ഹയർ സെക്കന്ററി

സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ്

ക്ലാസ് - XII

കേരളസർക്കാർ
വിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

തയാറാക്കിയത്
സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT), കേരളം
2019

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീസഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യപൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനംകൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

Prepared by :

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram - 695012, Kerala.
Website : www.scertkerala.gov.in *e-mail* : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471 - 2341883, Fax : 0471 - 2341869
Typesetting and Layout : SCERT

To be printed in quality paper - 80gsm map litho (snow-white)

ആമുഖം

ഏതു വിജ്ഞാനവും മാതൃഭാഷയിൽ പഠിക്കാനും പ്രകാശനം ചെയ്യാനും സാധിക്കണം. അതിനുള്ള അവസരം പഠിതാക്കൾക്ക് ഒരുക്കേണ്ടത്, ഏതൊരു പഠന സമ്പ്രദായത്തിന്റെയും അനിവാര്യതയാണ്. അതിന്റെ തുടക്കമെന്ന നിലയ്ക്കാണ് ഹയർസെക്കൻഡറി തലത്തിൽ ഭാഷേതര വിഷയങ്ങളിലെ പാഠപുസ്തകങ്ങൾ മലയാളത്തിൽ പ്രസിദ്ധീകരിക്കുന്നത്.

മാതൃഭാഷയിലൂടെയുള്ള വിദ്യാഭ്യാസം, ജ്ഞാനസമ്പാദനത്തിനുള്ള സുഗമമാർഗം എന്നതിനോടൊപ്പം സാംസ്കാരികതനിമയുടെ തിരിച്ചറിയൽ കൂടിയാണ്. അതുകൊണ്ടാണ് വികസിതരാജ്യങ്ങൾ മാതൃഭാഷയെ മുഖ്യബോധന മാധ്യമമായി സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇന്ത്യയിലാകട്ടെ, ദേശീയതലത്തിലുള്ള പ്രധാന പരീക്ഷകളെല്ലാം പ്രാദേശിക ഭാഷകളിൽക്കൂടി നടത്തുന്നതിനുള്ള സംവിധാനവും ഉണ്ടായി വരികയാണ്. ഈയൊരു സാഹചര്യത്തിൽ നമ്മുടെ കുട്ടികളും മാതൃഭാഷയുടെ ശക്തിസൗന്ദര്യങ്ങൾ തിരിച്ചറിഞ്ഞ് വിവിധ വിഷയങ്ങളിൽ ജ്ഞാനനിർമിതിയിൽ ഏർപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്. അതിന് അവരെ സജ്ജരാക്കുകയാണ് ഈ പാഠപുസ്തകങ്ങളുടെ മുഖ്യ ലക്ഷ്യം.

പരിഭാഷപ്പെടുത്തിയ പുസ്തകങ്ങളിൽ അതത് വിഷയങ്ങളിലെ സാങ്കേതിക പദങ്ങൾ പരമാവധി മലയാളത്തിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. നമ്മുടെ ഭാഷയിൽ ചിരപരിചിതമായ ഇംഗ്ലീഷ് പദങ്ങളെ അതേപടി സ്വീകരിച്ചിട്ടുമുണ്ട്. വിവർത്തനത്തിന് തീർത്തും വഴങ്ങാത്ത പദങ്ങളെ അതേരീതിയിൽ തന്നെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു. മാതൃഭാഷയിൽ പഠിക്കുന്നവർക്ക് ആശയഗ്രഹണം സുഗമമാക്കുന്ന വിധത്തിലാണ് പാഠപുസ്തകരചന നടത്തിയിരിക്കുന്നത്. അതോടൊപ്പം മലയാളഭാഷയുടെ വളർച്ചയ്ക്കും ഈ പ്രവർത്തനം സഹായകമാകുമെന്ന് കരുതുന്നു.

പാഠപുസ്തകവിവർത്തന രംഗത്ത് നമ്മുടെ രാജ്യത്ത് നടന്ന വലിയൊരു കാൽവെപ്പാണ് ഇത്. പ്രഥമ സംരംഭമെന്ന നിലയിൽ പല പരിമിതികളും പരിഭാഷയിൽ വന്നിട്ടുണ്ടാകാം. ക്ലാസ്മുറിയിൽ പ്രയോഗത്തിൽ വരുമ്പോഴാണ് അവയെല്ലാം കൂടുതൽ ബോധ്യപ്പെടുക. തുടർന്ന് വരുന്ന ഘട്ടങ്ങളിൽ അവയൊക്കെ പരിഹരിക്കുന്നതിന് എല്ലാ അഭ്യുദയകാംക്ഷികളിൽ നിന്നും വിശിഷ്യ അധ്യാപകർ, വിദ്യാർത്ഥികൾ എന്നിവരിൽ നിന്നും അഭിപ്രായങ്ങളും നിർദേശങ്ങളും പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു.

ഡോ.ജെ. പ്രസാദ്

ഡയറക്ടർ,

എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി. കേരളം

ശില്പശാലയിൽ പങ്കെടുത്തവർ

മനോജ്.കെ
എച്ച്.എസ്.എസ്., പനങ്ങാട്,
തൃശ്ശൂർ

അൻവർ ഷമീം. ഇസഡ്.എ
ഗവ. മോഡൽ എച്ച്.എസ്.എസ്, ചീരാൽ,
വയനാട്

ബിജു.ജി.വി
ഗവ.വി. എച്ച്. എസ്. എസ്., വിതുര,
തിരുവനന്തപുരം

സജിഷ്കുമാർ. എം.
എം.എൻ.കെ.എം.എച്ച്.എസ്.എസ് ചിറ്റിലംചേരി,
പാലക്കാട്

ഹാസിം. എം. സി
ഗവ. എച്ച്. എസ്. എസ്., അരോളി,
കണ്ണൂർ

സന്തോഷ്. വി. സി
ഗവ. എച്ച്. എസ്. എസ്., മൂക്കന്നൂർ,
എറണാകുളം

വിഷയ വിദഗ്ധർ

വേണുഗോപാലൻ. പി. കെ
അസോസിയേറ്റ് പ്രൊഫ. (റിട്ട.) ശ്രീ കേരളവർമ്മ കോളജ്, തൃശ്ശൂർ

ഡോ. എ. പി. കുട്ടികൃഷ്ണൻ
സ്റ്റേറ്റ് പ്രോജക്റ്റ് ഡയറക്ടർ, സമഗ്രശിക്ഷ, കേരളം

അക്കാദമിക് കോ-ഓർഡിനേറ്റർ

ഡോ. എം. പി. നാരായണനുണ്ണി
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി

Prepared by: State Council of Educational Research & Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram -12, Kerala. E-mail:scertkerala@gmail.com
Type setting by: SCERT Computer Lab.

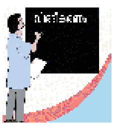
U1K4T8

ഉള്ളടക്കം

1.	സഹബന്ധവിശകലനം	7
2.	സമാശ്രയ വിശകലനം	29
3.	പ്രാഥമിക കലനം	46
4.	അനിയത ചരങ്ങൾ	58
5.	വേറിട്ട സംഭാവ്യത വിതരണങ്ങൾ	86
6.	നോർമൽ വിതരണം	112
7.	പ്രതിരൂപണ വിതരണങ്ങൾ	130
8.	പരാമീറ്ററുകളുടെ മതിപ്പ്	150
9.	പരികൽപന പരീക്ഷണം	166
10.	വ്യതിയാന വിശകലനം	211
11.	സാംഖിക ഗുണ നിയന്ത്രണം	231
12.	സമയ ശ്രേണി വിശകലനം	259
13.	സൂചികാങ്കങ്ങൾ	285

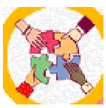
പാഠപുസ്തകത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന സൂചനകൾ

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക



വിശദീകരണം

പ്രവർത്തനം

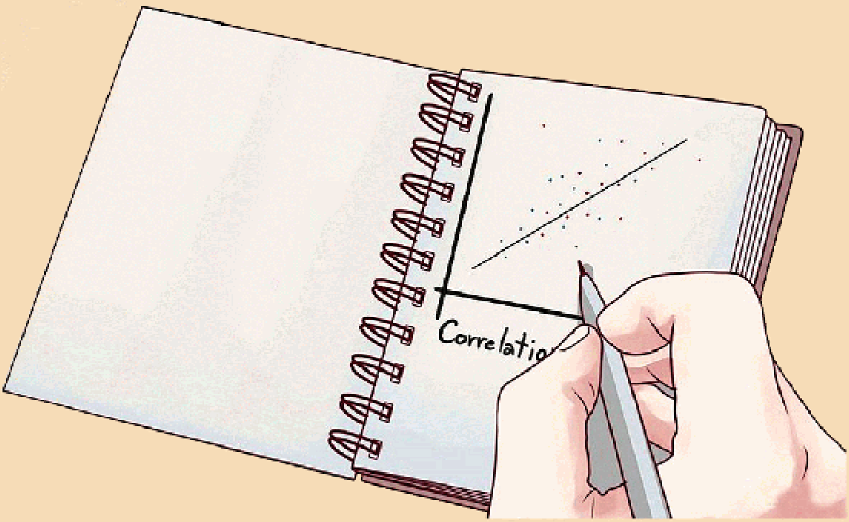


നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

അധ്യായം 1

R3Z7X5

സഹബന്ധവിശകലനം (Correlation Analysis)



സവിശേഷ പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായത്തിന്റെ പൂർത്തീകരണത്തിന് ശേഷം പഠിതാവ് :

- സഹബന്ധത്തിന്റെ അർത്ഥം തിരിച്ചറിയുന്നു.
- വ്യത്യസ്തതരം സഹബന്ധങ്ങൾ വേർതിരിച്ചറിയുന്നു.
- സഹബന്ധപഠനത്തിനുള്ള രീതികൾ വിശദീകരിക്കുന്നു.
- റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കം (rank correlation coefficient) തിരിച്ചറിയുന്നു.
- കാൾപിയേർസൺ സഹബന്ധഗുണാങ്കം ഉപയോഗിക്കുന്നു.
- അനുയോജ്യ സാഹചര്യങ്ങളിൽ സഹബന്ധഗുണാങ്കം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

നിശ്ചിത ബന്ധമുള്ള രണ്ട് ചരങ്ങൾ അടങ്ങിയതാണ് ദ്വിചര ഡാറ്റ (bivariate data) എന്ന് നമുക്കറിയാം. ദ്വിചര ഡാറ്റവിതരണത്തിലെ ചരങ്ങൾ രണ്ടും സംഖ്യാപരമാകാം, അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടും വിഭാഗപര (categorical) മാകാം അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ചരം സംഖ്യാപരവും മറ്റേത് വിഭാഗപരവും ആവാം. ദ്വിചരഡാറ്റയുടെ ഗ്രാഫിക്കൽ പ്രതിനിധാനമാണ് സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ട് (Scatter Plot). രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യതിയാനത്തിന്റെ മാനത്തെയാണ് സഹവ്യതിയാനം എന്ന് പറയുന്നത്. രണ്ട് ചര

ങ്ങൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധം നിലനിൽക്കുകയും അത് നാം പഠന വിധേയമാക്കുകയും ചെയ്താൽ ആ പഠനത്തെയാണ് ദ്വിചര വിശകലനം എന്ന് വിളിക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി ഒരു ഉല്പന്നത്തിന്റെ പരസ്യത്തിനുള്ള ചെലവും അതിന്റെ വില്പനയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധവും, ഒരു സാധനത്തിന്റെ വിലയും വില്പനയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധവും നമുക്ക് വിശകലന വിധേയമാക്കാം. പരസ്യത്തിന്റെ ചെലവ് വർധിക്കുന്നതിനനുസരിച്ച് വില്പന കൂടുന്നതായും വില കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് വില്പന കുറയുന്നതായും നമുക്കു കാണാം. ഈ ബന്ധങ്ങൾ രേഖീയമോ (linear) അരേഖീയമോ (nonlinear) ആകാം. രണ്ടോ അതിലധികമോ ചരങ്ങൾ തമ്മിലും ഇത്തരം ബന്ധങ്ങൾ ഉണ്ടാവാം. ഈ അധ്യായത്തിൽ രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള രേഖീയബന്ധങ്ങൾ മാത്രമാണ് ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.

ഭൗതിക ശാസ്ത്രത്തിലും, സാമൂഹ്യശാസ്ത്രത്തിലും സഹബന്ധവിശകലനം ഉപയോഗപ്രദമാണ്. ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പഠിക്കുന്നതിന് ഇത് ഉപയോഗിക്കുന്നു. ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ മാനം അളക്കുന്നതിനും താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിനും ഇത് സഹായിക്കുന്നു. മതിപ്പ് (Estimate) കാണാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന സമാശ്രയം (regression) എന്ന ആശയത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനം സഹബന്ധമാണ്.

1.1 സഹബന്ധത്തിന്റെ അർത്ഥം (Meaning of Correlation)

ദ്വിചരവിതരണത്തിലെ രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതാണ് സഹബന്ധം. താഴെപറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽ രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിൽ ചില നിശ്ചിത ബന്ധങ്ങൾ നമുക്കു കാണാം.

- ഒരു ഉല്പനത്തിന്റെ വിലയും അതിന്റെ വില്പനയും.
- ഒരു ഉല്പന്നത്തിന്റെ വിലയും അതിന്റെ ലഭ്യതയും.
- വേതനവും വില സൂചികയും.
- ഉയരവും ഭാരവും.

