകെ 756 പേനകളാണുള്ളത്.

എന്നാൽ ഈ രീതിയിൽ അവതരിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങളെ എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കുവാൻ സാധ്യമല്ല. അതിലുപരി വലിയ ഡാറ്റകളെ ഇത്തരത്തിൽ അവതരിപ്പിക്കുക എന്നത് അസാധ്യവുമാണ്. അതിസങ്കീർണ്ണമായ ഡാറ്റകളെ അതിസൂക്ഷ്മമായ തലത്തിൽ അവതരിപ്പിക്കേണ്ടി വരുമ്പോഴും ഇത്തരത്തിലുള്ള അവതരണ രീതി അവലംബിക്കാൻ സാധിക്കുകയില്ല.

അതിസൂക്ഷ്മമായ വിവരങ്ങളെപ്പോലും വളരെ ലളിതമായി അവതരിപ്പിക്കാൻ വേണ്ടി പട്ടികകളെ ആശ്രയിക്കാവുന്നതാണ്. ബൃഹത്തായ ഡാറ്റകളെ ലഘുവായ പട്ടികകളുപയോഗിച്ച് അവതരിപ്പിക്കുന്ന രീതിയെ പട്ടികയാക്കൽ (Tabulation) എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു ഡാറ്റയിലടങ്ങിയിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങളെ വരിയും നിരയുമുപയോഗിച്ച് വളരെ വ്യവസ്ഥാപിതവും സംക്ഷിപ്തവും സമഗ്രവുമായി അവതരിപ്പിക്കുന്ന പ്രക്രിയയാണ് പട്ടികയാക്കൽ. പട്ടികകളിൽ സമാനമായ വിവരങ്ങളെ അടുത്തടുത്ത് അവതരിപ്പിക്കാൻ സാധിക്കുമെന്നതിനാൽ തന്നെ താരതമ്യപഠനം വളരെ എളുപ്പാണ്. പട്ടികയാക്കൽ പ്രക്രിയയെ വിവരശേഖരണത്തിന്റെ അവസാനഘട്ടമായും ഡാറ്റവിശകലനത്തിന്റെ പ്രാരംഭഘട്ടമായും പരിഗണിക്കാം. കൃത്യമായ പട്ടികകൾ ലഭിച്ചാൽ അവ ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രീകരണങ്ങൾ നിർമിക്കുക എന്നത് വളരെ ലളിതമായ പ്രക്രിയയാണ്.

മുകളിലത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ പേനകളെ വിവിധ രീതിയിൽ തരംതിരിച്ചുവല്ലോ? അവ എങ്ങനെയാണ് പട്ടികയാക്കിയിരിക്കുന്നത് എന്നു നോക്കാം.

| പേനയുടെ ഇനം | പായ്ക്കറ്റുകളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| ബാൾ പോയിന്റ് | 81 |
| ജെൽ പേന | 86 |
| മഷിപ്പേന | 93 |
| ആകെ | 260 |

*പട്ടിക - 3.1 - ഡാറ്റയുടെ ഗുണാത്മക വർഗീകരണം*

| പായ്ക്കറ്റിലെ പേനകളുടെ എണ്ണം | പായ്ക്കറ്റുകളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| 1 | 136 |
| 5 | 124 |
| ആകെ | 260 |

*പട്ടിക - 3.2 - ഡാറ്റയുടെ ഗണാത്മക വർഗീകരണം*

| നിർമിച്ച രാജ്യം | പായ്ക്കറ്റുകളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| ഇന്ത്യ | 101 |
| ചൈന | 106 |
| തായ്‌ലാന്റ് | 31 |
| ജപ്പാൻ | 22 |
| ആകെ | 260 |

*പട്ടിക - 3.3 - ഡാറ്റയുടെ ഭൂമിശാസ്ത്രപര വർഗീകരണം*

| പായ്ക്ക് ചെയ്ത മാസം | പായ്ക്കറ്റുകളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| ഫെബ്രുവരി | 53 |
| മാർച്ച് | 50 |
| ഏപ്രിൽ | 47 |
| മെയ് | 47 |
| ജൂൺ | 63 |
| ആകെ | 260 |

*പട്ടിക - 3.4 - ഡാറ്റയുടെ കാലബന്ധിത വർഗീകരണം.*

## 3.3 വർഗീകരണത്തിന്റേയും പട്ടികയാക്കലിന്റേയും ഉദ്ദേശ്യലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഒരു ഡാറ്റയെ പട്ടികയാക്കുന്നതിന്റേയും പട്ടികവർഗീകരണത്തിന്റെയും ഉദ്ദേശ്യലക്ഷ്യങ്ങൾ ചുവടെ പറയുന്നവയാണ്.

1. സങ്കീർണമായ ഡാറ്റയെ ലളിതമായി അവതരിപ്പിക്കുക.
2. താരതമ്യ പഠനം സാധ്യമാക്കുക.
3. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ അവലോകനം സാധ്യമാക്കുക.
4. സമയവും സ്ഥലവും ഊർജവും ലാഭിക്കുക.
5. ഡാറ്റയിലെ സമാനതകളിലും വിഭിന്നതകളിലും വ്യക്തത വരുത്തുക.
6. ഡാറ്റയെ ശാസ്ത്രീയമായും യുക്തിസഹമായും ക്രമീകരിക്കുക.
7. ഡാറ്റയിലെ ഉള്ളടക്കം എളുപ്പത്തിൽ ഗ്രഹിക്കുക.

**പ്രവർത്തനം**

പത്രങ്ങളിലും മാസികകളിലും വെബ് സൈറ്റുകളിലും മറ്റും വന്നിട്ടുള്ള പട്ടികകൾ ശേഖരിക്കുക. ഓരോ പട്ടികയിലും ഉപയോഗിച്ചിട്ടുള്ള വർഗീകരണ രീതികൾ തിരിച്ചറിയുക.

### 3.4 ഏകമാന വർഗീകരണവും ദ്വിമാന വർഗീകരണവും (One Way and Two Way Classification)

മുകളിലെ പട്ടിക 3.1 പരിശോധിക്കുക. പേനയുടെ തരം എന്ന സവിശേഷതയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് ഇവിടെ വർഗീകരണം നടത്തിയിട്ടുള്ളത്. പട്ടിക 3.2, പട്ടിക 3.3, പട്ടിക 3.4 എന്നിവയിൽ യഥാക്രമം പായ്ക്കറ്റുകളിലെ പേനകളുടെ എണ്ണം, പായ്ക്കു ചെയ്ത മാസം, നിർമിച്ച രാജ്യം എന്നീ സവിശേഷതകളാണ് പരിഗണിച്ചിട്ടുള്ളത്. ഇവിടങ്ങളിലൊക്കെയും ഏതെങ്കിലും ഒരു സവിശേഷതമാത്രമാണ് പരിഗണിച്ചിട്ടുള്ളത്. അതിനാൽ ഇത്തരം വർഗീകരണങ്ങളെ ഏകമാന വർഗീകരണം (One way classification of data) എന്നു പറയുന്നു. ഏകമാന വർഗീകരണങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന പട്ടികകളെ ഏകമാന പട്ടികകൾ (one way tables) എന്നു പറയുന്നു. വർഗീകരണത്തിന് വേണ്ടി രണ്ട് സവിശേഷതകൾ ഒരേ സമയം പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ അത്തരം വർഗീകരണങ്ങളെ ദ്വിമാന വർഗീകരണം (Two way classification of data) എന്നു പറയുന്നു. അവ പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന പട്ടികകളെ ദ്വിമാന പട്ടികകൾ (Two way tables) എന്നു പറയുന്നു. ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന പട്ടിക 3.5, പട്ടിക 3.6 എന്നിവ ദ്വിമാന പട്ടികകൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

| മാസം | രാജ്യം | | | | ആകെ |
|---|---|---|---|---|---|
| | ഇന്ത്യ | ചൈന | തായ്‌ലാന്റ് | ജപ്പാൻ | |
| ഫെബ്രുവരി | 18 | 23 | 5 | 7 | 53 |
| മാർച്ച് | 18 | 26 | 4 | 2 | 50 |
| ഏപ്രിൽ | 20 | 18 | 5 | 4 | 47 |
| മെയ് | 21 | 16 | 6 | 4 | 47 |
| ജൂൺ | 24 | 23 | 11 | 5 | 63 |
| ആകെ | 101 | 106 | 31 | 22 | 260 |

*പട്ടിക - 3.5 - പായ്ക്ക് ചെയ്ത രാജ്യവും മാസവും*

| പൊതിയിലുള്ള പേനയുടെ എണ്ണം | പേനയുടെ തരം | | | ആകെ |
|---|---|---|---|---|
| | Ball Point | Gel pen | Ink Pen | |
| ഒന്ന് | 38 | 49 | 49 | 136 |
| രണ്ട് | 43 | 37 | 44 | 124 |
| ആകെ | 81 | 86 | 93 | 260 |

*പട്ടിക - 3.6 - പേനയുടെ തരവും എണ്ണവും*

### പ്രവർത്തനം

**മുകളിൽ പറഞ്ഞ പേനകളുടെ ഡാറ്റയെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തി വിവിധ ദ്വിമാന പട്ടികകൾ രൂപീകരിക്കുക. ഒരു ഉദാഹരണം ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.**

| മാസം | പേനകളുടെ എണ്ണം | | ആകെ |
|---|---|---|---|
| | ഒന്ന് | രണ്ട് | |
| ഫെബ്രുവരി<br>മാർച്ച്<br>ഏപ്രിൽ<br>മെയ്<br>ജൂൺ | | | |
| ആകെ | | | |

ഏകമാന പട്ടികകളിൽ ഒരു സവിഷേതയുടെ മാത്രം അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് വർഗീകരണം നടത്തിയിട്ടുള്ളതെങ്കിൽ, ദ്വിമാന പട്ടികകളിൽ ഒരേസമയം രണ്ട് സവിശേഷതകൾ പരിഗണിച്ചിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ ചിലഘട്ടങ്ങളിൽ രണ്ടിൽ കൂടുതൽ സവിശേഷതകൾ ഒരേ സമയം പരിഗണിക്കേണ്ടിവരാം. മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച പേനയുടെ പ്രശ്നത്തെ മുഴുവൻ വിവരങ്ങളും ഉൾപ്പെടുത്തിക്കൊണ്ട് ഒരു പട്ടിക നിർമിച്ച് നോക്കാം.

| Made in | | India | | | | China | | | | Thailand | | | | Japan | | | | Total | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Packed on | Type | Ball Point | Jell Pen | Ink Pen | Total | Ball Point | Jell Pen | Ink Pen | Total | Ball Point | Jell Pen | Ink Pen | Total | Ball Point | Jell Pen | Ink Pen | Total | Ball Point | Jell Pen | Ink Pen | Total |
| Feb | 1/Pack | 2 | 3 | 3 | **8** | 3 | 5 | 7 | **15** | 0 | 0 | 1 | **1** | 0 | 3 | 1 | **4** | 5 | 11 | 12 | **28** |
| | 5/Pack | 5 | 4 | 1 | **10** | 4 | 2 | 2 | **8** | 1 | 1 | 2 | **4** | 1 | 1 | 1 | **3** | 11 | 8 | 6 | **25** |
| | **Total** | **7** | **7** | **4** | **18** | **7** | **7** | **9** | **23** | **1** | **1** | **3** | **5** | **1** | **4** | **2** | **7** | **16** | **19** | **18** | **53** |
| Mar | 1/Pack | 3 | 4 | 3 | **10** | 3 | 4 | 5 | **12** | 0 | 0 | 1 | **1** | 0 | 0 | 0 | **0** | 6 | 8 | 9 | **23** |
| | 5/Pack | 2 | 2 | 4 | **8** | 4 | 4 | 6 | **14** | 0 | 1 | 2 | **3** | 1 | 0 | 1 | **2** | 7 | 7 | 13 | **27** |
| | **Total** | **5** | **6** | **7** | **18** | **7** | **8** | **11** | **26** | **0** | **1** | **3** | **4** | **1** | **0** | **1** | **2** | **13** | **15** | **22** | **50** |
| Apr | 1/Pack | 3 | 4 | 5 | **12** | 2 | 2 | 5 | **9** | 2 | 0 | 0 | **2** | 2 | 0 | 0 | **2** | 9 | 6 | 10 | **25** |
| | 5/Pack | 1 | 2 | 5 | **8** | 4 | 3 | 2 | **9** | 1 | 0 | 2 | **3** | 1 | 0 | 1 | **2** | 7 | 5 | 10 | **22** |
| | **Total** | **4** | **6** | **10** | **20** | **6** | **5** | **7** | **18** | **3** | **0** | **2** | **5** | **3** | **0** | **1** | **4** | **16** | **11** | **20** | **47** |
| May | 1/Pack | 3 | 5 | 4 | **12** | 2 | 3 | 2 | **7** | 1 | 1 | 0 | **2** | 1 | 1 | 0 | **2** | 7 | 10 | 6 | **23** |
| | 5/Pack | 3 | 3 | 3 | **9** | 3 | 4 | 2 | **9** | 2 | 0 | 2 | **4** | 2 | 0 | 0 | **2** | 10 | 7 | 7 | **24** |
| | **Total** | **6** | **8** | **7** | **21** | **5** | **7** | **4** | **16** | **3** | **1** | **2** | **6** | **3** | **1** | **0** | **4** | **17** | **17** | **13** | **47** |
| Jun | 1/Pack | 5 | 4 | 5 | **14** | 5 | 6 | 4 | **15** | 1 | 3 | 2 | **6** | 0 | 1 | 1 | **2** | 11 | 14 | 12 | **37** |
| | 5/Pack | 2 | 3 | 5 | **10** | 3 | 4 | 1 | **8** | 2 | 2 | 1 | **5** | 1 | 1 | 1 | **3** | 8 | 10 | 8 | **26** |
| | **Total** | **7** | **7** | **10** | **24** | **8** | **10** | **5** | **23** | **3** | **5** | **3** | **11** | **1** | **2** | **2** | **5** | **19** | **24** | **20** | **63** |
| Total | 1/Pack | 16 | 20 | 20 | **56** | 15 | 20 | 23 | **58** | 4 | 4 | 4 | **12** | 3 | 5 | 2 | **10** | 38 | 49 | 49 | **136** |
| | 5/Pack | 13 | 14 | 18 | **45** | 18 | 17 | 13 | **48** | 6 | 4 | 9 | **19** | 6 | 2 | 4 | **12** | 43 | 37 | 44 | **124** |
| | **Total** | **29** | **34** | **38** | **101** | **33** | **37** | **36** | **106** | **10** | **8** | **13** | **31** | **9** | **7** | **6** | **22** | **81** | **86** | **93** | **260** |

*പട്ടിക - 3.7 പേനകളുടെ സമഗ്രമായ വർഗീകരണം*

## 3.5 പട്ടികയുടെ ഭാഗങ്ങൾ

ഒരു പട്ടികയുടെ ഘടനയും ഭാഗങ്ങളും പട്ടികയിൽ ഉൾക്കൊള്ളിച്ചിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങളുടെ സ്വഭാവത്തിനനുസരിച്ചിരിക്കും. പൊതുവെ ഒരു സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ പട്ടികയ്ക്ക് പ്രധാനമായും ചുവടെ പറയുന്ന എട്ട് ഭാഗങ്ങൾ ഉണ്ടാകും.

**a. പട്ടികനമ്പർ (Table number)**

ഓരോ പട്ടികയേയും തിരിച്ചറിയുന്നതിനും എളുപ്പത്തിൽ പരിശോധിക്കുന്നതിനും ഒരു നമ്പർ നൽകുന്നത് ഉചിതമായിരിക്കും. സാധാരണയായി പട്ടികയുടെ നമ്പർ പട്ടികയുടെ മുകളിലോ തലക്കെട്ടിനോടൊപ്പമോ പട്ടികയുടെ താഴെ മധ്യത്തിലായോ കാണാവുന്നതാണ്.

**b. പട്ടികയുടെ തലക്കെട്ട് ( Title of the table)**

പട്ടികയിലെ ഉള്ളടക്കത്തെക്കുറിച്ച് ലഘുവായി പ്രതിപാദിക്കുന്ന ഒന്നായിരിക്കണം പട്ടികയുടെ തലക്കെട്ട്. സാധാരണയായി പട്ടികയുടെ മുകളിൽ അല്ലെങ്കിൽ താഴെ മധ്യഭാഗത്തായിട്ടാണ് തലക്കെട്ട് നൽകാറുള്ളത്. പട്ടികനമ്പറിനോടൊപ്പവും തലക്കെട്ട് നൽകാറുണ്ട്.

**c. നിരയുടെ തലവാചകം (Caption)**

പട്ടികയുടെ കുത്തനെയുള്ള നിരകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് നൽകുന്ന പേരുകളാണ് നിരയുടെ തലവാചകം എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നത്. പട്ടികയിൽ വരികളിലായി സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എന്താണ് എന്ന് സംക്ഷിപ്തമായും സംശയത്തിനിടനൽകാതെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നവയാണിവ. ഒരു പ്രധാന വിലങ്ങൻ തലക്കെട്ടും അതിന് ഉപ തലക്കെട്ടുകളും നൽകി വരാറുണ്ട്. പ്രധാന തലക്കെട്ടിനോടൊപ്പം അവയുടെ അളവിന്റെ യൂണിറ്റുകൂടി പ്രതിപാദിക്കാറുണ്ട്.

**d. വരിയുടെ തലവാചകം (Stubs)**

ഒരു പട്ടികയുടെ തിരശ്ചീനമായ വരികളുടെ തലക്കെട്ടുകളാണ് വരിയുടെ തലവാചകം. ഓരോ വരിയുടെയും ഇടത്തേ അറ്റത്ത് ആണ് ഇത് രേഖപ്പെടുത്തുന്നത്. ഡാറ്റയുടെ സ്വഭാവത്തിനനുസരിച്ച് തലക്കെട്ടുകളുടെ എണ്ണം ഏറിയും കുറഞ്ഞും ഇരിക്കും.

**e. ഉള്ളടക്കം (Body)**

ഒരു പട്ടികയുടെ ഏറ്റവും പ്രധാനപ്പെട്ട ഭാഗമാണ് അതിന്റെ ഉള്ളടക്കം. നിരയുടെ തലവാചകത്തിന്റേയും തലക്കെട്ടുകളുടെയും വരിയുടെ തലവാചകത്തിന്റേയും അടിസ്ഥാനത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ സാംഖ്യക വിലകളായിരിക്കും ഒരു പട്ടികയുടെ ഉള്ളടക്കം. വരികളുടെയും നിരകളുടെയും തുക ഏറ്റവും അവസാനത്തെ നിരയിൽ അല്ലെങ്കിൽ വരിയിൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കും.

**f .തലക്കുറിപ്പ് (Head note)**

ഒരു പട്ടികയുടെ തലക്കെട്ടിന് ചുവടെയായി തലക്കെട്ടിൽ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടില്ലാത്തതും എന്നാൽ പ്രധാനപ്പെട്ടതും ആയ വിവരങ്ങൾ നൽകാറുണ്ട്. ഇവ പലപ്പോഴും ഉള്ളടക്കത്തിലെ വിലകളുടെ യൂണിറ്റുകളെ പ്രതിപാദിക്കുന്നവയോ മറ്റെന്തെങ്കിലും പ്രത്യേകതകളെ സൂചി

പ്പിക്കുന്നവയോ ആയിരിക്കും. ഇതിനെ തലക്കുറിപ്പ് എന്ന് പറയുന്നു.

**g. അടിക്കുറിപ്പ് (Foot note)**

ഒരു പട്ടികയുടെ അടിയിലായി നിൽകുന്ന ചില അധിക വിവരങ്ങളാണ് അടിക്കുറിപ്പുകൾ. പട്ടികയുടെ തലക്കെട്ടിലും നിരകളുടേയൊ വരികളുടെയൊ തലക്കെട്ടുകളിൽ എന്തെങ്കിലും അവ്യക്തതകളുണ്ടെങ്കിൽ അവ അടിക്കുറിപ്പിൽ പരിഹരിക്കാവുന്നതാണ്.

**h. ഉറവിടക്കുറിപ്പ് (Source note)**

ഒരു പട്ടികയുടെ സ്രോതസ്സ് വെളിപ്പെടുത്തുന്ന വിവരങ്ങളാണ് ഉറവിട വിവരങ്ങൾ. അവ അടിക്കുറിപ്പിനു താഴെയായി നൽകുന്നു. പട്ടികയിൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങളുടെ ആധികാരികത ഉറപ്പുവരുത്തുന്നതിന് ഇവ ഉപകരിക്കുന്നു.

മേൽപ്പറഞ്ഞ മുഴുവൻ ഭാഗങ്ങളും ഒരു പട്ടികയ്ക്ക് ഉണ്ടായിരിക്കണമെന്ന് നിർബന്ധമില്ല. എങ്കിലും ഒരു മികച്ച പട്ടികയിൽ മുകളിൽ കൊടുത്ത പരമാവധി ഭാഗങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളിച്ചിരിക്കും.

പട്ടികയുടെ നമ്പർ:

പട്ടികയുടെ തലക്കെട്ട്:

| വരിയുടെ തല ക്കെട്ടുകൾ | നിരയുടെ തലക്കെട്ട് |
|---|---|
| | B1 B2 ......................................... Bn |
| $A_1$ | |
| $A_2$ | |
| ... | ഉള്ളടക്കം |
| ... | |
| ... | |
| $A_m$ | |

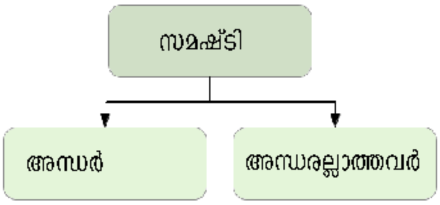
അടിക്കുറിപ്പ് :

ഉറവിട വിവരങ്ങൾ :

തലക്കുറിപ്പ്:

## 3.6 സ്വഭാവ സവിശേഷതകൾക്കനുസരിച്ചുള്ള വർഗീകരണം ( Classification according to Attributes)

ഡാറ്റകളെ ലിംഗം, സാക്ഷരത, മതം വിദ്യാഭ്യാസം തുടങ്ങിയ ഏതെങ്കിലും ഗുണങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ വർഗീകരിക്കുന്നതിനെ സ്വഭാവ സവിശേഷതകൾക്കനുസരിച്ചുള്ള വർഗീകരണം എന്നു പറയുന്നു. ഇത്തരം ഗുണങ്ങളെ നമുക്ക് കൃത്യമായി അളന്ന് നിർണയിക്കാൻ സാധ്യമല്ല. എന്നാൽ ഒരു അംഗത്തിന് ഈ ഗുണങ്ങൾ

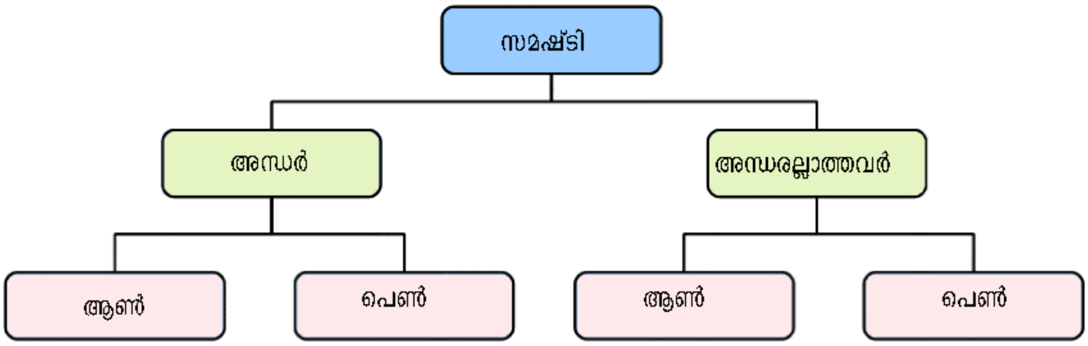


ഉണ്ടോ ഇല്ലയോ എന്ന് തിരിച്ചറിയാൻ സാധിക്കും. അന്ധതയെക്കുറിച്ച് പഠനം നടത്തുകയാണെങ്കിൽ ഒരാൾ അന്ധനാണോ അല്ലയോ എന്ന് നമുക്ക് പറയാൻ സാധിക്കും. എന്നാൽ ഈ പ്രത്യേകതകളെ കൃത്യമായി അളന്ന് നിലനിർണയിക്കുകയും അതിന് വില നിർണയിക്കുകയും ചെയ്യുക എന്നത് എളുപ്പമല്ല. അതിനാൽ തന്നെ ഇത്തരം ഗുണാത്മക ചരങ്ങൾ സമഷ്ടിയെ രണ്ടായി വിഭജിക്കുന്നതായി കാണാൻ കഴിയും. ഒന്നിൽ ഈ ഗുണത്തിന്റെ (അല്ലെങ്കിൽ സവിശേഷതയുടെ)സാന്നിധ്യം ഉള്ളതായും മറ്റേതിൽ സാന്നിധ്യം ഇല്ലാത്തതായും നമുക്ക് വേർതിരിക്കാം. ഇത്തരത്തിൽ സമഷ്ടിയെ രണ്ടായി വിഭജിക്കുന്ന വർഗീകരണത്തെ ഡൈക്കോട്ടമി (Dichotomy) അല്ലെങ്കിൽ ദ്വിതല വർഗീകരണം (Two fold classification) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഒരു ഉദാഹരണം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

| കോഴ്സ് | കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | | |
|---|---|---|---|
| | ജയിച്ചവർ | തോറ്റവർ | ആകെ |
| ഹ്യുമാനിറ്റീസ് | 29 | 18 | 47 |
| കോമേഴ്സ് | 83 | 16 | 99 |
| സയൻസ് | 96 | 4 | 100 |
| ആകെ | 208 | 38 | 246 |

ഇത്തരത്തിലുള്ള ഗുണാത്മക വർഗീകരണത്തിന് ഒരേ സമയം ഒന്നിലധികം സവിശേഷതകൾ പരിഗണിക്കാവുന്നതാണ്. അന്ധത എന്ന സവിശേഷതയോടൊപ്പം ആൺ/പെൺ എന്നതു കൂടി പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ സമഷ്ടി നാല് വ്യത്യസ്ത ഗ്രൂപ്പുകളായി തിരിയുന്നത് കാണാൻ സാധിക്കും. അന്ധരായ പുരുഷൻമാർ, അന്ധരല്ലാത്ത പുരുഷൻമാർ അന്ധരായ സ്ത്രീകൾ , അന്ധരല്ലാത്ത സ്ത്രീകൾ എന്നിവയാണത്.

ഇപ്രകാരം ഒരു സവിശേഷത കൂടി പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ $2^3 = 8$ വ്യത്യസ്ത വിഭാഗങ്ങളായി സമഷ്ടി വിഭജിക്കപ്പെടുന്നതായി കാണാം. ഇത്തരത്തിൽ ഒന്നിലധികം സവിശേഷതകൾ പരിഗണിച്ചുകൊണ്ട് വർഗീകരണം നടത്തുന്നതിനെ ബഹുതല വർഗീകരണം (Manyfold classification) എന്നു പറയുന്നു.



ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക ഒരു ബഹുതല വർഗ്ഗീകരണത്തിന് ഉദാഹരണമാണ്.

| കോഴ്സ് | | വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം | | |
|---|---|---|---|---|
| | | ജയിച്ചവർ | തോറ്റവർ | ആകെ |
| ഹുമാനിറ്റീസ് | ആൺ | 11 | 16 | 47 |
| | പെൺ | 18 | 2 | |
| | ആകെ | 29 | 18 | |
| കൊമേഴ്സ് | ആൺ | 32 | 11 | 99 |
| | പെൺ | 51 | 5 | |
| | ആകെ | 83 | 16 | |
| സയൻസ് | ആൺ | 42 | 3 | 100 |
| | പെൺ | 54 | 1 | |
| | ആകെ | 96 | 4 | |
| ആകെ | ആൺ | 85 | 30 | 246 |
| | പെൺ | 123 | 8 | |
| | ആകെ | 208 | 38 | |

### വിവരണം 3.1

രണ്ട് നഗരങ്ങളിലെ ജനങ്ങളുടെ ചില വിവരങ്ങൾ ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

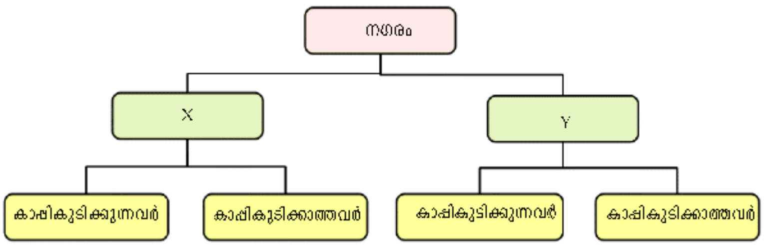
നഗരം x : സ്ത്രീകൾ – 40% , കാപ്പികുടിക്കുന്നവർ – 45% , കാപ്പികുടിക്കാത്ത പുരുഷൻമാർ – 20%

നഗരം y : പുരുഷൻമാർ – 55% , കാപ്പികുടിക്കാത്ത പുരുഷൻമാർ -30% , കാപ്പികുടിക്കാത്ത സ്ത്രീകൾ – 15%

a. മുകളിലത്തെ ഡാറ്റയുടെ ഒരു വർഗീകരണ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക.

b. മുകളിലത്തെ ഡാറ്റയെ ഒരു പട്ടികാരൂപത്തിൽ അവതരിപ്പിക്കുക.

**പരിഹാരം**



b.

| ആൾക്കാർ | നഗരം X | | | നഗരം Y | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ആൺ | പെൺ | ആകെ | ആൺ | പെൺ | ആകെ |
| കാപ്പികുടിക്കുന്നവർ | 40 | 5 | 45 | 25 | 30 | 55 |
| കാപ്പികുടിക്കാത്തവർ | 20 | 35 | 55 | 30 | 15 | 45 |
| ആകെ | 60 | 40 | 100 | 55 | 45 | 100 |

### ആവൃത്തി (Frequency)

ഒരു ശ്രേണിയിൽ ഒരു പ്രത്യേക വിലയുടെ ആവർത്തനങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ ആവൃത്തി എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് ഒരു ക്ലാസിൽ 40 മാർക്ക് വാങ്ങിയ 15 വിദ്യാർഥികൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ 40 ന്റെ ആവൃത്തിയാണ് 15.

## 3.7 ആവൃത്തിപ്പട്ടിക (Frequency Table)

സാമ്പിളിൽ നിന്ന് ശേഖരിച്ച വിലകളെ അതേപടി വരിവരിയായി എഴുതി സൂക്ഷിക്കുകയാണെങ്കിൽ അതിനെ അസംസ്കൃത ഡാറ്റ (Raw data) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഒരു ക്ലാസിലെ 60 കുട്ടികളുടെ വീട്ടിലുള്ള കുടുംബാഗങ്ങളുടെ എണ്ണം ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

4 3 3 2 3 4 5 7 10 6 3 9 6 3 4 5 5 5 8 7

8 6 9 7 2 7 6 5 11 4 4 3 5 6 6 7 6 5 7 6

4 5 6 10 8 6 5 4 5 6 4 5 5 6 5 4 6 7 5 8

ഈ വിലകൾ കുട്ടികളുടെ ക്രമനമ്പറിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് നൽകിയിരിക്കുന്നത്. അതായത് യാതൊരുവിധത്തിലുള്ള ക്രമീകരണങ്ങളും നടത്താതെ ലഭിച്ചിരിക്കുന്ന വിലകളെ നേരിട്ട് അവതരിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവയെ ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണ ക്രമത്തിലോ അവതരിപ്പിക്കാൻ നമുക്കറിയാം. ഒന്നു ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ.

ഡാറ്റ ആരോഹണ ക്രമത്തിലോ അവരോഹണ ക്രമത്തിലോ അവതരിപ്പിക്കുന്നത് ഡാറ്റ അപഗ്രഥനം ചെയ്യുന്നതിന് സഹായകമാണ്. എന്നാൽ ഇതുകൊണ്ടുമാത്രം ഡാറ്റയെ ചിത്രീകരിക്കുന്നതിനും ശാസ്ത്രീയമായി വിശകലനം ചെയ്യുന്നതിനും സാധിക്കുകയില്ല. അതിനാൽ ഡാറ്റകളെ കൂടുതൽ വിവരണാത്മകമായും ലളിതമായും സംക്ഷിപ്തമായും ഒരു പട്ടികാരൂപത്തിൽ അവതരിപ്പിക്കേണ്ടത് അത്യാവശ്യമാണ്. അത്തരം പട്ടികകളെ ആവൃത്തിപ്പട്ടികകൾ (frequency tables) എന്നു പറയുന്നു. മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച് നിർമിച്ച ഒരു ആവൃത്തി പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

| കുടുംബാംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം | | ആവൃത്തി |
|---|---|---|
| 2 | ~~\|\|~~ | 2 |
| 3 | 卌 \| | 6 |
| 4 | 卌 卌 | 9 |
| 5 | 卌 卌 \|\|\|\| | 14 |
| 6 | 卌 \|\|\|\| \|\|\| | 13 |
| 7 | \|\|\|\| \|\| | 7 |
| 8 | \|\|\|\| | 4 |
| 9 | \|\| | 2 |
| 10 | \|\| | 2 |
| 11 | \| | 1 |
| Total | | 60 |

പട്ടിക 3.8

ഇവിടെ കുടുംബാംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം വേറിട്ട ഡാറ്റയായത് കൊണ്ട് വിലകളുടെ കൃത്യമായ മൂല്യം തന്നെ ഒന്നാമത്തെ വരിയിൽ നൽകാൻ സാധിക്കുന്നു. ഇത്തരം ആവൃത്തി പട്ടികകളെ വേറിട്ട ആവൃത്തിപ്പട്ടിക (Discrete frequency table) എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

> ഒരു ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ ഡാറ്റയിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ അവയുടെ കൃത്യമായ എണ്ണം നൽകി സൂചിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ അതിനെ വേറിട്ട ആവൃത്തിപ്പട്ടിക (Discrete frequency table) എന്നു വിളിക്കുന്നു.

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

പരമാവധി 10 മാർക്കിനുള്ള ഒരു സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ക്ലാസ് പരീക്ഷയിൽ ഒരു ക്ലാസിലെ 48 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ താഴെ നൽകിയിരിക്കുന്നു. ഒരു ആവൃത്തിപ്പട്ടിക നിർമിക്കുക

5 10 5 6 6 6 7 7 2 7 8 8 7 8 10 6 8 7

3 5 5 5 5 7 8 5 2 6 8 5 1 7 6 9 6 7

4 8 4 6 4 3 6 7 9 2 7 10

കുടുംബാംഗങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന് പകരം കുട്ടികളുടെ ശരീരഭാരം ആയിരുന്നു എടുത്തിരുന്നതെങ്കിൽ ഇത്തരത്തിൽ എളുപ്പത്തിൽ പട്ടികയാക്കാൻ സാധിക്കുമായിരുന്നില്ല. കാരണം ശരീരഭാരം ഒരു തുടർചരമായ (continuous variable) തിനാൽ അതിന് ഒട്ടനേകം വിലകൾ സ്വീകരിക്കാൻ സാധിക്കും. മുഴുവൻ വിലകളേയും ഒറ്റയ്ക്കൊറ്റക്ക് പട്ടികയിൽ സൂചിപ്പിക്കുക എന്നത് അപ്രായോഗികമാണ്.

ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന വിലകൾ ഒരു ബിരുദകോഴ്സിന് പഠിക്കുന്ന വിദ്യാർഥികളുടെ ഭാരങ്ങളാണ്. (കിലോ ഗ്രാമിൽ)

51.1, 53, 66.6, 64.2, 63.9, 54.1, 69.7, 56.4, 52.9, 52.3, 59.5, 57.1, 45.5, 73.4,
41.4, 57.5, 62.4, 43.4, 38.4, 69.5, 48.5, 48.9, 45.2, 69.7, 36.4, 36.4, 58.8, 64.5,
66.4, 47.8, 54.7, 49, 49.9, 46.2, 53.2, 56.2, 32.8, 59.4, 31.8, 53.1, 50.2, 57.3,
30.1, 46.1, 41.8, 60.5, 40.2, 45.4, 47.1, 44.1, 52.6, 64.1, 38.3, 79.2, 48.5, 53.4,
51.6, 51.3, 63.5, 37.8

ഇവിടെ വിദ്യാർഥികളുടെ ഭാരങ്ങൾ 30.7 കി.ഗ്രാമിനും 78.3 കി.ഗ്രാമിനും ഇടയിലാണ്. ഇത്തരം ഡാറ്റകളെ ആവൃത്തിപ്പട്ടികകളാക്കുമ്പോൾ ഓരോ വിലകളും അതിന്റെ ആവൃത്തിയും എന്ന നിലയിൽ സൂചിപ്പിക്കാൻ സാധ്യമല്ല. പകരം ഒരു ഇടവേള (interval) യിലുള്ള വിലകളുടെ ആവൃത്തി പരിഗണിക്കുകയാണ് പ്രായോഗികം. ഉദാഹരണത്തിന് 30-35, 35-40, 40-45 എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇടവേളകളിലെ ആവൃത്തികൾ പട്ടികപ്പെടുത്താം. ചുവടെ നൽകിയ പട്ടികയിൽ അത് കൂടുതൽ വ്യക്തമാകും.

| ഭാരം | ടാലി അടയാളം | ആവൃത്തി |
|---|---|---|
| 30-35 | \|\|\| | 3 |
| 35-40 | 卌 | 5 |
| 40-45 | 卌 | 5 |
| 45-50 | 卌 卌 \|\| | 12 |
| 50-55 | 卌 卌 \|\|\| | 13 |
| 55-60 | 卌 \|\|\| | 8 |
| 60-65 | 卌 \|\| | 7 |
| 65-70 | 卌 | 5 |
| 70-75 | \| | 1 |
| 75-80 | \| | 1 |
| ആകെ | | 60 |

*പട്ടിക - 3.9*

ഇവിടെ 30-35, 35-40, 40-45 തുടങ്ങിയ ഇടവേളകളെ ക്ലാസുകൾ (classes) എന്നു വിളിക്കുന്നു. 30-35 എന്ന ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്നപരിധി 30 ഉം ഉയർന്ന പരിധി 35 ഉം ആണ്. തൊട്ടടുത്ത രണ്ട് ക്ലാസുകളുടെ ഉയർന്ന പരിധികൾ തമ്മിലുള്ളതോ താഴ്ന്ന പരിധികൾ തമ്മിലുള്ളതോ ആയ അകലത്തെ ക്ലാസ് അന്തരം (class width) എന്നു പറയുന്നു. 30-35 എന്ന ക്ലാസിന്റെ ക്ലാസന്തരം 5 (35-30) ആണെന്ന് കാണാം.

ക്ലാസുകളും അവയുടെ ആവൃത്തികളും സൂചിപ്പിക്കുന്ന ആവൃത്തിപ്പട്ടികകളെ തുടർ ആവൃത്തപ്പട്ടിക (continuous frequency table) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഇവയെ ആവൃത്തി വിതരണം (Frequency distribution) എന്നും വിളിക്കാം. ഒരു വേറിട്ട ഡാറ്റയെ തുടർ ഡാറ്റയായി സങ്കൽപ്പിച്ചുകൊണ്ട് തുടർ ആവൃത്തിപ്പട്ടിക രൂപത്തിൽ പട്ടികപ്പെടുത്തി വരാറുമുണ്ട്.

**അറ്റം തുറന്ന ക്ലാസുകൾ (Open Ended Classes)**

ഒരു ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്നപരിധിയോ ഉയർന്നപരിധിയോ പരാമർശിക്കാതെ നൽകുമ്പോൾ അവയെ അറ്റം തുറന്ന ക്ലാസുകൾ (Open Ended Classes) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ചില പ്പോൾ ഒന്നാമത്തെ ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്നപരിധിയോ അവസാന ക്ലാസിന്റെ ഉയർന്നപരി ധിയോ നിർണയിക്കാൻ സാധിക്കാറില്ല. അത്തരം ഘട്ടങ്ങളിൽ അറ്റം തുറന്ന ക്ലാസു കൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത് സാധാരണമാണ്.

### വിവരണം 3.2

100 മാർക്കിന്റെ ഒരു പരീക്ഷയിൽ 50 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ ചുവടെ കൊടു ക്കുന്നു. ഒരു ആവൃത്തിപ്പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 45 | 67 | 44 | 25 | 53 | 54 | 37 | 42 | 48 | 46 | 59 | 72 |
| 36 | 46 | 58 | 65 | 68 | 78 | 57 | 68 | 43 | 23 | 45 | 58 | 12 |
| 71 | 36 | 55 | 61 | 58 | 23 | 34 | 25 | 17 | 61 | 70 | 56 | 43 |
| 59 | 40 | 14 | 39 | 60 | 41 | 56 | 65 | 33 | 29 | 58 | | |

**പരിഹാരം**

ഇവിടെ വിദ്യാർഥികൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ വേറിട്ട ഡാറ്റയാണെങ്കിലും മുഴുവൻ വില കളും അവയുടെ ആവൃത്തിയും രേഖപ്പെടുത്തി പട്ടികപ്പെടുത്തുന്നത് അപ്രായോഗികവും അർഥ ശൂന്യവുമാണ്. അതിനാൽ ഇവിടെ ഡാറ്റ തുടർസ്വഭാവം കാണിക്കുന്നു എന്ന അനുമാനത്തിൽ ക്ലാസുകളും അവയുടെ ആവൃത്തിയും സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരു പട്ടിക തയാ റാക്കാം. ഏറ്റവും ചെറിയ മാർക്ക് 12 ഉം ഏറ്റവും കൂടിയത് 78 ഉം ആണല്ലോ? അതിനാൽ 10 മുതൽ 19 വരെ ഒരു ക്ലാസും 20 മുതൽ 29 വരെ രണ്ടാമത്തെ ക്ലാസും ആയി നിജപ്പെ ടുത്താം. ആവൃത്തിപ്പട്ടിക ചുവടെ നൽകുന്നു.

| ഭാരം | ടാലി മാർക്ക് | ആവൃത്തി |
|---|---|---|
| 10 - 19 | \|\|\| | 3 |
| 20 - 29 | 卌 | 5 |
| 30 - 39 | 卌 \|\| | 7 |
| 40 - 49 | 卌 卌 \| | 11 |
| 50 - 59 | 卌 卌 \|\| | 12 |
| 60 - 69 | 卌 \|\|\| | 8 |
| 70 - 79 | \|\|\|\| | 4 |
| ആകെ | | 50 |

പട്ടിക - 3.10

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ വ്യത്യസ്ത ദിവസങ്ങളിലെ ഊഷ്മാവ് ചുവടെ നൽകുന്നു. പട്ടികാരൂപത്തിൽ എഴുതുക.

33.98, 29.07, 29.90, 34.15, 28.98, 36.02, 32.77, 33.11, 27.55, 34.77, 39.76, 30.65, 29.15, 27.82, 33.67, 34.31, 33.18, 34.65, 34.76, 24.03, 27.14, 37.43, 23.88, 34.27, 27.25, 25.57, 35.86, 34.98, 36.75, 30.28, 33.10, 25.67, 29.97, 34.17, 27.44, 27.61, 35.47, 29.28, 28.56, 27.46, 29.12, 34.69, 25.07, 34.05, 35.00, 30.28, 37.65, 35.08, 33.03, 33.84, 34.65, 33.86, 36.76, 26.04, 35.20, 29.89, 27.14, 29.54, 32.25, 28.69, 32.23, 25.41, 27.27, 27.44, 37.76, 29.32, 31.11, 27.02, 36.93, 32.54, 37.31, 34.87, 31.61, 37.01, 23.08, 34.21, 31.48, 37.75, 24.75, 24.19, 33.69, 32.86, 28.46, 27.77, 37.14, 30.24, 24.45, 31.46, 29.80, 40.42

### കേവല ക്ലാസുകളും ഉൾച്ചേർക്കൽ ക്ലാസുകളും (Exclusive classes and Inclusive classes)

ഒരു ഉൾച്ചേർക്കൽ ക്ലാസിൽ താഴ്ന്നപരിധി മുതൽ ഉയർന്നപരിധിവരെയുള്ള മുഴുവൻ വിലകളും രണ്ട് പരിധികളും ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കും. എന്നാൽ കേവല ക്ലാസുകളിൽ ഉയർന്ന പരിധികൾ ഉൾപ്പെടുകയില്ല. ഒരു കേവല ക്ലാസിന്റെ ഉയർന്നപരിധി തന്നെയായിരിക്കും തൊട്ടടുത്ത ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്നപരിധി, എന്നാൽ ഉൾച്ചേർക്കൽ ക്ലാസുകളിൽ ഒരു ക്ലാസിന്റെ ഉയർന്നപരിധി തന്നെ അടുത്ത ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്നപരിധിയായി നൽകുകയില്ല. സാധാരണയായി വേറിട്ട വിലകൾക്ക് മാത്രമാണ് ഉൾച്ചേർക്കൽ ക്ലാസുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. എന്നാൽ കേവല ക്ലാസുകൾ വേറിട്ട ചരങ്ങൾക്കും തുടർ ചരങ്ങൾക്കും ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. പട്ടിക 3.9 കേവല ക്ലാസിനും പട്ടിക 3.10 ഉൾച്ചേർക്കൽ ക്ലാസിനും ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. ഒരു ഉൾച്ചേർക്കൽ ക്ലാസിന്റെ ക്ലാസ് പരിധികളിൽ ചെറിയ മാറ്റങ്ങൾ വരുത്തിക്കൊണ്ട് കേവല ക്ലാസ് ആക്കിമാറ്റാൻ സാധിക്കും. പട്ടിക 3.10 നെ ഉൾപ്പെടാത്ത ക്ലാസുകളാക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്ന് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

| മാർക്ക് | 9.5 -19.5 | 19.5 -29.5 | 29.5 -39.5 | 39.5 -49.5 | 49.5 -59.5 | 59.5 -69.5 | 69.5 -79.5 | ആകെ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ആവൃത്തി | 3 | 5 | 7 | 11 | 12 | 8 | 4 | 50 |

*പട്ടിക - 3.11*

*വ്യത്യസ്ത ക്ലാസ് പരിധികൾ:*

ഒരു ആവൃത്തിപ്പട്ടികയുടെ ക്ലാസുകൾക്ക് ഒരേ ക്ലാസകലം ആയിരിക്കണമെന്ന് നിർബന്ധമില്ല. എന്നാൽ ഒരേ ക്ലാസന്തരം നൽകുന്നതാണ് ഉചിതം.

**കുറിപ്പ്:**

ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയിൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ 'n' എന്നും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഒരു ആവൃത്തിപട്ടികയിൽ ആകെ ആവൃത്തിയെ N എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

## ആപേക്ഷികാവൃത്തിപട്ടിക (Relative Frequency Table)

ഒരു പ്രാപ്താങ്കത്തിന്റേയോ ക്ലാസിന്റേയോ ആവൃത്തിയുടെയും ആകെ ആവൃത്തിയുടെയും അംശബന്ധത്തെ അതിന്റെ ആപേക്ഷികാവൃത്തി എന്നു പറയുന്നു.

$$\text{ആപേക്ഷികാവൃത്തി} = \frac{\text{ആവൃത്തി}}{\text{ആകെ ആവൃത്തി}} = \frac{f}{N}$$

ആപേക്ഷികാവൃത്തികളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന പട്ടികകളെ ആപേക്ഷികാവൃത്തി പട്ടിക എന്ന് പറയുന്നു. പട്ടിക 3.8 ന്റെ ആപേക്ഷികാവൃത്തിപ്പട്ടിക ചുവടെ നൽകുന്നു.

| കുടുംബാംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം | ആവൃത്തി | ആപേക്ഷികാവൃത്തി |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 2/60=0.03 |
| 3 | 6 | 6/60=0.10 |
| 4 | 9 | 9/60=0.15 |
| 5 | 14 | 14/60=0.23 |
| 6 | 13 | 13/60=0.22 |
| 7 | 7 | 7/60=0.12 |
| 8 | 4 | 4/60=0.07 |
| 9 | 2 | 2/60=0.03 |
| 10 | 2 | 2/60=0.03 |
| 11 | 1 | 1/60=0.02 |
| ആകെ | 60 | 60/60=1 |

*പട്ടിക - 3.12*

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

- പട്ടിക-3.19 നെ ആസ്പദമാക്കി ഒരു ആപേക്ഷികാവൃത്തിപ്പട്ടിക നിർമിക്കുക.
- ഒരു ഐ.ടി. കമ്പനിയിലെ 35 സ്ത്രീ തൊഴിലാളികൾ മൂന്ന് മാസം ഒരു പ്രത്യേക തരം ഭക്ഷണക്രമം അനുവർത്തിച്ചു. അവരുടെ ഭാരത്തിലുണ്ടായ കുറവ് ചുവടെ നൽകുന്നു. ഈ ഡാറ്റയുടെ ഒരു ആപേക്ഷിക ആവൃത്തിപട്ടിക തയാറാക്കുക.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 3 | 2 | 6 | 4 | 3 | 2 | 7 | 3 |
| 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 | 5 | 2 | 1 | 5 |
| 2 | 3 | 2 | 5 | 4 | 0 | 3 | 2 | 1 | 4 |
| 3 | 5 | 1 | 1 | 3 | | | | | |

## ശതമാന ആവൃത്തിപ്പട്ടിക (Percentage Frequency Table)

ഓരോ വിലകളുടെയും (ക്ലാസിന്റെയും) ആവൃത്തികൾ ആകെ ആവൃത്തിയുടെ എത്ര ശതമാനമാണ് എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്ന പട്ടികകളാണ് ശതമാന ആവൃത്തിപ്പട്ടികകൾ. ശതമാനാവൃത്തികൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ചുവടെ കൊടുത്ത സമവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം.

$$\text{ശതമാനാവൃത്തി} = \frac{\text{ആവൃത്തി}}{\text{ആകെ ആവൃത്തി}} \times 100 = \frac{f}{N} \times 100$$

**കുറിപ്പ്:**

$$\text{ശതമാനാവൃത്തി} = \text{ആപേക്ഷികാവൃത്തി} \times 100$$

പട്ടിക 3.9 നെ ഒരു ശതമാനാവൃത്തിപ്പട്ടികയായി സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് കാണാം.

| ഭാരം | ആവൃത്തി | ശതമാനാവൃത്തിപ്പട്ടിക |
|---|---|---|
| 30 - 35 | 3 | $\frac{3}{60} \times 100 = 5.0$ |
| 35 - 40 | 5 | $\frac{5}{60} \times 100 = 8.33$ |
| 40 - 45 | 5 | $\frac{5}{60} \times 100 = 8.33$ |
| 45 - 50 | 12 | $\frac{12}{60} \times 100 = 20.0$ |
| 50 - 55 | 13 | $\frac{13}{60} \times 100 = 21.67$ |
| 55 - 60 | 8 | $\frac{18}{60} \times 100 = 13.33$ |
| 60 - 65 | 7 | $\frac{17}{60} \times 100 = 11.67$ |
| 65 - 70 | 5 | $\frac{3}{60} \times 100 = 5.0$ |
| 70 - 75 | 1 | $\frac{1}{60} \times 100 = 1.67$ |
| 75 - 80 | 1 | $\frac{1}{60} \times 100 = 1.67$ |
| ആകെ | 60 | $\frac{60}{60} \times 100 = 100$ |

പട്ടിക - 3.13

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. പട്ടിക 3.8 ലെ വിവരങ്ങളെ ഒരു ശതമാനാവൃത്തിപ്പട്ടികയായി അവതരിപ്പിക്കുക.
2. ലഹരി ഉപയോഗംമൂലമുണ്ടാകുന്ന റോഡപകടങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുന്ന ഒരു ഗവേഷകൻ മദ്യപിച്ച് വാഹനമോടിച്ച് അപകടങ്ങൾ നടന്നതിന്റെ വിവരങ്ങൾ പോലീസ് സ്റ്റേഷനിൽ നിന്നും ശേഖരിച്ചു. അവ ചുവടെ നൽകുന്നു. ഒരു ശതമാനാവൃത്തിപട്ടിക നിർമിക്കുക.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 2 | 0 | 1 | 4 | 6 | 2 | 2 | 1 | 5 | 4 |
| 2 | 5 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 |

ആപേക്ഷികാവൃത്തികളുടെ തുക ഒന്നും ശതമാനാവൃത്തികളുടെ തുക 100 ഉം ആയിരിക്കും.

## സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടികകൾ (Cumulative Frequency Tables)

ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യയേക്കാൾ ചെറുതോ തുല്യമോ ആയ വിലകളുടെ എണ്ണത്തെ ആ സംഖ്യയുടെ ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി (less than cumulative frequency) എന്നു പറയുന്നു. അതുപോലെ ഒരു സംഖ്യയേക്കാൾ വലുതോ തുല്യമോ ആയ വിലകളുടെ എണ്ണത്തെ ആ സംഖ്യയുടെ അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി ( Greater than cumulative frequency or more than cumulative frequcency) എന്നു പറയുന്നു.

പട്ടിക 3.8 ൽ മൂന്നോ അതിൽക്കുറവോ കുടുംബാംഗങ്ങളുള്ള എട്ട് കുടുംബങ്ങൾ ഉണ്ട് എന്നു കാണാം. അതിനാൽ 3 ന്റെ ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി 8 ആണെന്ന് പറയാം. അതുപോലെ 5 ന്റെ അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി 31 എന്നു കാണാം. ഒമ്പതോ അതിൽ കൂടുതലോ കുടുംബാംഗങ്ങളുള്ള അഞ്ച് കുടുംബങ്ങളുള്ളതിനാൽ 9 ന്റെ അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി അഞ്ച് ആണ്. ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തികളെയും അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തികളെയും സൂചിപ്പിക്കുന്ന പട്ടികകളെ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടികകൾ (cumulative frequency tables) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക രൂപീകരിക്കുന്ന വിധം പട്ടിക 3.14 കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

| കുടുംബാംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം | ആവൃത്തി | ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 + 0 = 2 |
| 3 | 6 | 6 + 2 = 8 |
| 4 | 9 | 9 + 8 = 17 |
| 5 | 14 | 14 + 17 = 31 |
| 6 | 13 | 13 + 31 = 44 |
| 7 | 7 | 7 + 44 = 51 |
| 8 | 4 | 4 + 51 = 55 |
| 9 | 2 | 2 + 55 = 57 |
| 10 | 2 | 2 + 57 = 59 |
| 11 | 1 | 1 + 59 = 60 |
| ആകെ | 60 | |

*പട്ടിക - 3.14*

### വിവരണം 3.3

പട്ടിക 3.9 ഉപയോഗിച്ച് ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക നിർമിക്കുക.

**പരിഹാരം**

| ഭാരം | ഉയർന്ന പരിധി | ആവൃത്തി | ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|---|---|
| 30 - 35 | 35 | 3 | 3 |
| 35 - 40 | 40 | 5 | 8 |
| 40 - 45 | 45 | 5 | 13 |
| 45 - 50 | 50 | 12 | 25 |
| 50 - 55 | 55 | 13 | 38 |
| 55 - 60 | 60 | 8 | 46 |
| 60 - 65 | 65 | 7 | 53 |
| 65 - 70 | 70 | 5 | 58 |
| 70 - 75 | 75 | 1 | 59 |
| 75 - 80 | 80 | 1 | 60 |
| ആകെ | 60 | | |

*പട്ടിക - 3.15*

**വിവരണം 3.4**

പട്ടിക 3.8 ഉപയോഗിച്ച് അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക രൂപീകരിക്കുക.

**പരിഹാരം**

| കുടുംബാംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം | ആവൃത്തി | അവരോഹണ സഞ്ചിതാ വൃത്തി |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 60 |
| 3 | 6 | 60 - 2 = 58 |
| 4 | 9 | 58 - 6 = 52 |
| 5 | 14 | 52 - 9 = 43 |
| 6 | 13 | 43 - 14 = 29 |
| 7 | 7 | 29 -13 = 16 |
| 8 | 4 | 16 - 7 = 9 |
| 9 | 2 | 9 - 4 = 5 |
| 10 | 2 | 5 - 2 = 3 |
| 11 | 1 | 3 - 2 = 1 |
| ആകെ | 60 | |

*പട്ടിക - 3.16*

### വിവരണം 3.5

പട്ടിക 3.9 ഉപയോഗിച്ച് അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക

**പരിഹാരം**

| ഭാരം | താഴ്ന്ന പരിധി | ആവൃത്തി | അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|---|---|
| 30 - 35 | 30 | 3 | 60 |
| 35 - 40 | 35 | 5 | 57 |
| 40 - 45 | 40 | 5 | 52 |
| 45 - 50 | 45 | 12 | 47 |
| 50 - 55 | 50 | 13 | 35 |
| 55 - 60 | 55 | 8 | 22 |
| 60 - 65 | 60 | 7 | 14 |
| 65 - 70 | 65 | 5 | 7 |
| 70 - 75 | 70 | 1 | 2 |
| 75 - 80 | 75 | 1 | 1 |
| ആകെ | | 60 | |

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. കോഴിക്കോട് റെയിൽവേ സ്റ്റേഷനിൽ നിന്ന് മംഗള ലക്ഷദ്വീപ് എക്സ്പ്രസ് പുറപ്പെടുന്ന സമയം മൂന്നു മാസം നിരീക്ഷിച്ചു. ഈ ദിവസങ്ങളിൽ തീവണ്ടി എത്ര മിനിറ്റ് വൈകിയാണ് പുറപ്പെട്ടത് എന്നത് പട്ടികപ്പെടുത്തി നൽകിയിരിക്കുന്നു. ഈ ഡാറ്റയുടെ ഒരു ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക. പട്ടികയിൽ നിന്ന് തീവണ്ടി എത്ര ദിവസങ്ങളിൽ അഞ്ച് മിനിറ്റിലധികം വൈകിയില്ല എന്നത് കണ്ടുപിടിക്കുക.

| വൈകിയ നേരം(മിനിറ്റ്) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ദിവസം | 44 | 13 | 9 | 5 | 5 | 3 | 4 | 2 | 3 | 1 | 1 |

2. മുകളിലത്തെ പട്ടികയിൽ നിന്ന് ഒരു ആവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക. തീവണ്ടി രണ്ടു മിനിട്ടെങ്കിലും വൈകിയോടിയ ദിവസങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

3. ഒരു കമ്പനി ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കുന്ന സി.എഫ്.എൽ. ബൾബുകളുടെ ജീവിത ദൈർഘ്യം നിരീക്ഷിച്ചതിൽ നിന്നും ചുവടെ കൊടുത്ത ആവൃത്തിപ്പട്ടിക ലഭിച്ചു.

| ജീവിത ദൈർഘ്യം ('00) മണിക്കൂർ | 0 - 5 | 5 - 10 | 10 - 20 | 20 - 25 | 25 - 30 | 30 - 35 | 35 - 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| സി.എഫ്.എൽ.ബൾബുകളുടെ എണ്ണം | 3 | 16 | 160 | 323 | 80 | 17 | 1 |

ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക. 2500 മണിക്കൂറിനകം കേടു വന്ന സി.എഫ്.എൽ.കളുടെ എണ്ണം തിട്ടപ്പെടുത്തുക

4. മുകളിലത്തെ പട്ടികയിൽ നിന്നും ആവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തികൾ കണ്ടുപിടിച്ച് പട്ടികപ്പെടുത്തുക. 2000 മണിക്കൂറെങ്കിലും പ്രവർത്തിച്ച സി.എഫ്.എൽ.ബൾബുകളുടെ എണ്ണം എത്ര?

## ദ്വിചര ആവൃത്തിപ്പട്ടിക ( Bivariate Frequency Table)

ഒരു സാമ്പിളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു സവിശേഷതമാത്രമാണ് പഠന വിധേയമാക്കുന്നതെങ്കിൽ അത്തരം ഡാറ്റയെ ഏകചരഡാറ്റ എന്നു വിളിക്കുന്നു. രണ്ട് സവിശേഷതകൾ ഒരേ സമയം വിശകലനം ചെയ്യുന്ന ഡാറ്റയെ ദ്വിചരഡാറ്റ എന്നാണു വിളിക്കുക. ഇങ്ങനെ മൂന്നോ അതിലധികമോ സവിശേഷതകൾ ഒരുമിച്ച് വിശകലനം ചെയ്യുന്ന ഡാറ്റയെ ബഹുചരഡാറ്റ എന്നും വിളിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് നമ്മൾ വിദ്യാർഥികളുടെ ഉയരത്തെക്കുറിച്ച് മാത്രമാണ് പഠനം നടത്തുന്നതെങ്കിൽ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത് ഏകചരഡാറ്റയായിരിക്കും. അവയെ x, y ,z, എന്നിങ്ങനെ രേഖപ്പെടുത്താം.

ഉയരം (ഇഞ്ചിൽ) : 52, 51, 57, 62, 68

ഓരോ വിദ്യാർഥികളുടെയും ഉയരവും ഭാരവും ഒരുമിച്ച് പരിഗണിച്ചു കൊണ്ടുള്ള ഒരു പഠനമാണ് നാം ഉദ്ദേശിക്കുന്നതെങ്കിൽ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത് ഒരു ദ്വിചര ഡാറ്റയായിരിക്കും. അതിനെ നമുക്ക് $(x, y)$ എന്നോ $(x_1, y_1)$ എന്നോ രേഖപ്പെടുത്താം. ഇവിടെ ഒന്നാമത്തെ ചരത്തിന്റെ വിലകൾ ഉയരത്തേയും രണ്ടാമത്തെ ചരത്തിന്റെ വിലകൾ ഭാരത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉയരവും (ഇഞ്ച്) ഭാരവും (കിലോഗ്രാം) :

(52, 45), (51, 62), (57, 58), (62, 70), (68, 73)

ഇതേ വിവരങ്ങളെ നമുക്ക് മറ്റൊരു രീതിയിൽ ഇങ്ങനെയും രേഖപ്പെടുത്താം.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ഉയരം (x) | : | 52 | 51 | 57 | 62 | 68 |
| ഭാരം (y) | : | 45 | 62 | 58 | 70 | 73 |

ഒരു ദ്വിചര ഡാറ്റയുടെ ആവൃത്തി വിതരണപ്പട്ടികയെ ദ്വിചര ആവൃത്തിപ്പട്ടിക (Bivariate Frequency Table ) എന്നു പറയുന്നു.

### വിവരണം 3.6

ഒരു ക്ലാസിലെ 40 കുട്ടികളുടെ ഉയരവും (ഇഞ്ച്) ഭാരവും (കിലോഗ്രാം) തന്നിരിക്കുന്നു. ഒരു ആവൃത്തിപ്പട്ടികയ്ക്ക് രൂപം നൽകുക.

(59, 60) (62, 70) (67, 65) (72, 80) (71, 58) (68, 73) (54, 42) (59, 55)

(55, 53) (60, 55) (54, 42) (65, 72) (62, 71) (69, 82) (65, 47) (68, 64)

(65, 74) (64, 84) (67, 69) (72, 75) (64, 65) (71, 78) (70, 74) (67, 62)

(60, 57) (59, 48) (67, 71) (60, 65) (56, 49) (63, 62) (71, 69) (58, 53)

(67, 62) (57, 62) (57, 55) (62, 64) (66, 73) (66, 53) (69, 72) (56, 44)

### പരിഹാരം

| ഭാരം \ ഉയരം | 54 - 58 | 59 - 63 | 64 - 68 | 69 - 73 | ആകെ |
|---|---|---|---|---|---|
| 36 - 45 | 3 | | | | 3 |
| 46 - 55 | 3 | 4 | 2 | | 9 |
| 56 - 65 | 1 | 5 | 5 | 1 | 12 |
| 66 - 75 | | 2 | 6 | 4 | 12 |
| 76 - 85 | | | 1 | 3 | 4 |
| ആകെ | 7 | 11 | 14 | 8 | 40 |

അവസാന വരിയിലും നിരയിലും നൽകിയിരിക്കുന്ന വിലകളെ പാർശ്വ ആവൃത്തി (Marginal frequency) എന്നു പറയുന്നു. ഉയരത്തിന്റെ പാർശ്വ ആവൃത്തിയാണ് അവസാനത്തെ വരിയിൽ നൽകിയിരിക്കുന്നത്. ഭാരത്തിന്റേത് അവസാനത്തെ നിരയിലും. അവയെ പ്രത്യേകം പട്ടികകളായി നൽകുമ്പോൾ പാർശ്വ ആവൃത്തിപ്പട്ടിക എന്നു വിളിക്കാം. ഉയരത്തിന്റെ പാർശ്വ ആവൃത്തിപ്പട്ടിക ചുവടെ നൽകുന്നു.

| ഉയരം | 54 - 58 | 59 - 63 | 64 - 68 | 69 - 73 | ആകെ |
|---|---|---|---|---|---|
| ആകെ | 7 | 11 | 14 | 8 | 40 |

ഭാരത്തിന്റെ പാർശ്വ ആവൃത്തിപട്ടിക ചുവടെ നൽകുന്നു.

| ഭാരം | 36 - 45 | 46 -55 | 56 - 65 | 66 - 75 | 76- 85 | ആകെ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ആകെ | 3 | 9 | 12 | 12 | 4 | 40 |

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

ഒരു കമ്പനി വിവിധ മാസങ്ങളിൽ പരസ്യത്തിന് വേണ്ടി ചെലവഴിച്ച തുകയും (ലക്ഷത്തിൽ) ലഭിച്ച ലാഭവും (കോടിയിൽ) തന്നിരിക്കുന്നു. ഒരു ദ്വിചര ആവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക. പാർശ്വ ആവൃത്തിപ്പട്ടികകൾ രൂപീകരിക്കുക.

(1, 13) (3, 15) (2, 16) (6, 17) (13, 23) (12, 24) (17, 25) (11, 19)

(15, 23) (18, 27) (19, 28) (18, 24) (16, 16) (13, 27) (7, 15) (8, 19)

(3, 14) (4, 17) (7, 21) (19, 33) (16, 35) (17, 27) (10, 21) (11, 17)

(10, 16) (13, 19) (11, 18) (12, 19) (14, 21) (16, 25) (19, 24) (20, 23)

## 3.9 പട്ടികയാക്കലിന്റെ മേൻമകൾ

ഡാറ്റയുടെ പട്ടികാരൂപത്തിലുള്ള അവതരണത്തിന്റെ ചില മേൻമകൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

1. പട്ടികകൾ ഡാറ്റയെ ക്രോഡീകരിക്കുന്നു.
2. പട്ടികകൾ ഡാറ്റയെ ലളിതമായും വ്യവസ്ഥാനുസൃതമായും അവതരിപ്പിക്കുന്നതിനാൽ ഒരാൾക്ക് ഒരു ചരത്തിന്റെ/സവിശേഷതയുടെ വിലകൾ എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കുന്നു.
3. പട്ടികകൾ ചരങ്ങൾ/സവിശേഷതകൾ തമ്മിലുള്ള പരസ്പര ബന്ധത്തെ വെളിവാക്കുന്നു.
4. രണ്ടു ഘടകങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള താരതമ്യം എളുപ്പമാകുന്നു.
5. പട്ടികകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഡയഗ്രങ്ങളും ഗ്രാഫുകളും നിർമിക്കാൻ എളുപ്പമാണ്.
6. ചുരുങ്ങിയ സ്ഥലമുപയോഗിച്ച് കൂടുതൽ വിവരങ്ങൾ ചിത്രീകരിക്കാൻ പട്ടികകൾക്ക് സാധിക്കുന്നു.
7. പട്ടികകൾ സമയം ലാഭിക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു. ഒരു പട്ടികയിൽ നിന്ന് എളുപ്പത്തിലും വേഗത്തിലും വിവരങ്ങൾ ശേഖരിക്കാം.
8. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ അവലോകനങ്ങളുടെ ഏറ്റവും അടിസ്ഥാനപരമായ ഘടകമാണ് പട്ടികകൾ
9. ലളിതമായ രീതിയിൽ മെച്ചപ്പെട്ട വ്യാഖ്യാനങ്ങൾ നടത്താൻ പട്ടികകൾ സഹായിക്കുന്നു.

---

### നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

*വർഗീകരണത്തിന്റെയും പട്ടികയാക്കലിന്റെയും ആവശ്യകതകളും ലക്ഷ്യങ്ങളും മേൻമകളുമാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ നമ്മൾ ചർച്ച ചെയ്തത്. നമ്മുടെ കയ്യിലുള്ള ഡാറ്റയെ അപഗ്രഥന സജ്ജമാക്കിത്തീർക്കുന്ന പ്രക്രിയയാണ് വർഗീകരണവും പട്ടികയാക്കലും. ഗുണാത്മകം, ഗണാത്മകം, ഭൂമിശാസ്ത്രബന്ധിതം കാലാനുസൃതം എന്നിങ്ങിനെ വിവിധതരത്തിലുള്ള വർഗീകരണങ്ങൾ നാം മനസ്സിലാക്കി. വർഗീകരിക്കപ്പെട്ട ഡാറ്റയെ വരിയും നിരയുമായി അവതരിപ്പിക്കുന്നതിനെ പട്ടികകൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ആവൃത്തികളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന പട്ടികകളെ ആവൃത്തിപ്പട്ടിക എന്നു വിളിക്കാം. ആവൃത്തിപ്പട്ടികകളിൽ തന്നെ ആപേക്ഷികാവൃത്തിപ്പട്ടികകൾ, ശതമാനാവൃത്തിപ്പട്ടികകൾ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടികകൾ എന്നിവ നിർമിക്കുന്ന വിധവും നമ്മൾ മനസ്സിലാക്കി കഴിഞ്ഞു. ചരങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിനനുസരിച്ച് ഏകചര ആവൃത്തിപ്പട്ടികകളും ദ്വിചര ആവൃത്തിപ്പട്ടികകളും ബഹുചര ആവൃത്തിപ്പട്ടികകളും നിർമിക്കേണ്ടതിന്റെ ആവശ്യകതയും രീതികളും നമ്മൾ ചർച്ച ചെയ്തു.*

---

### പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പഠിക്കുന്നതിലൂടെ പഠിതാവ്:

- വർഗീകരണത്തിന്റെയും പട്ടികപ്പെടുത്തലിന്റെയും ആവശ്യകത തിരിച്ചറിയുന്നു.
- വ്യത്യസ്തതരം വർഗീകരണങ്ങളും പട്ടികകളും തിരിച്ചറിയുന്നു.
- അസംസ്കൃത ഡാറ്റയെ ഉപയോഗപ്രദമായ വിവരങ്ങളായി വർഗീകരിക്കുന്നു.
- ആവൃത്തിപ്പട്ടികകൾ നിർമിക്കുന്നു.
- ഡാറ്റയെ യുക്തിസഹമായി വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നു.

### വിലയിരുത്തൽ ഇനങ്ങൾ

*ശരിയുത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക.*

1. ഡാറ്റയെ അവയുടെ സവിശേഷതകളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ വിവിധ ഗ്രൂപ്പുകളായി തിരിക്കുന്ന പ്രവൃത്തിയെ ....... എന്നു വിളിക്കുന്നു.

   a) ക്രമീകരണം b) വർഗീകരണം

   c) പട്ടികയാക്കൽ d) അവതരണം

2. സമയത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ വർഗീകരിക്കുന്നതിനെ ..... എന്നു പറയുന്നു.

   a) അളവുബന്ധിത വർഗീകരണം b) ഗുണാത്മക വർഗീകരണം

   c)കാലാനുസൃത വർഗീകരണം d) ഭൂമിശാസ്ത്ര ബന്ധിത വർഗീകരണം

3. ഡാറ്റയെ പട്ടികകളാക്കുന്നതിലൂടെ ....ലാഭിക്കും.

   a)സമയം b) ഊർജം

   c)സ്ഥലം d) ഇവയെല്ലാം

4. ഡാറ്റയെ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത വിഭാഗങ്ങളായി തരംതിരിക്കുന്നതിനെ ..... എന്നു പറയുന്നു.

   a) ഏകതല വർഗീകരണം b) ദ്വിതല വർഗീകരണം

   c) ബഹുതല വർഗീകരണം d) ഇവയൊന്നുമല്ല.

5. ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യയേക്കാൾ കൂടിയ വിലകളുടെ എണ്ണത്തെ .... എന്നു പറയുന്നു.

   a) സഞ്ചിതാവൃത്തി b) ശതമാനാവൃത്തി

   c) ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി d) അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി

6. ഒരു കേവല ക്ലാസ് .....നെ ഒഴിവാക്കുന്നു.

   a) താഴ്ന്ന പരിധി b) ഉയർന്ന പരിധി

   c) രണ്ടു പരിധികളും d) ഏതെങ്കിലും ഒരു പരിധി

7. ഏഴാമത്തെയും എട്ടാമത്തെയും വിലകളുടെ ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തികൾ 32 ഉം 84 ഉം ആയാൽ എട്ടാമത്തെ വിലയുടെ ആവൃത്തി .... ആയിരിക്കും.

   a) 52 b) 116

   c) 42 d) 64

8. ആപേക്ഷികാവൃത്തി = .......................

   a) $f \times N$ a) $\frac{f}{N}$

   a) $f - N$ a) $f + N$

9. ശതമാനാവൃത്തി = .......................

   a) $f \times 100$ b) $\frac{f}{100}$

   c) ആപേക്ഷികാവൃത്തി × 100 d) $\frac{\text{ആപേക്ഷികാവൃത്തി}}{100}$

10. 120 വിലകളുടെ ആപേക്ഷികാവൃത്തിപ്പട്ടിക നിർമിച്ചു. അഞ്ചാമത്തെ വിലയുടെ ആപേക്ഷികാവൃത്തി 0.1 ആയാൽ അഞ്ചാമത്തെ വിലയുടെ ആവൃത്തി എത്ര?

    a) 100 b) 50

    c) 12 d) 10

11. വർഗീകരണത്തിന്റെയും പട്ടികയാക്കലിന്റെയും ഉദ്ദേശ ലക്ഷ്യങ്ങൾ എന്തൊക്കെ?
12. വർഗീകരണവും പട്ടികയാക്കലും താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.
13. വ്യത്യസ്ത തരം വർഗീകരണങ്ങൾ ഏതൊക്കെ?
14. പട്ടികയാക്കലിന്റെ മേന്മകൾ എന്തൊക്കെ?
15. ഡൈക്കോട്ടമി എന്നാലെന്ത്?
16. ഒരു ഹയർസെക്കണ്ടറി സ്കൂളിലെ ഹ്യുമാനിറ്റീസ്, കൊമേഴ്സ്, സയൻസ് എന്നീ വിഭാഗങ്ങളിൽ മലയാളം, ഹിന്ദി, ഉർദ്ദു എന്നീ രണ്ടാം ഭാഷകൾ പഠിക്കുന്ന ആൺകുട്ടി കളും പെൺകുട്ടികളും ഉണ്ട്.

    a) ഇതിന്റെ ഒരു വർഗീകരണ രൂപരേഖവരയ്ക്കുക.

    b) പട്ടികയുടെ ചട്ടക്കൂട് നിർമിക്കുക.

17. ഒരു കമ്പനിയിൽ മാനേജർ, എക്സിക്യൂട്ടീവ് ക്ലർക്ക് എന്നീ വിഭാഗങ്ങളിൽ 1200 തൊഴിലാളികളുണ്ട്. ഉദ്യോഗപ്പേര്, ദേശം (ഇന്ത്യക്കാർ /അല്ലാത്തവർ), ലിംഗം, വയസ്സ് തുടങ്ങിയ സവിശേഷതകൾക്കനുസൃതമായി ഇവയുടെ വർഗീകരണ രൂപരേഖ തയ്യാറാക്കുക. ഇന വിവരങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളിക്കാവുന്ന ഒരു പട്ടികയുടെ ചട്ടക്കൂട് തയ്യാറാക്കുക.
18. ഒരു സർവ്വകലാശാലയിൽ 2000-2002 വർഷത്തെ വിവിധ കോഴ്സുകൾക്ക് 110000

വിദ്യാർഥികൾ രജിസ്റ്റർ ചെയ്തു. 63000 പേർ ആർട്സ് വിഷയങ്ങളും 30000 പേർ സയൻസ് വിഷയങ്ങളുമാണ് തെരഞ്ഞെടുത്തത്. 2000 ൽ 17000 വിദ്യാർഥികൾ ആർട്സ് വിഷയങ്ങളും 10000 വിദ്യാർഥികൾ സയൻസ് വിഷയങ്ങളും 4000 വിദ്യാർഥികൾ നിയമ പഠനത്തിനും ചേർന്നു. 2002 ൽ ചേർന്ന 43000 വിദ്യാർഥികൾ 25000 പേരും ആർട്സ് വിഷയങ്ങളാണ് തെരഞ്ഞെടുത്തത്. 2002 ലെ നിയമവിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം 2001 നേക്കാൾ ആയിരം കൂടുതലായിരുന്നു. ഈ വിവരങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഒരു പട്ടിക തയാറാക്കുക.

19. ഒരു ദിവസം ഒരു പൂന്തോട്ടത്തിലെ വിവിധ ചെടികളിൽ നിന്ന് ലഭിച്ച പൂക്കളുടെ എണ്ണം തന്നിരിക്കുന്നു.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 7 | 6 | 0 | 10 | 6 | 8 | 5 | 4 |
| 9 | 8 | 4 | 3 | 6 | 7 | 1 | 2 | 5 | 7 |
| 6 | 7 | 8 | 4 | 6 | 5 | 6 | 8 | 3 | 6 |
| 7 | 2 | 9 | 7 | 6 | 3 | 5 | 0 | 3 | 8 |
| 2 | 8 | 5 | 9 | 7 | 4 | 5 | 8 | 6 | 7 |
| 10 | 9 | 7 | 6 | 7 | 7 | 8 | 6 | 5 | 6 |
| 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 9 | 6 | 5 | 7 | 7 |

a) പൂക്കളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ ഒരു ആവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക

b) ഒരു ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക

c) ഒരു അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക

d) ഒരു ശതമാനാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക.

20. ഒരു ഫാമിലെ ആറ് മാസം പ്രായമായ മുയലുകളുടെ ഭാരം (ഗ്രാമിൽ) ചുവടെ നൽകുന്നു.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 862 | 816 | 971 | 932 | 877 | 958 | 854 | 928 | 802 | 950 | 946 | 928 |
| 837 | 952 | 855 | 812 | 836 | 958 | 933 | 946 | 902 | 925 | 941 | 882 |
| 900 | 861 | 907 | 832 | 917 | 858 | 888 | 868 | 860 | 827 | 946 | 886 |
| 976 | 889 | 937 | 806 | 944 | 916 | 951 | 951 | 855 | 940 | 890 | 828 |
| 802 | 822 | 926 | 808 | 916 | 914 | 943 | 828 | 954 | 892 | 844 | 938 |
| 809 | 882 | 918 | 928 | 979 | 830 | 935 | 840 | 809 | 919 | 873 | 915 |
| 865 | 901 | 894 | 863 | 870 | 862 | 814 | 913 | 861 | 875 | 971 | 922 |
| 906 | 829 | 938 | 969 | 828 | 910 | 972 | 876 | 961 | 930 | 949 | 864 |
| 864 | 955 | 935 | 907 | 870 | 980 | 839 | 940 | 843 | 885 | 938 | 920 |
| 801 | 873 | 877 | 847 | 856 | 842 | 921 | 958 | 906 | 914 | 878 | 829 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 898 | 898 | 852 | 925 | 896 | 867 | 939 | 975 | 849 | 917 | 922 | 904 |
| 852 | 848 | 927 | 820 | 864 | 952 | 911 | 975 | 963 | 930 | 802 | 823 |
| 976 | 890 | 816 | 856 | 841 | 906 | 867 | 929 | 921 | 929 | 896 | 965 |
| 809 | 967 | 928 | 943 | 816 | 895 | 813 | 804 | 880 | 970 | 847 | 972 |

a) അനുയോജ്യമായ ക്ലാസ് പരിധികൾ എടുത്ത് ഒരു ആവൃത്തിപ്പട്ടിക രൂപീകരിക്കുക.

b) ഒരു ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക

c) ഒരു അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക

d) ഒരു ആപേക്ഷികാവൃത്തിപ്പട്ടിക നിർമിക്കുക.

c) ഒരു ശതമാനാവൃത്തിപ്പട്ടിക നിർമിക്കുക.

21. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ ലാഭത്തിന്റെ സഞ്ചികാവൃത്തികൾ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

| ലാഭം പരമാവധി (in 000s) | 15 | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 | 105 | 120 | 135 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| കമ്പനികളുടെ എണ്ണം | 3 | 10 | 28 | 53 | 73 | 85 | 91 | 96 | 98 |

ഒരു ആവൃത്തിപ്പട്ടിക രൂപീകരിക്കുക.

22. ഒരു കായികമേളയിൽ പങ്കെടുത്ത മത്സരാർഥികളുടെ ഉയരങ്ങൾ ചില സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് വിദ്യാർഥികൾ പഠനവിധേയമാക്കി. അവർ 20 കായിക താരങ്ങളുടെ ഉയരങ്ങൾ ശേഖരിച്ചു. അവ ഇപ്രകാരമായിരുന്നു.

| ഉയരം (x) | 49 | 53 | 54 | 55 | 66 | 70 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| കായികതാരങ്ങളുടെ എണ്ണം(f) | 1 | 2 | 4 | 5 | 3 | 2 | 1 |

a) ഒരു ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക

b) ഒരു അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക

c) ഒരു ആപേക്ഷികാവൃത്തിപ്പട്ടിക രൂപീകരിക്കുക

d) ഒരു ശതമാനാവൃത്തിപ്പട്ടിക നിർമിക്കുക.