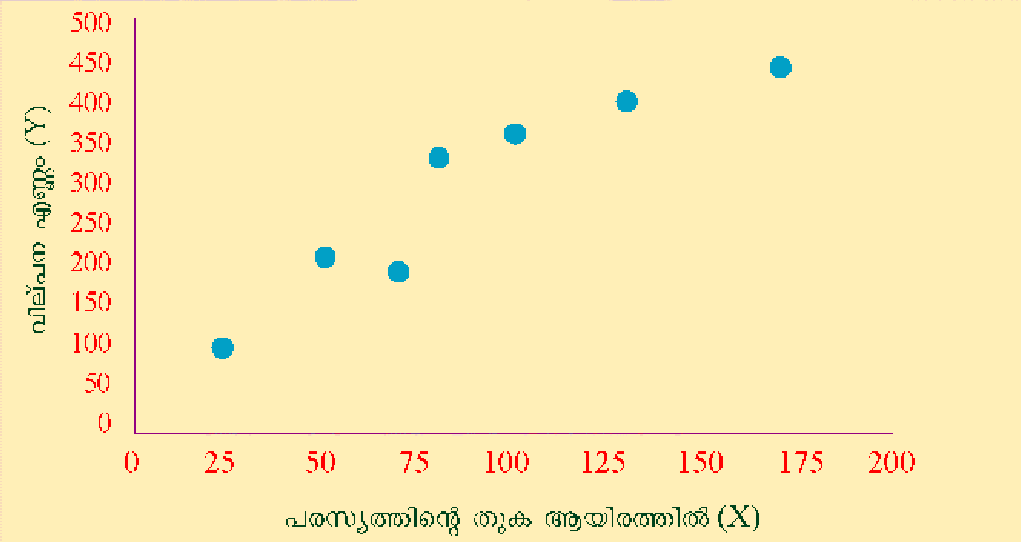
ഓരോ ഉദാഹരണത്തിലും രണ്ട് ചരങ്ങൾ പരസപരം ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതിന്റെയും ഏറ്റ കുറച്ചിലിന്റെയും തീവ്രത സാംഖ്യകപരമായ വിശകലനം നടത്താൻ സാധിക്കും.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നമുക്ക് വിശദമായി പരിശോധിക്കാം. താഴെപറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളും അവയുടെ സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ടും നിരീക്ഷിക്കുക.

ഉദാഹരണം (i) വ്യത്യസ്ത വർഷങ്ങളിൽ ഒരു പ്രത്യേക ബ്രാന്റ് ടെലിവിഷന്റെ പരസ്യത്തിന് ഉപയോഗിച്ച തുകയും അതിന്റെ വില്പനയുടെ എണ്ണവും താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

പരസ്യത്തിന്റെ തുക (X) ആയിരത്തിൽ	25	50	70	80	100	130	170
നടന്ന വില്പനകളുടെ എണ്ണം (Y)	100	220	200	340	370	410	450

സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ട്

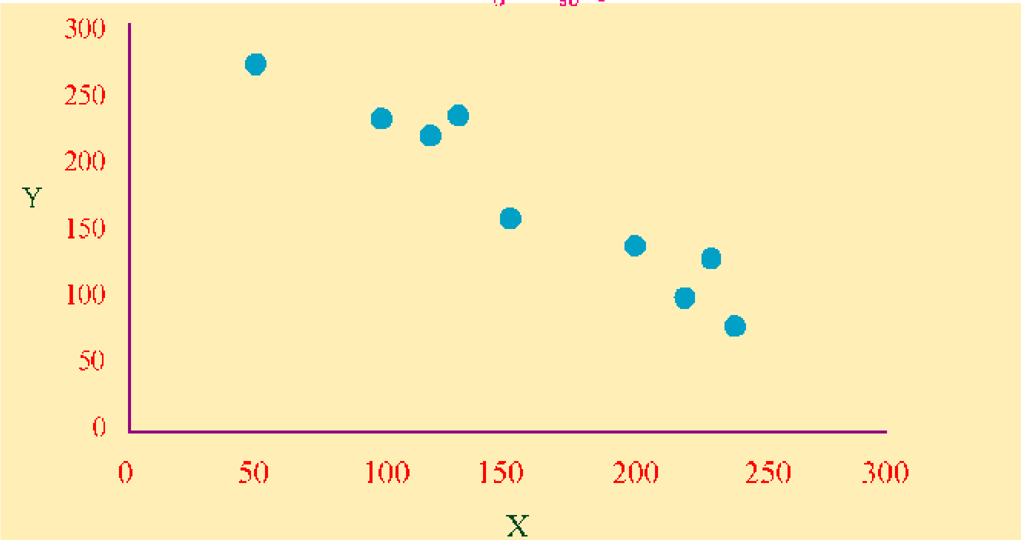


ചിത്രം 1.1

ഉദാഹരണം (ii) വ്യത്യസ്ത മാസങ്ങളിൽ CFL വിളക്കുകളുടെ വിലയും എത്രമാത്രം വില്പന നടന്നു എന്നതും താഴെതന്നിരിക്കുന്നു.

വില (X) രൂപയിൽ	50	100	120	130	150	200	220	230	240
വില്പന (Y) എണ്ണത്തിൽ	275	234	220	235	160	140	100	130	80

സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ട്

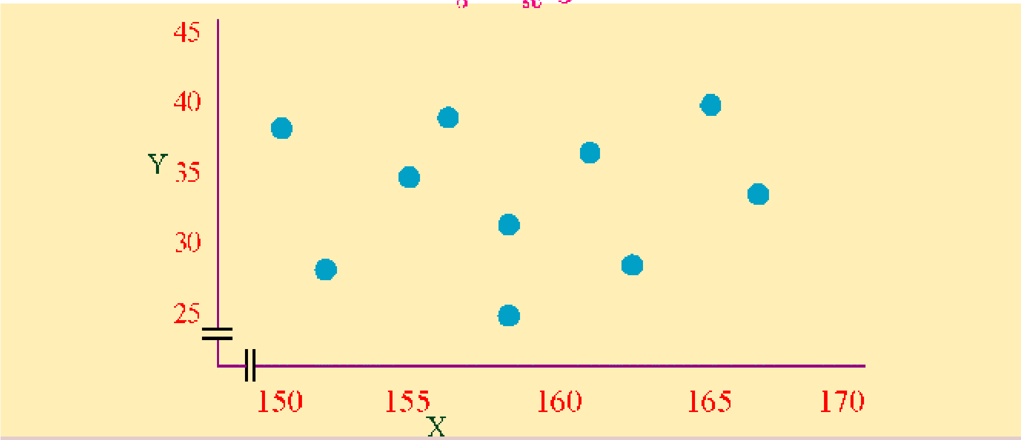


ചിത്രം 1.2

ഉദാഹരണം (iii) 10 വിദ്യാർഥികളുടെ ഉയരവും അവർക്ക് ഇംഗ്ലീഷിൽ ലഭിച്ച മാർക്കും (50ൽ) താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

ഉയരം (X) സെ.മി	150	165	155	156	158	163	158	162	152	167
മാർക്ക് (Y)	38	40	35	39	25	27	32	37	28	34

സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ട്

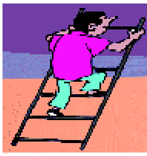


ചിത്രം 1.3

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളിലെ ഡാറ്റയും സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ടും പരിശോധിക്കുക. രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെക്കുറിച്ച് നിങ്ങളുടെ അനുമാനം എന്ത്? ഒന്നാമത്തേതിൽ X ന്റെയും Y യുടെയും വിലകൾ ഒരുമിച്ച് കൂടുന്നതായി കാണാം. രണ്ടാമത്തേതിൽ Xന്റെ വില കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് Y യുടെ വില കുറയുന്നതായിട്ടാണ് കാണുന്നത്. എന്നാൽ മൂന്നാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ X ന്റെയും Yയുടെയും വിലകളിൽ ഇത്തരത്തിലുള്ള ഒരു ബന്ധവും ദൃശ്യമാകുന്നില്ല. പരസ്പരം ബന്ധമുണ്ടാവുകയോ തീരേ ബന്ധമില്ലാതിരിക്കുകയോ ചെയ്യുന്ന സന്ദർഭത്തിൽ രണ്ട് ചരങ്ങൾ ഉണ്ടാവാം എന്ന് നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം.

രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള സഹവർത്തനം (Association) അല്ലെങ്കിൽ സഹവ്യതിയാനം (Co-variance) എന്നിവയെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുന്നതിനും ബന്ധത്തിന്റെ തീവ്രത മനസ്സിലാക്കുന്നതിനും സഹബന്ധ വിശകലനം ഉപയോഗപ്പെടുത്താം. സഹബന്ധ വിശകലനം എന്നത് രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ തീവ്രതയെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനമാണ്. സഹബന്ധം, ഒരു ചരത്തിന്റെ വിലകളിലുണ്ടാവുന്ന മാറ്റങ്ങളുമായി മറ്റൊരു ചരത്തിന്റെ വിലകളിലെ മാറ്റം പൊരുത്തപ്പെട്ടുപോകുന്ന രീതിയിലുള്ള പരസ്പര ബന്ധം വ്യക്തമാക്കുന്നു. സഹബന്ധം എന്നത് സഹവ്യതിയാനത്തിന്റെ കാണിക്കുന്നു.

ഒരുദ്വിചര വിതരണത്തിലെ രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ തീവ്രതയെകുറിച്ച് പഠിക്കുന്നതാണ് സഹബന്ധ വിശകലനം.



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

നിങ്ങൾക്ക് സുപരിചിതമായ പരസ്പരബന്ധമുള്ള മൂന്ന് ജോടി ചരങ്ങൾ എഴുതുക.

1.2 വിവിധതരം സഹബന്ധങ്ങൾ (Type of Correlation)

ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ സ്വഭാവമനുസരിച്ച് സഹബന്ധത്തെ മൂന്നായി തരം തിരിക്കാം.

1. **പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധം (Positive correlation)**
2. **നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധം (Negative correlation)**
3. **ശൂന്യ സഹബന്ധം അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യം സഹബന്ധം (No correlation or Zero correlation)**

1. പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധം (Positive Correlation)

രണ്ട് ചരങ്ങളുടെ വിലകൾ ഒരേ ദിശയിൽ നീങ്ങുകയാണെങ്കിൽ ആ സഹബന്ധത്തെ പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതായത് ഒരു ചരത്തിന്റെ വിലകളിലുണ്ടാവുന്ന വർധനവ് മറ്റൊരു ചരത്തിന്റെ വിലകളിലുണ്ടാവുന്ന വർധനവുമായും ഒരു ചരത്തിന്റെ വിലകളിലുണ്ടാവുന്ന ഇടിവുകൾ മറ്റൊരു ചരത്തിന്റെ വിലകളിലുണ്ടാവുന്ന ഇടിവുകളുമായും ഒത്തുപോകുന്ന പ്രവണതയാണ് ഇത്.

വളത്തിന്റെ ഉപയോഗവും ഉല്പാദനവും വിലയും ലഭ്യതയും, വരുമാനവും ചെലവും എന്നിങ്ങനെയുള്ള ബന്ധങ്ങൾ പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധത്തിന് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

2. നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധം (Negative Correlation)

രണ്ട് ചരങ്ങളുടെ വിലകൾ വിരുദ്ധ ദിശകളിൽ നീങ്ങുകയാണെങ്കിൽ ആ സഹബന്ധത്തെ നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതായത് ഒരു ചരത്തിന്റെ വിലകളിലുണ്ടാവുന്ന വർധനവിന്റെ തോത് മറ്റൊരു ചരത്തിന്റെ വിലകളിലുണ്ടാവുന്ന ഇടിവിന്റെ തോതിന് ഒത്തുപോകുന്ന അവസ്ഥ. അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ചരത്തിന്റെ വിലകളിലുണ്ടാവുന്ന ഇടിവിന്റെ തോത് മറ്റൊരു ചരത്തിന്റെ വിലകളിലുണ്ടാവുന്ന വർധന തോതുമായി ഒത്തുപോകുന്നു.

പ്രകാശത്തിന്റെ തീവ്രതയും ഉറവിടത്തിൽ നിന്നുള്ള ദൂരവും, വിലയും ചോദനവും, മർദ്ദവും വ്യാപ്തവും, എന്നിങ്ങനെയുള്ള ബന്ധങ്ങൾ നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധത്തിന് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

3. ശൂന്യ സഹബന്ധം (No correlation or Zero Correlation)

രണ്ട് ചരങ്ങളുടെ വിലകൾ തമ്മിൽ ഒരു ബന്ധവുമില്ലെങ്കിൽ അതിന് ശൂന്യ സഹബന്ധം അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യം സഹബന്ധം എന്ന് പറയുന്നു. ഒരു ചരത്തിന്റെ വിലകളിലുണ്ടാവുന്ന മാറ്റങ്ങൾ മറ്റൊരു ചരത്തിന്റെ വിലകളിലുണ്ടാവുന്ന മാറ്റങ്ങളുമായി ഒത്തുപോകുന്നില്ല എങ്കിൽ സഹബന്ധം പൂജ്യമാണ് അഥവാ അവ തമ്മിൽ സഹബന്ധമില്ല എന്ന് പറയാം.

മഴയുടെ അളവും പരീക്ഷയിലെ മാർക്കും, ഉയരവും ബുദ്ധിയും എന്നിങ്ങനെ ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പൂജ്യം സഹബന്ധമുള്ള ചരങ്ങൾക്കുദാഹരണങ്ങളാണ്.

ചില അവസരങ്ങളിൽ രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പരസ്പരം ആനുപാതികമാവാം. ഇതാണ് പൂർണ്ണ സഹബന്ധം.

പൂർണ്ണ സഹബന്ധം (Perfect Correlation)

ഒരു ചരത്തിന്റെ വിലകളിലുണ്ടാവുന്ന മാറ്റങ്ങൾ മറ്റൊരു ചരത്തിന്റെ വിലകളിലുണ്ടാവുന്ന മാറ്റങ്ങൾക്ക് ആനുപാതികമാണെങ്കിൽ ആ സഹബന്ധം പൂർണ്ണസഹബന്ധം ആണ്. ചരങ്ങളുടെ വിലകൾ നേർ അനുപാതത്തിലാണെങ്കിൽ സഹബന്ധം പുർണ്ണമായും പോസിറ്റീവ് ആണ്. അവ വിപരീതാനുപാതത്തിലാണെങ്കിൽ സഹബന്ധം പുർണ്ണമായും നെഗറ്റീവ് ആണ്.

ഒരു കൂട്ടം വൃത്തങ്ങളുടെ ആരവും പരപ്പളവും; വില്പനയും വരുമാനവും; ദിവസവേതന തൊഴിലാളികളുടെ ജോലി ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണവും വരുമാനവും, ഇലക്ട്രിക് ഉപകരണങ്ങളുടെ പ്രവർത്തന സമയവും വൈദ്യുതി ഉപഭോഗവും, എന്നിങ്ങനെയുള്ള ബന്ധങ്ങൾ പൂർണ്ണ പോസിറ്റിവ് സഹബന്ധങ്ങൾക്കുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. മർദവും വ്യാപ്തവും (താപനില സ്ഥിരമായാൽ), വാഹനങ്ങളുടെ വേഗതയും യാത്രാസമയവും, വില സൂചികയും ധനത്തിന്റെ വാങ്ങൽ ശേഷിയും എന്നിങ്ങനെയുള്ള ബന്ധത്തെ പൂർണ്ണ നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

താഴെ പറയുന്നവയ്ക്ക് ഉദാഹരണങ്ങൾ എഴുതുക.

- പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധമുള്ള ചരങ്ങൾ.
- നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധമുള്ള ചരങ്ങൾ.
- പൂർണ്ണ പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധമുള്ള ചരങ്ങൾ.
- പുർണ്ണ നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധമുള്ള ചരങ്ങൾ.
- പൂജ്യം സഹബന്ധമുള്ള ചരങ്ങൾ.

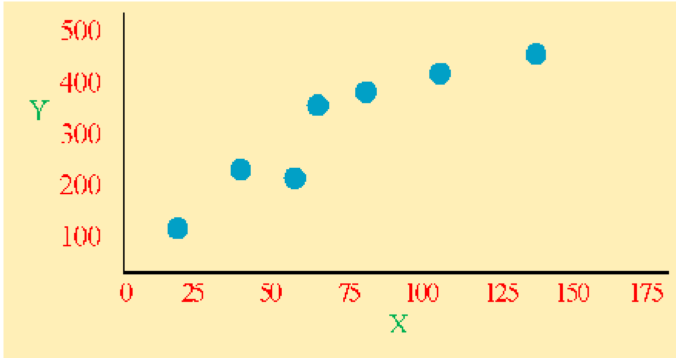
1.3 സഹബന്ധപഠന രീതികൾ (Methods of Studying Correlation)

വ്യത്യസ്ത സഹബന്ധ പഠനരീതികൾ ചർച്ച ചെയ്യാം.

1. സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രം (Scatter Diagram)

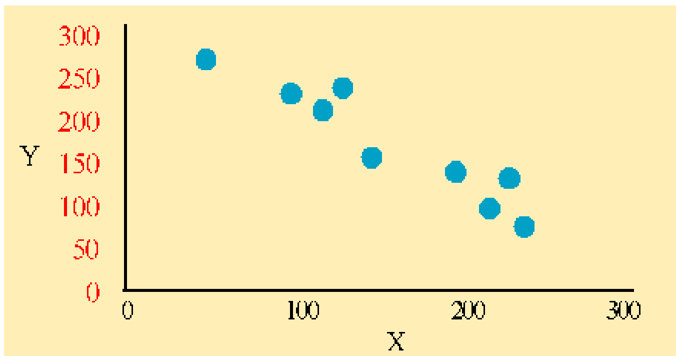
സഹബന്ധം പഠിക്കാനുള്ള ഗ്രാഫിക്കൽ രീതിയാണ് സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രങ്ങൾ. ഒരു ചാർട്ടിൽ ബിന്ദുക്കൾ രേഖപ്പെടുത്തികൊണ്ട് രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുന്ന ഏറ്റവും ലളിതമായ രീതിയാണ് സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രം. ഇതിന് സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ട് എന്നും പറയുന്നു. ഏത് തരം സഹബന്ധമാണ് എന്നത് ഈ രീതി ഉപയോഗിച്ച് തിരിച്ചറിയാം. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കൂ.

ചിത്രം 1.4 ഒരു പ്രത്യേക സാധനത്തിന്റെ വില X ഉം ലഭ്യത Y യും കാണിക്കുന്നു. സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ടിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഇടത് താഴെ മൂലയിൽ നിന്നും വലത് മുകൾഭാഗത്തെ മൂലയിലേക്ക് ഉയർന്ന് പോകുന്നതായി കാണാം. ഇത് ഈ ചരങ്ങൾ തമ്മിൽ പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധം ഉണ്ടെന്ന് കാണിക്കുന്നു.



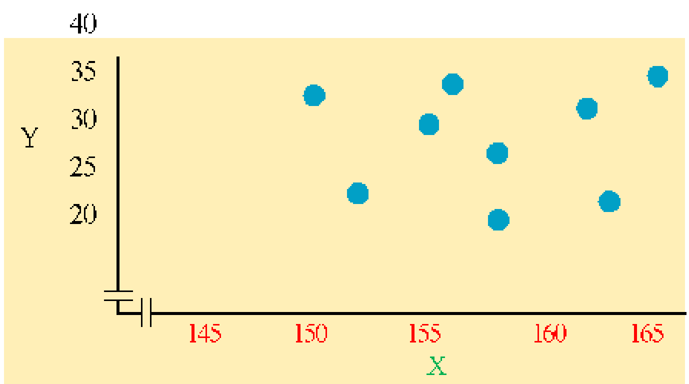
ചിത്രം 1.4

ചിത്രം 1.5 ഒരു സാധനത്തിന്റെ വില X ഉം, അതിന്റെ ചോദനം Y യും കാണിക്കുന്നു. ഇവിടെ സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ടിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഇടത് മുകൾഭാഗത്ത് നിന്നും വലത് താഴെ മൂലയിലേക്ക് ഇറങ്ങിവരുന്നതായി കാണാം. ഇത് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധം കാണിക്കുന്നു.



ചിത്രം 1.5

ഒരു കൂട്ടം വിദ്യാർഥികളുടെ ഉയരം X ഉം അവരുടെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലെ സ്കോർ Y യും കാണിക്കുന്നതാണ് ചിത്രം 1.6. ഇവിടെ രേഖപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ ചിത്രത്തിലെ എല്ലാഭാഗത്തുമായി ചിതറി കിടക്കുന്നതായി കാണുന്നു. ഇത് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധമില്ലായ്മ കാണിക്കുന്നതാണ്.

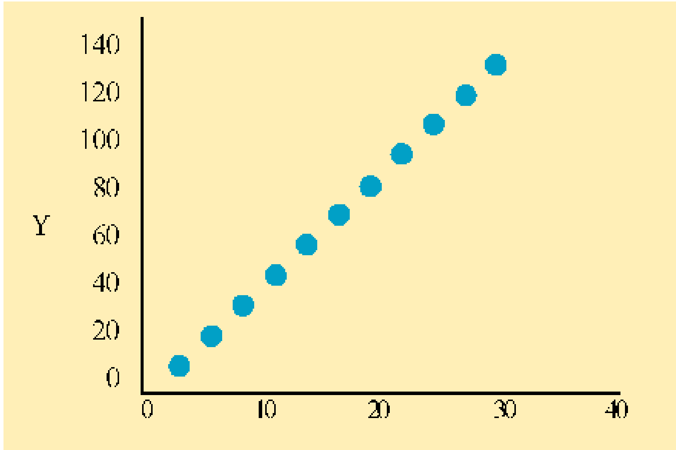


ചിത്രം 1.6

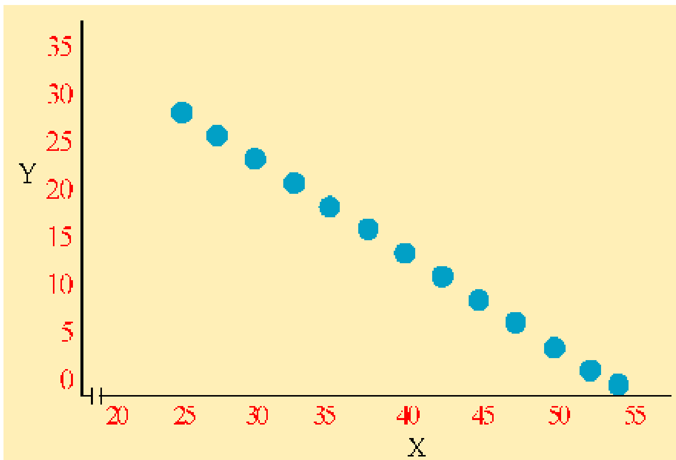
ചിത്രം 1.7 സമചതുരങ്ങളുടെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം (X) ഉം അതിന്റെ ചുറ്റളവ് (Y) യും കാണിക്കുന്ന സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ട് ആണ്. സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ടിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഇടത് താഴെ മൂലയിൽ നിന്നും വലത് മുകൾഭാഗത്തെ മൂലയിലേക്ക് പോകുന്ന ഒരു നേർരേഖയിലെ

ബിന്ദുക്കളാണെന്ന് കാണാം. ഇത് ഇവിടെ പൂർണ്ണ പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധം ഉണ്ടെന്ന് കാണിക്കുന്നു.

ചിത്രം 1.8 ഒരു വിദ്യാലയത്തിലെ അധ്യാപകരുടെ വയസ്സും (X) അവരുടെ വിരമിക്കലിന് ബാക്കിയുള്ള വർഷവും (Y) കാണിക്കുന്നു.



ചിത്രം 1.7



ചിത്രം 1.8

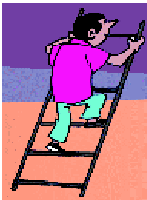
ഇവിടെ സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ടിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഇടത് മുകൾഭാഗത്തെ മൂലയിൽ നിന്നും വലത് താഴെ മൂലയിലേക്ക് പോകുന്ന ഒരു നേർരേഖയിലെ ബിന്ദുക്കളാണെന്ന് കാണുന്നു. ഇത് കാണിക്കുന്നത് ഇവിടെ പൂർണ നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധം ഉണ്ടെന്നാണ്. സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രങ്ങൾ നിരീക്ഷിച്ച് അവയുടെ മേന്മകളും പോരായ്മകളും കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിക്കാം. അവയിൽ ചിലത് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

മേന്മകൾ

- ലളിതവും ആകർഷകവുമാണ്.
- മനസ്സിലാക്കാൻ എളുപ്പമാണ്.
- ഒറ്റനോട്ടത്തിൽ സഹബന്ധത്തെക്കുറിച്ച് ഏകദേശ ധാരണ നൽകുന്നു.
- ഒറ്റപ്പെട്ട ഇനങ്ങളാൽ സ്വാധീനിക്കപ്പെടുന്നില്ല.

പോരായ്മ

- സഹബന്ധത്തിന്റെ കൃത്യമായ അളവ് നൽകുന്നില്ല.



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

10 വിദ്യാർഥികൾക്ക് ഇക്കണോമിക്സിലും സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലും ലഭിച്ച സ്കോറുകൾ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ട് വരച്ച് വിശകലനം ചെയ്യുക.

ഇക്കണോമിക്സിലെ സ്കോർ (100ൽ) (X)	85	35	25	14	65	25	78	32	58	45
സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലെ സ്കോർ (100 ൽ) (Y)	75	65	32	29	56	18	82	39	62	35

പ്രവർത്തനം

10 വിദ്യാർഥികൾക്ക് XI പരീക്ഷയിലെ വിവിധ വിഷയങ്ങളിൽ നേടിയ സ്കോറുകൾ ശേഖരിക്കുക. ഓരോ ജോടി വിഷയങ്ങളുടെയും സ്കോറുകളുടെ സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ട് വരച്ച് കൂടിയ സഹബന്ധമുള്ള വിഷയങ്ങൾ, കുറഞ്ഞ സഹബന്ധമുള്ള വിഷയങ്ങൾ, സഹബന്ധമില്ലാത്ത വിഷയങ്ങൾ എന്നിവ കണ്ടെത്തുക.

2. സഹബന്ധഗുണാങ്കം (Co-efficient of correlation)

രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ തീവ്രത കാണിക്കുന്ന അളവാണ് സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം. താരതമ്യത്തിന് ഉപയോഗിക്കാവുന്ന യൂണിറ്റില്ലാത്ത ഒരു ശുദ്ധ സംഖ്യയാണിത്.

സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന സഹബന്ധഗുണാങ്കങ്ങൾ

- കാൾ പിയേഴ്സൺ സഹബന്ധഗുണാങ്കം
- സ്പിയർമാൻ റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കം

കാൾ പിയേഴ്സൺ സഹബന്ധഗുണാങ്കം (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

മഹാനായ ജൈവസാംഖ്യക വിദഗ്ധനായ കാൾ പിയേഴ്സൺ, രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള രേഖീയ ബന്ധത്തിന്റെ തീവ്രത അളക്കുന്നതിന് ഒരു ഗണിതശാസ്ത്ര രീതി നിർദേശിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഈ രീതിയാണ് കാൾപിയേഴ്സൻ സഹബന്ധഗുണാങ്കം. ഏറ്റവും കൂടുതലായി ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്ന രീതിയാണിത്. ഇതിനെ 'r' എന്ന കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

X,Y ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള കാൾപിയേഴ്സന്റെ സഹബന്ധഗുണാങ്കം. താഴെ കൊടുക്കുന്നു.

$$r(x,y) = \frac{\text{X ഉം Y ഉം തമ്മിലുള്ള സഹവ്യതിയാനം}}{(\text{X ന്റെ മാനക വ്യതിയാനം}) \times (\text{Y യുടെ മാനക വ്യതിയാനം})}$$

$$= \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

ഇവിടെ

$$Cov(x, y) = \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(y-\bar{y})^2}$$

$$\therefore\ r = \frac{\frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

ഇതിനെ ലഘൂകരിച്ചാൽ

$$r = \frac{\frac{1}{n}\Sigma xy - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma x^2 - \bar{x}^2}\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma y^2 - \bar{y}^2}}$$, (അല്ലെങ്കിൽ)

$$r = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$r(x, y) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

സഹബന്ധഗുണാങ്കം -1 മുതൽ +1 വരെ (അവ ഉൾപ്പെടെ) യുള്ള വിലകൾ സ്വീകരിക്കുന്നതാണ്. അതായത് r ന് +1, -1, 0 എന്നീ വിലകളോ, പൂജ്യത്തിനും +1 നും ഇടയിലോ, -1 നും പൂജ്യത്തിനും ഇടയിലോ ഉള്ള ഏത് വിലയും സ്വീകരിക്കാവുന്നതാണ്.

കാൾ പിയേഴ്സൺ സഹബന്ധ ഗുണാങ്കത്തിന്റെ വ്യാഖ്യാനം

(i) r = +1 ആണെങ്കിൽ സഹബന്ധം പൂർണ്ണ പോസിറ്റീവ് ആയിരിക്കും.

(ii) $r = -1$ ആണെങ്കിൽ സഹബന്ധം പൂർണ്ണ നെഗറ്റീവ് ആയിരിക്കും.