23. ഒരു പ്രത്യേക മരുന്നിന്റെ കാര്യക്ഷമതയെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുന്നതിന് 55 രോഗികളുടെ വയസ്സിനെക്കുറിച്ചുള്ള വിവരങ്ങൾ ശേഖരിച്ച് താഴെപ്പറയും വിധം പട്ടികയാക്കി

| വയസ്സ് | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| രോഗികളുടെ എണ്ണം | 5 | 7 | 17 | 12 | 5 | 2 | 7 |

a) ഒരു ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക

b) ഒരു അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക

c) ഒരു ആപേക്ഷികാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക

d) ഒരു ശതമാനാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക

24. ഒരു ലോജിസ്റ്റിക് കമ്പനി കൈമാറ്റം ചെയ്ത പാർസലുകളുടെ ഭാരത്തിന്റെ (കിലോ ഗ്രാമിൽ) ആവൃത്തി വിതരണമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

| ഭാരം | പാർസലുകളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| 10.0 - 10.9 | 2 |
| 11.0 - 11.9 | 3 |
| 12.0 - 12.9 | 5 |
| 13.0 - 13.9 | 8 |
| 14.0 - 14.9 | 12 |
| 15.0 - 15.9 | 15 |
| 16.0 - 16.9 | 13 |
| 17.0 - 17.9 | 11 |
| 18.0 - 18.9 | 6 |
| 19.0 - 19.9 | 2 |

കേവല ക്ലാസ്സുകളുള്ള ഒരു ആവൃത്തിപ്പട്ടിക നിർമിക്കുക.

25. ഇന്ധനക്ഷമത പരിശോധിക്കുന്നതിന് വേണ്ടി മുപ്പത് വാഹനങ്ങളെ പരിശോധിച്ച് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ ശേഖരിച്ചു ഒരു ആവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക.

| ഇന്ധനക്ഷമത(കിലോമീറ്ററിൽ) | 13 ൽ താഴെ | 18 ൽ താഴെ | 23 ൽ താഴെ | 28 ൽ താഴെ | 33 ൽ താഴെ |
|---|---|---|---|---|---|
| വാഹനങ്ങളുടെ എണ്ണം | 3 | 8 | 23 | 28 | 30 |

26. ഒരു കമ്പനിയിലെ അഞ്ഞൂറ് തൊഴിലാളികളുടെ ദിവസവേതനത്തിന്റെ ആപേക്ഷികാവൃത്തിപ്പട്ടിക ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

| ദിവസവേതനം | 250 - 300 | 300 - 350 | 350 - 400 | 400 - 450 | 450 - 500 | 500 - 550 | 550 - 600 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ആപേക്ഷികാവൃത്തി | 0.05 | 0.1 | 0.3 | 0.225 | 0.2 | 0.1 | 0.025 |

ആവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക.

**ഉത്തരങ്ങൾ**

1) b 2) c 3) d 4) b 5) d

6) b 7) a 8) b 9) c 10) c

D4D3R1

# 4 ഡയഗ്രങ്ങളും ഗ്രാഫുകളും (Diagrams and Graphs)

### ആമുഖം

മുൻ അധ്യായത്തിൽ വർഗീകരണവും പട്ടികയാക്കലും നാം ചർച്ച ചെയ്തതാണ്. ശേഖരിച്ച ഡാറ്റയെ ക്രമാനുഗതമായി സംഗ്രഹിക്കുന്നതിനും അവതരിപ്പിക്കുന്നതിനും അവ സഹായകരമാണ്. ഡാറ്റ അവതരിപ്പിക്കുന്നതിന് പട്ടികയാക്കൽ നല്ല രീതിയാണെങ്കിലും, ഡയഗ്രം ഒന്നുകൂടി മെച്ചപ്പെട്ട രീതിയാണ്. ഡാറ്റയുടെ സങ്കീർണത ലഘൂകരിക്കുന്നതിന് ഡയഗ്രങ്ങളും ഗ്രാഫുകളും സഹായിക്കുന്നു.

### 4.1. ഡയഗ്രങ്ങളുടേയും ഗ്രാഫുകളുടേയും പ്രാധാന്യം

1. ഡാറ്റയുടെ വ്യക്തമായ ഒരു ചിത്രം നൽകുന്നു.
2. വ്യത്യസ്ത സാമ്പിളുകളെ എളുപ്പത്തിൽ താരതമ്യം ചെയ്യുവാൻ സാധിക്കുന്നു
3. ഈ രീതി ഏതു സ്ഥലത്തും ഏതു സമയത്തും ഉപയോഗിക്കുവാൻ സാധിക്കുന്നു. വിവിധ വിഷയങ്ങളിലും മേഖലകളിലും ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കുന്നു.
4. ഇത് കൂടുതൽ ആകർഷകവും ഹൃദയഹാരിയുമാണ്.

പഴയകാലത്ത് ജ്യോതിശാസ്ത്രജ്ഞൻമാർ നക്ഷത്രങ്ങളുടെ സ്ഥാനം നിർണയിക്കുന്നതിനായി ഉപയോഗിച്ച ചിത്രീകരണങ്ങളിലൂടെയാണ് ഗ്രാഫുകൾ രൂപപ്പെട്ടുവന്നത്. റോമൻ സർവേയർമാർ സ്ഥാനനിർണയത്തിന് ഭൂപടങ്ങളിൽ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. എഞ്ചിനിയറും രാഷ്ട്രീയസാമ്പത്തിക വിദഗ്ധനുമായിട്ടുള്ള സ്കോട്ലൻഡ് സ്വദേശി ഹെൻറി പ്ലേ ഫെയർ ആണ് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലെ ഗ്രാഫിക്കൽ രീതികളുടെ കണ്ടുപിടുത്തക്കാരനായി അറിയപ്പെടുന്നത്. ലൈൻ ഡയഗ്രം, ബാർ ഡയഗ്രം, പൈ ഡയഗ്രം, സർക്കുലർ ഡയഗ്രം എന്നിങ്ങനെ നാലു തരം ഡയഗ്രമുകൾ അദ്ദേഹം കണ്ടുപിടിച്ചു. സാമ്പത്തിക ഡാറ്റ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിനും അദ്ദേഹം ഗ്രാഫുകൾ ഉപയോഗിച്ചു.

### 4.2. ഡയഗ്രങ്ങൾ (Diagrams)

സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ഡയഗ്രങ്ങൾ ബാർഡയഗ്രം, പൈഡയഗ്രം എന്നിവയാണ്

#### ബാർ ഡയഗ്രം (Bar Diagram)

വേർതിരിക്കപ്പെട്ട ദീർഘചതുരങ്ങൾ അടങ്ങിയതാണ് ഒരു ബാർഡയഗ്രം. ഇതിലെ ഓരോ ദീർഘചതുരവും ബാർ എന്നറിയപ്പെടുന്നു. നാലു തരം ബാർ ഡയഗ്രമുകൾ ഉണ്ട്.

1. ലഘു ബാർ ഡയഗ്രം (Simple Bar Diagram)
2. ബഹുഗുണ ബാർ ഡയഗ്രം (Multiple Bar Diagram)
3. വിഭജിത ബാർ ഡയഗ്രം (Sub Divided Bar Diagram )
4. ശതമാന ബാർ ഡയഗ്രം (Percentage Bar Diagram)

## ലഘു ബാർ ഡയഗ്രം (Simple bar diagram)

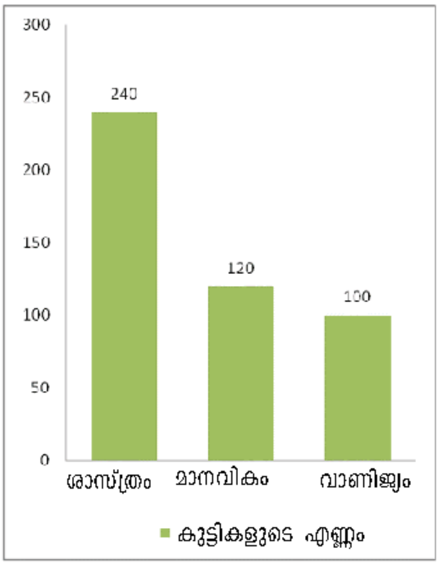
ലഘു ബാർ ഡയഗ്രം ഒരു ചരത്തിനെ മാത്രം പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരേ വീതിയിലുള്ള ലംബമായോ, തിരശ്ചീനമായോ ഉള്ള ബാറുകൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് ഇത് നിർമിക്കുന്നത്. ഗണാത്മകവും ഗുണാത്മകവുമായ ഡാറ്റയെ ചിത്രീകരിക്കാൻ ഇത് ഉപയോഗിക്കുന്നു.

### വിവരണം 4.1

ഒരു സ്കൂളിലെ ശാസ്ത്രം, മാനവികം, വാണിജ്യം വിഭാഗങ്ങളിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണ മാണ് താഴെയുള്ള പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ളത്. ലഘു ബാർഡയഗ്രം ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുക.

**പരിഹാരം**

| മേഖല | കുട്ടികളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| ശാസ്ത്രം | 240 |
| മാനവികം | 120 |
| വാണിജ്യം | 100 |

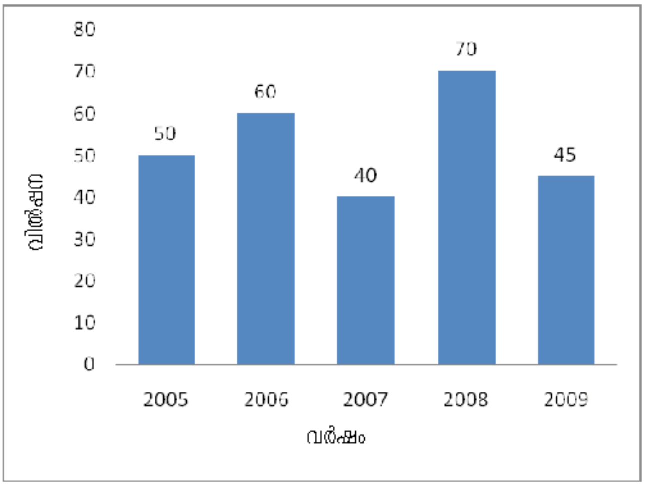



### വിവരണം 4.2

ഒരു കമ്പനിയിലെ കഴിഞ്ഞ 5 വർഷത്തെ വിൽപ്പന ചുവടെ പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. ഡാറ്റയെ ലഘു ബാർ ഡയഗ്രം ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

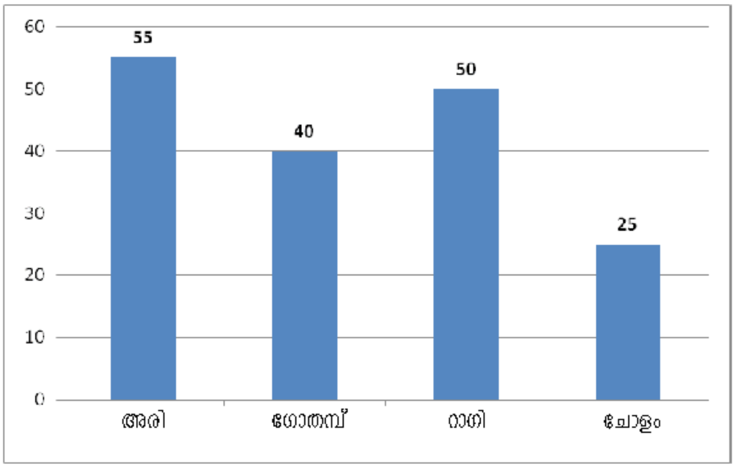
| വർഷം | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|---|---|
| വിൽപ്പന(ലക്ഷത്തിൽ) | 50 | 60 | 40 | 70 | 45 |

പരിഹാരം




## നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

ഇന്ത്യയിലെ ധാന്യോൽപ്പാദന (ലക്ഷം ടൺ കണക്കിൽ) വുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റയെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന ലഘു ബാർ ഡയഗ്രമാണ് താഴെ തന്നിരിക്കുന്നത്.




താഴെ പറയുന്ന ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം എഴുതുക.

1. ഏറ്റവും കൂടുതൽ ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കുന്ന ധാന്യം ഏതാണ്?
2. മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഡയഗ്രത്തിലെ ഡാറ്റയെ പട്ടികരൂപത്തിലാക്കുക.
3. ഏറ്റവും കൂടുതൽ ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കുന്ന ധാന്യത്തിന്റേയും ഏറ്റവും കുറവ് ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കുന്ന ധാന്യത്തിന്റേയും അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കാണുക.

### പ്രവർത്തനം

കഴിഞ്ഞ 4 വർഷത്തെ നിങ്ങളുടെ വിദ്യാലയത്തിലെ ഹയർസെക്കണ്ടറി വിജയശതമാനത്തിന്റെ ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുകയും ലഘു ബാർ ഡയഗ്രം ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിനിധീകരിക്കുകയും ചെയ്യുക.

### ബഹുഇന ബാർ ഡയഗ്രം (Multiple bar diagram)

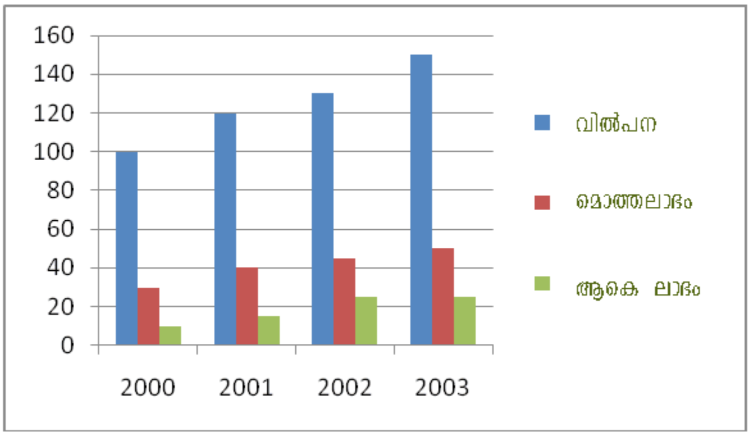
രണ്ടോ അതിലധികമോ ഇനങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഡാറ്റയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുവാൻ ഇത് ഉപയോഗിക്കുന്നു. അടുത്തടുത്തു നിൽക്കുന്ന ഒരു കൂട്ടം ബാറുകൾ ഓരോ ചരത്തിന്റെയും വിവിധ ഇനങ്ങളെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു.

### വിവരണം 4.3

താഴെകൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് ബഹുഇന ബാർഡയഗ്രം വരക്കുക.

| വർഷം | വിൽപന (ആയിരത്തിൽ) | മൊത്തലാഭം (ആയിരത്തിൽ) | ആകെ ലാഭം (ആയിരത്തിൽ) |
|---|---|---|---|
| 2000 | 100 | 30 | 10 |
| 2001 | 120 | 40 | 15 |
| 2002 | 130 | 45 | 25 |
| 2003 | 150 | 50 | 25 |

**പരിഹാരം**



### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയ്ക്ക് അനുയോജ്യമായ ബാർഡയഗ്രം വരക്കുക.

| ഇനങ്ങൾ | വർഷം 2000 | വർഷം 2004 |
|---|---|---|
| വ്യവസായം | 250 | 350 |
| കാർഷികം | 670 | 300 |
| ആഭ്യന്തര വ്യാപാരം | 500 | 800 |

### പ്രവർത്തനം

കഴിഞ്ഞ 5 വർഷത്തെ നിങ്ങളുടെ സ്കൂളിലെ ആൺകുട്ടികളുടെയും പെൺകുട്ടികളുടെയും എണ്ണം സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഡാറ്റ ശേഖരിച്ച് അതിനെ ബാർഡയഗ്രം ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

### ഉപവിഭജിത ബാർഡയഗ്രം (Sub divided bar diagram)

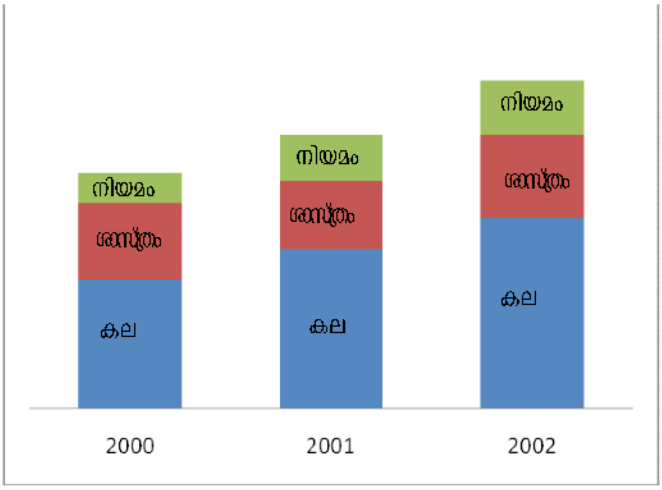
ഒരു ഇനത്തിന്റെ ആകെ അളവിനെ പല വിഭാഗങ്ങളാക്കി അവതരിപ്പിക്കുന്ന ഡാറ്റയെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നതിന് ഈ ഡയഗ്രം ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇത്തരം ഡയഗ്രത്തിൽ ഓരോ ഇനത്തിന്റെയും ആകെ അളവ് ഉപയോഗിച്ച് ലഘു ബാർ ഡയഗ്രം വരക്കുന്നു. പിന്നീട് ആ ബാറുകളെ വിഭാഗങ്ങളുടെ അനുപാതം അനുസരിച്ച് വിഭജിക്കുന്നു.

### വിവരണം 4.4

ഒരു സർവകലാശാലയിലെ 2000 മുതൽ 2002 വരെയുള്ള വർഷങ്ങളിലെ വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രകാരമാണ്. അനുയോജ്യമായ രീതിയിൽ ഉപവിഭജിത ബാർഡയഗ്രം ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

| വർഷം | കല | ശാസ്ത്രം | നിയമം | ആകെ |
|---|---|---|---|---|
| 2000 | 17000 | 10000 | 4000 | 31000 |
| 2001 | 21000 | 9000 | 6000 | 36000 |
| 2002 | 25000 | 11000 | 7000 | 43000 |

### പരിഹാരം




### ശതമാന ബാർ ഡയഗ്രം (Percentage bar diagram)

ഉപവിഭജിത ബാർഡയഗ്രത്തിന്റെ പരിഷ്കരിച്ച രൂപമാണ് ശതമാന ബാർഡയഗ്രം. ഘടകങ്ങളുടെ താരതമ്യത്തിനു പ്രാധാന്യമേറുമ്പോഴാണ് ഇത് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഒരു ശതമാന ബാർഡയഗ്രം നിർമിക്കുവാൻ ഓരോ ഘടകത്തിന്റെയും ശതമാനം കണക്കാക്കി ഉപവിഭജിത ബാറുകൾ നിർമിക്കുന്നു.

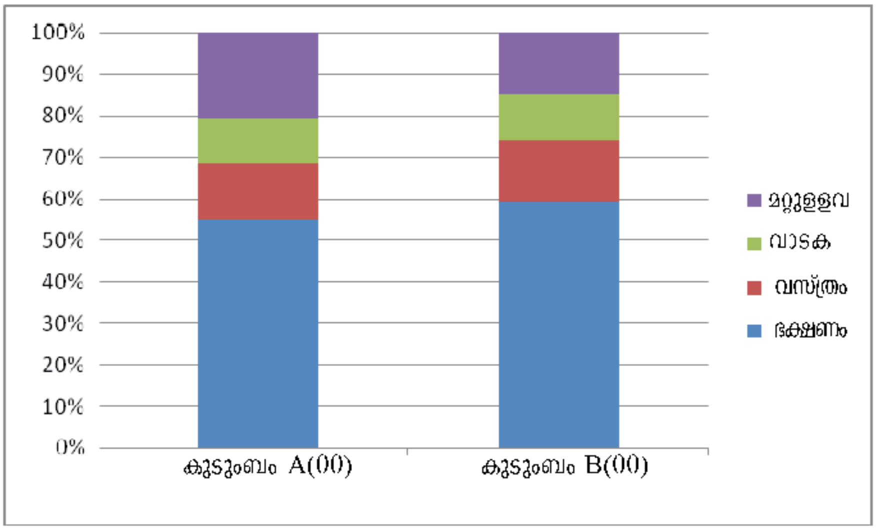
### വിവരണം 4.5

രണ്ടു കുടുംബങ്ങളുടെ വിവിധ ഇനങ്ങളിലുള്ള ചെലവാണ് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത്. ശതമാന ബാർഡയഗ്രം ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

| ഇനങ്ങളുടെ വിധം | ചെലവ് (നൂറ് രൂപയിൽ) | |
|---|---|---|
| | കുടുംബം A | കുടുംബം B |
| ഭക്ഷണം | 40 | 80 |
| വസ്ത്രം | 10 | 20 |
| വാടക | 8 | 15 |
| മറ്റുള്ളവ | 15 | 20 |
| മൊത്തം | 73 | 135 |

**പരിഹാരം**

| ഇനങ്ങളുടെ വിധം | കുടുംബം A | കുടുംബം A യുടെ ശതമാനം | കുടുംബം B | കുടുംബം B യുടെ ശതമാനം |
|---|---|---|---|---|
| ഭക്ഷണം | 40 | 54.8 | 80 | 59.3 |
| വസ്ത്രം | 10 | 13.7 | 20 | 14.8 |
| വാടക | 8 | 11 | 15 | 11.1 |
| മറ്റുള്ളവ | 15 | 20.5 | 20 | 14.8 |
| മൊത്തം | 73 | 100 | 135 | 100 |




### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

2005-08 ൽ ഒരു സ്കൂളിലെ വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണമാണ് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത്.

| വർഷം | മാനവികം | ശാസ്ത്രം | വാണിജ്യം |
|---|---|---|---|
| 2005 - 06 | 110 | 150 | 60 |
| 2006 - 07 | 118 | 180 | 55 |
| 2007 - 08 | 120 | 240 | 120 |

ശതമാന ബാർഡയഗ്രം വരയ്ക്കുക.

### പ്രവർത്തനം

സമീപത്തുള്ള 3 സ്കൂളുകളിലെ ശാസ്ത്രം, മാനവികം, വാണിജ്യം എന്നീ വിഷയങ്ങളിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം ശേഖരിച്ച് അവയെ ബാർ ഡയഗ്രം ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രീകരിക്കുക.

## പൈ ഡയഗ്രം (Pie - diagram)

പൈ ഡയഗ്രം വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു ഡയഗ്രമാണ്. അതിലെ വൃത്താംശങ്ങൾ (Sectors) തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയിലെ വിവിധ ഇനങ്ങളുടെ അളവുകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഓരോ വൃത്താംശത്തിന്റെയും വിസ്തീർണം ഇനങ്ങളുടെ അളവിന് ആനുപാതികമായിട്ടായിരിക്കും.

പൈ ഡയഗ്രം നിർമിക്കുന്നതിനുള്ള ആദ്യ പടി, വിവിധ ഇനങ്ങൾക്ക് അനുയോജ്യമായ വൃത്താംശങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോണളവുകൾ താഴെ കൊടുക്കുന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തുക എന്നതാണ്.

$$\text{കോണളവ്} = \frac{\text{ഇനത്തിന്റെ അളവ്}}{\text{ആകെ അളവ്}} \times 360$$

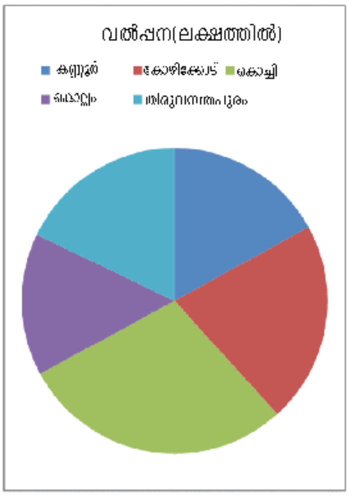
### വിവരണം 4.6

2013 ഒക്ടോബറിൽ 5 നഗരങ്ങളിൽ ഒരു ഉൽപ്പന്നത്തിന്റെ വിൽപ്പനയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട വിവരങ്ങൾ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. ഒരു പൈ ഡയഗ്രം വരച്ച് അതിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

| നഗരം | വിൽപ്പന(ലക്ഷത്തിൽ) |
|---|---|
| കണ്ണൂർ | 79 |
| കോഴിക്കോട് | 99 |
| കൊച്ചി | 134 |
| കൊല്ലം | 70 |
| തിരുവനന്തപുരം | 83 |

**പരിഹാരം**

| നഗരം | വിൽപ്പന(ലക്ഷത്തിൽ) | കോണളവ് |
|---|---|---|
| കണ്ണൂർ | *79* | $\frac{79}{465} \times 360 = 61.2$ |
| കോഴിക്കോട് | *99* | $\frac{99}{465} \times 360 = 76.6$ |
| കൊച്ചി | *134* | $\frac{134}{465} \times 360 = 103.7$ |
| കൊല്ലം | *70* | $\frac{70}{465} \times 360 = 54.2$ |
| തിരുവനന്തപുരം | *83* | $\frac{83}{465} \times 360 = 64.3$ |
| ആകെ | *465* | 360 |



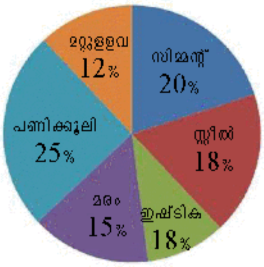

**വിവരണം 4.7**

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത് ഡൽഹിയിൽ വീടുകളുടെ നിർമാണ ചെലവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റയാണ്. പൈ ഡയഗ്രം ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

| ഇനം | ചെലവ് |
|---|---|
| സിമന്റ് | 20% |
| സ്റ്റീൽ | 18% |
| ഇഷ്ടിക | 10% |
| മരം | 15% |
| പണിക്കൂലി | 25% |
| മറ്റുള്ളവ | 12% |

### പരിഹാരം

| ഇനം | കോണളവ് |
|---|---|
| സിമന്റ് | $\frac{20}{100} \times 360 = 72$ |
| സ്റ്റീൽ | $\frac{18}{100} \times 360 = 64.8$ |
| ഇഷ്ടിക | $\frac{10}{100} \times 360 = 36$ |
| മരം | $\frac{15}{100} \times 360 = 54$ |
| പണിക്കൂലി | $\frac{25}{100} \times 360 = 90$ |
| മറ്റുള്ളവ | $\frac{12}{100} \times 360 = 43.2$ |




### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

പഞ്ചവത്സര പദ്ധതിയിൽ വിവിധ ഇനങ്ങളുടെ സാമ്പത്തിക നീക്കിയിരുപ്പിന്റെ ശതമാനക്കണക്കാണ് ചുവടെ നൽകിയിട്ടുള്ളത്. പൈ-ഡയഗ്രം വരയ്ക്കുക.

| | |
|---|---|
| കൃഷി | : 20% |
| ജലസേചനം | : 18% |
| ചെറുകിട വ്യവസായം | : 22% |
| ഗതാഗതം | : 14% |
| സാമൂഹ്യസേവനം | : 15% |
| മറ്റുള്ളവ | : 11% |

### പ്രവർത്തനം

ഒരു മാസത്തിൽ നിങ്ങളുടെ വീട്ടിലെ വിവിധ ഭക്ഷണസാധനങ്ങളുടെ (അരി, ഗോതമ്പ്, എണ്ണ) ചെലവ് ശേഖരിച്ച് പൈ-ഡയഗ്രത്തിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

വില്ല്യം ഹെൻറി പ്ലേഫയർ തന്റെ Statistical Breviary എന്ന പുസ്തകത്തിൽ (1801) നൽകിയിട്ടുള്ള പൈ ഡയഗ്രമാണിത്. ഇതിൽ 1789 ന് മുമ്പ് തുർക്കി രാജവംശം ഏഷ്യ, യൂറോപ്പ്, ആഫ്രിക്ക എന്നിവിടങ്ങളിൽ എങ്ങനെയാണ് വ്യാപിച്ചിരുന്നതെന്ന് ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നു.

## 4.3 ഗ്രാഫ് (Graph)

ഡാറ്റയുടെ സവിശേഷ ഗുണങ്ങൾ വ്യക്തമായി അറിയുവാനാണ് ഗ്രാഫുകൾ രൂപപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നത്. മുൻ അധ്യായങ്ങളിൽ ആവൃത്തി വിതരണം പട്ടികകളാക്കാമെന്ന് നാം കണ്ടു. എന്നാൽ പട്ടികകളാക്കിയ ഡാറ്റയേക്കാൾ ഗ്രാഫുകളാണ് കൂടുതൽ ആകർഷകം. ആവൃത്തി വിതരണത്തിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ഗ്രാഫുകളാണ്.

a) ഹിസ്റ്റോഗ്രാം (Histogram)

b) ആവൃത്തി ബഹുഭുജം (Frequency Polygon)

c) ആവൃത്തി വക്രം (frequency curve)

d) ഒജൈവ്സ് (സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രം) (cumulative frequency curve)

e) സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ട് (Scatter Plot)

### ഹിസ്റ്റോഗ്രാം (Histogram)

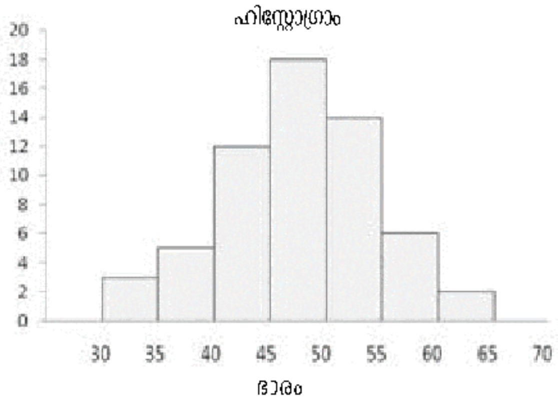
ആവൃത്തിവിതരണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഏറ്റവും പ്രധാനപ്പെട്ട ഒരു ഗ്രാഫാണ് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം. ലംബമായിട്ടുള്ള ബാറുകളാണിത്. അവയുടെ ഉയരം ആവൃത്തിക്ക് ആനുപാതികമാണ്. ഹിസ്റ്റോഗ്രാം നിർമിക്കുന്നതിന് ചരത്തിന്റെ വില X അക്ഷത്തിലും ആവൃത്തി Y അക്ഷത്തിലും എടുക്കുന്നു. ബാറുകളുടെ വീതി ക്ലാസന്തരത്തിന് ആനുപാതികമായിട്ടാണ്. ഹിസ്റ്റോഗ്രാം സാധാരണയായി ഒരു തുടർ ആവൃത്തി പട്ടികയെ പ്രതിനിധീകരിക്കാനാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

**വിവരണം 4.8**

ഒരു സ്കൂളിലെ ഒരു ക്ലാസിലെ 60 കുട്ടികളുടെ ഭാരത്തിന്റെ ആവൃത്തി വിതരണമാണ് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക.

| ഭാരം (കി.ഗ്രാം) | 30-35 | 35-40 | 40-45 | 45-50 | 50-55 | 55-60 | 60-65 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | 3 | 5 | 12 | 18 | 14 | 6 | 2 |

**പരിഹാരം**



## ആവൃത്തി ബഹുഭുജം (Frequency Polygon)

ഹിസ്റ്റോഗ്രാമിന്റെ ബാറുകളുടെ മുകൾവശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുക്കളെല്ലാം രേഖാഖണ്ഡങ്ങൾ കൊണ്ട് യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ ആവൃത്തി ബഹുഭുജം ലഭിക്കുന്നു. ഇതിന്റെ അഗ്ര ബിന്ദുക്കൾ X അക്ഷത്തിൽ യോജിപ്പിക്കുന്നു. ക്ലാസുകളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ X അക്ഷത്തിലും ആവൃത്തി Y അക്ഷത്തിലും എടുത്തുകൊണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി അവയെ രേഖാഖണ്ഡങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ബന്ധിപ്പിക്കുകയാണ് വേറൊരു രീതി.

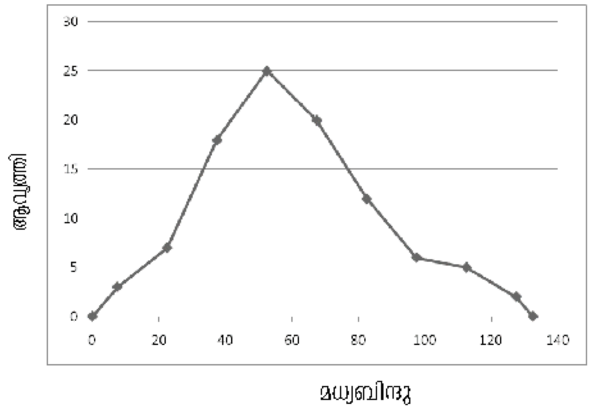
### വിവരണം 4.9

താഴെപറയുന്ന ഡാറ്റയ്ക്ക് ആവൃത്തി ബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക.

| ലാഭം (ആയിരത്തിൽ) | 0-15 | 15-30 | 30-45 | 45-60 | 60-75 | 75-90 | 90-105 | 105-120 | 120-135 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| കമ്പനികളുടെ എണ്ണം | 3 | 7 | 18 | 25 | 20 | 12 | 6 | 5 | 2 |

**പരിഹാരം**

| മധ്യബിന്ദു | 7.5 | 22.5 | 37.5 | 52.5 | 67.5 | 82.5 | 97.5 | 112.5 | 127.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ആവൃത്തി | 3 | 7 | 18 | 25 | 20 | 12 | 6 | 5 | 2 |




## ആവൃത്തിവക്രം (Frequency Curve)

ആവൃത്തി ബഹുഭുജം വരയ്ക്കാൻ പരിഗണിച്ച ബിന്ദുക്കളെ ലളിതമായ ഒരു വക്രമുപയോഗിച്ച് ബന്ധിപ്പിക്കുമ്പോൾ ആവൃത്തിവക്രം ലഭിക്കുന്നു.

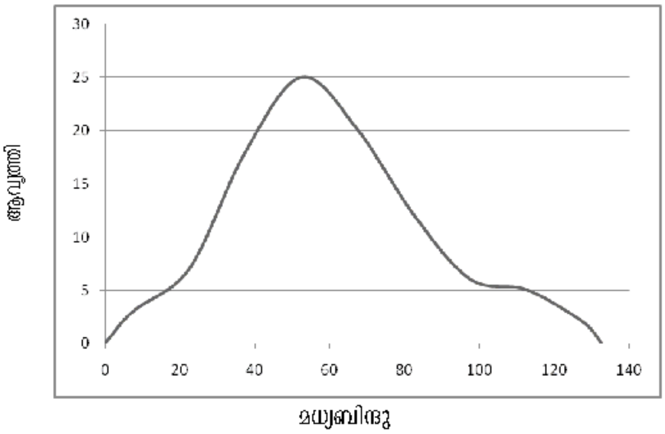
### വിവരണം 4.10

താഴെ പറയുന്ന ഡാറ്റയുടെ ആവൃത്തിവക്രം വരയ്ക്കുക.

| ലാഭം (ആയിരത്തിൽ) | 0-15 | 15-30 | 30-45 | 45-60 | 60-75 | 75-90 | 90-105 | 105-120 | 120-135 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| കമ്പനികളുടെ എണ്ണം | 3 | 7 | 18 | 25 | 20 | 12 | 6 | 5 | 2 |

പരിഹാരം

| മധ്യബിന്ദു | 7.5 | 22.5 | 37.5 | 52.5 | 67.5 | 82.5 | 97.5 | 112.5 | 127.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ആവൃത്തി | 3 | 7 | 18 | 25 | 20 | 12 | 6 | 5 | 2 |




## നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. താഴെ പറയുന്ന ഡാറ്റയ്ക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക.

| മധ്യവില | 18 | 25 | 32 | 39 | 46 | 53 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ആവൃത്തി | 10 | 15 | 32 | 42 | 26 | 12 | 9 |

(സൂചന : ക്ലാസ്പരിധി =7, ക്ലാസുകൾ മധ്യവില ±7/2)

2. 60 കുട്ടികളുടെ മാർക്കുകളാണ് ചുവടെ പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നത്. ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക.

(സൂചന : ഒഴിവാക്കൽ ക്ലാസുകളെ കേവല ക്ലാസുകളാക്കി മാറ്റുക.)

| മാർക്ക് | 20-24 | 25-29 | 30-34 | 35-39 | 40-44 | 45-49 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | 10 | 16 | 7 | 11 | 9 | 7 |

3. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ ഹിസ്റ്റോഗ്രാം, ആവൃത്തി ബഹുഭുജം, ആവൃത്തി വക്രം എന്നിവ വരയ്ക്കുക.

| മാർക്ക് | 0-5 | 5-10 | 10-15 | 15-20 | 20-25 | 25-30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | 8 | 6 | 26 | 40 | 30 | 8 |

### പ്രവർത്തനം

ഒരു പ്രത്യേകവിഷയത്തിന് നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിലെ കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ ശേഖരിച്ച് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം, ആവൃത്തി ബഹുഭുജം, ആവൃത്തിവക്രം എന്നിവ വരയ്ക്കുക.

## ഓജൈവ്സ് (സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം) (Ogives)

ഒരു ടീച്ചർ ക്ലാസ് പരീക്ഷയിൽ എത്രപേർ 30 മാർക്കിന് താഴെ നേടിയിട്ടുണ്ടെന്നും എത്രപേർ 50 മാർക്കിനേക്കാൾ നേടിയിട്ടുണ്ടെന്നും അറിയാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു എന്നു കരുതുക. ഇത്തരം ചോദ്യങ്ങൾക്കു ഉത്തരം കണ്ടെത്താൻ ആവൃത്തികളുടെ തുക കാണേണ്ടതുണ്ട്. ആവൃത്തികളുടെ തുകയെ സഞ്ചിതാവൃത്തി എന്നുപറയുന്നു. ഈ ആവൃത്തികളെ ഒരു പട്ടികയിലാക്കുന്നു. അതിനെ സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക എന്നു പറയുന്നു. സഞ്ചിതാവൃത്തികൾ ഉപയോഗിച്ചു കൊണ്ടു വരയ്ക്കുന്ന വക്രമാണ് സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രം അഥവാ ഓജൈവ്. ഓജൈവുകൾ രണ്ടുതരം ഉണ്ട്.

1. ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രം (Less than Ogive)
2. അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രം (Greater than Ogive or More than Ogive)

## ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രം (Less than ogive)

ക്ലാസുകളുടെ ഉയർന്നപരിധികൾ X അക്ഷത്തിലും ആരോഹണ സഞ്ചിത ആവൃത്തികൾ Y അക്ഷത്തിലും രേഖപ്പെടുത്തിക്കൊണ്ടു വരയ്ക്കുന്ന വക്രമാണിത്.

### വിവരണം 4.11

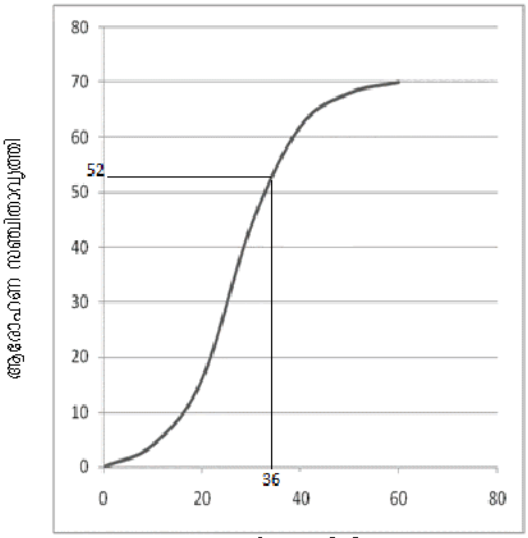
ഒരു കോളനിയിലെ 100 വ്യക്തികളുടെ വയസ്സിന്റെ വിതരണമാണ് താഴെ തന്നിരിക്കുന്നത്. ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രം വരയ്ക്കുക.

| വയസ് | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ആളുകളുടെ എണ്ണം | 4 | 12 | 28 | 18 | 6 | 2 |

ഇതുപയോഗിച്ച് 36 വയസ്സിൽ കുറഞ്ഞവരുടെ എണ്ണം കാണുക.

### പരിഹാരം

| വയസ് | ആവൃത്തി | ഉയർന്ന പരിധി | ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|---|---|
| 0-10 | 4 | 10 | 4 |
| 10-20 | 12 | 20 | 16 |
| 20-30 | 28 | 30 | 44 |
| 30-40 | 18 | 40 | 62 |
| 40-50 | 6 | 50 | 68 |
| 50-60 | 2 | 60 | 70 |




(36 വയസ്സിൽ കുറഞ്ഞ വ്യക്തികളുടെ എണ്ണം = 52)

### അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രം (More than ogive)

ക്ലാസുകളുടെ താഴ്ന്ന പരിധികൾ X അക്ഷത്തിലും അവരോഹണ സഞ്ചിത ആവൃത്തികൾ Y അക്ഷത്തിലും രേഖപ്പെടുത്തി കൊണ്ടു വരയ്ക്കുന്ന വക്രമാണിത്.

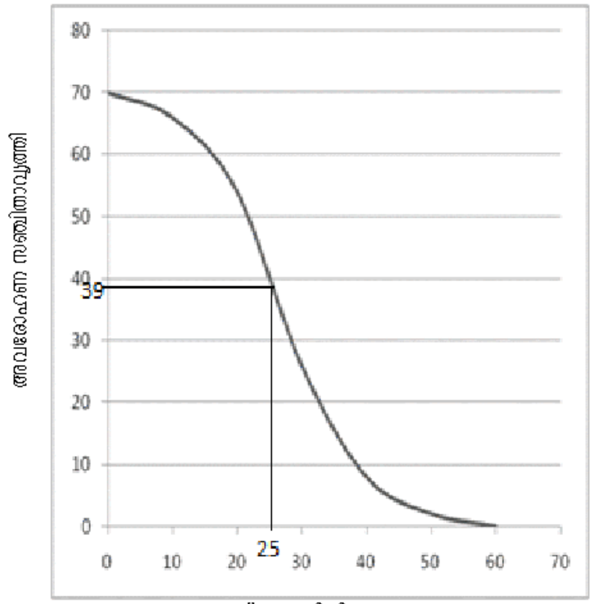
### വിവരണം 4.12

ഒരു കോളനിയിലെ 70 ആൾക്കാരുടെ വയസ്സിന്റെ ആവൃത്തി വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. ഒരു അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രം വരച്ച് 25 വയസ്സിന് മുകളിലുള്ളവരുടെ എണ്ണം കാണുക.

| വയസ്സ് | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ആളുകളുടെ എണ്ണം | 4 | 12 | 28 | 18 | 6 | 2 |

**പരിഹാരം**

| വയസ്സ് | ആവൃത്തി | താഴ്ന്ന പരിധി | ആവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|---|---|
| 0-10 | 4 | 0 | 70 |
| 10-20 | 12 | 10 | 66 |
| 20-30 | 28 | 20 | 54 |
| 30-40 | 18 | 30 | 26 |
| 40-50 | 6 | 40 | 8 |
| 50-60 | 2 | 50 | 2 |




25 വയസ്സിന് മുകളിൽ പ്രായമുള്ളവർ = 39

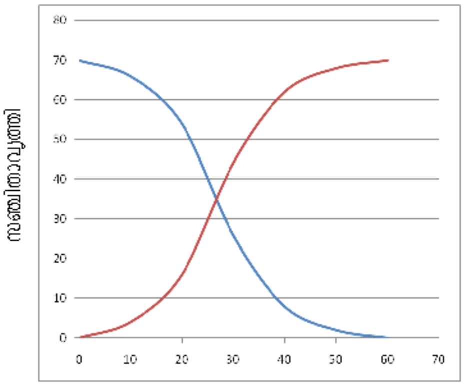
### വിവരണം 4.13

ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രം, അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രം എന്നിവ ഒരേ ഗ്രാഫിൽ വരയ്ക്കുക.

**പരിഹാരം**

| വയസ്സ് | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ആളുകളുടെ എണ്ണം | 4 | 12 | 28 | 18 | 6 | 2 |

| വയസ്സ് | ആവൃത്തി | ഉയർന്ന പരിധി | ആരോഹണ സഞ്ചികാവൃത്തി | താഴ്ന്ന പരിധി | അവരോഹണ സഞ്ചികാവൃത്തി |
|---|---|---|---|---|---|
| 0-10 | 4 | 10 | 4 | 0 | 70 |
| 10-20 | 12 | 20 | 16 | 10 | 66 |
| 20-30 | 28 | 30 | 44 | 20 | 54 |
| 30-40 | 18 | 40 | 62 | 30 | 26 |
| 40-50 | 6 | 50 | 68 | 40 | 8 |
| 50-60 | 2 | 60 | 70 | 50 | 2 |



ക്ലാസ് പരിധി

## നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

ഒരു കമ്പനിയിലെ 60 പേരുടെ ദിവസവേതനമാണ് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത്. സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രങ്ങൾ ഒരേ ഗ്രാഫിൽ വരയ്ക്കുക.

| വേതനം (10 രൂപയിൽ) | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ആളുകളുടെ എണ്ണം | 5 | 10 | 20 | 15 | 7 | 3 |

### പ്രവർത്തനം

നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ ഉയരത്തിന്റെ ഡാറ്റ ശേഖരിച്ച് സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

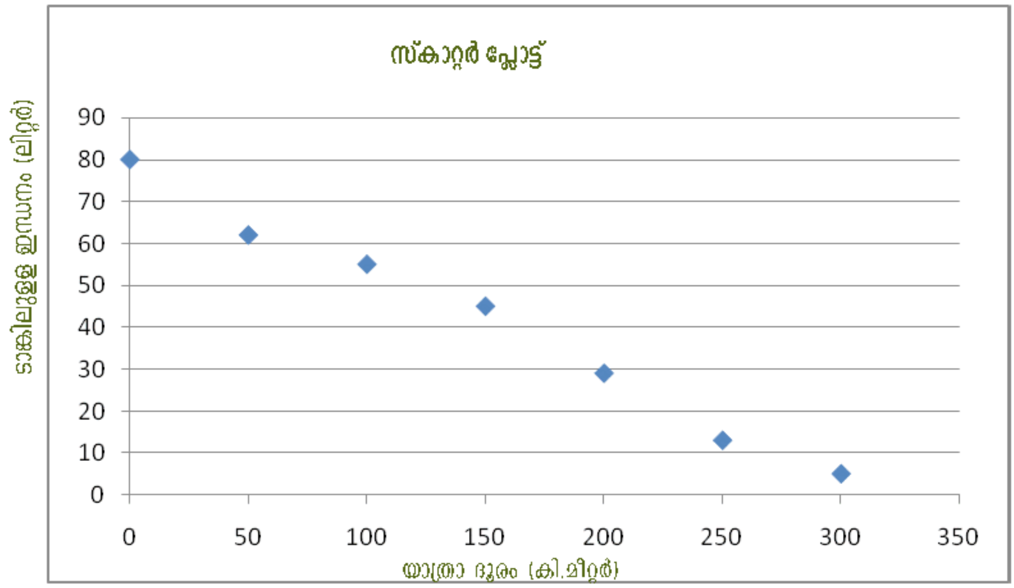
### സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ട് (Scatter Plot)

രണ്ടുചരങ്ങളുള്ള ഡാറ്റയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുവാനാണ് സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ട് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. രണ്ടു ചരങ്ങളുടെ ബന്ധങ്ങളെ അപഗ്രഥിക്കുന്നതിന് ഇത് ഉപയോഗിക്കുന്നു. സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ടിൽ ഒരു ചരം X അക്ഷത്തിലും മറ്റേത് Y അക്ഷത്തിലും രേഖപ്പെടുത്തുന്നു. ഓരോ ജോഡിയും ഓരോ ബിന്ദുവായി രേഖപ്പെടുത്തുന്നു.

### വിവരണം 4.14

ഒരു ഡ്രൈവർ ഒരു ദീർഘദൂരയാത്രയിൽ സഞ്ചരിച്ച ദൂരവും ടാങ്കിലുള്ള ഇന്ധനത്തിന്റെ അളവും രേഖപ്പെടുത്തി വച്ചിട്ടുണ്ട്. സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ട് വരയ്ക്കുക.

| യാത്രാദൂരം(കീ.മീറ്ററിൽ) | 0 | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ടാങ്കിലുള്ള ഇന്ധനം (ലിറ്ററിൽ) | 80 | 73 | 67 | 61 | 52 | 46 | 37 |




## നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

ഒരു ഇൻഷുറൻസ് കമ്പനി നിങ്ങളുടെ പ്രദേശത്തെ തൊഴിലാളികളുടെ അടിസ്ഥാനശമ്പളത്തെയും അവർ അടയ്ക്കുന്ന LIC പ്രീമിയത്തുകയെയും കുറിച്ച് ഒരു പഠനം നടത്തുവാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. തൊഴിലാളികളിൽ നിന്നു 6 പേരുടെ ഒരു സാമ്പിൾ എടുത്തു.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| അടിസ്ഥാന ശമ്പളം (നൂറിൽ) | : | 42 | 45 | 50 | 29 | 60 | 65 |
| LIC അടവ് (പത്തിൽ) | : | 18 | 30 | 40 | 35 | 70 | 60 |

ഇതിനെ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുക.

### പ്രവർത്തനം

നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ ഉയരവും ഭാരവും ശേഖരിച്ച് അവയെ ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ വരയ്ക്കുക.

### ഡയഗ്രം, ഗ്രാഫ് ഇവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസങ്ങൾ

| ഡയഗ്രം | ഗ്രാഫ് |
|---|---|
| കാഴ്ചയ്ക്ക് കൂടുതൽ ആകർഷകമാണ് | ആകർഷണം കുറവാണ് |
| നിർദ്ദേശാങ്ക സംവിധാനത്തിന് അധിഷ്ഠിതമല്ല | നിർദ്ദേശാങ്ക സംവിധാനത്തിന് അധിഷ്ഠിതമാണ് |
| ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ഒരു ഗണിത ബന്ധവും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നില്ല. | ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ഗണിത ബന്ധത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. |
| സാംഖിക അപഗ്രഥനത്തിന് സഹായകമല്ല | സാംഖിക അപഗ്രഥനത്തിന് വളരെയധികം ഉപയോഗിക്കുന്നു. |
| പ്രത്യേക ഉദ്ദേശത്തിന് ഉപയോഗിക്കുന്നു | തുടർ ഗണിത പ്രക്രിയയ്ക്ക് ഉപയോഗിക്കുവാൻ കഴിയും. |

### നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

*ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം വിവിധതരത്തിലുള്ള ഡയഗ്രം, ഗ്രാഫുകൾ എന്നിവയെപ്പറ്റി ചർച്ച ചെയ്തു. വിവിധതരത്തിലുള്ള ഡാറ്റയെ എളുപ്പത്തിൽ താരതമ്യം ചെയ്യുവാൻ അത് നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു. മുഴുവൻ ഡാറ്റയെയും കുറിച്ചുള്ള ഒരു വിഹഗ വീക്ഷണം ഡയഗ്രം, ഗ്രാഫുകൾ എന്നിവ തരുന്നു. ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്ത ഗ്രാഫുകളും ഡയഗ്രമുകളും സാധാരണവും ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ഉപയോഗമുള്ളതുമാണ്.*

## പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പഠിക്കുന്നതിലൂടെ പഠിതാവ്:

1. ഡാറ്റയുടെ ഡയഗ്രരീതിയിലുള്ള പ്രതിനിധീകരണത്തിന്റെ പ്രാധാന്യം തിരിച്ചറിയുന്നു.
2. വിവിധതരത്തിലുള്ള ഡയഗ്രം, ഗ്രാഫുകൾ എന്നിവ വിശദീകരിക്കുന്നു.
3. വിവിധതരത്തിലുള്ള ഡയഗ്രം, ഗ്രാഫ് എന്നിവ നിർമിക്കുന്നു.
4. ഡയഗ്രം, ഗ്രാഫ് എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് ഡാറ്റയെ വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നു.

## മൂല്യനിർണയ ഇനങ്ങൾ

1. താഴെപറയുന്നവയിൽ ഏകമാന ചിത്രം (ഡയഗ്രം) ഏതാണ്?

   a) ബാർഡയഗ്രം b) ആവൃത്തി ബഹുഭുജം
   c) ആവൃത്തിവക്രം d) സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം

2. ഒരു സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രത്തിൽ, ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത്

   a) വിലകൾക്കും ആവൃത്തിക്കും അനുസരിച്ച്
   b) വിലകൾക്കും സഞ്ചിതാവൃത്തിക്കും അനുസരിച്ച്
   c) ആവൃത്തികൾക്കും സഞ്ചിതാവൃത്തികൾക്കും അനുസരിച്ച്
   d) ഇതൊന്നുമില്ല

3. പൈ-ചാർട്ടിൽ ഒരു ഇനത്തിന്റെ ഘടകങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത്.

   a) ശതമാനം b) കോണുകൾ
   c) വൃത്താംശങ്ങൾ c) വൃത്തങ്ങൾ

4. ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഏറ്റവും ഉചിതമായത്

   a) തുടർ ആവൃത്തി വിതരണം b) വ്യക്തിഗതശ്രേണി
   c) വേറിട്ട ആവൃത്തി വിതരണം d) ഇവയെല്ലാം

5. ഹിസ്റ്റോഗ്രാമിന്റെ സഹായത്തോടെ നമുക്കുതയാറാക്കാൻ കഴിയുന്നത്

   a) ആവൃത്തി ബഹുഭുജം b) ആവൃത്തിവക്രം
   c) രണ്ടും d) ഒന്നുമില്ല

6. ഡയഗ്രം, ഗ്രാഫ് ഇവയുടെ പ്രാധാന്യത്തെക്കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യുക
7. ഡയഗ്രം, ഗ്രാഫ് ഇവയുടെ നേട്ടങ്ങളും കോട്ടങ്ങളും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന പട്ടിക തയാറാക്കുക.
8. നാല് വ്യത്യസ്ത തരത്തിലുള്ള ബാർ ചിത്രങ്ങൾ വിവരിക്കുക.
9. സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രങ്ങളുടെ പ്രാധാന്യം എഴുതുക
10. വിവിധരാജ്യങ്ങളിലെ ജനനനിരക്കുകൾ (ആയിരത്തിൽ) പട്ടികാരൂപത്തിൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. അനുയോജ്യമായ ബാർഡയഗ്രം ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

| രാജ്യം | ജനനിരക്ക് |
|---|---|
| ഇന്ത്യ | 32 |
| ജർമനി | 18 |
| യു.കെ | 20 |
| ചൈന | 40 |

11. A,B എന്നീ കമ്പനികളുടെ വർഷിക ലാഭം(ആയിരത്തിൽ) ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത്.

| വർഷം | കമ്പനി A | കമ്പനി B |
|---|---|---|
| 2000 | 120 | 90 |
| 2001 | 135 | 95 |
| 2002 | 140 | 108 |
| 2003 | 160 | 120 |

അനുയോജ്യമായ ഡയഗ്രം ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

സൂചന: ബഹുഇന ബാർ ഡയഗ്രം

12. മരങ്ങളുടെ ഉയരമാണ് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത്. ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഉപയോഗിച്ച് പ്രതിനിധീകരിക്കുക.

| ഉയരം | മരങ്ങളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| 7 അടിയിൽ താഴെ | 26 |
| 14 അടിയിൽ താഴെ | 57 |
| 21 അടിയിൽ താഴെ | 92 |
| 28 അടിയിൽ താഴെ | 134 |
| 35 അടിയിൽ താഴെ | 216 |
| 42 അടിയിൽ താഴെ | 287 |
| 49 അടിയിൽ താഴെ | 341 |
| 56 അടിയിൽ താഴെ | 360 |

13. ഒരു കൂട്ടം വിദ്യാർഥികളുടെ ഉയരത്തിന്റെ വിതരണമാണ് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത്.

| ഉയരം (സെ.മി) | 150 - 153 | 153 - 156 | 156 - 159 | 159 - 162 | 162 - 165 | 165 - 168 | 168 - 171 | 171- 173 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം | 4 | 8 | 15 | 20 | 28 | 16 | 10 | 4 |

a) സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുക

b) 160 സെ.മിയിൽ കുറഞ്ഞ ഉയരമുള്ള വിദ്യാർഥികൾ എത്ര?

c) 166 സെ.മിയിൽ കൂടുതൽ ഉയരമുള്ള വിദ്യാർഥികൾ എത്ര?

**ഉത്തരങ്ങൾ**

1) a 2) b 3) c 4) a 5) c

# 5 കേന്ദ്രപ്രവണത (Central Tendency)

B3N3A4

## ആമുഖം

സാംഖ്യക വിശകലനത്തിനായി ഡാറ്റ എങ്ങനെ ശേഖരിക്കാമെന്നും ചിട്ടപ്പെടുത്താമെന്നും മുൻ അധ്യായങ്ങളിൽ നാം ചർച്ച ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ആവൃത്തി പട്ടികയും ഗ്രാഫ് രൂപത്തിലുള്ള അവതരണവും കൊണ്ട് ഡാറ്റയെ നമുക്ക് അർഥ പൂർണ്ണമാക്കാം. ഇതിനെ തുടർന്നുള്ള കാര്യങ്ങളാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.

പരീക്ഷാക്കാലം കഴിഞ്ഞ് ഒരു ദിവസം നിങ്ങൾ ക്ലാസിൽ വരുന്നുവെന്ന് കരുതുക. പലരും നിങ്ങളോട് ചോദിക്കാവുന്ന ഒരു ചോദ്യം, നിങ്ങൾക്ക് ഈ പരീക്ഷയിൽ എത്ര സ്കോർ ലഭിക്കുമെന്നായിരിക്കും. നിങ്ങളുടെ മറുപടി എന്തായിരിക്കും? ഏകദേശം 70 ശതമാനം, 70 ശതമാനത്തിനടുത്ത്, 70 ശതമാനത്തോളം എന്നിങ്ങനെയായിരിക്കില്ലേ നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം? എന്തുകൊണ്ടാണ് 70 ശതമാനത്തിനോട്, 'ഏകദേശം', 'അടുത്ത്' തുടങ്ങിയ വാക്കുകൾ നിങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതെന്നറിയാമോ? ഇവിടെ വിവിധ പരീക്ഷകളിൽ നിങ്ങൾക്ക് ലഭിക്കാവുന്ന സ്കോറുകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ ഒരു സംഖ്യ ഉപയോഗിച്ചെന്നേയുള്ളൂ. അതായത്, പലപ്പോഴും ഡാറ്റയെ പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ ഒരു സംഖ്യയെ നാം ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. ഇതുമൂലം ഒരേതരത്തിലുള്ള ഡാറ്റകളെ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നത് എളുപ്പമാക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ ഡാറ്റയെ സൂചിപ്പിക്കാൻ നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ ശരാശരികൾ അഥവാ കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു.

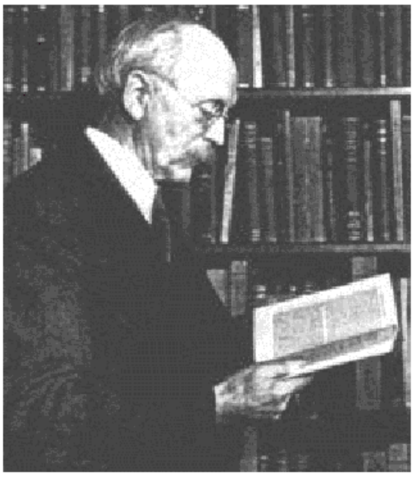
## കേന്ദ്രപ്രവണത (Central Tendency)

മൂന്നാമത്തെ അധ്യായത്തിൽ നാം ഒരു ക്ലാസിലെ 60 കുട്ടികളുടെ കുടുംബാംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം ശേഖരിച്ചിട്ടുണ്ടായിരുന്നു. പ്രസ്തുത ഡാറ്റശേഖരം പരിഗണിക്കുക. (പട്ടിക 3.8) അതിൽ കൂടുതൽ വിലകളും വിതരണത്തിന്റെ മധ്യഭാഗത്ത് കേന്ദ്രീകരിക്കുന്നത് നമുക്ക് കാണുവാൻ സാധിക്കും. പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

| കുടുംബാംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം | ടാലി അടയാളം | ആവൃത്തി |
|---|---|---|
| 2 | \|\| | 2 |
| 3 | 𝍸 \| | 6 |
| 4 | 𝍸 \|\|\|\| | 9 |
| 5 | 𝍸 𝍸 \|\|\|\| | 14 |
| 6 | 𝍸 𝍸 \|\|\| | 13 |
| 7 | 𝍸 \|\| | 7 |
| 8 | \|\|\|\| | 4 |
| 9 | \|\| | 2 |
| 10 | \|\| | 2 |
| 11 | \| | 1 |
| ആകെ | | 60 |

ഇതേ പ്രത്യേകത തന്നെ 60 കുട്ടികളുടെ ഭാരത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ഡാറ്റയുടെ വിതരണത്തിൽ (3-ാം അധ്യായത്തിലേത്) (പട്ടിക 3.9) നമുക്ക് കാണുവാൻ സാധിക്കും. ഇങ്ങനെ പല ആവൃത്തി വിതരണങ്ങളും പരിശോധിക്കുമ്പോൾ, മിക്ക വിതരണങ്ങളിലും ഡാറ്റയിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ ഒരു മധ്യവിലയ്ക്ക് ചുറ്റും കൂടിച്ചേരുന്നുവെന്ന് നമുക്ക് മനസിലാക്കാൻ കഴിയുന്നു. ഒരു മധ്യവിലയ്ക്ക് ചുറ്റും കൂടിച്ചേരുന്നതിന് പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ കാണിക്കുന്ന ഈ പ്രവണത കേന്ദ്രപ്രവണത എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

### കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനങ്ങൾ (ശരാശരികൾ) (Measures of Central Tendency)



ഒരു വിതരണത്തിലെ ഏത് വിലയ്ക്ക് ചുറ്റുമാണ് പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ കേന്ദ്രീകരിക്കുന്നതിനുള്ള പ്രവണത കാണിക്കുന്നത് ആ വിലയെ കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനം അഥവാ ശരാശരി എന്നു പറയുന്നു. അതായത് ഡാറ്റയിലെ കൂടുതൽ വിലകളും ഏത് വിലയ്ക്ക് ചുറ്റുമാണ് കൂടിച്ചേരുന്നത് എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരൊറ്റ വിലയാണ് ശരാശരി. പ്രൊഫസർ ആർതർ ലിയോൺ ബൗളിയുടെ അഭിപ്രായപ്രകാരം ശരാശരികൾ എന്നത് മുഴുവൻ ഡാറ്റയുടെയും പ്രാധാന്യം അനായാസം മനസിലാക്കുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന സാംഖ്യക സറിരാങ്കങ്ങളാണ്.

സർ ആർതർ ലിയോൺ ബൗളി 1869 നവംബർ 6ന് ബ്രിട്ടനിൽ ജനിച്ച പ്രസിദ്ധനായ ഒരു സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റീഷ്യൻ ആണ്. ഇദ്ദേഹം സാമൂഹിക സർവേകളിൽ പ്രതിരൂപണതന്ത്രങ്ങൾ (Sampling techniques)ഉപയോഗിക്കുന്നതിൽ വിദഗ്ധനായിരുന്നു. അദ്ദേഹത്തിന്റെ എലമെന്റ്സ് ഓഫ് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് (Elements of Statistics)എന്നത് ഇംഗ്ലീഷ് ഭാഷയിലുള്ള സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ ആദ്യപാഠപുസ്തകമായി കണക്കാക്കുന്നു. ഈ പുസ്തകത്തിൽ അദ്ദേഹം സാമ്പത്തിക, സാമൂഹിക ശാസ്ത്രങ്ങളിൽ വിവരണാത്മ സാംഖ്യകത്തിന്റെ ഉപയോഗത്തെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിക്കുന്നു.

### ശരാശരികൾക്ക് അഭികാമ്യമായ പ്രത്യേകതകൾ

ഒരു നല്ല ശരാശരിക്ക് താഴെപറയുന്ന പ്രത്യേകതകൾ ഉണ്ടായിരിക്കേണ്ടതാണ്.

(i) ലളിതവും കൃത്യതയുമുള്ള നിർവചനം

(ii) മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് ലളിതവും കണക്കുകൂട്ടലിന് എളുപ്പവും

(iii) എല്ലാ വിലകളെയും അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ളതാകണം.

(iv) ഏറ്റവും കുറഞ്ഞതും ഏറ്റവും കൂടിയതുമായ വിലകളുടെ സ്വാധീനം തീരെ കുറവാകണം.

(v) പ്രതിരൂപണങ്ങളിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ സ്വാധീനം തീരെ കുറവാകണം.

(vi) തുടർഗണിത പ്രക്രിയകൾക്ക് ഉതകുന്നതാകണം.

### വിവിധതരം കേന്ദ്ര പ്രവണതാമാനങ്ങൾ

ഒരു കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനം മുഴുവൻ ഡാറ്റയെയും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഒരു വിലയോ വിലയുടെ സ്ഥാനത്തേയോ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. വിവിധ തരം കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനങ്ങൾ താഴെ പറയുന്നു.

1. മാധ്യം (Mean)
2. മധ്യാങ്കം (Median)
3. മോഡ് (Mode)
4. ജ്യാമിതീയ മാധ്യം (Geometric Mean)
5. സന്തുലിത മാധ്യം (Harmonic Mean)

## 5.1 മാധ്യം (Arithmetic Mean)

സർവ്വ സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ഒരു ശരാശരിയാണ് മാധ്യം. എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾക്കും ഇവിടെ തുല്യപ്രാധാന്യമാണുള്ളത്. സാധാരണയായി ശരാശരി എന്നു പറയുന്ന മിക്ക അവസരത്തിലും നാം മാധ്യത്തെയാണ് പരിഗണിക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി, ഒരു CFL ബൾബിന്റെ ശരാശരി ആയുസ്സ്, ഒരു പട്ടണത്തിലെ ശരാശരി താപനില ഇവിടെയെല്ലാം ശരാശരിയായി കണക്കാക്കുന്നത് മാധ്യത്തെയാണ്.

ഒരു ദിവസം 5 ചില്ലറ വിൽപ്പനശാലകളിൽ നടന്ന കച്ചവടത്തിലെ വരവുകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ചില്ലറ വ്യാപാരി | : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| വിൽപ്പന (1000 രൂപയിൽ) | : | 8 | 23 | 4 | 8 | 2 |

ഈ ചെറുകിട വ്യാപാരിയുടെ ശരാശരി വിൽപ്പന കാണുന്നതിന്, നാം ചെയ്യുന്നത് വിൽപ്പനയുടെ എല്ലാ വിലകളും കൂട്ടിയതിന് ശേഷം എണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയാണ്. ഇത്തരം ശരാശരിയെയാണ് മാധ്യം എന്ന് പറയുന്നത്.

$$\text{മാധ്യം } (AM) = \frac{8+23+4+8+2}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

അതായത്, ശരാശരി പ്രതിദിന വില്പന 9000/- രൂപയാണ്.

ഒരു കൂട്ടം പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ മാധ്യം നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്.

$$\text{മാധ്യം} = \frac{\text{പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ തുക}}{\text{പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$

സാധാരണയായി മാധ്യത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ $\bar{x}$ ($x$ ബാർ) എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$$\bar{x} = \frac{\text{പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ തുക}}{\text{പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$

### മാധ്യം കണക്കാക്കുന്നവിധം

**(i) അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ (raw data) മാധ്യം**

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ എന്നീ n വിലകൾ അടങ്ങിയ ഒരു അസംസ്കൃതഡാറ്റ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ മാധ്യം കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

$$\bar{x} = \frac{\text{പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ തുക}}{\text{പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

$$= \frac{\sum x}{n}$$

$$\text{മാധ്യം} = \frac{\sum x}{n}$$

'Σ' എന്നത് തുക കാണുന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചിഹ്നമാണ്.

കുറിപ്പ് : ഒരു സംഖ്യാശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക എന്നത് $\sum x = n\bar{x}$ ആണ്.

### വിവരണം 5.1

ഒരു കുട നിർമാണകമ്പനി പുതിയ ഒരു ഉൽപ്പന്നം പുറത്തിറക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. അതിനുവേണ്ടി കഴിഞ്ഞ 5 വർഷങ്ങളിൽ പെയ്ത മഴയുടെ അളവ് (സെ.മീറ്ററിൽ) ശേഖരിക്കുന്നു. അവ 120,135,110,142,150 എന്നിവയായാൽ മഴയുടെ ശരാശരി അളവ് കാണുക.

**പരിഹാരം**

മഴയുടെ ശരാശരി അളവ്

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$= \frac{120+135+110+142+150}{5} = 131.4 \text{ സെ.മീ.}$$

### വിവരണം 5.2

4 ക്ലാസ് പരീക്ഷകളിൽ ഒരു കുട്ടിക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകൾ യഥാക്രമം 52, 48, 33, 27 എന്നിവയാണ്.

a) സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം കാണുക

b) അഞ്ചാമത്തെ പരീക്ഷയിൽ അയാൾ നേടിയ സ്കോർ 45 ആയാൽ, സ്കോറുകളുടെ പുതിയ മാധ്യം എന്തായിരിക്കും.

**പരിഹാരം**

a) ആദ്യ 4 പരീക്ഷയുടെ ശരാശരി സ്കോർ

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{52+48+33+27}{4} = 40$$

b) 5-ാമത്തെ പരീക്ഷയ്ക്ക് ശേഷമുള്ള പുതിയ മാധ്യം

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$= \frac{52+48+33+27+45}{5} = 41$$

### വിവരണം 5.3

100 പ്രാപ്തങ്കാങ്ങളുടെ മാധ്യം 50 ആണ്. എന്നാൽ 192,88 എന്നീ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ 92, 8 എന്നിങ്ങനെ തെറ്റായി ധരിച്ചാണ് മാധ്യം കണ്ടിരുന്നത്. ശരിയായ മാധ്യം കാണുക.

**പരിഹാരം**

$\bar{x} = 50, \quad n = 100$

പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ തുക, $\sum x = n\bar{x} = 100 \times 50 = 5000$

എന്നാൽ ഇവിടെ 192, 88 എന്നിവയെ 92, 8 എന്നിങ്ങനെയാണ് ധരിച്ചിരുന്നത്. അതിനാൽ ഈ തുക തെറ്റാണ്.

ശരിയായ തുക = 5000-92-8 + 192+88 = 5180

$$\text{ശരിയായ മാധ്യം} = \frac{\text{ശരിയായ തുക}}{\text{എണ്ണം}}$$

$$= \frac{5180}{100} = 51.8$$

### ii) വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ (Discrete Frequency table) മാധ്യം

ഒരു വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളും അവയുടെ ആവൃത്തിയും കാണും. ഇത്തരം സാഹചര്യത്തിൽ ഓരോ പ്രാപ്താങ്കത്തിനെയും അതിന്റെ ആവൃത്തികൊണ്ട് ഗുണിച്ചശേഷം ഗുണനഫലങ്ങളുടെ തുക കാണുക. ഇതാണ് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ ആകെ തുക. ഈ തുകയെ ആവൃത്തികളുടെ തുക കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ മാധ്യം ലഭിക്കുന്നു.

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}, \; N = \Sigma f \text{ എന്നത് ആകെ ആവൃത്തിയാണ്}$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ എന്നീ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ ആവൃത്തികൾ യഥാക്രമം $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവയുടെ മാധ്യം കാണുന്നതിന് താഴെപറയുന്ന ക്രമം ഉപയോഗിക്കാം.

1 : $f_1x_1, f_2x_2, \ldots, f_nx_n$ എന്നിവ കാണുക.

2 : $\Sigma fx - f_1x_1 - f_2x_2 - f_3x_3 - \ldots + f_nx_n$ കാണുക.

3 : $\Sigma f - f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n$ കാണുക.

4 : മാധ്യം കാണുന്നതിന് $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$ എന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുക.

**വിവരണം 5.4**

കായിക മത്സരത്തിൽ പങ്കെടുക്കുന്നവരുടെ ഉയരത്തെക്കുറിച്ച് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ക്ലാസിലെ കുട്ടികൾ പഠനം നടത്തുകയാണ്. അവർ 20 മത്സരാർഥികളുടെ ഉയരം കണ്ടെത്തി. അത് ചുവടെ പട്ടികയിൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

| ഉയരം (ഇഞ്ചിൽ) | 49 | 53 | 54 | 55 | 66 | 68 | 70 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| മത്സരാർഥികളുടെ എണ്ണം | 1 | 2 | 4 | 5 | 3 | 2 | 2 | 1 |

മത്സരാർഥികളുടെ ഉയരത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

**പരിഹാരം**

| ഉയരം $(x)$ | മത്സരാർഥികളുടെ എണ്ണം $(f)$ | $fx$ |
|---|---|---|
| 49 | 1 | 49 |
| 53 | 2 | 106 |
| 54 | 4 | 216 |
| 55 | 5 | 275 |
| 66 | 3 | 198 |
| 68 | 2 | 136 |
| 70 | 2 | 140 |
| 80 | 1 | 80 |
| ആകെ | N = 20 | 1200 |

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{1200}{20} = 60$$

ഉയരത്തിന്റെ മാധ്യം = 60 ഇഞ്ച്

**വിവരണം 5.5**

കഴിഞ്ഞ 10 വർഷക്കാലം ഡൽഹി നിവാസികൾക്ക് സംഭവിച്ച കാറപകടങ്ങളെക്കുറിച്ച് സർവ്വെ നടത്തുന്നതിന് ഒരു ഇൻഷുറൻസ് കമ്പനി തീരുമാനിക്കുന്നു. ഒരു റെയിൽവേ സ്റ്റേഷനിൽ വന്നിറങ്ങിയ 200 പേരെ കമ്പനി സർവ്വെ നടത്തി. ഫലം ചുവടെ പട്ടികയിൽ കൊടുക്കുന്നു.

| അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം | ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| 0 | 60 |
| 1 | 10 |
| 2 | 40 |
| 3 | 10 |
| 4 | 80 |

അപകടങ്ങളുടെ മാധ്യം കാണുക.

പരിഹാരം

| x | f | fx |
|---|---|---|
| 0 | 70 | 0 |
| 1 | 10 | 10 |
| 2 | 40 | 80 |
| 3 | 10 | 30 |
| 4 | 70 | 280 |
| ആകെ | N = 200 | 400 |

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$= \frac{400}{200} = 2$$

അപകടങ്ങളുടെ മാധ്യം = 2

**iii) തുടരാവൃത്തി പട്ടികയുടെ (Continuous Frequency Table) മാധ്യം**

ഒരു തുടരാവൃത്തി പട്ടികയിൽ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെ ക്ലാസുകളായി തിരിച്ചിരിക്കുന്നു. വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ മാധ്യം കാണുന്നതിന് സമാനമായ രീതിയിലാണ് ഇവിടെയും മാധ്യം കാണുന്നത്. എന്നാൽ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെ ക്ലാസുകളായി തിരിച്ചിരിക്കുന്നതിനാൽ ഓരോ പ്രാപ്താങ്കത്തിന്റെയും വില നമുക്ക് അറിയാൻ സാധിക്കില്ല. അതിനാൽ ഈ വിലകളെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് ചില ഊഹങ്ങൾ നടത്തേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ ഒരു ക്ലാസിൽ വരുന്ന എല്ലാ വിലകൾക്കും തുല്യ വിലയാണെന്നും അത് ക്ലാസിന്റെ മധ്യവിലയ്ക്ക് തുല്യമായിരിക്കുമെന്നും നമ്മൾ അനുമാനിക്കുന്നു. അതായത് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ വിലയായി ക്ലാസുകളുടെ മധ്യവിലയെ കണക്കാക്കുന്നു. മാധ്യം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം.

$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$, N = ആകെ ആവൃത്തി

ഇവിടെ നാം കാണുന്നത് മാധ്യത്തിന്റെ ഏകദേശ വിലയാണ് (കാരണമെന്തായിരിക്കും?)

**വിവരണം 5.6**

ഒരു പ്രത്യേക മരുന്നിന്റെ ഫലത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുന്നതിനായി തെരഞ്ഞെടുത്ത 55 രോഗികളുടെ വയസ്സിന്റെ വിതരണമാണ് ചുവടെ പട്ടികയിലുള്ളത്.

| വയസ്സ് | രോഗികളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| 0 -10 | 5 |
| 10 - 20 | 7 |
| 20 - 30 | 17 |
| 30 - 40 | 12 |
| 40 - 50 | 5 |
| 50 - 60 | 2 |
| 60 - 70 | 7 |

രോഗിയുടെ വയസ്സിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

**പരിഹാരം**

| വയസ്സ് | മധ്യവില (x) | രോഗികളുടെ എണ്ണം (f) | fx |
|---|---|---|---|
| 0 -10 | 5 | 5 | 25 |
| 10 - 20 | 15 | 7 | 105 |
| 20 - 30 | 25 | 17 | 425 |
| 30 - 40 | 35 | 12 | 420 |
| 40 - 50 | 45 | 5 | 225 |
| 50 - 60 | 55 | 2 | 110 |
| 60 - 70 | 65 | 7 | 455 |
| ആകെ | | N =55 | 1765 |

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{1765}{55} = 32.09$$

വയസ്സുകളുടെ മാധ്യം = 32.09

**വിവരണം 5.7**

ഒരു ചെറുകിട പാർസൽ കമ്പനി വിതരണം ചെയ്ത പാഴ്സലുകളുടെ ഭാരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരു ആവൃത്തിപ്പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. പാഴ്സലുകളുടെ ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

| ഭാരം | പാഴ്സലുകളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| 10.0-10.9 | 2 |
| 11.0-11.9 | 3 |
| 12.0-12.9 | 5 |
| 13.0-13.9 | 8 |
| 14.0-14.9 | 12 |
| 15.0-15.9 | 15 |
| 16.0-16.9 | 13 |
| 17.0-17.9 | 11 |
| 18.0-18.9 | 6 |
| 19.0-19.9 | 2 |

**പരിഹാരം**

| ഭാരം(കി.ഗ്രാം) | മധ്യവില (x) | പാഴ്സലുകളുടെ എണ്ണം (f) | fx |
|---|---|---|---|
| 10.0 - 10.9 | 10.45 | 2 | 20.90 |
| 11.0 - 11.9 | 11.45 | 3 | 34.35 |
| 12.0 - 12.9 | 12.45 | 5 | 62.25 |
| 13.0 - 13.9 | 13.45 | 8 | 107.60 |
| 14.0 - 14.9 | 14.45 | 12 | 173.40 |
| 15.0 - 15.9 | 15.45 | 15 | 231.75 |
| 16.0 - 16.9 | 16.45 | 13 | 213.85 |
| 17.0 - 17.9 | 17.45 | 11 | 191.95 |
| 18.0 - 18.9 | 18.45 | 6 | 110.70 |
| 19.0 - 19.9 | 19.45 | 2 | 38.90 |
| ആകെ | | N = 67 | 1185.65 |

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{1185.65}{67} = 15.4$$

ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം = 15.4 kg

### മാധ്യത്തിന്റെ ഗണിത പ്രത്യേകതകൾ (Mathematical properties of mean)

ഒരു വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യത്തിന് താഴെ പറയുന്ന ഗണിത പ്രത്യേകതകൾ ഉണ്ട്.

1. മാധ്യത്തിൽ നിന്നും എല്ലാ വിലകൾക്കുമുള്ള അന്തരങ്ങളുടെ തുക എല്ലായ്പ്പോഴും പൂജ്യം ആയിരിക്കും.

   അതായത്, $\sum(x-\bar{x})=0$

2. ഒരു ഡാറ്റയിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ അന്തരങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക ഏറ്റവും കുറവാകുന്നത് മാധ്യത്തിൽ നിന്നും അന്തരങ്ങളെടുക്കുമ്പോഴാണ്.

   അതായത്, $\Sigma(x-a)^2$ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില സ്വീകരിക്കുന്നത് $a=\bar{x}$ ആകുമ്പോഴാണ്.

3. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്നിവയുടെ മാധ്യം $\bar{x}$ ആണെങ്കിൽ $(x_1 \pm a), (x_2 \pm a), \ldots, (x_n \pm a)$ എന്നിവയുടെ മാധ്യം $(\bar{x} \pm a)$ ആയിരിക്കും.

   അതായത്, എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളോടും കൂടി 'a' എന്ന വില കൂട്ടിയാൽ മാധ്യത്തിത്തിന്റെ വില 'a' കൂടും. എല്ലാത്തിൽ നിന്നും 'a' കുറച്ചാൽ മാധ്യത്തിന്റെ വില 'a' കുറയും

4. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്നിവയുടെ മാധ്യം $\bar{x}$ ആണ്. എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെയും $p, (p \neq 0)$ എന്ന സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ മാധ്യം $p\bar{x}$ ആയിരിക്കും.

**പ്രവർത്തനം**

10, 25, 17, 22, 20, 35, 28, 42, 68, 53 എന്നീ വിലകൾ പരിഗണിക്കുക.

a) ഈ ഡാറ്റയിൽ $\sum(x-\bar{x})=0$ ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക

b) മുകളിൽ രണ്ടാമതായി പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന പ്രത്യേകതയുടെ ആധികാരികത 'a' യ്ക്ക് ഏതെങ്കിലും ഒരു വില നൽകി പരിശോധിക്കുക.

c) താഴെ പറയുന്ന അവസരങ്ങളിൽ മാധ്യത്തിന് എന്ത് സംഭവിക്കും.

   i) എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളോടും 3 കൂട്ടുന്നു.

   ii) എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളിൽ നിന്നും 3 കുറയ്ക്കുന്നു.

d) താഴെ പറയുന്ന അവസരത്തിൽ മാധ്യത്തിന് സംഭവിക്കുന്നതെന്ത്?

   i) എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളേയും 2 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നു.

   ii) എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെയും 2 കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നു.