(iii) $r = 0$ ആണെങ്കിൽ സഹബന്ധം ഇല്ല.

(iv) $0 < r < +1$ ആണെങ്കിൽ പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധം ആയിരിക്കും.

(v) $-1 < r < 0$ ആണെങ്കിൽ നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധം ആയിരിക്കും.

സഹബന്ധ ഗുണാങ്കത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ (Properties of Correlation Coefficient)

1) സഹബന്ധഗുണാങ്കം -1 നും +1 നും ഇടയിലുള്ള ഏത് വിലയും സ്വീകരിക്കും. അതായത്, $-1 \le r \le 1$

2) (i) ഒരു ചരത്തിനോടോ രണ്ട് ചരങ്ങളോടോ ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ കൂട്ടുകയോ കുറക്കുകയോ ചെയ്താൽ സഹബന്ധഗുണാങ്കത്തിന്റെ വിലയിൽ മാറ്റം ഉണ്ടാവുന്നില്ല.

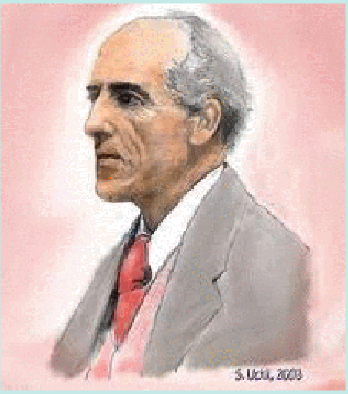
(ii) ഒരു ചരത്തേയോ രണ്ട് ചരങ്ങളേയോ ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാലോ ഹരിച്ചാലോ സഹബന്ധഗുണാങ്കത്തിന്റെ വിലയിൽ മാറ്റം ഉണ്ടാവുന്നില്ല.

അതായത് a, b, c, d എന്നിവ സ്ഥിരസംഖ്യകളും $u = \frac{x-a}{b}$ യും $v = \frac{y-c}{d}$ യും ആയാൽ $r(u, v) = \pm r\ (x, y)$ ആയിരിക്കും.

3) സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം ചരങ്ങൾക്ക് ആപേക്ഷികമായി സമമിതം (symmetric) ആണ്. അതായത് $r(x, y) = r(y, x)$

4) രണ്ട് ചരങ്ങൾ പരസ്പര ബന്ധമില്ലാത്തവയാണെങ്കിൽ അവയുടെ സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം പൂജ്യമായിരിക്കും. തിരിച്ച് അങ്ങനെയാവണമെന്നില്ല.

കാൾ പിയേഴ്സൺ 1857 മാർച്ച് 27ന് ലണ്ടനിൽ ജനിച്ചു. അദ്ദേഹം ലണ്ടൻ യൂണിവേഴ്സിറ്റിയിൽ ജോലി ചെയ്യുകയും പ്രായോഗിക സാംഖ്യക വിഭാഗം ആരംഭിക്കുകയും ചെയ്തു. അദ്ദേഹം ബയോമെട്രിക്, ഗാൽട്ടൻ പരീക്ഷണശാലകളെ ഈ വിഭാഗവുമായി സഹകരിപ്പിച്ചു. 1933 ൽ അദ്ദേഹം വിരമിക്കുന്നത് വരെ ഇവിടെ തുടർന്നു. 1936 ൽ അദ്ദേഹം നിര്യാതനാകുന്നത് വരെ കർമ്മനിരതനായിരുന്നു.



രണ്ടാം സവിശേഷതയ്ക്കുള്ള തെളിവ്

$u = \frac{x-a}{b}$ യും $v = \frac{y-c}{d}$ യും ആയാൽ

$$\text{Cov}(u, v) = \frac{Cov(x,y)}{bd}, \quad \sigma_u = \frac{\pm\sigma_x}{b}, \quad \sigma_v = \frac{\pm\sigma_y}{d}$$

$$r(u, v) = \frac{Cov(u,v)}{\sigma_u \sigma_v} = \frac{\frac{Cov(x,y)}{bd}}{\frac{\sigma_x}{b}\frac{\sigma_y}{d}} = \frac{\pm Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \pm r(x,y)$$

നാലാം സവിശേഷതയ്ക്കുള്ള തെളിവ്

$y = (x-20)^2$ എന്ന ബന്ധമുള്ള x, y എന്നീ ചരങ്ങളുടെ താഴെപറയുന്ന ഡാറ്റയുടെ സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം പൂജ്യമാണ്.

X	10	15	20	25	30
Y	100	25	0	25	100

അതായത് സഹബന്ധഗുണാങ്കം പൂജ്യമെന്നത് രേഖീയ ബന്ധത്തിന്റെ അഭാവം സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിലും അവ തമ്മിൽ മറ്റുതരത്തിലുള്ള സഹബന്ധം ഉണ്ടാവാം. അത് പോലെ തികച്ചും സ്വതന്ത്രമായ രണ്ട് ചരങ്ങളുടെ തന്നിരിക്കുന്ന വിലകൾക്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കം ഗണിത ശാസ്ത്രപരമായി കണക്കാക്കാം.

വിശദീകരണം 1.1

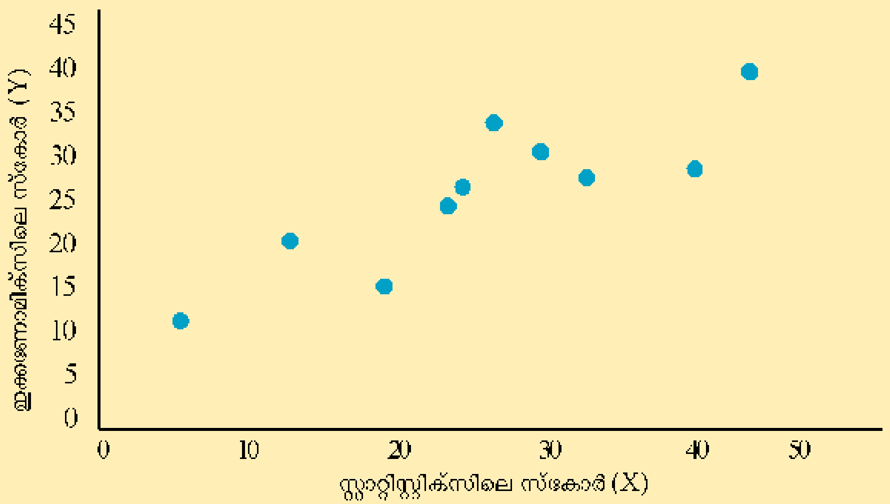
ഒരു ക്ലാസ് പരീക്ഷയിൽ 10 കുട്ടികൾക്ക് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലും (X) ഇക്കണോമിക്സിലും (Y) ലഭിച്ച സ്കോറുകൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

X	18	25	5	31	12	22	28	23	38	45
Y	16	34	12	28	21	25	31	27	29	40

സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രം വരയ്ക്കുക. കാൾ പിയേഴ്സൺ സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

സ്കാറ്റർ പ്ലോട്ട്



ചിത്രം 1.9

	x	y	x^2	y^2	xy
	18	16	324	256	288
	25	34	625	1156	850
	5	12	25	144	60
	31	28	961	784	868
	12	21	144	441	252
	22	25	484	625	550
	28	31	784	961	868
	23	27	529	729	621
	38	29	1444	841	1102
	45	40	2025	1600	1800
തുക	247	263	7345	7537	7259

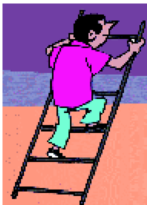
സഹബന്ധഗുണാങ്കം

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

$$= \frac{10 \times 7259 - 247 \times 263}{\sqrt{10 \times 7345 - (247)^2}\sqrt{10 \times 7537 - (263)^2}}$$

$$= 0.8686$$

സഹബന്ധം ഗുണാങ്കം, r ന്റെ വില പൂജ്യത്തിനും ഒന്നിനും ഇടയിലായതിനാൽ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലേയും ഇക്കണോമിക്സിലേയും സ്കോറുകൾക്ക് പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധമാണുള്ളത്.



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

പന്ത്രണ്ട് പിതാക്കളുടെയും (X) അവരുടെ മൂത്ത ആൺ മക്കളുടെയും (Y) ഉയരങ്ങൾ (ഇഞ്ചളവിൽ) തന്നിരിക്കുന്നു. സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രം വരയ്ക്കുക. കാൾപിയേഴ്സൺ സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

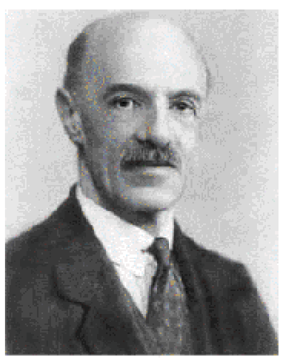
X	65	63	68	69	62	72	70	65	62	64	62	67
Y	66	60	71	67	65	68	63	61	69	62	65	65

പ്രവർത്തനം

നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിലെ 20 വിദ്യാർത്ഥികളുടെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പരീക്ഷയിലെ സ്കോറും അവരുടെ പഠന സമയവും (മണിക്കൂറിൽ) ശേഖരിക്കുക. സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഉത്തരം വ്യഖ്യാനിക്കുക

സ്പിയർമാൻ റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കം (Spearman's rank correlation coefficient)

ചില അവസരങ്ങളിൽ ഒരു ദ്വിചര ഡാറ്റയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ചരമോ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ട് ചരങ്ങളും അവയുടെ റാങ്കിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തന്നിരിക്കാം. സാധാരണയായി, വിശ്വസ്തത, സൗന്ദര്യം, കഴിവ്, ബുദ്ധിശക്തി മുതലായ ഗുണാത്മക സവിശേഷതകൾ ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത് തുടങ്ങിയ റാങ്കുകൾ നൽകുന്നതിലൂടെ കൂടുതൽ മെച്ചപ്പെട്ട രീതിയിൽ അവതരിപ്പിക്കാനാവും. റാങ്ക് നൽകി അവതരിപ്പിച്ച സവിശേഷതകളുടെ സഹബന്ധത്തെ റാങ്ക് സഹബന്ധം എന്നു പറയുന്നു. രണ്ട് ചരങ്ങളുടെ റാങ്കുകൾ പരസ്പരം ധാരണയിലാണോ അല്ലയോ എന്ന് കണ്ടെത്തുക എന്നതാണ്



ചാൾസ് എഡ്വേർഡ് സ്പിയർമാൻ

ഇത്തരം സാഹചര്യങ്ങളിൽ സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്റെ പ്രധാന ഉദ്ദേശ്യം. ബ്രിട്ടീഷ് മനഃശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന ചാൾസ് എഡ്‌വേർഡ് സ്പിയർമാൻ റാങ്കുകളുടെ സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള രീതി കണ്ടെത്തി. ഗുണാത്മക സവിശേഷതകൾ കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നതിന് ഈ അളവ് ഉപകാരപ്രദമാണ്.

സ്പിയർമാൻ റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കം ρ എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

അല്ലെങ്കിൽ $$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n^3-n}$$

d എന്നത് റാങ്കുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസവും n എന്നത് റാങ്കുകളുടെ എണ്ണവുമാണ്.

അതായത് $\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$ അല്ലെങ്കിൽ $\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n^3-n}$

വിശദീകരണം 1.2

10 വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് ഗണിതശാസ്ത്ര പരീക്ഷയിൽ ലഭിച്ച റാങ്കും ബുദ്ധിശക്തി പരിശോധനയിലെ അവരുടെ റാങ്കും തന്നിരിക്കുന്നു.

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ റാങ്ക്	1	3	6	10	5	9	2	4	7	8
ബുദ്ധിശക്തി പരിശോധനയിലെ റാങ്ക്	4	5	3	8	9	10	1	2	7	6

റാങ്ക് സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം:

ഇവിടെ കുട്ടികളുടെ റാങ്കാണ് തന്നിരിക്കുന്നത്.

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ റാങ്ക്	1	3	6	10	5	9	2	4	7	8
ബുദ്ധിശക്തി പരിശോധനയിലെ റാങ്ക്	4	5	3	8	9	10	1	2	7	6

X	Y	d	d^2
1	4	-3	9
3	5	-2	4
6	3	3	9
10	8	2	4
5	9	-4	16
9	10	-1	1
2	1	1	1
4	2	2	4
7	7	0	0
8	6	2	4
			ആകെ : 52

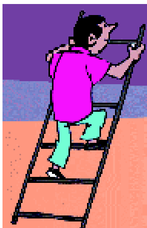
$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n^3 - n}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 52}{10^3 - 10}$$

$$= 1 - \frac{312}{990}$$

$$= 1 - 0.3152$$

$$= 0.6848$$



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

ഒരു സൗന്ദര്യമത്സരത്തിലെ 10 മത്സരാർത്ഥികൾക്ക് രണ്ട് വിധികർത്താക്കൾ നൽകിയ റാങ്കുകൾ തന്നിരിക്കുന്നു. റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

വിധികർത്താവ് 1	3	5	8	6	4	9	7	2	1	10
വിധികർത്താവ് 2	2	6	10	8	3	7	5	1	4	9

റാങ്കുകൾ ആവർത്തിക്കുമ്പോൾ റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കൽ

ചിലപ്പോൾ രണ്ടോ അതിലധികമോ ഇനങ്ങൾക്ക് തുല്യ റാങ്കുകൾ നൽകേണ്ടി വരും. അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഓരോ ഇനത്തിനും ശരാശരി റാങ്ക് നൽകേണ്ടതുണ്ട്. ഉദാ

ഹരണമായി, രണ്ടാം സ്ഥാനത്ത് വരുന്ന രണ്ട് ഇനങ്ങൾക്ക് $\frac{2+3}{2}$ ന് തുല്യമായ 2.5 എന്ന റാങ്കും അഞ്ചാം സ്ഥാനത്ത് മൂന്ന് ഇനങ്ങൾ വന്നാൽ ഓരോ ഇനത്തിന് $\frac{5+6+7}{3}$ ന് തുല്യമായ 6 എന്ന റാങ്കും നല്കേണ്ടതാണ്. ഇങ്ങനെ ചില റാങ്കുകൾ ആവർത്തിച്ചു വരുന്ന സന്ദർഭത്തിൽ സ്പിയർമാൻ റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കത്തിലെ Σd^2 എന്നതിനോട് ഒരു തിരുത്തൽ ഘടകം ചേർക്കേണ്ടതുണ്ട്.