### മാധ്യത്തിന്റെ മേന്മകളും പോരായ്മകളും (Merits and demerits of mean)

ഒരു നല്ല കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനത്തിന് വേണ്ട മിക്ക പ്രത്യേകതകളും ഉള്ള ഒരളവാണ് മാധ്യം. മാധ്യത്തിന്റെ ചില മേന്മകളും പോരായ്മകളും താഴെ പറയുന്നു.

**മേന്മകൾ (Merits)**

1. കൃത്യമായ നിർവചനം ഉണ്ട്.
2. കണക്കാക്കുന്നതിനും മനസിലാക്കുന്നതിനും എളുപ്പമാണ്.
3. എല്ലാ വിലകളേയും അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ് മാധ്യം കാണുന്നത്.
4. പ്രതിരൂപണത്തിലെ മാറ്റം കൂടുതലായി ബാധിക്കുന്നില്ല.
5. തുടർഗണിത പ്രവർത്തനങ്ങൾക്ക് അനുയോജ്യമാണ്.

**പോരായ്മകൾ (Demerits)**

1. അഗ്ര വിലകളുടെ സ്വാധീനം കൂടുതലാണ്.
2. കണക്കുകൂട്ടാതെ കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയില്ല.
3. ബുദ്ധിശക്തി, സത്യസന്ധത, സൗന്ദര്യം തുടങ്ങിയ ഗുണാത്മക പ്രത്യേകതകൾക്ക് ഉപയോഗിക്കാൻ കഴിയില്ല.
4. ഉയർന്ന പരിധിയോ താഴ്ന്ന പരിധിയോ ഇല്ലാത്ത ക്ലാസുകൾ ഉണ്ടായിരുന്നാൽ മാധ്യം കണക്കുകൂട്ടാൻ കഴിയില്ല.

### പരിഗണനാ മാധ്യം (Weighted Arithmatic Mean)

സാധാരണയായി മാധ്യം കാണുമ്പോൾ ഡാറ്റയിലെ എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾക്കും തുല്യ പരിഗണനയാണ് നൽകാറുള്ളത്. എന്നാൽ എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾക്കും തുല്യ പ്രാധാന്യം ഇല്ലാത്ത അവസരങ്ങളുമുണ്ട്. ചില പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾക്ക് മറ്റു ചിലതിനെ അപേക്ഷിച്ച് പ്രാധാന്യം കൂടുതൽ നൽകേണ്ട അവസരങ്ങൾ ഉണ്ടാകാറുണ്ട്. ഇത്തരം അവസരങ്ങളിലാണ് പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾക്ക് വ്യത്യസ്ത പരിഗണനകൾ നൽകേണ്ടി വരുന്നത്. ഉദാഹരണത്തിന്, ജനങ്ങളുടെ ജീവിതനിലവാരത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റങ്ങൾ പഠിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. നാം ഇതുവരെ ഉപയോഗിച്ചതരം മാധ്യം കാണുന്നത് ഇവിടെ അപ്രായോഗികമാണ്. എന്തെന്നാൽ ആളുകൾ പല സാധനങ്ങൾക്കും തുല്യ പ്രാധാന്യമല്ല നൽകുന്നത്. അരി, ഗോതമ്പ് തുടങ്ങിയവ, പഞ്ചസാര, തേയില, ഉപ്പ് തുടങ്ങിയവയേക്കാൾ കൂടുതൽ അളവിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്. അതിനാൽ തന്നെ ഈ എല്ലാ സാധനങ്ങൾക്കും ഒരേ പരിഗണന നൽകാൻ സാധിക്കില്ല.

ഓരോ പ്രാപ്താങ്കത്തിനും അതിന്റെ പ്രാധാന്യമനുസരിച്ചുള്ള പരിഗണന നൽകിക്കൊണ്ട് കണക്കാക്കുന്ന മാധ്യമാണ് പരിഗണനാ മാധ്യം (Weighted Arithmatic Mean). വില സൂചികകളുടെ നിർണയത്തിൽ പരിഗണനാമാധ്യങ്ങൾ വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്.

### പരിഗണനാ മാധ്യം കണക്കാക്കുന്ന വിധം

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്നീ വിലകളുടെ പരിഗണനാസംഖ്യ $w_1, w_2, \ldots, w_n$ എന്നിവയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. അങ്ങനെയെങ്കിൽ പരിഗണനാമാധ്യം എന്നത്

$$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

### വിവരണം 5.8

ഒരു കുട്ടിക്ക് ഒരു പരീക്ഷയിൽ ഗണിതം, ഭൗതികം, രസതന്ത്രം, ഇംഗ്ലീഷ് എന്നിവയ്ക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകൾ യഥാക്രമം 82, 86, 90, 70 എന്നിവയാണ്. ഇവയ്ക്ക് ലഭിച്ച ക്രഡിറ്റുകൾ യഥാക്രമം 3, 5, 3, 1 എന്നിവ ആയാൽ മാധ്യം കാണുക.

#### പരിഹാരം

ഇവിടെ 82, 86, 90, 70 എന്നിവയുടെ പരിഗണനാ സംഖ്യ യഥാക്രമം 3, 5, 3, 1 എന്നിവയാണ്.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x : | 82 | 86 | 90 | 70 |
| w : | 3 | 5 | 3 | 1 |

$$\bar{x} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

$$= \frac{82\times3+86\times5+90\times3+70\times1}{3+5+3+1}$$

$$= \frac{1016}{12}$$

$$= 84.67$$

### സംയുക്ത മാധ്യം (Combined Arithmetic Mean)

4 ആൺകുട്ടികൾക്കും 6 പെൺകുട്ടികൾക്കുമായി നടത്തിയ ഒരു ക്ലാസ് പരീക്ഷയിൽ ആൺകുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 35 ഉം പെൺകുട്ടികളുടേത് 75 ഉം ആണ്. എല്ലാ കുട്ടികളെയും ഒരുമിച്ച് പരിഗണിച്ചാലുള്ള സ്കോറിന്റെ മാധ്യം എന്താകും?

അത് $\frac{35+75}{2} = 55$ ആണോ?

തീർച്ചയായും അല്ല, ഇവിടെ ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണവും പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണവും തുല്യമല്ല. പെൺകുട്ടികളുടെ സ്കോറിന്റെ മാധ്യത്തിന് ആൺകുട്ടികളുടെ സ്കോറിന്റെ മാധ്യത്തിനേക്കാൾ പ്രാധാന്യമുണ്ട് (എന്തുകൊണ്ടായിരിക്കാം?)

ഇനി നമുക്ക് എല്ലാ കുട്ടികളുടേയും കൂടി സ്കോറിന്റെ മാധ്യം കാണാൻ ശ്രമിക്കാം.

$$\text{മാധ്യം} = \frac{\text{കുട്ടികളുടെ ആകെ സ്കോർ}}{\text{കുട്ടികളുടെ എണ്ണം}}$$

$$= \frac{\text{ആൺകുട്ടികളുടെ ആകെ സ്കോർ+പെൺകുട്ടികളുടെ ആകെ സ്കോർ}}{\text{ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം + പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം}}$$

$$= \frac{4\times35+6\times75}{4+6} = \frac{140+450}{10} = 59$$

അതായത് ആൺകുട്ടികളും പെൺകുട്ടികളും ചേർന്ന കൂട്ടത്തിന്റെ സ്കോറിന്റെ മാധ്യം 59 ആണ്.

പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം $n_1$, $n_2$ ആയിട്ടുള്ള രണ്ട് ഗ്രൂപ്പുകളുടെ മാധ്യങ്ങൾ $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ എന്നിവ ആയാൽ ഇവരുടെ സംയുക്തഗ്രൂപ്പിന്റെ മാധ്യം,

$$\overline{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n_1 + n_2}$$ ആയിരിക്കും.

### വിവരണം 5.9

100 കുട്ടികൾക്ക് ഒരു പരീക്ഷയിൽ ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 50 ആണ്. അതേ പരീക്ഷയ്ക്ക് വേറെ 200 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 57 ആണ്. എങ്കിൽ ആകെ കുട്ടികളുടെ സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം എന്തായിരിക്കും?

**പരിഹാരം**

നമുക്ക് അറിയാവുന്നത്,

$\overline{x}_1 = 50, \overline{x}_2 = 57, n_1 = 100, n_2 = 200$

രണ്ട് കൂട്ടരുടേയും കൂടിയുള്ള സംയുക്ത മാധ്യം,

$$\overline{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{100 \times 50 + 200 \times 57}{100 + 200}$$

$$= 54.67$$

### വിവരണം 5.10

ഒരു ക്ലാസിലെ 150 കുട്ടികളുടെ ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം 60 കി.ഗ്രാം ആണ്. ആ ക്ലാസിലെ ആൺകുട്ടികളുടെ ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം 70 കി.ഗ്രാമും പെൺകുട്ടികളുടെ ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം 55 കി. ഗ്രാമും ആണ്. എന്നാൽ ആ ക്ലാസിലെ ആൺകുട്ടികളുടേയും പെൺകുട്ടികളുടേയും എണ്ണം കാണുക.

**പരിഹാരം**

തന്നിരിക്കുന്നവ,

സംയുക്തമാധ്യം, $\overline{x}$ = 60 കി.ഗ്രാം

ആൺകുട്ടികളുടെ മാധ്യം, $\overline{x_1}$ = 60 കി.ഗ്രാം

പെൺകുട്ടികളുടെ മാധ്യം, $\overline{x}_2$ = 55 കി.ഗ്രാം

ആകെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം = 150

ക്ലാസിലെ ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം 'x' എന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം 150-x ആയിരിക്കും

$$\overline{x} = \frac{n_1 \overline{x}_1 + n_2 \overline{x}_2}{n_1 + n_2}$$

അതായത്, $60 = \dfrac{70x + 55(150 - x)}{150}$

$$\Rightarrow 9000 = 70x + 8250 - 55x$$

$$\Rightarrow 15x = 9000 - 8250 = 750$$

$$\Rightarrow x = \frac{750}{15} = 50$$

∴ ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം = 50

പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം = 150-50=100

പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം യഥാക്രമം $n_1$, $n_2$, .... $n_k$ ആയ k ഗ്രൂപ്പുകളുടെ മാധ്യങ്ങൾ $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ എന്നിവയായാൽ ഇവയുടെ സംയുക്തമാധ്യം

$$\overline{x} = \frac{n_1 \overline{x}_1 + n_2 \overline{x}_2 + \ldots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$ ആയിരിക്കും

## നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. തെരഞ്ഞെടുത്ത 10 നോവലുകളിലെ പേജുകളുടെ എണ്ണം 415, 398, 497, 399, 402, 405, 395, 412, 407, 400 എന്നിവയാണ്. പേജുകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.
2. 20 സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം 25 ആണ്. 52,15 എന്നീ വിലകളെ 42, 51 എന്നിങ്ങനെ തെറ്റായാണ് ധരിച്ചിരുന്നത്. ശരിയായ മാധ്യം കാണുക.
3. ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ 70 ജോലിക്കാരുടെ ഭാരങ്ങൾ ചുവടെ പട്ടികയിൽ കൊടുക്കുന്നു. ഭാരങ്ങളുടെ മാധ്യം കാണുക.

| ഭാരം (കി.ഗ്രാം) | ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| 60 | 5 |
| 62 | 10 |
| 63 | 12 |
| 65 | 18 |
| 67 | 15 |
| 68 | 10 |

4. 30 വാഹനങ്ങളിൽ നടത്തിയ ഇന്ധനക്ഷമതാ പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഫലം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മാധ്യം കാണുക.

| ഇന്ധനക്ഷമത (കി.മീ/ലിറ്റർ) | വാഹനങ്ങളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| 7.5-12.5 | 3 |
| 12.5-17.5 | 5 |
| 17.5-22.5 | 15 |
| 22.5-27.5 | 5 |
| 27.5-32.5 | 2 |

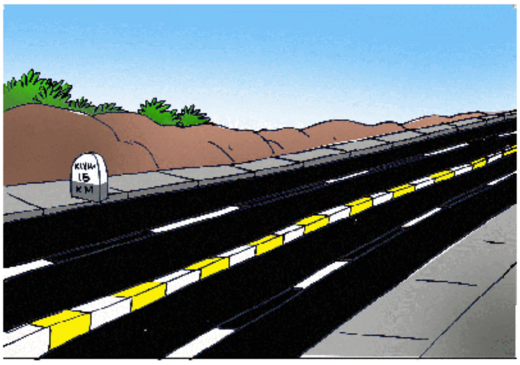
5. വളരെ പഴക്കം ചെന്ന 50 കാറുകളിൽ നടത്തിയ പരിശോധനയിൽ അവയുടെ കാലപ്പഴക്കത്തെ സംബന്ധിച്ച് ചുവടെയുള്ള പട്ടിക ലഭിച്ചു. കാലപ്പഴക്കത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

| കാറിന്റെ കാലപ്പഴക്കം(വർഷത്തിൽ) | കാറുകളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| 16-18 | 20 |
| 19-21 | 18 |
| 22-24 | 8 |
| 25-27 | 4 |

6. ഒരു ക്ലാസിലെ 100 കുട്ടികളുടെ മാർക്കിന്റെ മാധ്യം 39 ആണ്. ആൺകുട്ടികളുടെ മാർക്കിന്റെ മാധ്യം 35 ഉം പെൺകുട്ടികളുടേത് 45 ഉം ആണ്. ക്ലാസിലെ ആൺകുട്ടികളുടേയും പെൺകുട്ടികളുടേയും എണ്ണം കാണുക.

7. ഒരു പരീക്ഷയ്ക്ക് ഒരു കുട്ടിക്ക് വിവിധ വിഷയങ്ങളിൽ ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. ഇംഗ്ലീഷ് - 46, ഇക്കണോമിക്സ് - 58, അക്കൗണ്ടൻസി - 72, സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് - 67. ഇംഗ്ലീഷിനും സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിനും ഇരട്ടി പരിഗണന നൽകാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. മാർക്കുകളുടെ മാധ്യം കാണുക.

## 5.2. മധ്യാങ്കം (Median)



ഒരു കുടുംബത്തിൽ 5 കുട്ടികളുണ്ട്. അവരുടെ വയസ്സുകൾ 10, 8, 5, 4, 12 എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഇതിൽ പ്രായത്തിനനുസരിച്ച് മധ്യഭാഗത്തെയാളിന് എത്ര വയസ്സായിരിക്കും. നിങ്ങൾക്ക് കാണാമോ? അതിനായി നമുക്ക് ഈ വയസ്സുകളെ ആരോഹണ ക്രമത്തിലെഴുതാം.

4, 5, 8, 10, 12.

മധ്യഭാഗത്ത് വരുന്ന കുട്ടിയുടെ വയസ്സ് എന്നത് ഇതിലെ ഏറ്റവും മധ്യഭാഗത്തെ സംഖ്യയായിരിക്കും. ഇവിടെ അത് 8 ആണ്. ഈ 8 നെയാണ് നാം തന്നിരിക്കുന്ന 5 സംഖ്യകളുടെ മധ്യാങ്കം എന്ന് പറയുന്നത്.

> ഒരു ഡാറ്റയിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെ ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണ ക്രമത്തിലോ എഴുതുമ്പോൾ ഏറ്റവും മധ്യത്തിൽ വരുന്ന വിലയാണ് മധ്യാങ്കം.

അതായത്, ഒരു വിതരണത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം എന്ന് പറയുന്നത് ആ വിതരണത്തെ രണ്ട് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കി വേർതിരിക്കുന്ന വിലയാണ്. വിതരണത്തിന്റെ പകുതി ഭാഗം മധ്യാങ്കത്തേക്കാൾ ചെറുതും പകുതി ഭാഗം മധ്യാങ്കത്തിനേക്കാൾ വലുതും ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് മധ്യാങ്കത്തെ ഒരു സ്ഥാനീയ ശരാശരി (Positional average) എന്നു വിളിക്കുന്നു.

### മധ്യാങ്കം കണക്കാക്കുന്നവിധം

**i) അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ മധ്യാങ്കം കണക്കാക്കൽ**

n വിലകളുള്ള ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റ പരിഗണിക്കുക. മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് ആദ്യം ഇതിലെ വിലകളെ ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണക്രമത്തിലോ എഴുതുക. മധ്യാങ്കം ഇതിലെ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-ാമത്തെ വിലയായിരിക്കും.

> ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ മധ്യാങ്കം എന്നത് ആ ഡാറ്റ ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണക്രമത്തിലോ എഴുതുമ്പോൾ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-ാമത്തെ സ്ഥാനത്ത് വരുന്ന വിലയായിരിക്കും.

**വിവരണം 5.11**

രഹനയ്ക്ക് ഒമ്പത് ഗണിത ക്വിസ് മത്സരങ്ങളിൽ ലഭിച്ച സ്കോറുകളാണ് 88, 97, 87, 92, 90, 88, 93, 98, 95 എന്നിവ. സ്കോറുകളുടെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

**പരിഹാരം**

തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റ ആരോഹണക്രമത്തിലാക്കിയാൽ.

87, 88, 88, 90, 92, 93, 95, 96, 98

ഇവിടെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം, n = 9

മധ്യാങ്കം $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$-ാമത്തെ വില

$= \left(\frac{9+1}{2}\right)$-ാമത്തെ വില

= 5-ാമത്തെ വില

= 92

**വിവരണം 5.12**

ആനന്ദിന്റെ കുടുംബം വേനലവധിക്ക് തിരുവനന്തപുരത്ത് നിന്നും വയനാട്ടിലേക്ക് ഒരു യാത്ര പോകുകയാണ്. അവർ 8 ജില്ലകളിലൂടെ സഞ്ചരിച്ചു. ആ ദിവസങ്ങളിൽ ഈ 8 ജില്ലകളിലെ പെട്രോൾ വിലകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

71.9, 72.3, 72.4, 72.32, 73, 73.1, 72.2, 72.48 (രൂപയിൽ) പെട്രോൾ വിലകളുടെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

**പരിഹാരം**

ആരോഹണക്രമത്തിൽ തന്നിട്ടുള്ളവയെ ക്രമീകരിച്ചാൽ,

71.9, 72.2, 72.3, 72.32, 72.4, 72.48, 73, 73.1

ഇവിടെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം, n=8

മധ്യാങ്കം $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$-ാമത്തെ വില

$= \left(\frac{8+1}{2}\right)$-ാമത്തെ വില $= 4.5$-ാമത്തെ വില

പക്ഷേ, ഇവിടെ 4.5 എന്ന സ്ഥാനമില്ല അപ്പോൾ നാം ചെയ്യേണ്ടത് 4-ാമത്തെയും 5-ാമത്തെയും വിലകളുടെ മാധ്യം എടുക്കുക എന്നതാണ്.

$\therefore$ മധ്യാങ്കം = 4, 5 എന്നീ സ്ഥാനത്തെ സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം

$$= \frac{72.32 + 72.4}{2} = 72.36$$

പെട്രോൾ വിലകളുടെ മധ്യാങ്കം = 72.36 രൂപ

**ii) വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ മധ്യാങ്കം**

ഒരു വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് വിലകളെ ആരോഹണക്രമത്തിൽ ക്രമീകരിച്ചതിന് ശേഷം $\frac{N+1}{2}$ എന്ന സഞ്ചിതാവൃത്തിവരുന്ന വില കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി. ഇതിന് വേണ്ടി താഴെപറയുന്ന ക്രമം ഉപയോഗിക്കാം.

1 : ഡാറ്റയെ ആരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതുക.

2 : സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക കാണുക.

3 : $\frac{N+1}{2}$ കാണുക, N ആകെ ആവൃത്തി.

4 : $\frac{N+1}{2}$-ാമത്തെ വിലയായിരിക്കും മധ്യാങ്കം .

### വിവരണം 5.13

ഒരു നിർമാണ കമ്പനിയിലെ ജോലിക്കാരുടെ ദിവസവേതനം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മധ്യാങ്കം കാണുക.

| ദിവസവേതനം (100 രൂപയിൽ) | 6 | 8 | 10 | 12 | 15 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം | 20 | 14 | 7 | 16 | 12 | 2 |

**പരിഹാരം**

തന്നിരിക്കുന്ന വിലകൾ ആരോഹണക്രമത്തിലാണ്. സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

| ദിവസവേതനം (100 രൂപയിൽ) | ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം | സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|---|
| 6 | 20 | 20 |
| 8 | 14 | 34 |
| 10 | 7 | 41 |
| 12 | 16 | 57 |
| 15 | 12 | 69 |
| 18 | 2 | 71 |

ആകെ ആവൃത്തി, N=71, $\frac{N+1}{2} = \frac{72}{2} = 36$

$\therefore$ ഡാറ്റയിൽ 36-ാമത് വിലയാണ് മധ്യാങ്കം. അത് 10 ആണ്

$\therefore$ മധ്യാങ്കം = രൂപ 1000/-

### വിവരണം 5.14

42 കുട്ടികൾക്ക് ഒരു പരീക്ഷയ്ക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ വിവരം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

| സ്കോറുകൾ | 9 | 20 | 25 | 40 | 50 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | 4 | 6 | 11 | 13 | 7 | 2 |

സ്കോറുകളുടെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

**പരിഹാരം**

തന്നിരിക്കുന്ന വിലകൾ ആരോഹണക്രമത്തിലാണ്. അവയുടെ സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

| സ്കോർ | ആവൃത്തി | സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|---|
| 9 | 4 | 4 |
| 20 | 6 | 10 |
| 25 | 11 | 21 |
| 40 | 13 | 33 |
| 50 | 7 | 40 |
| 80 | 2 | 42 |
| | N = 42 | |

ആകെ ആവൃത്തി, N = 42

$$\frac{N+1}{2} = \frac{43}{2} = 21.5$$

$\therefore$ മധ്യാങ്കം 21-ാമത്തേതിന്റെയും 22-ാമത്തേതിന്റെയും മാധ്യമായിരിക്കും.

മധ്യാങ്കം $= \frac{25+40}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$

സ്കോറുകളുടെ മധ്യാങ്കം $= 32.5$

**iii) തുടരാവൃത്തി പട്ടികയുടെ മധ്യാങ്കം**

മധ്യാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ആദ്യം സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക തയാറാക്കുക. ആകെ ആവൃത്തി N എന്നിരിക്കട്ടെ. $\frac{N}{2}$ സഞ്ചിതാവൃത്തിയുള്ള ക്ലാസ് കണ്ടെത്തുക. ഇതിനെ നാം മധ്യാങ്ക ക്ലാസ് എന്ന് പറയുന്നു.

അങ്ങനെയെങ്കിൽ മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം,

$$\text{മധ്യാങ്കം} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)c}{f}$$

ഇവിടെ,

$l$ - മധ്യാങ്ക ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധി.

c - മധ്യാങ്ക ക്ലാസിന്റെ അന്തരം.

f - മധ്യാങ്ക ക്ലാസിന്റെ ആവൃത്തി.

m - മധ്യാങ്ക ക്ലാസിന് തൊട്ടുമുമ്പുള്ള ക്ലാസിന്റെ സഞ്ചിതാവൃത്തി.

മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് പ്രവർത്തന ക്രമം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

1 : ഉൾച്ചേർക്കൽ ക്ലാസ് (Inclusive class) ഉണ്ടെങ്കിൽ അവയെ കേവല ക്ലാസുകൾ (exclusive class) ആക്കുക.

2 : സഞ്ചിതാവൃത്തികൾ കാണുക

3 : $\frac{N}{2}$ കാണുക, N- എന്നത് ആകെ ആവൃത്തി

4 : $\frac{N}{2}$ സഞ്ചിതാവൃത്തിയുള്ള ക്ലാസ് കണ്ടെത്തുക.

5 : സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുക.

### വിവരണം 5.15

63 കുടുംബങ്ങളുടെ വരുമാനത്തിന്റെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

| വരുമാനം (100 രൂപയിൽ) | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം | 6 | 12 | 18 | 13 | 9 | 4 | 1 |

വരുമാനത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

*പരിഹാരം*

സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

| ക്ലാസ്സ് | ആവൃത്തി | സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|---|
| 30-40 | 6 | 6 |
| 40-50 | 12 | 18 |
| 50-60 | 18 | 36 |
| 60-70 | 13 | 49 |
| 70-80 | 9 | 58 |
| 80-90 | 4 | 62 |
| 90-100 | 1 | 63 |
| | N = 63 | |

$\frac{N}{2} = 31.5$

∴ മധ്യാങ്ക ക്ലാസ് 50-60 ആകുന്നു

മധ്യാങ്കം $= l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)c}{f}$

ഇവിടെ $l = 50$, c =10, f = 18, m = 18

മധ്യാങ്കം $= 50 + \frac{(31.5 - 18) \times 10}{18}$

$= 50 + \frac{135}{18} = 57.5$

### വിവരണം 5.16

ഇക്ണോമിക്സ് പരീക്ഷയിൽ 50 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകളുടെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മധ്യാങ്കം കാണുക.

| മാർക്കുകൾ | 10-14 | 15-19 | 20-24 | 25-29 | 30-34 | 35-39 | 40-44 | 45-49 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | 4 | 6 | 10 | 5 | 7 | 3 | 9 | 6 |

#### പരിഹാരം

ഇവിടെ ഉൾച്ചേർക്കൽ ക്ലാസുകളാണുള്ളത് മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് അവയെ കേവല ക്ലാസുകളാക്കി മാറ്റണം.

| മാർക്ക് | കേവല ക്ലാസ്സ് | ആവൃത്തി | സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|---|---|
| 10-14 | 9.5-14.5 | 4 | 4 |
| 15-19 | 14.5-19.5 | 6 | 10 |
| 20-24 | 19.5-24.5 | 10 | 20 |
| 25-29 | 24.5-29.5 | 5 | 25 |
| 30-34 | 29.5-34.5 | 7 | 32 |
| 35-39 | 34.5-39.5 | 3 | 35 |
| 40-44 | 39.5-44.5 | 9 | 44 |
| 45-49 | 44.5-49.5 | 6 | 50 |
| | | N = 50 | |

N = 50 $\quad \therefore \frac{N}{2} = 25$

മധ്യാങ്ക ക്ലാസ് 24.5 - 29.5 ആകുന്നു.

$l = 24.5$, c = 5, f = 5, m = 20

$$\text{മധ്യാങ്കം} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)c}{f} = 24.5 + \frac{(25-20)5}{5} = 29.5$$

### 5.2.1 ഗ്രാഫുപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുന്നവിധം

മധ്യാങ്കത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാന ഗുണം അതിനെ ഗ്രാഫുപയോഗിച്ച് കാണാൻ സാധിക്കുമെന്നതാണ്. മധ്യാങ്കം ഒരു സ്ഥാനീയ ശരാശരി ആണ്. ഗ്രാഫുപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് രണ്ട് മാർഗങ്ങളാണുള്ളത്.

i) ഒരു സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം ഉപയോഗിച്ച് (ആരോഹണ അല്ലെങ്കിൽ അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം)

ii) രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രങ്ങളും ഉപയോഗിച്ച്

**i) ഒരു സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം ഉപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുന്നവിധം**

ആരോഹണ അല്ലെങ്കിൽ അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം ഉപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് താഴെ പറയുന്ന ഘട്ടങ്ങളുണ്ട്.

ഘട്ടം 1 : ആരോഹണ (അവരോഹണ) സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം വരയ്ക്കുക.

ഘട്ടം 2 : $\frac{N}{2}$ കണ്ടുപിടിച്ച് Y അക്ഷത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തുക. N- ആകെ ആവൃത്തി.

ഘട്ടം 3 : $\frac{N}{2}$ വിൽ നിന്നും Y അക്ഷത്തിന് ഒരു ലംബം വരയ്ക്കുക. ഇത് സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു A എന്ന് കരുതുക.

ഘട്ടം 4 : A യിൽ നിന്ന് X അക്ഷത്തിന് ലംബം വരയ്ക്കുക. ഇത് X അക്ഷത്തിൽ k ŷ Ài ŗ p¶ _ ŋu ṕ ŗsâ $x$ വിലയാണ് മധ്യാങ്കം

**വിവരണം 5.17**

100 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. മധ്യാങ്കം ഗ്രാഫുപയോഗിച്ച് കാണുക.

| മാർക്ക് | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | 7 | 10 | 21 | 27 | 22 | 9 | 4 |

**പരിഹാരം**

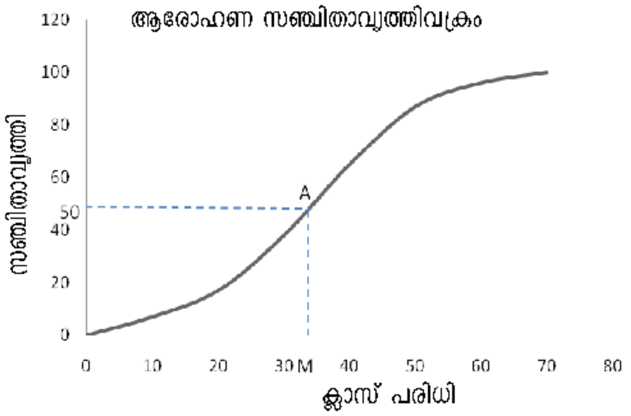
a) ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം ഉപയോഗിച്ച്

ആദ്യം നമുക്ക് ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക കാണാം.

| ഉയർന്ന ക്ലാസ്സ് പരിധി | ആരരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|
| 10 | 7 |
| 20 | 17 |
| 30 | 38 |
| 40 | 65 |
| 50 | 87 |
| 60 | 96 |
| 70 | 100 |

$N = 100, \quad \therefore \frac{N}{2} = 50$

ഒരു ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം വരയ്ക്കുക



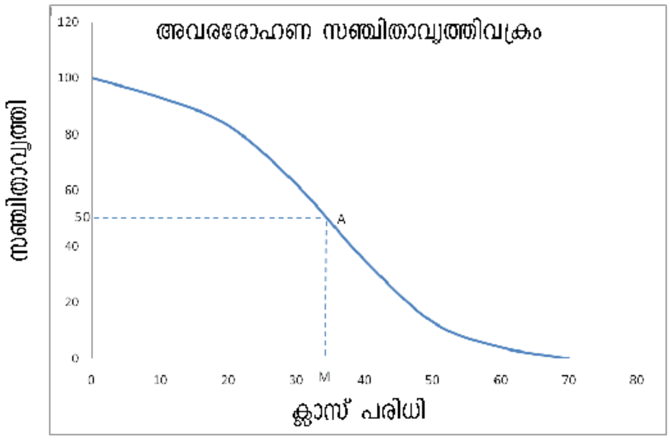

$\therefore$ മധ്യാങ്കം = 34

b) അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം ഉപയോഗിച്ച്

അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം വരയ്ക്കുന്നതിന് ആദ്യം അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക തയാറാക്കണം.

| താഴ്ന്ന ക്ലാസ് പരിധി | അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|
| 0 | 100 |
| 10 | 93 |
| 20 | 83 |
| 30 | 62 |
| 40 | 35 |
| 50 | 13 |
| 60 | 4 |

ഒരു അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം വരയ്ക്കുക.




മധ്യാങ്കം = 34

**ii) രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുന്നവിധം**

രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് ചുവടെ കൊടുക്കുന്ന ഘട്ടങ്ങൾ ഉണ്ട്.

ഘട്ടം 1 : ഒരു പേപ്പറിൽ ഒരേ അക്ഷങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നു.

ഘട്ടം 2 : രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രങ്ങളും കൂടിച്ചേരുന്ന ബിന്ദുവിനെ A എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു.

ഘട്ടം 3 : A യിൽ നിന്നും X അക്ഷത്തിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക. ഈ ലംബം X അക്ഷത്തിൽ സ്പർശിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ $x$ വിലയാണ് മധ്യാങ്കം.

**വിവരണം 5.18**

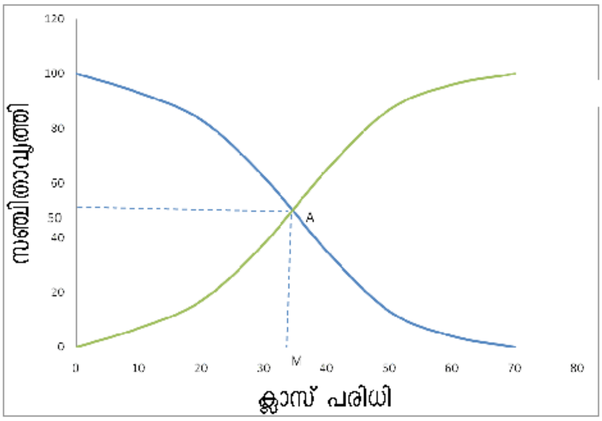
വിവരണം 5.17 ലെ ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുക.

**പരിഹാരം**

രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടികകളും നിർമിക്കുക.

| ഉയർന്ന ക്ലാസ് പരിധി | ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി | താഴ്ന്ന ക്ലാസ് പരിധി | അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|---|---|
| 10 | 7 | 0 | 100 |
| 20 | 17 | 10 | 93 |
| 30 | 38 | 20 | 83 |
| 40 | 65 | 30 | 62 |
| 50 | 87 | 40 | 35 |
| 60 | 96 | 50 | 13 |
| 70 | 100 | 60 | 4 |

രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രങ്ങളും ഒരേ പ്രതലത്തിൽ വരയ്ക്കുക




മധ്യാങ്കം = 34

### 5.2.2. മധ്യാങ്കത്തിന്റെ മേൻമകളും പോരായ്മകളും (Merits and demerits of Median)

**മേന്മകൾ**

1) ഇതിന് കൃത്യമായ നിർവചനം ഉണ്ട്.

2) കണക്ക് കൂട്ടുന്നതിന് എളുപ്പമാണ്. ചില അവസരങ്ങളിൽ ഒരു ചെറിയ പരിശോധന വഴിയും മധ്യാങ്കം കാണാം.

3) അഗ്ര വിലകൾ ബാധിക്കുന്നില്ല.

4) ഉയർന്നപരിധിയോ, താഴ്ന്നപരിധിയോ ഇല്ലാത്ത ക്ലാസുകളുള്ള അവസരത്തിലും മധ്യാങ്കം കാണുവാൻ സാധിക്കും.

5) ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണക്രമത്തിലോ എഴുതുവാൻ കഴിയുന്ന, എന്നാൽ സംഖ്യാരൂപത്തിലെഴുതാൻ കഴിയാത്ത ഗുണാത്മക ഡാറ്റയ്ക്ക് കാണാൻ സാധിക്കുന്ന ഒരേയൊരു ശരാശരിയാണ് മധ്യാങ്കം.

6) മറ്റ് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളേക്കാൾ തീർത്തും വ്യത്യസ്ഥമായ ഒരു പ്രാപ്താങ്കം വരുന്ന അവസരത്തിൽ ശരാശരിയായി ഉപയോഗിക്കുന്നതിന് ഏറ്റവും യോജിച്ചത് മധ്യാങ്കമാണ്.

**പോരായ്മകൾ**

1) ചില അവസരങ്ങളിൽ മധ്യാങ്കത്തെ കൃത്യമായി കാണുവാൻ സാധിക്കില്ല. ഉദാഹരണത്തിന്, പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം ഇരട്ട സംഖ്യയാണെങ്കിൽ മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് മധ്യത്തിലുള്ള രണ്ട് വിലകളുടെ മാധ്യമാണ് കാണുന്നത്. ഇത് ഒരു ഏകദേശ വിലമാത്രമാകുന്നു.

2) ഇത് എല്ലാ വിലകളെയും അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ളതല്ല.

3) പ്രതിരൂപണത്തിൽ വരുന്ന മാറ്റങ്ങൾ ഇതിനെ ബാധിക്കുന്നു.

4) തുടർഗണിത പ്രക്രിയകൾക്ക് ഇതിനെ ഉപയോഗിക്കാൻ കഴിയില്ല.

## നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. ഒരു കായികോപകരണ വിൽപ്പന സ്ഥാപനത്തിലെ മാനേജർ കഴിഞ്ഞ ഏഴു മാസങ്ങളിൽ വിറ്റ ക്രിക്കറ്റ് പന്തുകളുടെ കണക്ക് രേഖപ്പെടുത്തിയത് ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

   132, 121, 119, 116, 130, 121, 131. മധ്യാങ്കം കാണുക.

2. 10 കുട്ടികളുടെ ഭാരം (കിലോഗ്രാമിൽ) കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

   31, 35, 27, 29, 32, 43, 37, 41, 34, 28. മധ്യാങ്കം കാണുക. 43 കി.ഗ്രാം എന്ന ഭാരം മാറ്റി 48 കി.ഗ്രാം ഭാരം പരിഗണിച്ചാൽ പുതിയ മധ്യാങ്കം ഏതായിരിക്കും.

3. 43 കുട്ടികളുടെ മാർക്കുകൾ പട്ടികയിൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. മധ്യാങ്കം കാണുക.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| മാർക്ക് : | 20 | 9 | 25 | 50 | 40 | 80 |
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം : | 6 | 4 | 16 | 7 | 8 | 2 |

4. ബൾബുകളുടെ പ്രവർത്തനദൈർഘ്യം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് 80 ബൾബുകൾ തെരഞ്ഞെടുത്ത് പരിശോധിക്കുന്നു. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക ലഭിക്കുന്നു. പ്രവർത്തനദൈർഘ്യത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

| | | | |
|---|---|---|---|
| പ്രവർത്തന ദൈർഘ്യം (മണിക്കൂറിൽ) | 52.5 - 63.5 | 63.5 - 74.5 | 74.5 - 85.5 |
| ബൾബുകളുടെ എണ്ണം | 12 | 23 | 18 |
| | 85.5 - 96.5 | 96.5 - 107.5 | 107.5 - 118.5 |
| | 6 | 14 | 5 |

5. 100 കുട്ടികളുടെ മാർക്കിന്റെ വിതരണം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു. മാർക്കിന്റെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| മാർക്ക് | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 | 70-79 | 80-89 |
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | 10 | 14 | 26 | 20 | 18 | 12 |

## 5.3. മോഡ് (Mode)

നിത്യജീവിതത്തിൽ നാം പലപ്പോഴും ഭൂരിപക്ഷം എന്ന ആശയം പ്രയോഗിക്കാറുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന് സ്കൂൾ പാർലമെന്റ് തെരഞ്ഞെടുപ്പിൽ ഭൂരിപക്ഷം വോട്ടുകൾ കിട്ടുന്നയാളായിരിക്കും നിങ്ങളുടെ ക്ലാസ് ലീഡറായി വരുന്നത്. നിങ്ങളുടെ ക്ലാസ് ലീഡർ സ്കൂൾ പാർലമെന്റിൽ നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കും. അതായത് ചില അവസരങ്ങളിൽ ഡാറ്റകളെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നത് ഭൂരിപക്ഷമുള്ള പ്രാപ്താങ്കമായിരിക്കും. ഭൂരിപക്ഷം എന്ന ആശയത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന അളവാണ് മോഡ്.

> ഒരു ഡാറ്റയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കുന്ന വിലയാണ് ആ ഡാറ്റയുടെ മോഡ് . ഇത് ഡാറ്റയിലെ ഏറ്റവും ആവൃത്തി കൂടിയ പ്രാപ്താങ്കമായിരിക്കും.

മോഡിനെ ചിലപ്പോൾ നടപ്പു ശരാശരിയെന്നോ (Fashionable Average) വ്യാപാര ശരാശരിയെന്നോ (Business Average) വിളിക്കാറുണ്ട്.

### മോഡ് കണക്കാക്കുന്ന വിധം

**i) അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ മോഡ്**

ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കുന്ന വിലയാണ് അതിന്റെ മോഡ് .

**വിവരണം 5.19**

ഒരു അഭിമുഖ പരീക്ഷയിൽ പങ്കെടുത്ത 8 പേരുടെ വയസ്സുകളാണ് 20, 21, 21, 24, 25, 24, 21, 27 എന്നിവ. ഈ ഡാറ്റയുടെ മോഡ് കാണുക.

**പരിഹാരം**

ഇവിടെ 21 എന്ന പ്രാപ്താങ്കം 3 പ്രാവശ്യവും 24 രണ്ട് പ്രാവശ്യവും ബാക്കിയെല്ലാം ഒരോ പ്രാവശ്യവുമാണ് ഉള്ളത്. അതിനാൽ കൂടുതൽ തവണ ആവർത്തിക്കുന്ന വില 21 ആണ്.

അതുകൊണ്ട് മോഡ് = 21 വയസ്സ്

> ഒരു വിതരണത്തിന് ഒന്നോ രണ്ടോ അതിലധികമോ മോഡുകൾ ഉണ്ടാകാം. ഏറ്റവും കൂടുതൽ പ്രാവശ്യം ആവർത്തിച്ചിരിക്കുന്ന രണ്ട് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ ഈ രണ്ട് പ്രാപ്താങ്കളേയും ആ വിതരണത്തിന്റെ മോഡായി കണക്കാക്കാം. ഒരു വിതരണത്തിന് ഒരേയൊരു മോഡ് മാത്രമേയുള്ളൂവെങ്കിൽ ആ വിതരണത്തെ ഏകമോഡ് (Unimodal) വിതരണമെന്നും രണ്ട് മോഡുള്ളതിനെ ദ്വിമോഡ് (bimodal) വിതരണമെന്നും രണ്ടിൽ കൂടുതൽ മോഡുള്ള വിതരണത്തെ ബഹുമോഡ് വിതരണം എന്നും പറയുന്നു.

**വിവരണം 5.20**

ഒരു സ്കൂളിലെ കായികാധ്യാപകനായ ശ്രീ. വിജയകുമാർ ആ സ്കൂളിലെ ക്രിക്കറ്റ് ടീമിലുള്ള കുട്ടികളുടെ ശരാശരി ഉയരം കാണുവാനുദ്ദേശിക്കുന്നു. ടീമംഗങ്ങളുടെ ഉയരങ്ങൾ (ഇഞ്ചിൽ) 70, 72, 72, 74, 74, 74, 75, 76, 76, 76, 77 എന്നിവയാണ്. ഉയരങ്ങളുടെ മോഡ് കാണുക.

**പരിഹാരം**

ഇവിടെ 74, 76 എന്നീ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ മൂന്ന് പ്രാവശ്യം വീതം ആവർത്തിച്ചിട്ടുണ്ട്. മറ്റെല്ലാ പ്രാപ്താങ്കളുടെയും ആവൃത്തി മൂന്നിൽ കുറവാണ്. ആയതിനാൽ ഈ ഉയരങ്ങളുടെ മോഡ് 74 ഉം 76 ഉം ആണ്.

ഉയരങ്ങളുടെ മോഡ് = 74, 76

**വിവരണം 5.21**

ഒരു കമ്പനിയുടെ CEO അദ്ദേഹത്തിന്റെ കമ്പനിയിലെ തൊഴിലാളികൾക്ക് ശമ്പളവർധനവ് നൽകാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. എല്ലാപേർക്കും 2000 രൂപാവീതം ശമ്പളവർധനവ് നൽകണോ അതോ ഓരോരുത്തർക്കും 10% വീതം ശമ്പളവർധനവ് നൽകണമോ എന്നുള്ള കാര്യത്തിൽ അദ്ദേഹത്തിന് തീർച്ചയില്ല. ശമ്പളത്തിന്റെ മാധ്യം 50000 രൂപയും മധ്യാങ്കം 20000 രൂപയും മോഡ് 10000 രൂപയുമാണ്. താഴെപറയുന്ന അവസരത്തിൽ മാധ്യത്തിനും മധ്യാങ്കത്തിനും മോഡിനും ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റങ്ങൾ എന്തെല്ലാമാണ്?

a) എല്ലാപേർക്കും 2000 രൂപാ വീതം ശമ്പളവർധനവ് നൽകിയാൽ

b) എല്ലാവരുടേയും ശമ്പളം 10% വർധിപ്പിച്ചാൽ

**പരിഹാരം**

ഇവിടെ തന്നിരിക്കുന്നത് മാധ്യം = 50000/- മധ്യാങ്കം = 20000/- മോഡ് = 10000/-

a) എല്ലാപേർക്കും 2000 രൂപ വീതം വർധനവ് നൽകിയാൽ

ഒരാളുടെ നിലവിലെ ശമ്പളം x ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ അയാളുടെ പുതിയ ശമ്പളം $x+2000$ ആകും

$$\text{മാധ്യം} = \frac{\Sigma(x+2000)}{n}$$

$$= \frac{\Sigma x + \Sigma 2000}{n} = \frac{\Sigma x}{n} + \frac{2000n}{n}$$

$$= 50000 + 2000 = 52000$$

അതായത് ഒരാൾക്ക് 2000 രൂപാ വീതം ശമ്പളവർധനവ് നൽകിയാൽ മാധ്യം 2000 വർധിക്കുന്നു. ഇതുതന്നെയാണ് മധ്യാങ്കത്തിനും മോഡിനും സംഭവിക്കുന്നത്. അവയുടെ വിലകളും 2000 വീതം വർധിക്കുന്നു.

b) എല്ലാവർക്കും 10% ശമ്പളവർദ്ധനവ് നൽകിയാൽ

'x' ആണ് ഒരാളുടെ നിലവിലെ ശമ്പളമെങ്കിൽ പുതിയ ശമ്പളം x ന്റെ 110% ആകുന്നു. അതായത് 1.10x ആകുന്നു.

$$\text{മാധ്യം} = \frac{\Sigma 1.10x}{n}$$

$$= 1.10\ \frac{\Sigma x}{n}$$

$$= 1.10 \times 50000 = 55000$$

ഇതുപോലെ മധ്യാങ്കം $= 1.10 \times 20000 = 22000$

മോഡ് $= 1.10 \times 10000 = 11000$

അതായത് മാധ്യവും മധ്യാങ്കവും മോഡും 10% വീതം വർധിക്കുന്നു.

**ii) വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ മോഡ്**

ഒരു വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ മോഡ് എന്നത് ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തി യുള്ള പ്രാപ്താങ്കമാണ്.

**വിവരണം 5.22**

തിരുവനന്തപുരത്തെ ഒരു തുണിക്കടയിൽ ഒരു മാസം വിൽപ്പന നടത്തിയ ഷർട്ടുകളുടെ അളവുകളും അവയുടെ എണ്ണവും താഴെ പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. മോഡ് കാണുക.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| അളവ് (ഇഞ്ചിൽ) | : | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 |
| ഷർട്ടുകളുടെ എണ്ണം | : | 15 | 22 | 31 | 30 | 20 |

**പരിഹാരം**

തന്നിരിക്കുന്ന ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തിയുള്ള പ്രാപ്താങ്കം 40 ആണ്.

$\therefore$ മോഡ് $= 40$

**iii) തുടരാവൃത്തി പട്ടികയുടെ മോഡ്**

ഇവിടെ മോഡ് കാണുന്നതിനാദ്യം നമുക്ക് മോഡൽ ക്ലാസ് കണ്ടെത്തണം. മോഡൽ ക്ലാസ് എന്നത് ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തിയുള്ള ക്ലാസാണ്. മോഡ് കാണുന്നതിന് താഴെ പറയുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

മോഡ് $= l + \dfrac{(f_1 - f_0)c}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)}$

അതായത്, മോഡ് $= l + \dfrac{(f_1 - f_0)c}{2f_1 - f_0 - f_2}$

ഇവിടെ $l$ - മോഡൽ ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധി

$f_1$ - മോഡൽ ക്ലാസിന്റെ ആവൃത്തി

$f_0$- മോഡൽ ക്ലാസിന് തൊട്ടു മുന്നിലെ ക്ലാസിന്റെ ആവൃത്തി

$f_2$- മോഡൽ ക്ലാസിന് തൊട്ട് ശേഷമുള്ള ക്ലാസിന്റെ ആവൃത്തി

$c$ – മോഡൽ ക്ലാസിന്റെ അന്തരം

തുടരാവൃത്തി പട്ടികയുടെ മോഡ് കാണുന്നതിന് താഴെപ്പറയുന്ന പ്രവർത്തനക്രമം ഉപയോഗിക്കാം.

ഘട്ടം 1: ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തിയുള്ള ക്ലാസ് കണ്ടെത്തുക. ഈ ക്ലാസാണ് മാഡൽ ക്ലാസ്.

ഘട്ടം 2: മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് മോഡ് കണക്കാക്കാം.

### വിവരണം 5.23

ജീവിത നിലവാരത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുന്നതിന് ഒരു ഗവേഷകൻ 100 പേരിൽ ഒരു സർവെ നടത്തി. സർവേയിൽ പങ്കെടുത്തവരുടെ വയസ്സിന്റെ വിതരണം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

| വയസ്സ് : | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം : | 12 | 18 | 27 | 20 | 17 | 6 |

ഈ വിതരണത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

#### പരിഹാരം

ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തി = 27

മോഡൽ ക്ലാസ്സ് 20-30 ആകുന്നു

$$\text{മോഡ്} = l + \frac{(f_1 - f_0)c}{2f_1 - f_0 - f_2}$$

ഇവിടെ $l$=20, $f_1$=27, $f_0$=18, $f_2$=20 c=10

$$\therefore \text{ മോഡ്} = 20 + \frac{(27-18)\times 10}{2\times 27 - 18 - 20} = 25.625$$

### വിവരണം 5.24

ഒരു കമ്പനിയിലെ 60 ദിവസങ്ങളിലെ പ്രതിദിന ഉൽപ്പാദനം (ടണ്ണിൽ) ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മോഡ് കാണുക.

| പ്രതിദിന ഉൽപ്പാദനം : | 21-22 | 23-24 | 25-26 | 27-28 | 29-30 |
|---|---|---|---|---|---|
| ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം : | 7 | 13 | 22 | 10 | 8 |

#### പരിഹാരം

ഇവിടെ തന്നിരിക്കുന്നത് ഉൾച്ചേർക്കൽ ക്ലാസാണ്. ഇതിനെ നമുക്ക് കേവല ക്ലാസുകളാക്കി മാറ്റി മാത്രമേ മോഡ് കാണുവാൻ സാധിക്കുള്ളൂ. അപ്പോൾ കിട്ടുന്ന പുതിയ വിതരണം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

| ക്ലാസ് | ദിവങ്ങളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| 20.5 - 22.5 | 7 |
| 22.5 - 24.5 | 13 |
| 24.5 - 26.5 | 22 |
| 26.5 - 28.5 | 10 |
| 28.5 - 30.5 | 8 |

ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തി 22 ആകുന്നു.

മോഡൽ ക്ലാസ് 24.5 - 26.5 ആകുന്നു.

$$\text{മോഡ്} = l + \frac{(f_1 - f_0)c}{2f_1 - f_0 - f_2}$$

$l$=24.5, c=2, $f_0$=13, $f_1$=22, $f_2$=10

$$\text{മോഡ്} \qquad = 24.5 + \frac{(22-13)\times 2}{2\times 22 - 13 - 10} = 25.36$$

### 5.3.1 ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് മോഡ് കാണുന്നവിധം

**ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഉപയോഗിച്ച് മോഡ്**

ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കണ്ടെത്തിയതു പോലെ മോഡും നമുക്ക് ഗ്രാഫിന്റെ സഹായത്താൽ കാണുവാൻ കഴിയും. ഇതിനായി നമുക്ക് ഉപയോഗിക്കേണ്ടത് ഹിസ്റ്റോ ഗ്രാമിനെയാണ്. ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഉപയോഗിച്ച് മോഡ് കാണുന്നതിനുള്ള ഘട്ടങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

1 : തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക.

2 : മോഡൽ ക്ലാസ് കണ്ടെത്തുക (ഹിസ്റ്റോഗ്രാമിലെ ഉയരം കൂടിയ ബാറിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ക്ലാസ്)

3 : ഉയരം കൂടിയ ബാറിന്റെ മുകൾ ശീർഷങ്ങളിൽ നിന്നും തൊട്ടടുത്തുള്ള ബാറുകളിലെ ശീർഷങ്ങളിലെക്ക് വികർണ്ണങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

4 : വികർണ്ണങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.

5 : സംഗമബിന്ദുവിൽ നിന്നും X അക്ഷത്തിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക.

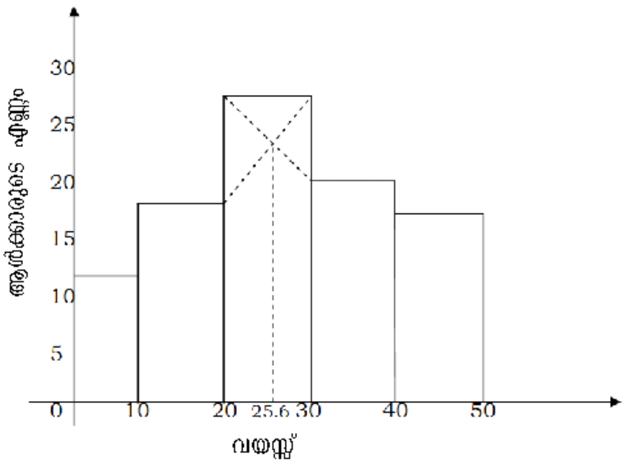
6 : ലംബം X അക്ഷത്തിൽ സ്പർശിക്കുന്ന '$x$' വിലയാണ് മോഡ്

#### വിവരണം 5.25

വിവരണം 5.23ൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് അതിൽ നിന്നും മോഡ് കാണുക.

പരിഹാരം

ആദ്യം നമുക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കാം.




മോഡ് = 25.6

### 5.3.2. മോഡിന്റെ മേന്മകളും പോരായ്മകളും (Merits and demerits of Mode)

മറ്റ് ശരാശരികളെ പോലെ മോഡിനും അതിന്റേതായ മേൻമകളും പോരായ്മകളുമുണ്ട്.

**മേന്മകൾ**

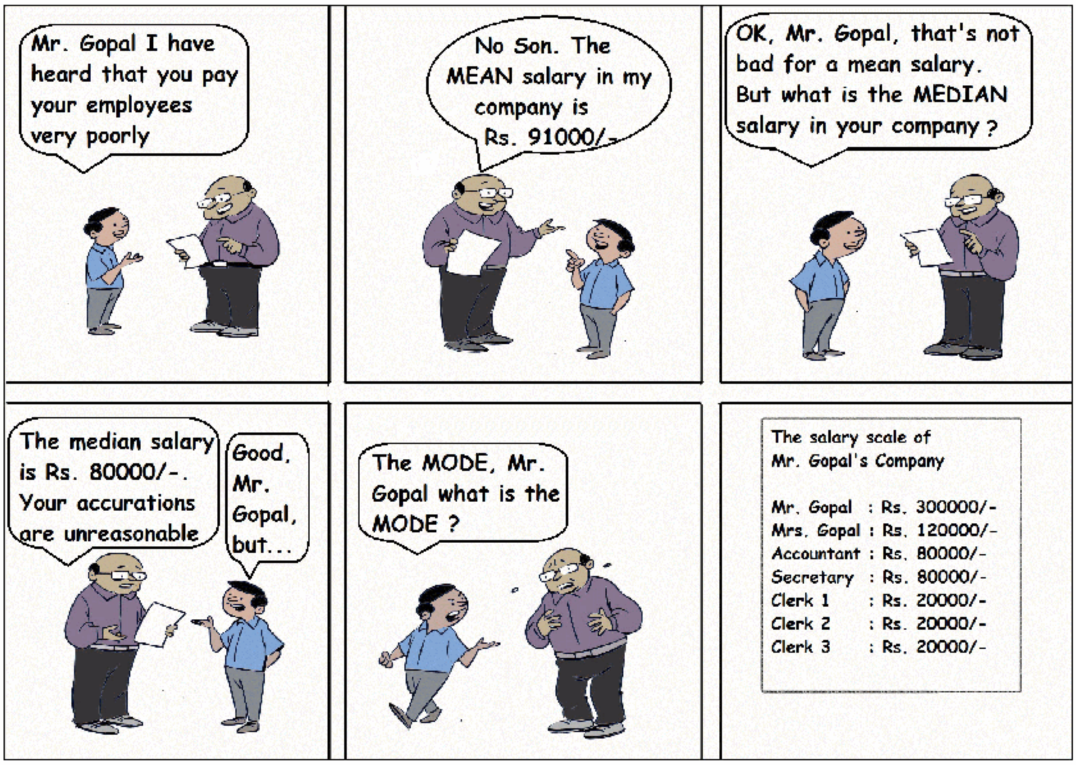
1. മോഡ് കണക്കുകൂട്ടുന്നതിനും മനസ്സിലാക്കുന്നതിനും എളുപ്പമുള്ളതാണ്. ചിലപ്പോൾ ഒറ്റനോട്ടത്തിൽ തന്നെ മോഡ് നമുക്ക് കാണുവാൻ സാധിക്കും.
2. അഗ്ര വിലകൾ മോഡിനെ ബാധിക്കുന്നില്ല.
3. ഉയർന്നപരിധിയോ താഴ്ന്ന പരിധിയോ ഇല്ലാത്ത ക്ലാസുകൾ വരുന്ന അവസരത്തിലും മോഡ് നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാം.
4. ഗുണാത്മക ഡാറ്റയുടെ ശരാശരി കാണുന്നതിന് മോഡ് മാത്രമേ സ്വീകാര്യമാകുള്ളൂ.

**പോരായ്മകൾ**

1. മോഡ് വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടതല്ല. ചില വിതരണങ്ങൾക്ക് ഒരു മോഡോ രണ്ടോ അതിലധികമോ മോഡുകളേ ഉണ്ടാകാം. എന്നാൽ മറ്റ് ചിലതിൽ മോഡ് ഇല്ലാതെയുമിരിക്കാം.
2. എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെയും അടിസ്ഥാനമാക്കുന്നില്ല.
3. തുടർ ഗണിത പ്രക്രിയകൾക്ക് അനുയോജ്യമല്ല.
4. പ്രതിരൂപണത്തിലെ മാറ്റങ്ങൾ മോഡിനെ ബാധിക്കുന്നുണ്ട്.

**മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് – താരതമ്യപട്ടിക**

| നം. | മാധ്യം | മധ്യാങ്കം | മോഡ് |
|---|---|---|---|
| 1 | എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെയും ഗണിത ശരാശരിയായി നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. | പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെ ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണക്രമത്തിലോ ക്രമീകരിക്കുമ്പോൾ വരുന്ന മധ്യവിലയായി നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. | ഏറ്റവുമധികം തവണ ആവർത്തിച്ചിരിക്കുന്ന വിലയായി നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. |
| 2. | എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളേയും ബന്ധപ്പെടുത്തി കാണുന്നു | എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളേയും ആശ്രയിക്കുന്നില്ല. | എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളേയും ആശ്രയിക്കുന്നില്ല. |
| 3. | സമഗ്രവും അതുല്യവുമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. | എല്ലാ അവസരത്തിലും കാണാൻ സാധിക്കില്ല | അതുല്യമായ നിർവചനമല്ല. വിവിധ മോഡുകൾക്കുള്ള സന്ദർഭങ്ങളുണ്ട്. |
| 4. | അഗ്ര വിലകൾ സ്വാധീനിക്കുന്നു. | അഗ്ര വിലകൾ സ്വാധീനിക്കുന്നില്ല. | അഗ്ര വിലകൾ സ്വാധീനിക്കുന്നില്ല. |
| 5. | തുടർഗണിത പ്രക്രിയകൾക്ക് ഉതകുന്നു. അതായത് പല കൂട്ടങ്ങളുടെയും മാധ്യങ്ങൾ ചേർത്ത് സംയുക്ത മാധ്യം കാണാൻ കഴിയും. | തുടർഗണിത പ്രക്രിയയ്ക്ക് അനുയോജ്യമല്ല. ഒന്നിലധികം കൂട്ടങ്ങളുടെ മധ്യാങ്കങ്ങൾ ചേർത്ത് സംയുക്ത കൂട്ടത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം കാണുവാൻ കഴിയില്ല. | തുടർഗണിത പ്രക്രിയയ്ക്ക് അനുയോജ്യമല്ല. ഒന്നിലധികം കൂട്ടങ്ങളുടെ മോഡുകൾ ചേർത്ത് സംയുക്ത കൂട്ടത്തിന്റെ മോഡ് കാണാൻ കഴിയില്ല. |
| 6. | സംഖ്യാ പ്രാധാന്യമുള്ള ഡാറ്റകളിൽ കൂടുതൽ ഉപയോഗപ്രദമാണ്. | ക്രമപര ഡാറ്റയിൽ കൂടുതൽ ഉപയോഗപ്രദമാണ് | ഗുണാത്മക ഡാറ്റയിൽ കൂടുതൽ പ്രയോജനപ്രദമാണ്. |




### മാധ്യവും മധ്യാങ്കവും മോഡും തമ്മിലുള്ള അനുഭവസിദ്ധബന്ധം (Empirical Relationship)

അനുഭവങ്ങളിൽ നിന്നും കാൾ പിയേഴ്സൺ മാധ്യവും മധ്യാങ്കവും മോഡും ചുവടെ പറയുന്ന ബന്ധം കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്.

മാധ്യം - മോഡ് = 3(മാധ്യം-മധ്യാങ്കം)

അഥവാ

മോഡ് = 3 ×മധ്യാങ്കം – 2 × മാധ്യം

ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ശരാശരികൾ അറിയാമെങ്കിൽ മൂന്നാമത്തെ ശരാശരി നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കുമെന്നതാണ് ഈ ബന്ധത്തിന്റെ പ്രാധാന്യം.

### വിവരണം 5.26

ഭാഗിക നാശം സംഭവിച്ച ഒരു ഡാറ്റയുടെ മോഡ് 63 ഉം മധ്യാങ്കം 77ഉം ആണ്. മാധ്യം കാണുക.

### പരിഹാരം

അനുഭവസിദ്ധബന്ധപ്രകാരം

മാധ്യം - മോഡ് = 3(മാധ്യം - മധ്യാങ്കം)

മാധ്യം - 63 = 3 (മാധ്യം - 77)

2 x മാധ്യം = 168

മാധ്യം = 84

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. ഒരു സ്ഥാപനത്തിലെ തൊഴിലാളികളുടെ വയസ്സുകൾ 40,50,30,20,25,35,30,30,20,30 എന്നിവയാണ്. വയസ്സിന്റെ മോഡ് കാണുക.

2. ഒരു ദിവസം ഒരു പ്രത്യേക ഇനം ഷൂവിന്റെ 100 ജോഡികൾ വിൽപ്പന നടത്തിയതിന്റെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. വിതരണത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ഷൂവിന്റെ അളവ് : | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ജോഡികളുടെ എണ്ണം : | 10 | 15 | 20 | 35 | 16 | 3 | 1 |

3. ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ ജോലിക്കാരുടെ ദിവസവേതനം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. വേതനത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| വേതനം (രൂപയിൽ) : | 200-250 | 250-300 | 300-350 | 350-400 |
| ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം : | 21 | 29 | 19 | 39 |
| | 400-450 | 450-500 | 500-550 | 550-600 |
| | 43 | 94 | 73 | 68 |

4. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| പ്രതിദിന ഉൽപ്പാദനം (ടൺ) : | 21-22 | 23-24 | 25-26 | 27-28 | 29-30 |
| ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം : | 7 | 13 | 22 | 10 | 8 |

## 5.4. ജ്യാമിതീയ മാധ്യം (Geometric Mean- GM)

ശരാശരികൾ കാണുന്നതിന് മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് എന്നിവയെ എങ്ങനെ ഉപകരണങ്ങളാക്കാമെന്ന് നമ്മൾ പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. പക്ഷേ ഒരു സമയ കാലയളവിൽ മാറ്റം സംഭവിക്കുന്ന വിലകളുടെ ശരാശരി കാണുന്ന അവസരത്തിൽ മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് എന്നിവ അനുയോജ്യമായ ശരാശരിയല്ല തരുന്നത്. അതിനാൽ ഇവ ഉപയോഗിക്കുന്നത് അനുചിതവുമാണ്. ഇത്തരം അവസരത്തിൽ നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന ശരാശരിയാണ് ജ്യാമിതീയ മാധ്യം (GM).

'n' പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ ജ്യാമിതീയ മാധ്യം കാണുന്നതിന് അവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ n-ാമത് മൂലം എടുത്താൽ മതി. രണ്ട് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളേയുള്ളൂവെങ്കിൽ അവയുടെ GM കാണുന്നതിന് ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമൂലമെടുത്താൽ മതി. എന്നാൽ മൂന്ന് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ GM കാണുന്നതിന് ഗുണനഫലത്തിന്റെ മൂന്നാംമൂലമാണ് എടുക്കേണ്ടത്.

> n പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ n-ാം മൂലമാണ് ജ്യാമിതീയ മാധ്യം

**ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ ജ്യാമിതീയ മാധ്യം**

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്നിവ ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയിലെ 'n' പ്രാപ്താങ്കങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവയുടെ ജ്യാമിതീയ മാധ്യം.

$$GM = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n} = \left[(x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n)\right]^{\frac{1}{n}}$$

> $x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്നീ 'n' വിലകളുടെ ജ്യോമിതീയ മാധ്യം,
>
> $$GM = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n} = \left[(x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n)\right]^{\frac{1}{n}}$$

**വിവരണം 5.27**

കഴിഞ്ഞ 5 വർഷത്തെ ഒരു തുണികടയുടെ ലാഭവർധനവിന്റെ ശതമാനം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| വർഷം : | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 |
| വർദ്ധനവ് ശതമാനം : | 5 | 10.5 | 9 | 6 | 7.5 |

ഈ 5 വർഷത്തെ ശരാശരി ലാഭവർധന ശതമാനം കാണുക.

**പരിഹാരം**

$$GM = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$$
$$= \sqrt[5]{5 \times 10.5 \times 9 \times 6 \times 7.5}$$
$$= 7.34$$

ശരാശരി ലാഭവർധനവ് ശതമാനം = 7.34%

**വിവരണം 5.28**

ഒരു പട്ടണത്തിലെ ജനസംഖ്യ 2006-ൽ 40000ൽ നിന്നും സ്ഥിര വാർഷിക നിരക്കിൽ വർദ്ധിച്ച് 2008-ൽ 42436 ആകുന്നു.

a) വാർഷിക ശരാശരി വർദ്ധന ശതമാനം കാണുക

b) 2007-ലെ ജനസംഖ്യ എന്തായിരിക്കും.

**പരിഹാരം**

2006 ലെ ജനസംഖ്യ = 40000

2008 ലെ ജനസംഖ്യ = 42436

a) വാർഷിക ശരാശരി വർധന നിരക്ക് 'x' ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

അങ്ങനെയെങ്കിൽ

$$40000 \times x \times x = 42436$$
$$\Rightarrow 40000x^2 = 42436$$

$$\Rightarrow \qquad x \qquad = \quad 1.03$$

അതുകൊണ്ട് ശരാശരി വാർഷിക വർധന ശതമാനം = 3%

b) 2007ലെ ജനസംഖ്യ 40000, 42436 എന്നിവയുടെ GM ആണ്

ie 2007 ലെ ജനസംഖ്യ $= \sqrt{40000 \times 42436} = 41200$

അല്ലെങ്കിൽ

2007 ലെ ജനംസംഖ്യ $= 40000 \times 1.03$

$= 41200$

### ജ്യാമിതീയ മാധ്യത്തിന്റെ ഉപയോഗങ്ങളും പരിമിതികളും

ജ്യാമിതീയ മാധ്യത്തിന്റെ ചില പ്രത്യേക ഉപയോഗങ്ങൾ ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

1. വർധന ശതമാനങ്ങൾ, കുറയൽ ശതമാനങ്ങൾ, അനുപാതങ്ങൾ തുടങ്ങിയവയുടെ ശരാശരി കാണുന്നതിന് GM ഉപയോഗപ്രദമാണ്.
2. സൂചികകൾ കാണുന്നതിനുള്ള ഏറ്റവും ഉത്തമമായ ശരാശരി GM ആണ്.
3. GM ന്റെ ഒരു പ്രാധാന്യം, ഇത് അഗ്ര വിലകളുടെ പ്രാധാന്യം കുറയ്ക്കുമെന്നതാണ്. അതിനാൽ തന്നെ തീരെ ചെറുതും തീരെ വലുതുമായ വിലകളുടെ സ്വാധീനം കുറയ്ക്കുവാൻ കഴിയും. മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ കുറഞ്ഞ വിലകൾക്ക് കൂടുതൽ പ്രാധാന്യവും വലിയ വിലകൾക്ക് കുറഞ്ഞ പ്രാധാന്യവും ലഭിക്കുന്നു.

**ജ്യാമിതീയ മാധ്യത്തിന്റെ ചില പരിമിതികൾ ഇവയാണ്.**

1. ചില വിലകൾ നെഗറ്റീവ് ആയാൽ GM കാണാൻ സാധിക്കില്ല.
2. ഒന്നോ അതിലധികമോ വിലകൾ പൂജ്യം ആയാൽ അവയുടെ ഗുണനഫലം പൂജ്യമാവുകയും അതുമൂലം GM ന്റെ വില പൂജ്യമാവുകയും ചെയ്യും. ഇത്തരം സാഹചര്യത്തിൽ GM കാണുന്നത് അർഥരഹിതമാണ്.

## 5.5. സന്തുലിത മാധ്യം (Harmonic Mean - HM)

30 കി.മീറ്റർ അകലമുള്ള രണ്ട് സ്ഥലങ്ങളാണ് A യും B യും. ഒരാൾ കാറിൽ A യിൽ നിന്നും B യിലേക്ക് 60 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗതയിലും തിരിച്ച് 40 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും സഞ്ചരിക്കുന്നു. അയാളുടെ ശരാശരി വേഗത എന്തായിരിക്കും? നമുക്ക് നോക്കാം. വേഗത എന്നത് സഞ്ചരിച്ച ദൂരവും സഞ്ചരിക്കാനെടുത്ത സമയവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതമാണെന്ന് നമുക്കറിയാമല്ലോ? (വേഗത = ദൂരം/സമയം). ഇവിടെ തന്നിരിക്കുന്നത് നോക്കാം.

| ദൂരം | വേഗത | സഞ്ചരിക്കാനെടുക്കുന്ന സമയം |
|---|---|---|
| 30 കി.മീ. | 60കി.മീ./മണിക്കൂർ | $\frac{30}{60} = 0.5$ മണിക്കൂർ |
| 30 കി.മീ. | 40കി.മീ/മണിക്കൂർ | $\frac{30}{40} = 0.75$ മണിക്കൂർ |
| ആകെ: 60 കി.മീ. | | ആകെ: 1.25 മണിക്കൂർ |

ശരാശരി വേഗത = $\frac{\text{ദൂരം}}{\text{സമയം}}$

$$= \frac{60}{1.25} = 48 \text{ കി.മീ./മണിക്കൂർ}$$

ഇനി നമുക്ക് വേഗതകളുടെ മാധ്യവും ജ്യാമിതീയ മാധ്യവും കണക്കാക്കി നോക്കാം.

മാധ്യം = $\frac{60+40}{2} = 50$ കി.മീ./മണിക്കൂർ

ജ്യാമിതീയ മാധ്യം = $\sqrt{60 \times 40} = 48.99$ കി.മീ/മണിക്കൂർ

ഇതിൽ നിന്നും ഈ സന്ദർഭത്തിൽ ശരാശരി വേഗത കാണുന്നതിന് AM,GM എന്നിവ ഉപയോഗിക്കാൻ സാധിക്കില്ലെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ ഇവിടുത്തെ യഥാർഥ ശരാശരി വേഗത 48 കി.മീ./മണിക്കൂറാണ്. ഇവിടെ നമ്മൾ ഉപയോഗിച്ച ശരാശരിയാണ് സന്തുലിത മാധ്യം അഥവാ ഹാർമോണിക മാധ്യം (HM). 60 ന്റേയും 40 ന്റെയും സന്തുലിതമാധ്യം കാണുന്നതിന് അവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ മാധ്യത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമം എടുത്താൽ മതി.

$$HM = \frac{1}{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{60} + \frac{1}{40}\right]}$$

$$= \frac{20 \times 60 \times 40}{60 + 40}$$

= 48കി.മീ/മണിക്കൂർ

> പ്രാപ്തങ്കാങ്ങളുടെ സന്തുലിതമാധ്യം എന്നത് അവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ മാധ്യത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമമാണ്.

**അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ സന്തുലിത മാധ്യം**

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്നിവ ‘n’ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവയുടെ HM ലഭിക്കുന്ന തിന്,

$$\frac{1}{\text{HM}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad \text{HM} = \frac{n}{\Sigma\frac{1}{x}}$$

ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ സന്തുലിത മാധ്യം

$$\text{HM} = \frac{n}{\Sigma\frac{1}{x}}$$

**വിവരണം 5.29**

ഒരു സൈക്കിൾ ഓട്ടമത്സരത്തിൽ പങ്കെടുക്കുന്ന 5 പേരുടെ വേഗതകൾ 15 കി.മീ./മണിക്കൂർ, 18 കി.മീ/മണിക്കൂർ, 20 കി.മീ/മണിക്കൂർ 22 കി.മീ/മണിക്കൂർ, 17കി.മീ./മണിക്കൂർ എന്നിവയാണ്. ശരാശരി വേഗത കാണുക.

**പരിഹാരം**

ശരാശരി വേഗത എന്നത് തന്നിരിക്കുന്ന വേഗതകളുടെ സന്തുലിത മാധ്യമാണ്.

$$\frac{1}{\text{HM}} = \frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{22} + \frac{1}{17}\right)$$

$$= 0.0553$$

$$\therefore \text{HM} = \frac{1}{0.0553} = 18.08$$

ശരാശരി വേഗത = 18.08 കി.മീ/മണിക്കൂർ

**സന്തുലിത മാധ്യത്തിന്റെ ഉപയോഗങ്ങളും പരിമിതികളും**

ചില വ്യവസ്ഥകൾക്ക് വിധേയമായി വേഗതകളുടെ ശരാശരി കാണുന്നതിന് സന്തുലിത മാധ്യം ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്. സന്തുലിതമാധ്യം കണക്കാക്കുമ്പോൾ ചെറിയ വിലകൾക്ക് കൂടുതൽ പ്രാധാന്യം ലഭിക്കുന്നുണ്ട്. അതിനാൽ തന്നെ വിലകൾ തമ്മിൽ വളരെ അന്തരമുള്ള അവസരത്തിൽ സന്തുലിതമാധ്യം യോജിച്ചതാകാറുണ്ട്.

ഒരു വിലയെങ്കിലും പൂജ്യം ആകുന്ന അവസറയിൽ സന്തുലിത മാധ്യം നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയില്ല.

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. ഒരു കൂട്ടം കുട്ടികളുടെ ഒരാഴ്ചയിലെ ചിലവ് സംബന്ധിച്ച് തന്നിരിക്കുന്ന ശ്രേണിയുടെ സന്തുലിത മാധ്യം കാണുക. 125, 130, 75, 10, 45
2. താഴെ പറയുന്ന പ്രസറാവനയിലെ തെറ്റ് ചൂണ്ടിക്കാട്ടുക

   “ ഒരാൾ x ൽ നിന്നും y യിലേക്ക് സൈക്കിളിൽ 20 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും തിരികെ 24 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും സഞ്ചരിക്കുന്നു. അയാളുടെ ശരാശരി വേഗത 22 കി.മീ./മണിക്കൂർ ആണ്”.
3. ഒരു ട്രെയിൻ ആദ്യത്തെ 300 കി.മീറ്റർ ശരാശരി 40കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും അടുത്ത അതേ ദൂരം 30 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും സഞ്ചരിക്കുന്നു. ശരാശരി വേഗത എന്ത്?

### മാധ്യം (AM), ജ്യാമിതീയ മാധ്യം (GM), സന്തുലിതമാധ്യം (HM) ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

AM, GM, HM എന്നിവയെ ഗണിത ശരാശരികൾ എന്നാണ് അറിയപ്പെടുന്നത്. ഗണിത സൂത്രവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് മാത്രമേ നമുക്ക് ഇവ കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുകയുള്ളൂ. ഇവ തമ്മിലുള്ള ചില ബന്ധങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

1. $AM \geq GM \geq HM$

   എല്ലാ വിലകളും തുല്യമായാൽ, $AM = GM = HM$ .
2. രണ്ട് പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ

   $(GM)^2 = AM \times HM$

   ie $GM = \sqrt{AM \times HM}$

**പ്രവർത്തനം**

2,4,8,12,16 എന്നീ വിലകൾക്ക് $AM \geq GM \geq HM$ ആണോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

### വിവരണം 5.30

രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം 10 ജ്യാമിതീയ മാധ്യം 8 എന്നിവയാണ്. HM കാണുക.

**പരിഹാരം**

$(GM)^2 = AM \times HM$

$8^2 = 10 \times HM$

$HM = \frac{64}{10} = 6.4$

## 5.6 വിഭജന വിലകൾ – ചതുരംശങ്ങൾ, ദശാംശങ്ങൾ, ശതാംശങ്ങൾ

ഒരു ഡാറ്റയെ പല തുല്യ ഭാഗങ്ങളാക്കി വിഭജിക്കുന്ന വിലകളെയാണ് വിഭജന വിലകൾ (Partition values) എന്നു പറയുന്നത്. പ്രധാനമായും മൂന്നുതരം വിഭജന വിലകളാണുള്ളത്.

ചതുരംശങ്ങൾ (Quartiles), ദശാംശങ്ങൾ (Deciles), ശതാംശങ്ങൾ (Percentiles). ചതുരംശങ്ങൾ ഒരു ഡാറ്റയെ നാല് തുല്യഭാഗങ്ങളായും ദശാംശങ്ങൾ പത്ത് തുല്യഭാഗങ്ങളായും ശതാംശങ്ങൾ നൂറ് തുല്യഭാഗങ്ങളായും വിഭജിക്കുന്നു. വിഭജന വിലകൾ കണക്കാക്കുന്ന രീതി മധ്യാങ്കം കാണുന്ന രീതിയോട് സാമ്യമുള്ളതാണ്.

**ചതുരംശങ്ങൾ (Quartiles)**

മേൽ സൂചിപ്പിച്ചതുപോലെ ചതുരംശങ്ങൾ ഒരു ഡാറ്റയെ നാല് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. ചതുരംശങ്ങൾ മൂന്നെണ്ണമുണ്ട്. ഇവയെ $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ എന്നിങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഒന്നാമത്തെ ചതുരംശമാണ് $Q_1$. ഡാറ്റയിലെ 25% വിലകൾ $Q_1$ ന് താഴെയും 75% വിലകൾ $Q_1$ ൽ മുകളിലും എന്നാൽ 75% വിലകൾ $Q_3$യുടെ താഴെയും 25% വിലകൾ അതിന്റെ മുകളിലും $Q_2$ വിനാകട്ടെ 50% വിലകൾ താഴെയും 50% വിലകൾ മുകളിലുമാണ്.

അതായത് $Q_2$ ഡാറ്റയെ രണ്ട് തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു. അതിനാൽ $Q_2$ എന്നത് മധ്യാങ്കം തന്നെയാണ്.

**ചതുരംശങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നവിധം**

**i. അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ ചതുരംശങ്ങൾ**

'n' പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുള്ള ഡാറ്റയുടെ ചതുരംശങ്ങൾ കാണുന്നതിന് അവയെ ആദ്യം ആരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതണം. ഇതിൽ

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ -ാമത് വിലയും

$Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$ -ാമത് വിലയുമാണ്.

**വിവരണം 5.31**

7 ജോലിക്കാരുടെ ദിവസവേതനം (രൂപയിൽ) 300, 350, 400 425, 450, 500, 600 എന്നിവയാണ്. ഒന്നാമത്തേയും മൂന്നാമത്തേയും ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

**പരിഹാരം**

ദിവസവേതനത്തെ ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതിയാൽ

300, 350, 400, 425, 450, 500, 600

n = 7 ആകുന്നു

$$\frac{n+1}{4} = \frac{7+1}{4} = 2$$

$\therefore$ $Q_1$ = രണ്ടാമത്തെ വില = 350

കൂടാതെ $3\left(\frac{n+1}{4}\right) = 3 \times 2 = 6$

$\therefore$ $Q_3$ = ആറാമത്തെ വില = 500

**വിവരണം 5.32**

തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ $Q_1$, $Q_3$ എന്നിവ കാണുക.