ഈ തിരുത്തൽ ഘടകം (C.F) = $\frac{\Sigma(m^3-m)}{12}$ ആണ്. ഓരോ റാങ്കും ആവർത്തിക്കുന്ന തവണയാണ് m കൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്. ഒന്നിൽ കൂടുതൽ റാങ്കുകൾ ആവർത്തിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അത്രയും തവണ $\frac{m^3-m}{12}$ കണ്ടുപിടിച്ച് കൂട്ടേണ്ടതാണ്.

സ്പിയർമാൻ റാങ്ക് സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം

$$\rho = 1 - \frac{6(\Sigma d^2 + C.F)}{n^3 - n} \quad ; \quad C.F = \frac{\Sigma(m^3-m)}{12}$$

വിശദീകരണം 1.3

എഴുത്ത് പരീക്ഷയും ഗ്രൂപ്പ് ചർച്ചയും അഭിമുഖവും ഉൾപ്പെട്ട ഒരു മത്സര പരീക്ഷയിലെ പത്ത് മുൻനിര റാങ്കുകാരുടെ എഴുത്ത് പരീക്ഷയിലെ സ്കോർ തന്നിരിക്കുന്നു.

റാങ്ക്	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
എഴുത്ത് പരീക്ഷയിലെ സ്കോർ	78	63	65	62	63	58	63	52	50	52

റാങ്കും, എഴുത്ത് പരീക്ഷയിലെ സ്കോറും തമ്മിലുള്ള റാങ്ക് സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം:

ആദ്യം എഴുത്ത് പരീക്ഷയിലെ സ്കോറിനനുസരിച്ച് റാങ്ക് നൽകേണ്ടതുണ്ട്. 63 എന്ന സ്കോർ 3, 4, 5 സ്ഥാനങ്ങളിലായി 3 തവണ ആവർത്തിക്കുന്നു. 52 എന്ന സ്കോർ 8, 9 സ്ഥാനങ്ങളിലായി 2 തവണയും ആവർത്തിക്കുന്നു. 63 സ്കോറിന് 4-ാം റാങ്കും 52 സ്കോറിന് 8.5-ാം റാങ്കും നൽകാം.

റാങ്ക്	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
എഴുത്ത് പരീക്ഷയിലെ റാങ്ക്	1	4	2	5	4	7	4	8.5	10	8.5

R_1	R_2	d	d^2
1	1	0	0
2	4	-2	4
3	2	1	1
4	5	-1	1
5	4	1	1
6	7	-1	1
7	4	3	9
8	8.5	-0.5	0.25
9	10	-1	1
10	8.5	1.5	2.25
		ആകെ	**20.5**

4-ാം റാങ്ക് മൂന്ന് പ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കുന്നു. അപ്പോൾ $m=3$ ആകുന്നു.

$$C.F = \frac{1}{12}(m^3 - m) = \frac{1}{12}(3^3 - 3) = 2$$

8.5-ാം റാങ്ക് രണ്ട് പ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കുന്നു. അപ്പോൾ $m \;\; 2$ ആകുന്നു.

$$C.F = \frac{1}{12}(m^3 - m) = \frac{1}{12}(2^3 - 2) = 0.5$$

ആകെ C.F = 2+0.5 = 2.5

$$\rho = 1 - \frac{(6\Sigma d^2 + C.F)}{n^3 - n}$$

$$= 1 - \frac{6 \times (20.5 + 2.5)}{10^3 - 10}$$

$$= 1 - 0.1393$$

$$= \mathbf{0.8607}$$

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

12 വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് ഒരു എഴുത്ത് പരീക്ഷയിൽ ലഭിച്ച സ്കോറും അവരുടെ ആകെ പ്രകടനത്തിൽ ലഭിച്ച റാങ്കും തന്നിരിക്കുന്നു. റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

എഴുത്ത് പരീക്ഷയിലെ സ്കോർ	12	15	18	20	18	16	13	18	17	11	13	18
പ്രകടനത്തിലെ റാങ്ക്	8	7	2	1	6	5	11	4	9	12	10	3

പ്രവർത്തനം

സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് അടിസ്ഥാനമായി ഒരു ക്വിസ് മത്സരം സംഘടിപ്പിക്കുക. പത്ത് മുൻനിര റാങ്കുകാരുടെ റാങ്കും അവരുടെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ക്ലാസ് പരീക്ഷയിലെ സ്കോറും തമ്മിലുള്ള റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ പഠനമാണ് സഹബന്ധവിശകലനം. സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രം ഉപയോഗിച്ച് സഹബന്ധം ഗ്രാഫ് രൂപത്തിൽ പഠിക്കാം. പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധം, നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധം, സഹബന്ധമില്ലായ്മ എന്നിവയാണ് വിവിധ തരം സഹബന്ധങ്ങൾ. ചരങ്ങൾ നേർ അനുപാതത്തിലാണെങ്കിൽ സഹബന്ധം പൂർണ്ണ പോസിറ്റീവും ചരങ്ങൾ വിപരീതാനുപാതത്തിലാണെങ്കിൽ സഹബന്ധം പൂർണ്ണ നെഗറ്റീവുമാണ്. രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ തീവ്രതയുടെ അളവാണ് സഹബന്ധഗുണാങ്കം. കാൾപിയേഴ്സൺ സഹബന്ധഗുണാങ്കം, വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരു ചരമോ രണ്ട് ചരങ്ങളോ ഗുണാത്മക ചരങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ അളവ് കാണുന്നതിന് സ്പിയർമാൻ റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കം ഉപയോഗിക്കുന്നു. റാങ്കുകൾ ആവർത്തിക്കുമ്പോൾ റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കം ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതിയും ഈ അധ്യായത്തിൽ വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ലാബ് പ്രവർത്തനം

വിശദീകരണം 1.3 ന്റെ ഉത്തരം സ്പ്രെഡ് ഷീറ്റ് ആപ്ലിക്കേഷൻ ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിക്കുക.

നമുക്ക് വിലയിരുത്താം...

1 മുതൽ 6 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് തന്നിട്ടുള്ള ഉത്തരങ്ങളിൽ നിന്ന് ശരിയായത് തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

1. സഹബന്ധഗുണാങ്കത്തിന്റെ കുടിയ വില .... ആയിരിക്കും.

   a) 0 b) 1 c) -1 d) അനന്തം

2. സഹബന്ധഗുണാങ്കത്തിന്റെ വില .... ആകുന്നു.

   a) പരിധിയില്ല b) ഒന്നിൽ കുടാം

   c) -1 ൽ കുറയാം d) -1 മുതൽ 1 വരെയാകാം.

3. സഹബന്ധഗുണാങ്കം .... ആയിരിക്കും

   a) പോസിറ്റീവ് b) നെഗറ്റീവ്

   c) പോസിറ്റീവോ നെഗറ്റീവോ d) പോസിറ്റീവ്, നെഗറ്റീവ് അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യം

4. X, Y എന്നീ ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധഗുണാങ്കം 0.3 ആയാൽ 2X , Y എന്നിവ തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം......ആകുന്നു.

   a) 0.6 b) 0.9 c) 0.3 d) 0.4

5. 100 വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് സ്റ്റാറ്റിക്സ്റ്റിക്സിലും ഇക്കണോമിക്സിലും ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ സഹബന്ധഗുണാങ്കം 0.9 ആണെങ്കിൽ അവ തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധം .... ആണ്.

   a) ഉയർന്ന പോസിറ്റീവ് b) ഉയർന്ന നെഗറ്റീവ്

   c) പൂർണ്ണ പോസിറ്റീവ് d) പൂർണ്ണ നെഗറ്റീവ്

6. X , Y എന്നീ ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധഗുണാങ്കം 0.4 ആണ്. X+3 , Y-5 എന്നിവ തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധഗുണാങ്കം .... ആകുന്നു

   a) 0.8 b) 0.4 c) 0.2 d) 0.6

7. ഒരു രാജ്യത്തെ വ്യത്യസ്ത വർഷങ്ങളിലെ അസംസ്കൃത പരുത്തി ഇറക്ക് മതിയും പരുത്തി ഉല്പന്നങ്ങളുടെ ഉല്പാദനവും (മില്യൺ ടണ്ണിൽ) തന്നിരിക്കുന്നു. സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രം വരയ്ക്കുക.

അസംസ്കൃത പരുത്തി ഇറക്കു മതി (മില്യൺ ടണ്ണിൽ)	47	64	100	97	126	203	170	115
പരുത്തി ഉല്പന്ന ഉല്പാദനം (മില്യൺ ടണ്ണിൽ)	70	85	100	103	111	139	133	115

8. ഒരു മൊത്തക്കച്ചവട സ്ഥാപനത്തിലെ ബിരിയാണി അരിയുടെ വിലയും (രൂപയിൽ) (X) കിന്റലിലുള്ള വിതരണവും (Y) തന്നിരിക്കുന്നു. സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രം വരച്ച് വിശകലനം നടത്തുക.

X	10	22	34	35	69	85	95	98
Y	32	36	25	45	32	56	86	68

9. ഒരു ചില്ലറ വില്പനശാലയിലെ ഒരു സാധനത്തിന്റെ വിലയും അതിന്റെ വിതരണത്തിന്റെ അളവും ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. കാൾപിയേഴ്സൺ സഹബന്ധഗുണാങ്കം കാണുക.

വില (രൂപയിൽ)	25	38	29	32	35	38	40	42
വിതരണം (കിലോ ഗ്രാമിൽ)	38	35	39	45	42	48	39	52

10. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയിൽ നിന്നും അച്ഛന്റെ ഉയരവും മകന്റെ ഉയരവും തമ്മിലുള്ള കാൾപിയേഴ്സൺ സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

അച്ഛന്റെ ഉയരം (ഇഞ്ചളവിൽ)	64	65	66	67	68	69	70
മകന്റെ ഉയരം (ഇഞ്ചളവിൽ)	66	67	65	68	70	68	72

11. അഞ്ച് തൊഴിലാളികളുടെ വരുമാനവും ചെലവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റ ആണ് താഴെതന്നിരിക്കുന്നത്. പിയേഴ്സൺ സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

$$\Sigma(x-\bar{x})^2 = 1000,\ \Sigma(y-\bar{y})^2 = 40,\ \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 100$$

12. X , Y എന്നീ ചരങ്ങളുടെ സഹവ്യതിയാനം 10 ഉം X ന്റെ വ്യതിയാനം 16 ഉം Y യുടെ വ്യതിയാനം 9 ഉം ആണ്. സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

13. കാറുകളുടെ പഴക്കവും വാർഷിക പരിപാലനചെലവും തന്നിരിക്കുന്നു. സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

കാറുകളുടെ പഴക്കം വർഷത്തിൽ (X)	2	4	6	7	8	10	12
പരിപാലന ചെലവ് (Y) രൂപയിൽ	16000	15000	18000	19000	17000	21000	20000

14. 10 വിദ്യാർത്ഥികളുടെ രണ്ട് വിഷയങ്ങളിലെ റാങ്കുകൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

വിഷയം A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
വിഷയം B	3	4	2	3	5	6	9	10	7	8

റാങ്ക് സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

15. 5 വിദ്യാർത്ഥികൾ XI , XII പരീക്ഷകളിൽ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിൽ നേടിയ സ്കോറുകൾ തന്നിരിക്കുന്നു.

XI ലെ സ്കോർ (x) :	32	49	50	28	30
XII ലെ സ്കോർ (y):	40	50	55	25	43

റാങ്ക് സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

16. ഒരു പ്രസംഗ മത്സരത്തിലെ 5 മത്സരാർത്ഥികൾക്ക് രണ്ട് വിധികർത്താക്കൾ നൽകിയ സ്കോറുകൾ തന്നിരിക്കുന്നു.

വിധികർത്താവ് I	70	65	72	64	78
വിധികർത്താവ് II	91	76	66	48	55

റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കം കാണുക?

17. X, Y ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധഗുണാങ്കം റാങ്ക് വ്യത്യാസ രീതി ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

x :	22	24	27	35	21	20	27	25	27	23
y :	30	38	40	50	38	25	38	36	41	32

18. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച് 10 കമ്പനികളുടെ വില്പനയും അവയുടെ ലാഭവും തമ്മിലുള്ള സ്പിയർമാൻ റാങ്ക് സഹബന്ധഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

കമ്പനി :	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
വില്പന :	50	50	55	60	65	65	65	60	60	50
ലാഭം :	11	13	14	16	16	15	15	14	13	13

19. 7 ഹയർസെക്കന്ററി വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് XI , XII പരീക്ഷകളിൽ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്ററിക്സിൽ ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ തന്നിരിക്കുന്നു. റാങ്ക് സഹബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

XI ക്ലാസിലെ സ്കോർ :	15	14	25	14	14	20	22
XII ക്ലാസിലെ സ്കോർ :	25	12	18	25	40	10	7

അധ്യായം 2

P3A7G8

സമാശ്രയ വിശകലനം (Regression Analysis)

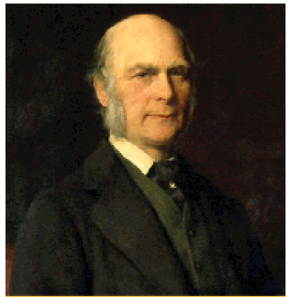
കഴിഞ്ഞ അധ്യായത്തിൽ നാം ചർച്ച ചെയ്ത സഹബന്ധഗുണാങ്കം രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ ദിശയെയും തീവ്രതയെയും കുറിച്ച് പറഞ്ഞുതരുന്നു. 1889 ൽ സർ ഫ്രാൻസിസ് ഗാൾട്ടൺ (Sir Francis Galton) പാരമ്പര്യത്തെ കുറിച്ച് ഒരു പ്രബന്ധം അവതരിപ്പിച്ചു. അച്ഛൻമാരുടെയും, ആൺമക്കളുടെയും ഉയരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമാണ് ഇവിടെ പ്രതിപാദ്യം. പിൻഗാമികളുടെ ഉയരം മാധ്യത്തിലേക്ക് സമാശ്രയപ്പെടുന്നതായി അദ്ദേഹം നിരീക്ഷിച്ചു. സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്ര, വാണിജ്യ ശാസ്ത്ര ഡാറ്റകൾ കൈകാര്യം ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് പ്രവചനവും മതിപ്പും നടത്തേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്. മാനുഷിക പ്രവർത്തനങ്ങളുടെ മിക്കവാറും എല്ലാ മേഖലകളിലും

സവിശേഷ പഠന നേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായത്തിന്റെ പൂർത്തികരണത്തിന് ശേഷം പഠിതാവ്:

- സമാശ്രയ വിശകലനം എന്ന ആശയം തിരിച്ചറിയുന്നു
- തന്നിരിക്കുന്ന വിലകൾക്ക് അനുസൃതമായ അറിയാത്ത വിലകൾ കണ്ടെത്തുന്നു.
- സമാശ്രയ രേഖകളും അവയുടെ സംഗമ ബിന്ദുവും വേർതിരിച്ചറിയുന്നു.
- സമാശ്രയ ഗുണാങ്കത്തിലെ സവിശേഷതകൾ വിശദീകരിക്കുന്നു.
- സഹബന്ധവും, സമാശ്രയവും താരതമ്യം ചെയ്യുന്നു.