9, 13, 14, 7, 12, 17, 8, 10, 6, 15, 18, 21, 20

**പരിഹാരം**

പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെ ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതിയാൽ 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21

ഇവിടെ n = 13

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$-ാമത് വില

$= \frac{13+1}{4}$-ാമത് വില 3.5-ാമത് വില

= 3-ാമത് വില + 0.5 (4-ാമത് വില – 3-ാമത് വില)

$= 8+0.5\ (9-8)$

$= 8.5$

$Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$-ാമത് വില

$= 3 \times 3.5$ -ാമത് വില

= 10.5-ാമത് വില

= 10-ാമത് വില + 0.5 (11-ാമത് വില-10-ാമത് വില)

$= 17+0.5\ (18-17)$

$= 17.5$

$\therefore Q_1 = 8.5, \quad Q_3 = 17.5$

**ii) വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ ചതുരംശങ്ങൾ**

ചതുരംശങ്ങൾ കാണുന്നതിന് ആദ്യം ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക തയാറാക്കണം. ആകെ ആവൃത്തി N ആയാൽ

$Q_1$ = സഞ്ചിതാവൃത്തി $\frac{N+1}{4}$ ഉള്ള പ്രാപ്താങ്കം

$Q_3$ = സഞ്ചിതാവൃത്തി $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ ഉള്ള പ്രാപ്താങ്കം

### വിവരണം 5.33

49 ആൾക്കാരുടെ ഉയരം (ഇഞ്ചിൽ) ചുവടെ പട്ടികയിൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ഉയരം | : | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 |
| ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം | : | 2 | 3 | 6 | 15 | 10 | 5 | 4 | 3 | 1 |

ഒന്നാമത്തേയും മൂന്നാമത്തേയും ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

**പരിഹാരം**

ചതുരംശങ്ങൾ കാണുന്നതിന് നമുക്ക് സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക തയ്യാറാക്കണം.

| ഉയരം | ആവൃത്തി | ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|---|
| 58 | 2 | 2 |
| 59 | 3 | 5 |
| 60 | 6 | 11 |
| 61 | 15 | 26 |
| 62 | 10 | 36 |
| 63 | 5 | 41 |
| 64 | 4 | 45 |
| 65 | 3 | 48 |
| 66 | 1 | 49 |
| | N = 49 | |

$Q_1 = \frac{N+1}{4}$-ാമത് പ്രാപ്താങ്കം

$= \frac{49+1}{4}$-ാമത് പ്രാപ്താങ്കം

$=$ 12.5-ാമത് പ്രാപ്താങ്കം

$= 61$

$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$-ാമത് പ്രാപ്താങ്കം

$= (3 \times 12.5)$-ാമത് പ്രാപ്താങ്കം

$=$ 37.5 -ാമത് പ്രാപ്താങ്കം

$= 63$

അതായത്, $Q_1 = 61$, $Q_3 = 63$,

**iii) തുടരാവൃത്തി പട്ടികയുടെ ചതുരംശങ്ങൾ**

ആദ്യം ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക തയാറാക്കുന്നു. ആകെ ആവൃത്തി N ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. $\frac{N}{4}$, $\frac{3N}{4}$ എന്നീ ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തികളുള്ള ക്ലാസുകൾ കണ്ടെത്തുക. ഇവയെ നമുക്ക് ചതുരംശ ക്ലാസുകൾ എന്ന് വിളിക്കാം. $Q_1$, $Q_3$ എന്നിവ കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യങ്ങൾ താഴെ പറയുന്നു.

$$Q_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{N}{4} - m_1\right)c_1}{f_1}$$

$$Q_3 = l_3 + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m_3\right)c_3}{f_3}$$

ഇവിടെ

$l_1$, $l_3$ എന്നിവ ചതുരംശ ക്ലാസുകളുടെ താഴ്ന്ന പരിധികൾ

$f_1$, $f_3$ എന്നിവ ചതുരംശ ക്ലാസുകളുടെ ആവൃത്തികൾ

$c_1$, $c_3$ എന്നിവ ചതുരംശ ക്ലാസുകളുടെ ക്ലാസ് അന്തരങ്ങൾ

$m_1$, $m_3$ എന്നിവ ചതുരംശ ക്ലാസുകൾക്ക് തൊട്ട് മുന്നിലുള്ള ക്ലാസുകളുടെ സഞ്ചിതാവൃത്തികൾ

**വിവരണം 5.34**

ഒരു പരീക്ഷയ്ക്ക് 80 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. താഴ്ന്നതും ഉയർന്നതുമായ ചതുരംശങ്ങൾ ($Q_1$, $Q_3$) കാണുക.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| മാർക്കുകൾ : | 0-10 | 10-20 | 20-40 | 40-60 | 60-80 | 80-100 |
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം : | 8 | 10 | 22 | 25 | 10 | 5 |

**പരിഹാരം**

ആദ്യമായി ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക കാണുന്നു.

| മാർക്കുകൾ | കുട്ടികളുടെ എണ്ണം($f$) | ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|---|
| 0-10 | 8 | 8 |
| 10-20 | 10 | 18 |
| 20-40 | 22 | 40 |
| 40-60 | 25 | 65 |
| 60-80 | 10 | 75 |
| 80-100 | 5 | 80 |
| | N = 80 | |

$\frac{N}{4} = 20,$ $\frac{3N}{4} = 60$

$\therefore$ ഒന്നാം ചതുരംശ ക്ലാസ് 20-40 ആകുന്നു.

$$Q_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{N}{4} - m_1\right)c_1}{f_1}$$

ഇവിടെ $l_1 - 20,\ c_1 - 20,\ f_1 - 22,\ m_1 - 18,$

$$\therefore \quad Q_1 = 20 + \frac{(20-18)\times 20}{22} = 20 + \frac{2\times 20}{22} = 21.8$$

മൂന്നാം ചതുരംശ ക്ലാസ് 40-60 ആകുന്നു.

$$Q_3 = l_3 + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m_3\right)c_3}{f_3}$$

ഇവിടെ $l_3 - 40,\ c_3 - 20,\ f_3 - 25,\ m_3 - 40,$

$$\therefore \quad Q_3 = 40 + \frac{(60-40)20}{25} = 20 + \frac{20\times 20}{25} = 56$$

അതായത് $Q_1 = 21.8$ $Q_3 = 56$

### ദശാംശങ്ങളും ശതാംശങ്ങളും (Deciles and Percentiles)

ഒരു ഡാറ്റയെ പത്ത് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കി മാറ്റുന്ന വിലകളാണ് ദശാംശങ്ങൾ. 9 ദശാംശങ്ങളാണുള്ളത്. ഡാറ്റയെ നൂറ് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കി വിഭജിക്കുന്ന വിലകളാണ് ശതാംശങ്ങൾ. ശതാംശങ്ങളുടെ എണ്ണം 99 ആണ്.

5-ാമത് ദശാംശവും 50-ാമത് ശതാംശവും മധ്യാങ്കത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക

   13, 14, 7, 12, 17, 8, 10, 6, 15, 18, 21, 20

2. ഒരു ചെരുപ്പുകടയിൽ ഒരാഴ്ച നടന്ന വിൽപ്പനയുടെ വിവരങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. താഴ്ന്നതും ഉയർന്നതുമായ ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ചെരുപ്പിന്റെ അളവ് | :4.0 | 4.5 | 5.0 | 5.5 | 6.0 | 6.5 | 7.0 | 7.5 | 8.0 |
| ചെരുപ്പുകളുടെ എണ്ണം | :10 | 18 | 22 | 25 | 40 | 15 | 10 | 8 | 7 |

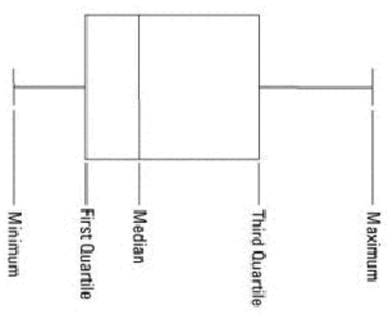
3. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ $Q_1$, $Q_3$ എന്നിവ കാണുക

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| മാർക്കുകൾ | : | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 |
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | : | 3 | 10 | 17 | 7 |
| | | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 |
| | | 6 | 4 | 2 | 1 |

## 5.7. ബോക്സ് പ്ലോട്ട് (Box Plot)

ഒരു ഡാറ്റയുടെ ചതുരംശങ്ങളും ഏറ്റവും വലുതും ഏറ്റവും ചെറുതുമായ സംഖ്യകളും ഉപയോഗിച്ച് ഡാറ്റയുടെ ഗ്രാഫ് രൂപത്തിലുള്ള അവതരണമാണ് ബോക്സ് പ്ലോട്ട്. ഇതു വഴി ഡാറ്റവിതരണത്തെ ചിത്രീകരിക്കാനാണ് ശ്രമിക്കുന്നത്. ബോക്സ് പ്ലോട്ടിനെ ബോക്സ്- വിസ്ക്കർ പ്ലോട്ട് (Box and whisker)എന്നും ബോക്സ് വിസ്കർ ചിത്രം എന്നു പറയാറുണ്ട്.

ഒരു ഡാറ്റയിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ വില മുതൽ ഏറ്റവും വലിയ വില വരെ നീളുന്ന ഒരു രേഖയും അതിൽ $Q_1$ മുതൽ $Q_3$ വരെയുള്ള ഒരു ചതുര പെട്ടിയും ചേർന്ന ഗ്രാഫാണ് ബോക്സ് പ്ലോട്ട്. പെട്ടിയിൽ നിന്നും നീട്ടി വരയ്ക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡങ്ങളെ വിസ്കർ എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. പെട്ടിയ്ക്കകത്ത് വരയ്ക്കുന്ന ലംബമാണ് മധ്യാങ്കം



### വിവരണം 5.35

പതിനൊന്ന് സെക്രട്ടറിമാർക്ക് നടത്തിയ പരീക്ഷയുടെ സ്കോറുകൾ 8, 7, 6, 9, 1, 3, 10, 3. 8, 4, 7 എന്നിവയാണ്. ഇവയെ ഒരു ബോക്സ് പ്ലോട്ട് ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുക.

#### പരിഹാരം

വിലകളെ ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതിയാൽ 1, 3, 3, 4, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10

n = 11

ബോക്സ് പ്ലോട്ട് വരയ്ക്കുന്നതിന് നമുക്ക് താഴെപറയുന്നവ ആവശ്യമുണ്ട്.

ഏറ്റവും ചെറിയ വില= 1

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ -ാമത് വില

$= \left(\frac{11+1}{4}\right) = 3$ -ാമത് വില

$= 3$

മധ്യാങ്കം, $Q_2 = \frac{n+1}{2}$ -ാമത് വില

$=$ 6-ാമത് വില

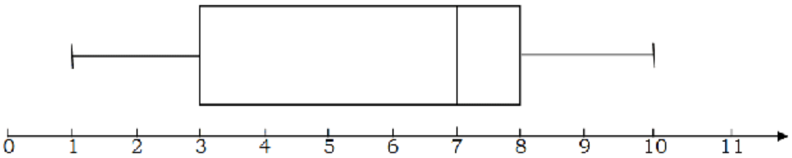
$= 7$

$Q_3 = \frac{3(n+1)}{4}$ -ാമത് വില

$=$ 9-ാമത് വില

$= 8$

ഏറ്റവും വലിയ വില $= 10$



### നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

*ഒരു ഡാറ്റയിലെ വിലകൾ ഒരു കേന്ദ്രവിലയ്ക്ക് ചുറ്റും കൂടിച്ചേരാൻ കാണിക്കുന്ന പ്രവണതയെയാണ് കേന്ദ്രപ്രവണത എന്ന് പറയുന്നത്. മുഴുവൻ ഡാറ്റയെയും പ്രതിനിധീകരിക്കാനുപയോഗിക്കുന്ന ഒരു വിലയാണ് കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനം. പലതരം കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനങ്ങളുണ്ട്. അവ മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ്, ജ്യാമിതീയ മാധ്യം, സന്തുലിത മാധ്യം എന്നിവയാണ്. AM, GM, HM എന്നിവ ഗണിത ശരാശരികളെന്നും മധ്യാങ്കം, മോഡ് എന്നിവ സ്ഥാനീയ ശരാശരികളെന്നും അറിയപ്പെടുന്നു.*

*ഒരു ഡാറ്റയുടെ മാധ്യം എന്നത് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ തുകയെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിച്ച് കിട്ടുന്ന വിലയാണ്. പരിഗണനാ മാധ്യത്തിൽ ഓരോ വിലകളുടെയും പ്രാധാന്യം കൂടി കണക്കിലെടുത്താണ് മാധ്യം കാണുന്നത്. ഒരു വിതരണത്തെ രണ്ട് തുല്യ ഭാഗങ്ങളാക്കി വിഭജിക്കുന്ന വിലയാണ് മധ്യാങ്കം. ഡാറ്റയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ ആവർത്തിക്കുന്ന വിലയാണ് മോഡ് എന്നു പറയുന്നുത്. '$n$' വിലകളുടെ ജ്യാമിതീയ മാധ്യം കാണുന്നതിന് അവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ $n$-ാം മൂലം എടുക്കണം. വർധനവിന്റെ ശരാശരി ശതമാനം, കുറയുന്നതിന്റെ ശരാശരി ശതമാനം തുടങ്ങിയവ കാണുന്നതിന് GM ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരു ഡാറ്റയുടെ സന്തുലിത മാധ്യം അതിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ മാധ്യത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമമാണ്. വിവിധ വ്യവസ്ഥകളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ വേഗതകളുടെ ശരാശരി കാണുന്നതിന് HM ഉപയോഗിക്കുന്നു.*

*AM, GM, HM എന്നിവ സാഖ്യാപര സവിശേഷതകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഡാറ്റയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്നു. മധ്യാങ്കവും മോഡും ഗുണപരമായ സവിശേഷതകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഡാറ്റയിലും ഉപയോഗിക്കുന്നു.*

*ഒരു ഡാറ്റയെ പല തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്ന വിലകളാണ് വിഭജന വിലകൾ. ചതുരംശങ്ങൾ ഡാറ്റയെ നാല് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. ദശാംശങ്ങൾ പത്ത് തുല്യഭാഗങ്ങളും ശതാംശങ്ങൾ നൂറ് തുല്യഭാഗങ്ങളുമായാണ് ഡാറ്റയെ വിഭജിക്കുന്നത്.*

#### പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പഠിക്കുന്നതിലൂടെ പഠിതാവ്,

- കേന്ദ്രപ്രവണതയും കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനങ്ങളും തിരിച്ചറിയാൻ കഴിയുന്നു.
- വിവിധ കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനങ്ങൾ വിശദീകരിക്കാനും വിലയിരുത്തുവാനും കഴിയുന്നു.
- വിഭജന വിലകളായ ചതുരംശം, ദശാംശം, ശതാംശം, എന്നിവ കണ്ടെത്താനും വ്യാഖ്യാനിക്കാനും കഴിയുന്നു.
- ബ്ലോക്സ് പ്ലോട്ടുകൾ രൂപ കൽപ്പന ചെയ്യുന്നു.

#### വിലയിരുത്തൽ ഇനങ്ങൾ

1. ഒരു ശ്രേണിയെ രണ്ട് ഭാഗങ്ങളാക്കി വിഭജിക്കുന്ന വിലയാണ്...............
2. രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രങ്ങൾ സംഗമിക്കുന്നത് .......................... ൽ ആണ്.
3. കേന്ദ്രപ്രവണതാ മാനങ്ങളിൽ ...................... നാണ് ഒരു വില മാത്രമല്ലാത്തത്.

4. രണ്ടാം ചതുരംശം .................. ന് തുല്യമാണ്.
5. ഒരു വിതരണത്തിന്റെ AM, HM ഇവ യഥാക്രമം 10, 8.1 ആയാൽ GM ന്റെ വില (81, 0.81, 9, 2)
6. ഒരു ശ്രേണിയിലെ ഓരോ വിലയേയും 10 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ; മധ്യാങ്കം ...........

   (a) ബാധിക്കുന്നില്ല (b) യഥാർഥ മധ്യാങ്കത്തിന്റെ 10 മടങ്ങ്

   (c) യഥാർഥ മധ്യാങ്കത്തിന്റെ പത്തിലൊന്ന് മടങ്ങ്

   (d) 10 കൂടുന്നു.
7. രണ്ട് വിലകളുടെ GM കാണാൻ കഴിയുന്നത്.

   (a) രണ്ട് വിലയും പോസിറ്റീവായാൽ (b) ഒരു വില പൂജ്യമായാൽ

   (c) ഒരു വില നെഗറ്റീവ് ആയാൽ (d) രണ്ടു വിലയും പൂജ്യമായാൽ
8. മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് എന്നിവ കാണുക

   (a) 12, 17, 17, 39, 41, 44, 54, 67, 82 (b) 123, 115, 98, 107, 115, 109, 113, 98

   (c) 1.2, 1.4, 1.9, 2.0, 2.4, 3.5, 3.9, 4.3, 5.2
9. എട്ട് നവജാത ശിശുക്കളുടെ ഭാരം (കിലോ.ഗ്രാമിൽ) 2.4, 2.8, 3.2, 1.9, 2.7, 4.2, 3.8, 2.2. ആകുന്നു. ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.
10. ഒരു ഉത്തേജക മരുന്നിനോടുള്ള എട്ട് വ്യക്തികളുടെ പ്രതികരണ സമയം ഒരു മനശാസ്ത്രജ്ഞൻ അളന്നത് ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

    0.53, 0.46, 0.5, 0.49, 0.52, 0.53, 0.44, 0.55

    പ്രതികരണ സമയത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.
11. 8 സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 5 ആണ്. ഇതിൽ 7 സ്കോറുകൾ 9, 3, 4, 5, 6, 4, 7 എന്നിവ ആയാൽ എട്ടാമത്തെ സ്കോർ എന്തായിരിക്കും?
12. ഒരാഴ്ചയിലെ ആദ്യ അഞ്ച് ദിവസങ്ങളിൽ ഒരാളുടെ ശരാശരി വരുമാനം 350 രൂപ ആണ്. അയാൾ ആറ് ദിവസം ജോലി ചെയ്താൽ ശരാശരി വരുമാനം 400 രൂപ വീതമാകും. ആറാമത്തെ ദിവസത്തെ വരുമാനം എത്ര?
13. ഒരു ക്ലാസിലെ 30 കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സ് 17 ആണ്. ശരാശരി വയസ്സ് 14.5 ആയ നാല് കുട്ടികൾ ആ ക്ലാസിൽ നിന്നും വിട്ട് പോവുകയും അഞ്ച് പുതിയ കുട്ടികൾ ആ ക്ലാസിലേക്ക് വരികയും ചെയ്തു. അവരുടെ വയസ്സുകൾ യഥാക്രമം 23, 25, 17.5, 19.5, 21 ആണ്. ആ ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ ഇപ്പോഴത്തെ ശരാശരി വയസ്സ് കാണുക.
14. ഒരു ക്ലാസിലെ 60 കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സ് 18 ആണ്. 7 കുട്ടികൾ ആ ക്ലാസിൽ നിന്നു പിരിഞ്ഞ്പോയി. അവരുടെ ശരാശരി വയസ്സ് 16.25 വർഷം ആണ്. പുതിയ 5 കുട്ടികൾ ആ ക്ലാസിൽ ചേർന്നു. അവരുടെ വയസ്സുകൾ യഥാക്രമം 19, 18, 21.5, 23.75, 14 എന്നിവയായാൽ നിലവിലെ ശരാശരി വയസ്സ് കാണുക.

15. 100 വിലകളുടെ മാധ്യം 49 ആണ്. 3 വിലകളായ 60, 70, 80 എന്നിവയ്ക്ക് പകരം 16, 17, 18 എന്നീ വിലകളാണ് പരിഗണിച്ചിരുന്നതെന്ന് പിന്നീട് മനസ്സിലായി. ശരിയായ മാധ്യം കാണുക.

16. 10 നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയം കറക്കി ഫലങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കുന്നു. ഈ പ്രവൃത്തി 1050 പ്രാവശ്യം നടത്തിയപ്പോൾ ലഭിച്ച തലകളുടെ എണ്ണം (x) പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. മാധ്യം കാണുക.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| *f* | 2 | 8 | 43 | 133 | 207 | 260 | 213 | 120 | 54 | 9 | 1 |

17. ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ 150 കുടുംബങ്ങളിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം | : | 10 | 21 | 55 | 42 | 15 | 7 |

കുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക?

18. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം 115.61 ആണ്. ആവൃത്തിയിലെ ചില വിലകൾ നഷ്ടമായിരിക്കുന്നു. അവയെ കണ്ടെത്തുക.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| വിലകൾ : | 110 | 112 | 113 | 117 | 120 | 125 | 128 | 136 | ആകെ |
| ആവൃത്തി : | 25 | ? | 13 | ? | 14 | 8 | 6 | 2 | 100 |

19. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം 68.25 ആണ്. നഷ്ടപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന വില കാണുക.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| വേതനങ്ങൾ | : | 50 | 58 | 60 | 65 | 70 | – | 80 | 100 |
| ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം | : | 2 | 20 | 5 | 35 | 8 | 10 | 16 | 4 |

20. 200 ആൾക്കാരുടെ ആഴ്ച വരുമാനം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മാധ്യം കാണുക.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ആഴ്ചയിലെ വരുമാനം : | 1000-1200 | 1200-1400 | 1400-1600 | 1600-1800 |
| ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം : | 3 | 21 | 35 | 57 |
| | 1800-2000 | 2000-2200 | 2200-2400 | 2400-2600 |
| | 40 | 24 | 14 | 6 |

21. അഭിപ്രായ വോട്ടെടുപ്പിന്റെ ഭാഗമായി ഒരു സംഘടന 200 പേരെ അഭിമുഖത്തിന് വിധേയമാക്കുന്നു. അവരുടെ വയസ്സിന്റെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. വയസ്സിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| വയസ്സ് : | 80-89 | 70-79 | 60-69 | 50-59 | 40-49 | 30-39 | 20-29 | 10-19 |
| ആവൃത്തി : | 2 | 2 | 6 | 20 | 56 | 40 | 42 | 42 |

22. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയിൽ നിന്നും ശരാശരി താപനില കാണുക.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| താപനില($^0$c): | $^-$40-$^-$30 | $^-$30-$^-$20 | $^-$20-$^-$10 | $^-$10-0 |
| ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം: | 10 | 28 | 30 | 42 |
| താപനില($^0$c): | 0-10 | 10-20 | 20-30 | |
| ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം: | 65 | 180 | 10 | |

23. ഒരു ആശുപത്രിയിൽ ഒരു ദിവസം ചികിത്സയ്ക്ക് വിധേയരാകുന്ന 360 രോഗികളുടെ വയസ്സിന്റെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. വയസ്സുകളുടെ മാധ്യം കാണുക.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| വയസ്സ് : | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 |
| രോഗികളുടെ എണ്ണം : | 90 | 50 | 60 | 80 | 50 | 30 |

24. ഒരു പട്ടണത്തിലെ കൈപ്പണിക്കാരുടെ വീട്ടുചെലവുകളുടെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. ശരാശരി ചിലവ് കാണുക.

| ചിലവ് | പണിക്കാരുടെ എണ്ണം | ചിലവ് | പണിക്കാരുടെ എണ്ണം |
|---|---|---|---|
| 100 - 150 | 24 | 300 - 350 | 30 |
| 150 - 200 | 40 | 350 - 400 | 22 |
| 200 - 250 | 33 | 400 - 450 | 16 |
| 250 - 300 | 28 | 450 - 500 | 7 |

25. ഒരു ഇംഗ്ലീഷ് പരീക്ഷയിൽ 134 പെൺകുട്ടികളും 166 ആൺകുട്ടികളും പങ്കെടുക്കുന്നു. ആൺകുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 68.5 ആണ്. ആകെ കുട്ടികളുടെ സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 64.35 ആയാൽ പെൺകുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം കാണുക.

26. ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ ജോലിക്കാരായ 25 പുരുഷന്മാരുടെ ശരാശരി ഉയരം 161 സെ.മീറ്ററും 35 സ്ത്രീകളുടെ ശരാശരി ഉയരം 158 സെ.മീറ്ററുമാണ്. എല്ലാ ജോലിക്കാരുടെയും കൂടിയുള്ള ശരാശരി ഉയരം കാണുക.

27. ഒരു ഭൗതിക ശാസ്ത്ര പാഠ്യക്രമത്തിലെ മൂന്ന് ഭാഗങ്ങളായ ലബോട്ടറി, വ്യാഖ്യാനം, പാരായണം എന്നീ മേഖലകളിൽ ഒരു കുട്ടിക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകൾ യഥാക്രമം 71,78,89 എന്നിവയാണ്. a) സ്കോറുകൾക്ക് നൽകിയിരിക്കുന്ന പരിഗണനകൾ യഥാക്രമം 2,4,5 ആയാൽ ശരാശരി സ്കോർ എന്തായിരിക്കും. b) ഒരേ പരിഗണനയാണ് നൽകുന്നതെങ്കിൽ ശരാശരി സ്കോർ എത്രയായിരിക്കും?

28. ഒരു കുട്ടിക്ക് സാമ്പത്തികശാസ്ത്രം, സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ്, വാണിജ്യശാസ്ത്രം തുടങ്ങിയവയ്ക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ യഥാക്രമം 82,68,89 എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഇവയ്ക്കോരോന്നിനും നൽകിയിരിക്കുന്ന പരിഗണനകൾ യഥാക്രമം 2,3,5, ആണ്. a) ഇവിടെ അനുയോജ്യമായ ശരാശരി ഏത്? b) ശരാശരി കാണുക.

29. 46, 64, 87, 41, 58, 77, 35, 90, 55, 92, 33 എന്നിവയുടെ മധ്യാങ്കം കാണുക. ഇതിൽ 92ന് പകരം 99 ഉം, 41ന് പകരം 43ഉം വില നൽകിയാൽ പുതിയ മധ്യാങ്കം എന്തായിരിക്കും?

30. 4, 7, 8, $x$+1, 2$x$-3, 15, 16, 20 എന്നീ സംഖ്യകൾ ആരോഹണക്രമത്തിലാണ്. ഇതിന്റെ മധ്യാങ്കം 12.5 ആയാൽ '$x$' ന്റെ വില കാണുക.

31. ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതിയിരിക്കുന്ന 11, 12, 14, 18, $x$+2, $x$+4, 30, 32, 35, 41 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ മധ്യാങ്കം 24 ആണ്. '$x$' ന്റെ വില കാണുക.

32. മധ്യാങ്കം കാണുക

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| വരുമാനം | : | 1000 | 1500 | 3000 | 2000 | 2500 | 1800 |
| ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം | : | 24 | 26 | 16 | 20 | 6 | 30 |

33. മധ്യാങ്കം കാണുക.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| വില | : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ആവൃത്തി | : | 6 | 8 | 10 | 14 | 13 | 9 | 4 |

34. 60 മാർക്കിന്റെ ഒരു പരീക്ഷയിൽ 58 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കിന്റെ വിതരണം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു. മധ്യാങ്കം കാണുക.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| മാർക്ക് : | 15-20 | 20-25 | 25-30 | 30-35 | 35-40 | 40-45 | 45-50 | 50-55 | 55-60 |
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം: | 4 | 5 | 11 | 6 | 5 | 8 | 9 | 6 | 4 |

35. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിലെ വേതനങ്ങളുടെ മധ്യാങ്കം കാണുക

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| വേതനം | : | 200-300 | 300-400 | 400-500 | 500-600 | 600-700 |
| ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം | : | 3 | 5 | 20 | 10 | 5 |

36. തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം കാണുക

| മാർക്ക് | കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | മാർക്ക് | കുട്ടികളുടെ എണ്ണം |
|---|---|---|---|
| 45-50 | 10 | 20-25 | 31 |
| 40-45 | 15 | 15-20 | 24 |
| 35-40 | 26 | 10-15 | 15 |
| 30-35 | 30 | 5-10 | 10 |
| 25-30 | 42 | 0-5 | 5 |

37. ഒരു ബഹുതല വിപണന കമ്പനിയുടെ പലശാഖകളിലെ 100 വിൽപ്പനക്കാർക്ക് ലഭിച്ച കമ്മീഷന്റെ (രൂപയിൽ) വിതരണമാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

| കമ്മീഷൻ | ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം | കമ്മീഷൻ | ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം |
|---|---|---|---|
| 150 - 158 | 5 | 186 - 194 | 20 |
| 159 - 167 | 16 | 195 - 203 | 15 |
| 168 - 176 | 20 | 204 - 212 | 3 |
| 177 - 185 | 21 | | |

മധ്യാങ്കം കാണുക

38. കാർ ബാറ്ററികളുടെ വോൾട്ടത 12 വോൾട്ട് ആണ്. ഒരു നിർമാതാവ് 160 ബാറ്ററികളിൽ നടത്തിയ പരിശോധനയുടെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

| വോൾട്ടേജ് | 11.8-12 | 12.1-12.3 | 12.4-12.6 | 12.7-13.1 | 13.2-13.4 | 13.5-13.7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ബാറ്ററികളുടെ എണ്ണം | 18 | 26 | 12 | 78 | 18 | 8 |

വോൾട്ടേജിന്റെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

39. 45 മുൻസിപ്പൽ കോർപ്പറേഷനുകളിലെ ചിലവിനെ (ദശലക്ഷം രൂപയിൽ) സംബന്ധിക്കുന്ന വിതരണം ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു. മധ്യാങ്കം കാണുക.

| ക്ലാസ് | 10-20 | 21-31 | 32-42 | 43-53 | 54-64 | 65-75 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ആവൃത്തി | 2 | 8 | 15 | 7 | 10 | 3 |

40. താഴെപറയുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം 86 ആയാൽ വിട്ടുപോയ ആവൃത്തി കണ്ടുപിടിക്കുക.

| ക്ലാസ്സ് | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 | 100-110 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ആവൃത്തി | 2 | 1 | 6 | 6 | $f$ | 12 | 5 |

41. ഒരു ചെരുപ്പ് നിർമാതാവിന് സഹായകരമാക്കുന്ന ശരാശരി ഏത്?

42. ഒരു ദിവസം ഒരു ചെരുപ്പുകടയിൽ വിറ്റ 15 ചെരുപ്പുകളുടെ അളവുകൾ തന്നിരിക്കുന്നു. 5, 7, 9, 9, 8, 5, 6, 8, 7, 7, 7, 9, 2, 7, 5 മോഡ് കാണുക.

43. ഒരു പകിട 60 പ്രാവശ്യം എറിഞ്ഞപ്പോൾ ലഭിച്ച സ്കോറുകൾ പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. മോഡ് കാണുക.

| സ്കോർ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ആവൃത്തി | 12 | 9 | 8 | 13 | 9 | 9 |

44. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

| ചെരുപ്പിന്റെ അളവ് | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| ആവൃത്തി | 8 | 15 | 23 | 20 | 14 |

45. ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ തൊഴിലാളികളുടെ വയസ്സിന്റെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മോഡ് കാണുക.

| വയസ്സ് | 14-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 60-90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ആവൃത്തി | 12 | 14 | 26 | 35 | 23 | 5 | 1 |

46. മോഡ് കാണുക

| വയസ്സ് | 20-24 | 25-29 | 30-34 | 35-39 | 40-44 | 45-49 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ആവൃത്തി | 20 | 24 | 32 | 28 | 20 | 26 |

47. 80 ബൾബുകളുടെ ജീവിതകാലം ഏറ്റവും അടുത്ത മണിക്കൂറുകളിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയതിന്റെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മോഡ് കാണുക.

| ജീവിതകാലം (മണിക്കൂറിൽ) | 660 - 669 | 670 - 679 | 680 - 689 | 690 - 699 | 700 - 709 | 710 - 719 | 720 - 729 | 730 - 739 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ബൾബുകളുടെ എണ്ണം | 4 | 5 | 12 | 24 | 15 | 10 | 7 | 3 |

48. ഒരു പാർക്കിലെ 87 മരങ്ങളുടെ ഉയരത്തിന്റെ വിതരണമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്

| ഉയരം (മീറ്റർ) | 2-5 | 6-9 | 10-13 | 14-17 | 18-21 | 22-25 | 26-29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| മരങ്ങളുടെ എണ്ണം | 4 | 6 | 14 | 26 | 25 | 7 | 3 |

ഈ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് എന്നിവ കാണുക.

49. ഒരു ചരത്തിന്റെ ഒമ്പത് വിലകളാണ്, 4, 11, 25, 37, 11, 26, 35, 11, p എന്നിവ

a) i) p യുടെ വില അറിയാതെ തന്നെ കണ്ടെത്താൻ കഴിയുന്ന ശരാശരി ഏത്?

ii) ആ ശരാശരി കാണുക.

b) i) p യുടെ വില 30-ൽ കൂടുതലാണെന്നറിയാമെങ്കിൽ,

ii) മറ്റേത് ശരാശരിയാണ് കാണാൻ കഴിയുന്നത്

iii) ആ ശരാശരി കാണുക.

c) അവശേഷിക്കുന്ന ഒരു ശരാശരിയുടെ വില 22 ആയാൽ p യുടെ വില കാണുക.

50. താഴെപ്പറയുന്ന ഓരോ വാക്യത്തിലും ശരാശരി എന്ന് ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഓരോന്നിലേയും ശരാശരി എന്നത് ഏത് കേന്ദ്രപ്രവണതാ മാനമാണെന്ന് തിരിച്ചറിയുക.

a) ഇന്ത്യയിലെ കാറുകളുടെ ശരാശരി നിറം വെള്ളയാണ്.

b) ഒരു പ്രൈമറി സ്കൂളിലെ 8 ക്ലാസുകളിലെ കുട്ടികളുടെ ശരാശരി എണ്ണം 32.25 ആണ്.

c) ഒരു പരീക്ഷയിൽ പകുതി കുട്ടികൾക്ക് ശരാശരി മാർക്കിൽ കൂടുതൽ ലഭിച്ചു.

51. p, 13, 18, 29, 29 എന്നിവയുടെ മോഡ് 29, മാധ്യം 20, മധ്യാങ്കം 18 ആണ്. p യുടെ വില കാണാതെ താഴെ പറയുന്ന വിതരണങ്ങളുടെ മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് എന്നിവ കാണുക.

a) p+2, 15, 20, 31, 31

b) p-5, 8, 13, 24, 24

c) 2p, 26, 36, 58, 58

d) p/2, 6.5, 9, 14.5, 14.5

52. ഒരുകൂട്ടം പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ മോഡ് , മാധ്യത്തിന്റെ ഇരട്ടിയാണ്. ഇതിന്റെ മധ്യാങ്കം 23 ആയാൽ മാധ്യം കാണുക.

53. ഒരു ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യവും മോഡും യഥാക്രമം 50, 45 എന്നിവയാണ്. മധ്യാങ്കം കാണുക.

54. ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ 100 തൊഴിലാളികളുടെ ശരാശരി മാസശമ്പളം 4500 രൂപയാണ്. ശമ്പളത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം 4900 രൂപയായാൽ മോഡ് കാണുക.

55. 4.2, 16.8 എന്നിവയുടെ GM കാണുക.

56. 4, 36 എന്നിവയുടെ GM കാണുക.

57. 8, 16, 62.5 എന്നിവയുടെ GM കാണുക.

58. 18, 16, 22, 12 എന്നിവയുടെ GM കാണുക.

59. "കപിൽ & സൺസ്" എന്ന സ്ഥാപനത്തിന്റെ കഴിഞ്ഞ 5 വർഷങ്ങളിൽ വ്യാപാരത്തിലുണ്ടായ വർദ്ധനവ് ശതാമനം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| വർഷം | : | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 |
| വർധനവ് | : | 7% | 8% | 10% | 12% | 18% |

വർധനവിന്റെ ശരാശരി ശതമാനം കാണുക.

60. സന്തുലിത മാധ്യം (HM) കാണുക.

a) 2, 3, 6 b) 3.2, 5.2, 4.8, 6.1, 4.2

61. ഒരു കാർ 4 ഘട്ടങ്ങളിലായി 50 കി.മീറ്റർ വീതം സഞ്ചരിക്കുന്നു. ആദ്യഘട്ടത്തിൽ 50കി.മീ/മണിക്കൂർ, രണ്ടാംഘട്ടം 20കി.മീ/മണിക്കൂർ, മൂന്നും നാലും ഘട്ടങ്ങൾ യഥാക്രമം 40 കി.മീ/മണിക്കൂർ, 25 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും സഞ്ചരിക്കുന്നു. കാറിന്റെ ശരാശരി വേഗത കാണുക.

62. ഒരാൾ സൈക്കിളിൽ വീട് മുതൽ സ്കൂൾ വരെ 10കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും തിരികെ വീട്ടിലേക്ക് 14കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും സഞ്ചരിക്കുന്നു. ശരാശരി വേഗത കാണുന്നതിന് യോജിച്ച ശരാശരി ഏത്? ആ ശരാശരി കാണുക.

63. ഒരു വിമാനം ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നാല് വശങ്ങളിൽ കൂടി യഥാക്രമം 100, 200, 300, 400 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ശരാശരി വേഗത കാണുക.

64. 8, 6, 4, 3 എന്നീ വിലകൾക്ക് AM>GM>HM എന്ന് തെളിയിക്കുക.

65. 9 കുട്ടികൾക്ക് ഒരു ക്ലാസ് പരീക്ഷയ്ക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളാണ് 38, 7, 43, 25, 20, 15, 12, 18, 11 എന്നിവ. ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

66. ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| മാർക്കുകൾ | : | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | : | 4 | 16 | 20 | 18 | 11 |

67. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ ഒന്നും മൂന്നും ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

| ഉയരം (ഇഞ്ച്) | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം | 2 | 3 | 6 | 15 | 10 | 5 | 4 | 3 | 1 |

68. തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

| മാർക്കുകൾ | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | 5 | 7 | 8 | 12 | 28 | 22 | 10 | 8 |

69. താഴെ പറയുന്ന വിതരണത്തിന്റെ ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

| സ്കോർ | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 | 70-79 | 80-89 | 90-99 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | 1 | 3 | 11 | 21 | 43 | 32 | 9 |

70. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ ബോക്സ് പ്ലോട്ട് വരയ്ക്കുക.

13, 14, 7, 12, 17, 8, 10, 6, 15, 18, 21, 20,

($Q_1$ = 8.5, $Q_3$ = 17.5, $Q_2$ = 13)

**ഉത്തരങ്ങൾ**

| | | |
|---|---|---|
| 1. മധ്യാങ്കം | 2. മധ്യാങ്കം | 3. മോഡ് |
| 4. മധ്യാങ്കം | 5. 9 | 6. b |
| 7. a | 8. a) 41.44, 41, 17 | 8. b) 109.75, 111, 98, 115 |
| 8. c) 2.87, 2.4, 1.46 | 9. 2.9 കി.ഗ്രാം | 10. 0.5025 |
| 11. 2 | 12. 650 | 13. 18 |
| 14. 18.32 | 15. 50.69 | 16. 5.01 |
| 17. 2.35 | 18. 22, 10 | 19. 75 |
| 20. 1768 | 21. 35.8 | 22. 4.29 |
| 23. 39.84 | 24. 266.25 | 25. 59.21 |
| 26. 159.25 | 27. a) 81.73 | 27. b) 79.33 |
| 28. a) പരിഗണനാമാധ്യം | 28. b) 81.30 | 29. 58, 58 |

| | | |
|---|---|---|
| 30. 9 | 31. 21 | 32. 1800 |
| 33. 4 | 34. 38 | 35. 467.5 |
| 36. 27.74 | 37. 180.36 | 38. 12.80 |
| 39. 40.67 | 40. 10 | 41. മോഡ് |
| 42. മോഡ് =7 | 43. 4 | 44. 4 |
| 45. 44.29 | 46. 32.83 | 47. 695.21 |
| 48. മാധ്യം= 15.64 | 48. മധ്യാങ്കം = 16 | 48. മോഡ് = 17.19 |
| 49. a) i) മോഡ് | 49. a) ii) 11 | 49. b) i) മധ്യാങ്കം |
| 49. b) ii) 25 | 49. c) p = 38 | 50. a) മോഡ് |
| 50. b) മാധ്യം | 50. c) മധ്യാങ്കം | 51. a) മാധ്യം = 22 |
| 51. a) മധ്യാങ്കം = 20 | 51. a) മോഡ് = 31 | 51. b) മാധ്യം = 15 |
| 51. b) മധ്യാങ്കം = 13 | 51. b) മോഡ് = 24 | 51. c) മാധ്യം = 40 |
| 51. c) മധ്യാങ്കം = 36 | 51. c) മോഡ് = 58 | 51. d) മാധ്യം = 10 |
| 51. d) മധ്യാങ്കം = 9 | 51. d) മോഡ് = 14.5 | 52. 17.25 |
| 53. 48.33 | 54. 5700 | 55. 8.40 |
| 56. 12 | 57. 20 | 58. 16.61 |
| 59. 10.39% | 60. a) 3 | 60. b) 4.484 |
| 61. 29.63 | 62. 11.67 | 63. 192 |
| 64. AM= 5.25 | 64. GM= 4.9 | 64. HM= 4.57 |
| 64. AM>GM>HM | 65. $Q_1$= 11.5 | 65. $Q_2$= 18 |
| 65. $Q_3$= 31.5 | 66. $Q_1$= 30 | 66. $Q_2$= 40 |
| 66. $Q_3$= 50 | 67. $Q_1$= 61 | 67. $Q_3$= 63 |
| 68. $Q_1$= 34.17 | 68. $Q_2$= 46.43 | 68. $Q_3$= 56.82 |
| 69. $Q_1$= 66.64 | 69. $Q_2$= 75.08 | 69. $Q_3$= 82.94 |

X8L1V6

# 6 പ്രകീർണനം (Dispersion)

## ആമുഖം

വിവിധതരം കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനങ്ങളാണ് കഴിഞ്ഞ അധ്യായത്തിൽ നാം പഠിച്ചത്. ഒരു കേന്ദ്രവില ഉപയോഗിച്ച് ഡാറ്റാവിതരണത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ എങ്ങനെ വിവരിക്കാം എന്നതാണവിടെ ചർച്ച ചെയ്തത്. എന്നാൽ ഈ അളവുകൾ മാത്രമുപയോഗിച്ച് ഒരു വിതരണത്തിന്റെ വ്യക്തമായ ധാരണ രൂപീകരിക്കാൻ നമുക്ക് കഴിയില്ല. താഴെ പറയുന്ന ഡാറ്റകൾ പരിശോധിക്കുക.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 28 | 29 | 30 | 30 | 32 |
| B | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 |
| C | 1 | 2 | 30 | 30 | 87 |

ഈ മൂന്ന് ഡാറ്റകളുടെയും മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് എന്നിവ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ ഇവ തുല്യമാണെന്നും വില 30 ആണെന്നും കാണാം. മൂന്ന് ഡാറ്റയിലും അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം തുല്യമാണ്. എങ്കിലും ഈ മൂന്ന് ഡാറ്റകളും വ്യത്യസ്തമാണ്. ഇവ തമ്മിലുള്ള പ്രധാന വ്യത്യാസം എന്താണ്?

മൂന്ന് ഡാറ്റകളുടെയും ശരാശരികൾ തുല്യമാണെങ്കിലും പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യതിയാനങ്ങൾ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഡാറ്റ C യിലെ വിലകൾ മറ്റ് രണ്ട് ഡാറ്റയിലെ വിലകളേക്കാൾ കൂടുതൽ ചിതറി കിടക്കുന്നു. ഈ മൂന്ന് ഡാറ്റകളും പരിശോധിക്കുമ്പോൾ 'C' യിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളാണ് അതിന്റെ മാധ്യത്തിൽ നിന്നും കൂടുതൽ അകലെയായി വിതരണം ചെയ്തിരിക്കുന്നത്. ശരാശരി വിലയിൽ നിന്നും വ്യതിചലിച്ചു വ്യാപിക്കാനുള്ള ഒരു സംഖ്യാഡാറ്റയുടെ പ്രവണതയുടെ അളവിനെയാണ് ആ ഡാറ്റയുടെ പ്രകീർണനം അല്ലെങ്കിൽ വ്യതിയാനം എന്നു വിളിക്കുന്നത്.

### പ്രകീർണനം (Dispersion)

> ഒരു കേന്ദ്രവിലയിൽ നിന്നും ഒരു ചരത്തിന്റെ വിലകളുടെ വ്യാപനത്തിന്റെ അളവാണ് പ്രകീർണനം.

പ്രകീർണനത്തിന് വിവിധ അളവുകൾ ഉണ്ട് അവ താഴെ പറയുന്നു.

1. പരിധി (Range)
2. ചതുരംശവ്യതിയാനം (Quartile Deviation)
3. വ്യതിയാന മാധ്യം (Mean Deviation)
4. മാനക വ്യതിയാനം (Standard Deviation)

### പ്രകീർണന അളവുകളുടെ സവിശേഷതകൾ

ഒരു നല്ല പ്രകീർണന അളവിന് താഴെ പറയുന്ന സവിശേഷതകൾ ഉണ്ടായിരിക്കണം.

- വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കണം
- എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെയും അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ളതാവണം.
- മനസ്സിലാക്കാൻ ലളിതവും കണ്ടുപിടിക്കാൻ എളുപ്പവുമായിരിക്കണം.
- തുടർ ഗണിതപ്രക്രിയകൾക്ക് പറ്റുന്നതായിരിക്കണം.
- അഗ്ര വിലകളാൽ അമിതമായി സ്വാധീനിക്കപ്പെടുന്നതാവരുത്.

### പ്രകീർണന അളവുകളുടെ പ്രാധാന്യം

- ഡാറ്റയുടെ വ്യതിയാനത്തെക്കുറിച്ച് ധാരണ നൽകുന്നു.
- രണ്ടോ അതിലധികമോ വിതരണങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിന് സഹായിക്കുന്നു.
- ഉയർന്ന തലത്തിലുള്ള സാംഖ്യക വിശകലനങ്ങളിൽ മുഖ്യ പങ്ക് വഹിക്കുന്നു.

## 6.1 പരിധി (Range)

ഒരു ഡാറ്റയിലെ ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയും (H) ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയും (L) തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ് പരിധി (R) .അതായത് $R = H - L$

- പരിധിയുടെ ഉയർന്ന വിലകൾ കൂടുതൽ വ്യതിയാനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

### മേന്മകൾ

- ഇത് ഏറ്റവും ലളിതമായ പ്രകീർണന അളവാണ്
- ഇത് ലളിതമായി മനസ്സിലാക്കുവാനും എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കുവാനും കഴിയുന്നതാണ്.

### ന്യൂനതകൾ

- അഗ്രവിലകൾ മാത്രം കണക്കിലെടുക്കുന്നതിനാൽ അവയാൽ അമിതമായി സ്വാധീനിക്കപ്പെടുന്നു.
- ഇത് പല സന്ദർഭങ്ങളിലും അവലംബിക്കാവുന്ന ഒരു പ്രകീർണന അളവ് അല്ല.

### വിവരണം 6.1

2013 ആഗസ്റ്റിലെ ആദ്യ ആഴ്ചയിൽ ഒരു ഗ്രാം സ്വർണത്തിന്റെ വിലകൾ രൂപയിൽ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

| തിങ്കൾ | ചൊവ്വ | ബുധൻ | വ്യാഴം | വെള്ളി | ശനി |
|---|---|---|---|---|---|
| 2530 | 2500 | 2430 | 2560 | 2680 | 2600 |

ഈ ആഴ്ചയിലെ വിലകളുടെ പരിധി കണ്ടുപിടിക്കുക

**പരിഹാരം**

പരിധി = കൂടിയ വില – കുറഞ്ഞ വില

= 2680-2430

= 250 രൂപ

**പ്രവർത്തനം**

10, 30, 50, 100 എന്ന ശ്രേണി ശ്രദ്ധിക്കുക.

- 30 എന്ന വിലയ്ക്കു പകരം 20 ആയാൽ പരിധി കാണുക.
- 100 എന്ന വില ഒഴിവാക്കി പരിധി കാണുക.

## 6.2 ചതുരംശ വ്യതിയാനം (Quartile Deviation)

അഗ്ര വിലകളെ മാത്രം കണക്കിലെടുക്കുന്നു എന്നതും തുറന്ന ക്ലാസുള്ള വിതരണത്തിന് കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയില്ല എന്നതും പരിധിയുടെ പരിമിതികളാണ്. അഗ്ര വിലകൾക്ക് പകരം ചതുരംശങ്ങളെ ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഈ പരിമിതിയെ മറികടക്കാൻ സാധിക്കും. മൂന്നാം ചതുരംശത്തിന്റെയും ഒന്നാം ചതുരംശത്തിന്റെയും വ്യത്യാസത്തെ ചതുരംശാന്തര പരിധി (Inter Quartile range) എന്നു പറയുന്നു. ഇതിന്റെ പകുതിയെ ചതുരംശവ്യതിയാനം (QD) എന്നും വിളിക്കുന്നു.

ചതുരംശവ്യതിയാനത്തെ അർധ ചതുരംശാന്തര പരിധി എന്നും വിളിക്കുന്നു.

ചതുരംശാന്തര പരിധി = $Q_3 - Q_1$

ചതുരംശ വ്യതിയാനം = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$Q_3$= മൂന്നാം ചതുരംശം, $Q_1$= ഒന്നാം ചതുരംശം

**ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ ചതുരംശ വ്യതിയാനം**

$n$ വിലകളുള്ള ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ ചതുരംശ വ്യതിയാനം കാണുന്നതിന്, അവയെ ആരോഹണക്രമത്തിലാക്കി $Q_1$ , $Q_3$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിച്ച് $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$ കണ്ടാൽ മതിയാകും.

$$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

**വിവരണം 6.2**

11 സ്കൂൾ വിദ്യാർഥികൾ ഒരാഴ്ചയിൽ ടി.വി കാണാൻ ചെലവഴിക്കുന്ന സമയത്തിന്റെ ഡാറ്റ മണിക്കൂറിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. 3, 8.5, 12, 9, 16.5, 9, 14, 20, 18, 19, 20 ചതുരംശവ്യതിയാനം കാണുക.

**പരിഹാരം**

തന്നിരിക്കുന്ന വിലകളെ ആരോഹണ ക്രമത്തിലാക്കിയാൽ

3, 8.5, 9, 9, 12, 14, 16.5, 18, 19, 20, 20

$$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ -ാമത്തെ വില}$$

$$= \left(\frac{11+1}{4}\right) \text{ -ാമത്തെ വില}$$

$$= 3 \text{ -ാമത്തെ വില} = 9$$

$$Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ -ാമത്തെ വില}$$

$$= 3\left(\frac{11+1}{4}\right) \text{ -ാമത്തെ വില}$$

$$= 9 \text{ -ാമത്തെ വില} = 19$$

$$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{19-9}{2} = 5$$

**വേറിട്ട വിതരണത്തിന്റെ ചതുരംശവ്യതിയാനം**

N വിലകളുള്ള ഒരു വേറിട്ട വിതരണത്തിന്റെ ചതുരംശ വ്യതിയാനം കാണുന്നതിന് അവയെ ആരോഹണക്രമത്തിലാക്കി $Q_1$, $Q_3$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിച്ച് $QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ എന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം.

**വിവരണം 6.3**

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ QD കാണുക

| സ്കോർ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | 4 | 7 | 15 | 8 | 7 | 2 |

**പരിഹാരം**

ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കിയാൽ

| സ്കോർ (x) | കുട്ടികളുടെ എണ്ണം (f) | ആരോഹണസഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|---|
| 5 | 4 | 4 |
| 10 | 7 | 11 |
| 15 | 15 | 26 |
| 20 | 8 | 34 |
| 25 | 7 | 41 |
| 30 | 2 | 43 |
| | N = 43 | |

$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ാമത്തെ വില $= \left(\frac{43+1}{4}\right)$ മത്തെ വില

$= 11$ ാമത്തെ വില

$= 10$

$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ ാമത്തെ വില $= 3\left(\frac{43+1}{4}\right)$ ാമത്തെ വില

$= 33$ ാമത്തെ വില

$= 20$

$$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{20-10}{2}$$

$$= 5$$

### തുടർ ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ ചതുരംശ വ്യതിയാനം

ഒരു തുടർ ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ $Q_1$, $Q_3$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കാൻ 5–ാം അധ്യായത്തിലെ 6–ാം ഭാഗത്ത് നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്.

$$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

### ഉദാഹരണം 6.4

ഒരു കോളനിയിലെ ഗാർഹിക വൈദ്യുതി ഉപഭോഗസർവ്വേയുടെ വിവരങ്ങളാണ് താഴെ തന്നിരിക്കുന്നത്.

| യൂണിറ്റ് | 100ൽ താഴെ | 100 - 200 | 200 - 300 | 300 - 400 | 400 - 500 | 500 - 600 | 600 - 700 | 700ന് മുകളിൽ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ഉപഭോക്താക്കളുടെ എണ്ണം | 20 | 21 | 30 | 46 | 20 | 25 | 16 | 10 |

ചതുരംശവ്യതിയാനം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**പരിഹാരം**

ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിപ്പട്ടിക തയാറാക്കുക.

| യൂണിറ്റ് | ആവൃത്തി | സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|---|
| 100ൽ താഴെ | 20 | 20 |
| 100 - 200 | 21 | 41 |
| 200 - 300 | 30 | 71 |
| 300 - 400 | 46 | 117 |
| 400 - 500 | 20 | 137 |
| 500 - 600 | 25 | 162 |
| 600 - 700 | 16 | 178 |
| 700ന് മുകളിൽ | 10 | 188 |
| | N=188 | |

$N = 188$

$\frac{N}{4} = 47$

$\frac{3N}{4} = 141$

$l_1 = 200$

$l_3 = 500$

$m_1 = 41$

$m_3 = 137$

$c_1 = 100$

$c_3 = 100$

$f_1 = 30$

$f_3 = 25$

$$Q_1 = \ell_1 + \left( \frac{\frac{N}{4} - m_1}{f_1} \right) c_1 = 200 + (47 - 41) \times \frac{100}{30} = 220$$

$$Q_3 = \ell_3 + \left( \frac{\frac{3N}{4} - m_3}{f_3} \right) c_3 = 500 + \frac{141 - 137}{25} \times 100 = 516$$

$$Q.D = \frac{516 - 220}{2} = 148$$

**മേന്മകൾ**

- തുറന്ന ക്ലാസുള്ള വിതരണത്തിനും ഇത് കണ്ടുപിടിക്കാം.
- അഗ്ര വിലകളാൽ അമിതമായി സ്വാധീനിക്കപ്പെടുന്നില്ല.

**ന്യൂനതകൾ**

- എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെയും കണക്കിലെടുക്കുന്നില്ല.
- തുടർ ബീജഗണിത പ്രക്രിയകൾക്ക് കഴിയാത്തവയാണ്.

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. ഒരു വലിയ നഗരത്തിലെ 50 കച്ചവടക്കാരുടെ വാർഷിക ലാഭം (ലക്ഷം രൂപയിൽ) കാണിക്കുന്ന പട്ടികയാണ് താഴെ തന്നിരിക്കുന്നത് Q.D കണ്ടുപിടിക്കുക.

| ലാഭം | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 |
|---|---|---|---|---|---|
| കച്ചവടക്കാരുടെ എണ്ണം | 8 | 12 | 20 | 7 | 3 |

2. താഴെ തന്നിരിക്കുന്നത് വിദ്യാർഥികളുടെ ഉയരങ്ങൾ (ഇഞ്ചിൽ) ആണ്. അവയുടെ Q.D കാണുക

   ഉയരം : 55, 54, 57, 67, 60, 61, 58, 63

3. ഒരു കമ്പനിയുടെ 40 ദിവസങ്ങളിലെ ഓഹരി വിലകളുടെ വിതരണം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. Q.D കാണുക.

| വില | 150 | 200 | 190 | 210 | 230 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം | 5 | 5 | 8 | 10 | 5 | 7 |

**പ്രവർത്തനം**

നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ ഉയരം ശേഖരിച്ച് ഝ.ഉ, റേഞ്ച് എന്നിവ കാണുക. ഉത്തരം വിശകലനം ചെയ്യുക.

## 6.3. വ്യതിയാനമാധ്യം (Mean Deviation)

പരിധിയേക്കാൾ മികച്ചതാണ് ചതുരംശവ്യതിയാന മാധ്യം എങ്കിലും ഇത് $Q_1$, $Q_3$ എന്നിവയെ മാത്രം ആശ്രയിക്കുന്നതാണ്. ഇതിനു പരിഹാരമായി എല്ലാ വിലകളേയും ആശ്രയിക്കുന്ന മറ്റൊരു അളവ് അവതരിപ്പിക്കാൻ ശ്രമിക്കുകയാണ് നാം. വ്യതിയാന മാധ്യം എന്നത് തിരഞ്ഞെടുത്ത ഒരു ശരാശരിയിൽ നിന്നും പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ കേവല വ്യതിയാന

ങ്ങളുടെ മാധ്യം ആണ്.

### അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ വ്യതിയാന മാധ്യം

n പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുള്ള ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റ പരിഗണിക്കുക. മീൻഡീവിയേഷൻ താഴെ പറയും പ്രകാരം കണ്ടുപിടിക്കാം.

> വ്യതിയാന മാധ്യം $= \frac{\Sigma|x-A|}{n}$, ഇവിടെ A എന്നത് ഏതെങ്കിലും ഒരു ശരാശരിയാണ്

ഒരു ശരാശരി (A) കണ്ടുപിടിക്കുക. (മീൻ, മീഡിയൻ, മോഡ്) ഓരോ വിലയിൽ നിന്നും ഈ ശരാശരിയിലേക്കുള്ള കേവല വ്യതിയാനം കണ്ടുപിടിക്കുക. (ie $|x \ A|$ )ഈ കേവല വ്യതിയാനങ്ങളുടെ മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

### വിവരണം 6.5

11 വിദ്യാർഥികളെ തെരഞ്ഞെടുത്ത് അവർ ഓരോരുത്തരും സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പരീക്ഷയുടെ തലേ ദിവസം എത്ര മണിക്കൂർ വീതം പഠിച്ചെന്നു ചോദിക്കുന്നു. അവരുടെ ഉത്തരങ്ങൾ 8, 11, 5, 4, 5, 0, 2, 6, 9, 3, 2 ആണ്. മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാന മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

### പരിഹാരം

മാധ്യം $= \frac{\sum x}{n} = \frac{55}{11} = 5$

മാധ്യത്തിൽനിന്നുള്ള വ്യതിയാനമാധ്യം $= \frac{\Sigma\,|\,x - \text{മാധ്യം}\,|}{n}$

| പഠന സമയം | $\|x - \text{മാധ്യം}\|$ |
|---|---|
| 8 | $\|8-5\| = 3$ |
| 11 | $\|11-5\| = 6$ |
| 5 | $\|5-5\| = 0$ |
| 4 | $\|4-5\| = 1$ |
| 5 | $\|5-5\| = 0$ |
| 0 | $\|0-5\| = 5$ |
| 2 | $\|2-5\| = 3$ |
| 6 | $\|6-5\| = 1$ |
| 9 | $\|9-5\| = 4$ |
| 3 | $\|3-5\| = 2$ |
| 2 | $\|2-5\| = 3$ |
| ആകെ | $\Sigma\|x - \text{മാധ്യം}\| = 28$ |

മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനമാധ്യം $= \frac{\Sigma|x - \text{മാധ്യം}|}{n} = \frac{28}{11} = 2.54$

### വേറിട്ട ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ വ്യതിയാനമാധ്യം

N വിലകളുള്ള ഒരു വേറിട്ട ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ വ്യതിയാനമാധ്യം കാണാനുള്ള സമവാക്യം ചുവടെ നൽകുന്നു.

> വ്യതിയാനമാധ്യം $= \frac{\Sigma f|x - A|}{N}$ ഇവിടെ A എന്നത് ഏതെങ്കിലും ഒരു ശരാശരി ആയിരിക്കും.

മീൻ ഡീവിയേഷൻ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി ചുവടെ നൽകുന്നു.

*ഘട്ടം 1*

വ്യതിയാനമാധ്യം ഏത് ശരാശരിയെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയാണ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എന്ന് തീരുമാനിക്കുകയും ആ ശരാശരി കണ്ടുപിടിക്കുകയും ചെയ്യുക. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ശരാശരിയുടെ വിലയെ A എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് പ്രതിനിധീകരിക്കാം.

*ഘട്ടം 2*

ഈ ശരാശരിയിൽ നിന്നും ഓരോ വിലയിലേക്കുമുള്ള വ്യത്യാസത്തിന്റെ കേവല വില, $|x - A|$ കാണുന്നു.

*ഘട്ടം 3*

$|x - A|$ യെ അവയുടെ ആവൃത്തികൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നു. അതായത് $f|x - A|$ കാണുന്നു.

*ഘട്ടം 4*

$$MD = \frac{\sum f\,|X - A|}{N}$$

### ഉദാഹരണം 6.6

ഒരു സാഹിത്യ ക്ലാസിലെ 28 വിദ്യാർഥികൾ ഒരു മാസത്തിൽ വായിച്ച പുസ്തകങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ ആവൃത്തിപ്പട്ടിക തന്നിരിക്കുന്നു.

| പുസ്തകങ്ങളുടെ എണ്ണം | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | 2 | 6 | 12 | 5 | 3 |

മോഡിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാന മാധ്യം (മീൻ ഡീവിയേഷൻ) കാണുക

**പരിഹാരം**

$$\text{വ്യതിയാനമാധ്യം} = \frac{\Sigma f\left|x - \text{മോഡ്}\right|}{N}$$

ഇവിടെ മോഡ് = 2 (ഏറ്റവും കൂടുതൽ ആവൃത്തിയുള്ള വില)

| പുസ്തകങ്ങളുടെ എണ്ണം | $\|x$ - മോഡ്$\|$ | f | f$\|x$ - മോഡ്$\|$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\|0-2\| = 2$ | 2 | 4 |
| 1 | $\|1-2\| = 1$ | 6 | 6 |
| 2 | $\|2-2\| = 0$ | 12 | 0 |
| 3 | $\|3-2\| = 1$ | 5 | 5 |
| 4 | $\|4-2\| = 2$ | 3 | 6 |
| | | N = 28 | $\Sigma f\|x$ - മോഡ്$\|$=21 |

$$\text{വ്യതിയാനമാധ്യം} = \frac{21}{28}$$
$$= 0.75$$

**തുടർ ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ വ്യതിയാനമാധ്യം**

തുടർ ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ വ്യതിയാന മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് വിതരണത്തിന്റെ ശരാശരി കണ്ടുപിടിച്ചതിനുശേഷം ഓരോ ക്ലാസിന്റെയും മധ്യവില കണ്ടുപിടിച്ച് തുടർ ആവൃത്തി വിതരണത്തെ വേറിട്ട ആവൃത്തി വിതരണമാക്കി മാറ്റുക. അതിനു ശേഷം വേറിട്ട ആവൃത്തി വിതരണരീതി പിന്തുടരുക.

**വിവരണം 6.7**

ചുവടെ കൊടുത്ത ഡാറ്റയുടെ മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനമാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

| ഉയരം (സെ.മീ.യിൽ) | 100 - 120 | 120 - 140 | 140 - 160 | 160 - 180 | 180 - 200 |
|---|---|---|---|---|---|
| വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം | 4 | 6 | 10 | 8 | 5 |

**പരിഹാരം**

$$\text{വ്യതിയാനമാധ്യം} = \frac{\Sigma f\left|x - \text{മധ്യാങ്കം}\right|}{N}$$

| ക്ലാസ് | മധ്യവില (x) | ആവൃത്തി (f) | സഞ്ചിതാവൃത്തി | $\lvert x - \text{മധ്യാങ്കം}\rvert$ | $f\lvert x - \text{മധ്യാങ്കം}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 - 120 | 110 | 4 | 4 | $\lvert 110 - 153\rvert = 43$ | 172 |
| 120 - 140 | 130 | 6 | 10 | $\lvert 130 - 153\rvert = 23$ | 138 |
| 140 - 160 | 150 | 10 | 20 | $\lvert 150 - 153\rvert = 3$ | 30 |
| 160 - 180 | 170 | 8 | 28 | $\lvert 170 - 153\rvert = 17$ | 136 |
| 180 - 200 | 190 | 5 | 33 | $\lvert 190 - 153\rvert = 37$ | 185 |
| ആകെ | | 33 | | | 661 |

$$\frac{N}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$$

16.5 സഞ്ചിതാവൃത്തിയുള്ള ക്ലാസ് 140 - 160 ആണ്

∴ മീഡിയൻ ക്ലാസ് = 140 - 160

$$\text{മധ്യാങ്കം} = \ell + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)c}{f}$$

$$= 140 + \frac{(16.5 - 10) \times 20}{10} = 153$$

മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനമാധ്യം

$$= \frac{\Sigma\lvert x - \text{മധ്യാങ്കം}\rvert}{N} = \frac{661}{33} = 20.03$$

### വ്യതിയാന മാധ്യത്തിന്റെ മേന്മകളും ന്യൂനതകളും

***മേൻമകൾ***

- ഇത് എല്ലാ വിലകളെയും ആശ്രയിച്ചുള്ളതാണ്.
- ഏതു വിലയിൽ നിന്നു വേണമെങ്കിലും കണക്കാക്കാം.
- അഗ്രവിലകളുടെ സ്വാധീനം കാര്യമായി ഉണ്ടാകുന്നില്ല.

***ന്യൂനതകൾ***

- വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ചിഹ്നങ്ങൾ അവഗണിക്കുന്നത് കൃത്രിമത്വം ഉണ്ടാക്കുന്നു.
- എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയില്ല.

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1) 30 കുട്ടികളുടെ ഗ്രേഡ് പോയിന്റുകളുടെ ആവൃത്തി വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു

| ഗ്രേഡ് പോയിന്റ് | 8 | 6 | 4 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | 4 | 20 | 5 | 1 |

മോഡിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനമാധ്യം കാണുക

2) നൂറ് കമ്പനികളുടെ വിറ്റുവരവിന്റെ ആവൃത്തിപ്പട്ടിക ചുവടെ നൽകുന്നു.

| വിൽപന (ആയിരത്തിൽ) | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം | 10 | 15 | 25 | 30 | 12 | 8 |

### പ്രവർത്തനം

5, 8, 3, 2, 12 എന്നീ വിലകളുടെ

1) മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനമാധ്യം

2) മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനമാധ്യം

3) മോഡിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനമാധ്യം എന്നിവ കാണുക.

4) ഈ വ്യതിയാന മാധ്യങ്ങളിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില ഏതെന്ന് കണ്ടെത്തുക.

## 6.4 മാനക വ്യതിയാനം (Standard Deviation)

ഒരു ഡാറ്റയുടെ കൂടുതൽ അർഥവത്തായ വ്യതിയാന അളവ് ലഭിക്കുന്നതിനായി നാം മാനക വ്യതിയാനം ഉപയോഗിക്കുന്നു. കാൾപിയേഴ്സനാണ് മാനക വ്യതിയാനം എന്ന ആശയം മുന്നോട്ടുവച്ചത്. ഒരു ഡാറ്റയുടെ മാനക വ്യതിയാനത്തിന്റെ വില കുറവാണ് എന്നത് ആ ഡാറ്റയിലെ വിലകൾ തമ്മിലുള്ള ഉയർന്ന ഏകാത്മകതയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. എല്ലാ വിലകളും തുല്യമായാൽ മാനകവ്യതിയാനം പൂജ്യമായിരിക്കും.

മാധ്യത്തിൽ നിന്നുമുള്ള പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ വ്യതിയാനങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ മാധ്യത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് വർഗമൂലമാണ് മാനകവ്യതിയാനം (SD). ഗ്രീക്ക് അക്ഷരമായ σ ഉപയോഗിച്ചാണ് ഇതു പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത്. ഇത് പ്രകീർണനത്തിന്റെ ഏറ്റവും മികച്ച അളവാണ്.

### സവിശേഷതകൾ

1. മാനക വ്യതിയാനത്തിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞവില പൂജ്യമാകുന്നു.
2. വ്യതിയാനങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക ഏറ്റവും കുറവാകുന്നത് മാധ്യത്തിൽ നിന്നും വ്യതിയാനം കണക്കാക്കുമ്പോഴാണ്.

### അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ മാനക വ്യതിയാനം

'n' വിലകളുടെ മാനക വ്യതിയാനം താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ കണക്കാക്കാം.

$$\text{മാനക വ്യതിയാനം}, \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$$

ഇതിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്ന മറ്റൊരു സൂത്രവാക്യം താഴെ കൊടുക്കുന്നു.

മാനക വ്യതിയാനം , $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$

ഈ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്ന വിധം താഴെ വിവരിക്കുന്നു.

*ഘട്ടം 1*

തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ മാധ്യം, $\bar{x}$ കണക്കാക്കുക.

*ഘട്ടം 2*

ഓരോ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെയും വർഗം ($x^2$) കണക്കാക്കുക.

*ഘട്ടം 3*

$\frac{\Sigma x^2}{n}$ കണക്കാക്കുക. (ഇവിടെ 'n' എന്നത് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണമാണ്)

*ഘട്ടം 4*

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$ കണക്കാക്കുക.

മാനകവ്യതിയാനം , $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$

### വിവരണം 6.8

ഒരു പട്ടണത്തിൽ ഉണ്ടായ റോഡ് അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെപ്പറ്റി തുടർച്ചയായ 11 ആഴ്ചകളിൽ ഒരു സർവെ നടത്തി. അതിന്റെ ഫലങ്ങളാണ് 8, 6, 3, 0, 5, 9, 2, 1, 3, 5, 2 എന്നിവ. റോഡ് അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുക.

**പരിഹാരം**

മാനകവ്യതിയാനം , $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 8 | 6 | 3 | 0 | 5 | 9 | 2 | 1 | 3 | 5 | 2 | $\Sigma x = 44$ |
| $x^2$ | 64 | 36 | 9 | 0 | 25 | 81 | 4 | 1 | 9 | 25 | 4 | $\Sigma x^2 = 258$ |

$$\bar{x} = \frac{44}{11} = 4$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{258}{11} - 4^2}$$

$$= \sqrt{23.45 - 16} = 2.73$$

**വേറിട്ട ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ മാനകവ്യതിയാനം**

'N' പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുള്ള ഒരു വേറിട്ട ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ മാനകവ്യതിയാനം കാണുന്നതിന് താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയും സൂത്രവാക്യവുമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

*ഘട്ടം 1 :* $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N}$ കാണുക

*ഘട്ടം 2 :* $x^2$, $fx^2$ എന്നിവ ഓരോ വിലകൾക്കും കണക്കാക്കുക.

*ഘട്ടം 3 :* $\Sigma fx^2$ കാണുക

*ഘട്ടം 4 :* മാനകവ്യതിയാനം $= \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - (\bar{x})^2}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

മാനകവ്യതിയാനം, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - (\bar{x})^2}$

**ഉദാഹരണം 6.9**

25 കുട്ടികൾക്ക് ഒരു അങ്കഗണിത പരീക്ഷ നടത്തി. അതു പൂർത്തീകരിക്കാനെടുത്ത സമയത്തിന്റെ (മിനിറ്റിൽ) വിതരണം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. സമയത്തിന്റെ മാനകവ്യതിയാനം കണ്ടുപിടിക്കുക.

| സമയം (മിനിറ്റിൽ) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം | 4 | 3 | 10 | 5 | 3 |

**പരിഹാരം**

താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ പട്ടിക തയാറാക്കുക

| x | f | $x^2$ | fx | $fx^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 1 | 4 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |
| 3 | 10 | 9 | 30 | 90 |
| 4 | 5 | 16 | 20 | 80 |
| 5 | 3 | 25 | 15 | 75 |
| | N = 25 | | $\Sigma$ fx = 75 | $\Sigma fx^2 = 261$ |

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{75}{25} = 3$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{261}{25} - 3^2}$$

$$= \sqrt{10.44 - 9} = \sqrt{1.44}$$

$$= 1.2$$

### തുടർ ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ മാനകവ്യതിയാനം

തുടർ ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ ഓരോ ക്ലാസുകളുടേയും മധ്യവിലകൾ കണക്കാക്കി അവയെ വേറിട്ട ആവൃത്തി വിതരണമാക്കി മാറ്റുന്നു. സൂത്രവാക്യവും കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതിയും വേറിട്ട ആവൃത്തി വിതരണത്തിലേതുപോലെ തന്നെയാണ്.

### വിവരണം 6.10

100 എഞ്ചിനീയറിങ് കമ്പനികളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിൽ നിന്നും താഴെപ്പറയുന്ന വിവരങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു. മാനകവ്യതിയാനം കാണുക.

| ലാഭം (കോടിയിൽ) | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| കമ്പനികളുടെ എണ്ണം | 8 | 12 | 20 | 30 | 20 | 10 |

### പരിഹാരം

താഴെ കൊടുത്തരീതിയിൽ പട്ടിക തയാറാക്കുക

| x | f | $x^2$ | fx | $fx^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 25 | 40 | 200 |
| 15 | 12 | 225 | 180 | 2700 |
| 25 | 20 | 625 | 500 | 12500 |
| 35 | 30 | 1225 | 1050 | 36750 |
| 45 | 20 | 2025 | 900 | 40500 |
| 55 | 10 | 3025 | 550 | 30250 |
| | N = 100 | | $\Sigma fx = 3220$ | $\Sigma fx^2 = 122900$ |

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{3220}{100} = 32.2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{122900}{100} - (32.2)^2}$$

$$= \sqrt{192.16} = 13.86$$

### മേന്മകൾ

1. എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെയും അടിസ്ഥാനമാക്കി വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.
2. തുടർ ഗണിത പ്രവർത്തനങ്ങൾ നടത്തുവാൻ പര്യാപ്തമാണ്.
3. പ്രതിരൂപണത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റം മറ്റുള്ള മാനകവ്യതിയാനങ്ങളെക്കാൾ കുറഞ്ഞ അളവിലാണ് ബാധിക്കുന്നത്.

### ന്യൂനതകൾ

1. കണ്ടുപിടിക്കാൻ പ്രയാസമാണ്
2. അഗ്രം തുറന്ന ക്ലാസുകൾളുള്ള വിതരണങ്ങൾക്ക് ഇത് കണ്ടുപിടിക്കുവാൻ സാധ്യമല്ല.

## നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. 10 വ്യക്തികളുടെ ദിവസ വേതനം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുക.

   227, 235, 255, 269, 292, 299, 312, 321, 333, 348

2. ഒരു വില്ലേജിലെ 100 കുടുംബങ്ങളിലെ മാസച്ചെലവാണ് താഴെ പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. മാനകവ്യതിയാനം കാണുക.

| മാസച്ചെലവ് | 0-1000 | 1000-2000 | 2000-3000 | 3000-4000 | 4000-5000 | 5000-6000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം | 18 | 26 | 30 | 12 | 10 | 4 |

### പ്രവർത്തനം

1. ഒരു വിദ്യാർഥി ഒരു പരീക്ഷയിലെ 6 വിഷയങ്ങൾക്ക് തുല്യ സ്കോർ നേടുന്നു. മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കി ഉത്തരം വ്യാഖ്യാനിക്കുക.
2. 40, 42, 38, 44, 46, 48, 50 എന്ന ഡാറ്റ പരിഗണിക്കുക.
   - ഇവയുടെ മാനകവ്യതിയാനം കാണുക
   - ഓരോ വിലയുടേയും കൂടെ 3 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ വിലകളുടെ മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുക.
   - ഓരോ വിലയിൽ നിന്നും 3 കുറച്ചാൽ പുതിയ മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുക.
   - ഓരോ വിലയേയും 3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ പുതിയ മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുക.

- ഓരോ വിലയേയും 3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ പുതിയ മാനകവ്യതിയാനം കണക്കാക്കുക.
- നിങ്ങളുടെ കണ്ടെത്തലുകൾ വ്യാഖ്യാനിക്കുക.

### വ്യതിയാനം (Variance)

വ്യതിയാനം എന്ന ആശയം ആദ്യമായി അവതരിപ്പിച്ചത് ആർ.എ. ഫിഷറാണ്. മാനകവ്യതിയാനത്തിന്റെ വർഗമാണ് വ്യതിയാനം.

$$\text{വ്യതിയാനം} = \sigma^2$$

അല്ലെങ്കിൽ,

$$\text{മാനകവ്യതിയാനം}, \sigma = \sqrt{\text{വ്യതിയാനം}}$$

ഉയർന്നതലത്തിലുള്ള സാംഖ്യക വിശകലനത്തിന് ഇത് വളരെയധികം ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്.

## 6.5 ആപേക്ഷിക പ്രകീർണനമാനങ്ങൾ (Relative Measures of Dispersion)

നമ്മൾ ഇതുവരെ ചർച്ച ചെയ്തത് കേവല പ്രകീർണമാനങ്ങളെ (absolute measures of dispersion) കുറിച്ചാണ്. അതായത് പരിധി, ചതുരംശവ്യതിയാനം, വ്യതിയാന മാധ്യം, മാനക വ്യതിയാനം തുടങ്ങിയവ കേവല പ്രകീർണന മാനങ്ങളാണ്. കാരണം അവ ഒരു ഡാറ്റയിലുള്ള വിലകളുടെ വ്യതിയാനത്തെ അളക്കുകയും അവയുടെ യഥാർഥ യൂണിറ്റിൽ തന്നെ നൽകുകയും ചെയ്യുന്നു. വിവിധ ഡാറ്റകളിലെ യൂണിറ്റുകൾ വ്യത്യസ്തമാവുകയാണെങ്കിൽ ഡാറ്റകളെ തമ്മിൽ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിന് കേവല പ്രകീർണനമാനങ്ങൾ ഒട്ടും അനുയോജ്യമാവുകയില്ല. മാത്രവുമല്ല അവ വ്യതിയാനത്തെക്കുറിച്ചുള്ള തെറ്റായ നിഗമനങ്ങളായിരിക്കും നമുക്ക് നൽകുന്നത്. ഇക്കാരണത്താൽ തന്നെ യൂണിറ്റുകൾക്കതീതമായ പ്രകീർണനമാനങ്ങൾ അത്യന്താപേക്ഷിതമാണ്. എങ്കിൽ മാത്രമേ വിവിധ യൂണിറ്റുകളിലായി ലഭ്യമാക്കിയിട്ടുള്ള ഡാറ്റകളുടെ വ്യതിയാനങ്ങളെ താരതമ്യ പഠനത്തിന് വിധേയമാക്കാൻ സാധിക്കുകയുള്ളൂ. അത്തരം പ്രകീർണനമാനങ്ങളെ ആപേക്ഷിക പ്രകീർണന മാനങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. ഇത് പ്രകീർണനമാനത്തിന്റെയും അതിനുവേണ്ടി പരിഗണിച്ച ശരാശരിയുടെയും അംശബന്ധമായിരിക്കും.

#### ആപേക്ഷിക പ്രകീർണനമാനങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ

- അത് ഒരു അംശബന്ധമായിരിക്കും
- അത് ഒരു സംഖ്യ മാത്രമായിരിക്കും
- അവ യൂണിറ്റുകൾക്കതീതമായിരിക്കും.
- രണ്ടോ അതിലധികമോ ഡാറ്റകളെ താരതമ്യം ചെയ്യാൻ വേണ്ടി ഉപയോഗിക്കുന്നു.

നമ്മൾ ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യുന്ന പ്രധാനപ്പെട്ട രണ്ട് ആപേക്ഷിക പ്രകീർണനമാനങ്ങളാണ്,

1. വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം (Coefficient of variation)
2. ചതുരംശ ഗുണാങ്കം (Coefficient of Quartile Deviation)

### വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം (Coefficient of variation)

രണ്ടോ അതിലധികമോ ഡാറ്റകളുടെ സ്ഥിരത അളക്കുന്നതിന് ഏറ്റവും കൂടുതലായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ഗുണാങ്കമാണ് വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം. മാനക വ്യതിചലന $(\sigma)$ ത്തെ മാധ്യം $(\bar{x})$ കൊണ്ട് ഹരിച്ച് 100 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം ലഭിക്കും.

$$\text{വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം} \quad (CV) = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

രണ്ട് ഡാറ്റകളിൽ കൂടുതൽ സ്ഥിരത പുലർത്തുന്ന ഡാറ്റയെ കണ്ടെത്തണമെങ്കിൽ ആദ്യം നമ്മൾ രണ്ട് ഡാറ്റയുടേയും വ്യതിയാന ഗുണാങ്കങ്ങൾ (CV) കണ്ടുപിടിക്കണം. CV ഏറ്റവും കുറവുള്ള ഡാറ്റയെ നമുക്ക് ഏറ്റവും സ്ഥിരതയുള്ള ഡാറ്റയായി കണക്കാക്കാം.

### വിവരണം 6.11

ഒരേ സ്ഥലത്ത് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന A,B എന്നീ വ്യവസായശാലകളിലെ തൊഴിലാളികളുടെ ആഴ്ച വേതനങ്ങളുടെ ശരാശരികളും മാനക വ്യതിയാനങ്ങളും തന്നിരിക്കുന്നു

| ഫാക്ടറി | ശരാശരി വേതനം$(\bar{x})$ | SD $(\sigma)$ | തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം |
|---|---|---|---|
| A | 500 | 5 | 476 |
| B | 600 | 4 | 524 |

1. ഏതു വ്യവസായശാലയാണ് ആഴ്ച വേതനത്തിനായി കൂടുതൽ തുക ഉപയോഗിക്കുന്നത്?
2. ഏതു വ്യവസായശാലയിലാണ് വ്യക്തിഗത വേതനത്തിന്റെ സ്ഥിരത കൂടുതൽ ഉള്ളത്?

### പരിഹാരം

ഇവിടെ $n_1 = 476 \qquad n_2 = 524$

$\bar{x}_1 = 500 \qquad \bar{x}_2 = 600$

$\sigma_1 = 5 \qquad \sigma_2 = 4$

1. ഫാക്ടറി A യിലെ ആകെ ആഴ്ച വേതനം, $= 500 \times 476$

   $= 238000$

2. ഫാക്ടറി B യിലെ ആകെ ആഴ്ച വേതനം, $= 600 \times 524$

   $= 314400$

ഫാക്ടറി A യിലെ ആകെ ആഴ്ച വേതനം 238000 ഉം ഫാക്ടറി B യിലെ ആകെ ആഴ്ച വേതനം 314400 വും ആണ്. ഇതിൽ നിന്നും ഫാക്ടറി B ആണ് ആഴ്ച വേതനത്തിനായി കൂടുതൽ തുക ഉപയോഗിക്കുന്നതെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

2) ഫാക്ടറി A യുടെ $CV = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$

$$= \frac{5}{500} \times 100 = 1$$

ഫാക്ടറി B യുടെ CV = $\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$

$$= \frac{4}{600} \times 100 = 0.67$$

ഫാക്ടറി B യുടെ CV ഫാക്ടറി A യുടേതിനേക്കാൾ കുറവാണ്. അതിനാൽ ഫാക്ടറി B യാണ് വേതനത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ കൂടുതൽ സ്ഥിരത പുലർത്തുന്നത് എന്ന് പറയാൻ സാധിക്കും.

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

കേരളത്തിലെയും തമിഴ്നാട്ടിലെയും രണ്ട് നഗരങ്ങളിൽ ഒരുൽപ്പന്നത്തിന്റെ വില തുടർച്ചയായ അഞ്ച് വർഷങ്ങളിൽ ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത് പ്രകാരമാണ്.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| തമിഴ്നാട് (രൂപ) | 20 | 22 | 19 | 22 | 23 |
| കേരളം (രൂപ) | 18 | 12 | 10 | 20 | 15 |

ഏത് സംസ്ഥാനത്താണ് സ്ഥിരതയുള്ള വിലയുള്ളത്? നിങ്ങളുടെ ഉത്തരത്തെ സാധൂകരിക്കുക.

**പ്രവർത്തനം**

നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിലെ കുട്ടികളെ രണ്ട് ഗ്രൂപ്പുകളാക്കുക. അവരുടെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പരീക്ഷയുടെ സ്കോറുകൾ ശേഖരിച്ച് കൂടുതൽ സ്ഥിരതയാർന്ന ഗ്രൂപ്പിനെ കണ്ടെത്തുക.

### ചതുരംശ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം (Coefficient of Quartile Deviation)

ഒരു കേവല പ്രകീർണനമാനം ആണല്ലോ ചതുരംശ വ്യതിയാനം (QD). ചതുരംശ വ്യതിയാനത്തെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തി കണ്ടുപിടിക്കാവുന്ന ഒരു ആപേക്ഷിക പ്രകീർണനമാനമാണ് ചതുരംശ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം.

ചതുരംശ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

## 6.6 സഹവ്യതിയാനം (Covariance)

രണ്ടു ചരങ്ങളുടെ രേഖീയ ബന്ധത്തിന്റെ ദൃഢതയുടെ അളവാണ് സഹവ്യതിയാനം ഒരു ദ്വിചര വിതരണത്തിലെ ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പോസിറ്റീവ് ആണോ നെഗറ്റീവ് ആണോ എന്നറിയാൻ സഹവ്യതിയാനം കണ്ടാൽ മതിയാകും.

$Cov(X,Y) = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$ ഇവിടെ n എന്നത് ഡാറ്റയിലെ വിലകളുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

കണക്ക് കൂട്ടാനുള്ള എളുപ്പത്തിന് വേണ്ടി നമുക്ക് മറ്റൊരു സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം.

$$Cov(X,Y) = \frac{\Sigma xy}{n} - \bar{x} \times \bar{y}$$

Cov (X,Y) പോസിറ്റീവ് ആണെങ്കിൽ രണ്ട് ചരങ്ങളും ഒരേ ദിശയിലേക്ക് നീങ്ങുന്നതായി മനസ്സിലാക്കാം. Cov(X,Y) നെഗറ്റീവാകുന്നത് രണ്ടു ചരങ്ങൾ വിപരീതദിശകളിലേക്ക് ചലിക്കുമ്പോഴാണ്. രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിൽ രേഖീയ ബന്ധമൊന്നുമില്ലെങ്കിൽ Cov(X,Y) പൂജ്യമായിരിക്കും.

### വിവരണം 6.12

ഒരു തൊഴിൽശാലയിലെ എട്ട് തൊഴിലാളികളുടെ സേവന കാലവും വാർഷിക വരുമാനവും ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

അവയുടെ സഹവ്യതിചലനം കണ്ടുപിടിക്കുക.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| സേവന കാലം (x) (വർഷത്തിൽ) | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 | 13 | 15 | 16 |
| വാർഷിക വരുമാനം (y) (ആയിരത്തിൽ) | 14 | 17 | 15 | 18 | 16 | 22 | 25 | 25 |

**പരിഹാരം**

$$Cov(X,Y) = \frac{\Sigma xy}{n} - \bar{x} \times \bar{y}$$

| x | y | xy |
|---|---|---|
| 6 | 14 | 84 |
| 8 | 17 | 136 |
| 9 | 15 | 135 |
| 10 | 18 | 180 |
| 11 | 16 | 176 |
| 13 | 22 | 286 |
| 15 | 25 | 375 |
| 16 | 25 | 400 |
| 88 | 152 | 1772 |

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{88}{8} = 11$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{152}{8} = 19$$

$$Cov(x,y) = \frac{\Sigma xy}{n} - \bar{x} \times \bar{y}$$

$$= \frac{1772}{8} - 11 \times 19 = 12.5$$

### നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

*ഈ അധ്യായത്തിൽ പ്രകീർണനം എന്ന ആശയവും കേവല പ്രകീർണന മാനകങ്ങളും ആപേക്ഷിക പ്രകീർണന മാനകങ്ങളും നമ്മൾ ചർച്ച ചെയ്തു. ഒരു കൂട്ടം വിലകളുടെ വ്യതിയാനത്തിന്റെ തോത് അളക്കാൻ കേവല പ്രകീർണനമാനങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇതിൽ പരിധി, ചതുരംശ വ്യതിയാനം എന്നിവ ഡാറ്റകൾക്ക് അവയിൽ നിന്ന് തന്നെയുണ്ടാകുന്ന വ്യതിയാനങ്ങൾ അളന്ന് തിട്ടപ്പെടുത്തുമ്പോൾ വ്യതിയാന മാധ്യം, മാനകവ്യതിയാനം എന്നിവ ഡാറ്റകൾക്ക് അവയുടെ ശരാശരിയിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനമാണ് അളന്നെടുക്കുന്നത്. ആപേക്ഷിക പ്രകീർണന മാനങ്ങൾ യൂണിറ്റുകൾക്ക് അതീതമാണ്. അവ ഉപയോഗിച്ച് രണ്ട് ഡാറ്റകളുടെ വ്യതിയാനങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്യാൻ സാധിക്കും. രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ സഹവ്യതിചലനം ഉപയോഗിച്ച് മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കും.*

#### പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പഠിക്കുന്നതിലൂടെ പഠിതാവ്:

- പ്രകീർണനമാനങ്ങളുടെ പ്രാധാന്യത്തെക്കുറിച്ച് തിരിച്ചറിയുന്നു.
- പരിധി, ചതുരംശവ്യതിയാനം, വ്യതിയാന മാധ്യം, മാനക വ്യതിയാനം എന്നീ പ്രകീർണനമാനങ്ങൾ എന്താണെന്ന് വിശദീകരിക്കാനും അവയുടെ വിലകൾ കണ്ടെത്താനും സാധിക്കുന്നു.
- കേവല പ്രകീർണന മാനങ്ങളും ആപേക്ഷിക പ്രകീർണന മാനങ്ങളും തമ്മിൽ വേർതിരിച്ചറിയുന്നു.

#### വിലയിരുത്തൽ ഇനങ്ങൾ

1. ഒരു ഡാറ്റയിലെ എല്ലാ വിലകളിൽ നിന്നും ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കുറച്ചാൽ വ്യതിചലനം ................

   (കൂടുന്നു, കുറയുന്നു, മാറുന്നില്ല)

2. ഒരു ഡാറ്റയിലെ മുഴുവൻ വിലകളെയും 10 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ മാനകവ്യതിയാനം ................

   (10 മടങ്ങാകുന്നു, പത്തിലൊന്നാകുന്നു, മാറ്റമില്ല)

3. ആദ്യത്തെ 25% വിലകൾ 20ഓ അതിൽ കുറവോ ആയതും അവസാനത്തെ 25% വിലകൾ 50 ഓ അതിൽ കൂടുതലോ ആയതുമായ ഒരു ഡാറ്റയുടെ ചതുരംശവ്യതിയാനം ..............
4. ഒരു ഡാറ്റയുടെ ഏറ്റവും ചെറിയ വില 9 ഉം അതിന്റെ പരിധി 57 ഉം ആയാൽ ഡാറ്റയിലെ ഉയർന്ന വില എത്രയായിരിക്കും?
5. ഒരു ഡാറ്റയുടെ വ്യതിയാനഗുണാങ്കം 50 ഉം മാനകവ്യതിയാനം 20 ഉം ആയാൽ അതിന്റെ മാധ്യം....................
6. 5, 5, 5, 5, 5 എന്നീ വിലകളുടെ മാനക വ്യതിയാനം...................

7. മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ മാധ്യം...................... ആണ്.

8. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശരിയോ തെറ്റോ എന്ന് പറയുക.

(a) പരിധി ഏറ്റവും നല്ല പ്രകീർണനമാനമാണ്.

(b) തുറന്ന ക്ലാസുകളുള്ള ആവൃത്തി വിതരണങ്ങളിൽ ചതുരംശവ്യതിയാനം ആണ് കൂടുതൽ അനുയോജ്യം.

(c) താരതമ്യ പഠനത്തിന് കേവല പ്രകീർണനമാനങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

(d) മീഡിയനിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനങ്ങൾ പരിഗണിക്കുമ്പോഴാണ് വ്യതിയാന മാധ്യം ഏറ്റവും കുറവാകുന്നത്.

(e) മാനക വ്യതിയാനം ഒരിക്കലും നെഗറ്റീവ് ആവുകയില്ല.

9. കേവല പ്രകീർണന മാനങ്ങളും ആപേക്ഷിക പ്രകീർണനമാനങ്ങളും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമെന്ത്?

10. താരതമ്യപഠനത്തിന് ആപേക്ഷിക പ്രകീർണന വ്യതിയാനമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത് എന്തു കൊണ്ട്?

11. ഒരു കൂട്ടം വിലകളുടെ പ്രകീർണനം കൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത് എന്താണ്? എങ്ങിനെയാണ് പ്രകീർണനം അളക്കുന്നത്?

12. ഏതൊക്കെയാണ് വിവിധ കേവല പ്രകീർണനമാനങ്ങൾ?

13. എന്തുകൊണ്ടാണ് മാനകവ്യതിയാനത്തെ ഏറ്റവും മികച്ച പ്രകീർണനമാനമായി പരിഗണിക്കുന്നത്?

14. ഒരു ഡാറ്റയിലെ എല്ലാ വിലകളെയും 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ ചുവടെ പറയുന്നവയ്ക്ക് എന്ത് സംഭവിക്കും.

(a) മാധ്യം

(b) വ്യതിചലനം

(c) മാനകവ്യതിയാനം

15. ഒമ്പത് വിലകളുടെ തുക 360 ആണ്. അവയുടെ മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനത്തിന്റെ വർഗങ്ങളുടെ തുക 288 ആണ്.

(a) മാനകവ്യതിയാനം കാണുക.

(b) വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം കാണുക.

16. അശ്രദ്ധമായി വണ്ടിയോടിച്ചത് മൂലമുണ്ടായ അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണങ്ങൾ ഒരാഴ്ചയിലെ ഏഴ് ദിവസങ്ങളിൽ തിട്ടപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം | 7 | 10 | 4 | 7 | 9 | 3 | 2 |

മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാന മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

17. 52 വിദ്യാർഥികളിൽ നിന്ന് അവർ ദിവസവും ചെലവഴിക്കുന്ന തുകയുടെ വിവരങ്ങൾ ശേഖരിച്ചു. അവ ഇപ്രകാരമാണ്.

| ചെലവഴിച്ച തുക | കുട്ടികളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| 5 | 2 |
| 10 | 5 |
| 15 | 10 |
| 20 | 7 |
| 25 | 8 |
| 30 | 5 |
| 35 | 6 |
| 40 | 4 |
| 45 | 5 |

ഇവയുടെ ചതുരംശ വ്യതിയാനം കാണുക.

18. പുതിയതായി സൃഷ്ടിക്കപ്പെട്ട തസ്തികയിലേക്ക് അപേക്ഷകർക്കായി 5 ദിവസം മാനേജർ അഭിമുഖം നടത്തി. ഓരോ ദിവസവും ഉണ്ടായിരുന്ന ഉദ്യോഗാർഥികളുടെ എണ്ണം യഥാക്രമം 16, 19, 15, 15, 14 എന്നിങ്ങനെയാണ്. വ്യതിചലനം കാണുക.

19. ഒരു ഫാക്ടറി A,B എന്നീ രണ്ടുതരം വൈദ്യുത വിളക്കുകൾ നിർമിക്കുന്നു. അവയുടെ ആയുസ്സുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഒരു പരീക്ഷണത്തിൽ താഴെപ്പറയുന്ന വിവരങ്ങൾ ലഭ്യമായിരിക്കുന്നു.

| ആയുർദൈർഘ്യം (മണിക്കൂറിൽ) | A വിളക്കുകളുടെ എണ്ണം | B വിളക്കുകളുടെ എണ്ണം |
|---|---|---|
| 500 - 700 | 5 | 4 |
| 700 - 900 | 11 | 30 |
| 900 - 1100 | 26 | 12 |
| 1100 - 1300 | 10 | 8 |
| 1300 - 1500 | 8 | 6 |

a) ഏതു വിളക്കിനാണ് ശരാശരി ആയുസ് കൂടുതൽ?

b) ആയുർദൈർഘ്യത്തിൽ കൂടുതൽ സ്ഥിരതയുള്ളത് ഏതു വിളക്കിനാണ്?

20. ചില ജീവനക്കാർ അടച്ച വാർഷികനികുതി വിവരം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

| നികുതി അടച്ചത് (ആയിരത്തിൽ) | 5-10 | 10-15 | 15-20 | 20-25 | 25-30 | 30-35 | 35-40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ജീവനക്കാരുടെ എണ്ണം | 18 | 30 | 46 | 28 | 20 | 12 | 6 |

അർധചതുരംശാന്തരപരിധി കാണുക

21. b mZrÝ rk anb n sX cs ª Sq s¸ « 108 ഹയർസെക്കണ്ടറി വിദ്യാഥികളുടെ I.Q. വിതരണം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

| I.Q. | 90 - 98 | 99 - 107 | 108-116 | 117-125 | 126-134 |
|---|---|---|---|---|---|
| വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം | 6 | 10 | 25 | 15 | 4 |

I.Q. വിന്റെ മാനകവ്യതിയാനം കാണുക.

22. രണ്ടു നഗരങ്ങളിൽ കഴിഞ്ഞ അഞ്ച് വർഷമായുള്ള ഒരു പ്രത്യേക ഉൽപ്പന്നത്തിന്റെ വിലകൾ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| നഗരം A യിലെ വില | 20 | 22 | 19 | 23 | 16 |
| നഗരം B യിലെ വില | 10 | 20 | 18 | 12 | 15 |

ചതുരംശ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഏത് നഗരത്തിലാണ് വിലയിൽ സ്ഥിരതയുള്ളത് എന്നു കാണുക.

23. ഒരു ആശുപത്രിയിൽ റിപ്പോർട്ട് ചെയ്യപ്പെട്ട മോട്ടോർ സൈക്കിൾ അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

| വയസ്സ് | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം | 15 | 49 | 37 | 20 | 6 | 1 |

മധ്യാങ്കം ആധാരമായ വ്യതിയാനമാധ്യം കാണുക.

24. 1000 ആളുകളുടെ വരുമാന വിതരണം ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

| വരുമാനം (കൂടുതൽ) | 1000 | 900 | 800 | 700 | 600 | 500 | 400 | 300 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ആളുകളുടെ എണ്ണം | 0 | 50 | 110 | 200 | 400 | 650 | 825 | 950 | 1000 |

ചതുരംശ വ്യതിയാനം കാണുക

25. ഒരു കോളേജിലെ ബി.കോം. ക്ലാസിലെ 9 വിദ്യാർഥികൾക്ക് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പരീക്ഷ യിൽ ലഭ്യമായ മാർക്കുകൾ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. മാനകവ്യതിയാനവും വ്യതിച ലനവും കാണുക.

| ക്രമനമ്പർ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലെ മാർക്ക് | 5 | 10 | 20 | 25 | 40 | 42 | 45 | 48 | 70 |

26. ഒരു ആശുപത്രിയിൽ ചികിത്സിച്ച ഡയബറ്റിക് രോഗികളുടെ എണ്ണവും അവരുടെ വയസ്സും താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

| വയസ്സ് | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| രോഗികളുടെ എണ്ണം | 3 | 10 | 30 | 40 | 35 | 10 | 7 |

മധ്യാങ്കം അടിസ്ഥാനമായ വ്യതിയാന മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

27. ഒരു വീട്ടുപകരണ വിൽപ്പനശാലയിൽ ഒരാഴ്ച വിൽക്കപ്പെട്ട ടെലിവിഷൻ സെറ്റുകളുടെ എണ്ണം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| സെറ്റുകളുടെ എണ്ണം | 5 | 6 | 7 | 8 | 4 | 3 | 1 |

മാനക വ്യതിയാനവും വ്യതിയാനവും കാണുക.

28. ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ 75% വ്യക്തികളും 5,000 ത്തിന് മുകളിൽ സമ്പാദ്യമുള്ളവരാണ്. എന്നാൽ 25% വ്യക്തികൾക്ക് മാത്രമേ 10,000 ത്തിന് മുകളിൽ സമ്പാദ്യം ഉള്ളൂ. അനുയോജ്യമായ ആപേക്ഷിക വ്യതിയാനം , കേവല ആപേക്ഷിക വ്യതിയാനം എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

29. ഒരു കമ്പനിയുടെ 10 വർഷക്കാലത്തെ പരസ്യച്ചെലവും (y) വിൽപ്പനയും (x) സംബന്ധിച്ച് ഒരു പട്ടിക ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. Cov (X,Y) കണക്കാക്കുക.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| വിൽപ്പന (x) | 50 | 5 | 50 | 40 | 30 | 20 | 20 | 15 | 10 |
| പരസ്യച്ചെലവ് (y) | 700 | 200 | 650 | 500 | 450 | 400 | 300 | 250 | 210 |

**ഉത്തരങ്ങൾ**

1) മാറ്റമില്ല
2) പത്തിലൊന്നാകും
3) 15
4) 66
5) 40
6) 0
7) മാനകവ്യതിയാനം
8) a) തെറ്റ് b) ശരി c) തെറ്റ് d) ശരി e) ശരി
14) a) 2 തവണ b) 4 തവണ c) 2 തവണ
15) $\sigma = 5.66$, CV= 6.28
16) മാധ്യം അടിസ്ഥാനമായ M.D = 2.57
17) Q.D = 10
18) $\sigma^2 = 2.96$
19) a) ശരാശരി ആയുസ് കൂടുതൽ ബൾബ് A യ്ക്ക്
    b) ബൾബ് A യായിരിക്കും കൂടുതൽ സ്ഥിരതയുള്ളത്
20) അർധ ചതുരംശാന്തര പരിധി = 5.48
21) $\sigma = 9.36$

22) A യുടെ ചതുരംശവ്യതിയാന ഗുണാങ്കം = 0.125, B യുടെ ചതുരംശവ്യതിയാന ഗുണാങ്കം = 0.267 അതുകൊണ്ട് നഗരം A യിലെ വില കൂടുതൽ സ്ഥിരതയുള്ളതാണ്.

23) മധ്യാങ്കം ആധാരമായ വ്യതിയാനമാധ്യം= 8.906

24) ചതുരംശ വ്യതിയാനം = 137.5

25) SD = 19.46, വേരിയൻസ് = 378.69

26) മധ്യാങ്കം ആധാരമായ വ്യതിയാനമാധ്യം = 10

27) SD = 2.231, വ്യതിയാനം = 4.979

28) ചതുരംശ വ്യതിയാനം = 2500, ചതുരംശവ്യതിയാന ഗുണാങ്കം = 0.33

29) Cov (X,Y) = 2694.44

V7W1E9

# 7 സ്ക്യൂനതയും കർട്ടോസിസും (Skewness and Kurtosis)

## ആമുഖം

സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ ഡാറ്റയുടെ ഏറ്റവും പ്രധാനപ്പെട്ട സവിശേഷതകളാണ് (കേന്ദ്രപ്രവണത, പ്രകീർണനം) കഴിഞ്ഞ രണ്ട് യൂണിറ്റുകളിൽ ചർച്ച ചെയ്യപ്പെട്ടത്. ഒരു ഡാറ്റയുടെ സവിശേഷതകൾ നിർണയിക്കുന്നതിന് ശരാശരികളുടെയും പ്രകീർണന മാനങ്ങളുടെയും അറിവുകൾക്ക് വളരെ പ്രാധാന്യമുണ്ട്. ശരാശരി എന്നത് ഒരു വിതരണത്തിന്റെ കേന്ദ്രപ്രവണതയെയും പ്രകീർണനം എന്നത് കേന്ദ്രവിലയിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവിനെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഒരു ശരാശരിയുടെ ഇരുഭാഗത്തും വിലകളെ സമമിത (Symmetric) മായി വിതരണം ചെയ്യപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടോ എന്ന് വ്യക്തമാക്കുവാൻ കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനങ്ങൾക്കും പ്രകീർണനമാനങ്ങൾക്കും സാധിക്കുകയില്ല. ഒരു വക്രത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഇരുഭാഗത്തേക്കും ആവൃത്തികളുടെ വ്യാപനം തുല്യമാണെങ്കിൽ ആ വക്രത്തിനെ സമമിത വക്രം (Symmetric Curve) എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ പഠനത്തിന് അതിന്റെ ആവൃത്തി വക്രം സമമിതമാണോ എന്നും അല്ലെങ്കിൽ സമമിതത്തിൽ നിന്നും എത്ര മാത്രം വ്യതിചലിച്ചിരിക്കുന്നു എന്നും അറിയുന്നത് സഹായകരമാണ്. ഒരു ഡാറ്റയിലെ സമമിതത്തിന്റെ അസാന്നിധ്യത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന പദമാണ് ചരിവ് അഥവാ സ്ക്യൂനത (Skewness). ആവൃത്തി വക്രത്തിന്റെ ആകൃതിയെക്കുറിച്ചുള്ള ധാരണ ഉണ്ടാകുന്നതിനു വേണ്ടിയാണ് സ്ക്യൂനത പഠിക്കുന്നത്.

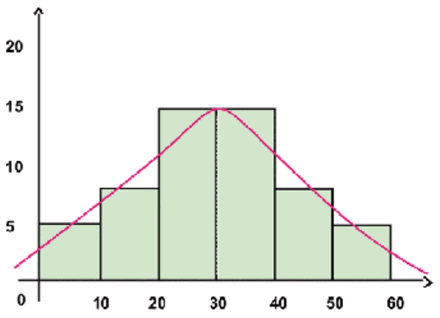
രണ്ടോ അതിലധികമോ വിതരണങ്ങൾ അവയുടെ ആവൃത്തി വക്രത്തിന്റെ പരപ്പിലോ, കൂർമതയിലോ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കാം. ഡാറ്റയുടെ ഈ സവിശേഷത അളക്കുന്നതിനുള്ള രീതിയാണ് കൂർമത അഥവാ കർട്ടോസിസ് (Kurtosis)അതായത്, ഒരു ഡാറ്റയുടെ പരപ്പിന്റെയോ കൂർമതയുടെയോ അളവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന പദമാണ് കൂർമത അഥവാ കർട്ടോസിസ് (Kurtosis).

## 7.1. സ്ക്യൂനത (Skewness)

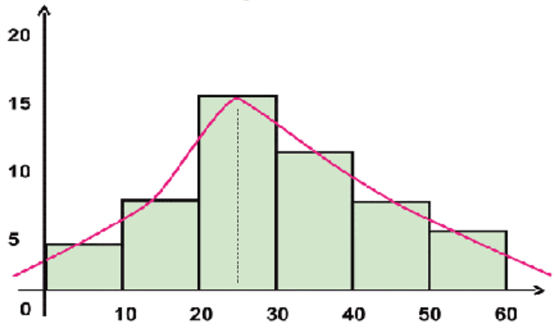
ഒരു ഹയർസെക്കണ്ടറി സ്കൂളിൽ കോമേഴ്സ്, ഹ്യുമാനിറ്റീസ്, സയൻസ് വിഭാഗങ്ങളിൽ പഠിക്കുന്ന വിദ്യാർഥികളുടെ സ്കോറുകളുടെ ആവൃത്തി വിതരണം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത് പരിഗണിക്കുക.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. സ്കോറുകൾ | : | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
| വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം | : | 5 | 8 | 15 | 15 | 8 | 5 |
| 2. സ്കോറുകൾ | : | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
| വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം | : | 4 | 7 | 16 | 11 | 7 | 5 |
| 3 സ്കോറുകൾ | : | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
| വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം | : | 5 | 7 | 11 | 16 | 7 | 4 |

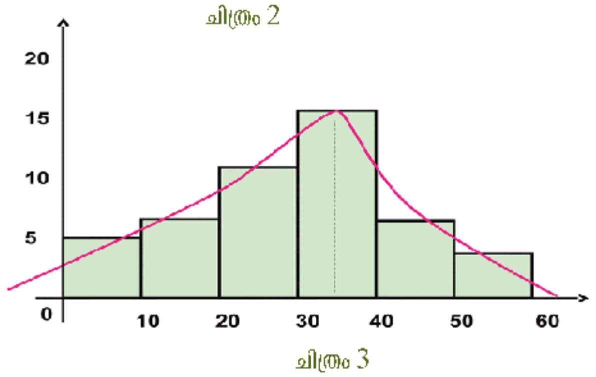
മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന വിതരണങ്ങളുടെ മാധ്യവും വ്യതിചലനവും ഒന്നു തന്നെയാണ്, എന്നാൽ അവയുടെ ആകൃതി ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതായി കാണാം.




ചിത്രം 1




ചിത്രം 2

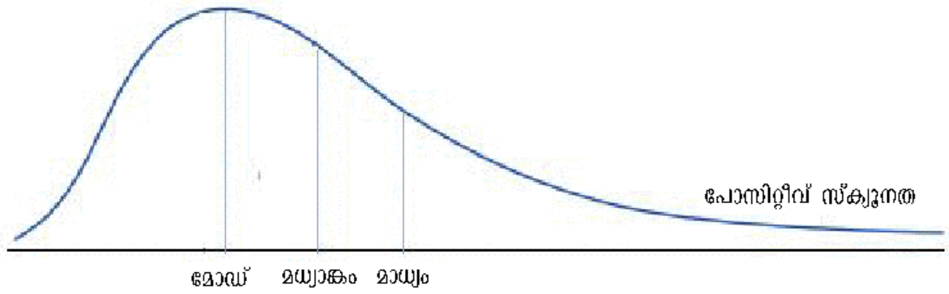



ചിത്രം 3

ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ മോഡിന്റെ വലതുഭാഗവും ഇടതുഭാഗവും പരസ്പരം കണ്ണാടി ബിംബങ്ങൾ പോലെയാണ്. അത്തരം ഡാറ്റാ വിതരണത്തെ സമമിത വിതരണം (Symmetric Distribution) എന്നു പറയുന്നു. രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ മോഡിന്റെ വലതുഭാഗത്ത് കൂടുതൽ ഇനങ്ങളെ നിങ്ങൾക്ക് കാണാൻ കഴിയും. കൂടാതെ ആവൃത്തി വക്രത്തിന് മോഡിന്റെ വലതുഭാഗത്തേക്ക് നീളം കൂടുതലുള്ളതായും കാണാം. ഇതുപോലെ മൂന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ മോഡിന്റെ ഇടതു ഭാഗത്ത് കൂടുതൽ ഇനങ്ങളുള്ളതായും ആവൃത്തി വക്രത്തിന് മോഡിന്റെ ഇടത് ഭാഗത്തേക്ക് നീളം കൂടുതലുള്ളതായും കാണാം. വ്യത്യസ്ത ആവൃത്തി വിതരണങ്ങൾക്ക് ആവൃത്തി വക്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുമ്പോൾ കാഴ്ചയിൽ തന്നെ അവ സമമിതമാണോ അല്ലയോ എന്നു ദർശിക്കാവുന്നതാണ്. ചിത്രങ്ങൾ രണ്ട്, മൂന്ന് എന്നിവ സമമിതമല്ലായെന്നും ചരിവ് (സ്ക്യൂനത) ഉള്ളതാണെന്നും വ്യക്തമാണ്. ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്നും സ്ക്യൂനത രണ്ടു തരത്തിലുള്ളതായി കാണാം. (1) പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത (2) നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത.

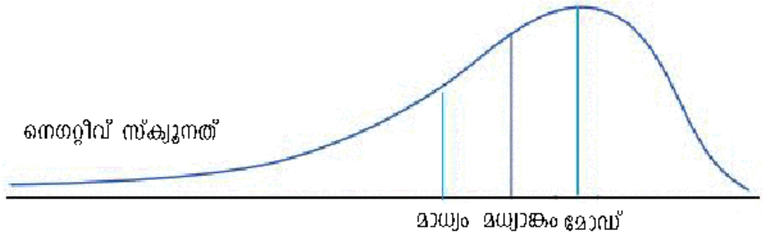
### പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ( Positive Skewness)

മോഡിന്റെ വലതുഭാഗത്ത് കൂടുതൽ ഇനങ്ങൾ കാണപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ അത്തരം ആവൃത്തി വക്രത്തിന് പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട് എന്നു പറയുന്നു. ഇത്തരം ആവൃത്തി വക്രത്തിന് വലതു ഭാഗം നീളം കൂടുതലായിരിക്കും. കൂടാതെ മോഡ് , മധ്യാങ്കം, മാധ്യം എന്നിവയുടെ അളവുകൾ ആരോഹണക്രമത്തിലായിരിക്കും. (മോഡ് < മധ്യാങ്കം < മാധ്യം)




### നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ( Negative Skewness)

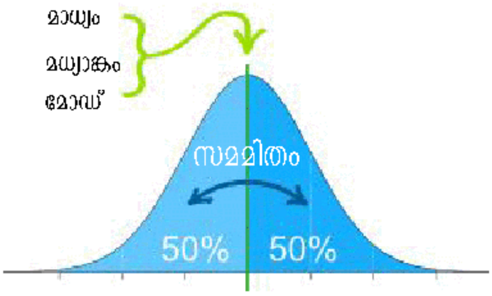
മോഡിന്റെ ഇടതുഭാഗത്ത് കൂടുതൽ ഇനങ്ങൾ കാണപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ അത്തരം ആവൃത്തി വക്രത്തിന് നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട് എന്നു പറയുന്നു. ഇത്തരം ആവൃത്തി വക്രത്തിന് ഇടതുഭാഗം നീളം കൂടുതലായിരിക്കും. കൂടാതെ മോഡ്, മധ്യാങ്കം, മാധ്യം എന്നിവയുടെ അളവുകൾ അവരോഹണക്രമത്തിലായിരിക്കും. (മാധ്യം < മധ്യാങ്കം <മോഡ്)



ഒരു സമമിത ആവൃത്തി വക്രത്തിന്റെ

- മാധ്യം=മധ്യാങ്കം=മോഡ്
- മോഡ് വക്രത്തിന്റെ താഴെയുള്ള ആകെ വിസ്തീർണത്തെ രണ്ട് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.
- ചതുരംശങ്ങൾ മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നും തുല്യ അകലങ്ങളിലായിരിക്കും.

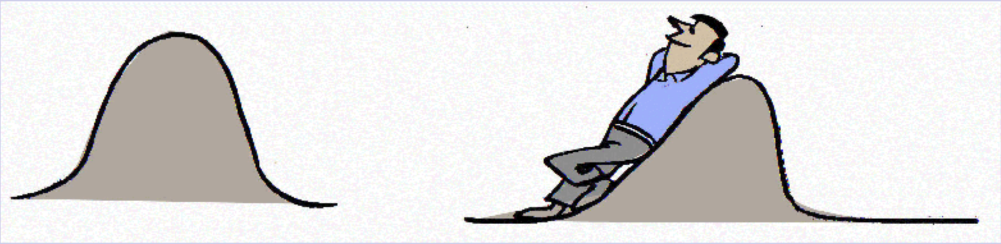
  അതായത് $Q_3$ - മധ്യാങ്കം = മധ്യാങ്കം - $Q_1$ ആയിരിക്കും.




ഒരു പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉള്ള ഡാറ്റയ്ക്ക് $Q_3$ - മധ്യാങ്കം > മധ്യാങ്കം - $Q_1$ ആയിരിക്കും.

അതുപോലെ നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉള്ള ഡാറ്റയ്ക്ക് $Q_3$ - മധ്യാങ്കം < മധ്യാങ്കം - $Q_1$ ആയിരിക്കും.

ഒരു സമമിത വിതരണത്തിൽ മാധ്യവും മധ്യാങ്കവും മോഡും ഒരു വിലതന്നെയാകുന്നു. മോഡിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭാഗത്ത് കുറച്ച് ഇനങ്ങൾ ചേർക്കുകയാണെങ്കിൽ ഒരു വക്രത്തിന്റെ സമമിതം മാറാവുന്നതാണ്. മോഡിന്റെ വലതുഭാഗത്ത് കൂടുതൽ ഇനങ്ങൾ ഉണ്ടാവുകയാണെങ്കിൽ അത്തരം വക്രത്തിന് പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട് എന്നുപറയാം. അങ്ങനെ മോഡിന്റെ വലതുഭാഗത്ത് കൂടുതൽ ഇനങ്ങൾ വരുമ്പോൾ മധ്യാങ്കം, മോഡിൽ നിന്ന് വലതു ഭാഗത്തേക്ക് അൽപ്പം തള്ളപ്പെടുന്നു. ഇതുപോലെ ഇടത് ഭാഗത്ത് കൂടുതൽ ഇനങ്ങൾ ചേരുമ്പോഴും. മേൽപ്പറഞ്ഞരീതിയിലുള്ള മാറ്റങ്ങൾ ദൃശ്യമാകും. അതായത്, സ്ക്യൂനത എന്നത് മാധ്യത്തെയും മധ്യാങ്കത്തെയും മോഡിൽ നിന്ന് ചിലപ്പോൾ വലതുഭാഗത്തേക്കും,ചിലപ്പോൾ ഇടതുഭാഗത്തേക്കും തള്ളി മാറ്റപ്പെടുന്ന അവസ്ഥയാകുന്നു.



### പ്രവർത്തനം 1

താഴെതന്നിരിക്കുന്ന മൂന്ന് വിതരണങ്ങളുടെ മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ്, ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക. തുടർന്ന് വിലകൾ താരതമ്യം ചെയ്യുക.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. സ്കോറുകൾ | : | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 |
| വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം | : | 5 | 12 | 16 | 12 | 5 |
| 2. സ്കോറുകൾ | : | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 |
| വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം | : | 5 | 20 | 12 | 8 | 5 |
| 3. സ്കോറുകൾ | : | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 |
| വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം | : | 5 | 8 | 12 | 20 | 5 |

മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണങ്ങളുടെ ആവൃത്തി വക്രങ്ങൾക്കൂടി വരച്ച് അവയെ താരതമ്യം ചെയ്യുക.

### പ്രവർത്തനം 2

താഴെപറയുന്നവയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുക

a) ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ വിവിധ വിഷയങ്ങളിലെ സ്കോറുകൾ

b) ക്ലാസിലെ വിദ്യാർഥികളുടെ ഉയരങ്ങൾ

c) രക്ഷിതാക്കളുടെ വരുമാനങ്ങളുടെ ഡാറ്റ.

d) വൈദ്യുതി ഉപയോഗം

മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് കണക്കാക്കുക വിതരണങ്ങളുടെ സ്ക്യൂനതയെക്കുറിച്ച് പ്രസ്താവിക്കുക

## 7.2. സ്ക്യൂനതയുടെ അളവുകൾ (Measures of Skewness)

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ആവൃത്തി വക്രം സമമിതത്തിൽ നിന്ന് എത്രമാത്രം അകന്നിരിക്കുന്നുവെന്നും ആ അകൽച്ച ഏത് ദിശയിലാണെന്നും സ്ക്യൂനതയുടെ അളവുകൾ സൂചന നൽകുന്നു. വിതരണത്തിന്റെ രൂപത്തെക്കുറിച്ചും, കേന്ദ്രവിലയിൽ നിന്നും ഇരുഭാഗത്തേയ്ക്കുള്ള വ്യതിയാനങ്ങളുടെ അളവിനെക്കുറിച്ചും അവ വിവരം നൽകുന്നു.

സ്ക്യൂനതയുടെ അളവുകൾ പ്രധാനമായും മൂന്ന് തരത്തിലുണ്ട്.

1. കാൾപിയേഴ്സൻ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം
2. ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം
3. മൊമന്റ്സ് അടിസ്ഥാനമായ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം

### കാൾപിയേഴ്സൻ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം (Karl Pearson's coefficient of Skewness)

ഒരു സമമിത ഡാറ്റയ്ക്ക് മാധ്യവും, മോഡും തുല്യമാണ് എന്ന് നമുക്കറിയാം. സ്ക്യൂനത ഉണ്ടെങ്കിൽ മാധ്യം മോഡിൽ നിന്ന് അകലെയായിരിക്കും അഥവാ മാധ്യത്തിന്റേയും മോഡിന്റെയും വിലകൾ വ്യത്യസ്തങ്ങളായിരിക്കും. മാധ്യം-മോഡ് പോസിറ്റീവ് ആണെങ്കിൽ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവായിരിക്കും. ഈ രീതിയിൽ സ്വാഭാവികമായി സ്ക്യൂനത അളക്കാവുന്നതാണ്.

വ്യത്യസ്ത പ്രകീർണങ്ങളുള്ള രണ്ട് വിതരണങ്ങൾക്ക് മേൽപ്പറഞ്ഞ അളവ് തുല്യമായിവരാൻ സാധ്യതയുള്ളതിനാൽ വിതരണങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിന് ഈ അളവ് അപര്യാപ്തമാണ്. ആയതിനാൽ അളവുകളുടെ യൂണിറ്റികൾക്കതീതമായ സ്ക്യൂനത. ഗുണാങ്കങ്ങൾ നാം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

കാൾപിയേഴ്സൺ കണ്ടെത്തിയ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കത്തെ $S_k$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതിനെ താഴെപറയും പ്രകാരം നിർവചിക്കാം.

$$\text{കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം} = \frac{\text{മാധ്യം - മോഡ്}}{\text{മാനക വ്യതിയാനം}} = \frac{\bar{x} - \text{മോഡ്}}{\sigma}$$

പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനതയ്ക്ക് $S_K>0$ ആയിരിക്കും. (മാധ്യം>മോഡ് ആയതിനാൽ)

നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനതയ്ക്ക് $S_K<0$ ആയിരിക്കും. (മാധ്യം<മോഡ് ആയതിനാൽ)

സമമിതമാണെങ്കിൽ $S_K=0$ ആയിരിക്കും. (മാധ്യം=മോഡ് ആയതിനാൽ).

### വിവരണം 7.1

ഒരു വിതരണത്തിന് മാധ്യം =30, മോഡ് =26.8 വ്യതിചലനം (വേരിയൻസ്) = 64 ആകുന്നു. സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കാണുക. ഉത്തരം വിശകലനം ചെയ്യുക.

**പരിഹാരം**

$\bar{x}$ =30, മോഡ് =26.8, $\sigma^2$ =64, $\sigma$ = 8 എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു.

കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം, $S_k$ $= \frac{x - \text{മോഡ്}}{\sigma}$

$$= \frac{30 - 20.8}{8}$$

$$= 0.40$$

$S_k > 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന് പോസറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട്.

### വിവരണം 7.2

20 ഇനങ്ങളുടെ ഒരു ഗ്രൂപ്പിന് $\sum x^2$ =1452, $\sum x^2$ =144280, മോഡ് =63.7 എന്നിങ്ങനെയാണെങ്കിൽ കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കാണുക.

**പരിഹാരം**

മോഡ് = 63.7 , $\sum x^2$ =1452, $\sum x^2$ =144280 എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1452}{20} = 72.6$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{144280}{20} - \left(\frac{1452}{20}\right)^2}$$

$$= 44.08$$

കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം $S_k = \frac{\bar{x} - \text{മോഡ്}}{\sigma}$

$$= \frac{72.6 - 63.7}{44.08}$$

$$= 0.2019$$

$S_k > 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന് പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട്.

### വിവരണം 7.3

ഒരാഴ്ചയിൽ സിറ്റി ഹോസ്പിറ്റലിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം താഴെ പറയും പ്രകാരമാണ്.

40, 62, 40, 25, 40, 34, 60

കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

**പരിഹാരം**

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{301}{7} = 43$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{14025}{7} - \left(\frac{301}{7}\right)^2} = 12.43$$

മോഡ് $= 40$ (ഏറ്റവും കൂടുതൽ ആവർത്തിച്ച ഇനം)

കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം $S_k = \frac{\bar{x} - \text{മോഡ്}}{\sigma}$

$$= \frac{43 - 40}{12.43}$$

$$= 0.24$$

$S_k > 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന് പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട്.

**വിവരണം 7.4**

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയ്ക്ക് കാൾ പിയേഴ്സൺ രീതിയിൽ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കാണുക. സ്ക്യൂനത സ്വഭാവത്തെക്കുറിച്ച് അഭിപ്രായപ്പെടുക.

| *വില* | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *ആവൃത്തി* | 4 | 7 | 9 | 18 | 15 | 10 | 3 |

**പരിഹാരം**

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{1638}{66} = 24.82$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fx}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{46188}{66} - \left(\frac{1638}{66}\right)^2}$$

$$= 9.16$$

മോഡ് = ഉയർന്ന ആവൃത്തിയുള്ള വില

= 24

കാൾ പിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം,

$$S_k = \frac{\bar{x} - \text{മോഡ്}}{\sigma}$$

$$= \frac{24.82 - 24}{9.16}$$

$$= 0.089$$

$S_k > 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന് പോസറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട്.

**വിവരണം 7.5**

ഒരു ഗ്രാമത്തിൽ വസിക്കുന്ന 100 ആളുകളുടെ മാസവരുമാനത്തിന്റെ വിതരണം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

ഈ വിതരണത്തിന്റെ a) മോഡ് b) മാനകവ്യതിയാനം c)സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം

| വരുമാനം (ആയിരങ്ങളിൽ) | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ആളുകളുടെ എണ്ണം | 12 | 18 | 27 | 20 | 17 | 6 |

എന്നിവ കാണുക.

**പരിഹാരം**

ഉയർന്ന ആവൃത്തി 27 ആയതിനാൽ മോഡൽ ക്ലാസ് 20 – 30 ആകുന്നു.

മോഡ് $= l + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 + f_2 - f_0}\right) c$

ഇവിടെ $l = 20$, $c = 10$, $f_0 = 18$, $f_1 = 27$, $f_2 = 20$

$$\text{മോഡ്} = 20 + \left(\frac{90}{62}\right)$$

$$= 25.625$$

$$\text{മാധ്യം} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{2800}{100} = 28$$

$$\text{മാനക വ്യതിയാനം} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{98300}{100} - 28^2}$$

$$= \sqrt{199} = 14.11$$

$$\text{കാൾ പിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം } S_k = \frac{\bar{x} - \text{മോഡ്}}{\sigma}$$

$$= \frac{28 - 25.625}{14.11}$$

$$= 0.16832$$

$S_k > 0$ ആയതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന് പോസറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട്.

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. 200 ജീവനക്കാർക്ക് ലഭിച്ച ശമ്പളത്തിന്റെ വിതരണ പ്രകാരം ശരാശരി ശമ്പളം 3590 രൂപ, മോഡ് 3660 രൂപ, വ്യതിചലനം 625 രൂപ എന്നിങ്ങനെയാണ്. കാൾ പിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിച്ച് വിശകലനം നടത്തുക.
2. 20 പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ തുക 300 ആകുന്നു. അവയുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക 5000 ഉം, മോഡ് 15 ഉം ആകുന്നു. സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കവും വ്യതിയാന ഗുണാങ്കവും കാണുക.

### ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം (Bowley's Coefficient of Skewness)

സമമിത ഡാറ്റയ്ക്ക് (മധ്യാങ്കം $- Q_1$) = ($Q_3$ - മധ്യാങ്കം) ആയിരിക്കുമെന്ന് നമുക്കറിയാം. എങ്കിൽ സ്ക്യൂനത ഉള്ള ഡാറ്റയ്ക്ക് ഇവ രണ്ടും തുല്യമായിരിക്കില്ലല്ലോ. ആയതിനാൽ ($Q_3$ - മധ്യാങ്കം ) ഉം (മധ്യാങ്കം - $Q_1$ ) ഉം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തെ സ്ക്യൂനത അളക്കുന്നതിനായി ഉപയോഗിക്കാം.

ചതുരംശങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി സർ ആർതർ ബൗളി മറ്റൊരു സ്ക്യൂനത അളവ് നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്. ആ അളവ് ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. അതിനെ സാധാരണയായി $S_B$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം , $S_B = \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2 \times \text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3 - Q_1}$

$S_B$ യുടെ വില -1 നും +1നും ഇടയിലായിരിക്കും.

$S_B > 0$ ആണെങ്കിൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവായിരിക്കും.

$S_B < 0$ ആണെങ്കിൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവായിരിക്കും.

$S_B = 0$ ആണെങ്കിൽ വിതരണം സമമിതമായിരിക്കും.

**കുറിപ്പ്:**

1. തുറന്ന അഗ്രമുള്ള ക്ലാസുകളിൽ ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കമായിരിക്കും അനുയോജ്യം.
2. $S_B$ യുടെയും $S_k$ യുടെയും വിലകൾ തമ്മിൽ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നത് നിരർത്ഥകമാണ്.

### വിവരണം 7.6

ഒരു വിതരണത്തിന്റെ ഉയർന്ന ചതുരംശം, താഴ്ന്ന ചതുരംശം എന്നിവ യഥാക്രമം 56, 44 ആകുന്നു. അതേ ഡാറ്റയുടെ മധ്യാങ്കം 55 ആണെങ്കിൽ സ്ക്യൂനതയുടെ സ്വഭാവം തിരിച്ചറിയുക.

**പരിഹാരം**

$Q_1 = 44$, $Q_3 = 56$, മധ്യാങ്കം = 55 എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു

ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം, $S_B = \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2 \times \text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{56 + 44 - 2 \times 55}{56 - 44}$$

$$= -0.83$$

$S_B < 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ് ആയിരിക്കും.

### വിവരണം 7.7

ഒരു ഡാറ്റയിലെ 25% പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ 70 ന് മുകളിലും 50% പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ 38 ൽ താഴെയും, 75% പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ 30 ന് മുകളിലുമാണ്. സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിച്ച് ഉത്തരം വ്യാഖ്യാനിക്കുകയും ചെയ്യുക.

**പരിഹാരം**

25% പ്രാപ്താങ്കങ്ങളും 70 ന് മുകളിലായതിനാൽ , $Q_3$ =70 ആണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. അതുപോലെ 50% പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ 38 ൽ താഴെയാണ് എന്നതുകൊണ്ട് മധ്യാങ്കം =38 എന്നും, 75% പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ 30 ന് മുകളിലായതിനാൽ $Q_1$ =30 എന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം, $S_B = \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2 \times \text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{70+30-2\times 38}{70-30}$$

$$= 0.6$$

$S_B > 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവ് ആണ്.

### വിവരണം 7.8

ഒരു കൂട്ടം ഇനങ്ങളുടെ ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം 0.8 ഉം, ചതുരംശങ്ങളുടെ തുക 80 ഉം, മധ്യാങ്കം 30 ഉം ആകുന്നു. ഉയർന്ന ചതുരംശത്തിന്റേയും താഴ്ന്ന ചതുരംശത്തിന്റേയും വിലകൾ കാണുക.

**പരിഹാരം**

$S_B$=0.8, $Q_1 + Q_3$=80, മധ്യാങ്കം =30 തന്നിരിക്കുന്നു.

ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം , $\dfrac{Q_3 + Q_1 - 2 \times \text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3 - Q_1}$

$\because Q_3 = 80 - Q_1$

$$0.8 = \frac{80-2\times 30}{(80-Q_1)-Q_1}$$

$$0.8 = \frac{20}{80-2Q_1}$$

അതായത് , $Q_1$=27.5, $Q_3$=52.5

**വിവരണം 7.9**

15 വിദ്യാർഥികൾക്ക് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പരീക്ഷയിൽ ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ താഴെതന്നിരിക്കുന്നു. 15, 20, 20, 21, 22, 22, 24, 28, 28, 29, 30, 32, 25, 33, 35. സ്ക്യൂനതയുടെ ചതുരംശ ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

**പരിഹാരം**

തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റ ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതുന്നു.

15, 20, 20, 21, 22, 22, 24, 25, 28, 28, 29, 30, 32, 33, 35

$$Q_1 = \left[\frac{n+1}{4}\right] \text{ -ാം ത്തെ ഇനം } = 4 \text{ -ാം ഇനം } = 21$$

$$\text{മധ്യാങ്കം } = \left[\frac{n+1}{2}\right] \text{ -ാം ത്തെ ഇനം } = 18 \text{ -ാം ഇനം } = 25$$

$$Q_3 = \left(\frac{3(n+1)}{4}\right) \text{ -ാം ത്തെ ഇനം } = 12 \text{ -ാം ഇനം } = 30$$

$$\text{ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം , } S_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\times\text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{30+21-2\times 25}{30-21}$$

$$= 0.11$$

$S_B > 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവ് ആകുന്നു.

**വിവരണം 7.10**

ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ 124 തൊഴിലാളികളുടെ ദിവസവേതനം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

| വേതനം (രൂപയിൽ) | 200 | 250 | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 | 550 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം | 10 | 15 | 18 | 30 | 26 | 15 | 8 | 2 |

1. ചതുരംശങ്ങൾ, 2. സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം എന്നിവ കാണുക.

**പരിഹാരം**

| $x$ | സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|
| 200 | 10 |
| 250 | 25 |
| 300 | 43 |
| 350 | 73 |
| 400 | 99 |
| 450 | 114 |
| 500 | 122 |
| 550 | 124 |

$$Q_1 = \left[\frac{n+1}{4}\right] \text{-ാമത്തെ ഇനം } = 31.25\text{-ാം ഇനം } = 300$$

$$\text{മധ്യാങ്കം } = \left[\frac{n+1}{2}\right] \text{-ാമത്തെ ഇനം } = 62.5\text{-ാം ഇനം } = 350$$

$$Q_3 = \left(\frac{3(n+1)}{4}\right) \text{-ാമത്തെ ഇനം } = 93.75\text{-ാം ഇനം } = 400$$

$$\text{ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം , } S_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2 \times \text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{400+300-2\times350}{400-300}$$

$$= 0$$

$S_B=0$ ആയതിനാൽ വിതരണം സമമിതമാകുന്നു.

**വിവരണം 7.11**

20 കുടുംബങ്ങളുള്ള ഒരു കോളനിയിലെ ആളുകളുടെ പ്രായത്തിന്റെ വിതരണം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

| പ്രായം (വർഷത്തിൽ) | 0-20 | 20-40 | 40-60 | 60-80 | 80-100 |
|---|---|---|---|---|---|
| അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം | 4 | 10 | 15 | 20 | 11 |

ചതുരംശ ഗുണാങ്കം ഉപയോഗിച്ച് മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ സ്ക്യൂനതയുടെ സ്വഭാവം തീരുമാനിക്കുക.

**പരിഹാരം**

| പ്രായം | അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം | സഞ്ചിതാവൃത്തി |
|---|---|---|
| 0 -20 | 4 | 4 |
| 20-40 | 10 | 14 |
| 40-60 | 15 | 29 |
| 60-80 | 20 | 49 |
| 80-100 | 11 | 60 |

അധ്യായം 5 ലെ പോലെ ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

$$Q_1 = 40 + \left(\frac{15-14}{15}\right)20 = 41.33$$

$$\text{മധ്യാങ്കം} = 60 + \left(\frac{30-29}{20}\right)20 = 61$$

$$Q_3 = 60 + \left(\frac{30-29}{20}\right)20 = 76$$

$$\text{ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം , } S_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\text{മീഡിയൻ}}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{76+41.33-2\times61}{76-41.33}$$

$$= 0.1347$$

$S_B < 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ് ആകുന്നു.

**വിവരണം 7.12**

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് ഗ്രൂപ്പുകളുടെ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം ചതുരംശം ഉപയോഗിച്ച് കാണുക. തുടർന്ന് ഏത് വിതരണമാണ് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത എന്ന് വിശദമാക്കുക.

| സ്കോറുകൾ | ഗ്രൂപ്പ് A | ഗ്രൂപ്പ് B |
|---|---|---|
| 55-58 | 12 | 20 |
| 58-61 | 17 | 22 |
| 61-64 | 23 | 25 |
| 64-67 | 18 | 13 |
| 67-70 | 11 | 7 |

**പരിഹാരം**

ഗ്രൂപ്പ് A യിൽ,

$$Q_1 = 58+\left(\frac{20.25-12}{17}\right)3 = 59.46$$

$$\text{മധ്യാങ്കം} = 61+\left(\frac{40.5-29}{23}\right)3 = 62.5$$

$$Q_3 = 64+\left(\frac{60.75-52}{18}\right)3 = 65.46$$

ഗ്രൂപ്പ് A യുടെ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം

$$S_B = \frac{Q_3+Q_1-2\times\text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3-Q_1}$$

$$= \frac{65.46 + 59.46 - 2 \times 62.5}{65.46 - 59.46}$$

$$= -0.013$$

ഗ്രൂപ്പ് B യിൽ,

ഗ്രൂപ്പ് A യിലെ പോലെ കാണുകയാണെങ്കിൽ $Q_1$ = 58.24, മധ്യാങ്കം =61.18, $Q_3$ = 63.79 എന്നിങ്ങനെ ലഭിക്കുന്നു.

ഗ്രൂപ്പ് B യുടെ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം ,

$$S_B = \frac{Q_3+Q_1-2\times\text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3-Q_1}$$

$$= \frac{63.79+58.24-2\times61.18}{63.79-58.24}$$

$$= -0.0595$$

$S_B$ യുടെ അളവ് ഗ്രൂപ്പ് A യെക്കാളും കൂടുതൽ ഗ്രൂപ്പ് B യ്ക്കാകുന്നു.

അതിനാൽ ഗ്രൂപ്പ് B യുടെ സ്ക്യൂനത ഗ്രൂപ്പ് A യെക്കാൾ കൂടുതലാണ്.

### 7.3. മൊമന്റുകൾ (Moments)

ഒരു ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ വിവിധ സവിശേഷതകളായ കേന്ദ്ര പ്രവണത,വ്യതിയാനങ്ങൾ സ്ക്യൂനത, കർട്ടോസിസ് എന്നിവ വിശദീകരിക്കുവാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് സമിരാങ്കങ്ങളാണ് മൊമന്റുകൾ.

മാധ്യം ഉപയോഗിച്ച് മൊമന്റുകൾ കണക്കുകൂട്ടുന്നു. ഒരു വിതരണത്തിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ഓരോ കൃതികളുടെയും മാധ്യങ്ങളെ മൊമന്റുകൾ എന്നറിയപ്പെടുന്നു. വ്യതിയാനങ്ങൾ മാധ്യത്തിൽ നിന്നാണ് എടുത്തതെങ്കിൽ മൊമന്റു I sf tI {µ db samaâ þ Ä (Central Moment) എന്നു പറയുന്നു. കേന്ദ്രീയ മൊമന്റുകളെ µ (മ്യു) എന്ന ഗ്രീക്ക് അക്ഷരം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ആദ്യനാല് കേന്ദ്രീയ മൊമന്റുകൾ താഴെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

$x_1, x_2, \ldots x_n$ എന്നിവ 'n' പ്രാപ്താങ്കങ്ങളായാൽ,

ഒന്നാം കേന്ദ്രീയ മൊമന്റ്, $\mu_1 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})}{n} = 0$

(പ്രാപ്താങ്ങൾക്ക് അവയുടെ മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനങ്ങളുടെ തുക എല്ലായ്പ്പോഴും പൂജ്യമായിരിക്കും.)

രണ്ടാം കേന്ദ്രീയ മൊമന്റ്, $\mu_2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n} =$ വ്യതിചലനം

മൂന്നാം കേന്ദ്രീയ മൊമന്റ്, $\mu_3 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^3}{n}$

നാലാം കേന്ദ്രീയ മൊമന്റ്, $\mu_4 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^4}{n}$

#### മൊമന്റ് അടിസ്ഥാനമായ സ്ക്യൂനതാഗുണാങ്കം (Coefficient of Skewness based on Moments)

മൊമന്റ് അടിസ്ഥാനമായുള്ള സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം, $\beta_1$ (ബീറ്റാ ഒന്ന്)ന്റെ നിർവചനം താഴെ പറയും പ്രകാരമാണ്.

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

$\beta_1$ =0 ആയാൽ വക്രം സമമിതമായിരിക്കും. $\beta_1$ ന്റെ വില വലുതാകുന്ന വിതരണത്തിന് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത ഉണ്ടായിരിക്കും. $\mu_3^2$ ഉം $\mu_2^3$ ഉം എല്ലായ്പ്പോഴും പോസ്റ്റീവ് വിലകളായതിനാൽ $\beta_1$ കാണുന്നതിലൂടെ സ്ക്യൂനത ഏത് ദിശയിലാണെന്ന് അറിയാൻ കഴിയില്ല. ആയതിനാൽ കാൾപിയേഴ്സൺ $\gamma_1$, (ഗാമാ ഒന്ന്) എന്ന അളവ് നിർവചിച്ചു.

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \sqrt{\beta_1}$$

$\mu_3 < 0$ ആയാൽ $\gamma_1 < 0$ ആവുകയും വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ് ആകുകയും ചെയ്യുന്നു.

$\mu_3 > 0$ ആയാൽ $\gamma_1 > 0$ ആവുകയും വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവ് ആകുകയും ചെയ്യുന്നു.

$\mu_3 = 0$ ആയാൽ $\gamma_1 = 0$ ആകുന്നു. വിതരണം അപ്പോൾ സമമിതമായിരിക്കും. അതായത് $\mu_3$ സ്ക്യൂനതയുടെ സ്വഭാവം തീരുമാനിക്കുന്നതായി കാണാം.

### വിവരണം 7.13

ഒരു വിതരണത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ നാല് സെൻട്രൽ മൊമന്റുകൾ 0, 14.75, 39.75, 142.31 എന്നിങ്ങനെയാണ്. സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കാണുക. സ്ക്യൂനസ്സിന്റെ പ്രകൃതം പ്രസ്താവിക്കുക.

**പരിഹാരം**

$\mu_2 = 14.75$ , $\mu_3 = 39.75$ എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു.

സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം

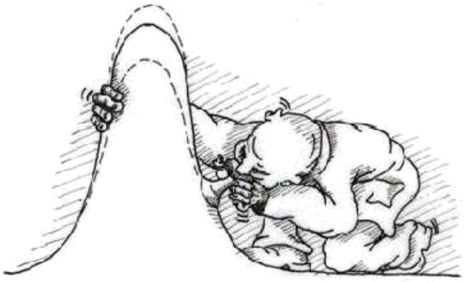
$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

$$= \frac{39.75^2}{14.75^3}$$

$$= 0.4924$$

$\mu_3 > 0$, ആകയാൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവ് ആകുന്നു.

## 7.4 കർട്ടോസിസ് (Kurtosis)

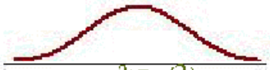


രണ്ടോ അതിലധികമോ വിതരണങ്ങൾക്ക് ഒരേ ശരാശരി, വ്യതിയാനം, സ്ക്യൂനത ഉണ്ടായിരിക്കാം എങ്കിലും അവയുടെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ മോഡിന് ചുറ്റും കേന്ദ്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നത് വ്യത്യസ്ത അളവിലായിരിക്കുന്നത് കാണാം. ആയതിനാൽ അവ വ്യത്യസ്ത ഉയരളവുകൾ (കൂർമത) കാണിക്കുന്നു. ഒരു ആവൃത്തി വക്രത്തിന്റെ ഉയർച്ചയുടെയോ പരപ്പിന്റെയോ അളവിനെ കർട്ടോസിസ് എന്ന് പറയുന്നു.

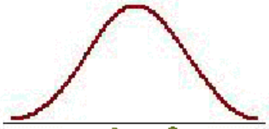
### വിവിധതരം കർട്ടോസിസുകൾ (Types of Kurtosis)

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വക്രങ്ങൾ നോക്കുക.

ചിത്രം (1)

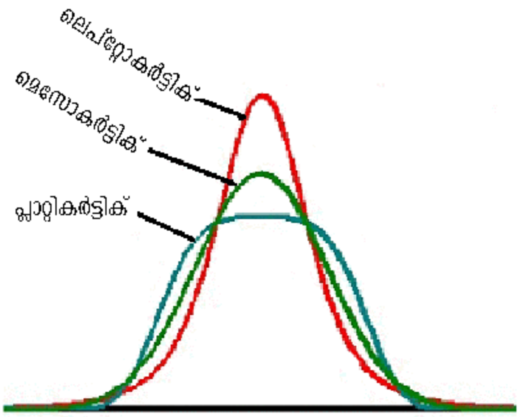


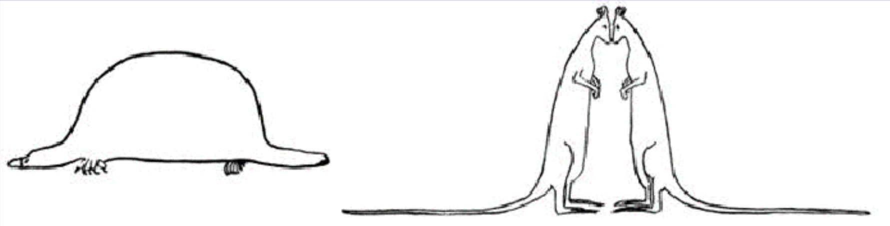
ചിത്രം (2)



ചിത്രം (3)

എല്ലാ വക്രങ്ങളും സമമിതമാണെങ്കിലും ഉയരളവ് (കൂർമത) വ്യത്യസ്തമായിരിക്കുന്നതായി കാണാം. ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ വക്രം മറ്റുള്ളവയേക്കാൾ കൂടുതൽ കൂർമതയുള്ളതാകുന്നു. ഇതിനെ ലെപ്റ്റോകർട്ടിക് (lepto kurtic) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ചിത്രം 2ൽ, വക്രം മറ്റുള്ളവയേക്കാൾ കുറവ് കൂർമത അഥവാ കൂടുതൽ പരപ്പ് ഉള്ളതാകുന്നു, അതിനെ പ്ലാറ്റികർട്ടിക് (platy kurtic) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ചിത്രം 3ൽ, വക്രം കൂടുതൽ കൂർമ്മതയോ, കൂടുതൽ പരപ്പോ ഉള്ളതായി കാണുന്നില്ല. ഇങ്ങനെ മിതത്വ കൂർമതയുള്ള വക്രങ്ങളെ മെസോകർട്ടിക് (meso kurtic) എന്നു വിളിക്കുന്നു. മെസോകർട്ടിക് വക്രങ്ങൾ  നോർമൽ വക്രം എന്നും അറിയപ്പെടാറുണ്ട്.



'കുമിയുക' അഥവാ, 'വീർക്കുക' എന്നർഥം വരുന്ന ഗ്രീക്ക് പദത്തിൽ നിന്നും ഉരുത്തിരിഞ്ഞുവന്ന പദമാണ് കർട്ടോസിസ്. വിഖ്യാതനായ ബ്രിട്ടീഷ് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിഷ്യൻ വില്യം. എസ്. ഗോസറ്റ് തന്റെ ഗവേഷണപത്രമായ 'എറേഴ്സ് ഓഫ് റൂട്ടിൻ അനാലിസിസിൽ കർട്ടോസിസിനെക്കുറിച്ച് തമാശ രൂപേണ രേഖപ്പെടുത്തിയതിങ്ങനെയാണ്:- ചെറുവാലുകളുള്ള പ്ലാറ്റിപ്പസ് ജീവി പതുങ്ങി കിടക്കുന്നതുപോലെയുള്ള രൂപമാണ് പ്ലാറ്റി കർട്ടികിന്റേത്. ലെപ്റ്റോകർട്ടിക്കാകട്ടെ, നീളമേറിയ വാലുകളുള്ള രണ്ട് കംഗാരുക്കൾ മുഖാമുഖം നിൽക്കുന്നത് പോലെയുമാണ്. ഗോസറ്റ് വരച്ച രൂപം പുനരാവിഷ്കരിച്ചതാണ് മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്നത്.

## 7.5 കർട്ടോസിസിന്റെ അളവുകൾ (Measures of Kurtosis)

കർട്ടോസിസ് അളക്കുന്നതിനായി $\beta_2$ എന്ന ഗുണാങ്കം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

കർട്ടോസിസ് കാണുന്നതിനായി കാൾപിയേഴ്സൺ മറ്റൊരു ഗുണാങ്കം $\gamma_2$ (ഗാമാ രണ്ട്) നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്.

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3$$

$\beta_2 = 3$ (അതായത് $\gamma_2 = 0$) ആയാൽ വക്രം മെസോകർട്ടിക് ആകുന്നു.

$\beta_2 > 3$ (അതായത് $\gamma_2 > 0$) ആയാൽ വക്രം ലെപ്റ്റോകർട്ടിക് ആകുന്നു.

$\beta_2 < 3$ (അതായത് $\gamma_2 < 0$) ആയാൽ വക്രം പ്ലാറ്റികർട്ടിക് ആകുന്നു.

### വിവരണം 7.14

ഒരു വിതരണത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ നാല് കേന്ദ്രീയ മൊമന്റുകൾ 0, 2.5, 0.7, 18.75 എന്നിങ്ങനെയാണ്. വിതരണത്തിന്റെ കർട്ടോസിസ് പരിശോധിക്കുക.

**പരിഹാരം**

$\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2.5$, $\mu_3 = 0.7$, $\mu_4 = 18.75$ എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു

കർട്ടോസിസ് ഗുണാങ്കം , $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{18.75}{2.5^2} = 3$

$\beta_2 = 3$ ആയതിനാൽ വിതരണം മെസോകർട്ടിക് ആകുന്നു.

### വിവരണം 7.15

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കവും കർട്ടോസിസ് ഗുണാങ്കവും കണക്കാക്കുകയും അഭിപ്രായം രേഖപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യുക.

2,3,7,8,10

**പരിഹാരം**

| $x$ | $x - 6$ | $(x - 6)^2$ | $(x - 6)^3$ | $(x - 6)^4$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | -4 | 16 | -64 | 256 |
| 3 | -3 | 9 | -27 | 81 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 2 | 4 | 8 | 16 |
| 10 | 4 | 16 | 64 | 256 |
| 30 | 0 | 46 | -18 | 610 |

$$\bar{x} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\mu_1 = \frac{\sum(x-\bar{x})}{n} = 0 \text{ (എല്ലായിപ്പോഴും)}$$

$$\mu_2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{46}{5} = 9.2$$

$$\mu_3 = \frac{\sum(x-\bar{x})^3}{n} = \frac{-18}{5} = -3.6$$

സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം , $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(-3.6)^2}{(9.2)^3} = 0.0166$

$\mu_3 < 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ് ആകുന്നു.

കർട്ടോസിസ് ഗുണാങ്കം , $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{122}{9.2^2}$

$= 1.44$

$\beta_2 < 3$, ആയതിനാൽ വിതരണം പ്ലാറ്റികർട്ടിക് ആകുന്നു.

### നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

*ഈ പാഠത്തിൽ സ്ക്യൂനത, കർട്ടോസിസ് എന്നീ ആശയങ്ങൾ അവതരിപ്പിച്ചു. സ്ക്യൂനത എന്നത് സമമിതത്തിന്റെ അസാന്നിധ്യവും കർട്ടോസിസ് എന്നത് കൂർമതയുടെ അളവും ആകുന്നു. ആകെ രണ്ട് തരം സ്ക്യൂനതകൾ ഉണ്ട് പോസ്റ്റീവ് സ്ക്യൂനതയും, നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനതയും. ഒരു ആവൃത്തി വക്രത്തിന് മോഡിന്റെ വലതുഭാഗത്തുള്ള വാലിന്റെ ഭാഗത്തിനു നീളം കൂടുതലാണെങ്കിൽ ആ വക്രത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവ് ആയിരിക്കും. നേരെമറിച്ച് മോഡിന്റെ ഇടത് ഭാഗത്തുള്ള വാലിന്റെ നീളം കൂടുതലാണെങ്കിൽ അതിന്റെ സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ് ആയിരിക്കും. ഒരു വക്രം താരതമ്യേന ഇടുങ്ങിയതും മുകളിലോട്ട് കൂർമതയുമുണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ ലെപ്റ്റോകർട്ടിക് എന്നു വിളിക്കാം. കൂടുതൽ പരന്ന മുകൾഭാഗമുള്ള വക്രത്തെ പ്ലാറ്റികർട്ടിക് എന്നു വിളിക്കുന്നു. കൂടുതൽ കൂർമതയോ, കൂടുതൽ പരന്ന മുകൾഭാഗമോ ഇല്ലാത്ത വക്രത്തെ മെസോകർട്ടിക് എന്നു വിളിക്കുന്നു.*

*പലതരം സ്ക്യൂനതകളും കർട്ടോസിസുകളും ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യപ്പെട്ടു. ഒരു ആവൃത്തി വക്രം സമമിതമല്ലാതാകുമ്പോൾ അതിലെ ചരത്തിന്റെ വിതരണം എത്രമാത്രം അകന്നിരിക്കുന്നുവെന്നും അകൽച്ച ഏത് ദിശയിലാണെന്നും സ്ക്യൂനതയുടെ അളവുകൾ സൂചന നൽകുന്നു. ആവൃത്തി വക്രത്തിന്റെ കൂർമത സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് കർട്ടോസിസ് അളവുകൾ സഹായകമാണ്. ഒരു സമമിത വക്രത്തിന്റെ കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കവും ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കവും മൊമന്റ് സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കവും പൂജ്യമായിരിക്കും.*

#### പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പഠിക്കുന്നതിലൂടെ പഠിതാവ്:

- സമമിത വിതരണവും, അസമമിത വിതരണവും വേർതിരിച്ചറിയുന്നു.
- വിതരണങ്ങളുടെ സ്ക്യൂനത തിരിച്ചറിയുന്നു.
- സ്ക്യൂനതയുടെ സ്വഭാവം നിർണയിക്കുകയും വ്യാഖ്യാനിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.
- വിതരണങ്ങളുടെ കർട്ടോസിസ് വിശദീകരിക്കുന്നു.
- വിവിധതരം കർട്ടോസിസുകളുടെ നിർണയവും വ്യാഖ്യാനവും നടത്തുന്നു.

### വിലയിരുത്തൽ ഇനങ്ങൾ

1. ഒരു പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉള്ള ഡാറ്റയ്ക്ക് താഴെപറയുന്നതിൽ ഏതാണ് എല്ലായ്പ്പോഴും ശരിയായത്?

   a. $Q_1 + Q_3 > 2Q_2$ b. $Q_1 + Q_2 > 2Q_3$

   c. $Q_1 - Q_3 > Q_2$ d. $Q_3 - Q_1 > Q_2$

2. നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉള്ള ഡാറ്റയ്ക്ക് താഴെപറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് ശരി?

   a. മാധ്യം =മധ്യാങ്കം =മോഡ് b. മധ്യാങ്കം < മാധ്യം < മോഡ്

   c. മാധ്യം < മധ്യാങ്കം < മോഡ് d. മോഡ് < മാധ്യം < മധ്യാങ്കം

3. നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉള്ള വിതരണത്തിൽ കൂടുതൽ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളും വിതരണം ചെയ്തിരിക്കുന്നത്.

   a. ഇടത് വാൽഭാഗം b. വലത് വാൽഭാഗം

   c. നടുവിൽ d. എവിടെ വേണമെങ്കിലും

4. ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കത്തിന്റെ പരിധികൾ താഴെ പറയുന്നവയിൽ ഏത്?

   a. ±1 b. ±2 c. ±3 d. 0 മുതൽ 1 വരെ

5. $\mu_2$=7, $\mu_4$=98 ആയാൽ വക്രം ........ ആകുന്നു

   a. മെസോകർട്ടിക് b. പ്ലാറ്റികർട്ടിക്

   c. പോസറ്റീവ് സ്ക്യൂനത d. ലെപ്റ്റോകർട്ടിക്

6. ഒരു സമമിത വിതരണത്തിന് ........ ആയിരിക്കും.

   a. $\beta_1=0$ b. $\beta_1<0$ c. $\beta_1>0$ d. $\beta_1 \neq 0$

7. ഒരു ഡാറ്റയുടെ മൂന്നാമത്തെ സെൻട്രൽ മൊമന്റ് -1.6 ആണെങ്കിൽ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം .... ആയിരിക്കും.

   a. പൂജ്യം b. പൂജ്യത്തിനു താഴെ

   c. പൂജ്യത്തിന് മുകളിൽ d. തീരുമാനിക്കാൻ കഴിയില്ല.

8. ഒരു സാമ്പത്തിക പഠനത്തിന്റെ ഭാഗമായി, 30,000 വരെ സമ്പാദ്യമുള്ള ആളുകളുടെ സാമ്പിൾ പരിഗണിക്കുമ്പോൾ താഴെ പറയുന്ന വിവരങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

   30 % ആളുകൾ 5000 രൂപയിൽ താഴെ സമ്പാദിക്കുന്നു.

   95% ആളുകൾ 15000 രൂപയിൽ താഴെ സമ്പാദിക്കുന്നു.

   98% ആളുകൾ 24000 രൂപയിൽ താഴെ സമ്പാദിക്കുന്നു.

   എങ്കിൽ ഡാറ്റയുടെ ആവൃത്തിവക്രം ..... ആയിരിക്കും.

   a. സമമിതം b. പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത

   c. നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത d. ഒന്നും കണ്ടെത്താനാവില്ല.

9. താഴെപറയുന്നവയിൽ ശരിയല്ലാത്ത പ്രസ്താവനയേത്?

   a. ഒരു സമമിത വിതരണത്തിന് മാധ്യം = മധ്യാങ്കം = മോഡ്

   b. മധ്യാങ്കം 24 ഉം മാധ്യം 26 ഉം ആണെങ്കിൽ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവ് ആയിരിക്കും

c. പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉള്ള ഡാറ്റയ്ക്ക് $\beta_1$=0 ആയിരിക്കും.

d. $\beta_2$ =3 ആണെങ്കിൽ വിതരണം മെസോ കർട്ടിക് ആകുന്നു.

10. വൃദ്ധ ജനങ്ങളുടെ വയസ്സുകളുടെ വിതരണം ഒരു ---- സ്ക്യൂനത ഉള്ള വിതരണത്തിന് ഉദാഹരണമാണ്.

11. $\beta_2$ >3 ആണെങ്കിൽ വക്രം .... ആകുന്നു.

12. $(Q_3 - Q_2) < (Q_2 - Q_1)$ ആണെങ്കിൽ സ്ക്യൂനത .... ആകുന്നു.

13. കാൾ പിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം 0.40, മാനകവ്യതിയാനം 8, മാധ്യം 30 എന്നിങ്ങനെയാണെങ്കിൽ വിതരണത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

ഉത്തരം: മോഡ് = 26.8

14. 10 പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾക്ക് $\sum x$=452, $\sum x^2$=24270 , മോഡ് =43.7 പിയേർഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കാണുക.

ഉത്തരം : മാധ്യം =45.2 , SD=19.6 , $S_K$=0.08

15. രണ്ട് ഗ്രാമങ്ങളിലെ വരുമാനത്തിന്റെ വിതരണം താഴെ പറയുന്ന അളവുകൾ വ്യക്തമാക്കുന്നു.

| | മാധ്യം | മോഡ് | മാനക വ്യതിയാനം |
|---|---|---|---|
| ഗ്രാമം I | 500 | 475 | 10 |
| ഗ്രാമം II | 600 | 590 | 5 |

രണ്ടു വിതരണങ്ങളുടെയും സ്ക്യൂനതയുടെ സ്വഭാവം എന്തായിരിക്കും? ഏത് വിതരണമാണ് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത ഉള്ളത്?

ഉത്തരം: പോസറ്റീവ് സ്ക്യൂനത, ഒന്നാമത്തെ ഗ്രാമത്തിലെ വിതരണമാണ് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത ഉള്ളത്.

16. ഒരു ക്ലാസിലെ 7 വിദ്യാർഥികൾക്ക് ഇക്കണോമിക്സ്, ഇംഗ്ലീഷ്, സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് എന്നീ 3 വിഷയങ്ങളിൽ പരീക്ഷ നടത്തി. അവർ നേടിയ മാർക്കുകൾ താഴെ പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു.

| മാർക്കുകൾ | വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം | | |
|---|---|---|---|
| | ഇക്കണോമിക്സ് | ഇംഗ്ലീഷ് | സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് |
| 12 | 2 | 2 | 1 |
| 14 | 5 | 12 | 3 |
| 16 | 7 | 8 | 5 |
| 18 | 9 | 6 | 6 |
| 20 | 7 | 5 | 8 |
| 22 | 5 | 3 | 12 |
| 24 | 2 | 1 | 2 |
| മാധ്യം | 18 | 16.6 | 18.96 |
| മധ്യാങ്കം | 18 | 16 | 20 |
| മോഡ് | 18 | 14 | 22 |

a. പോസറ്റീവ് സ്ക്യൂനത, നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത, സമമിത വിതരണങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുക.

b. മൂന്ന് വിതരണങ്ങളുടേയും ഏകദേശ ആവൃത്തിവക്രം വരച്ച് മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് എന്നിവയുടെ സ്ഥാനം സൂചിപ്പിക്കുക.

ഉത്തരം : ഇക്കണോമിക്സ് - സമമിതം, ഇംഗ്ലീഷ് - പോസറ്റീവ്, സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് - നെഗറ്റീവ്

17. ഒരു ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം =100, സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം =0.2 വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം (CV) =35 എങ്കിൽ വിതരണത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

ഉത്തരം : ($\sigma$=35, മോഡ് =93)

18. ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ തൊഴിലാളികളുടെ വേതനങ്ങളുടെ വിതരണത്തിന്റെ ഉയർന്ന ചതുരംശത്തിന്റേയും താഴ്ന്ന ചതുരംശത്തിന്റേയും വ്യത്യാസം 15 ഉം, അവയുടെ തുക 35 ഉം, മധ്യാങ്കം 20 ഉം ആകുന്നു. സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കാണുക.

ഉത്തരം ( $S_B$=0.33)

19. ഒരു കൂട്ടം വിദ്യാർഥികളുടെ സ്കോറുകളുടെ വിതരണം സമമിതം ആണെന്ന് കരുതുക. $Q_1$, $Q_3$ എന്നിവ യഥാക്രമം 20, 40 ആണെങ്കിൽ മധ്യാങ്ക സ്കോർ എത്രയാകും? മധ്യാങ്ക സ്കോർ 35 ആയാൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത എന്തായിരിക്കും?

ഉത്തരം : മധ്യാങ്കം =30, $S_k$= -0.5

20. പ്രസിഡൻസി കോളേജിലെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് വിഭാഗത്തിലെ ഏഴ് അസിസ്റ്റൻഡ് പ്രൊഫസർമാരുടെ മാസശമ്പളം (ആയിരത്തിൽ) താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

26, 30, 32, 26, 29, 28, 60.

a) മാധ്യം b) മോഡ് c) സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം എന്നിവ കാണുക

ഉത്തരം : മാധ്യം =32.57 മോഡ് =26, $\sigma$=11.2 , $S_k$=0.59.

21. ഒരു പ്രത്യേക ദിവസം ആശുപത്രിയിൽ 10 നവജാതശിശുക്കളുടെ ഭാരം (കി.ഗ്രാമിൽ) താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. 2, 3, 3, 3, 4, 2, 2.5, 3.5, 3.7, 3

a) മാധ്യം , മോഡ്, മാനക വ്യതിയാനം എന്നിവ കാണുക.

b) ഈ ഡാറ്റയ്ക്ക് സ്ക്യൂനത ഉണ്ടോ? കാരണം വിശദമാക്കുക.