പ്രധാന പ്രശ്നങ്ങളിൽ ഒന്നാണ് പ്രവചനം. ഇത്തരത്തിൽ പ്രവചനം ഉണ്ടാക്കുന്നതിനുള്ള ശാസ്ത്രീയ തന്ത്രങ്ങളിലൊന്നാണ് സമാശ്രയ വിശകലനം. സ്വതന്ത്ര ചരത്തിന്റെ സ്വാധീനത്താൽ ആശ്രിത ചരത്തിന്റെ ശതമാനത്തിലുള്ള വ്യതിയാനത്തെ അളക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. മിക്കവാറും എല്ലാ ജീവിത സാഹചര്യങ്ങളിലും വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്ന സാംഖ്യക തന്ത്രമാണിത്. സമാശ്രയ വിശകലനത്തെക്കുറിച്ച് കൂടുതലായി ഈ അധ്യായത്തിൽ പഠിക്കാം.



സർ. ഫ്രാൻസിസ് ഗാൽട്ടൺ

2.1 സമാശ്രയത്തിന്റെ അർത്ഥം (Meaning of Regression)

ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ ഏകദ രൂപത്തിന്റെ അളവാണ് സമാശ്രയം. മറ്റൊരർത്ഥത്തിൽ ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ ഗണിതപരമായ അളവ് ആണിത്. 'സമാശ്രയം' എന്ന പദത്തിനർത്ഥം 'മടക്കം' എന്നതാണ്. കാര്യകാരണ ബന്ധ പഠനമാണ് ഇത്. രണ്ട് ചരങ്ങൾ മാത്രം ഉൾപ്പെട്ട രേഖീയ സമാശ്രയത്തിന് മാത്രമാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം ശ്രദ്ധ നല്കുന്നത്. സ്വതന്ത്രചരം, ആശ്രിത ചരം എന്നിവയാണ് ഈ ചരങ്ങൾ. സ്വതന്ത്രചരങ്ങളുടെ അറിയാവുന്ന വിലകളിൽ നിന്നും ആശ്രിത ചരങ്ങളുടെ അറിയാത്ത വിലകൾ കണ്ടെത്താൻ സമാശ്രയ വിശകലനം സഹായിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി ഒരു സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്ര വിദഗ്ദന് ഒരു സാധനത്തിന്റെ തന്നിരിക്കുന്ന വിലയ്ക്ക് അനുസൃതമായ ചോദനം (demand) കണ്ടെത്തുന്നതിനും ഒരു കാർഷിക വിദഗ്ദന് മഴ ലഭ്യതക്കനുസരിച്ചുള്ള ഉല്പാദനം പ്രവചിക്കുന്നതിനും സമാശ്രയവിശകലനം സഹായകമാണ്.

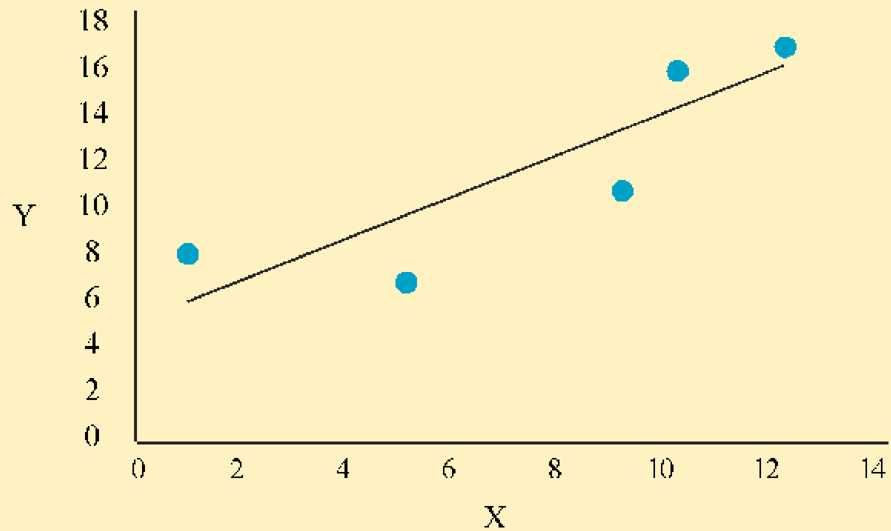
> രണ്ടോ അതിൽ കൂടുതലോ ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ പ്രകൃതവുമായുള്ള ഗണിതപരമായ അളവാണ് സമാശ്രയ വിശകലനം.

സ്വതന്ത്ര, ആശ്രിത ചരങ്ങൾ (In dependent and dependent variables)

ഒരു ഗവേഷകൻ, ഒരു വ്യക്തിയുടെ രക്ത സമ്മർദത്തിൻമേൽ അയാളുടെ വയസ്സിന്റെ സ്വാധീനം പഠിക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക. ഇവിടെ വയസ്സ് സ്വതന്ത്ര ചരവും, രക്ത സമ്മർദ്ദം ആശ്രിത ചരവും ആണ്. ഒരു വ്യക്തിയുടെ ചെലവ് അയാളുടെ വരുമാനത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നുവെങ്കിൽ വരുമാനം സ്വതന്ത്ര ചരവും ചെലവ് ആശ്രിതചരവുമാണ്. വിലകൾ പ്രവചിക്കേണ്ടുന്ന ചരത്തെ ആശ്രിതചരം അഥവാ പ്രതികരണ ചരം എന്നും പ്രവചനത്തിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന ചരത്തെ സ്വതന്ത്രചരം അഥവാ പ്രവചനചരം എന്നും വിളിക്കുന്നു.

2.2 രേഖീയ സമാശ്രയം (Linear Regression)

ഒരു ദ്വിചര ഡാറ്റയെ ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ വരച്ചാൽ ഒരു സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രം ലഭിക്കുന്നു. സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കും പ്രകാരം നേർരേഖകൾ നമുക്ക് വരക്കാം.



ചിത്രം 2.1

സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു നേർരേഖയ്ക്ക് സമീപം കേന്ദ്രീകരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഈ നേർരേഖയെ സമാശ്രയ രേഖ അഥവാ ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ രേഖ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇത്തരം രേഖകളുടെ സമവാക്യം, X, Y എന്നീ ചരങ്ങൾ ഉൾപ്പെട്ട ഒന്നാം കൃതി സമവാക്യം ആയിരിക്കും. X,Y എന്നീ ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം തിരിച്ചിടാൻ പാറ്റാത്തതിനാൽ നമുക്ക് രണ്ട് സമാശ്രയ രേഖകൾ ലഭിക്കുന്നു. ഒരു സമാശ്രയരേഖ Y നു മേലുള്ള X ന്റെ സമാശ്രയ സമവാക്യം മറ്റൊന്ന് X നു മേലുള്ള Y യുടെ സമാശ്രയ സമവാക്യവും കാണിക്കുന്നു.

തന്നിരിക്കുന്ന X വിലകൾക്ക് Y വില കണ്ടുപടിക്കുന്നതിന് X നു മേലുള്ള Y യുടെ സമാശ്രയ രേഖയും, തന്നിരിക്കുന്ന Y വിലകൾക്ക് X വില കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് Y നു മേലുള്ള X ന്റെ സമാശ്രയ രേഖയും ഉപയോഗിക്കുന്നു.

2.3 സമാശ്രയ സമവാക്യങ്ങൾ (Regression Equations)

സമാശ്രയ രേഖകളുടെ സമവാക്യമാണ് സമാശ്രയ സമവാക്യം. X.Y എന്നീ രണ്ടു ചരങ്ങൾക്ക് രണ്ട് സമാശ്രയ സമവാക്യങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഒന്ന് X ന് Y യുടെ മേലുള്ള സമാശ്രയ സമവാക്യവും മറ്റൊന്ന് Y യ്ക്ക് X നു മേലുള്ള സമാശ്രയ സമവാക്യവുമാണ്. സമാശ്രയ സമവാക്യങ്ങൾ ലെജൻഡറിന്റെ ന്യൂനതമവർഗ സിദ്ധാന്തം (Legendre's Principle of least Squares) ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്താം. X നു മേൽ Y യുടെ സമാശ്രയ സമവാക്യത്തിൽ X സ്വതന്ത്ര ചരവും Y ആശ്രിത ചരവും ആണ്.

X നു മേൽ Y യുടെ സമാശ്രയ സമവാക്യം

$y-\bar{y}=b_{yx}(x-\bar{x})$ എന്ന് ആണ്.

$\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$, Y വിലകളുടെ മാധ്യം

$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$, X വിലകളുടെ മാധ്യം

b_{yx} = X ന്റെ മേൽ Y യുടെ സമാശ്രയ ഗുണാങ്കം (Regression Coefficient)

അതായത്, $byx = \frac{Cov(X, Y)}{var(X)}$ അഥവാ $b_{yx} = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$

അതേപ്രകാരം Y സ്വതന്ത്ര ചരവും X ആശ്രിത ചരവുമാവുമ്പോൾ നമുക്ക് Y നും മേൽ X ന്റെ സമാശ്രയ സമവാക്യം എന്നറിയപ്പെടുന്ന മറ്റൊരു സമവാക്യം ലഭിക്കുന്നു. ഈ സമവാക്യം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

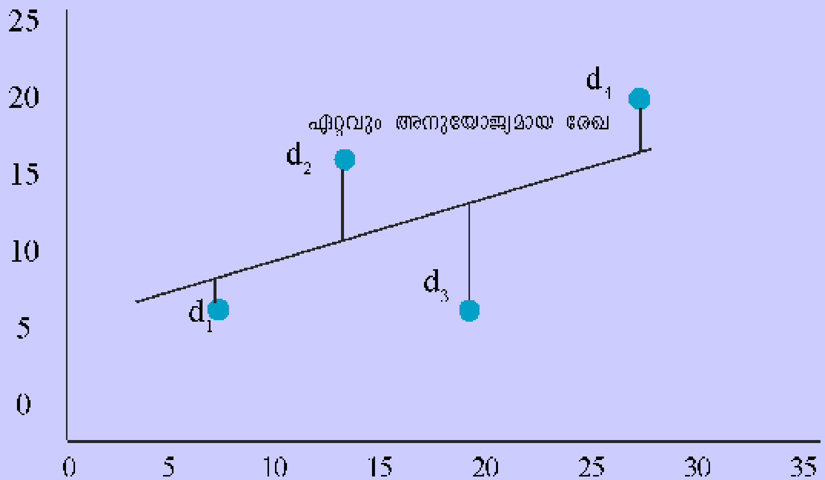
X ന് Y യുടെ മേലുള്ള സമവാക്യം

$$x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y})$$

b_{xy} എന്നത് y യുടെ മേൽ x ന്റെ സമാശ്രയ ഗുണാങ്കം ആകുന്നു

$$b_{xy} = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y}{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}$$

തന്നിരിക്കുന്ന വിലകളുടെയും ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ രേഖയിലൂടെ ലഭിക്കുന്ന വിലകളുടെയും ലംബമായ വ്യതിയാനത്തിന്റെ വർഗങ്ങളുടെ തുക ഏറ്റവും കുറഞ്ഞതായിരിക്കണം എന്നാണ് ന്യൂനതമ വർഗ സിദ്ധാന്തം പറയുന്നത്. അതായത് d_1, d_2, d_3.... ഈ വ്യതിയാനങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതായാൽ ന്യൂനവർഗ സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ രേഖ വരയ്ക്കുന്നത് $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots$ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞതാവുന്ന വിധത്തിലായിരിക്കണം.



ചിത്രം 2.2

വിശദീകരണം 2.1

ഒരു നഗരത്തിലെ 7 പ്രധാന കടകളിലെ വാണിജ്യ ഇടപാടുകളുടെ ഡാറ്റ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

വില്പന (ആയിരത്തിൽ)	4	6	5	9	10	7	2
വാങ്ങൽ (ആയിരത്തിൽ)	2	5	3	7	7	3	1

സമാശ്രയ സമവാക്യം രൂപപ്പെടുത്തുക. വാങ്ങൽ 9000 രൂപ യുടേതായാൽ വില്പന യുടെ അളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

വില്പനയെ X എന്നും വാങ്ങലിനെ Y എന്നും സൂചിപ്പിച്ചാൽ

X	Y	XY	Y^2
4	2	8	4
6	5	30	25
5	3	15	9
9	7	63	49
10	7	70	49
7	3	21	9
2	1	2	1
$\Sigma x = 43$	$\Sigma y = 28$	$\Sigma XY = 209$	$\Sigma Y^2 = 146$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{28}{7} = 4 \qquad \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{43}{7} = 6.14$$

$$b_{xy} = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}$$

$$= \frac{7 \times 209 - 43 \times 28}{7 \times 46 - (28)^2}$$

$$= 1.08$$

Y ന് മേലുള്ള X ന്റെ സമാശ്രയ സമവാക്യം,

$$x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y})$$

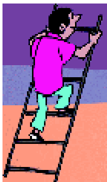
അതായത്, $x - 6.14 = 1.08\,(y - 4)$

വാങ്ങൽ 9000 ആകുമ്പോളുള്ള വില്പന കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ഈ സമവാക്യത്തിൽ Y യുടെ വില 9 എന്ന് കൊടുക്കണം

അതായത് $x - 6.14 = 1.08\,(9 - 4)$

$$x = 6.14 + 1.08 \times 5$$
$$= 11.54$$

∴ വില്പന = 11.54 x 1000 = 11540



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

ഒരു കൂട്ടം യന്ത്രങ്ങൾ പ്രവർത്തിപ്പിക്കുന്നവരുടെ അനുഭവജ്ഞാനവും അവരുടെ പ്രകടന മതിപ്പും കാണിക്കുന്ന ഡാറ്റയാണ് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

യന്ത്ര വിദഗ്ദ്ധരുടെ പരിചയം (വർഷത്തിൽ) (X)	16	12	18	4	3	10	5	12
പ്രകടന മതിപ്പ് (Y)	87	88	89	68	78	80	75	83

അനുഭവ ജ്ഞാനത്തിന് മേൽ പ്രകടനമതിപ്പിനുള്ള സമാശ്രയ രേഖ കണ്ടുപിടിക്കുക. അനുഭവ ജ്ഞാനം 7 വർഷം ആയാൽ പ്രകടന മതിപ്പ് എന്തായിരിക്കുമെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

സമാശ്രയ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ (Properties of regression coefficients)

സമാശ്രയ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ പ്രധാന സവിശേഷതകൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയാണ്.