ഉത്തരം: മാധ്യം =2.97, മോഡ് =3, $\sigma$=0.63 , $S_k$= -0.048

22. ഒരു ഹയർസെക്കണ്ടറി സ്കൂളിലെ 100 വിദ്യാർഥികളുടെ ഉയരം (ഇഞ്ചുകളിൽ) താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

| ക്ലാസ്സ് അന്തരം | വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| 60 മുതൽ 62 വരെ | 5 |
| 62 മുതൽ 64 വരെ | 18 |
| 64 മുതൽ 66 വരെ | 42 |
| 66 മുതൽ 68 വരെ | 20 |
| 68 മുതൽ 70 വരെ | 8 |
| 70 മുതൽ 72 വരെ | 7 |

a) മാധ്യം b) മോഡ് c) സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം : മാധ്യം =65.58, മോഡ് =65.04, $\sigma$=2.41 , $S_k$=0.23

23. 50 തൊഴിലാളികളുള്ള കമ്പനിയുടെ മേധാവി ആ കമ്പനിയിലെ തൊഴിലാളികളുടെ അവധിയെടുക്കൽ രീതി പഠിക്കാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. തൊഴിലാളികളുടെ അവധിയെടുക്കൽ ദിനങ്ങളുടെ വിതരണം ചുവടെ പറയും പ്രകാരമാണ്.

| അവധിയെടുത്ത ദിനങ്ങളുടെ എണ്ണം | തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| 0 - 2 | 15 |
| 3 - 5 | 20 |
| 6 - 8 | 8 |
| 9 - 11 | 5 |
| 12 - 14 | 2 |

a) മാധ്യം b) മാനകവ്യതിയാനം

c) കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം : മാധ്യം =4.54, മോഡ് =3.59, $\sigma$=3.27 , $S_k$=0.29

24. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

| കാലാവധി (മണിക്കൂറിൽ) | 80-160 | 160-240 | 240-320 | 320-400 | 400-480 |
|---|---|---|---|---|---|
| ട്യൂബുകളുടെ എണ്ണം | 24 | 90 | 45 | 12 | 30 |

| കാലാവധി (മണിക്കൂറിൽ) | 480-560 | 560-640 | 640-720 |
|---|---|---|---|
| ട്യൂബുകളുടെ എണ്ണം | 120 | 39 | 30 |

മാധ്യം = 403.1, മോഡ് = 522.1, $\sigma$ = 174.2 , $S_k$ = -0.68

25. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക

| മാർക്കുകൾ | 0 ത്തിന് മുകളിൽ | 10 ന് മുകളിൽ | 20 ന് മുകളിൽ | 30 ന് മുകളിൽ | 40 ന് മുകളിൽ |
|---|---|---|---|---|---|
| വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം | 140 | 130 | 115 | 95 | 80 |

| മാർക്കുകൾ | 50 ന് മുകളിൽ | 60 ന് മുകളിൽ | 70 ന് മുകളിൽ | 80 ന് മുകളിൽ |
|---|---|---|---|---|
| വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം | 70 | 30 | 14 | 0 |

ഉത്തരം : മാധ്യം = 43.14, മോഡ് = 55.56, $\sigma$ = 20.96 , $S_k$ = -0.59

26. ചതുരംശങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| മധ്യവില | : | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 |
| ആവൃത്തി | : | 30 | 28 | 25 | 24 | 10 | 21 |

ഉത്തരം : $Q_1$=18.3, $Q_2$=24.7, $Q_3$=31.8,$S_B$=0.052

27. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

| കാലാവധി (മാസത്തിൽ) | <87.5 | <112.5 | <137.5 | <162.5 | <187.5 | <212.5 | <237.5 | <262.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ബൾബുകളുടെ എണ്ണം | 35 | 75 | 123 | 223 | 348 | 428 | 478 | 500 |

ഉത്തരം : $Q_1$=138, $Q_2$=167.9, $Q_3$=195.94, $S_B$= -0.03

28. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് ശ്രേണികൾക്കും കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കാണുക. തുടർന്ന് ഏതിനാണ് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

| വയസ്സ് (വർഷത്തിൽ) | കുട്ടികളുടെ എണ്ണം | |
|---|---|---|
| | സ്കൂൾ A | സ്കൂൾ B |
| 6 | 3 | 1 |
| 8 | 9 | 10 |
| 9 | 15 | 9 |
| 10 | 8 | 7 |
| 11 | 5 | 3 |
| ആകെ | 40 | 30 |

ഉത്തരം

A. മാധ്യം =9, മോഡ് =9, $\sigma$=1.26, ,$S_k$= 0

B. മാധ്യം =9, മോഡ് =8, $\sigma$=1.13, $S_k$= 0.88. B യ്ക്ക് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത ഉണ്ട്.

29. 3 വിദ്യാർഥികൾക്ക് 3 മാർക്ക് വീതം

5 വിദ്യാർഥികൾക്ക് 5 മാർക്ക് വീതം

8 വിദ്യാർഥികൾക്ക് 7 മാർക്ക് വീതം

6 വിദ്യാർഥികൾക്ക് 8 മാർക്ക് വീതം

2 വിദ്യാർഥികൾക്ക് 10 മാർക്ക് വീതം ലഭിച്ചു. എങ്കിൽ വിദ്യാർഥികൾക്ക് ലഭ്യമായ മാർക്കുകളുടെ ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

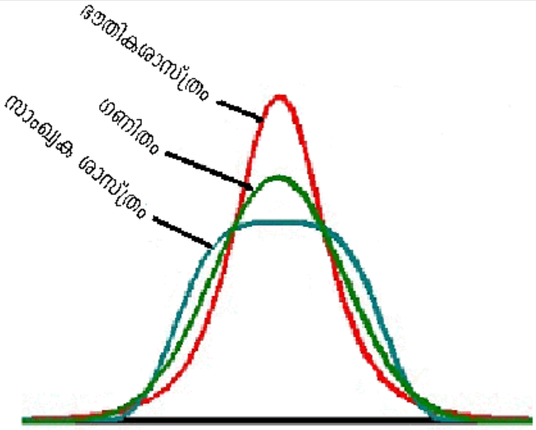
ഉത്തരം : $Q_1$=5, $Q_2$=7, $Q_3$=8, $S_B$= -0.33

30. ഒരു ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ 2-ാമത്തേയും 4- നാലാമത്തേയും സെൻട്രൽ മൊമന്റുകൾ യഥാക്രമം 2, 16 ആകുന്നു. വിതരണത്തിന്റെ കർട്ടോസിസ് പ്രകൃതം എന്തായിരിക്കും.

ഉത്തരം: $\beta_2$ =4 ലെപ്റ്റോകർട്ടിക്.

31. മൂന്നു വിഷയങ്ങളിൽ ലഭ്യമായ മാർക്കുകളുടെ ആവൃത്തി വക്രം തന്നിരിക്കുന്നു.

വിവിധ തരം കർട്ടോസിസുകൾ തിരിച്ചറിയുക.




ഉത്തരം : ഭൗതികശാസ്ത്രം - ലെപ്റ്റോകർട്ടിക്

ഗണിതം - മെസോകർട്ടിക്

സാംഖ്യകശാസ്ത്രം - പ്ലാറ്റികർട്ടിക്

32. ഒരു വിതരണത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ നാല് കേന്ദ്ര മൊമന്റുകൾ യഥാക്രമം 0, 9.56, -3.29, 215.72 എന്നിങ്ങനെയാണ്. സ്ക്യൂനതയുടെയും കർട്ടോസിന്റെയും അളവുകൾ കണക്കാക്കുക. വക്രത്തിന്റെ സ്വഭാവം പ്രസ്താവിക്കുക.

ഉത്തരം : $\beta_1$=0.012, സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ്, $\beta_2$=2.36, പ്ലാറ്റി കർട്ടിക്

33. ഒരു വിതരണത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ നാല് മൊമന്റുകൾ ( മാധ്യം അടിസ്ഥാനമാക്കി) യഥാക്രമം 0, 16, -64, 162 ആകുന്നു. സ്ക്യൂനതയുടെയും കർട്ടോസിസിന്റെയും മൊമന്റ് ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം : $\beta_1$=1, സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ്, $\beta_2$=0.633 പ്ലാറ്റികർട്ടിക്.

34. രണ്ട് വിതരണങ്ങളുടെ രണ്ടാം സെൻട്രൽ മൊമന്റുകൾ യഥാക്രമം 9, 16 എന്നിങ്ങനെ ആകുന്നു. അവയുടെ മൂന്നാം സെൻട്രൽ മൊമന്റുകൾ യഥാക്രമം - 8.1, -12 ആകുന്നു. രണ്ട് വിതരണങ്ങളിൽ ഏതിനാണ് ഇടത്തോട് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത ഉള്ളതെന്ന് വിശദമാക്കുക.

ഉത്തരം : ഒന്നാം ഗ്രൂപ്പ് : $\beta_1$=0.9, $\gamma_1$ = -0.3

രണ്ടാം ഗ്രൂപ്പ്: $\beta_1$=0.04, $\gamma_1$ = -0.2

ഒന്നാം ഗ്രൂപ്പിന് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത ഉണ്ട്.

35. ഒരു വിതരണത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ നാല് കേന്ദ്ര മൊമന്റുകൾ യഥാക്രമം 0, 9.2, -3.6, 122 എന്നിങ്ങനെയാണ്. വിതരണത്തിന്റെ കർട്ടോസിസ് ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം : $\beta_2$=1.44, പ്ലാറ്റികർട്ടിക്

36. മൂന്ന് വിതരണങ്ങളുടെ $\beta_1$ , $\beta_2$ എന്നീ വിലകൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

| | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|
| ഒന്നാം ഗ്രൂപ്പ് | 0 | 0 |
| രണ്ടാം ഗ്രൂപ്പ് | 0 | 3 |
| മൂന്നാം ഗ്രൂപ്പ് | 3 | 9 |

ഇവയിൽ മെസോകർട്ടിക് വിതരണം തിരിച്ചറിയുക.

ഉത്തരം : രണ്ടാം ഗ്രൂപ്പ്

37. ഒരു നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉള്ള വിതരണത്തിന്റെ $\beta_1$ ന്റെയും $\mu_2$ യുടെയും വില കൾ യഥാക്രമം 9,4 ആകുന്നു. $\gamma_1$ ന്റെയും $\mu_3$ യുടെയും വിലകൾ കാണുക.

ഉത്തരം : $\gamma_1 = {}^-3$, $\mu_3 = {}^-24$ (സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ് ആയതിനാൽ)

38. ഒരു മെസോകർട്ടിക് വിതരണത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ രണ്ട് സെൻട്രൽ മൊമന്റുകൾ യഥാക്രമം 0, 2.5 ആകുന്നു. നാലാമത്തെ സെൻട്രൽ മൊമന്റ് കാണുക.

ഉത്തരം: $\mu_4 = 18.75$

39. ആദ്യത്തെ നാല് ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ആദ്യത്തെ നാല് സെൻട്രൽ മൊമന്റുകൾ കണക്കാകുക. കൂടാതെ സ്ക്യൂനസിന്റെയും കർട്ടോസിസിന്റെയും ഗുണാങ്കങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം: $\mu_2 = 5$, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 41$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1.64$

40. 3,6,8,10,18 എന്നീ ഡാറ്റയുടെ കർട്ടോസിസ് ഗുണാങ്കം കാണുക. ഡാറ്റയുടെ സ്വഭാവ ത്തെക്കുറിച്ച് അഭിപ്രായം രേഖപ്പെടുത്തുക.

ഉത്തരം : $\mu_2 = 25.6$, $\mu_3 = 97.2$, $\mu_4 = 1588$, $\beta_2 = 2.42$, പ്ലാറ്റികർട്ടിക്.

**ഉത്തരങ്ങൾ**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) a | 2) c | 3) a | 4) a | 5) b |
| 6) a | 7) b | 8) c | 9) c | |

10) പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത 11) ലെപ്റ്റോകർട്ടിക് 12) നെഗറ്റീവ്.

# 8 സംഭാവ്യത (Probability)

Z1U2L8

## ആമുഖം

അനിശ്ചിതത്വം നമ്മുടെ ജീവിതത്തിന്റെ ഭാഗമാണ്. 'നാളെ മഴയുണ്ടാകുമോ?', നാളെ ഒരു പ്രത്യേക വ്യക്തിയെ കണ്ടു മുട്ടുവാൻ സാധ്യതയുണ്ടോ? ഒരു ജോലി കിട്ടുവാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? ഒരു പ്രത്യേക പഠനപദ്ധതിയിൽ പ്രവേശനം ലഭിക്കുന്നതിന് ഉള്ള സാധ്യതകൾ എന്താണ്? തുടങ്ങിയ ചോദ്യങ്ങൾ നമുക്ക് പരിചിതമാണ്. വ്യക്തികൾ ഇത്തരം ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശതമാനകണക്കിലോ അനുപാതത്തിലോ അല്ലെങ്കിൽ പകുതിപ്പകുതി പോലുള്ള പ്രസ്താവനകളിലോ ഉത്തരം നൽകുന്നു. സാധ്യത എന്നതിന് വ്യക്തമായ വ്യാഖ്യാനം നൽകേണ്ടത് ശാസ്ത്രപരമായ കാര്യങ്ങൾക്ക് അത്യാവശ്യമാണ്. ഇത് വളരെ സങ്കീർണമായതും നൂറ്റാണ്ടുകളോളം ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻമാരെ വൈഷമ്യപ്പെടുത്തിയതുമാണ്.

ജയിംസ് ബർണോളി (1654 - 1705)

അബ്രഹാം ഡിമോറി (1667 - 1754)

16 - ാം ശതകത്തിൽ ഇറ്റലിയിലെ ഭിഷഗ്വരനും ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനുമായ ജെ. കാർട്ടൻ അദ്ദേഹത്തിന്റെ 'ദ ബുക്ക് ഓൺ ഗെയിംസ് ഓഫ് ചാൻസ്' എന്ന പുസ്തകത്തിൽ പ്രതിപാദിക്കുന്നതോടെയാണ് സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തം ആവിർഭവിച്ചത്. അന്നു മുതൽ സംഭാവ്യത പഠനം പ്രശസ്തരായ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻമാരെ ആകർഷിച്ചിരുന്നു. ജയിംസ് ബർണോളി (1654 - 1705), ഡി മോറി(1667 - 1754), പിയറിസിമൺ ലാപ്ലേസ് (1749 - 1827) തുടങ്ങിയവർ ഇതിലേക്ക് മികച്ച സംഭാവന നൽകിയ ചിലരാണ്. ലാപ്ലേസ് രചിച്ച 'Theorie Analytique des probabilities' (1812) എന്ന പുസ്തകമാണ് സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിന് ഒരു വ്യക്തി നൽകിയ ഏറ്റവും മികച്ച സംഭാവനയായി കരുതുന്നത്. പിന്നീട് എ.എൻ. കോൾമോഗോറോവ് (1903 - 1987) എന്ന റഷ്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ 1933 ൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ച 'ഫൗണ്ടേഷൻ ടു പ്രോബബിലിറ്റി' എന്ന പുസ്തകത്തിൽ സംഭാവ്യതയെ വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നതിനായി ചില സ്വയം പ്രമാണതത്ത്വങ്ങൾ നിർദ്ദേശിക്കുകയുണ്ടായി. ഇതു പ്രകാരം സംഭാവ്യതയെ ഒരു പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഫലങ്ങളുടെ ഏകദങ്ങളായിട്ടാണ് കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നത്. അടുത്ത കാലത്തായി ജീവശാസ്ത്രം, ആരോഗ്യം, സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്രം, ജനിതക ശാസ്ത്രം, ഭൗതിക ശാസ്ത്രം, സാമൂഹ്യശാസ്ത്രം, ഇൻഷുറൻസ് തുടങ്ങിയ എല്ലാ മേഖലകളിലും സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തം വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നു.

## സംഭാവ്യത (Probability)

സാധ്യത എന്ന പദം അനിശ്ചിതത്ത്വത്തിന്റെ സൂചനയാണ്. ചിലപ്പോൾ അടുത്ത നിമിഷം എന്ത് സംഭവിക്കുമെന്ന് പറയാനാവില്ല. എങ്കിലും ചില കാര്യങ്ങൾ സംഭവിക്കാൻ മറ്റുള്ള വയെക്കാൾ കൂടുതൽ സാധ്യതയുണ്ട്. അവിടെയാണ് സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പ്രാധാന്യം വരുന്നത്. ഫലങ്ങൾ (outcomes) വിലയിരുത്തുന്നതിലൂടെ ഭാവി പ്രവചിക്കു ന്നതിനും തീരുമാനം എടുക്കുന്നതിനും സംഭാവ്യത നമ്മെ സഹായിക്കുകയും ചെയ്യു ന്നു. അനിശ്ചിതത്ത്വവും അപകട സാധ്യതയും സംഖ്യാരൂപത്തിൽ കണക്കാക്കുന്നതിന് സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിന് കഴിയുന്നു. അങ്ങനെ ഒരു കാര്യം നടക്കുവാനുള്ള സാധ്യത അളക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗമാണ് സംഭാവ്യത ശാസ്ത്രം. ഒരു കാര്യം സംഭവിക്കുവാനോ, സംഭവിക്കാതിരിക്കുവാനോ എത്രമാത്രം സാധ്യതയുണ്ട് എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുവാൻ നമുക്ക് ഇത് ഉപയോഗിക്കാം. അനുമാന സാംഖ്യകത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനമാണ് സംഭാവ്യത. സംഭാ വ്യതയ്ക്ക് വ്യത്യസ്തമായ സമീപനങ്ങൾ ഉണ്ട്. സംഭാവ്യതയുടെ അടിസ്ഥാന ആശയ ങ്ങൾ ഈ അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നു. 0 മുതൽ 1 വരെയുള്ള തോതിലാണ് സംഭാ വ്യത അളക്കുന്നത്. അസാധ്യമായ സംഭവങ്ങളുടെ സംഭാവ്യത പൂജ്യവും ഉറപ്പായ സംഭ വങ്ങളുടെ സംഭാവ്യത ഒന്നും ആണ്. മിക്കവാറും പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യതയുമായാണ് നാം വ്യവഹരിക്കുന്നത്.

ഒരു നാണയം കറക്കുന്ന പരീക്ഷണം നിരീ ക്ഷിക്കാം. ഒരു നാണയം കറക്കിയാൽ സാധ്യ മായ രണ്ട് ഫലങ്ങളുണ്ട്.

- തല (H)
- വാല് (T)

തല കിട്ടുവാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{2}$ ഉം വാൽ കിട്ടു വാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{2}$ ഉം ആണെന്ന് നമുക്ക് കാണാം.

മറ്റൊരു പരീക്ഷണം നോക്കൂ:

ഒരു പകിട (die) എറിയുമ്പോൾ 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നിങ്ങനെ 6 സാധ്യമായ ഫലങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് സംഭവിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{6}$ ആണ്.

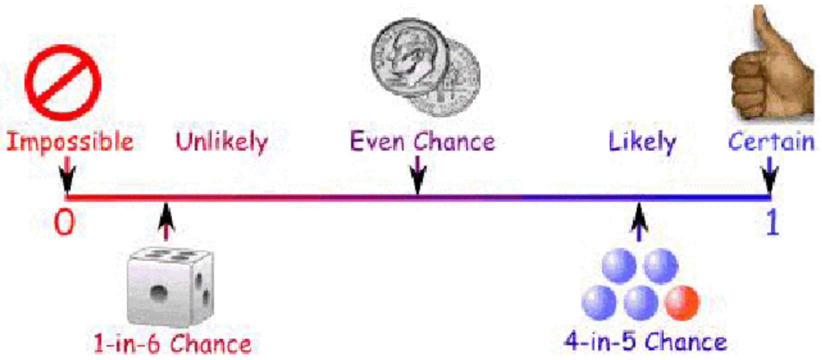
ഒരു ഉദാഹരണം കൂടി നോക്കൂ:

ഒരു സഞ്ചിയിലുള്ള 5 പന്തുകളിൽ 4 എണ്ണം നീലയും ഒരെണ്ണം ചുവപ്പും ആണ്. അതിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് തിരഞ്ഞെടുത്താൽ അത് നീലയാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്തായി രിക്കും.

നീല പന്ത് ലഭിക്കാനുള്ള രീതികൾ = 4

ആകെ പന്തുകൾ = 5

അതുകൊണ്ട് സംഭാവ്യത = $\frac{4}{5} = 0.8$




അതായത് സംഭാവ്യതയുടെ വില പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയിലാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

| **സംഭാവ്യതയുടെ അടിസ്ഥാന പ്രത്യേകതകൾ** |
|---|
| • സംഭാവ്യതയുടെ വില എപ്പോഴും പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയിലായിരിക്കും. |
| • അസാധ്യമായ കാര്യത്തിന്റെ സംഭാവ്യത പൂജ്യമാണ്. |
| • ഉറപ്പായ കാര്യത്തിന്റെ സംഭാവ്യത ഒന്നാണ് |
| • സംഭാവ്യത ഒരിക്കലും ന്യൂനസംഖ്യ ആകില്ല. |

ശരിയായ വിശകലനത്തിന്റെയും യുക്തിയുടെയും അടിസ്ഥാനത്തിൽ സംഭാവ്യത മനസ്സിലാക്കുന്നതിന്, സാധാരണ ഉപയോഗത്തിലുള്ളതും എന്നാൽ യാദൃശ്ചിക പ്രതിഭാസങ്ങളെകുറിച്ച് പറയുമ്പോൾ പ്രത്യേക അർഥം വരുന്നതുമായ പദങ്ങളെക്കുറിച്ച് വ്യക്തത ഉണ്ടാകേണ്ടതുണ്ട്.

## അനിയതഫല പരീക്ഷണം (Random Experiment)

ഒരു പരീക്ഷണം ഒരു കൂട്ടം ഉദ്യമങ്ങൾ ചേർന്നതാണ്. ഒരു കൂട്ടം ചീട്ടുകളിൽ നിന്ന് 10 എണ്ണം എടുക്കുക, ഒരു നാണയം രണ്ട് തവണ കറക്കുക തുടങ്ങിയവ അനിയത ഫല പരീക്ഷണങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. ഒരു പരീക്ഷണം അനിയതഫല പരീക്ഷണം ആകുന്നതിന് ചുവടെ പറയുന്ന വ്യവസ്ഥകൾ പാലിക്കണം.

1. ഇതിന് ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ഫലങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കണം.
2. ഫലം മുൻകൂട്ടി പ്രവചിക്കുവാൻ സാധിക്കുകയില്ല

3. സമാന സാഹചര്യത്തിൽ ഈ പരീക്ഷണം എത്ര തവണ വേണമെങ്കിലും ആവർത്തിക്കുവാൻ സാധിക്കണം.

മറ്റ് നിർവചനങ്ങൾ നൽകിയിട്ടില്ലെങ്കിൽ ഈ അധ്യായത്തിൽ, പരീക്ഷണമെന്നത് അനിയതഫല പരീക്ഷണമെന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

### ഉദ്യമം (Trial)

ഒരു ഉദ്യമം എന്നത് ഒന്നിലധികം സാധ്യമായ ഫലങ്ങളിൽ നിന്ന് ഒന്ന് മാത്രം സംഭവിക്കുന്ന ഒരു പ്രവർത്തനമാണ്. ഒരു നാണയം കറക്കുക, ഒരു പകിട ഉരുട്ടുക, ഒരു കൂട്ടം ചീട്ടുകളിൽ നിന്ന് ഒരു ചീട്ട് തിരഞ്ഞെടുക്കുക തുടങ്ങിയവ ഉദ്യമങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

### ഫലം (Outcome)

ഒരു അനിയതഫല പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഒരു ഉദ്യമത്തിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്ന സാധ്യമായ ഒരു ഫലത്തെ 'ഫലം' എന്ന് പറയുന്നു.

### സാമ്പിൾ മേഖല (Sample Space)

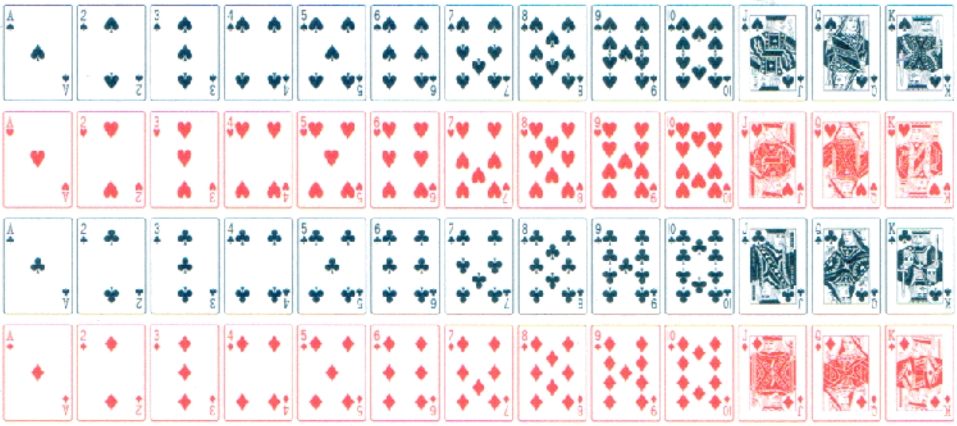
ഒരു അനിയത ഫല പരീക്ഷണത്തിലെ സാധ്യമായ എല്ലാ ഫലങ്ങളുടെയും കൂട്ടത്തെ സാമ്പിൾ മേഖല എന്നു പറയുന്നു. സാമ്പിൾ മേഖലയിലെ അംഗങ്ങളെ സാധാരണയായി { } നകത്ത് എഴുതും.

### സാമ്പിൾ ബിന്ദു (Sample Point)

സാമ്പിൾ മേഖലയിലെ ഒരംഗത്തെ സാമ്പിൾ ബിന്ദു എന്നു പറയുന്നു.

നമുക്കു ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം.

| പരീക്ഷണങ്ങൾ | സാമ്പിൾ മേഖല |
|---|---|
| ഒരു നാണയം കറക്കുന്നു | {തല, വാൽ} അല്ലെങ്കിൽ {H,T} |
| ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നു | { 1, 2, 3, 4, 5, 6} |
| ശരി, തെറ്റ് എന്നീ ഉത്തരങ്ങളുള്ള ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം നൽകുന്നു. | {ശരി, തെറ്റ്} |
| രണ്ട് നാണയങ്ങൾ ഒരേസമയം കറക്കുന്നു | { HH, HT, TH, TT} |



ഒരു സെറ്റ് ചീട്ടിൽ നിന്നും ഒന്നെടുക്കുമ്പോഴുള്ള സാമ്പിൾ മേഖല

**പ്രവർത്തനം**

രണ്ട് പകിടകൾ എറിയുമ്പോഴുള്ള സാമ്പിൾ മേഖല എഴുതുക.

## 8.2. ഇവന്റ് (Event)

ഒന്നോ അതിലധികമോ ഫലങ്ങളെയാണ് ഇവന്റ് എന്ന വാക്കുകൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവ ഇവന്റുകൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

- ഒരു നാണയം കറക്കുമ്പോൾ 'വാൽ' കിട്ടുന്നത്
- ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ അതിൽ 5 എന്ന സംഖ്യ കിട്ടുന്നത്.

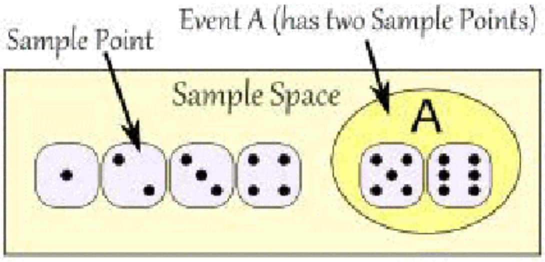
ഒരു ഇവന്റ് ഒന്നിലധികം ഫലങ്ങളെ ഉൾക്കൊള്ളാം:

- ഒരു കൂട്ടം ചീട്ടുകളിൽ നിന്ന് ഒരു രാജാവ് എന്ന ചീട്ട് എടുക്കുന്നതിന് (4 രാജാവ് ചീട്ടുകളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന്)
- ഒരു പകിട എറിയുമ്പോൾ ഇരട്ട സംഖ്യ കിട്ടുന്നത്. {2,4,6}

**അങ്ങനെ പ്രത്യേക സവിശേഷതകൾ ഉള്ള കൂട്ടത്തെ ഇവന്റ് എന്നു പറയുന്നു.** ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ അഞ്ചിൽ കുറവാകുന്നത്, ഒരു കൂട്ടം പകിടകളിൽ നാല് ചീട്ടുകൾ എടുക്കുമ്പോൾ കറുത്ത ചീട്ടോ മുഖചിത്ര ചീട്ടോ കിട്ടുന്നത് തുടങ്ങിയവ ഇവന്റുകളാണ്.

ഒരു ഫലം മാത്രം ഉള്ള ഇവന്റിനെ 'സിമ്പിൾ ഇവന്റ്' എന്നു പറയുന്നു. ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ഫലങ്ങൾ ഉള്ള ഇവന്റിനെ **'കോമ്പൗണ്ട് ഇവന്റ്'** എന്നു പറയുന്നു. അതായത് കോമ്പൗണ്ട് ഇവന്റുകളിൽ രണ്ടോ അതിലധികമോ സിമ്പിൾ ഇവന്റുകൾ ഉണ്ട്.

| സംഭാവ്യതയുടെ അടിസ്ഥാന സവിശേഷതകൾ |
| --- |
| • സംഭാവ്യതയിലെ എല്ലാ സാധ്യമായ ഫലങ്ങളുടെയും കൂട്ടമാണ് സാമ്പിൾ മേഖല. |
| • സാമ്പിൾ ബിന്ദു എന്നത് സാധ്യമായ ഒറ്റ ഫലമാണ്. |
| • ഒരു ഇവന്റിൽ ഒന്നോ അതിലധികമോ സാധ്യമായ ഫലങ്ങളുണ്ട്. |



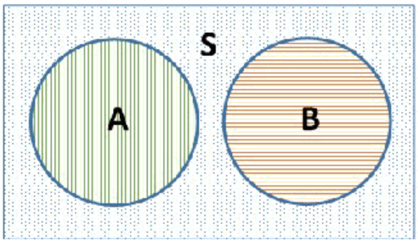

> ഒരു ഇവന്റ് സംഭവിക്കുവാനുള്ള സാധ്യതയുടെ അളവാണ് സംഭാവ്യത. സംഭാവ്യത ചുമത്തപ്പെട്ട ഒരു ഫലത്തെ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു കൂട്ടം ഫലങ്ങളെ ഇവന്റ് എന്നു പറയുന്നു.

### തുല്യസാധ്യതാ ഇവന്റുകൾ (Equally likely events)

രണ്ടോ അതിലധികമോ ഇവന്റുകൾ സംഭവിക്കുവാനുള്ള സാധ്യത തുല്യമാണെങ്കിൽ അവയെ തുല്യസാധ്യതാ ഇവന്റുകൾ എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി, നാണയം കറക്കുന്ന പരീക്ഷണത്തിൽ തലയും വാലും കിട്ടുന്നതിന് തുല്യ സാധ്യതയാണ് ഉള്ളത്. അതു കൊണ്ട് അവയെ തുല്യസാധ്യതാ ഇവന്റുകൾ എന്നു പറയുന്നു.

### പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകൾ (mutually exclusive events)

ഒരേ സമയം സംഭവിക്കുവാൻ സാധ്യമല്ലാത്ത രണ്ട് ഇവന്റുകളെ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകൾ എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി, ഒരു നാണയം കറക്കിയാൽ ഒന്നുകിൽ തല കിട്ടും അല്ലെങ്കിൽ വാൽ കിട്ടും ഇവ രണ്ടും ഒരുമിച്ച് കിട്ടുകയില്ല. ഇതുപോലെ ഒരു നവജാതശിശു ആൺകുട്ടിയോ പെൺകുട്ടിയോ ആയിരിക്കും. ഇങ്ങനെ നാണയം കറക്കുന്ന ഉദ്യമത്തിൽ തല വരുന്നത് വാൽ വരുന്നതിനെ ഒഴിവാക്കുന്നു. അതുപോലെ ഒരു നവജാത ശിശു ആൺകുട്ടി ആകുന്നത് പെൺകുട്ടി ആകുന്നതിനെ ഒഴിവാക്കുന്നു.

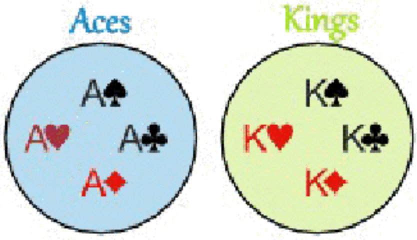


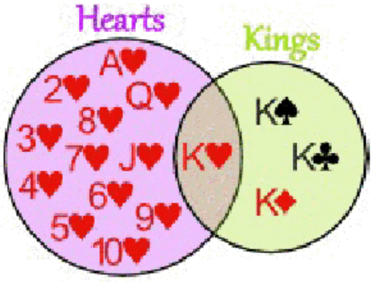

ചുവടെ പറയുന്ന ജോഡികൾ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളാണ്.

- ഒരാൾ 'വലത്തോട്ട് തിരിയുന്നതും' , 'ഇടത്തോട്ട് തിരിയുന്നതും' (ഇടത്തോട്ടും വലത്തോട്ടും ഒരാൾക്ക് ഒരേ സമയം തിരിയുവാൻ പറ്റില്ല.)
- ഒരു നാണയം എറിയുന്ന പരീക്ഷണത്തിൽ 'തല കിട്ടുന്നതും', 'വാൽ കിട്ടുന്നതും'
- ഒരു കൂട്ടം ചീട്ടുകളിൽ നിന്ന് ഒരു ചീട്ട് എടുത്താൽ അത് 'രാജാവ് ചീട്ട്' ആകുന്നതും, 'എയിസ് ചീട്ട്' ആകുന്നതും

പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളല്ലാത്തവ ഏതൊക്കെയാണ്?

ഒരു കൂട്ടം ചീട്ടുകളിൽ നിന്ന് ഒരു ചീട്ട് എടുക്കുന്ന പരീക്ഷണത്തിൽ 'രാജാവ് ചീട്ട് ആകുന്നത്', 'ഹൃദയ ചീട്ട് ആകുന്നത്' എന്നീ രണ്ട് ഇവന്റുകൾ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ ഈ രണ്ട് ഇവന്റുകളും പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളല്ല, കാരണം ചീട്ടുകളിൽ ഒന്ന് ഒരേ സമയം 'രാജാവും', 'ഹൃദയവും' ആകാവുന്നതാണ്.




'എയ്സ്' ചീട്ടും 'രാജാവ്' ചീട്ടും പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളാണ്. എന്നാൽ 'ഹൃദയ' ചീട്ടും 'രാജാവ്' ചീട്ടും പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളല്ല.

> ഒരേ സമയം സംഭവിക്കാൻ സാധ്യമല്ലാത്ത ഇവന്റുകളെ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകൾ എന്നു പറയുന്നു. ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് മാത്രം സംഭവിക്കുന്നു, രണ്ടും ഒരുമിച്ച് സംഭവിക്കുന്നില്ല.

### സമഗ്ര ഇവന്റുകൾ (Exhaustive Events)

ഒന്നിലധികം ഇവന്റുകൾ കൂടിച്ചേർന്നാൽ സാമ്പിൾ മേഖല കിട്ടുമെങ്കിൽ അത്തരം ഇവന്റുകളെ സമഗ്ര ഇവന്റുകൾ എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് പകിട ഉരുട്ടുന്ന പരീക്ഷണത്തിൽ സാമ്പിൾ മേഖല, S={1,2,3,4,5,6} ആണ്. A={1,3,5}, B= {2,4,6} എന്നീ ഇവന്റുകൾ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ A യിലെയും B യിലെയും എല്ലാ ഫലങ്ങളും ചേർന്നാൽ സാമ്പിൾ മേഖലയായ {1,2,34,5,6} കിട്ടും. അതുകൊണ്ട് A യും B യും സമഗ്ര ഇവന്റുകളാണ്.

## 8.3 സംഭാവ്യതയുടെ പ്രാമാണിക നിർവചനം (Classical definition of probability)

ഒരു ഇവന്റിന്റെ സംഖ്യാപരമായ സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുന്നതിന് പ്രാമാണിക നിർവചനത്തിൽ സാമ്പിൾ മേഖല ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരാൾക്ക് ഈ രീതിയിൽ സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുന്നതിന് പരീക്ഷണം നടത്തേണ്ട ആവശ്യമില്ല. പ്രാമാണിക നിർവചനത്തിൽ സാമ്പിൾ മേഖലയിലെ എല്ലാ ഫലങ്ങളും തുല്യ സാധ്യതയുള്ളതും പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളുമാണ് എന്ന് അനുമാനിക്കുന്നു.

**പ്രാമാണിക സംഭാവ്യതയുടെ സൂത്രവാക്യം**

A എന്ന ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത എന്നത്

$$\frac{\text{A യിലുള്ള അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{S \text{ ലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$ ആകുന്നു.

അതായത് $P(A) = \frac{N(A)}{N(S)}$ ഈ സംഭാവ്യതയെ 'പ്രാമാണിക സംഭാവ്യത' എന്നു പറയുന്നു.

### വിവരണം 8.1

ഒരു ചക്രത്തിന് മഞ്ഞ, നീല, പച്ച, ചുവപ്പ് എന്നീ നിറങ്ങളിലുള്ള നാല് തുല്യമായ വൃത്ത ഖണ്ഡങ്ങളുണ്ട്. ഈ ചക്രം കറക്കിവിട്ടാൽ നീല നിറം സൂചകത്തിൽ വന്ന് നിൽക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്? ചുവപ്പ് നിറം വന്ന് നിൽക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

**പരിഹാരം:**

$$P(\text{മഞ്ഞ}) = \frac{\text{മഞ്ഞ നിറത്തിലുള്ള വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{നീല}) = \frac{\text{നീല നിറത്തിലുള്ള വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{പച്ച}) = \frac{\text{പച്ച നിറത്തിലുള്ള വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{ചുവപ്പ്}) = \frac{\text{ചുവപ്പ് നിറത്തിലുള്ള വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{4}$$

### വിവരണം 8.2

ആറ് മുഖങ്ങളുള്ള ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നു. ഓരോ മുഖത്തിന്റെയും സംഭാവ്യത എന്താണ്? ഇരട്ട സംഖ്യയുള്ള മുഖം മുകളിൽ വരുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്? ഒറ്റ സംഖ്യയുള്ള മുഖം മുകളിൽ വരുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

**പരിഹാരം**

ഈ പരീക്ഷണത്തിലെ സാധ്യമായ ഫലങ്ങൾ 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നിവയാണ്.

$$P(1) = \frac{\text{1 കിട്ടുന്ന എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{6}$$

$$P(2) = \frac{\text{2 കിട്ടുന്ന എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{6}$$

$$P(3) = \frac{\text{3 കിട്ടുന്ന എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{6}$$

$$P(4) = \frac{\text{4 കിട്ടുന്ന എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{6}$$

$$P(5) = \frac{\text{5 കിട്ടുന്ന എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{6}$$

$$P(6) = \frac{\text{6 കിട്ടുന്ന എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{ഇരട്ട സംഖ്യ}) = \frac{\text{ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{ഒറ്റ സംഖ്യ}) = \frac{\text{ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

വിവരണം (8.2)ൽ നിന്ന് നമുക്ക് ഫലത്തിന്റെയും ഇവന്റിന്റെയും വ്യത്യാസം അറിയുവാൻ സാധിക്കും. ഈ പരീക്ഷണത്തിൽ പകിടയുടെ മുഖത്ത് ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയാകുന്നത് ഒരു ഫലവും ഇവന്റും ആണ്. എന്നാൽ മുഖത്തിലെ സംഖ്യ ഒറ്റ സംഖ്യയാകുന്നതും (1,3 അല്ലെങ്കിൽ 5) ഇരട്ടസംഖ്യയാകുന്നതും (2,4, അല്ലെങ്കിൽ 6) ഇവന്റുകളാണ്. വിവരണം (8.1)ൽ ഓരോ ഫലത്തിന്റെയും സംഭാവ്യത തുല്യമാണ്. ഓരോ നിറവും സൂചകത്തിൽ നിൽക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 1/4 ആണ്. വിവരണം (8.2)ൽ, പകിടയിലെ ഓരോ മുഖത്തിന്റെയും സംഭാവ്യത 1/6 ആണ്. ഈ രണ്ട് പരീക്ഷണങ്ങളിലും ഇവന്റുകൾ തുല്യ സാധ്യത ഇവന്റുകളാണ്.

തുല്യ സാധ്യതയില്ലാത്ത ഇവന്റുകൾ വരുന്ന ഒരു പരീക്ഷണം നമുക്ക് നോക്കാം.

### വിവരണം 8.3

ഒരു ഗ്ലാസ് ജാറിൽ 6 ചുവപ്പ്, 5 പച്ച, 8 നീല, 3 മഞ്ഞ നിറത്തിലുള്ള പന്തുകൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് യാദൃശ്ചികമായി എടുത്താൽ,

- ചുവന്ന പന്ത് ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്താണ്?
- പച്ച പന്ത് ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്താണ്?
- നീല പന്ത് ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്താണ്?
- മഞ്ഞ പന്ത് ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്താണ്?

**പരിഹാരം**

ഈ പരീക്ഷണത്തിലെ സാധ്യമായ ഫലങ്ങൾ ചുവപ്പ്, പച്ച, നീല, മഞ്ഞ നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളാണ്.

$$P(\text{ചുവപ്പ് നിറത്തിലുള്ള പന്ത്}) = \frac{\text{ചുവന്ന നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ പന്തുകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$$

$$P(\text{പച്ച നിറത്തിലുള്ള പന്ത്}) = \frac{\text{പച്ച നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ പന്തുകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{5}{22}$$

$$P(\text{നീല നിറത്തിലുള്ള പന്ത്}) = \frac{\text{നീല നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ പന്തുകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{8}{22}$$

$$P(\text{മഞ്ഞ നിറത്തിലുള്ള പന്ത്}) = \frac{\text{മഞ്ഞ നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ പന്തുകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{3}{22}$$

ഈ പരീക്ഷണത്തിലെ ഇവന്റുകൾ തുല്യ സാധ്യതയില്ലാത്തവയാണ്. നീല നിറത്തിലുള്ള പന്ത് കിട്ടുവാനുള്ള സാധ്യത മറ്റ് ഏതെങ്കിലും നിറത്തിലുള്ള പന്ത് കിട്ടുന്നതിനേക്കാൾ കൂടുതലാണ്. മഞ്ഞ നിറത്തിലുള്ള പന്തു കിട്ടുവാനുള്ള സാധ്യത മറ്റു നിറത്തിലുള്ള പന്ത് കിട്ടുവാനുള്ള സാധ്യതയേക്കാൾ കുറവാണ്.

**വിവരണം 8.4**

1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള സംഖ്യകളിൽ നിന്നും ഒരു സംഖ്യ യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഓരോ സംഖ്യയും കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത എന്ത്? തെരഞ്ഞെടുത്ത സംഖ്യ ഇരട്ട സംഖ്യ ആകുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത എന്ത്? തെരഞ്ഞെടുത്ത സംഖ്യ ഒറ്റ സംഖ്യയാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

**പരിഹാരം**

ഈ പരീക്ഷണത്തിലെ ഫലങ്ങൾ 1, 2, 3, 4, 5 എന്നിവയാണ്.

$$P(1) = \frac{\text{1 തെരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{5}$$

$$P(2) = \frac{\text{2 തിരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{5}$$

$$P(3) = \frac{\text{3 തിരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{5}$$

$$P(4) = \frac{\text{4 തിരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{5}$$

$$P(5) = \frac{\text{5 തിരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{1}{5}$$

$$P(\text{ഇരട്ടസംഖ്യ}) = \frac{\text{ഇരട്ടസംഖ്യ തിരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{2}{5}$$

$$P(\text{ഒറ്റ സംഖ്യ}) = \frac{\text{ഒറ്റ സംഖ്യ തിരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം}}{\text{ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}} = \frac{3}{5}$$

1, 2, 3, 4, 5 എന്നീ ഫലങ്ങൾ വരുവാനുള്ള സാധ്യത തുല്യമാണ്. എന്നാൽ ഒറ്റ സംഖ്യയും ഇരട്ടസംഖ്യയും വരുവാനുള്ള സാധ്യത തുല്യമല്ല. കാരണം ഇതിൽ 3 ഒറ്റ സംഖ്യകളും 2 ഇരട്ട സംഖ്യകളും ഉണ്ട്.

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. മൂന്ന് നാണയങ്ങൾ കറക്കുന്നു. സാമ്പിൾ മേഖല എഴുതുക. മൂന്ന് തലകൾ കിട്ടുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?
2. ഒരു സ്കൂളിൽ 100 ശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥികളും 100 വാണിജ്യ ശാസ്ത്രവിദ്യാർഥികളും 150 മാനവിക ശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥികളും ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു കുട്ടിയെ അനിയതമായി നേതാവായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ വിദ്യാർഥി മാനവികശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥി ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?
3. ഒരു പകിടയുടെ രണ്ട് മുഖങ്ങളിൽ 1 എന്നും വേറെ രണ്ട് മുഖങ്ങളിൽ 5 എന്നും ബാക്കിയുള്ള രണ്ട് മുഖങ്ങളിൽ 6 എന്നും രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഈ പകിട ഉരുട്ടിയാൽ അതിന്റെ മുകൾ ഭാഗത്ത് വരുന്ന സംഖ്യ ഇരട്ട സംഖ്യയാകുന്നതിനുള്ള സാധ്യത എന്ത്?
4. 50 ൽ കുറവായ എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ നിന്ന് ഒരു സംഖ്യ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു.

   (a) ഇരട്ടസംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

   (b) 10 ന്റെ ഗുണിതം ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

   (c) ഒരു പൂർണ വർഗം കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

### പ്രവർത്തനം

തുല്യ സാധ്യതാ ഇവന്റുകൾക്ക് 5 ഉദാഹരണങ്ങൾ എഴുതുക

നമ്മൾ ഇതുവരെ പഠിച്ച കാര്യങ്ങളെ സംഗ്രഹിക്കാം.

- ഒരു പരീക്ഷണത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഇവന്റുകളുടെ സാധ്യതയുടെ അളവാണ് ആ ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത
- ഒരു ഇവന്റ് A യുടെ സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കാൻ A വരുവാൻ സാധ്യതയുള്ള ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ ആകെ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ മതി.
- A എന്ന ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യതയെ P(A) എന്ന് ചുരുക്കി എഴുതാം. P(A) യുടെ വില 0 ത്തിനും 1നും ഇടയിലുള്ള ഒരു സംഖ്യയായിരിക്കും (0 ഉം 1 ഉം ഉൾപ്പെടെ) P(A) >P(B) ആണെങ്കിൽ A എന്ന ഇവന്റ് സംഭവിക്കുവാനുള്ള സാധ്യത B എന്ന ഇവന്റ് സംഭവിക്കാനുള്ള സാധ്യതയേക്കാൾ കൂടുതലാണ്. P(A) = P(B) ആണെങ്കിൽ Aയും Bയും തുല്യസാധ്യതാ ഇവന്റുകളാണ്.

### ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ നിർണയിക്കാനുള്ള എണ്ണൽ നിയമങ്ങൾ (Counting rules for determine the number of out comes)

ഒരു ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് സാധാരണയായി ആ ഇവന്റിൽ ഉള്ള ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണവും ആകെ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണവും കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടതാണ്. ഒരു പരീക്ഷണത്തിലെ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന പ്രധാനപ്പെട്ട ചില നിയമങ്ങൾ ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

### ബഹുഘട്ട പരീക്ഷണങ്ങളിലെ എണ്ണൽ നിയമം (Counting rule for multi step experiments)

ബഹുഘട്ട പരീക്ഷണങ്ങളിലെ എണ്ണൽ നിയമം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു പരീക്ഷണത്തിലെ ഫലങ്ങൾ എത്രയുണ്ടെന്ന് എണ്ണി നോക്കാതെ കണ്ടുപിടിക്കുവാൻ സഹായിക്കും. നിയമം ഇപ്രകാരമാണ് " ഒരു പരീക്ഷണം k ഘട്ടങ്ങളിലൂടെയാണ് നിർവഹിക്കുന്നത്. അതിൽ ആദ്യത്തെ ഘട്ടം '$n_1$', രീതികളിലും രണ്ടാമത്തെ ഘട്ടം '$n_2$' രീതികളിലും മൂന്നാമത്തെ ഘട്ടം $n_3$ രീതികളിലും ...k-ാമത്തെ ഘട്ടം $n_k$ രീതികളിലും പൂർത്തിയാക്കുന്നു.

അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ ഈ പരീക്ഷണം പൂർത്തിയാക്കുവാനുള്ള രീതികളുടെ എണ്ണം $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$

ഒരു ആളിന് നഗരം A യിൽ നിന്ന് നഗരം B യിലേക്ക് 3 വഴികൾ ഉണ്ട്, നഗരം B യിൽ നിന്ന് C യിലേക്ക് 4 വഴികളും നഗരം C യിൽ നിന്ന് D യിലേക്ക് 3 വഴികളും ഉണ്ട്. അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ നഗരം A യിൽ നിന്ന് നഗരം D യിലേക്ക് സഞ്ചരിക്കുവാനുള്ള വഴികളുടെ എണ്ണം (A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കും B യിൽ നിന്ന് C യിലേക്കും C യിൽ നിന്ന് D യിലേക്കും സഞ്ചരിച്ചു കൊണ്ട്) = $3 \times 4 \times 3 = 36$ വഴികൾ.

രണ്ട് നാണയങ്ങൾ കറക്കുന്ന പരീക്ഷണം രണ്ട് ഘട്ടങ്ങൾ ഉള്ള പരീക്ഷണമായി കണക്കാക്കാം. ഇതിൽ ഓരോ നാണയം രണ്ട് രീതികളിൽ വീഴുന്നു. തലയും (H) വാലും (T). അതിനാൽ നമുക്ക് $2 \times 2 = 4$ ഫലങ്ങൾ കിട്ടും.

## ക്രമമാറ്റവും ചേർത്തു വയ്ക്കലും ( Permulation and Combination)

ക്രമമാറ്റം (Permulation) എന്ന പദം ക്രമീകരണത്തെയും ചേർത്തുവയ്ക്കൽ (Combination) എന്ന പദം കൂട്ടത്തെയും അർഥമാക്കുന്നു. ക്രമമാറ്റം എന്ന പദം ഒരു കൂട്ടത്തിലുള്ള വിവിധ വസ്തുക്കളുടെ വ്യത്യസ്തങ്ങളായ ക്രമീകരണത്തെ പരാമർശിക്കുന്നു. ക്രമത്തിന് പ്രാധാന്യമില്ലാതെ ഒരു കൂട്ടം വസ്തുക്കളിൽ നിന്നും നിശ്ചിത എണ്ണം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന രീതിയാണ് ചേർത്തുവയ്ക്കൽ എന്നു പറയുന്നത്. വസ്തുക്കളുടെ കൂട്ടത്തെ വിവിധ രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം.

അതായത്

- ക്രമത്തിന് പ്രാധാന്യം ഉണ്ടെങ്കിൽ അത് ക്രമമാറ്റം ആകുന്നു.
- ക്രമത്തിന് പ്രാധാന്യം ഇല്ലെങ്കിൽ അത് ചേർത്തുവയ്ക്കൽ ആകുന്നു.

അടിസ്ഥാനപരമായി പ്രധാനമായും രണ്ട് തരത്തിലുള്ള ക്രമമാറ്റങ്ങൾ ഉണ്ട്.

1. ആവർത്തനം ഉള്ള ക്രമമാറ്റം.
2. ആവർത്തനം ഇല്ലാത്ത ക്രമമാറ്റം

**ആവർത്തനം ഉള്ള ക്രമമാറ്റം (Permulation with repetition)**

നമ്മുടെ കൈവശമുള്ള 'n' വസ്തുക്കളിൽ നിന്ന് r വസ്തുക്കൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ ഒരെണ്ണത്തിനെ നമുക്ക് 'n' രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാൻ സാധിക്കുമല്ലോ? ആവർത്തനം അനുവദിക്കുന്നതിനാൽ രണ്ടാമത്തെ വസ്തുവിനേയും 'n' രീതിയിൽ തന്നെ തെരഞ്ഞെടുക്കാം. ഈ രീതി തുടരുകയാണെങ്കിൽ r വസ്തുക്കളെ നമുക്ക് $n \times n \times \ldots \times n$ (r തവണ) $= n^r$ രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യപൂട്ട് പരിഗണിക്കുക.

ഇവിടെ 0,1,2,...,9 തുടങ്ങിയ 10 അക്കങ്ങൾ ഓരോ ചുറ്റിലും ഉണ്ട്. ഓരോ ചുറ്റിൽ നിന്നും ഒരു അക്കം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു മൂന്നക്കസംഖ്യ നിർമിക്കുന്നതിന് $10^3=1000$ ക്രമമാറ്റങ്ങളുണ്ട്.

### ആവർത്തനം ഇല്ലാത്ത ക്രമമാറ്റം (Permulation without repetition)

ഇവിടെ n വസ്തുക്കളിൽ നിന്നും r വസ്തുക്കൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ ഒന്നാമത്തെ വസ്തു n രീതിയിലും, ആവർത്തനമില്ലാത്തതിനാൽ രണ്ടാമത്തെ വസ്തു n-1 രീതിയിലും തുടങ്ങി r-ാമത്തെ വസ്തു n-r+1 രീതിയിലും തെരഞ്ഞെടുക്കാം. ആകെ ക്രമമാർഗങ്ങൾ $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)$ ആണ്.

**ഫാക്ടോറിയൽ (Factorial )**

ഒരു ഫാക്ടോറിയൽ എന്നത് ആ സംഖ്യയുടെയും അതിനേക്കാൾ ചെറിയ മുഴുവൻ എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെയും ഗുണനഫലമാണ്. ഫാക്ടോറിയലിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ '!' ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

അതായത് $n! = n(n-1)(n-2)\times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

ഉദാഹരണമായി

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

$1! = 1$

**കുറിപ്പ്:** പൊതുവെ $0! = 1$ എന്ന് അംഗീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. സംഖ്യകൾ ഒന്നും തമ്മിൽ ഗുണിക്കാതെ 1 കിട്ടുന്നത് ചിലപ്പോൾ വിചിത്രമായി തോന്നാം. എന്നാൽ ഇത് ധാരാളം സമവാക്യങ്ങൾ ലഘൂകരിക്കുന്നതിന് സഹായിക്കുന്നു.

n വസ്തുക്കളിൽ നിന്നുള്ള r വസ്തുക്കളുടെ ക്രമമാറ്റങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ സാധാരണയായി ${}^nP_r$ എന്നോ $P_{(n,r)}$ എന്നോ സൂചിപ്പിക്കും.

$${}^nP_r = P_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

r = n ആണെങ്കിൽ, $${}^np_n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

ഇവന്റുകൾ ഏതെല്ലാം രീതിയിൽ സംഭവിക്കാം എന്ന് കണക്കാക്കുന്നതിന് ക്രമമാറ്റം ഉപയോഗിക്കാം.

### ചേർത്തുവയ്ക്കലുകൾ (Combinations)

'n' വ്യത്യസ്തങ്ങളായ വസ്തുക്കളിൽ നിന്നും 'r' $[r \leq n]$ വ്യത്യസ്തങ്ങളായ വസ്തുക്കളുടെ ചേർത്തു വയ്ക്കലുകളുടെ എണ്ണത്തെ ${}^nC_r$ അല്ലെങ്കിൽ C(n,r) അല്ലെങ്കിൽ $\binom{n}{r}$ എന്ന് എഴുതാം.

$${}^nC_r = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{n(r-1)\times\ldots 2\times 1} = \frac{n!}{(n-r)!}\times\frac{1}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

അതായത് ഈ സമവാക്യം $${}^nC_r = \binom{n}{r} = C(n,r) = = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

10 ചോദ്യങ്ങളുള്ള ഒരു പട്ടികയിൽ നിന്നും 4 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം എഴുതണം. എത്ര തരത്തിലുള്ള വിവിധ തെരഞ്ഞെടുപ്പുകൾ ആകാം?

തെരഞ്ഞെടുപ്പുകളുടെ എണ്ണം = $^{10}C_4 = \dfrac{10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4} = 210$

**കുറിപ്പ്**

$${}^nC_r = {}^nC_{n\ r}$$

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = {}^nC_{n-r}$$

ഉദാഹരണമായി : $\dbinom{16}{3} = \dbinom{16}{13}$

$$\binom{16}{3} = \frac{16!}{3!13!}$$

$$\binom{16}{13} = \frac{16!}{13!3!}$$

'n' വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളിൽ നിന്നും എത്രയെങ്കിലും എണ്ണം വ്യത്യസ്ത വസ്തുക്കളുടെ ചേർത്തുവയ്ക്കലുകളുടെ എണ്ണം (കുറച്ച് അല്ലെങ്കിൽ എല്ലാ വസ്തുക്കളും എടുക്കുവാനുള്ള എണ്ണം)

$${}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+\ldots+{}^nC_n = 2^n-1 \text{ ആണ്.}$$

### നിയന്ത്രണത്തോടെയുള്ള ചേർത്തുവയ്ക്കൽ (Combinations with restrictions)

'n' വസ്തുക്കൾ ഉള്ള ഒരു കൂട്ടത്തിൽ നിന്നും r വസ്തുക്കൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ ചില വസ്തുക്കൾ ഉൾപ്പെടുത്തുകയോ ഒഴിവാക്കുകയോ വേണ്ടി വന്നേക്കാം. k പ്രത്യേക വസ്തുതകളെ ഉൾപ്പെടുത്തണമെങ്കിൽ നമുക്ക് ${}^{n\ k}C_{r-k}$ ചേർത്തുവയ്ക്കലുകൾ ഉണ്ട്.

k പ്രത്യേക വസ്തുതകളെ ഒഴിവാക്കണമെങ്കിൽ ചേർത്തുവയ്ക്കലുകളുടെ എണ്ണം ${}^{n-k}C_r$ ആണ്.

### വിവരണം 8.5

രണ്ട് പുരുഷന്മാരും രണ്ട് സ്ത്രീകളും ഉൾപ്പെട്ട ഒരു ഗ്രൂപ്പിൽ ഉള്ളതിൽ നിന്ന് രണ്ടു പേർ അടങ്ങുന്ന ഒരു സമിതി രൂപീകരിക്കണം. ചുവടെ പറയുന്നവയുടെ സംഭാവ്യത കാണുക.

a) സമിതിയിൽ പുരുഷന്മാരില്ലാതിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

b) സമിതിയിൽ ഒരു പുരുഷൻ ഉണ്ടാവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

c) സമിതിയിൽ രണ്ടു പുരുഷന്മാർ ഉണ്ടാവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

**പരിഹാരം**

ആകെ ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം = 2+2=4. ഈ 4 പേരിൽ നിന്നും 2 പേരെ $^4C_2 = \frac{4\times3}{1\times2} = 6$ രീതികളിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

(a) സമിതിയിൽ പുരുഷന്മാരില്ല എന്നതുകൊണ്ട് സമിതിയിൽ ഉൾപ്പെടേണ്ട രണ്ട് സ്ത്രീകളാണ് അവരെ $^2C_2=1$ രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

അതുകൊണ്ട്, P (പുരുഷന്മാരില്ല)= $\frac{1}{6}$

b) പുരുഷന്മാരുടെ എണ്ണം ഒന്ന് എന്നത് സമിതിയിൽ ഒരു പുരുഷനും ഒരു സ്ത്രീയും ഉണ്ട് എന്നാണ്. 2 പുരുഷന്മാരിൽ നിന്നും ഒരാളെ $2C_1=2$ രീതിയിലും 2 സ്ത്രീകളിൽ നിന്നും ഒരാളെ $2C_1=2$ രീതിയിലും തിരഞ്ഞെടുക്കാം. ഒരുമിച്ച് അവരെ $2C_1 \times 2C_1=4$ രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം

അതുകൊണ്ട് P (ഒരു പുരുഷൻ) = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

c) രണ്ട് പുരുഷന്മാരിൽ നിന്ന് രണ്ടു പേരെ $2C_2=1$രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം

അതുകൊണ്ട് P (2 പുരുഷൻമാർ) = $\frac{1}{6}$

**വിവരണം 8.6**

ഒരു സഞ്ചിയിൽ 7 ചുവപ്പ്, 9 നീല നിറത്തിലുള്ള പന്തുകൾ ഉണ്ട്. 3 പന്തുകൾ ഒരുമിച്ച് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ചുവടെ പറയുന്നവയുടെ സംഭാവ്യത എന്ത്?

a) എല്ലാ പന്തുകളും നീല നിറത്തിലുള്ളവയാകുന്നതിന്.

b) എല്ലാ പന്തുകളും ചുവപ്പ് നിറത്തിലുള്ളവയാകുന്നതിന്.

c) ഒരു ചുവപ്പ് പന്തും രണ്ടുനീല നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളും ആകുന്നതിന്

d) രണ്ട് ചുവപ്പ് പന്തുകളും ഒരു നീലപന്തും ആകുന്നതിന്

**പരിഹാരം**

ആകെ പന്തുകളുടെ എണ്ണം = 16

16 പന്തുകളിൽ നിന്നും 3 പന്തുകളെ $^{16}C_3 = \frac{16\times15\times14}{1\times2\times3} = 560$ രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

a) 9 നീല പന്തുകളിൽ നിന്ന് 3 പന്തുകൾ $^9C_3 = \frac{9\times8\times7}{1\times2\times3} = 84$ രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

P(എല്ലാ പന്തുകളും നീല നിറത്തിലുള്ളതാകുന്നത്) $=\dfrac{84}{560}=\dfrac{3}{20}$

b) 7 ചുവപ്പ് പന്തുകളിൽ നിന്ന് 3 പന്തുകളെ ${}^{7}C_{3}=\dfrac{7\times 6\times 5}{1\times 2\times 3}=35$ രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

P(എല്ലാ പന്തുകളും ചുവപ്പ് നിറത്തിലുള്ളതാകുന്നത്) $=\dfrac{35}{560}=\dfrac{1}{16}$

c) ഒരു ചുവപ്പ് പന്തും രണ്ട് നീല പന്തുകളും ${}^{7}C_{1}\times {}^{9}C_{2}=\dfrac{7}{1}\times\dfrac{9\times 8}{1\times 2}=252$ രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

P(ഒരു ചുവപ്പ്, 2നീല പന്തുകൾ ഉണ്ടാകുന്നത്) $=\dfrac{252}{560}=\dfrac{9}{20}$

d) രണ്ട് ചുവപ്പ് പന്തുകളും ഒരു നീല പന്തും ${}^{7}C_{2}\times {}^{9}C_{1}=\dfrac{7\times 6}{1\times 2}\times\dfrac{9}{1}=189$ രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

P(ഒരു ചുവപ്പ്, 2നീല പന്തുകൾ ഉണ്ടാകുന്നത്) $=\dfrac{189}{560}=\dfrac{27}{80}$

## നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. ഒരു ക്ലാസിൽ 20 ആൺകുട്ടികളും 10 പെൺകുട്ടികളും ഉണ്ട്. 5 പേരടങ്ങുന്ന വ്യത്യസ്തങ്ങളായ എത്ര ടീമുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കാം? 5 പേരടങ്ങിയ ഒരു ടീം തെരഞ്ഞെടുക്കുകയാണെങ്കിൽ അതിൽ 3 ആൺകുട്ടികളും 2 പെൺകുട്ടികളും ഉണ്ടാകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?
2. ഒരു കമ്പനിയിലെ ജോലിക്കാർക്ക് അവരുടെ ഇഷ്ടത്തിനനുസരിച്ച് പ്രതിവാരം രണ്ട് അവധിയെടുക്കുന്നതിന് അനുവദിച്ചിട്ടുണ്ട്. യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുത്ത ഒരു ജോലിക്കാരൻ തിങ്കളാഴ്ചയും ചൊവ്വാഴ്ചയും അവധി എടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?
3. 0 മുതൽ 9 വരെയുള്ള അക്കങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന മൂന്ന് വളയങ്ങളുള്ള ഒരു പൂട്ട് നിങ്ങൾ തുറക്കുവാൻ ശ്രമിക്കുന്നു. ഇതിൽ വിജയിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്? (സൂചന: ഇവിടെ സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ ക്രമത്തിന് പ്രാധാന്യമുണ്ട്.)

### ഇവന്റുകളുടെ ബീജഗണിതം (Algebra of events)

A അല്ല എന്ന ഇവന്റ് അഥവാ A യുടെ പൂരക ഇവന്റ് (complement of A) എന്ന ആശയം സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിൽ വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ടതാണ്. ഉദാഹരണത്തിന് ഒരു പകിട എറിയുമ്പോൾ സാമ്പിൾ മേഖല {1,2,3,4,5,6} ആണ്. ഒറ്റ സംഖ്യ ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള A എന്ന ഇവന്റിൽ 1,3,5 എന്നീ ഫലങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഒറ്റ സംഖ്യ ലഭിക്കാതിരിക്കുവാനുള്ള ഇവന്റിനെ A യുടെ പൂരക ഇവന്റ് എന്നു പറയുന്നു. ഇതിൽ 2,4,6 എന്നീ ഫലങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ പൂരക ഇവന്റുകൾ കാണുക.

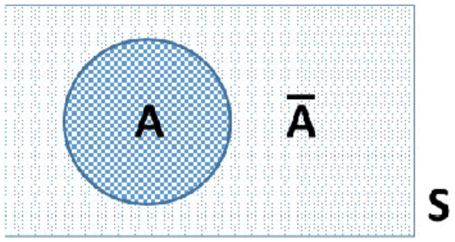
1. പകിട എറിയുമ്പോൾ 6 കിട്ടുന്നത്.
2. ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിൽ നിന്നും തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നഅക്ഷരം വ്യഞ്ജനാക്ഷരമാകുന്നത്.
3. അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുത്ത ഒരു മാസത്തിൽ 31 ദിവസങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നത്
4. ഒരു ആഴ്ചയിലെ തെരഞ്ഞെടുത്ത ദിവസം ഞായറാഴ്ച ആകുന്നത്.

ഈ ഇവന്റുകളുടെ പൂരക ഇവന്റുകളാണ്.

1. 1,2,3,4 അല്ലെങ്കിൽ 5 കിട്ടുന്നത്.
2. സ്വരാക്ഷരമാകുന്നത്.
3. മാസം ഫെബ്രുവരി, ഏപ്രിൽ, ജൂൺ, സെപ്റ്റംബർ അല്ലെങ്കിൽ നവംബറാകുന്നത്.
4. ദിവസം തിങ്കളാഴ്ച, ചൊവ്വാഴ്ച, ബുധനാഴ്ച, വ്യാഴാഴ്ച, വെള്ളിയാഴ്ച അല്ലെങ്കിൽ ശനിയാഴ്ച ആകുന്നത്.

ഇവന്റ് A അല്ലെങ്കിൽ A യുടെ പൂരകം എന്നത് സാമ്പിൾ മേഖലയിലുള്ളതും എന്നാൽ A യിൽ ഇല്ലാത്തതുമായ ഫലങ്ങളുടെ കൂട്ടമാണ്. A യുടെ പൂരക ഇവന്റ്, $\overline{A}$ അല്ലെങ്കിൽ $A'$ അല്ലെങ്കിൽ $A^c$ എന്നെഴുതാം.

**പൂരക ഇവന്റുകളുടെ വെൻ ചിത്രം (Venn diagram for complementery events)**



**പൂരക ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുന്ന നിയമം**

$$P(A)+P(\overline{A}) = 1$$

$$\therefore\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

ഒരു ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത അറിയാമെങ്കിൽ പൂരക ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് 1 ൽ നിന്ന് ഈ സംഭാവ്യത കുറച്ചാൽ മതി.

### വിവരണം 8.7

സംഗീത, ഹരിത എന്നീ രണ്ട് കളിക്കാർ തമ്മിൽ ഒരു ടെന്നീസ് മത്സരം നടക്കുന്നു. സംഗീത ഈ മത്സരം വിജയിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.6 ആണ്. എങ്കിൽ ഹരിത ഈ മത്സരം വിജയിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്താണ്?

**പരിഹാരം**

H, S എന്നിവ യഥാക്രമം ഹരിത വിജയിക്കുന്നതിനും സംഗീത വിജയിക്കുന്നതിനുള്ള ഇവന്റുകൾ ആയാൽ.

$P(S) = 0.6$

$P(H) = 1 - P(S)$ [H ഉം S ഉം പൂരകങ്ങളാണ്]

$= 1 - 0.6$

$= 0.4$

### വിവരണം 8.8

ബേബി രണ്ട് നാണയങ്ങൾ കറക്കുന്നു. കുറഞ്ഞത് ഒരു തലയെങ്കിലും കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

**പരിഹാരം**

സാധ്യമായ ഫലങ്ങൾ (H,H), (T,T), (H,T), (T,H) എന്നിവയാണ്. ഇവിടെ നാല് ഫലങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഒരു തലയും കിട്ടാതിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത = $\frac{1}{4}$

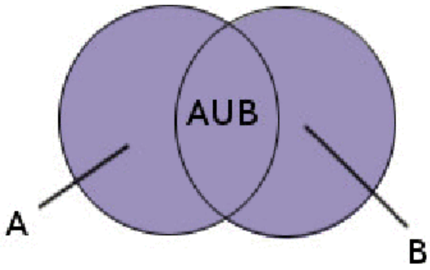
ഒരു തലയെങ്കിലും കിട്ടുവാനുള്ള സംഭാവ്യത

$= 1 -$ ഒരു തലയും കിട്ടാതിരിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

[ഇവിടെ 3 ഫലങ്ങളിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു തലയെങ്കിലും ഉണ്ട്. അതുകൊണ്ട് ഒരു തലയെങ്കിലും ലഭിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{3}{4}$ ആണ്]

### 'A അല്ലെങ്കിൽ B' എന്ന ഇവന്റ് (Event A or B)

A, B എന്നീ രണ്ട് ഇവന്റുകൾ ഉപയോഗിച്ച് 'A അല്ലെങ്കിൽ B' (A യോ B യോ) എന്ന പുതിയ ഇവന്റ് നമുക്ക് നിർവചിക്കാം. ഇതിൽ "A എന്ന ഇവന്റോ' 'B എന്ന ഇവന്റോ' ആകാം. അല്ലെങ്കിൽ ഇവ രണ്ടുമോ" ആകാം. അതല്ലെങ്കിൽ "ഇവയിൽ ഒരു ഇവന്റെങ്കിലും" സംഭവിക്കുന്നത് എന്നും നിർവചിക്കാം. ഈ ഇവന്റിനെ A or B അല്ലെങ്കിൽ AUB [A യോഗം B] എന്ന് എഴുതാം. ഇതിൽ A യിലുള്ളതോ B യിലുള്ളതോ അല്ലെങ്കിൽ A യിലും B യിലും ഉള്ളതോ ആയ ഫലങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.



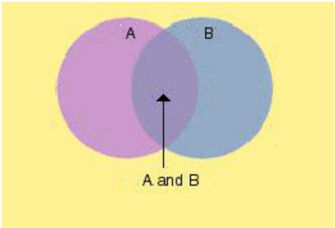

'A അല്ലെങ്കിൽ B' യുടെ വെൻ ചിത്രം

### 'A യും B യും' എന്ന ഇവന്റ് (Event A and B)

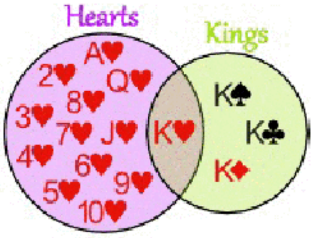
'A യും B യും' എന്ന ഇവന്റ് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് A എന്ന ഇവന്റും B എന്ന ഇവന്റും ഒരുമിച്ചു സംഭവിക്കുക എന്നതാണ്.

ഈ ഇവന്റിനെ A യും B യും അല്ലെങ്കിൽ A &B അല്ലെങ്കിൽ $A \cap B$ (A സംഗമം B) എന്ന് എഴുതാം. A &B എന്ന ഇവന്റിൽ A യിലും B യിലും പൊതുവായുള്ള എല്ലാ ഫലങ്ങളും ഉണ്ട്.

'A യും B യും' എന്ന ഇവന്റിന്റെ വെൻ ചിത്രം.




ഉദാഹരണമായി



ഹാർട്ടും രാജാവും ഒരുമിച്ച് സംഭവിക്കുന്നത് ഒരു ചീട്ടിലാണ്. (ഹാർട്ട് ചീട്ടുകളിൽ ഒന്ന് രാജാവ് ചീട്ട് ആണ്).

**ഇവന്റുകളുടെ ബീജഗണിതം (Algebra of Events)**

1. $\overline{A}$ $\rightarrow$ A അല്ലാത്തത്
2. A അല്ലെങ്കിൽ B $\rightarrow$ A യിലും B യിലും കുറഞ്ഞത് ഒന്നിലെങ്കിലും
3. A യും B യും $\rightarrow$ രണ്ട് ഇവന്റുകളും (A യും B യും ഒരുമിച്ച് സംഭവിക്കുന്നത്)
4. $\overline{A}$ യും $\overline{B}$ ഉം $\rightarrow$ A യിലും ഇല്ല B യിലും ഇല്ല.
5. A യും $\overline{B}$ ഉം $\rightarrow$ A യിൽ ഉണ്ട് B യിൽ ഇല്ല.
6. (A യും $\overline{B}$ ഉം) അല്ലെങ്കിൽ ( $\overline{A}$ ഉം B യും) $\rightarrow$ A, B എന്നിവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിൽ മാത്രം

## 8.4. സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലന നിയമങ്ങൾ (Addition Rules for probability)

ചില പ്രശ്നങ്ങളിൽ പലപ്പോഴും രണ്ടോ അതിലധികമോ ഇവന്റുകളുടെ സംഭാവ്യത ഉൾപ്പെടാറുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, സർവ്വകലാശാല വിദ്യാർഥികളുടെ ഒരു വലിയ കൂട്ടം ഉണ്ട് എന്ന് വിചാരിക്കുക. അതിൽ നിന്നും ഒരു വിദ്യാർഥിയെ അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുത്താൽ താഴെപറയുന്ന സംഭാവ്യതകൾ ഒരാൾക്ക് കണ്ടുപിടിക്കണമെന്നിരിക്കട്ടെ.

1. ഒരു വാണിജ്യശാസ്ത്ര ബിരുദവിദ്യാർഥി ആകുന്നത്.
2. ആ വിദ്യാർഥി ഒരു പെൺകുട്ടി ആകുന്നത്.
3. ആ വിദ്യാർഥി ഒരു പെൺകുട്ടിയും ഒപ്പം ഒരു വാണിജ്യശാസ്ത്രബിരുദവിദ്യാർഥി ആകുന്നത്.

ഇനി മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. ഒരു കൂട്ടത്തിൽ വാണിജ്യ ശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥികളും ഗണിത ശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥികളും ഉണ്ട് എന്ന് വിചാരിക്കുക. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു വിദ്യാർഥിയെ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ വാണിജ്യശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥിയാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്താണ്?

ഇവിടെ ഒരു വിദ്യാർഥി ഒന്നുകിൽ വാണിജ്യശാസ്ത്രവിദ്യാർഥിയാകാം അല്ലെങ്കിൽ ഗണിതശാസ്ത്രവിദ്യാർഥി ആകാം.

മുകളിൽ പറഞ്ഞ രണ്ട് ഉദാഹരണങ്ങളിൽ ആദ്യത്തേതിൽ ഒരു വിദ്യാർഥിയെ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ ഒരേ സമയം വാണിജ്യ ശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥിയും പെൺകുട്ടിയും ആകാം. രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ ഒരു വിദ്യാർഥിക്ക് ഒരേ സമയത്ത് വാണിജ്യ ശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥിയും ഗണിത ശാസ്ത്ര വിദ്യാർഥിയും ആകുവാൻ സാധിക്കില്ല. രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ ഇവന്റുകൾ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളാണ്. ആദ്യ ഉദാഹരണത്തിൽ ഇവന്റുകൾ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകൾ അല്ല.

രണ്ടോ അതിലധികമോ ഇവന്റുകളുടെ യോഗത്തിന്റെ സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുന്നതിന് (രണ്ടോ അതിലധികമോ ഇവന്റുകളിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു ഇവന്റ് എങ്കിലും സംഭവിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുന്നതിന്) സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലന നിയമം ഉപയോഗിക്കാം.

A യും B യും രണ്ട് ഇവന്റുകളാണെങ്കിൽ A യോ B യോ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത,

P(A അല്ലെങ്കിൽ B) = P(A)+P(B) - P(A യും B യും)

A യും B യും പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളാണെങ്കിൽ P(A അല്ലെങ്കിൽ B)= P(A)+P(B)

### വിവരണം 8.9

ആറ് മുഖങ്ങളുള്ള ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നു. 2 അല്ലെങ്കിൽ 5 എന്ന മുഖം ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്താണ്?

**പരിഹാരം**

A എന്നത് '2 എന്ന മുഖവും' B എന്നത് '5 എന്ന മുഖവും' ആയ ഇവന്റുകളാണ്. ഈ ഇവന്റുകൾക്ക് ഒരുമിച്ച് സംഭവിക്കുവാൻ സാധിക്കുകയില്ല. അതുകൊണ്ട് ഇവ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളാണ്.

$$P(A)=\frac{1}{6},\quad P(B)=\frac{1}{6}$$

P(A അല്ലെങ്കിൽ B) = P(A)+P(B)

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

### വിവരണം 8.10

ഒരു ചക്രത്തിന് മഞ്ഞ, നീല, പച്ച, ചുവപ്പ് എന്നീ നിറങ്ങളിലുള്ള തുല്യമായ 4 വൃത്ത ഖണ്ഡങ്ങളുണ്ട്. ഈ ചക്രം കറക്കി വിട്ടാൽ സൂചകം ചുവപ്പിലോ നീലയിലോ വന്ന് നിൽക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

**പരിഹാരം**

P (ചുവപ്പ്) $=\frac{1}{4}$

P (നീല) $=\frac{1}{4}$

P (ചുവപ്പ് അല്ലെങ്കിൽ നീല) $=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

### വിവരണം 8.11

ഒരു സ്ഫടിക ഭരണിയിൽ 1 ചുവപ്പ്, 3 പച്ച, 2 നീല, 4 മഞ്ഞ നിറത്തിലുള്ള പന്തുകൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും അനിയതമായി ഒരു പന്ത് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ പന്ത് മഞ്ഞയോ പച്ചയോ നിറത്തിൽ ഉള്ള പന്ത് ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

പരിഹാരം

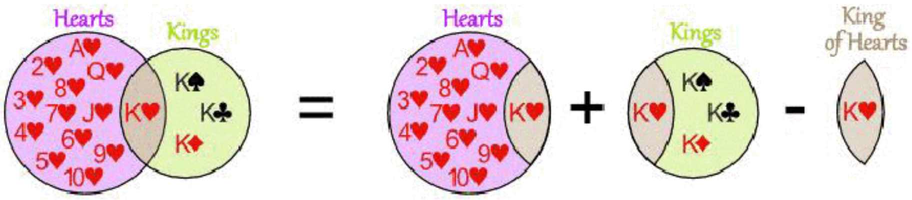
$$P\ (\text{മഞ്ഞ}) = \frac{4}{10} \qquad P\ (\text{പച്ച}) = \frac{3}{10}$$

$$P\ (\text{മഞ്ഞ അല്ലെങ്കിൽ പച്ച}) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

മുകളിൽ പറഞ്ഞ പരീക്ഷണങ്ങളിൽ ഇവന്റുകൾ പരസ്പര കേവലങ്ങളാണ്. ഇനി പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളല്ലാത്ത ചില പരീക്ഷണങ്ങൾ നോക്കാം.

### വിവരണം 8.12

52 ചീട്ടുകളിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു ചീട്ട് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. രാജാവ് അല്ലെങ്കിൽ ഹാർട്ട് ചീട്ട് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.




പരിഹാരം

$$P\ (\text{രാജാവ്}) = \frac{4}{52}$$

$$P\ (\text{ഹാർട്ട്}) = \frac{13}{52}$$

$$P\ (\text{രാജാവും ഹാർട്ടും}) = \frac{1}{52}$$

$$P\ (\text{രാജാവ് അല്ലെങ്കിൽ ഹാർട്ട്}) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

ഇവിടെ ഇവന്റുകൾ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളല്ല.

A , B എന്നീ ഇവന്റുകൾക്ക്

$P(\text{A അല്ലെങ്കിൽ B}) \leq P(A) + P(B)$ അതായത് $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

$P(\text{A യും Bയും}) \leq P(A)$ അതായത് $P(A \cap B) \leq P(A)$

$P(\text{A യും Bയും}) \leq P(B)$ അതായത് $P(A \cap B) \leq P(B)$

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. ഒരാൾ 4 പ്രാവശ്യം നിറയൊഴിച്ചാൽ 3 എണ്ണം ലക്ഷ്യത്തിൽ കൊള്ളുമെന്ന് അറിയാം. വേറൊരാൾ 4 പ്രാവശ്യം നിറയൊഴിച്ചാൽ 2 എണ്ണം ലക്ഷ്യത്തിൽ കൊള്ളും. രണ്ട് പേരും ലക്ഷ്യസ്ഥാനത്ത് നിറയൊഴിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{3}{8}$ ആണ്. ഇവർ ഓരോരുത്തരും ഒരു തവണ നിറയൊഴിച്ചാൽ, ഇവരിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരാളെങ്കിലും ലക്ഷ്യസ്ഥാനത്ത് നിറയൊഴിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?
2. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 1 മുതൽ 30 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ രേഖപ്പെടുത്തിയ 30 പന്തുകൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. പന്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ സംഖ്യ

   (a) 5 ന്റെയോ 7 ന്റെയോ ഗുണിതമാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

   (b) 3ന്റെയോ 7ന്റെയോ ഗുണിതമാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

## 8.5 സംഭാവ്യതയുടെ ആവൃത്തി സമീപനം (Frequency Approach to Probability)

*ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ നിന്നുള്ള സംഭാവ്യത*

ഒരു ഗവേഷകൻ ഒരു പ്രത്യേക ഇനം തേയിലയുടെ രുചി ഇഷ്ടപ്പെട്ടോയെന്ന് 50 പേരോട് ചോദിക്കുന്നു. ഇതിന്റെ പ്രതികരണങ്ങൾ 'അതെ', 'അല്ല', 'തീരുമാനിച്ചില്ല' എന്നിങ്ങനെയാണ്.

| പ്രതികരണം | ആവൃത്തി |
|---|---|
| അതെ | 30 |
| അല്ല | 16 |
| തീരുമാനിച്ചില്ല | 4 |

വിവിധ പ്രതികരണങ്ങളുടെ സംഭാവ്യത ഇവിടെ കണക്കാക്കാം. ഒരാളുടെ പ്രതികരണം അതെയെന്ന് ആകാവുന്ന സംഭാവ്യത $\frac{30}{50}$ ആണ്.

(50 പേരിൽ 30 പേർ 'അതെ' യെന്ന് പ്രതികരിക്കുന്നു)

ഒരു ആവൃത്തി പട്ടിക തന്നിരുന്നാൽ, സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുന്നത്

$$P(A) = \frac{A \text{ യുടെ ആവൃത്തി}}{\text{ആവൃത്തികളുടെ ആകെ എണ്ണം}}$$

### വിവരണം 8.13

100 പേരുടെ ഒരു സാമ്പിളിൽ 42 പേരുടെ രക്തഗ്രൂപ്പ് O യും 44 പേരുടെ രക്തഗ്രൂപ്പ് A യും 10 പേരുടെ രക്തഗ്രൂപ്പ് B യും 4 പേരുടെ രക്തഗ്രൂപ്പ് AB യും ആണ്. ഇതിൽ നിന്നും

ഒരാളെ അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുത്താൽ അയാളുടെ രക്തഗ്രൂപ്പ് ചുവടെ പറയുന്നത് ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

a) O ആകുന്നത്

b) A അല്ലെങ്കിൽ B ആകുന്നത്

c) A യും അല്ല O യും അല്ല.

d) AB അല്ലാത്തത്

### പരിഹാരം

| ഗ്രൂപ്പ് | ആവൃത്തി |
|---|---|
| A | 44 |
| B | 10 |
| AB | 4 |
| O | 42 |

$$P(O) = \frac{42}{100} = 0.42$$

$$P(\text{A അല്ലെങ്കിൽ B}) = \frac{44}{100} + \frac{10}{100} = 0.54$$

$$P(\text{A യും അല്ല O യും അല്ല}) = \frac{10+4}{100} = \frac{14}{100} = 0.14$$

$$P(\text{AB അല്ലാത്തത്}) = 1 - \frac{4}{100} = \frac{96}{100} = 0.96$$

> ഒരു പരീക്ഷണത്തിലെ ഫലങ്ങൾ തുല്യസാധ്യതയുള്ളവയാണെങ്കിൽ സംഭാവ്യത ആപേക്ഷികാവൃത്തി (Relative frequency) യ്ക്ക് തുല്യമാണ്.

### സാംഖ്യകാനുക്രമം (Statistical Regularity)

ഒരു നാണയം കറക്കിയാൽ, തല കിട്ടുവാനുള്ള സംഭാവ്യത നമ്മുടെ അറിവിൽ $\frac{1}{2}$ ആണ്. എന്നാൽ ഒരു നാണയം 50 തവണ എറിഞ്ഞാൽ തലകളുടെ എണ്ണം 25 ആകുമോ? സാധാരണയായി ഈ പരീക്ഷണത്തിൽ തലകളുടെ എണ്ണം 25 ആണ് പ്രതീക്ഷിക്കുന്നത്. എന്നാൽ യാദൃശ്ചിക കാരണങ്ങൾ കൊണ്ട് മിക്കവാറും 25 തലകൾ കിട്ടാറില്ല.

തല കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് നടത്തുന്ന ഉദ്യമങ്ങളുടെ എണ്ണം ചെറുതാണെങ്കിൽ സംഭാവ്യത സാധാരണയായി കൃത്യം $\frac{1}{2}$ ആകണമെന്നില്ല. എന്നാൽ

ഉദ്യമങ്ങളുടെ എണ്ണം വർധിപ്പിച്ചാൽ, തല കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തപ്രകാ cap f k wn nh yX b nb $\frac{1}{2}$ നോട് അടുക്കുന്നതായി കാണാം.

ഒരു പരീക്ഷണത്തിലെ ഉദ്യമങ്ങളുടെ എണ്ണം 'n' തവണയും ഒരു ഇവന്റ് സംഭവിക്കുന്ന എണ്ണം '$f$' തവണയും ആണെന്നും വിചാരിക്കുക. 'n' ന്റെ വലിയ വിലകൾക്ക് ആവൃത്തി അംശബന്ധം, $\frac{f}{n}$ ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യയിലേക്ക് അടുക്കുന്നു ഈ പ്രതിഭാസത്തെ സാംഖ്യകാനുക്രമം അല്ലെങ്കിൽ വലിയ സംഖ്യകളുടെ നിയമം (law of large numbers) എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

**സംഭാവ്യതയുടെ ആവൃത്തി നിർവചനം (frequency definition of probability) അല്ലെങ്കിൽ സംഭാവ്യതയുടെ അനുഭവസിദ്ധ നിർവചനം (empirial definition of probability)**

'n' ന്റെ വില വലുതാകുമ്പോഴുള്ള ആവൃത്തി അംശബന്ധത്തിന്റെ പരിധിയാണ് സംഭാവ്യത.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{f}{n}$$

സംഭാവ്യതയുടെ പ്രാമാണിക നിർവചനവും അനുഭവസിദ്ധ നിർവചനവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എന്തെന്നാൽ പ്രാമാണിക നിർവചനത്തിൽ ഫലങ്ങളെല്ലാം തുല്യസാധ്യതയുള്ളവയാണെന്ന് അനുമാനിക്കുന്നു. എന്നാൽ അനുഭവസിദ്ധ നിർവചനത്തിൽ സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് യഥാർഥ പരീക്ഷണത്തിൽ കിട്ടുന്ന ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ ആശ്രയിച്ചാണ്. സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്, ഒരാൾക്ക് ഒരു പരീക്ഷണത്തിലെ ഉദ്യമങ്ങളുടെ എണ്ണം വളരെ കൂട്ടുകയും അതിലെ ആപേക്ഷിക ആവൃത്തി കണക്കാക്കുകയും വേണം. അനുഭവസിദ്ധ സംഭാവ്യത ഫലങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കും.

**പ്രവർത്തനം**

നിങ്ങൾ താമസിക്കുന്ന പ്രദേശത്തെ തദ്ദേശസ്വയം ഭരണസ്ഥാപനത്തിൽ നിന്നും കഴിഞ്ഞ 20 വർഷത്തെ ജനനം രേഖപ്പെടുത്തിയ ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുക. പത്ത്, ഇരുപത് വർഷത്തെ സ്ത്രീ - പുരുഷജനനത്തിന്റെ സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുക.

## 8.6. സംഭാവ്യതയിലെ സ്വയം പ്രമാണങ്ങൾ (Axioms on probability)

ഒരു അനിയത പരീക്ഷണത്തിലെ സാമ്പിൾ മേഖല S ഉം അതിലെ ഒരു ഇവന്റ് A യും ആണെങ്കിൽ P(A) എന്ന സംഖ്യ ഇവന്റ് A യുടെ സംഭാവ്യതയാകുന്നത് താഴെ പറയുന്ന പ്രമാണങ്ങൾക്ക് വിധേയമായാണ്.

**പ്രമാണം – 1** ന്യുനസംഖ്യ അല്ലാത്തത് (Non- negativity)

ഏതൊരു ഇവന്റ് A - യ്ക്കും $P(A) \geq 0$. ഈ പ്രമാണം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് സംഭാവ്യത ഒരിക്കലും ന്യൂനസംഖ്യ ആകില്ല എന്നും സംഭാവ്യതയുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില പൂജ്യമാണ് എന്നും ആണ്.

**പ്രമാണം-2** നിശ്ചിതമായത് (Certainity)

S ഒരു സാമ്പിൾ മേഖല ആണെങ്കിൽ P(S) = 1. ഈ പ്രമാണം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് സാമ്പിൾ മേഖലക്ക് തുല്യമായി ഒരു ഇവന്റ് നിർവചിച്ചാൽ ആ ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത 1 ആണ്. സംഭാവ്യതയുടെ പരമാവധി വില 1 ആണ്.

**പ്രമാണം-3** സങ്കലനത (Additivity)

$A_1, A_2$ എന്നീ ഇവന്റുകളിൽ പൊതുവായ അംഗങ്ങൾ ഇല്ലായെങ്കിൽ $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ അതായത് $A_1, A_2$ എന്നീ ഇവന്റുകൾക്ക് പൊതുവിൽ അംഗങ്ങളില്ലായെങ്കിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു ഇവന്റിന്റെയെങ്കിലും സംഭാവ്യത, ഇവന്റുകളുടെ സംഭാവ്യതയുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണ്.

പ്രമാണം 3 ന്റെ സാമാന്യവൽക്കരണം

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ എന്നിവ പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളാണെങ്കിൽ

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_K)$$

## ആത്മനിഷ്ഠ സംഭാവ്യത (Subjective Probability)

ചില ഊഹങ്ങളുടെയോ അഭിപ്രായപ്രകടനങ്ങളുടെയോ കൃത്യതയില്ലാത്ത വിവരങ്ങളുടേയോ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് ആത്മനിഷ്ഠ സംഭാവ്യത പറയുന്നത്. ഇത് വ്യക്തിയുടെ പരിചയവും ഒരു പ്രശ്നപരിഹാരത്തിലുള്ള കഴിവിനെയും ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് ഒരു ഭിഷഗ്വരൻ രോഗിയെ പരിശോധിച്ചതിന് ശേഷം ശസ്ത്രക്രിയ വേണ്ടിവരാനുള്ള സാധ്യത 30% ആണ് എന്നു പറയുന്നു. ഒരു ലേഖകൻ അടുത്ത FIFA ലോകകപ്പ് ബ്രസീൽ നേടുവാനുള്ള സാധ്യത 80% ആണ് എന്ന് പറയുന്നു.

## നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

*ഈ അധ്യായത്തിൽ സംഭാവ്യതയുടെ അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ പരിചയപ്പെടുത്തുകയും തീരുമാനങ്ങൾ എടുക്കുന്നതിൽ സംഭാവ്യത എങ്ങനെ സഹായകരമാണെന്നും വിശദീകരിച്ചു. സംഭാവ്യത ഒരു ഇവന്റ് സംഭവിക്കുന്നതിനുള്ള സാംഖ്യാപരമായ അളവായി എങ്ങനെ വിശകലനം ചെയ്യാമെന്നും വിശദീകരിച്ചും നമ്മൾ ക്ലാസിക്കൽ സംഭാവ്യത എന്ന പദം പരിചയപ്പെട്ടു. കൂടാതെ ഇവന്റുകളുടെ ബീജഗണിതത്തിലൂടെയും സങ്കലന നിയമത്തിലൂടെയും എണ്ണൽ നിയമങ്ങളിലൂടെയും സാംഭാവ്യത കണക്കാക്കാമെന്നും മനസ്സിലാക്കി. അനുഭവസിദ്ധ സംഭാവ്യത, ആത്മനിഷ്ഠ സംഭാവ്യത, സംഭാവ്യതയുടെ സ്വയം പ്രമാണതത്ത്വങ്ങൾ എന്നിവ അവതരിപ്പിച്ചു.*

### പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പഠിക്കുന്നതിലൂടെ പഠിതാവ്:

- പ്രധാന തീരുമാനങ്ങൾ എടുക്കുന്നതിന് മുമ്പ് അതിലുൾപ്പെട്ട അനിശ്ചിതത്ത്വങ്ങളുടെ അളവ് തിരിച്ചറിയുന്നു.

- അനിയതഫല പരീക്ഷണങ്ങൾ, സാമ്പിൾ മേഖല, സാമ്പിൾ ബിന്ദു, ഇവന്റ് എന്നിവ തിരിച്ചറിയുന്നു.
- സംഭാവ്യതയുടെ വിവിധ സമീപനങ്ങൾ വിവരിക്കുന്നു.
- പ്രാമാണിക നിർവചനം ഉപയോഗിച്ച് സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുക.
- സങ്കലന നിയമം ഉപയോഗിച്ച് ഇവന്റുകളുടെ സംയുക്ത സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുക.

### വിലയിരുത്തൽ ഇനങ്ങൾ

**ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക**

1. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ അനിയതഫല പരീക്ഷണം ഏത്?

   (a) നാണയം കറക്കുന്നു.

   (b) 6 മുഖങ്ങളുള്ള ഒരു പകിട എറിയുന്നു.

   (c) വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങളിലുള്ള പന്തുകൾ ഉള്ള ഒരു ഭരണിയിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് എടുക്കുന്നു

   (d) മുകളിൽ പറഞ്ഞവയെല്ലാം

2. രണ്ട് നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയം കറക്കുകയും അവയുടെ മുഖങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ചുവടെ പറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് പ്രാഥമിക ഇവന്റ്?

   (a) കുറഞ്ഞത് ഒരു തലയെങ്കിലും കിട്ടുന്നത്

   (b) കൃത്യം ഒരു തല കിട്ടുന്നത്

   (c) പരമാവധി ഒരു തല കിട്ടുന്നത്.

   (d) ഒരു തലയും കിട്ടാതിരിക്കുന്നത്

3. ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ അക്ഷരങ്ങളിൽ നിന്നും അനിയതമായി ഒരു അക്ഷരം എടുത്താൽ അത് സ്വരാക്ഷരം ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

   (a) $\frac{21}{26}$ (b) $\frac{5}{26}$ (c) $\frac{14}{26}$ (d) 0

4. ഒന്നു മുതൽ 11 വരെയുള്ള (രണ്ടും ഉൾപ്പെടെ) എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ നിന്ന് ഒരു സംഖ്യ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഇത് ഒറ്റ സംഖ്യയാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

   (a) $\frac{1}{11}$ (b) $\frac{6}{11}$ (c) 0 (d) 1

5. ഒരാഴ്ചയിലെ ഒരു ദിവസം അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. അത് തിങ്കളാഴ്ചയോ ചൊവ്വാഴ്ചയോ ആകുന്നതിന് ഉള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

   (a) $\frac{5}{7}$ (b) $\frac{2}{7}$ (c) $\frac{1}{7}$ (d) 0

6. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 6 നീല, 9 പച്ച, 4 ചുവപ്പ്, 7 മഞ്ഞ പന്തുകളുണ്ട്. അനിയതമായി ഒരു പന്ത് തെരഞ്ഞെടുത്താൽ ആ പന്ത് നീലയോ, മഞ്ഞയോ ആവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

(a) $\frac{21}{26}$ (b) $\frac{5}{26}$ (c) $\frac{13}{26}$ (d) 0

7. ആറ് മുഖങ്ങളുള്ള ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നു. മുകളിൽ വരുന്ന സംഖ്യ 3 ൽ കൂടുതലോ ഇരട്ട സംഖ്യയോ ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

(a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{2}{6}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) 0

8. P(A അല്ലെങ്കിൽ B)= P(A)+P(B) എന്നത് അർഥമാക്കുന്നത് A യും B യും

(a) സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകൾ (b) പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകൾ

(c) തുല്യ സാധ്യതയുള്ള ഇവന്റുകൾ (d) ഇതൊന്നുമല്ല

9. P(A അല്ലെങ്കിൽ B) നൽകുന്ന സംഭാവ്യത

(a) A എന്ന ഇവന്റിന്റെ (b) കുറഞ്ഞത് ഒരു ഇവന്റിന്റെയെങ്കിലും

(c) കൃത്യം ഒരു ഇവന്റിന്റെ (d) A യുടെയും B യുടെയും

10. ഒരു പരീക്ഷണത്തിലെ ഫലങ്ങൾ തുല്യ സാധ്യതയുള്ളവയാണെങ്കിൽ സംഭാവ്യത ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതിന് തുല്യമായിരിക്കും.

(a) ആവൃത്തി (b) ആപേക്ഷിക ആവൃത്തി

(c) സഞ്ചിതാവൃത്തി (d) ആകെ ആവൃത്തി

**ഉത്തരങ്ങൾ**

1-d, 2-d, 3-b, 4-b, 5-b, 6-c, 7-a, 8-b, 9-b, 10-b

11. ഒരു നാണയം രണ്ട് തവണ കറക്കുന്നു. കുറഞ്ഞത് ഒരു തലയെങ്കിലും ലഭിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

ഉത്തരം 3/4

12. ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നു. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഇവന്റുകളുടെ സംഭാവ്യത കാണുക.

(a) അഭാജ്യ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിന്.

(b) മൂന്നോ അതിൽ കൂടുതലോ ആയ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിന്.

(c) 6 ൽ കൂടിയ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിന്.

(d) 6 ൽ കുറവായ ഒരു സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിന്.

**ഉത്തരങ്ങൾ**

a) 3/6, b) 4/6, c) 0, d) 5/6

13. 52 ചീട്ടുകൾ ഉള്ള ഒരു കൂട്ടത്തിൽ നിന്നും ഒരു ചീട്ട് എടുക്കുന്നു.

(a) സാമ്പിൾ മേഖലയിൽ എത്ര ഫലങ്ങളാണ് ഉള്ളത്.

(b) എടുത്ത ചീട്ട് സ്പെയിഡിലെ ഏസ് ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

(c) ചീട്ട് ചുവന്ന നിറത്തിലുള്ളതാകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

(d) ചീട്ട് ഏസ് ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

**ഉത്തരം**

a) 52, b) 1/52, c)1/2, d) 1/13.

14. ഒരു ഉപദേശസമിതിയിൽ 4 ആൺകുട്ടികളും 6 പെൺകുട്ടികളും ഉണ്ട്. ഈ ഉപദേശക സമിതിയിൽ നിന്നും ഒരാളെ അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുത്താൽ, പെൺകുട്ടി ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

ഉത്തരം 3/5

15. മൂന്ന് നാണയങ്ങൾ ഒരുമിച്ച് കറക്കുന്നു. ചുവടെ പറയുന്ന ഫലങ്ങൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

(a) 3 തലകൾ

(b) 2 തലകൾ

(c) കുറഞ്ഞത് 2 തലകളെങ്കിലും

(d) പരമാവധി 2 തലകൾ

(e) ഒരു തലയും ഇല്ല

(f) കൃത്യം രണ്ട് വാലുകൾ

(g) പരമാവധി രണ്ട് വാലുകൾ

ഉത്തരം: (a) 1/8 (b) 3/8 (c) 1/2 (d) 7/8 (e) 1/8 (f) 3/8 (g) 7/8

16. A എന്ന ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത 2/13 ആണ്. എങ്കിൽ 'A അല്ല' എന്ന ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത എന്ത്?

ഉത്തരം: $\frac{11}{13}$

17. 'Assassination' എന്ന വാക്കിൽ നിന്നും ഒരു അക്ഷരം തെരഞ്ഞെടുത്തു. ഈ അക്ഷരം

(a) സ്വരാക്ഷരം ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

(b) വ്യഞ്ജനാക്ഷരം ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

ഉത്തരം: (a) $\frac{6}{13}$ (b) $\frac{7}{13}$

18. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സംഭാവ്യതകൾ ശരിയായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടതാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

1) P(A) = 0.5, P(B) = 0.7, P(A യും B യും) = 0.6

2) P(A) = 0.5, P(B) = 0.4 P(A അല്ലെങ്കിൽ B) = 0.8

ഉത്തരം:

1) അല്ല. കാരണം P(A യും B യും)യുടെ വില P(A) യുടെ വിലയേക്കാൾ കൂടുതൽ ആകുവാൻ സാധിക്കില്ല.

2) ആണ്. കാരണം P(A അല്ലെങ്കിൽ B) $\leq$ P(A)+P(B)

19. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക

| നമ്പർ | P(A) | P(B) | P(A യും B യും) | P(A അല്ലെങ്കിൽ B) |
|---|---|---|---|---|
| 1) | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{15}$ | - |
| 2) | 0.35 | - | 0.25 | 0.6 |
| 3) | 0.5 | 0.35 | - | 0.7 |

ഉത്തരം:

1) 7/15 2) 0.5 3) 0.15

20. P(A) = 3/5 ഉം P(B) = 1/5 ആണ്. A യും B യും പരസ്പര കേവല ഇവന്റുകളാണെങ്കിൽ P(A അല്ലെങ്കിൽ B) കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉത്തരം: 4/5

21. E യും F യും രണ്ട് ഇവന്റുകളാണ്. P(E) = 1/4, P(F) = 1/2, P(E യും F ഉം) = 1/8

i) P(E അല്ലെങ്കിൽ F) കണ്ടുപിടിക്കുക.

ii) P(E യും അല്ല F ഉം അല്ല) കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉത്തരം: i) $\frac{5}{8}$ ii) $\frac{3}{8}$

22. P(A) = 0.42 ഉം P(B) = 0.48 ഉം വരുന്ന രണ്ട് ഇവന്റുകളാണ് A യും B യും. P(A യും B യും) = 0.16 ആണ്. ചുവടെ പറയുന്നവ കണക്കാക്കുക.

i) P(A അല്ലാത്തത്) ii) P(B അല്ലാത്തത്) iii) P(A അല്ലെങ്കിൽ B)

ഉത്തരം: i) 0.58 ii) 0.52 iii) 0.74

23. ഒരു വിദ്യാലയത്തിലെ 40% വിദ്യാർഥികൾ സംഗീതവും 30% വിദ്യാർഥികൾ ആയോധനകലയും പഠിക്കുന്നവരാണ്. 20% വിദ്യാർഥികൾ ഇവ രണ്ടും പഠിക്കുന്നു. ഈ വിദ്യാലയത്തിൽനിന്നും ഒരു വിദ്യാർഥിയെ അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുത്താൽ ആ വിദ്യാർഥി സംഗീതമോ ആയോധനകലയോ പഠിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

ഉത്തരം: 0.5

24. രണ്ടു പരീക്ഷകളെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയാണ് ഒരു പ്രവേശന പരീക്ഷയുടെ ഫലം നിർണയിക്കുന്നത്. അനിയതമായി തിരഞ്ഞെടുക്കുന്ന ഒരു വിദ്യാർഥി ഒന്നാമത്തെ പരീക്ഷ ജയിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.8 ഉം രണ്ടാമത്തെ പരീക്ഷ ജയിക്കുന്നതിന് ഉള്ള സംഭാവ്യത 0.7 ഉം ആണ്. രണ്ട് പരീക്ഷകളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് എങ്കിലും ജയിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.95 ആണ്. എങ്കിൽ ഒരു വിദ്യാർഥി രണ്ട് പരീക്ഷയും ജയിക്കുന്നതിന് ഉള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

ഉത്തരം: 0.55

25. ഒരു ഡ്രൈവിങ് പരീക്ഷയിൽ ഒരു അപേക്ഷകൻ H ടെസ്റ്റും 8 ടെസ്റ്റും ജയിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.5 ഉം ഇതിൽ ഒന്നും ജയിക്കാതിരിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.1 ഉം ആണ്. H-ടെസ്റ്റ് ജയിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.75 ആണെങ്കിൽ, 8 ടെസ്റ്റ് ജയിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

ഉത്തരം: 0.65

26. ഒരു വാണിജ്യ ശാസ്ത്ര ക്ലാസിലെ 60 വിദ്യാർഥികളിൽ 30 പേർക്ക് B.Com നോടും 32 പേർക്ക് B.B.A യോടും 24 പേർക്ക് രണ്ടിനോടും താൽപ്പര്യമുണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു വിദ്യാർഥിയെ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുക.

1) വിദ്യാർഥിക്ക് താൽപ്പര്യം B.Com നോടോ B.B.A യോടോ ആകുന്നതിന്

2) വിദ്യാർഥിക്ക് B.Com നോടും B.B.A യോടും താൽപ്പര്യമില്ല.

3) വിദ്യാർഥിക്ക് BBA യോട് താൽപ്പര്യമുണ്ട് എന്നാൽ B.Com നോട് താൽപ്പര്യമില്ല.

ഉത്തരം: 1) $\frac{19}{30}$ 2) $\frac{11}{30}$ 3) $\frac{4}{30}$

27. ഒരു പെട്ടിയിൽ 10 ചുവന്ന നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളും 20 നീലനിറത്തിലുള്ള പന്തുകളും 30 പച്ച നിറത്തിലുള്ള പന്തുകളും ഉണ്ട്. 5 പന്തുകൾ പെട്ടിയിൽ നിന്നും തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ചുവടെ പറയുന്നവയുടെ സംഭാവ്യത കാണുക.

a) എല്ലാ പന്തുകളും നീലനിറത്തിലുള്ളതാകാൻ

b) കുറഞ്ഞത് ഒരു പന്തെങ്കിലും പച്ച നിറത്തിലുള്ളതാകാൻ.

ഉത്തരം: a) $\frac{^{20}C_5}{^{60}C_5}$ b) $1-\frac{^{30}C_5}{^{60}C_5}$

28. നന്നായി കശക്കിയ 52 ചീട്ടുകളിൽ നിന്നും 4 ചീട്ടുകൾ എടുക്കുന്നു. അവയിൽ 3 സ്പേഡും ഒരു ഡയമണ്ടും ഉണ്ടാകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

ഉത്തരം : $\dfrac{{}^{13}C_3 \times {}^{13}C_1}{{}^{52}C_4}$

29. ഒരു ആശുപത്രിയിൽ ഗർഭിണികൾ തങ്ങിയ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പി ക്കുന്ന പട്ടിക ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

| തങ്ങിയ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം | ഗർഭിണികളുടെ എണ്ണം |
|---|---|
| 3 | 15 |
| 4 | 32 |
| 5 | 56 |
| 6 | 19 |
| 7 | 5 |
| ആകെ | 127 |

ചുവടെ പറയുന്ന സംഭാവ്യതകൾ കാണുക.

1) ഒരു ഗർഭിണി കൃത്യം അഞ്ച് ദിവസം തങ്ങിയതിന്

2) ഒരു ഗർഭിണി തങ്ങിയ ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം 6 ൽ കുറവാകുന്നതിന്

3) ഗർഭിണി പരമാവധി 4 ദിവസം തങ്ങുന്നതിന്

4) ഗർഭിണി കുറഞ്ഞത് 5 ദിവസമെങ്കിലും തങ്ങുന്നതിന്

ഉത്തരം: $\dfrac{56}{127}, \dfrac{103}{127}, \dfrac{47}{127}, \dfrac{80}{127}$

30. ഒരു സ്കൂളിലെ സുവർണ്ണ ജൂബിലി കമ്മിറ്റിയിലെ ആളുകളുടെ വിവരങ്ങൾ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

| നമ്പർ | പേര് | പുരുഷൻ/സ്ത്രീ | വയസ്സ്(വർഷത്തിൽ) |
|---|---|---|---|
| 1 | ആലിസ് | സ്ത്രീ | 28 |
| 2 | ഹരി | പുരുഷൻ | 30 |
| 3 | ഫൈസൽ | പുരുഷൻ | 41 |
| 4 | മോഹൻ | പുരുഷൻ | 33 |
| 5 | ഹരിത | സ്ത്രീ | 46 |

ഇതിൽ നിന്നും ഒരാളെ വക്താവായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. വക്താവ് ഒരു പുരുഷനോ 35 വയസ്സിൽ കൂടുതൽ ഉള്ള ആളോ ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

ഉത്തരം: $\dfrac{4}{5}$

P5X8D9

# 9 സോപാധിക സംഭാവ്യത (Conditional Probability)

## ആമുഖം

മുൻ അധ്യായത്തിൽ സംഭാവ്യതയുടെ അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങളെക്കുറിച്ച് നമ്മൾ ചർച്ച ചെയ്തു. എല്ലാ ഫലങ്ങളും സംഭവിക്കാൻ തുല്യ സാധ്യതയുള്ള പരീക്ഷണങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കാൻ സഹായിക്കുന്നതിന് പ്രാമാണിക സമീപനം ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻമാർ ഉപയോഗിച്ചു വരുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് ഒരു നാണയം കറക്കുമ്പോൾ തല, വാൽ എന്നിവയുടെ സംഭാവ്യത തുല്യമാണെന്ന് പ്രാമാണികസമീപനം വ്യക്തമാക്കുന്നു. സംഭാവ്യതയുടെ ആകെ തുക 1 ആയതിനാൽ തലയുടെയും വാലിന്റെയും സംഭാവ്യത 50% (0.5) വീതം ആയിരിക്കും. അതുപോലെ ഒരു പകിട കറക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ആറ് ഫലങ്ങളുടെ സംഭാവ്യത തുല്യമായിരിക്കും ($\frac{1}{6}$). ചില പരീക്ഷണങ്ങളിൽ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കുന്നതിന് ഗണിതപരമായ വഴികൾ കണ്ടെത്തേണ്ടതുണ്ട്.

## 9.1 സോപാധിക സംഭാവ്യതയുടെ അർത്ഥം (Meaning of Conditional Probability)

ഒരു ക്വിസ് പരിപാടിയിൽ പങ്കെടുക്കുന്ന പ്രദീപിന് ഓരോ ചോദ്യത്തിനും 4 ഉത്തരങ്ങളിൽ ഒന്ന് തെരഞ്ഞെടുക്കാം എന്നറിയാം. ശരിയായ ഉത്തരം അറിയാത്ത അയാൾ ശരിയുത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{4}$ ആണ്. രണ്ട് ഉത്തരങ്ങൾ തെറ്റാണെന്ന് അയാൾക്ക് അറിയാമെന്ന് കരുതിയാൽ സാധ്യമായ ഉത്തരങ്ങളുടെ എണ്ണം 2 ആവുന്നതോടെ ശരിയുത്തരത്തിന്റെ സംഭാവ്യത $\frac{1}{2}$ ആയി മാറുന്നു. ഇവിടെ അധിക വിവരം ലഭിക്കുന്നതോടെ ഇവന്റ് സോപാധികമാകുന്നു.

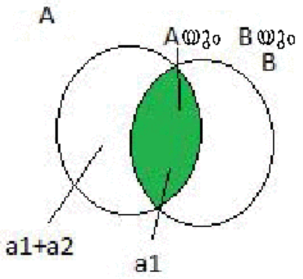
നന്നായി കശക്കിയ ഒരു കൂട് ചീട്ടുകളിൽ നിന്നും ഒരു ചീട്ട് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന ഒരു അനിയതഫല പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കാം. ലഭിച്ച ചീട്ട് ചുവന്നതാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഈ ചീട്ട്എയ്സ് ചീട്ട് ആവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്തായിരിക്കും. ആകെയുള്ള 52 ചീട്ടുകളിൽ 26 എണ്ണം ചുവന്നതായതിനാൽ സാധ്യമായ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം 26 ആയി ചുരുങ്ങുന്നു. അതിനാൽ സംഭാവ്യത $\frac{2}{26}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{1}{13}$ ആയി മാറുന്നു.

## 9.2. സോപാധിക സംഭാവ്യതയുടെ നിർവചനം (Definition of Conditional Probability)

A എന്ന ഇവന്റ് സംഭവിച്ചതിനുശേഷം B എന്ന ഇവന്റ് സംഭവിക്കാനുള്ള സാധ്യത $P\left({}^{B}/_{A}\right)$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. സോപാധിക സംഭാവ്യത കാണുന്നതിനുള്ള ഒരു നിയമം താഴെപ്പറയും പ്രകാരം രൂപപ്പെടുത്താം.

ഒരു സാമ്പിൾ മേഖലയിൽ n ഫലങ്ങൾ ഉണ്ടെന്ന് കരുതുക. ഇതിൽ Aയ്ക്ക് അനുകൂലമായി

$a_1+a_2$ ഫലങ്ങൾ ഉണ്ടെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവയിൽ $a_1$ ഫലങ്ങൾ A യ്ക്കും B എന്ന മറ്റൊരു ഇവന്റിനും പൊതുവായി അനുകൂലമായതും $a_2$ ഫലങ്ങൾ A യ്ക്ക് മാത്രം അനുകൂലമായതും ആണെന്ന് കരുതുക (ചിത്രം നോക്കുക).




P (B/A) നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത്,

$$P(B/A)=\frac{a_1}{a_1+a_2}=\frac{\frac{a_1}{n}}{\frac{(a_1+a_2)}{n}}=\frac{P(A\text{യും } B\text{യും})}{P(A)}, P(A)\neq 0$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\text{യും } B\text{യും})}{P(A)}, P(A)\neq 0$$

അതുപോലെ,

$$P(A/B)=\frac{P(A\text{യും } B\text{യും})}{P(B)}, P(B)\neq 0$$

ഒരു പ്രത്യേക ഇവന്റ് B സംഭവിച്ചു എന്നത് നമുക്കറിയാമെന്ന് കരുതുക. മറ്റൊരു ഇവന്റ് A യുടെ സംഭാവ്യതയെ ഇത് എങ്ങനെ ബാധിക്കും? ഇത്തരം സംശയങ്ങൾ സ്വാഭാവികമായും നമുക്കുണ്ടാകാം. ഇങ്ങനെയുള്ള സന്ദർഭങ്ങളെ സോപാധികസംഭാവ്യത അഭിസംബോധന ചെയ്യുന്നു.

### വിവരണം 9.1

ഒരു പകിട ഒരു പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടുന്നു. മുകളിൽ വന്ന സംഖ്യ 4 നേക്കാൾ വലിയസംഖ്യ ആണ്. ഈ സംഖ്യ ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യ ആവാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

**പരിഹാരം**

A – സംഖ്യ ഇരട്ടയാവുക. അതായത്, $A = \{2, 4, 6\}$

B – 4 ന് മുകളിലുള്ള സംഖ്യയാവുക. അതായത്, $B = \{5,6\}$

A യും B യും = $\{6\}$

കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട സംഭാവ്യത, $P\left(A/B\right)=\frac{P(A \text{ യും } B \text{ യും})}{P(B)}=\frac{(1/6)}{(2/6)}=\frac{1}{2}$

### വിവരണം 9.2

ഒരു നാണയം രണ്ട് പ്രാവശ്യം കറക്കുന്ന അനിയതഫല പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക, ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് ഒരു തല ലഭിക്കുന്നത് A യായും ആദ്യ കറക്കത്തിൽ തല ലഭിക്കുക എന്നത് B യായും കരുതുക. $P\left(B/A\right)$ കാണുക.

**പരിഹാരം**

ഇവിടെ A $=\{HT, TH, HH\}$, $B=\{HT, HH\}$

$A$ യും $B$ യും $=\{HT, HH\}$

$$P\left(B/A\right)=\frac{P(A \text{ യും } B \text{ യും})}{P(A)}=\frac{2/4}{3/4}=\frac{2}{3}$$

**പ്രവർത്തനം**

- ഒരു പകിട എറിയുന്ന അനിയതഫല പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. പകിടയിൽ കാണുന്ന സംഖ്യ ഒറ്റയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇത് 3 ആവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?
- ഒരു പകിട 2 പ്രാവശ്യം എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക പകിടകളിൽ കാണുന്ന സംഖ്യക ളുടെ തുക 8 എന്നത് A ആയും 3 നും 5 നും ഇടയിലുള്ള സംഖ്യ (അവ ഉൾപ്പെടെ) വരുന്നത് B ആയും പരിഗണിച്ചാൽ $P(B/A)$ കാണുക.

## 9.3. സംഭാവ്യതയുടെ ഗുണനസിദ്ധാന്തം (Multiplication Theorem of Probability)

ചിലപ്പോൾ രണ്ടോ അതിലധികമോ ഇവന്റുകൾ ഒരുമിച്ച് വരുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കണ്ടു പിടിക്കേണ്ട സാഹചര്യം ഉണ്ടാവാം. സോപാധിക സംഭാവ്യതയുടെ നിർവചനമനുസ രിച്ച് A യും B യും രണ്ട് ഇവന്റുകൾ ആണെങ്കിൽ

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(A \text{ യും } B \text{ യും})}{P(B)},\ P(B)\neq 0$$

കൂടാതെ,

$$P\left(B/A\right)=\frac{P(A \text{ യും } B \text{ യും})}{P(A)},\ P(A)\neq 0$$

ഈ സൂത്രവാക്യങ്ങളെ പുനഃക്രമീകരിച്ചാൽ

$$P\,(A \text{ യും } B \text{ യും}) = P(A)\times P\left(B/A\right)$$

അല്ലെങ്കിൽ,

$$P\,(A \text{ യും } B \text{ യും}) = P(B)\times P\left(A/B\right)$$

A യും B യും ഒരുമിച്ച് സംഭവിക്കുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത താഴെ തന്നിരിക്കും പ്രകാരമാണ്.

P (A യും B യും) = P (A) P (B/A)

അല്ലെങ്കിൽ,

P (Aയും B യും)= P (B) P (A/B)

ഈ സൂത്രവാക്യത്തെ സംഭാവ്യതയുടെ ഗുണന സിദ്ധാന്തം എന്നു പറയുന്നു.

## 9.4 സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകളും ആശ്രിത ഇവന്റുകളും (Independent Events and dependent events)

ഒരു സഞ്ചിയിൽ 2 നീല പന്തുകളും 3 ചുവന്ന പന്തുകളുമുണ്ട്. അതിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് അനിയതമായി എടുത്താൽ അത് നീല പന്താവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

ഇവിടെ സംഭാവ്യത $\frac{2}{5}$ ആണ്.

വീണ്ടും തിരിച്ചിടാത്ത രീതിയിൽ ഓരോരോ പന്തുകൾ ആയി 2 പന്തുകൾ എടുക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക.

താഴെ പറയുന്ന 2 സാഹചര്യങ്ങൾ ഉണ്ടാവാം.

- ആദ്യം ലഭിച്ച പന്ത് ചുവപ്പാണെങ്കിൽ അടുത്ത പന്ത് നീല ആവാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{2}{4}$ ആണ്.
- ആദ്യം ലഭിച്ചത് നീല പന്ത് ആണെങ്കിൽ അടുത്ത പന്തും നീല ആവാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{4}$ ആണ്.

ഇവിടെ രണ്ടാമത്തെ പന്ത് നീലയാവുക എന്ന ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത ആദ്യം ലഭിച്ച പന്തിന്റെ നിറത്തെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. അതിനാൽ ഈ ഇവന്റ് ഒരു ആശ്രിത ഇവന്റ് ആകുന്നു.

രണ്ടാമത്തെ പന്തെടുക്കുന്നതിനു മുമ്പ് ആദ്യമെടുത്ത പന്ത് തിരിച്ച് ഇടുകയാണെങ്കിൽ മുകളിൽ പറഞ്ഞ രണ്ട് സാഹചര്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. രണ്ട് സംഭാവ്യതകളും തുല്യമാണ്. ഇത് $\frac{2}{5}$ ആകുന്നു. ഇവിടെ ഒന്നാമത്തെ ഇവന്റ് രണ്ടാമത്തെ ഇവന്റ് സംഭവിക്കുന്നതിനെ സ്വാധീനിക്കുന്നില്ല, ഇവയെ **സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകൾ** (Independent events) എന്നു വിളിക്കാം.

- തിരിച്ചു വയ്ക്കുന്ന സ്ഥിതി (With replacement) – ഇവന്റുകൾ സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകളാണ് (സാധ്യതകൾ മാറുന്നില്ല).
- തിരിച്ചു വയ്ക്കാത്ത സ്ഥിതി (Without replacement)– ഇവന്റുകൾ ആശ്രയ ഇവന്റുകളാണ് (സാധ്യതകൾ മാറുന്നു).

> ഒരു ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത മറ്റൊരു ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യതയെ സ്വാധീനിക്കുന്നില്ല എങ്കിൽ ഈ ഇവന്റുകൾ സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകൾ എന്നു വിളിക്കപ്പെടുന്നു. അല്ലാത്തപക്ഷം ഇവയെ ആശ്രിത ഇവന്റുകൾ എന്നു വിളിക്കാം.

സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങൾ

- ഒരു ചീട്ട് കൂടിൽ നിന്നും ആദ്യം 3 എന്നു രേഖപ്പെടുത്തിയ ചീട്ട് ലഭിക്കുകയും അത് തിരച്ചു വച്ചതിനുശേഷം രണ്ടാമത് ഒരു എയ്സ് ചീട്ട് ലഭിക്കുകയും ചെയ്യുക.
- ഒരു നാണയം രണ്ടു പ്രാവശ്യം കറക്കുമ്പോൾ ഓരോ തവണയും തല കിട്ടുക.

> P (A/B) = P (A) അല്ലെങ്കിൽ P (B/A) = P (B) ആയാൽ A യും B യും സ്വതന്ത്രഇവന്റുകൾ ആണ്.

സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകൾ സ്റ്റൊകാസ്റ്റിക് (Stochastic) സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകൾ എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു.

### പ്രവർത്തനം

സ്വതന്ത്ര, ആശ്രിത ഇവന്റുകൾ തിരിച്ചറിയുന്നതിനുള്ള സമാന ഉദാഹരണങ്ങൾ എഴുതുക.

### സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകളുടെ ഗുണനസിദ്ധാന്തം

> A യും B യും സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകളാണെങ്കിൽ, ഗുണനസിദ്ധാന്ത പ്രകാരം
>
> P (A യും B യും) = P (A) × P (B)

### പ്രവർത്തനം

ഗുണനസിദ്ധാന്തം മൂന്നോ അതിൽ കൂടുതലോ സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകൾക്കായി വിപുലീകരിക്കുക.

### വിവരണം 9.3

ഒരു അലമാര വലിപ്പിൽ നീല, തവിട്ട്, ചുവപ്പ്, വെള്ള, കറുപ്പ് നിറങ്ങളിലുള്ള ഓരോ ജോഡി സോക്സുകൾ ഉണ്ട്. ഒരാൾ ഇതിൽ നിന്നും അനിയതമായി ഒരു ജോഡി സോക്സ് എടുക്കുകയും അത് തിരിച്ചു വച്ചതിനു ശേഷം വീണ്ടും ഒരു ജോഡി സോക്സ് എടുക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. രണ്ട് പ്രാവശ്യവും അയാൾക്ക് ലഭിച്ചത് ചുവന്ന സോക്സ് തന്നെ ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

### പരിഹാരം

P (ആദ്യം ചുവപ്പ് സോക്സ് കിട്ടുന്നു) $= \frac{1}{5}$

P (രണ്ടാമത് ചുവപ്പ് സോക്സ് കിട്ടുന്നു) $= \frac{1}{5}$

P (രണ്ടു പ്രാവശ്യവും ചുവപ്പു സോക്സ് കിട്ടുന്നു) $= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$ (സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകൾ)

$= \frac{1}{25}$

### വിവരണം 9.4

ഒരു നാണയം കറക്കുന്നു. ഇതോടൊപ്പം ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നു. നാണയത്തിൽ തലയും പകിടയിൽ 3 എന്ന സംഖ്യയും കാണിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

**പരിഹാരം**

$$P(\text{തല}) = \frac{1}{2}$$

$$P(3) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{നാണയത്തിൽ തലയും പകിടയിൽ 3 ഉം}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

### വിവരണം 9.5

നന്നായി കശക്കിയ 52 കാർഡുകളിൽ നിന്നും ഓരോന്നായി രണ്ടു കാർഡുകൾ എടുക്കുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. താഴെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന സാഹചര്യങ്ങളിൽ രണ്ടു കാർഡുകളും രാജാവ് ആകുന്നതിന് ഉള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

(i) ആദ്യമെടുത്ത കാർഡ് തിരികെ വയ്ക്കുന്നു.

(ii) ആദ്യമെടുത്ത കാർഡ് തിരികെ വയ്ക്കുന്നില്ല.

**പരിഹാരം**

A എന്നത് ആദ്യത്തെ കാർഡ് രാജാവ് എന്ന ഇവന്റും B എന്നത് രണ്ടാമത്തെ കാർഡ് രാജാവ് എന്ന ഇവന്റും ആണ്.

(i) ആദ്യമെടുത്ത കാർഡ് തിരികെ വയ്ക്കുന്നതു കൊണ്ട് ഇവന്റുകൾ സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകളാണ്

$$P(A) = \frac{4}{52}, \quad P(B) = \frac{4}{52}$$

$$P(A\text{യും } B\text{ യും}) = P(A) \times P(B) = \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

(ii) ആദ്യമെടുത്ത കാർഡ് തിരികെ വയ്ക്കാത്തതിനാൽ ഇവന്റുകൾ ആശ്രിത ഇവന്റുകളാണ്.

$$P(A) = \frac{4}{52}, \quad P(B/A) = \frac{3}{51}$$

$$P(A\text{യും } B\text{ യും}) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

### വിവരണം 9.6

ഒരു സഞ്ചിയിൽ 5 വെളുത്ത പന്തുകളും 3 കറുത്ത പന്തുകളും ഉണ്ട്. ഒരു പന്ത് എടുത്ത

തിന് ശേഷം അത് തിരികെ വയ്ക്കാതെ രണ്ടാമതൊരു പന്ത് എടുക്കുന്നു. രണ്ട് പന്തുകളും കറുപ്പ് ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

**പരിഹാരം**

ആദ്യത്തെ പന്ത് കറുപ്പ് ആവുക എന്നത് ഇവന്റ് A യും രണ്ടാമത്തെ പന്ത് കറുപ്പ് ആവുക എന്നത് ഇവന്റ് B യും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ,

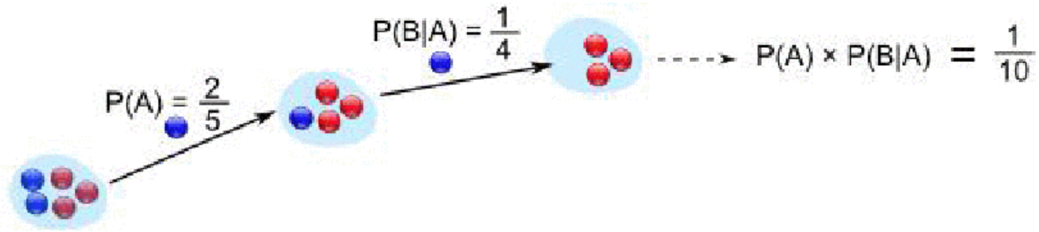
$$P(A) = \frac{3}{5+3} = \frac{3}{8}$$

$$P(B/A) = \frac{2}{7}$$

$$P(A \text{ യും } B \text{ യും}) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

**വിവരണം 9.7**

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രം പരിഗണിക്കുക. ആദ്യത്തെ പന്ത് തിരികെ വയ്ക്കാതെ രണ്ടാമത് പന്ത് എടുത്താൽ രണ്ട് പന്തുകളും നീല ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത താഴെ കണ്ടുപിടിച്ചിരിക്കുന്നു.




ഇതുപോലെ ആദ്യത്തെ പന്ത് തിരികെ വച്ചതിനു ശേഷം രണ്ടാമത് പന്ത് എടുത്താൽ

രണ്ടു പന്തുകളും നീലയാകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത,

$$P(A \text{ യും } B \text{ യും}) = P(A).P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

**വിവരണം 9.8**

രണ്ടു യന്ത്രങ്ങൾ നിർമിച്ച 100 സി.ഡി. കൾ ഒരു പെട്ടിയിൽ ഉണ്ട്. അതിൽ 60 എണ്ണം ഒന്നാമത്തെ യന്ത്രം നിർമിച്ചവയാണ്. ആകെ സി.ഡി കളിൽ 15 എണ്ണം കേടുവന്നവയാണ്. ഒന്നാമത്തെ യന്ത്രം നിർമിച്ചവയിൽ 9 എണ്ണം കേടുവന്നതാണ്. B എന്നത് അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട സിഡി കേടുവന്നത് ആകാനും A എന്നത് അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട സിഡി ഒന്നാമത്തെ യന്ത്രം നിർമിച്ചതാകാനും ഉള്ള ഇവന്റുകളാണ്. A യും B യും സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകളാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

**പരിഹാരം**

$$P(B) = \frac{15}{100} = 0.15$$

$$P(B/A) = \frac{9}{60} = 0.15$$

ഇവിടെ,

$$P(B) = P(B/A)$$

A യും B യും സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകളാണ്.

### വിവരണം 9.9

സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലെ ഒരു പ്രശ്നം X, Y എന്നി രണ്ട് വിദ്യാർഥികൾക്ക് നൽകുന്നു. X എന്ന വിദ്യാർഥി ഈ പ്രശ്നം പരിഹരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{3}$ ഉം Y എന്ന വിദ്യാർഥി ഈ പ്രശ്നത്തിന് പരിഹാരം കാണുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{2}{3}$ ഉം ആണ്. ഈ പ്രശ്നം പരിഹരിക്കപ്പെടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

**പരിഹാരം**

പ്രശ്ന പരിഹാരം X കണ്ടെത്താം അല്ലെങ്കിൽ Y കണ്ടെത്താം അല്ലെങ്കിൽ X ഉം Y ഉം കണ്ടെത്താം. A എന്ന ഇവന്റ്, X പ്രശ്ന പരിഹാരം കണ്ടെത്തുവാനുള്ളതും B എന്ന ഇവന്റ് Y പ്രശ്നപരിഹാരം കണ്ടെത്തുവാനുള്ളതും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. സംഭാവ്യത യുടെ സങ്കലനസിദ്ധാന്തം പ്രകാരം

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A\text{യും } B\text{യും})$$

$$= P(A) + P(B) - P(A).P(B) \quad (A \text{ യും } B \text{ യും സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകളാണ്})$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$$

$$= 1 - \frac{2}{9}$$

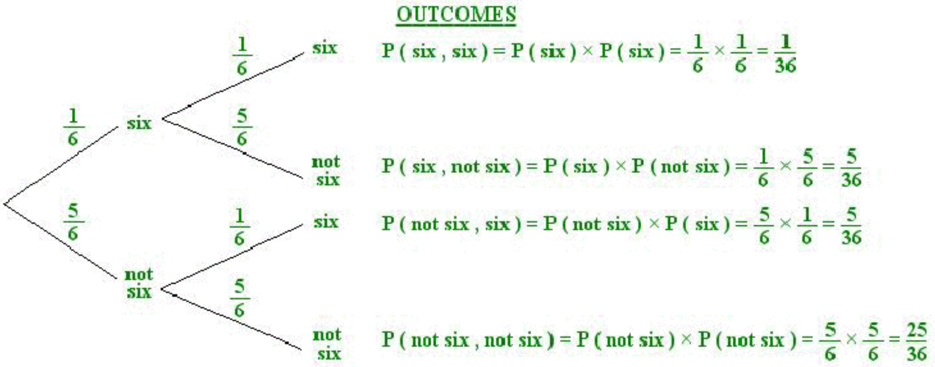
$$= \frac{7}{9}$$

### ഉദാഹരണം 9.10

രണ്ടു പകിടകൾ ഉരുട്ടുന്നു. താഴെ പറയുന്നവയുടെ സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കാൻ ശാഖാ ചിത്രം (Tree diagram) എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കാമെന്ന് നോക്കാം

(a) രണ്ട് 6 കിട്ടുക (b) 6 കിട്ടാതിരിക്കുക (c) ഒരു 6 മാത്രം കിട്ടുക.

**പരിഹാരം**




(a) P (രണ്ട് 6 കിട്ടുക) = P ( 6, 6) = $\frac{1}{36}$

(b) P (6 കിട്ടാതിരിക്കുക) = P (ഒന്നാമത്തേത് 6 അല്ല, രണ്ടാമത്തേത് 6 അല്ല) = $\frac{25}{36}$

(c) ഒരു 6 മാത്രം കിട്ടുക എന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുന്നതിന് ഒന്നാമത്തെതിൽ മാത്രം 6, രണ്ടാമത്തെതിൽ മാത്രം 6 എന്നിവ തമ്മിൽ കൂട്ടുക.

P (6 കിട്ടുക, 6 കിട്ടാതിരിക്കുക) + P (6 കിട്ടാതിരിക്കുക, 6 കിട്ടുക)

∴ P (ഒരു 6 മാത്രം കിട്ടുക) = $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{10}{36}$

ചിത്രത്തിൽ വലത്തേ അറ്റത്തുള്ള സംഭാവ്യതകൾ നോക്കുക. ഇവ എല്ലാം കൂട്ടിയാൽ 1 കിട്ടുന്നു. ഇവിടെ സാമ്പിൾ മേഖല വിവിധ ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നതിനാൽ അറിയാവുന്ന സംഭാവ്യതകൾ ഉപയോഗിച്ച് മറ്റു സംഭാവ്യതകൾ കണ്ടു പിടിക്കാൻ എളുപ്പമാണ്.

**പ്രവർത്തനം**

ഒരു പെട്ടിയിലെ 20 ഡിവിഡി. കളിൽ 4 എണ്ണം കേടുവന്നവയാണ്. പെട്ടിയിൽ നിന്നും തിരിച്ച് വയ്ക്കുന്ന രീതിയിലും തിരിച്ചുവയ്ക്കാത്ത രീതിയിലും ഓരോന്നായി രണ്ട് ഡിവിഡികൾ അനിയതമായി എടുക്കുന്നു. താഴെ പറയുന്നവയുടെ സംഭാവ്യതകൾ ശാഖാചിത്രത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) രണ്ടും കേടുവന്നതാവുക

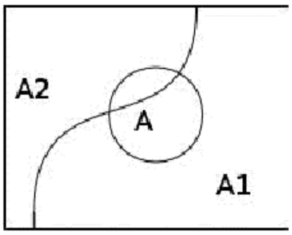
(ii) രണ്ടും കേടു വരാത്തതാവുക

(iii) ഒന്നു മാത്രം കേടുവന്നതാവുക.

## 9.5 മൊത്ത സംഭാവ്യതാ സിദ്ധാന്തം (Total probability theorem)

ഒരു ക്ലാസിലെ ആകെ 50 കുട്ടികളിൽ 30 പേർ ആൺകുട്ടികളും ബാക്കിയുള്ളവർ പെൺകുട്ടികളുമാണ്. ഇതിൽ 15 കുട്ടികൾ സംഗീതക്ലബ് അംഗങ്ങളാണ്. അതിൽ 9 പേർ

ആൺകുട്ടികളാണ്. അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്ന ഒരു കുട്ടി സംഗീതക്ലബ് അംഗമാവാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.




A എന്നത് കുട്ടി സംഗീത ക്ലബ് അംഗം ആകുന്നതും $A_1$ എന്നത് ആൺകുട്ടിയാകുന്നതും $A_2$ എന്നത് പെൺകുട്ടി ആകുന്നതുമായ ഇവന്റുകളാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

താഴെ പറയുന്ന പരസ്പര കേവലവും സമഗ്രവുമായ രീതികളിൽ A സംഭവിക്കാം.

(i) സംഗീത ക്ലബ് അംഗമായ പെൺകുട്ടി

(ii) സംഗീത ക്ലബ് അംഗമായ ആൺകുട്ടി

P(A) = P (A യും $A_1$ഉം) അല്ലെങ്കിൽ P (A യും $A_2$ ഉം)

$$=P(A_1)\times P(A/A_1)+P(A_2)\times P(A/A_2)$$

$$=\frac{30}{50}\times\frac{9}{30}+\frac{20}{50}\times\frac{6}{20}$$

$$=\frac{9}{50}+\frac{6}{50}$$

$$=\frac{15}{50}=\frac{3}{10}$$

ഈ ഉദാഹരണത്തെ നമുക്ക് ആകെ സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പൊതു ആശയത്തിലേക്ക് മാറ്റാം.

$A_1$, $A_2$ എന്നിവ രണ്ട് പരസ്പര കേവലവും സമഗ്രവുമായ ഇവന്റുകളും A എന്നത് $A_1$, $A_2$ എന്നിവയോടുകൂടി സംഭവിക്കാവുന്ന മറ്റൊരു ഇവന്റും ആയാൽ, ആകെ സംഭാവ്യതസിദ്ധാന്തം പ്രകാരം

$$P(A)=P(A_1)\times P(A/A_1)+P(A_2)\times P(A/A_2)$$

ഇനി നമുക്ക് മൂന്ന് ഇവന്റുകളുടെ കാര്യം പരിഗണിക്കാം.

ഒരു ഫാക്ടറിയിൽ നിർമിച്ച 100 ബോൾട്ടുകളിൽ 50 എണ്ണം A എന്ന യന്ത്രവും 30 എണ്ണം B എന്ന യന്ത്രവും 20 എണ്ണം യന്ത്രം C യും നിർമിച്ചതാണ്. ഇവയിൽ യഥാക്രമം 9,6,4 എണ്ണം ബോൾട്ടുകൾ കേടു വന്നവയാണ്. അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുത്ത ഒരു ബോൾട്ട്

കേടുവന്നതാവാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണണമെന്നിരിക്കട്ടെ.

$A_1, A_2, A_3$ എന്നിവ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട ബോൾട്ട് യഥാക്രമം A,B, C എന്നീ യന്ത്രങ്ങൾ നിർമിച്ചത് ആവാനുള്ള ഇവന്റുകളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. A എന്നത് ബോർട്ട് കേടുവന്നതാവാനുള്ള ഇവന്റ് ആണ്.

A എന്ന ഇവന്റ് താഴെ പറയുന്ന 3 പരസ്പര കേവലവും സമഗ്രവുമായ രീതികളിൽ സംഭവിക്കാം.

(i) കേടുവന്ന ബോൾട്ട് യന്ത്രം A നിർമിച്ചത്

(ii) കേടുവന്ന ബോൾട്ട് യന്ത്രം B നിർമിച്ചത്

(iii) കേടുവന്ന ബോൾട്ട് യന്ത്രം C നിർമിച്ചത്

P (A) = P ( A യും $A_1$ ഉം) അല്ലെങ്കിൽ P ( A യും $A_2$ ഉം) അല്ലെങ്കിൽ P ( A യും $A_3$ ഉം)

$$= P(A_1)\,P(A/A_1) + P(A_2)\,P(A/A_2) + P(A_3)\,P(A/A_3)$$

$$= \frac{50}{100}\times\frac{9}{50}+\frac{30}{100}\times\frac{6}{30}+\frac{20}{100}\times\frac{4}{20}$$

$$= \frac{9}{100}+\frac{6}{100}+\frac{4}{100}$$

$$= \frac{19}{100} = 0.19$$

മൂന്ന് ഇവന്റുകളുടെ ആകെ സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തം ഇങ്ങനെ പ്രതിപാദിക്കാം.

*$A_1$, $A_2$ , $A_3$ എന്നിവ പരസ്പര കേവലവും സമഗ്രവും ആയ മൂന്ന് ഇവന്റുകളും A എന്നത് $A_1$, $A_2$, $A_3$ എന്നിവയോട് കൂടി സംഭവിക്കാവുന്ന മറ്റൊരു ഇവന്റുമായാൽ.*

$P(A) = P(A_1)\ P(A/A_1) + P(A_2)\,P(A/A_2) + P(A_3)\ P(A/A_3)$ ആയിരിക്കും

n ഇവന്റുകളുടെ ആകെ സംഭാവ്യതാ സിദ്ധാന്തം താഴെ പറയും പ്രകാരം വിപുലീകരിക്കാം.

$A_1, A_2, A_3,\ldots,A_n$ എന്നിവ പരസ്പര കേവലവും സമഗ്രവുമായ (mutually exclusive and exhaustive) *n* ഇവന്റുകളും A എന്നത് ഇവയോടൊപ്പം സംഭവിക്കാവുന്ന മറ്റൊരു ഇവന്റുമായാൽ

$P(A) = P(A_1)\ P(A/A_1) + P(A_2)\ P(A/A_2) + \ldots + P(A_n)\,P(A/A_n)$ ആയിരിക്കും

വിവരണം 9.11

ഒരു സഞ്ചിയിൽ 4 വെള്ള പന്തുകളും 3 കറുത്ത പന്തുകളും മറ്റൊരു സഞ്ചിയിൽ 3

വെള്ള പന്തുകളും 5 കറുത്ത പന്തുകളും ഉണ്ട്. ഒന്നാമത്തെ സഞ്ചിയിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് നിറം ശ്രദ്ധിക്കാതെ രണ്ടാമത്തെ സഞ്ചിയിലേക്ക് മാറ്റിയതിനുശേഷം രണ്ടാമത്തെ സഞ്ചിയിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് എടുത്താൽ, അത് കറുപ്പ് ആകാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

**പരിഹാരം**

| സഞ്ചി 1 | സഞ്ചി 2 |
|---|---|
| 4 വെള്ള<br>3 കറുപ്പ് | 3 വെള്ള<br>5 കറുപ്പ് |

ഒന്നാം സഞ്ചിയിൽ നിന്നും രണ്ടാം സഞ്ചിയിലേക്ക് മാറ്റിയ പന്ത് വെള്ളയാവുന്നത് ഇവന്റ് $A_1$ ഉം കറുപ്പാവുന്നത് ഇവന്റ് $A_2$ ഉം ആണെന്ന് കരുതാം.

$$P(A_1) = \frac{4}{7}$$

$$P(A_2) = \frac{3}{7}$$

രണ്ടാമത്തെ സഞ്ചിയിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്ന പന്ത് കറുപ്പാവുന്നത് ഇവന്റ് $A$ ആയാൽ

$$P(A/A_1) = \frac{5}{9},\ P(A/A_2) = \frac{6}{9}$$

അങ്ങനെയെങ്കിൽ, ആകെ സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തപ്രകാരം

$$P(A) = P(A_1)\,P(A/A_1) + P(A_2)\,P(A/A_2)$$

$$= \frac{4}{7} \times \frac{5}{9} + \frac{3}{7} \times \frac{6}{9}$$

$$= \frac{20+18}{63}$$

$$= \frac{38}{63}$$

## വിവരണം 9.12

ഒരു ഡോക്ടർ രോഗികളെ കാണാൻ വരുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കാവുന്ന വാഹനങ്ങൾ തീവണ്ടി, ബസ്, സ്കൂട്ടർ എന്നിവ ആവാനുള്ള സംഭാവ്യത യഥാക്രമം $\frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}$ ആണെന്നും ഇവ ഓരോന്നും വൈകി എത്താനുള്ള സംഭാവ്യത യഥാക്രമം $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}$ എന്നിങ്ങനെ ആണെന്നും മുൻ അനുഭവം വച്ച് കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നു. അദ്ദേഹം വൈകി എത്താനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

പരിഹാരം :

ഡോക്ടർ തീവണ്ടിയിൽ യാത്ര ചെയ്യുന്നത് $A_1$ എന്നും.

ബസിൽ യാത്ര ചെയ്യുന്നത് $A_2$ എന്നും

സ്കൂട്ടറിൽ യാത്ര ചെയ്യുന്നത് $A_3$ എന്നും

വൈകി എത്തുന്നത് A എന്നും ഇവന്റുകളായാൽ

$$P(A_1) = \frac{3}{10}, P(A_2) = \frac{3}{5}, P(A_3) = \frac{1}{10}$$

$$P(A/A_1) = \frac{1}{4}, P(A/A_2) = \frac{1}{3}, P(A/A_3) = \frac{1}{12}$$

$$P(A) = P(A_1)\ P(A/A_1) + P(A_2)\ P(A/A_2) + P(A_3)\ P(A/A_3)$$

$$= \left(\frac{3}{10} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{10} \times \frac{1}{12}\right)$$

$$= \frac{3}{40} + \frac{3}{15} + \frac{1}{120}$$

$$= 0.075 + 0.2 + .0083$$

$$= 0.283$$

**പ്രവർത്തനം**

- വിവരണം 9.12 ന്റെ ശാഖാ ചിത്രം വരക്കുക.
- ഒരു തൊപ്പിയിൽ 4 ചുവന്ന പന്തുകളും 6 പച്ച പന്തുകളും മറ്റൊരു തൊപ്പിയിൽ 6 ചുവന്ന പന്തുകളും 4 പച്ച പന്തുകളുമുണ്ട്. ഒരു നാണയം കറക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നത് തലയാണെങ്കിൽ ഒന്നാമത്തെ തൊപ്പിയിൽ നിന്നും വാലാണെങ്കിൽ രണ്ടാമത്തെ തൊപ്പിയിൽ നിന്നും ഒരു പന്തെടുക്കുന്നു. എങ്കിൽ ഒരു ചുവന്ന പന്ത് ലഭിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

## 9.6 ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തം (Bayes' Theorem)

ആകെ സംഭാവ്യതാ സിദ്ധാന്തം ചർച്ചചെയ്തപ്പോൾ പറഞ്ഞ ബോൾട്ട് നിർമാണ കമ്പനി പ്രശ്നം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട ബോൾട്ട് കേട് വന്നതാവാനുള്ള സംഭാവ്യത കണ്ടു പിടിച്ചിട്ടുണ്ട്. തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട ഒരു ബോൾട്ട് കേടു വന്നതാണെങ്കിൽ അത് യന്ത്രം A നിർമിച്ചതാവാനുള്ള സംഭാവ്യത അറിയുന്നത് രസകരമായിരിക്കില്ലേ? ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തം ഇതിന് ഒരു വഴി തരുന്നു.

നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് $P(A_1/A)$ ആണ്.

$$P(A_1/A) = \frac{P(A_1 \text{ ഉം } A \text{ യും})}{P(A)}$$

ആകെ സംഭാവ്യതസിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച്,

$$P(A) = P(A_1)\,P(A/A_1) + P(A_2)\,P(A/A_2) + P(A_3)\,P(A/A_3)$$

$P(A_1$ ഉം $A$യും$) = P(A_1)\,P\left(A/A_1\right)$

$$\therefore P(A_1/A) = \frac{P(A_1)\,P(A/A_1)}{P(A_1)\,P(A/A_1) + P(A_2)\,P(A/A_2) + P(A_3)\,P(A/A_3)}$$

$$= \frac{\frac{50}{100}\times\frac{9}{50}}{\frac{50}{100}\times\frac{9}{50} + \frac{30}{100}\times\frac{6}{30} + \frac{20}{100}\times\frac{4}{20}}$$

$$= \frac{\frac{9}{100}}{\frac{9}{100} + \frac{6}{100} + \frac{4}{100}} = \frac{\frac{9}{100}}{\frac{19}{100}} = \frac{9}{19}$$

ഇത് മൂന്ന് ഇവന്റുകൾക്കുള്ള ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തം ആണ്.

താഴെ കൊടുത്ത പട്ടിക ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുന്നത് ലഘൂകരിക്കുന്നു.

| പ്രാഥമിക ഇവന്റ് | പൂർവ്വ (Prior) സംഭാവ്യത $P(A_i)$ | സോപാധിക സംഭാവ്യത $P(A/A_i)$ | സംയുക്ത സംഭാവ്യത $P(A_i) \times P(A/A_i)$ | ഉത്തര (Posterior) സംഭാവ്യത $P(A_i/A)$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $\frac{50}{100}$ | $\frac{9}{50}$ | $\frac{9}{100}$ | $\frac{9}{19}$ |
| $A_2$ | $\frac{30}{100}$ | $\frac{6}{30}$ | $\frac{6}{100}$ | $\frac{6}{19}$ |
| $A_3$ | $\frac{20}{100}$ | $\frac{4}{20}$ | $\frac{4}{100}$ | $\frac{4}{19}$ |
| **ആകെ** | 1 | | $\frac{19}{100}$ | 1 |

പട്ടികയിൽ നിന്നും $P(A_1/A) = 9/19$ എന്നു വ്യക്തമാവുന്നു

$P(A_1)$, $P(A_2)$ , $P(A_3)$ എന്നീ സംഭാവ്യതകളെ പൂർവ്വ സംഭാവ്യതകൾ എന്നു പറയുന്നു. ഇവ അനിയതഫല പരീക്ഷണം നടത്തുന്നതിന് മുമ്പു തന്നെ നമുക്ക് അറിയാവുന്നതാണ്. $P(A_1/A)$, $P(A_2/A)$, $P(A_3/A)$ എന്നീ സംഭാവ്യതകളെ ഉത്തര സംഭാവ്യതകൾ എന്ന്

പറയുന്നു. ഇവ തെളിവുകളെയും പരീക്ഷണങ്ങളെയും അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ള സംഭാവ്യതകളാണ്.

ബെയ്സ് സിദ്ധാന്തം താഴെ പറയും പ്രകാരം സാമാന്യവൽക്കരിക്കാം.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ എന്നിവ പരസ്പരകേവലവും സമഗ്രവും ആയ ഇവന്റുകളും A എന്നത് ഇവയോടൊപ്പം സംഭവിക്കാവുന്ന ഒരു ഇവന്റും ആണെങ്കിൽ,

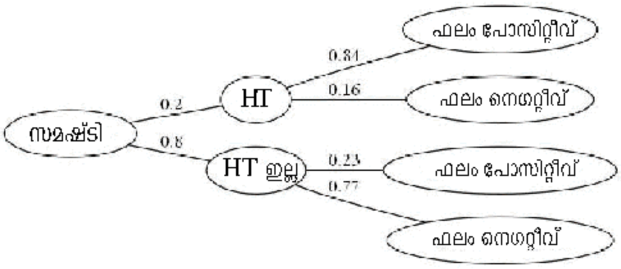
$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i)\,P(A/A_i)}{P(A_1)\,P(A/A_1) + P(A_2)\,P(A/A_2) + \ldots + P(A_n)\,P(A/A_n)}$$

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$

ബേയ്സ് സംഭാവ്യതയെ വിപരീത സംഭാവ്യത എന്നു കൂടി വിളിക്കുന്നു. ബ്രിട്ടീഷ് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ തോമസ് ബേയ്സ് (1702-1761) ന്റെ പേരിൽ ആണ് ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തം അറിയപ്പെടുന്നത്.

### വിവരണം 9.13

താഴെപറയുന്ന വിവരണം പരിഗണിക്കുക. മുതിർന്നവരിൽ 20% പേർ രക്താതി സമ്മർദം ഉള്ളവരാണെന്ന് കരുതപ്പെടുന്നു. ഇങ്ങനെ കരുതപ്പെട്ടവരിൽ 84% പേർ രക്താതിസമ്മർദം ഉള്ളവർ തന്നെയാണെന്ന് ഒരു പരിശോധന യന്ത്രം ഉപയോഗിച്ച് നടത്തിയ പരിശോധനയിൽ കണ്ടെത്തുന്നു. രക്താതിസമ്മർദം ഇല്ലെന്ന് കരുതിയവരിൽ 23% പേർക്ക് രക്താതി സമ്മർദമുണ്ടെന്ന് ഇതേ പരിശോധനയിൽ കണ്ടെത്തുന്നു.




ഒരു വ്യക്തിയെ യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുത്തപ്പോൾ അയാൾക്ക് രക്താതിസമ്മർദം ഉണ്ടെന്ന് കണ്ടു. അയാൾ രക്താതിസമ്മർദം ഉണ്ടെന്ന് കരുതപ്പെട്ട വിഭാഗത്തിൽ ഉൾപ്പെടാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

**പരിഹാരം**

താഴെപറയുന്ന ഇവന്റുകൾ നിർവചിക്കാം

$A_1$ : രക്താതിസമ്മർദ്ദം ഉണ്ടെന്ന് കരുതപ്പെട്ടവർ

$A_2$ : രക്താതിസമ്മർദ്ദം ഇല്ലെന്ന് കരുതപ്പെട്ടവർ

$A$ : രക്താതിസമ്മർദ്ദം ഉണ്ടെന്ന് യന്ത്രപരിശോധനയിൽ കണ്ടെത്തിയവർ

$$P(A_1)=20/100=0.2,\ P(A_2)=80/100=0.8$$

$$P(A/A_1)=0.84,\ P(A/A_2)=0.23$$

ബേയ്സ് സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം

$$P(A_1/A)=\frac{P(A_1)\,P(A/A_1)}{P(A_1)\,P(A/A_1)+P(A_2)\,P(A/A_2)}$$

$$=\frac{0.2\times 0.84}{0.2\times 0.84+0.8\times 0.23}$$

$$=0.48$$

**പ്രവർത്തനം**

ഒരു സ്തനാർബുദ പരിശോധന പരിഗണിക്കുക. ഒരു ഡോക്ടർ പരിശോധനയിൽ ഒരു സ്ത്രീയുടെ സ്തനത്തിൽ ഒരു മുഴ കണ്ടെത്തുന്നു. ഈ മുഴ അർബുദമാവാൻ 0.01 സംഭാവ്യത ഉണ്ട്. 90% കൃത്യത കാണിക്കുന്ന ഒരു അർബുദ പരിശോധനയാണ് മാമോഗ്രം. മാമോഗ്രം പരിശോധന ഫലം പോസിറ്റീവ് ആണെങ്കിൽ ഈ മുഴ അർബുദമാവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

## വിവരണം 9.14

വിവരണം 9.12 പരിഗണിക്കുക. ഡോക്ടർ വൈകിയാണ് എത്തിയതെങ്കിൽ യാത്ര ബസി ലായിരിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

**പരിഹാരം**

ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തം പ്രയോഗിച്ചാൽ,

P (ബസിൽ വരിക/വൈകി എത്തുക) =P $(A_2/A)$

$$=\frac{P(A_2)P(A/A_2)}{P(A_1)P(A/A_1)+P(A_2)P(A/A_2)+P(A_3)P(A/A_3)}$$

$$=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}}{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{12}}$$

$$= \frac{\frac{3}{15}}{\frac{3}{40}+\frac{3}{15}+\frac{1}{120}} = 0.7059$$

### വിവരണം 9.15

നാല് ഓപ്ഷനുകളിൽ നിന്നും ശരി ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുവാനുള്ള ഒരു ചോദ്യത്തിന് സ്വന്തം അറിവുപയോഗിച്ചോ നോക്കിയെഴുതിയോ ഊഹിച്ചോ ഒരാൾക്ക് ഉത്തരം എഴുതാം. ഊഹിച്ചെഴുതാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{3}$ ഉം നോക്കി എഴുതാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{6}$ ഉം ആണ്. നോക്കിയെഴുതിയാൽ ശരിയുത്തരമാവാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{8}$ ആണെന്ന് കരുതുക. ഈ ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരം ശരിയാണെങ്കിൽ അയാൾക്ക് ഉത്തരം അറിയാമായിരുന്നു എന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത എന്ത്?

**പരിഹാരം**

$A_1$ : ഉത്തരം ഊഹിച്ചെഴുതുന്നു.

$A_2$ : ഉത്തരം നോക്കിയെഴുതുന്നു

$A_3$ : ഉത്തരം അറിഞ്ഞെഴുതുന്നു

$A$ : ഉത്തരം ശരിയാണ്

$$P(A_1) = \frac{1}{3},\ P(A_2) = \frac{1}{6},\ P(A_3) = 1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$P(A/A_1) = \frac{1}{4}$ (4 ഉത്തരങ്ങളിൽ നിന്നും 1 എഴുതുന്നു)

$P\left(A/A_2\right) = \frac{1}{8}$ (തന്നിരിക്കുന്നു) $P\left(A/A_3\right) = 1$

$$P\left(A_3/A\right) = \frac{P(A_3)P\left(A/A_3\right)}{P(A_1).P(A/A_1)+P(A_2).P(A/A_2)+P(A_3).P(A/A_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{12}+\frac{1}{48}+\frac{1}{2}} = \frac{24}{29}$$

**പ്രവർത്തനം**

100 പുരുഷന്മാരിൽ 8 പേരും 1000 സ്ത്രീകളിൽ 3 പേരും വർണാന്ധത ഉള്ളവരാണ്. അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുത്ത ഒരാൾക്ക് വർണ്ണാന്ധത ഉണ്ടെങ്കിൽ അത് ഒരു പുരുഷൻ ആവാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക. (പുരുഷന്മാരുടെയും സ്ത്രീകളുടെയും എണ്ണം തുല്യമാണ്)

**നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം**

തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു അധിക വിവരം അനുസരിച്ച് വ്യവസ്ഥപ്പെടുത്തിയ ഒരു ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത ആണ് സോപാധിക സംഭാവ്യത.

- $$P(A/B) = \frac{P(A\text{യും}B\text{യും})}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

  $$P(B/A) = \frac{P(A\text{യും}B\text{യും})}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

- രണ്ടോ അതിലധികമോ ഇവന്റുകളുടെ ഒരുമിച്ചുള്ള സംഭാവ്യതയാണ് ഗുണന സിദ്ധാന്തത്തിൽ നിർവചിക്കുന്നത്.

  A, B എന്നീ രണ്ടു ഇവന്റുകൾക്ക്, $P(A\text{യും}B\text{യും}) = P(A)P(B/A)$

  അല്ലെങ്കിൽ $P$ (A യും B യും) $= P(B)P(A/B)$

- ഒരു ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത മറ്റൊരു ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യതയെ സ്വാധീനിക്കുന്നില്ല എങ്കിൽ അവ രണ്ടും സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകളാണ്. അങ്ങനെയല്ലെങ്കിൽ അവ ആശ്രിത ഇവന്റുകളാണ്.

- A യും B യും രണ്ട് സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകൾ ആയാൽ P(Aയും Bയും) $= P(A) \times P(B)$ ആയിരിക്കും.

- ആകെ സംഭാവ്യതാ സിദ്ധാന്തം: $A_1$ $A_2$ ... $A_n$ എന്നിവ n പരസ്പരകേവലവും സമഗ്രവുമായ ഇവന്റുകളും A എന്നത് ഇവയിലേതെങ്കിലും ഒന്നിനോടൊപ്പമെങ്കിലും സംഭവിക്കാവുന്ന ഒരു ഇവന്റുമായാൽ

  $$P(A) = P(A_1) \times P(A/A_1) + P(A_2) \times P(A/A_2) + \ldots + P(A_n) \times P(A/A_n)$$

  ഒരു ഇവന്റിന്റെ ഉത്തര (Posterior) സംഭാവ്യത ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തം തരുന്നു. അതായത് $A_1, A_2, \ldots, A_n$ എന്നിവ n പരസ്പര കേവലും സമഗ്രവുമായ ഇവന്റുകളും ഇവയിലേതെങ്കിലും ഒന്നിനോടൊപ്പമെങ്കിലും സംഭവിക്കാവുന്ന ഇവന്റ് A യുമായാൽ

  $$P(A_i/A) = \frac{P(A_i)P(A/A_i)}{P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + \ldots + P(A_n)P(A/A_n)}$$

  $i = 1, 2, 3 \ldots, n$ ആകുന്നു.

**പഠനനേട്ടങ്ങൾ**

ഈ അധ്യായം പഠിക്കുന്നതോടെ പഠിതാവ്:

- സോപാധിക സംഭാവ്യതയുടെ അർഥവും ആശയവും വിശദീകരിക്കുന്നു.
- സംഭാവ്യതയുടെ ഗുണനസിദ്ധാന്തം തിരിച്ചറിയുകയും പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.
- സ്വതന്ത്ര, ആശ്രിത ഇവന്റുകൾ വേർതിരിച്ചറിയുന്നു.
- ആകെ സംഭാവ്യതാസിദ്ധാന്തം മനസ്സിലാക്കുന്നു.
- ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തം ഗ്രഹിക്കുകയും പ്രയോഗിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

**വിലയിരുത്തൽ ഇനങ്ങൾ**

1. $P(A)=\frac{1}{5}, P(B)=\frac{2}{3} P(A\cup B)=\frac{4}{5}$ ആയാൽ P(A/B), P(B/A) എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

2. 5 വെള്ള പന്തുകളും 3 കറുത്ത പന്തുകളും ഉള്ള ഒരു സഞ്ചിയിൽ നിന്നും തിരിച്ച് വയ്ക്കാത്ത രീതിയിൽ ഓരോന്നായി രണ്ടു പന്തുകൾ അനിയതമായി എടുക്കുന്നു. രണ്ടും കറുത്ത പന്തുകളാകാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

3. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 10 വെള്ള പന്തുകളും 6 കറുത്ത പന്തുകളുമുണ്ട്. വീണ്ടും തിരിച്ചു വയ്ക്കാതെ ഓരോന്നായി നാല് പന്തുകൾ എടുക്കുന്നു. വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങളുള്ള പന്തുകൾ മാറിമാറി കിട്ടാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

4. ഒരു റേഡിയോയുടെ ഗുണമേന്മാ പരിശോധന പ്രക്രിയയിൽ 2 ഘട്ടങ്ങളിലൂടെ കടന്നു പോകേണ്ടതുണ്ട്. ഒന്നാമത്തെ ഘട്ടത്തിൽ തകരാറുള്ള റേഡിയോ കണ്ടെത്താനുള്ള സംഭാവ്യത 0.7 ഉം രണ്ടാമത്തേതിൽ 0.8 ഉം ആണ്. എങ്കിൽ തകരാറുള്ള റേഡിയോ വിൽപ്പനക്ക് വേണ്ടി പെട്ടിയിലാക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

5. X,Y,Z എന്നിവർ മാനേജർമാരാവാനുള്ള സംഭാവ്യത യഥാക്രമം $\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}$ എന്നിവയും ഇവർ മാനേജർമാരായൽ പുതിയ ബോണസ് പദ്ധതി ആരംഭിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത യഥാക്രമം $\frac{3}{10}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}$, ഉം ആണെങ്കിൽ.
   (i) ബോണസ് പദ്ധതി ആരംഭിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?
   (ii) ബോണസ് പദ്ധതി ആരംഭിച്ചുവെങ്കിൽ നിയമിക്കപ്പെട്ട മാനേജർ Z ആവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

6. ഒരു ക്ലാസിലെ ആകെ 25 കുട്ടികളിൽ 5 പേർ പെൺകുട്ടികളാണ്. ക്ലാസിലെ 2 പെൺകുട്ടികളും 5 ആൺകുട്ടികളും കഴിഞ്ഞ പരീക്ഷയിൽ മുഴുവൻ A+ നേടിയവരാണ്. അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട ഒരു കുട്ടി മുഴുവൻ A+ ജേതാവാണെങ്കിൽ അത് പെൺകുട്ടിയാവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

7. ഒരു പരീക്ഷയിൽ 30% പേർ ഗണിതത്തിലും 20% പേർ കെമിസ്ട്രിയിലും 10% പേർ ഗണിതത്തിലും കെമിസ്ട്രിയിലും പരാജയപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട ഒരു കുട്ടി കെമിസ്ടിയിൽ പരാജയപെട്ടതാണെങ്കിൽ ആ കുട്ടി ഗണിതത്തിൽ കൂടി പരാജയപ്പെട്ടതാവാനുള്ള സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. ഒരു ക്ലാസിലെ 80 കുട്ടികളിൽ 25 പേർ പെൺകുട്ടികളും 55 പേർ ആൺ കുട്ടികളുമാണ്. പെൺകുട്ടികളിൽ 10 പേർ ധനികരാണ്. അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്ന ഒരു കുട്ടി ധനികയായ പെൺകുട്ടിയാവാനുള്ള സാധ്യത എന്ത്?