- x നു മേൽ y യുടെ സമാശ്രയ സമവാക്യത്തിൽ സമാശ്രയഗുണാങ്കം b_{yx} ആണ്.
- y നു മേൽ x ന്റെ സമാശ്രയ സമവാക്യത്തിൽ b_{xy} ആണ് സമാശ്രയ ഗുണാങ്കം.

  ഉദാഹരണം : $y - 4 = 1.2\,(x - 2)$, $b_{yx} = 1.2$

  $x - 6 = 0.7\,(y - 2)$, $b_{xy} = 0.7$
- രണ്ട് സമാശ്രയ ഗുണാങ്കങ്ങൾക്കും ഒരേ ചിഹ്നം ആയിരിക്കും. അതായത് സമാശ്രയ ഗുണാങ്കങ്ങൾ ഒന്നുകിൽ രണ്ടും പോസറ്റീവ് അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടും നെഗറ്റീവ് ആയിരിക്കും.
- രണ്ട് സമാശ്രയ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം ഒന്നോ അതിൽ കുറവോ ആയിരിക്കും അതായത് $b_{yx} \cdot b_{xy} \le 1$.
- സമാശ്രയ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ജ്യാമിതിയ മാധ്യം സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം ആണ് $r = \pm\sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$
- Y ചരത്തിന്റെ മാനക വ്യതിയാനം σ_y യും X ചരത്തിന്റെ മാനക വ്യതിയാനം σ_x ഉം ആയാൽ $b_{yx} = r \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, $b_{xy} = r \times \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$
- സാധാരണയായി $b_{yx} \neq b_{xy}$

$$b_{yx} \times b_{xy} = r \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \times r \times \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r^2.$$

അതായത് $r = \pm\sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$, r എന്നത് സഹബന്ധഗുണാങ്കം

b_{yx} ഉം b_{xy} യും പോസിറ്റീവ് ആയാൽ r പോസിറ്റീവ് ആണ്.

b_{yx} ഉം b_{xy} യും നെഗറ്റീവ് ആയാൽ r നെഗറ്റീവ് ആണ്.

വിശദീകരണം 2.2

കൃഷിസ്ഥലത്തിനെകുറിച്ചുള്ള അളവും (X) കാർഷിക ഉല്പാദനത്തിന്റെ ടണ്ണിലുള്ള അളവു (Y) മായി ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റയാണു ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

	X	Y
മാധ്യം	50	30
മാനക വ്യതിയാനം	5	2

സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം = 0.7

1) കൃഷിസ്ഥലത്തിന് മേൽ ഉല്പാദത്തിന്റെ സമാശ്രയ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.
2) 80 ഹെക്ടർ കൃഷിസ്ഥലം ലഭ്യമായാൽ കാർഷിക ഉൽപാദനത്തിന്റെ മതിപ്പ് കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$\bar{y} = 30 \qquad \sigma_y = 2$

$\bar{x} = 50 \qquad \sigma_x = 5$

$r = 0.7$

1) കൃഷി സ്ഥലത്തിന് മേൽ ഉത്പാദനത്തിന്റെ സമാശ്രയ സമവാക്യം എന്നത് X നു മേൽ Y യുടെ സമാശ്രയ സമവാക്യം ആണ്.

X ന് മേൽ Y യുടെ സമാശ്രയ ഗുണാങ്കം (b_{yx}) $= r \times \frac{\sigma y}{\sigma x}$

$$b_{yx} = 0.7 \times \frac{2}{5} = 0.28$$

X ന് മേൽ Y യുടെ സമാശ്രയ സമവാക്യം $y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x})$

$$y - 30 = 0.28\,(x - 50)$$

2) കൃഷിസ്ഥല ലഭ്യത 80 ആകുമ്പോൾ ഉല്പാദത്തിന്റെ മതിപ്പ് കാണുന്നതിന് $x = 80$ എന്ന് കൊടുക്കണം

അതായത് $y - 30 = 0.28\,(80 - 50)$

$$y - 30 = 0.28\,(30) = 8.4$$

$$y = 30 + 8.4 = 38.4$$

വിശദീകരണം 2.3

$4x - 5y + 10$ എന്നത് Y യ്ക്ക് X ന്റെ മേലുള്ള സമാശ്രയ സമവാക്യം ആയാൽ b_{yx} കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

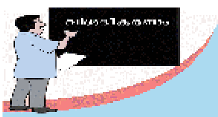
$$4x - 5y + 10$$

x ന് മേൽ y യുടെ സമാശ്രയ സമവാക്യം $y=ax+b$ എന്ന രൂപത്തിൽ ആകുമ്പോൾ x ന്റെ ഗുണോത്തരമാണ് b_{yx} എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$$5y = 4x + 10$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{10}{5}$$

$$\therefore\ b_{yx} = \frac{4}{5}.$$



വിശദീകരണം 2.4

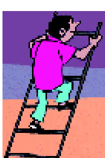
$b_{yx} = -0.23$ യും $b_{xy} = -0.75$ ഉം ആയാൽ സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം കാണുക?

പരിഹാരം

$$r = \pm\sqrt{b_{yx}b_{xy}} = \pm\sqrt{(-0.23)(-0.75)}$$

$$= \pm\sqrt{.1725} = \pm 0.4153$$

(b_{yx}, b_{xy} എന്നിവ നെഗറ്റീവ് ആയതിനാൽ) $r \quad -0.4153$



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. ഒരു പ്രത്യേക പരീക്ഷയിലെ ഇംഗ്ലീഷ്, സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് വിഷയങ്ങളിലെ മാർക്കുകളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റയാണ് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത്.

	ഇംഗ്ലീഷ്	സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ്
മാധ്യം	39.5	47.5
മാനകവ്യതിയാനം	10.8	16.8

സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം = 0.42.

(a) സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന് 50 മാർക്ക് ലഭിച്ച കുട്ടിയുടെ ഇംഗ്ലീഷിലെ സാധ്യമായ മാർക്ക് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(b) ഇംഗ്ലീഷിൽ 35 മാർക്ക് നേടിയ കുട്ടിയുടെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലെ സാധ്യമായ മാർക്ക് എത്ര?

2. Y നു മേൽ X ന്റെ സമാശ്രയ ഗുണാങ്കം $\frac{9}{16}$ ഉം അവ തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധഗുണാങ്കം $\frac{1}{4}$ ഉം ആയാൽ X നു മേൽ Y യുടെ സമാശ്രയ ഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

സമാശ്രയ രേഖകൾ തിരിച്ചറിയൽ (Identification of regression lines)

സമാശ്രയരേഖകൾ തിരിച്ചിടാൻ പറ്റാത്തതാണെന്ന് നമുക്കറിയാം അത്കൊണ്ട് തന്നെ രണ്ട് സമാശ്രയ രേഖകൾ തന്നിരുന്നാൽ അവയിൽ ഏതാണ് X ന് മേൽ Y യുടെ സമാശ്രയ രേഖ യെന്നും ഏതാണ് Y യുടെ മേൽ X ന്റെ സമാശ്രയ രേഖ എന്നും തിരിച്ചറിയുക എന്നത് ഒരു പ്രധാനപ്പെട്ട പ്രശ്നമാണ്. ഇവിടെ ഒരു സമവാക്യം X നു മേൽ Y യുടേതും മറ്റേത് Y യ്ക്ക് മേൽ X ന്റേതും എന്ന് അനുമാനിച്ച് സമാശ്രയ ഗുണാങ്കങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇവയുടെ ഗുണനഫലം ഒന്നോ അതിൽ കുറവോ ആണെങ്കിൽ നമ്മുടെ അനുമാനം ശരിയാണെന്നും അല്ലെങ്കിൽ അനുമാനം തെറ്റാണെന്നും കണക്കാക്കുന്നു. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണ ത്തിലൂടെ ഇത് കൂടുതൽ വ്യക്തമാക്കാം.

വിശദീകരണം 2.5

x + 2y – 5 = 0, 2x + 3y – 8 = 0 എന്നീ രണ്ട് സമാശ്രയ സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന് X നു മേൽ Y യുടെ സമാശ്രയ സമവാക്യം ഏത്. Y നു മേൽ X ന്റെ സമാശ്രയ സമവാക്യം ഏത്?

പരിഹാരം

$$x + 2y - 5 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$2x + 3y - 8 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

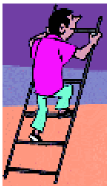
ഒന്നാമത്തെ സമവാക്യം Y നു മേൽ X ന്റേതും രണ്ടാമത്തേത് X നു മേൽ Y യുടേതും എന്ന് കണക്കാക്കിയാൽ

സമവാക്യം (1) ⇨ $x = -2y + 5$ അതായത് $b_{xy} = -2$

സമവാക്യം (2) ⇨ $y = \frac{-2}{3}x + \frac{8}{3}$ അതായത് $b_{yx} = \frac{-2}{3}$

$$b_{xy} \times b_{yx} = -2 \times \frac{-2}{3} = \frac{4}{3} = 1.33 > 1$$

∴ നമ്മുടെ അനുമാനം തെറ്റാണെന്ന് കിട്ടുന്നു. ആയതിനാൽ ഒന്നാമത്തേത് X നു മേൽ Y യുടെതും രണ്ടാമത്തെത് Y നു മേൽ X ന്റേതുമായ സമാശ്രയ സമവാക്യങ്ങളാണ്.

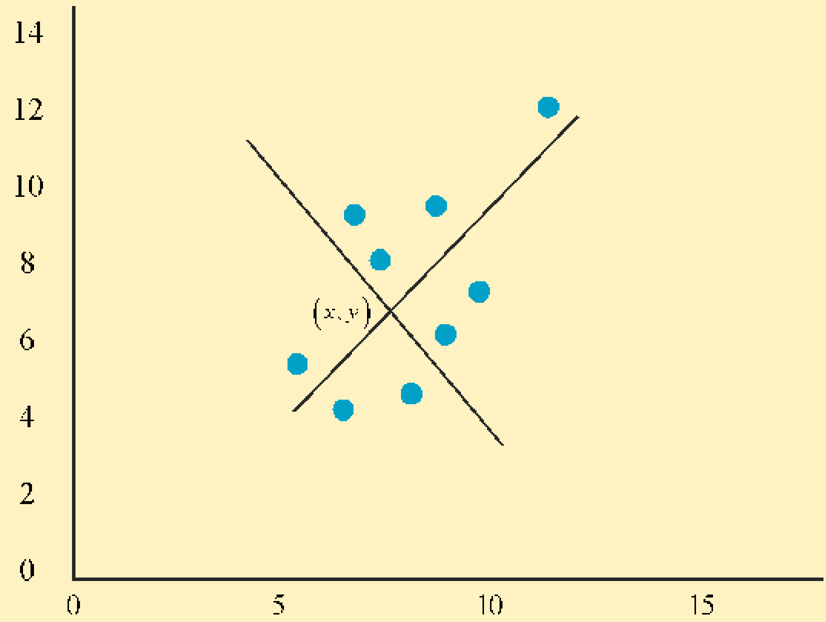


നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

50 പേരുള്ള ഒരു കൂട്ടം ആളുകളുടെ വയസ്സും (X) രക്തസമ്മർദ്ധവും (Y) തമ്മിലുള്ള സമാശ്രയ സമവാക്യങ്ങൾ $3y - 5x + 180 = 0$, $4x + 10y + 100 = 0$ എന്നിവയാണ്. സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

രണ്ട് സമാശ്രയ രേഖകളുടെ കൂട്ടിമുട്ടൽ ബിന്ദു

രണ്ട് സമാശ്രയരേഖകൾ ചിത്രത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്നത് പോലെ $(\bar{x}, \bar{y})$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ പരസ്പരം കുട്ടി മുട്ടുന്നു.



ചിത്രം 2.3

$r = 1$, ആയാൽ രണ്ട് സമാശ്രയ രേഖകൾ ഒറ്റ രേഖയായി മാറുന്നു.

$r = 0$, ആയാൽ രണ്ട് സമാശ്രയ രേഖകൾ പരസ്പര ലംബങ്ങളാകുന്നു

വിശദീകരണം 2.4

20 പ്രാപ്തങ്കങ്ങളുടെ (observations) സമാശ്രയ വിശകലനത്തിലെ രണ്ട് സമാശ്രയ രേഖകൾ $10y + 7x - 4 = 0$, $5x + 9y - 1 = 0$ എന്നിവയാണ്.

a) സമാശ്രയ രേഖകൾ തിരിച്ചറിയുക.

b) സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം കണ്ട് പിടിക്കുക.

c) X, Y എന്നിവയുടെ മാധ്യം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

a) $10y+7x-4=0$........(1)

$5x+9y-1=0$.........(2)

ഒന്നാമത്തെ സമവാക്യം Y നു മേൽ X ന്റെ സമാശ്രയ സമവാക്യവും രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യം X നു മേൽ Y യുടേതുമാണെന്ന് അനുമാനിക്കുക.

(1) ⇨ $7x=-10y+4$. $b_{xy}=-\frac{10}{7}$

(2) ⇨ $9y=-5x+1$. $b_{yx}=-\frac{5}{9}$

$$b_{xy}\times b_{yx}=-\frac{10}{7}\times-\frac{5}{9}$$

$$=0.79<1.$$

∴ നമ്മുടെ അനുമാനം ശരിയാണെന്ന് കിട്ടുന്നു.