9. ഒരു കൂട്ടം തൊഴിലാളികളിൽ 3 പുരുഷന്മാരും 1 സ്ത്രീയും ഉണ്ട്. രണ്ടാമത്തെ കൂട്ടത്തിൽ 2 പുരുഷന്മാരും 2 സ്ത്രീകളും, മൂന്നാമത്തെ കൂട്ടത്തിൽ ഒരു പുരുഷനും 3 സ്ത്രീകളുമുണ്ട്. ഒരോ കൂട്ടത്തിൽ നിന്നും ഓരോ തൊഴിലാളിയെ വീതം അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഒരു പുരുഷനും 2 സ്ത്രീകളും തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

10. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 6 ചുവപ്പും 4 കറുപ്പു പന്തുകളും രണ്ടാമത്തെ സഞ്ചിയിൽ 4 ചുവപ്പും 6 കറുപ്പ് പന്തുകളും മൂന്നാമത്തെ സഞ്ചിയിൽ 5 ചുവപ്പും 5 കറുപ്പും പന്തുകളും ഉണ്ട്. ഒരു സഞ്ചി അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുത്ത് അതിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് എടുക്കുന്നു. ഇത് ചുവന്ന പന്താണെങ്കിൽ ഒന്നാമത്തെ സഞ്ചിയിൽ നിന്നാകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

11. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 4 വെള്ളയും 3 കറുപ്പും പന്തുകളുമുണ്ട്. എടുത്ത പന്ത് തിരിച്ച് വയ്ക്കുന്ന രീതിയിൽ രണ്ടു പന്തുകൾ വീതം രണ്ട് തവണയായി എടുക്കുന്നു. ഒന്നാമത്തെ തവണ 2 വെള്ള പന്തുകളും രണ്ടാം തവണ 2 കറുപ്പ് പന്തുകളും ലഭിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

12. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് സെറ്റ് സംഖ്യകളിൽ നിന്നും ഓരോ സംഖ്യകൾ അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

സംഖ്യകളുടെ തുക 9 ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

13. A, B, C എന്നിവ ഒരു യന്ത്രഭാഗം നിർമിക്കുന്ന കമ്പനികളാണ് യഥാക്രമം 25, 35, 40 ശതമാനം ഇവ ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കുന്നു. ഇവയുടെ ഉൽപ്പന്നങ്ങളിൽ യഥാക്രമം 5,4,3 ശതമാനം ഇനങ്ങൾ തകരാറുള്ളതായി കാണുന്നു. അനിയതമായി എടുത്ത ഒരു യന്ത്രഭാഗം തകരാറുള്ളതാണെങ്കിൽ B എന്ന കമ്പനി ഉൽപ്പാദിപ്പിച്ചതാവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

14. ഒരു ചീട്ട് എടുത്ത് തിരിച്ച് വയ്ച്ചതിന് രണ്ടാമത്തെ ചീട്ട് എന്ന രീതിയിൽ ഒരു പാക്കറ്റ് ചീട്ടിൽ നിന്നും രണ്ടു ചീട്ടുകൾ എടുക്കുന്നു. ഒന്നാമത്തേത് ഡയമണ്ടും അടുത്തത് രാജാവും ആവുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

15. ഒരു കമ്പനിയിലെ ജീവനക്കാരിൽ 30% പേർ ബോണസ് ലഭിക്കുന്നവരാണ്. ബോണസ് ലഭിക്കുന്നവരിൽ 20%പേർ നൈപുണ്യമുള്ളവരാണ്. അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട ഒരു ജീവനക്കാരൻ നൈപുണ്യമുള്ളയാളും ബോണസ് ലഭിക്കുന്ന ആളും ആവാനുള്ള സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

16. A യും B യും രണ്ട് ഇവന്റുകളാണ്. $P(A) = \frac{1}{3}$ ഉം $P(B) = \frac{3}{4}$ ഉം $P(A \cup B) = \frac{11}{12}$ ഉം ആണെങ്കിൽ $P(A/B)$ യും $P(B/A)$ യും കണ്ടുപിടിക്കുക.

17. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 5 ചുവന്ന പന്തുകളും 3 കറുത്ത പന്തുകളും മറ്റൊരു സഞ്ചിയിൽ 4 ചുവന്ന പന്തുകളും 5 കറുത്ത പന്തുകളും ഉണ്ട്. ഒരു സഞ്ചി അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുത്ത് അതിൽ നിന്നു 2 പന്തുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഒരു പന്ത് ചുവപ്പും മറ്റൊന്ന് കറുപ്പും ആവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്? ശാഖാ ചിത്രം വരയ്ക്കുക?

18. ഒരു പാത്രത്തിൽ 3 പച്ച പന്തുകളും 5 ചുവന്ന പന്തുകളും ഉണ്ട്. മറ്റൊരു പാത്രത്തിൽ 2 പച്ചയും ഒരു ചുവന്നതും 2 മഞ്ഞയും പന്തുകളുണ്ട്. ഒരു പാത്രം അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുക്കുകയും അതിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് എടുക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. എങ്കിൽ പച്ച പന്ത് ലഭിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

19. ഒരു പാത്രത്തിൽ 10 വെള്ള പന്തുകളും 3 കറുത്ത പന്തുകളും മറ്റൊരു പാത്രത്തിൽ 3 വെള്ള പന്തുകളും 5 കറുത്ത പന്തുകളും ഉണ്ട്. ഒന്നാമത്തെ പാത്രത്തിൽ നിന്നും രണ്ട് പന്തുകൾ അനിയതമായി എടുത്ത് രണ്ടാമത്തെ പാത്രത്തിൽ നിക്ഷേപിച്ചശേഷം രണ്ടാമത്തെ പാത്രത്തിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് എടുത്താൽ വെള്ള പന്ത് കിട്ടാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

20. 3 പാത്രങ്ങളിലുള്ള പന്തുകൾ താഴെ പറയും പ്രകാരമാണ്.

| പാത്രം | വെള്ള | ചുവപ്പ് | കറുപ്പ് |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 |

അനിയതമായി തെരഞ്ഞെടുത്ത ഒരു പാത്രത്തിൽ നിന്നും രണ്ട് പന്തുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ പന്തുകൾ ഒരു വെള്ളയും ഒരു ചുവപ്പുമായാൽ ഇവ രണ്ടാമത്തെ പാത്രത്തിൽ നിന്നും ആയിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

**ഉത്തരങ്ങൾ**

1. $P(A/B)=\frac{1}{10}$, $P(B/A)=\frac{1}{3}$

2. $\frac{3}{28}$

3. $\frac{45}{364}$

4. 0.06

5. (i) 0.511 (ii) 0.52

6. $\frac{2}{7}$

7. $\frac{1}{2}$

8. $\frac{1}{8}$

9. $\frac{13}{32}$

10. 0.4

11. $\frac{2}{49}$

12. $\frac{7}{64}$

13. 0.36

14. $\frac{1}{52}$

15. 0.06

16. $\frac{2}{9};\frac{1}{2}$

17. $\frac{275}{504}$

18. $\frac{31}{80}$

19. $\frac{10C_2}{13C_2}\times\frac{5}{10}+\frac{3C_2}{13C_2}\times\frac{3}{10}+10C_1\times\frac{3C_1}{13C_2}\times\frac{4}{10}$

20. $\frac{2}{5}$

# 10 പ്രതിരൂപണ തന്ത്രങ്ങൾ (Sampling Techniques)

J5J8M3

## ആമുഖം

സെൻസസ്, സാമ്പിൾ സർവെ എന്നിവയെക്കുറിച്ച് അധ്യായം 2-ൽ നാം ചർച്ച ചെയ്തതാണ്. ഒരു അന്വേഷണത്തിൽ നാം പരിഗണിക്കുന്ന എല്ലായിനങ്ങളെയും സൂചിപ്പിക്കാൻ 'സമഷ്ടി' (Population) എന്ന പദം ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരു സമഷ്ടി, പരിമിത അംഗങ്ങളുള്ളതോ അനന്തം അംഗങ്ങളുള്ളതോ ആകാം. സമഷ്ടിയിലെ ഓരോ അംഗത്തേയും അന്വേഷണ വിധേയമാക്കുന്നതിനെ സെൻസസ് അഥവാ പൂർണ്ണ വിവരശേഖരണം എന്നു പറയുന്നു. എന്നാൽ മിക്ക അന്വേഷണങ്ങളിലും സമഷ്ടിയുടെ വലിപ്പം കൂടുതലായതിനാൽ പൂർണ്ണ വിവരണശേഖരണം പ്രാവർത്തികമാക്കാൻ കഴിയാറില്ല. ഇത്തരം അവസരങ്ങളിൽ സമഷ്ടിയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഒരു ഭാഗമാണ് (Sample) നാം പരിഗണിക്കുന്നത്. ഈ രീതിയെ പ്രതിരൂപണം (Sampling) എന്നു പറയുന്നു. സമഷ്ടിയിലെ ഓരോ അംഗത്തെയും ഒരോ പ്രതിരൂപണ അംഗമായി കണക്കാക്കാം. സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും സാമ്പിളുകളായി തെരഞ്ഞെടുക്കാവുന്ന അംഗങ്ങളുടെ നിരയാണ് പ്രതിരൂപണ ചട്ടക്കൂടിൽ വരുന്നത്.

### പ്രവർത്തനം

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സാഹചര്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ എന്താണ് സമഷ്ടി? എന്താണ് പ്രതിരൂപണ അംഗങ്ങൾ? എങ്ങനെ ഒരു പ്രതിരൂപണ ചട്ടക്കൂട് നിർമിക്കാം? തുടങ്ങിയവ പരിശോധിക്കുക.

- ഉപഭോക്താക്കൾ പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന സൗകര്യങ്ങളെക്കുറിച്ച് അറിയുന്നതിന് മോണാലിസ ഹെൽത്ത് ക്ലബ് ഒരു സർവേ നടത്താൻ ഉദ്ദേശിക്കുന്നു.
- ഒരു ചോക്ലേറ്റ് നിർമാണ കമ്പനി പുതിയ ഒരു ഇനം ചോക്ലേറ്റ് അവതരിപ്പിക്കുന്നു. ഈ ചോക്ലേറ്റുകളുടെ ഗുണപരിശോധന നടത്താൻ അവർ ഉദ്ദേശിക്കുന്നു.

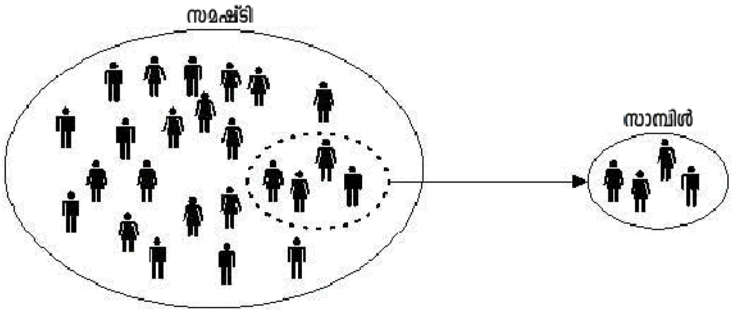
## സെൻസസ് സർവേ (Census Survey)

ഒരു കൂട്ടത്തെക്കുറിച്ച് വിവരം ശേഖരിക്കുന്നതിന് പരമ്പരാഗത രീതി പ്രകാരം ആ കൂട്ടത്തിലെ മുഴുവൻ അംഗങ്ങളിൽ നിന്നും നാം വിവരങ്ങൾ ആരായുന്നു. ഒരു രാജ്യത്തിന്റെ ജനസംഖ്യാ കണക്കെടുപ്പ്, രാജ്യത്തെ ആകെ കാർഷികോൽപ്പാദനത്തെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനം തുടങ്ങിയവ എല്ലാ യൂണിറ്റുകളിൽ നിന്നും വിവരം ശേഖരിക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. കാർഷികോൽപ്പാദനത്തിന്റെ സറിതിവിവര കണക്ക് ശേഖരിക്കൽ, തൊഴിലാളികളുടെ വിതരണം, തൊഴിലില്ലായ്മ കണക്കിലാക്കൽ എന്നിവയിലെല്ലാം സെൻസസ് അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള സമീപനമാണ് സ്വീകരിക്കുന്നത്.

ഒരു ആശുപത്രിയിൽ മുൻവർഷം 20 വയസ്സിനും 40 വയസ്സിനുമിടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള

പുരുഷന്മാരായ പുകവലിക്കാരിൽ നടത്തിയ കണ്ഠശസ്ത്രക്രിയയെക്കുറിച്ചുള്ള സർവേ, ഒരു പുസ്തകത്തിലെ അച്ചടിപ്പിശകുകൾ കണ്ടെത്താനുള്ള സർവേ, ഒരു പ്രദേശത്ത് നടന്ന അപകടങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള സർവേ തുടങ്ങിയവയെല്ലാം സെൻസസ് പഠനത്തിന് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

ചിത്രം 10.1




> സെൻസസ് എടുക്കുന്നതിൽ പിയറി സിമൺ ഡി ലാപ്ലാസ് (Pierre - Simon de Laplace) ഒരു അഗ്രഗണ്യൻ ആയിരുന്നു. 1780– ൽ അദ്ദേഹം ഒരു രാജ്യത്തിന്റെ ജനസംഖ്യ കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള ലാപ്ലാസ് രീതി (Laplace Method) വികസിപ്പിച്ചെടുത്തു. തെരഞ്ഞെടുത്ത ഏതാനും സമൂഹത്തിൽ സെൻസസ് നടത്തി ജനനങ്ങളുടെ എണ്ണവും അതിന് ജനസംഖ്യയുമായുള്ള അനുപാതവും കണക്കാക്കലാണ് ലാപ്ലാസ് രീതിയ്ക്ക് പുറകിലുള്ള തത്ത്വം. ഈ അനുപാതം ഉപയോഗിച്ച് ആ രാജ്യത്തെ മുഴുവൻ ജനസംഖ്യ കണക്കാക്കുന്നു.

## നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

സെൻസസ് രീതിയും പ്രതിരൂപണ രീതിയും ഉപയോഗിക്കാവുന്ന സന്ദർഭങ്ങൾ അധ്യായം 2-ൽ നിന്നും കണ്ടെത്തുക.

## 10.1. പ്രതിരൂപണത്തിന്റെ ആവശ്യകതയും പ്രാധാന്യവും (Need and Importance of Sampling)

വീടുകളിൽ ആഹാരം പാകം ചെയ്യുന്ന അവസരങ്ങളിൽ, അരിയോ അല്ലെങ്കിൽ മറ്റേതെങ്കിലും ധാന്യങ്ങളോ, പാകമായോയെന്ന് മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് പാചക പാനിയിൽ നിന്നും ഒന്നോ രണ്ടോ അരിയോ കുറച്ച് ധാന്യമോ എടുത്ത് പരിശോധിക്കുന്ന പതിവുണ്ട്. രക്തത്തിൽ എന്തെങ്കിലും അസാധാരണത്വമുണ്ടോയെന്ന് പരിശോധിക്കുന്നതിന് ലബോറട്ടറികളിൽ കുറച്ച് തുള്ളി രക്തം മാത്രം ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഈ തുള്ളികളിൽ നിന്നും കണ്ടെത്തുന്ന വിവരം ശരീരത്തിലെ മുഴുവൻ രക്തത്തിനും ബാധകമാണെന്ന് നമ്മൾ കരുതുന്നു. ഒരു ബൾബ് നിർമാണ ഫാക്ടറിയിൽ ഏതാനും ബൾബുകളുടെ ജീവിത ദൈർഘ്യം പരിശോധിച്ച് ആകെ ബൾബുകളുടെ

ശരാശരി ജീവിത ദൈർഘ്യത്തെക്കുറിച്ചുള്ള നിഗമനത്തിൽ എത്തുന്നു. ഇതുപോലെ, മുഴുവൻ സമഷ്ടിയെകുറിച്ചു വിലയിരുത്തുന്നതിന് പ്രയാസകരമോ അസാധ്യമോ ആയ അവസരങ്ങളിൽ സമഷ്ടിയുടെ ഒരു ചെറിയ ഭാഗം ഉപയോഗപ്പെടുത്തി നമുക്ക് നിഗമനങ്ങളിൽ എത്തിച്ചേരാൻ സാധിക്കും. ഈ ചെറിയ ഭാഗത്തെ സാമ്പിൾ അഥവാ പ്രതിരൂപം എന്നു വിളിക്കുന്നു. സാമ്പിൾ എടുക്കുന്ന പ്രക്രിയയെ പ്രതിരൂപണം എന്നും വിളിക്കുന്നു. മുൻ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്നും പ്രതിരൂപണം പഴയ കാലം മുതൽ തന്നെ പ്രയോഗത്തിലുള്ളതായി മനസ്സിലാക്കാം. ഇന്നത്തെ കാലത്ത് പ്രതിരൂപണ സമ്പ്രദായങ്ങൾ ജീവിത നിലവാരം, ജീവിതച്ചിലവ് സൂചിക തുടങ്ങിയവ പഠിക്കുന്നതിനുള്ള സാമൂഹ്യ-സാമ്പത്തിക സർവ്വേകളിൽ വിപുലമായി ഉപയോഗിക്കുന്നു.

താഴെ പറയുന്ന വിവരങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള പഠനങ്ങൾ നമുക്ക് പരിഗണിക്കാം.

- ഇന്റർനെറ്റ് ലഭ്യതയുള്ള കേരളീയരുടെ ശതമാനം.
- ഒരു പഠന പര്യടനത്തിനുള്ള സ്ഥലങ്ങൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനെ സംബന്ധിച്ച് നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ അഭിപ്രായം.
- കേരളത്തിലെ വിവിധ രാഷ്ട്രീയ നേതാക്കളെക്കുറിച്ചുള്ള അഭിപ്രായ വോട്ടെടുപ്പ്.

ഒന്നാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും പഠനങ്ങളിൽ മുഴുവൻ കേരളീയരിൽ നിന്നും വിവരം ശേഖരിക്കുന്നത് ഏറെക്കുറെ അസാധ്യമാണ്. ഈ പ്രക്രിയ ചിലവേറിയതും ധാരാളം സമയം ആവശ്യമായതും പരിശീലനം സിദ്ധിച്ച അന്വേഷകരുടെ സഹായം തേടേണ്ടതുമുള്ളതാണ്. രണ്ടാമത് പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന പഠനത്തിന് സെൻസസ് വഴി വിവരശേഖരണം നടത്താം.

## 10.2: സെൻസസും പ്രതിരൂപണവും – മേന്മകളും പോരായ്മകളും

**പട്ടിക 10.1 – സെൻസസ്:– മേന്മകളും പോരായ്മകളും**

| മേന്മകൾ | പോരായ്മകൾ |
|---|---|
| i. 100% കൃത്യതയുണ്ട്. | i. സമഷ്ടിയിലെ അംഗങ്ങൾ അനന്തമാണെങ്കിൽ സെൻസസ് പഠനം അസാധ്യമാണ്. |
| ii. സമഷ്ടിയിലെ എല്ലാ യൂണിറ്റുകളും അന്വേഷണ വിധേയമാകേണ്ട അവസരത്തിൽ സെൻസസ് മാത്രമാണ് ഏക മാർഗം. | ii. സെൻസസ് രീതിയിൽ കൂടുതൽ സമയം, കൂടുതൽ ചെലവ്, പരിശീലനം സിദ്ധിച്ച അന്വേഷകർ തുടങ്ങിയവ ആവശ്യമാണ്. |
| iii. സെൻസസ് രീതി ഉപയോഗിച്ച് ലഭിച്ച വിവരങ്ങൾ കൂടുതൽ അന്വേഷണങ്ങൾക്കായി ഉപയോഗപ്പെടുത്താം. | iii. പരിശോധനാ വേളയിൽ യൂണിറ്റുകൾ നശിപ്പിക്കപ്പെടുകയാണെങ്കിൽ സെൻസസ് രീതി അഭിലഷണീയമല്ല. |

പട്ടിക 10.2 – പ്രതിരൂപണം :– മേന്മകളും പോരായ്മകളും

| മേന്മകൾ | പോരായ്മകൾ |
|---|---|
| i. സമയവും ധനവും ലാഭിക്കുന്നു.<br>ii. സമഷ്ടി വളരെ വലുതാകുമ്പോഴോ യൂണിറ്റുകൾ പരിശോധനാ വേളയിൽ നശിപ്പിക്കപ്പെടുകയോ ചെയ്യുന്ന അവസരത്തിൽ പ്രതിരൂപണ രീതി മാത്രമേ സ്വീകരിക്കാൻ സാധിക്കൂ.<br>(ഉദാ:- ചോക്കുകൾ പൊട്ടുന്നതിന് വേണ്ട ബലം പരിശോധിക്കുമ്പോൾ)<br>iii. കൂടുതൽ കൃത്യത പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു.<br>iv. പ്രതീക്ഷിത പിശകുകൾ കണക്കാക്കാൻ സാധിക്കും. | i. തെറ്റായ പ്രതിരൂപണ രീതികൾ തെറ്റിദ്ധാരണാജനകമായ ഫലങ്ങളിൽ നയിച്ചേക്കാം.<br>ii. എല്ലാ യൂണിറ്റുകളിൽ നിന്നും വിവര ശേഖരണത്തിന്റെ ആവശ്യകതയുണ്ടെങ്കിൽ പ്രതിരൂപണ രീതി ആശാസ്യമല്ല.<br>(ഉദാ:- സ്കൂൾ കുട്ടികളിലെ ചർമ്മ രോഗ പരിശോധന) |

**പ്രവർത്തനം**

സെൻസസിനെക്കാൾ മികച്ചത് പ്രതിരൂപണം ആകുന്നതും നേരെ തിരിച്ചുമായ സാഹചര്യങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക.

**സർവ്വേയിലെ പിശകുകൾ**

സാംഖ്യക പഠനങ്ങളിൽ നിന്നും ലഭിച്ച ഫലങ്ങൾ പിശകുകളിൽ നിന്നും മുക്തമല്ല. ഡാറ്റ ശേഖരണം, ക്രമീകരണം, വിശകലനം എന്നീ ഘട്ടങ്ങളിൽ ഉണ്ടാകുന്ന പിശകുകളെ രണ്ടായി തരം തിരിക്കാം. i) പ്രതിരൂപണ പിശകുകൾ (Sampling errors) ii) പ്രതിരൂപണേതര പിശകുകൾ (Non sampling errors)

## 10.3: പ്രതിരൂപണ, പ്രതിരൂപണേതര പിശകുകൾ

സമഷ്ടിയുടെ ഒരു ഭാഗം മാത്രം അന്വേഷണ വിധേയമാക്കുന്നുവെന്നതിനാൽ പ്രതിരൂപണ സർവ്വേകളിൽ പ്രതിരൂപണ പിശകുകൾ ദൃശ്യമാണ്. സെൻസസ് സർവ്വേകളിൽ പ്രതിരൂപണ പിശകുകൾ ഇല്ല. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു പ്രദേശത്തെ ആളുകളുടെ യഥാർഥ ശരാശരി വരുമാനം പ്രതിരൂപണത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ലഭിക്കുന്ന ശരാശരി വരുമാനത്തിന് തുല്യമാകാതിരിക്കാം. പ്രതിരൂപണ പിശകുകൾ പൂർണ്ണമായി ഇല്ലാതാക്കാൻ സാധിക്കില്ല. പക്ഷേ വേണ്ടത്ര വലിപ്പത്തിലും ശരിയായ സാമ്പിൾ സർവ്വേ രൂപകൽപ്പനയിലും ഉള്ള സാമ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുത്ത് പ്രതിരൂപണ പിശകുകൾ കുറയ്ക്കുവാൻ സാധിക്കും. സാമ്പിളിന്റെ വലിപ്പം വർദ്ധിക്കുന്നതിനനുസരിച്ച് പ്രതിരൂപണ പിശകുകൾ കുറയുന്നു. പ്രതിരൂപണ പിശകുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുകയും അളക്കുകയും നിയന്ത്രിക്കുകയും ചെയ്യാം. ഇനി പറയുന്ന കാരണങ്ങളാൽ പ്രതിരൂപണ പിശകുകൾ ഉണ്ടാകുന്നു.

i. സമഷ്ടിയുടെ വ്യാപ്തിയെ സംബന്ധിച്ച വ്യക്തതയില്ലായ്മ.

ii. സാമ്പിളിന്റെ തെറ്റായ തെരഞ്ഞെടുപ്പ്.

iii. അപര്യാപ്തമായ സാമ്പിൾ വലിപ്പം.

iv. അനുചിതമായ ചോദ്യാവലി.

v. പകരംവയ്ക്കൽ മൂലമുള്ള പിശകുകൾ.

ഒരു സർവ്വേയിൽ പ്രതിരൂപണ പിശകുമൂലമല്ലാതെയുള്ള പിശകുകളെ പ്രതിരൂപണേതര പിശകുകൾ എന്നു പറയുന്നു. ഡാറ്റയുടെ നിരീക്ഷണ സംസ്ക്കരണ ഘട്ടങ്ങളിലും. സെൻസസോ പ്രതിരൂപണം വഴിയോ ലഭിച്ച ഡാറ്റയുടെ വിശകലന ഫലങ്ങളുടെ അച്ചടി, അവതരണം തുടങ്ങിയ ഘട്ടങ്ങളിലും പ്രതിരൂപണേതര പിശകുകൾ ഉണ്ടാകാം. സെൻസസ് സർവേ വഴി ലഭിക്കുന്ന ഡാറ്റ പ്രതിരൂപണ പിശകുമുക്തമാണെങ്കിലും അവ പ്രതിരൂപണേതര പിശകുകൾക്ക് വിധേയമാണ്. പ്രതിരൂപണ സർവ്വേവഴി ലഭിക്കുന്ന ഡാറ്റ പ്രതിരൂപണ പിശകുകൾക്കും പ്രതിരൂപണേതര പിശകുകൾക്കും വിധേയമാണ്. ശരിയായ പ്രതിരൂപണ രൂപകൽപ്പന വഴിയും കാര്യക്ഷമതയുള്ള അന്വേഷകരെ നിയോഗിക്കുന്നതിലൂടെയും മെച്ചപ്പെട്ട രീതിയിൽ പ്രതിരൂപണം നടത്തുന്നത് മൂലവും ഇത്തരം പിശകുകളെ നമുക്ക് കുറയ്ക്കുവാൻ സാധിക്കും. സാമ്പിൾ വലിപ്പം കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് പ്രതിരൂപണേതര പിശകുകളും കൂടുന്നതായി കാണാം. ചുവടെ പറയുന്ന കാരണങ്ങളാൽ പ്രതിരൂപണേതര പിശകുകൾ ഉണ്ടാകാം.

1. ചോദ്യങ്ങളോടുള്ള അപ്രസക്തമായ പ്രതികരണങ്ങൾ.
2. അച്ചടിയിലും പ്രസിദ്ധീകരണത്തിലുമുണ്ടാകുന്ന പിശകുകൾ.
3. ഡാറ്റസംസ്കരണത്തിലെ പിശകുകൾ.

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

പ്രതിരൂപണ, പ്രതിരൂപണേതര പിശകുകൾ വേർതിരിക്കുക.

### പ്രതിരൂപണ മാർഗങ്ങൾ (Sampling Methods)

60 പേരുള്ള ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ പണം ചെലവഴിക്കൽ സ്വഭാവത്തെ കുറിച്ച് ഒരു പഠനം നടത്തുവെന്ന് കരുതുക. 10 കുട്ടികളടങ്ങുന്ന ഒരു സാമ്പിളാണ് പഠനത്തിനായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നത്. ഇവിടെ അന്വേഷകന് വേണമെങ്കിൽ അദ്ദേഹത്തിന് സൗകര്യപ്രദമായ ഒരു സാമ്പിൾ പരിഗണിക്കാം. ഇത്തരം പ്രതിരൂപണത്തെ സംഭാവ്യേതര പ്രതിരൂപണം എന്നു വിളിക്കുന്നു. മറ്റൊരു രീതിയിൽ അന്വേഷകന് വേണമെങ്കിൽ സമഷ്ടിയിലെ ഓരോ അംഗത്തിനും സാമ്പിളിൽ ഉൾപ്പെടുന്നതിന് നിശ്ചിതമായ ഒരു സംഭാവ്യത നൽകിക്കൊണ്ട് സാമ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുക്കാം. അത്തരം മാർഗത്തെ സംഭാവ്യതാ പ്രതിരൂപണം എന്നും പറയുന്നു.

## 10.4. സംഭാവ്യേതര പ്രതിരൂപണം (Non probability sampling)

സംഭാവ്യേതര പ്രതിരൂപണത്തിൽ അംഗങ്ങളെ സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നത് യാദൃശ്ചികേതര മാർഗങ്ങളിലൂടെയാണ്. ഇതിൽ സുകര പ്രതിരൂപണം, മുൻവിധി പ്രതിരൂപണം, വിഹിത പ്രതിരൂപണം എന്നിവ ഉൾപ്പെടുന്നു. ഈ രീതികളെല്ലാം തന്നെ ആത്മനിഷ്ടങ്ങളാണ്.

### സുകര പ്രതിരൂപണം (Convenience Sampling)

സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും സൗകര്യപ്രദമായി അംഗങ്ങൾ തെരഞ്ഞെടുത്തുകൊണ്ട് സുകര പ്രതിരൂപണം നടത്തുന്നു. വാഹനങ്ങളുടെ പേരുചേർക്കൽ പട്ടിക, ടെലിഫോൺ നാമാവലി പട്ടിക തുടങ്ങിയവയിൽ നിന്നും സാമ്പിളെടുക്കുന്നത് അന്വേഷകന്റെ സൗകര്യത്തിനനസുരിച്ചായാൽ അതിനെ സുകരപ്രതിരൂപണം എന്നു പറയുന്നു. ഇതുവഴി ലഭിച്ച അംഗങ്ങൾ സമഷ്ടിയുടെ ഒരു പ്രതിനിധി ആയിരിക്കില്ല. ഓൺലൈൻ ഗവേഷണം കൂടാതെ ദൃശ്യമാധ്യമങ്ങൾ തയാറാക്കുന്ന പരമ്പരാഗത അഭിമുഖങ്ങൾ തുടങ്ങിയവയിൽ ഇത്തരം പ്രതിരൂപണം യഥേഷ്ടം ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്.

### മുൻവിധി പ്രതിരൂപണം (Judgement Sampling)

അന്വേഷണത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ അനുസരിച്ച് സാമ്പിളിൽ ഉൾപ്പെടുത്താൻ ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ അംഗങ്ങളെ അന്വേഷകൻ മുൻവിധിയോടെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതാണ് ഇത്തരം പ്രതിരൂപണത്തിന്റെ പ്രത്യേകത. ഉദാഹരണത്തിന്, വിദ്യാർഥികളുടെ ചിലവ് ശീലങ്ങളെക്കുറിച്ച് വിശകലനം ചെയ്യുന്നതിനായി 10 കുട്ടികളുടെ ഒരു സാമ്പിൾ 60 കുട്ടികളുള്ള ഒരു ക്ലാസിൽ നിന്നും തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. ഇവിടെ അന്വേഷകൻ അദ്ദേഹത്തിന്റെ ഉത്തമബോധ്യത്തിൽ ആ ക്ലാസിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കാവുന്ന 10 പേരെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ രീതിയിൽ സാമ്പിളുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നത് നിശ്ചിത ഉദ്ദേശത്തോടെയാണ്. അന്വേഷകൻ അനുഭവപരിചയവും വൈദഗ്ധ്യമുള്ളയാളാവുകയും പ്രതിരൂപണം ശ്രദ്ധയോടെ നടത്തുകയും ചെയ്താൽ ഇത്തരം സാമ്പിളുകൾ ഉപയോഗിച്ച് ശ്രേഷ്ഠമായ ഫലങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുവാൻ സാധിക്കും. വളരെ എളുപ്പത്തിൽ നമ്മൾ ലക്ഷ്യമിടുന്ന ഒരു സാമ്പിൾ കിട്ടുന്നതിന് ഇത്തരം പ്രതിരൂപണം നമ്മെ സഹായിക്കും.

### വിഹിത പ്രതിരൂപണം (Quota Sampling)

ഈ രീതിയിൽ ചില നിർദ്ദിഷ്ട സവിശേഷതകൾ അനുസരിച്ച് വിഹിതം തിരിക്കുന്നു. ഉദാഹരണം വിവിധ വരുമാന പരിധികൾ. വിഹിതങ്ങൾക്കുള്ളിൽ നിന്നും വ്യക്തിപരമായ മുൻവിധിയോടെ സാമ്പിൾ അംഗങ്ങളെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു വരുമാന സർവ്വേയിൽ ഒരു പ്രദേശത്ത് വസിക്കുന്ന 100 പേരിൽ നിന്നും വിവരം തേടേണ്ടതുണ്ടെന്ന് കരുതുക. ഇവരിൽ 60 പേർ വീട്ടമ്മമാരും 25 പേർ ഉദ്യോഗസ്ഥരും 15 പേർ വ്യാപാരികളുമാണ്. ഈ മൂന്ന് കൂട്ടങ്ങളിൽ നിന്നും അന്വേഷകന് സ്വതന്ത്രമായി ആൾക്കാരെ തെരഞ്ഞെടുക്കാം. സാധാരണയായി പൊതുജനാഭിപ്രായ പഠനങ്ങളിലും വ്യക്തിഗത അഭിമുഖത്തിലും ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്.

**പ്രവർത്തനം**

സംഭാവ്യേതര പ്രതിരൂപണം ഉചിതമല്ലാത്ത സമാന സാഹചര്യങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക.

## 10.5 സംഭാവ്യതാ പ്രതിരൂപണം (Probability Sampling)

സമഷ്ടിയിലെ ഓരോ അംഗത്തിനേയും സാമ്പിളിൽ ഉൾപ്പെടുത്തുന്നതിന് ചില മുൻനിശ്ചയപ്രകാരമുള്ള സംഭാവ്യതാ നിയമങ്ങളുടെ സഹായത്താൽ ശാസ്ത്രീയമായ രീതിയിൽ സാമ്പിളുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന രീതിയാണ് സംഭാവ്യതാ പ്രതിരൂപണം. ഈ രീതി പരിപൂർണ്ണമായും വസ്തുനിഷ്ടമാണ്.

വിവിധതരം സംഭാവ്യതാ പ്രതിരൂപണങ്ങൾ ചുവടെ പറയുന്നു.

1. ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം (Simple Random Sampling)
2. ക്രമാനുസൃത പ്രതിരൂപണം (Systematic Sampling)
3. സ്തരിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം (Stratified Random Sampling)
4. സംഘ പ്രതിരൂപണം (Cluster Sampling)
5. ബഹുഘട്ട പ്രതിരൂപണം (Multistage Sampling)

**പ്രവർത്തനം**

സംഭാവ്യതാ പ്രതിരൂപണമോ സംഭാവ്യേതര പ്രതിരൂപണമോ രണ്ടും കൂടി ചേർന്ന രീതിയോ ആവശ്യമായ നിരവധി സാഹചര്യങ്ങളുണ്ട്. അവയെ കണ്ടെത്തുക.

## 10.6. ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം (Simple Random Sampling)

സമഷ്ടിയിലെ ഓരോ അംഗത്തിനും സാമ്പിളിൽ ഉൾപ്പെടുന്നതിന് തുല്യസംഭാവ്യത കൽപ്പിക്കുന്ന പ്രതിരൂപണ മാർഗമാണ് ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം. ഇവിടെ സാമ്പിൾ അംഗങ്ങളെ ക്രമരഹിതമായാണ് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നത്. സംഭാവ്യേതര പ്രതിരൂപണത്തിന്റെ ന്യൂനതകളായ പക്ഷപാതിത്വം, ആത്മനിഷ്ഠ തുടങ്ങിയവ തരണം ചെയ്യുന്നതിന് ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം വഴി സാധിക്കുന്നു. സമഷ്ടി സമജാതീയമാകുമ്പോഴാണ് ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കേണ്ടത്.

ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം രണ്ട് തരത്തിലുണ്ട് - പ്രതിസ്ഥാപനമില്ലാത്ത ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം (Simple Random Sampling With Out Replacement), പ്രതിസ്ഥാപനത്തോടെയുള്ള ലളിതക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം (Simple Random Sampling With Replacement) എന്നിവ. നിങ്ങൾ പഴക്കടയിൽ നിന്നും ഓറഞ്ച് വാങ്ങാൻ പോകുന്നുവെന്ന് കരുതുക. ഓറഞ്ച് കൂടയിൽ നിന്നും 5 ഓറഞ്ചുകൾ പ്രതിസ്ഥാപനമില്ലാതെ ഓരോന്നായി നിങ്ങൾ എടുക്കുന്നുവെന്നും കരുതുക. ഇവിടെ കൂടയിലെ എല്ലാ ഓറഞ്ചുകൾക്കും തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടാൻ തുല്യ സംഭാവ്യതയാണുള്ളത്. ഇത്തരം പ്രതിരൂപണ രീതിയെയാണ് പ്രതിസ്ഥാപനമില്ലാത്ത ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണമെന്ന് പറയുന്നത്. ഒരു പ്രാവശ്യം തെരഞ്ഞെടുത്തതിനെ തിരികെ വച്ചതിന് ശേഷം വീണ്ടും തെരഞ്ഞെടുപ്പ് നടത്തുന്ന രീതിയിലുള്ള പ്രതിരൂപണത്തെയാണ് പ്രതിസ്ഥാപനത്തോടെയുള്ള ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം എന്നു പറയുന്നത്. സമഷ്ടിയിൽ N അംഗങ്ങളുണ്ടെന്നും നമുക്ക് 'n' അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു സാമ്പിൾ വേണമെന്നും കരുതുക. ലഭ്യമായ സാമ്പിളുകളുടെ എണ്ണം SRSWOR ൽ $NC_n$ ഉം SRSWR ൽ $N^n$ ഉം ആണ്.

**വിവരണം 10.1**

5 അംഗങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു സമഷ്ടിയാണ് 2, 3, 6, 8, 11. വലിപ്പം 2 ആയ താഴെ പറയുന്ന തരത്തിലുള്ള ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപങ്ങൾ കാണുക.

1. പ്രതിസ്ഥാപനമില്ലാത്ത വിധം (SRSWOR)

2. പ്രതിസറാപനത്തോടെയുള്ള വിധം (SRSWR)

**പരിഹാരം**

SRSWOR സാമ്പിളുകൾ -

(2, 3), (2,6), (2, 8), (2, 11), (3, 6), (3, 8), (3, 11), (6, 8), (6, 11), (8,11)

ആകെ സാമ്പിളുകൾ $= 5C_2 = 10$

SRSWR സാമ്പിളുകൾ

(2, 2), (2, 3), (2, 6), (2, 8), (2, 11), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (3, 8), (3, 11), (6, 2), (6, 3), (6, 6), (6, 8), (6, 11), (8, 2), (8, 3) (8, 6), (8, 8), (8, 11), (11, 2), (11, 3), (11, 6), (11, 8), (11,11).

ആകെ സാമ്പിളുകൾ $= 5^2 = 25$

**പ്രവർത്തനം**

1. 1 മുതൽ 5 വരെ നമ്പരുകൾ എഴുതിയിട്ടുള്ള 5 കാർഡുകളുണ്ട്. 2 കാർഡുകളുള്ള ഒരു സാമ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുക്കണം. (i) SRSWOR, (ii) SRSWR എന്നിവ അനുസരിച്ച് എടുക്കുവാൻ സാധിക്കുന്ന എല്ലാ സാമ്പിളുകളും എഴുതുക.
2. ഒരു ബാഗിൽ 10 പന്തുകളുണ്ട്. (i) SRSWOR, (ii) SRSWR രീതികളനുസരിച്ച് വലിപ്പം 3 ആയ എത്ര സാമ്പിളുകൾ എടുക്കാം.?

**ലളിത ക്രമരഹിത സാമ്പിളുകൾ എടുക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗങ്ങൾ**

ചുവടെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന രണ്ട് മാർഗങ്ങളുപയോഗിച്ച് നമുക്ക് ലളിത ക്രമരഹിത സാമ്പിളുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

1) നറുക്കെടുപ്പ് രീതി (Lottery Method)

2) ക്രമരഹിത സംഖ്യാപട്ടിക രീതി (Random Number Table Method)

## നറുക്കെടുപ്പ് രീതി (Lottery Method)

ലളിത ക്രമരഹിത സാമ്പിളുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കാനുപയോഗിക്കുന്ന ഏറ്റവും ലളിതമായ മാർഗമാണ് നറുക്കെടുപ്പ് രീതി. സമഷ്ടിയിലെ N അംഗങ്ങളിൽ നിന്നും 'n' അംഗങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു സാമ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുക്കണമെന്ന് കരുതുക. ഈ N അംഗങ്ങളെ 1 മുതൽ N വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുക. അതിന് ശേഷം ഒരേ രൂപത്തിലും, വലിപ്പത്തിലും, നിറത്തിലുമുള്ള N നറുക്കുകൾ എടുത്ത ശേഷം 1 മുതൽ N വരെ സംഖ്യകൾ അവയ്ക്ക് ക്രമമായി എഴുതുക. ഈ നറുക്കുകൾ മടക്കി ഒരു സഞ്ചിയിൽ നിക്ഷേപിച്ച് കൂട്ടിക്കുഴക്കലിന് ശേഷം n നറുക്കുകൾ ഓരോന്നോരോന്നായി തെരഞ്ഞെടുക്കുക. ഈ 'n' അംഗങ്ങൾ ചേർന്ന് ഒരു സാമ്പിൾ ഉണ്ടാകുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു വൃദ്ധസദനം സന്ദർശിക്കുന്നതിന് 50 കുട്ടികളിൽ നിന്നും 5 പേരെ തെരഞ്ഞെടുക്കണമെന്ന് കരുതുക. കുട്ടികളെ 1 മുതൽ 50 വരെയുള്ള സംഖ്യകളുപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുക. 50 സമാനമായ നറുക്കുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുക. അവ മടക്കിയതിന് ശേഷം ഒരു

സഞ്ചിയിലിട്ട് കൂട്ടിക്കുഴയ്ക്കുക. ശേഷം സഞ്ചിയിൽ നിന്നും 5 നറുക്കുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ആ സംഖ്യകൾ യഥാക്രമം 44, 6, 28, 39, 25 എന്നിവയാൽ. ഈ സംഖ്യകളാൽ സൂചിപ്പിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന കുട്ടികളെ നാം സാമ്പിളിൽ ഉൾപ്പെടുത്തുന്നു.

### ക്രമരഹിത സംഖ്യാ പട്ടിക രീതി (Random number table method)

സമഷ്ടിയിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം വളരെ കൂടുതലാണെങ്കിൽ നറുക്കെടുപ്പ് രീതി വളരെ സമയം ചെലവഴിക്കുന്നതാണ്. ഇത് നറുക്കെടുപ്പ് രീതിയുടെ ഒരു പരിമിതിയാണ്. ക്രമരഹിത സംഖ്യാ പട്ടിക രീതിയെന്നത് ഒരു ക്രമരഹിത സാമ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള ഏറ്റവും പ്രായോഗികവും ചിലവ് കുറഞ്ഞതുമായ രീതിയാണ്. ക്രമരഹിത പട്ടിക എന്നത് 0, 1,2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഏതാണ്ട് ഒരേ ആവൃത്തിയിൽ വരത്തക്കവിധം നിർമിച്ച ഒരു സംഖ്യാ പട്ടികയാണ്. ക്രമരഹിത സംഖ്യാ പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ക്രമരഹിത സാമ്പിൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന രീതി താഴെ പറയുന്നു.

സമഷ്ടിയുടെ വലിപ്പം k അക്കങ്ങളുള്ള N എന്ന സംഖ്യയും നമുക്കെടുക്കേണ്ട സാമ്പിളിന്റെ വലിപ്പം 'n'എന്നും ഇരിക്കട്ടെ.

- സമഷ്ടിയിലെ N അംഗങ്ങളെ 1 മുതൽ N വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുക.
- പട്ടികയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു താൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുക. ഇതിൽ K അക്കങ്ങളുള്ള സംഖ്യകൾ തുടർച്ചയായി വരിയിൽ നിന്നോ നിരയിൽ നിന്നോ വികർണ്ണമായോ തെരഞ്ഞെടുക്കുക. 'n' സംഖ്യകൾ ലഭിക്കുന്നത് വരെ ഈ നടപടി തുടരുക.
- N നേക്കാൾ വലിയ സംഖ്യകൾ ഉപേക്ഷിക്കുക.
- തെരഞ്ഞെടുത്ത സംഖ്യകൾക്ക് അനുരൂപമായി സമഷ്ടിയിലുള്ള അംഗങ്ങൾ ചേരുമ്പോൾ നാം ഉദ്ദേശിച്ച സാമ്പിൾ ലഭിക്കും.

സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ക്രമരഹിത സംഖ്യാ പട്ടികകൾ ഇവയാണ്. ടിപ്പറ്റ് ക്രമരഹിത സംഖ്യാപട്ടിക, ഫിഷർയേറ്റ്സ് പട്ടിക, കെൻഡാൾ – ബാബിങ്ടൺ സ്മിത്ത് പട്ടിക, റാൻഡ് കോർപ്പറേഷൻ പട്ടിക, സി.ആർ.റാവു – മിത്ര-മത്തായി പട്ടിക. ഇന്റർനെറ്റ്, കമ്പ്യൂട്ടർ, കാൽക്കുലേറ്റർ എന്നിവയിൽ ക്രമരഹിത സംഖ്യകൾ ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള പ്രോഗ്രാമുകൾ ലഭ്യമാണ്.

### നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

80 അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും 20 അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു സാമ്പിൾ ക്രമരഹിത സംഖ്യാപട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് തെരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള പ്രക്രിയ വിശദീകരിക്കുക.

#### പ്രവർത്തനം

നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിൽ നറുക്കെടുപ്പ് രീതി, ക്രമരഹിത സംഖ്യാപട്ടിക രീതി എന്നിവ ഉപയോഗിക്കുന്ന സാഹചര്യങ്ങൾ സൃഷ്ടിക്കുകയും സാമ്പിളുകൾ നിർമിക്കുകയും ചെയ്യുക.

## 10.7 – ക്രമാനുസൃത പ്രതിരൂപണം (Systematic sampling)

സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും ഒരംഗത്തിനെ യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുത്തതിന് ശേഷം മുൻകൂട്ടി നിശ്ചയിച്ച ഇടവേളകളിൽ മറ്റ് അംഗങ്ങളെ തെരഞ്ഞെടുത്ത് സാമ്പിൾ നിർമിക്കുന്ന രീതിയാണ് ക്രമാനുസൃത പ്രതിരൂപണം. തെരഞ്ഞെടുക്കൽ പ്രക്രിയ എങ്ങനെയാണെന്ന് നമുക്ക് നോക്കാം.

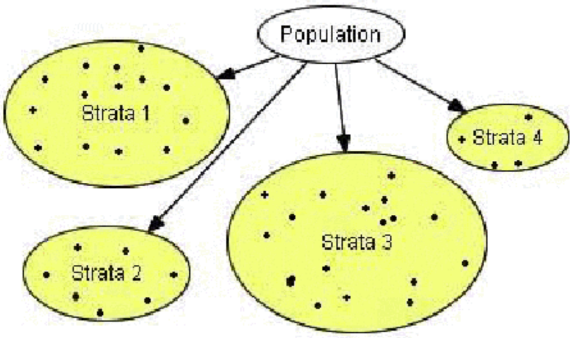
48 അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും 8 അംഗങ്ങളടങ്ങിയ ഒരു സാമ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുക്കണമെന്ന് കരുതുക. ആദ്യം നമുക്ക് പ്രതിരൂപണ ഇടവേള കണ്ടെത്തണം. ഇവിടെ പ്രതിരൂപണ ഇടവേള, $k=\frac{48}{8}=6$ ആണ്. ആദ്യത്തെ സാമ്പിൾ അംഗത്തെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനായി 1 നും 6 നും ഇടയ്ക്കുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യ ($r$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു) തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. അതിന് ശേഷം അടുത്ത ഓരോ 6-ാമത്തെ അംഗത്തേയും സാമ്പിളിലേക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കണം. ആദ്യമായി നാം തെരഞ്ഞെടുത്തത് 3-ാമത്തെ അംഗത്തിനെയാണെങ്കിൽ ഇതിനെ യാദൃശ്ചിക തുടക്കം (Random start) എന്ന് പറയുന്നു. തുടർന്ന് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നത് 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45 എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിലെ അംഗങ്ങളെയാണ്. ഇത്തരം പ്രതിരൂപണ രീതിയാണ് ക്രമാനുസൃത പ്രതിരൂപണം എന്നറിയപ്പെടുന്നത്. പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ 'n' അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു പ്രതിരൂപണ സാമ്പിൾ എടുക്കുന്നതിന് ആദ്യം നാം $k=\frac{N}{n}$ കാണണം. 1നും k യ്ക്കും ഇടയ്ക്കുള്ള r എന്ന ഒരു സംഖ്യ യാദൃച്ഛിക തുടക്കമായി ($1 \le r \le k$) തെരഞ്ഞെടുക്കണം. സാമ്പിൾ അംഗങ്ങളായി വരുന്നത് $r, r+k, r+2k$...... തുടങ്ങിയ 'n' സ്ഥാനങ്ങളിൽ സമഷ്ടിയിൽ വരുന്ന അംഗങ്ങളാണ്. ഇത്തരം പ്രതിരൂപണ രീതിയാണ് ക്രമാനുസൃത പ്രതിരൂപണം. മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച ഉദാഹരണത്തിന്റെ ചിത്രീകരണം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

### വിവരണം 10.2

1 മുതൽ 100 വരെ റോൾ നമ്പർ ഉള്ള 100 കുട്ടികൾ ഒരു ക്ലാസിലുണ്ട്. വലിപ്പം 10 ആയ ഒരു സാമ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുക്കണം. $k=\frac{100}{10}=10$. 1 നും 10 നും ഇടയ്ക്കുള്ള ഒരു സംഖ്യ തെരഞ്ഞെടുക്കുക. അത് 4 ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ നമുക്ക് ആവശ്യമായ സാമ്പിളിൽ ഉൾപ്പെടുന്നത് 4, 14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94 എന്നീ റോൾ നമ്പർ ഉള്ള കുട്ടികളായിരിക്കും.

## 10.8 സ്തരിത പ്രതിരൂപണം (Stratified Sampling)

സമജാതീയ സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും സാമ്പിളെടുക്കുന്നതിന് ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം (SRS) ഏറ്റവും അനുയോജ്യമാണ്. എന്നാൽ സമഷ്ടി ഭിന്ന ജാതീയമായാൽ ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം ഉപയോഗിക്കുന്നത് അഭികാമ്യമല്ല. ഇത്തരം സാഹചര്യത്തിൽ ഭിന്നജാതീയ സമഷ്ടിയെ ആദ്യം സമജാതീയങ്ങളായ കൂട്ടങ്ങളാക്കുന്നു. ഈ കൂട്ടങ്ങളെ സ്തരങ്ങൾ/പാളികൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതിന് ശേഷം ഓരോ സ്തരത്തിൽ നിന്നും ലളിത ക്രമരഹിത രീതിയിൽ സാമ്പിൾ അംഗങ്ങളെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഓരോ സ്തരങ്ങളിൽ നിന്നും തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം അവയിലെ ആകെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന് ആനുപാതികമായിരിക്കും. ഈ രീതിയാണ് സ്തരിത പ്രതിരൂപണം. സ്തരിത പ്രതിരൂപണം ഉപയോഗിക്കണമെങ്കിൽ സമഷ്ടിയെ വിഭജിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന ഓരോ കൂട്ടത്തിലെയും അംഗങ്ങൾ സാധ്യമായിടത്തോളം സമജാതീയമായിരിക്കണം.



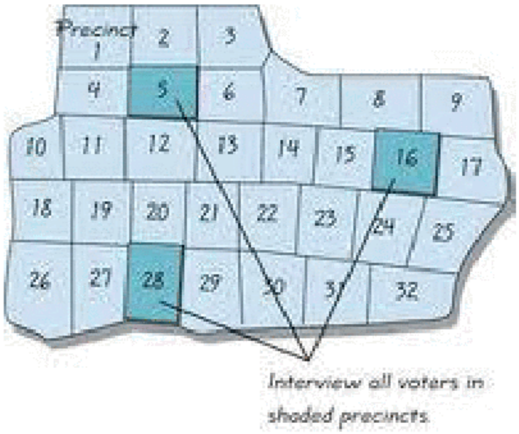

### വിവരണം 10.3

പുകവലിക്കുന്നവരും അല്ലാത്തവരുമായ സ്ത്രീകളും പുരുഷന്മാരും അടങ്ങിയ ഒരു സമഷ്ടി പരിഗണിക്കുക. പുകവലിക്കുന്ന പുരുഷന്മാർ, പുകവലിക്കാത്ത പുരുഷന്മാർ, പുകവലിക്കുന്ന സ്ത്രീകൾ, പുകവലിക്കാത്ത സ്ത്രീകൾ തുടങ്ങി എല്ലാത്തരക്കാരെയും ഉൾപ്പെടുത്തി ഒരു സാമ്പിളെടുക്കുന്നതിന് ഒരു ഗവേഷകൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. തെരഞ്ഞെടുക്കൽ പ്രക്രിയയ്ക്ക് വേണ്ടി ഗവേഷകൻ കൂട്ടങ്ങൾക്കുള്ളിൽ നിന്നും ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണ രീതിയിൽ സാമ്പിളുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ പ്രക്രിയമൂലം എല്ലാ വിഭാഗത്തിൽ നിന്നുള്ളവരുടെയും പ്രാതിനിത്യം നമുക്ക് സാമ്പിളിൽ ഉറപ്പിക്കാം.

## 10.9 സംഘപ്രതിരൂപണം (Cluster Sampling)

ഒരു പട്ടണത്തിലെ ജനങ്ങളുടെ വരുമാനത്തെ കുറിച്ച് പഠിക്കുന്നതിന് സാമ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുക്കണമെന്ന് കരുതുക. ഡാറ്റശേഖരണത്തിനായി നമുക്ക് വേണമെങ്കിൽ പട്ടണത്തെ

പല പ്രദേശങ്ങളായി (സംഘങ്ങളായി) വിഭജിക്കാം. അതിന് ശേഷം ആവശ്യമായ എണ്ണം സംഘങ്ങൾ ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം വഴി തെരഞ്ഞെടുത്താൽ ആ സംഘങ്ങളിലെ എല്ലാപേരും ചേർന്ന് നമുക്കാവശ്യമായ സാമ്പിൾ ലഭിക്കുന്നു. ഇത്തരം പ്രതിരൂപണ രീതിയാണ് സംഘപ്രതിരൂപണം. അതായത് സംഘപ്രതിരൂപണത്തിൽ നമ്മൾ സമഷ്ടിയെ തിരിച്ചറിയപ്പെടുന്ന കുറച്ച് ഉപവിഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. ഈ ഉപവിഭാഗങ്ങളെ സംഘങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു. അതിന് ശേഷം ഈ സംഘങ്ങളിൽ നിന്നും ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം വഴി ആവശ്യമായ എണ്ണം സംഘങ്ങളെ സാമ്പിളിലേയ്ക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ സംഘങ്ങളിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും സാമ്പിളിൽ ഉൾപ്പെടും. ഇത്തരം പ്രതിരൂപണ രീതിയാണ് സംഘ പ്രതിരൂപണം.




### വിവരണം 10.4

| | |
|---|---|
| സമഷ്ടി | ഒരു ജില്ലയിലെ എല്ലാ സ്കൂൾ വിദ്യാർത്ഥികളും |
| സംഘം | ജില്ലയിലെ ഓരോ സ്കൂളുകളും |
| സംഘങ്ങളിൽനിന്നും എടുത്ത S.R.Sകൾ | ജില്ലയിൽ നിന്നും 4 സ്കൂളുകൾ |
| സാമ്പിൾ | 4 സ്കൂളുകളിലേയും എല്ലാ കുട്ടികളും ചേർന്നത് |

## 10.10 ബഹുഘട്ട പ്രതിരൂപണം (Multi stage Sampling)

ഒരു സംസ്ഥാനത്തിലെ ഗൃഹങ്ങളുടെ ഒരു സാമ്പിൾ എടുക്കണമെന്ന് കരുതുക. ഈ പ്രക്രിയ നമുക്ക് വിവിധ ഘട്ടങ്ങളിലായി ചെയ്യുവാൻ സാധിക്കും. ഒന്നാമത്തെ ഘട്ടത്തിൽ സംസ്ഥാനത്തെ പല ജില്ലകളായി വിഭജിച്ച് ആവശ്യമായ എണ്ണം ജില്ലകൾ തെരഞ്ഞെടു

ക്കുന്നു. രണ്ടാം ഘട്ടത്തിൽ തെരഞ്ഞെടുത്ത ജില്ലകളെ വില്ലേജുകളായി വിഭജിച്ച് ആവശ്യമായ വില്ലേജുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു മൂന്നാമത്തെ ഘട്ടത്തിൽ തെരഞ്ഞെടുത്ത വില്ലേജുകളിൽ നിന്നുള്ള ഗൃഹങ്ങളിൽ സാമ്പിളിൽ ഉൾപ്പെടുത്തുന്നു. ഈ ഗൃഹങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് നമ്മുടെ അന്തിമമായ സാമ്പിൾ.

സംസ്ഥാനം

↓

ജില്ലകൾ (ഒന്നാം ഘട്ടം)

↓

വില്ലേജുകൾ (രണ്ടാം ഘട്ടം)

↓

ഗൃഹങ്ങൾ (മൂന്നാം ഘട്ടം)

ഇത്തരം പ്രതിരൂപണമാണ് ബഹുഘട്ട പ്രതിരൂപണം എന്നറിയപ്പെടുന്നത്. പേര് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് പോലെ തന്നെ ഈ പ്രതിരൂപണം നടത്തുന്നത് വിവിധ ഘട്ടങ്ങൾ വഴിയാണ്. ഒന്നാം ഘട്ടത്തിൽ ഏതെങ്കിലും പ്രതിരൂപണ രീതി ഉപയോഗിച്ച് കുറച്ച് യൂണിറ്റുകളെ കണ്ടെത്തുന്നു. തെരഞ്ഞെടുത്ത യൂണിറ്റുകളിൽ നിന്നും രണ്ടാം ഘട്ടത്തിൽ ചില ഉപസാമ്പിളുകളെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഇവിടെ നമുക്ക് ആദ്യഘട്ടത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചതോ അല്ലാത്തതോ ആയ പ്രതിരൂപണ രീതി ഉപയോഗിക്കാം. നമുക്ക് ആവശ്യമായ സാമ്പിളുകൾ ലഭിക്കുന്നതുവരെ ഈ പ്രക്രിയ തുടരാം. രണ്ട് ഘട്ടങ്ങൾ മാത്രം വഴി സാമ്പിളുകൾ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ അതിനെ ദ്വിഘട്ടരൂപണം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

### വിവരണം 10.5

രാജ്യത്തെ വീടുകളിലേക്ക് ആവശ്യമായ ഒരു ഉൽപ്പന്നത്തിന്റെ വിപണന രീതികളെക്കുറിച്ച് ഒരു പഠനം നടത്തണമെന്ന് കരുതുക. ഇവിടെ നമുക്ക് രാജ്യത്തെ ആദ്യമായി സംസ്ഥാനങ്ങളായി വിഭജിക്കാം. അതിന് ശേഷം സംസ്ഥാനങ്ങളെ ജില്ലകളായും ജില്ലകളെ നഗരങ്ങളും പട്ടണങ്ങളുമായും ഇവയെ വീണ്ടും വാർഡുകളുമായും വിഭജിച്ച് നമുക്ക് ആവശ്യമായ എണ്ണം സാമ്പിൾ അംഗങ്ങളെ തെരഞ്ഞെടുത്ത് പഠനം നടത്താം.

**സംഭാവ്യതാ പ്രതിരൂപണ രീതികളും തന്ത്രങ്ങളും**

| പ്രതിരൂപണരീതി | തെരഞ്ഞെടുക്കൽ തന്ത്രം |
|---|---|
| ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം | സമഷ്ടിയിലെ ഓരോ അംഗങ്ങൾക്കും സാമ്പിളിലേക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടാൻ തുല്യ സംഭാവ്യത |
| ക്രമാനുസൃത പ്രതിരൂപണം | സമഷ്ടിയിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളിൽ നിന്നും ഒരു യാദൃശ്ചിക തുടക്കം വഴി തെരഞ്ഞെടുത്ത അംഗത്തിൽ നിന്നും തുല്യ ഇടവേളകളിലെ അംഗങ്ങൾ ചേർത്ത് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. |
| സ്തരിത പ്രതിരൂപണം | സമഷ്ടിയിലെ ഓരോ അംഗങ്ങളെയും സമജാതീയ സ്തരങ്ങളിൽ (പാളികളിൽ) ആക്കിയതിന് ശേഷം ഓരോ സ്തരത്തിൽ നിന്നും ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം വഴി സാമ്പിളെടുക്കുന്നു. |
| സംഘ പ്രതിരൂപണം | സമഷ്ടിയെ പല സംഘങ്ങളാക്കിയതിന് ശേഷം ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം വഴി ആവശ്യമായ സംഘങ്ങളെ തെരഞ്ഞെടുത്ത് സംഘങ്ങളിലെ മുഴുവൻ അംഗങ്ങളെയും സാമ്പിളിലേക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. |
| ദ്വിഘട്ട പ്രതിരൂപണം | സമഷ്ടിയെ ഉപവിഭാഗങ്ങളാക്കിയതിന് ശേഷം ഈ ഉപവിഭാഗങ്ങളിൽ ചിലതിനെ തെരഞ്ഞെടുത്ത് അതിൽ നിന്നും സാമ്പിൾ അംഗങ്ങളെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. |
| ബഹുഘട്ട പ്രതിരൂപണം | മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച പ്രതിരൂപണത്തെ കൂടുതൽ ഘട്ടങ്ങളായി വികസിപ്പിച്ച് കൊണ്ട് സാമ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. |

**നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം**

*എന്തിന്റെ ഫലമാണോ നിർണയിക്കേണ്ടത് അതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട എല്ലാ അംഗങ്ങളുടെ കൂടി ശേഖരമാണ് സമഷ്ടി. സമഷ്ടിയുടെ ഒരു ഭാഗമാണ് സാമ്പിൾ. ഡാറ്റശേഖരണത്തിലും സംസ്കരണത്തിലും രണ്ട് തരം പിശകുകൾ വരുവാൻ സാധ്യതയുണ്ട്. പ്രതിരൂപണപിശകും പ്രതിരൂപണേതര പിശകും. സാമ്പിളുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന് സംഭാവ്യതാ പ്രതിരൂപണമോ സാംഭാവ്യേതര പ്രതിരൂപണമോ നമുക്ക് ഉപയോഗിക്കാം. സംഭാവ്യേതര പ്രതിരൂപണത്തിൽ ചിലതാണ് സുകര പ്രതിരൂപണം, മുൻവിധി പ്രതിരൂപണം, വിഹിത പ്രതിരൂപണം എന്നിവ. സംഭാവ്യതാ പ്രതിരൂപണങ്ങളാണ്, ലളിതക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം – പ്രതിസ്ഥാപനമുള്ളതും പ്രതിസ്ഥാപനമില്ലാത്തതും, ക്രമാനുസൃത പ്രതിരൂപണം, സ്തരിത പ്രതിരൂപണം, സംഘപ്രതിരൂപണം, ബഹുഘട്ട പ്രതിരൂപണം എന്നിവ.*

### പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പഠിക്കുന്നതോടെ പഠിതാവ്:

- സെൻസസ്, പ്രതിരൂപണം അവയുടെ ഗുണങ്ങളും ദോഷങ്ങളും വിവരിക്കും.
- സംഭാവ്യത, സംഭാവ്യേതര പ്രതിരൂപണങ്ങൾ തിരിച്ചറിയും.
- പ്രതിരൂപണ പിശകും പ്രതിരൂപണേതര പിശകും തിരിച്ചറിയും
- SRSWOR, SRSWR എന്നിവയെയും ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണ മാർഗങ്ങളായ - നറുക്കെടുപ്പ് രീതി, ക്രമരഹിത പട്ടികരീതി എന്നിവയെയും വേർതിരിക്കും.
- പലതരം പ്രതിരൂപണ രീതികളായ - ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം, ക്രമാനുസൃത പ്രതിരൂപണം, സ്തരിത പ്രതിരൂപണം, സംഘപ്രതിരൂപണം, ബഹുഘട്ട പ്രതിരൂപണം എന്നിവയേയും വിവരിക്കും.

### വിലയിരുത്തൽ ഇനങ്ങൾ

1. സെൻസസ് പഠനത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്നവ

    a) സമഷ്ടിയിലെ 50% അംഗങ്ങൾ

    b) സമഷ്ടിയിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും

    c) എത്ര എണ്ണം അംഗങ്ങളും

    d) ഇവയൊന്നുമല്ല

2. ആമാശയ വീക്കത്തിനുള്ള ഒരു മരുന്ന് രോഗികളിലുണ്ടാക്കുന്ന ഫലത്തെക്കുറിച്ച് വിലയിരുത്താൻ ഒരു ഡോക്ടർ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. എന്തുതരം പ്രതിരൂപണ രീതിയാണ് അദ്ദേഹം സ്വീകരിക്കേണ്ടത്?

    a) പ്രതിസ്ഥാപനത്തോടെയുള്ള ലളിതക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം.

    b) പ്രതിസ്ഥാപനത്തോടെയല്ലാത്ത ലളിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം

    c) മുൻവിധി പ്രതിരൂപണം

    d) ഇവയൊന്നുമല്ല.

3. നല്ലത് പോലെ കശക്കിയ ഒരു കൂട്ടം ചീട്ടുകളിൽ നിന്നും ഒരു ചീട്ടെടുത്തു. അതിന്റെ നിറം നോക്കിയതിന് ശേഷം തിരികെ വച്ചു. ഈ പ്രക്രിയ 5 പ്രാവശ്യം തുടർന്നു. ഇത്തരം പ്രതിരൂപണത്തെ അറിയപ്പെടുന്നത് എന്താണ്?

    a) പ്രതിസ്ഥാപനത്തോടെയുള്ള പ്രതിരൂപണം.

    b) പ്രതിസ്ഥാപനമില്ലാത്ത പ്രതിരൂപണം.

    c) സുകരപ്രതിരൂപണം

    d) സംഭാവ്യേതര പ്രതിരൂപണം.

4. സാമ്പിൾ പഠനം അനിവാര്യമായതിന് കാരണം.
   a) അനന്തമായ സമഷ്ടിയെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനം അസാധ്യമായതിനാൽ
   b) പഠനവിധേയമാക്കുന്ന അവസരത്തിൽ നശിച്ചു പോകുന്ന അംഗങ്ങൾ സമഷ്ടിയിലുണ്ടാകുമ്പോൾ
   c) സമഷ്ടി പഠനത്തിന് കൂടുതൽ സമയവും ധനവും വേണ്ടി വരുമ്പോൾ
   d) ഇവയെല്ലാം.
5. പ്രതിരൂപണേതര പിശകുകൾക്ക് പ്രതിരൂപണ പിശകുകളെക്കാൾ സാധ്യത കൂടുതലാകുന്നത്.
   a) വലിയ സാമ്പിളുകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള പഠനങ്ങളിൽ
   b) കാര്യക്ഷമതയില്ലാത്ത അന്വേഷകരുള്ളപ്പോൾ
   c) പൂർണ്ണ വിവരശേഖരണം നടക്കുമ്പോൾ
   d) ഇവയെല്ലാം.
6. താഴെപ്പറയുന്ന അവസരങ്ങളിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന പ്രതിരൂപണ തന്ത്രങ്ങൾ ഏതെല്ലാം?
   a) ഒരു വനത്തിലെ മരങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുമ്പോൾ
   b) ബ്ലോക്കുകളെയും കെട്ടിടങ്ങളെക്കുറിച്ചും പഠിക്കുമ്പോൾ
   c) ഒരു രജിസ്റ്ററിൽ ക്രമമായി ചേർത്തിരിക്കുന്ന കുറിപ്പുകളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുമ്പോൾ
7. ചുവടെ കൊടുക്കുന്നവയിൽ സംഭാവ്യേതര പ്രതിരൂപണങ്ങൾ ഏതെല്ലാം
   a) വിഹിത പ്രതിരൂപണം
   b) സുകര പ്രതിരൂപണം
   c) മുൻവിധി പ്രതിരൂപണം
   d) ഇവയെല്ലാം.
8. പ്രതിരൂപണ പിശകുകളല്ലാത്ത പിശകുകളെ -------- എന്ന് വിളിക്കുന്നു.
9. സമഷ്ടിയെ ആദ്യം സമജാതീയ കൂട്ടങ്ങളാക്കിയതിന് ശേഷം ആ കൂട്ടങ്ങളിൽ നിന്നും സാമ്പിളുകൾ എടുക്കുന്ന പ്രതിരൂപണ മാർഗ്ഗമാണ് ---------
10. സമഷ്ടി ------ ആകുമ്പോഴാണ് സ്തരങ്ങളാക്കൽ അനുയോജ്യമാകുന്നത്.
11. സാമ്പിൾ സമഷ്ടിയുടെ ------- ആണ്.
12. ഒരു അന്വേഷകൻ ഒരു സംസ്ഥാനത്തിൽ നിന്നും ജില്ലകളെ തെരഞ്ഞെടുത്ത് ജില്ലകളിൽ നിന്നും പഞ്ചായത്ത് സമിതികളെ തെരഞ്ഞെടുത്ത് അവയിൽ നിന്നും കൃഷിക്കാരെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഇത്തരം പ്രതിരൂപണ രീതിയാണ് --------

13. നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിൽ 10 കുട്ടികളുണ്ടെന്ന് കരുതുക. നിങ്ങൾക്ക് അവരിൽ നിന്നും 3 പേരെ തെരഞ്ഞെടുക്കണം. എത്ര എണ്ണം സാമ്പിളുകൾ സാധ്യമാണ്?

14. 25 കുട്ടികളിൽ നിന്നും 3 കുട്ടികളെ പ്രതിസ്ഥാപനത്തോടെയും പ്രതിസ്ഥാപനത്തോടെയല്ലാതെയും തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള നറുക്കെടുപ്പ് രീതിയെ കുറിച്ച് വിവരിക്കുക.

15. 60 പേരിൽ നിന്നും 10 കുട്ടികളെ തെരഞ്ഞെടുക്കാൻ ക്രമരഹിത സംഖ്യാപട്ടിക ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതി വിശദീകരിക്കുക.

16. പൂർണ്ണ വിവരശേഖരണത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന പിശകുകളെക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കുമോ സാമ്പിൾ പഠനത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്നത്? നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം സാധൂകരിക്കുക.

17. 4 അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു സമഷ്ടിയാണ് 3, 7, 11, 15.

(i) പ്രതിസ്ഥാപനത്തോടെയും (ii) പ്രതിസ്ഥാപനത്തോടെയല്ലാതെയും തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന വലിപ്പം 2 ആയ ക്രമരഹിത സാമ്പിളുകൾ എഴുതുക.

18. സെൻസസിനെക്കാൾ പ്രതിരൂപണം അനുയോജ്യമായ 3 സാഹചര്യങ്ങൾ നിർദ്ദേശിക്കുക.

19. പ്രതിരൂപണ പിശകുകളും പ്രതിരൂപണേതര പിശകുകളും വിവേചിക്കുക.

20. ഗ്രാമങ്ങളിലും കൃഷിയിടങ്ങളിലും ഉള്ള ധാന്യോല്പാദന കണക്കെടുക്കുന്നതിന് ഒരു സർവ്വേ നടത്തുന്നു. എന്തുതരം പ്രതിരൂപണ മാർഗ്ഗങ്ങളാണ് അനുയോജ്യമായത്?

21. ചുവടെ കൊടുക്കുന്ന ഓരോ പ്രതിരൂപണത്തിനും വേണ്ട പ്രതിരൂപണ മാർഗ്ഗങ്ങൾ നിർദേശിക്കും.

a) ഒരു ഗ്രന്ഥശാലയിലെ നശിച്ച പുസ്തകങ്ങളുടെ എണ്ണം തിട്ടപ്പെടുത്തുന്നതിന് ഒരു ഗ്രന്ഥശാലാധികാരി തീരുമാനിക്കുന്നു. ഓരോ തട്ടിൽ നിന്നും ഒരു പുസ്തകം വീതം സാമ്പിൾ എടുക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. ഇതിനായി ഓരോ തട്ടിലെയും ഇടത് അഗ്രത്ത് നിന്നും 12 ഇഞ്ച് അകലെയിരിക്കുന്ന പുസ്തകം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു.

b) രാഷ്ട്രീയ പ്രവർത്തകർ തങ്ങൾക്ക് ലഭിച്ചേക്കാവുന്ന വോട്ടുകളെ കുറിച്ചുള്ള വിവരശേഖരണത്തിന് 200 വീടുകൾ സർവ്വേ ചെയ്യുന്നു.

22. പ്രതിരൂപണേതര പിശകുകൾ വരാവുന്ന 3 സാഹചര്യങ്ങൾ എഴുതുക.

## പദാവലി

| | | |
|---|---|---|
| അനിയത ഫല പരീക്ഷണം | - | Random experiment |
| അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രം | - | more than ogive/ greater than ogive |
| ആക്ച്വറി ശാസ്ത്രം | - | Actuarial Science |
| ആത്മ നിഷ്ഠ സംഭാവ്യത | - | Subjective probabiltiy |
| ആപേക്ഷിക പ്രകീർണനം | - | relative dispersion |
| ആപേക്ഷികാവൃത്തി | - | Relative frequency |
| ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രം | - | less than ogive |
| ആവൃത്തി | - | Frequency |
| ആവൃത്തി പട്ടിക | - | Frequency table |
| ആവൃത്തി ബഹുഭുജം | - | Frequency polygon |
| ആവൃത്തി വക്രം | - | Frequency curve |
| ആവൃത്തി സമീപനം | - | Frequency approach |
| ആശ്രിത ഇവന്റുകൾ | - | Dependent events |
| ആസൂത്രണം | - | Planning |
| ഇവൻറ് | - | Event |
| ഉദ്യമം | - | Trial |
| ഉപവിഭജിത ബാർ ഡയഗ്രം | - | Subdivided bar diagram |
| ഉൾച്ചേർക്കൽ ക്ലാസ്സുകൾ | - | Inclusive classes |
| ഏകമാന വർഗീകരണം | - | One way classification |
| ഒജൈവ്കൾ | - | Ogives |
| കാർഷിക സാംഖ്യകം | - | Agricultural Statistics |
| കാലാനുസൃത വർഗീകരണം | - | Chronological classification |
| കൂർമത | - | Kurtosis |
| കേന്ദ്രപ്രവണത | - | Cetnral tendency |
| കേന്ദ്രീയ മൊമെന്റ് | - | Cetnral moment |
| കേവല ക്ലാസ്സുകൾ | - | Exclusive classes |
| കേവല പ്രകീർണനം | - | Absolute dispersion |
| ക്രമപരം | - | Ordinal |
| ക്രമമാറ്റം | - | Permutation |
| ക്രമരഹിത സംഖ്യാ പട്ടിക രീതി | - | Random number table method |
| ക്രമാനുസൃത പ്രതിരൂപണം | - | Systematic sampling |
| ഗണാത്മക ചരം | - | Quantitative variable |
| ഗണാത്മക വർഗീകരണം | - | Quantitative classification |
| ഗുണന സിദ്ധാന്തം | - | Multiplication theorem |

| | | |
|---|---|---|
| ഗുണാത്മക ചരം | - | Qualitative variable / Attribute |
| ഗുണാത്മക വർഗീകരണം | - | Qualitative classification |
| ചതുരംശ വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം | - | Coefficient of quartile deviation |
| ചതുരംശ വ്യതിയാനം | - | Quartile deviation |
| ചതുരംശങ്ങൾ | - | Quartiles |
| ചരങ്ങൾ | - | Variables |
| ചരിവ് | - | Skewness |
| ചേർത്തുവെക്കൽ | - | Combination |
| ചോദ്യാവലി | - | Questionnaire |
| ജൈവസാംഖ്യകം | - | Biostatistics |
| ജ്യാമിതീയ മാധ്യം | - | Geomteric mean |
| ഡാറ്റ | - | data |
| ഡാറ്റ ശേഖരണം | - | Collection of data |
| തുടർ ചരം | - | Continuous variable |
| തുല്യസാധ്യത ഇവന്റുകൾ | - | Equally likely events |
| ദശാംശങ്ങൾ | - | Deciles |
| ദ്വിചരാവൃത്തി | - | Bivariate Frequency |
| ദ്വിതല വർഗീകരണം | - | Two fold classification |
| ദ്വിതീയ ഡാറ്റ | - | Secondary data |
| ദ്വിമാന വർഗീകരണം | - | Two way classification |
| നറുക്കെടുപ്പ് രീതി | - | Lottery method |
| നാമപരം | - | Nominal |
| പട്ടികയാക്കൽ | - | Tabulation |
| പരസ്പരകേവല ഇവന്റുകൾ | - | Mutually exclusive events |
| പരിഗണന മാധ്യം | - | Weighted mean |
| പരിധി | - | Range |
| പൂരക ഇവന്റുകൾ | - | Complementary events |
| പ്രകീർണനം | - | Dispersion |
| പ്രതിരൂപണ തന്ത്രങ്ങൾ | - | Sampling techniques |
| പ്രതിരൂപണം | - | Sampling |
| പ്രതിരൂപണപിശകുകൾ | - | Sampling errors |
| പ്രതിരൂപണേതര പിശകുകൾ | - | Non sampling errors |
| പ്രാഥമിക ഡാറ്റ | - | Primary data |
| പ്രാപ്താങ്കം | - | Observation |
| പ്രാമാണിക നിർവചനം | - | Classical definition |
| ഫലം | - | Outcome |
| ബഹുഇന ബാർ ഡയഗ്രം | - | Multiple bar diagram |

| | | |
|---|---|---|
| ബഹുഘട്ട പ്രതിരൂപണം | - | Multistage sampling |
| ബഹുതല വർഗീകരണം | - | Many fold classification |
| ബെയ്സ് സിദ്ധാന്തം | - | Bayes theorem |
| ഭൂമിശാസ്ത്രപര വർഗീകരണം | - | Geographical classification |
| മധ്യാങ്കം | - | Median |
| മാധ്യം | - | Mean |
| മാനക വ്യതിയാനം | - | Standard deviation |
| മുൻവിധി പ്രതിരൂപണം | - | Judgement sampling |
| മൊത്ത സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തം | - | Total probabiltiy theorem |
| മോഡ് | - | Mode |
| ലഘു ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം | - | Simple random sampling |
| ലഘു ബാർ ഡയഗ്രം | - | Simple bar diagram |
| വർഗീകരണം | - | Classification |
| വിഭജിത വിലകൾ | - | Partition values |
| വിഹിത പ്രതിരൂപണം | - | Quota sampling |
| വേറിട്ട ചരം | - | Discrete variable |
| വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം | - | Coefficient of variation |
| വ്യതിയാന മാധ്യം | - | Mean deviation |
| വ്യതിയാനം | - | Variance |
| ശതമാന ആവൃത്തി | - | Percentage frequency |
| ശതമാന ബാർ ഡയഗ്രം | - | Percentage bar diagram |
| ശതാംശങ്ങൾ | - | Percentiles |
| ഷെഡ്യൂൾ | - | Schedule |
| സംഖ്യാപരം | - | Cardinal |
| സംഘ പ്രതിരൂപണം | - | Cluster sampling |
| സംഭാവ്യത | - | Probabiltiy |
| സംഭാവ്യത പ്രതിരൂപണം | - | Probabiltiy sampling |
| സംഭാവ്യേതര പ്രതിരൂപണം | - | Non probabiltiy sampling |
| സങ്കലന നിയമം | - | Addition rule |
| സങ്കലനത | - | Additivtiy |
| സഞ്ചിതാവൃത്തി | - | Cumulative frequency |
| സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രം | - | Cumulative frequency curve / Ogive |
| സന്തുലിത മാധ്യം | - | Harmonic mean |
| സമഗ്ര ഇവന്റുകൾ | - | Exhaustive events |
| സമമിതം | - | Symmteric |
| സമഷ്ടി | - | Population |

| | | |
|---|---|---|
| സഹവ്യതിയാനം | - | Covariance |
| സാംഖ്യകം | - | Statistics |
| സാംഖ്യകാനുക്രമം | - | Statistical regulartiy |
| സാമ്പിൾ | - | Sample |
| സാമ്പിൾ ബിന്ദു | - | Sample point |
| സാമ്പിൾ മേഖല | - | Sample space |
| സുകര പ്രതിരൂപണം | - | Convenience sampling |
| സെൻസസ് | - | Census |
| സോപാധിക സംഭാവ്യത | - | Conditional probabiltiy |
| സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം | - | Coefficient of skewness |
| സ്ക്യൂനത | - | Skewness |
| സ്തരിത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം | - | Stratified random sampling |
| സ്വതന്ത്ര ഇവന്റുകൾ | - | Independent events |
| സ്വയം പ്രമാണങ്ങൾ | - | Axioms |