Y നു മേൽ X ന്റെ സമാശ്രയ സമവാക്യം $5x+9y-1=0$

X നു മേൽ Y യുടെ സമാശ്രയ സമവാക്യം $10y+7x-4=0$

b) $r=\pm\sqrt{b_{xy}\times b_{yx}}=\pm\sqrt{-\frac{10}{7}\times-\frac{5}{9}}$

$$=\pm\sqrt{0.79}=\pm 0.89$$

b_{yx}, b_{xy} എന്നി നെഗറ്റിവ് ആയതിനാൽ $r=-0.89$

c) രണ്ട് സമാശ്രയ രേഖകൾ $(\overline{X},\overline{Y})$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നതിനാൽ. രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളുടെ പൊതുവായ ബിന്ദുവാണ് $(\overline{X},\overline{Y})$.

$$7\overline{x}+10\overline{y}=4 \text{ ....(1)}$$

$$5\overline{x}+9\overline{y}=1 \text{ ....(2)}$$

$(1)\times 5\rightarrow \quad 35\overline{x}+50\overline{y}=20$ ....(3)

$(2)\times 7\rightarrow \quad 35\overline{x}+63\overline{y}=7$ ....(4)

(3) - (4) $\rightarrow \quad 13\overline{y}=-13$

$$\therefore \overline{y}=-1$$

$\bar{y} = -1$ എന്നാൽ ഒന്നാമത്തെ സമവാക്യത്തൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$7\bar{x}+10\times{}^{-}1=4$$

$$7\bar{x} - 10 = 4$$

$$7\bar{x} = 10 + 4$$

$$\bar{x} = \frac{14}{7} = 2$$

x ന്റെ മാധ്യം $= 2$

y യുടെ മാധ്യം $= {}^{-}1$

സഹബന്ധവും സമാശ്രയവും തമ്മിലുള്ള താരതമ്യം

	സമാശ്രയത്വം	സഹബന്ധം
1.	സമാശ്രയത്വം അസമമിതമാണ്	സഹബന്ധം സമമിതമാണ്
2.	ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള കാര്യകാരണ ബന്ധമാണ് സമാശ്രയത്വം	ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ചേർന്ന് പോകലാണ് സഹബന്ധം
3.	ഇത് പ്രവചനത്തിന് ഉപയോഗിക്കുന്നു	ഇത് പ്രവചനത്തിന് ഉപയോഗിക്കുന്നില്ല.
4.	ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ പ്രകൃതത്തിന്റെ പഠനമാണ്	ബന്ധത്തിന്റെ ശക്തിയുടെ പഠനമാണ്
5.	തുടർഗണിത പ്രക്രിയകൾക്ക് ഉപയോഗിക്കുന്നു.	തുടർ ഗണിത പ്രക്രിയകൾക്ക് ഉപയോഗിക്കുന്നില്ല.
6.	സമാശ്രയത്വം പ്രതിക്രിയാപരമല്ല	സഹബന്ധം പ്രതിക്രിയപരമാണ്.

നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

സമാശ്രയ വിശകലനത്തിന്റെ ആശയവും പ്രാധാന്യവുമാണ് നാം ഈ അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്തത്. സമാശ്രയ വിശകലനം പ്രവചനത്തിനും ഭാവിവിലകൾ നിർണ്ണയിക്കുന്നതിനും വ്യാപകമായി ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്നു. സ്വതന്ത്ര ചരത്തിന്റെ സറിരവിലകൾക്ക് ആശ്രിത ചരത്തിന്റെ വിലകളുടെ മാറ്റം എങ്ങനെയെന്ന് മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് സമാശ്രയ അറിവ് നമ്മെ സഹായിക്കുന്നു. രണ്ട് സമാശ്രയ രേഖകളും അവയുടെ പ്രാധാന്യവും നാം ചർച്ച ചെയ്തു. സഹബന്ധവും സ്വാശ്രയത്വവും തമ്മിലുള്ള താരതമ്യത്തിലൂടെ ഇവയുടെ സ്വഭാവ സവിശേഷതകൾ മനസ്സിലാക്കുന്നു.

ലാബ് പ്രവർത്തനം

(1) എട്ട് മുതിർന്ന ആളുകളുടടെ ശരീരഭാരവും (കിലോഗ്രാമിൽ) അവരുടെ രക്തത്തിലെ ഗ്ലൂക്കോസിന്റെ അളവും (മി.ഗ്രാം/100 മി.ലി) തന്നിരിക്കുന്നു.

ഭാരം	64	75	73	82	76	95	76	82
ഗ്ലൂക്കോസ്	108	109	104	102	105	121	99	100

(a) രേഖീയ സമാശ്രയ സമവാക്യങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക.

(b) 95 കി.ഗ്രാം ശരീരഭാരമുള്ള ഒരാളുടെ ഗ്ലൂക്കോസ് നില പ്രവചിക്കുക.

2 ഏഴ് സ്കൂൾ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ശരീരഭാരവും BMI യും തന്നിരിക്കുന്നു.

ഭാരം (കി.ഗ്രാം)	15.0	26.0	27.0	25.0	25.5	27.0	32.0
BMI:	13.35	16.12	16.74	16.00	13.59	15.73	15.65

(a) ശരീര ഭാരത്തിനനുസരിച്ചുള്ള BMI യുടെ സമാശ്രയ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(b) ശരീര ഭാരം 40 കി.ഗ്രാം. ആവുമ്പോഴുള്ള BMI കണക്കാക്കുക.

നമുക്ക് വിലയിരുത്താം

ഒന്നു മുതൽ 10 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് തന്നിട്ടുള്ള ഉത്തരങ്ങളിൽ നിന്ന് ശരിയായത് തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

1. $b_{yx} \geq 1$ ആയാൽ b_{xy} ………… ആകുന്നു.

   a) ഒന്നിൽ കുറവ് b) ഒന്നിൽ കൂടുതൽ c) 1 d) -1

2. സമാശ്രയം എന്ന പദം അവതരിപ്പിച്ചത് ……… ആണ്.

   a) R A ഫിഷർ b) സർ ഫ്രാൻസിസ് ഗാൽട്ടൻ

   c) കാൾ പിയേഴ്സൺ d) ഇവരില്ലാരുമല്ല

3. X, Y എന്നി രണ്ട് ചരങ്ങൾക്കുണ്ടാകാവുന്ന സമാശ്രയ രേഖകളുടെ പരമാവധി എണ്ണം ………… ആകുന്നു.

   a) ഒന്ന് b) രണ്ട് c) മൂന്ന് d) അനന്തം

4. X, Y എന്നി ചരങ്ങളുടെ സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം നെഗറ്റീവ് ആയാൽ X ന് മേൽ Y യുടെ സമാശ്രയ ഗുണാങ്കം ……………… ആയിരിക്കും.

   a) പോസിറ്റീവ് b) നെഗറ്റീവ് c) പൂജ്യം d) കൃത്യമല്ല.

5. X ന് മേൽ Y യുടെ സമാശ്രയ രേഖയിൽ, X ചരം അറിയപ്പെടുന്നത് .... എന്നാണ്.

a) സ്വതന്ത്ര ചരം　　b) റിഗ്രസ്സർ

c) വിശദീകരിക്കപ്പെട്ട ചരം　　c) ഇവയെല്ലാം

6. b_{yx}, b_{xy} എന്നീ സമാശ്രയ ഗുണാങ്കങ്ങളുടെ ജ്യാമിതീയ മാധ്യം .... ന് തുല്യമാണ്.

a) r　　b) r^2　　c) 1　　d) ഇവയിലൊന്നുമല്ല.

7. താഴെതന്നിരിക്കുന്നവയിൽ സമാശ്രയ ഗുണാങ്കങ്ങൾ ആകാവുന്ന ക്രമജോടി ഏത്?

a) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$　　b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$　　c) $\left(2, \frac{3}{2}\right)$　　d) (2, 3)

8. $2x+3y-5=0$ എന്നത് Y യുടെ മേൽ X ന്റെ സമാശ്രയ സമവാക്യമായാൽ b_{xy} =........... ആകുന്നു.

a) $\frac{3}{2}$　　b) $\frac{2}{3}$　　c) $\frac{-2}{3}$　　d) $\frac{-3}{2}$

9. Let $b_{yx}=-0.5$ ഉം $b_{xy}=-0.3$ ആയാൽ സഹബന്ധ ഗുണാങ്കത്തിന്റെ വില =............. ആകുന്നു.

a) –0.15　　b) 0.15　　c) 0.39　　d) –0.39

10. X ചരത്തിന്റെ തന്നിരിക്കുന്ന വിലകൾക്ക് Y വില കണക്കാക്കുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന സമാശ്രയ സമവാക്യം .... ആകുന്നു.

a) X നു മേൽ Y യുടെ　　b) Y നു മേൽ X ന്റെ

c) രണ്ടും　　d) ഇത് രണ്ടുമല്ല.

11. ഒരു പ്രദേശത്തെ ഡ്രൈവർമാരുടെ വയസ്സും (X) കഴിഞ്ഞ 7 മാസം അവരുൾപ്പെട്ട വാഹന അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണവു (Y) മായി ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റയാണ് തന്നിരിക്കുന്നത്.

a) അനുയോജ്യമായ സമാശ്രയ സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുക

b) ഈ സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് 20 വയസ്സുള്ള ഒരാൾ ഉൾപ്പെടുന്ന വാഹന അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കുക.

ഡ്രൈവർമാരുടെ വയസ്സ് (X)	19	21	30	45	50	54	25
വാഹനാപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം (Y)	50	52	40	22	10	14	35

12. ഒരു പ്രത്യേക ഉൽപന്നത്തിന്റെ വിലയുടെയും വില്പനയുടെയും ഡാറ്റ തന്നിരിക്കുന്നു.

വില	20	25	50	15	25	30	20	17
വില്പന	15	11	10	30	15	17	20	12

സമാശ്രയ തന്ത്രം ഉപയോഗിച്ച് ഉല്പന്നത്തിന്റെ വില 40 രൂപ ആകുമ്പോൾ വില്പന എന്തെന്ന് കണ്ടെത്തുക.

13. ഒരു കൂട്ടം രോഗികളുടെ പ്രതിദിന വ്യായാമ സമയവും (X) (മിനിട്ടിൽ) രക്തസമ്മർദ്ധവു (Y) മായി ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റയാണു തന്നിരിക്കുന്നത്.

	X	Y
മാധ്യം	60	100
മാനകവ്യതിയാനം	20	15

സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം = –0.81

a. അനുയോജ്യമായ സമാശ്രയ രേഖയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

b. ദിവസേന 70 മിനുട്ട് വ്യായാമം ചെയ്യുന്ന ഒരു വ്യക്തിയുടെ രക്തസമ്മർദ്ധം എത്രയെന്ന് കണക്കാക്കുക.

14. ഒരു നഗരത്തിലെ 10 പ്രധാന കടകളിലെ പരസ്യ ചെലവും (X) വില്പനയുമായി (Y) ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റയാണ് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത്.

	പരസ്യ ചെലവ് (ലക്ഷത്തിൽ)	വില്പന (ലക്ഷത്തിൽ)
മാധ്യം	10	15
മാനക വ്യതിയാനം	5	3

സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം = 0.65

a) പരസ്യ ചെലവ് 13 ലക്ഷമായാൽ വില്പന കണക്കാക്കുക.

b) വില്പന 20 ലക്ഷമാണെങ്കിൽ പരസ്യ ചെലവ് കണക്കാക്കുക.

15. ബോംബെ ഓഹരി വിപണിയിലെ 12 ഓഹരികളുടടെ ഒരു പ്രത്യേക ദിവസത്തെ വിലയും (X) അവയുടെ വില്പനയു (Y) മായി ബന്ധപ്പെട്ട കണക്കുകളാണ് താഴെ തന്നിരിക്കുന്നത്. ഇതിൽ നിന്നും ഓഹരി വില്പനയുടെ മേൽ വിലയുടെ സമാശ്രയ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

$$\sum x = 580,\ \sum y = 370,\ \sum xy = 11494,\ \sum x^2 = 41658,\ \sum y^2 = 17206$$

16. സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലെ സ്കോറും (X) അക്കൗണ്ടൻസിയിലെ സ്കോറും (Y) തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെകുറിച്ച് പഠിക്കുമ്പോൾ ലഭിച്ച സമാശ്രയ സമവാക്യങ്ങളാണ് താഴെ തന്നിരിക്കുന്നത്.

X നു മേൽ Y യുടെ സമാശ്രയ സമവാക്യം: $3y - 2x - 100 = 0$

Y നു മേൽ X ന്റെ സമാശ്രയ സമവാക്യം: $4y - 3x + 50 = 0$

a) സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം കണ്ടു പടിക്കുക.

b) അക്കൗണ്ടൻസിയിൽ 50 സ്കോർ ലഭിക്കുന്ന കുട്ടിയുടെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലെ സ്കോർ കണക്കാക്കുക.

17. തന്നിരിക്കുന്ന സമാശ്രയ സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും X, Y ചരങ്ങളുടെ മാധ്യങ്ങൾ കാണുക.

X നു മേൽ Y യുടെ സമാശ്രയ സമവാക്യം: $2y - x = 50$

Y നു മേൽ X ന്റെ സമാശ്രയ സമവാക്യം : $3y - 2x = 10$

18. ഒരു കൂട്ടം സാധനങ്ങളുടെ ചോദനവും (X) ലഭ്യത (Y) യും പഠന വിധേയമാക്കിയപ്പോൾ ലഭിച്ച സമാശ്രയ സമവാക്യങ്ങളാണ് തന്നിരിക്കുന്നത്.

$26 - 3x - 2y = 0$

$31 - 6x - y = 0$

a) സമാശ്രയ രേഖകൾ തിരിച്ചറിയുക. സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

b) X, Y ചരങ്ങളുടെ മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

19. സമാശ്രയ രേഖകളുടെ ഒരു പഠനത്തിൽ, X നു മേൽ Y യുടെ സമാശ്രയ ഗുണാങ്കം = 0.75, സഹബന്ധഗുണാങ്കം =0.5, Y യുടെ മാനക വ്യതിയാനം= 4. എന്ന് കിട്ടുന്നു X ന്റെ മാനക വ്യതിയാനം കണ്ടുപിടിക്കുക.

20. ഒരു സമാശ്രയ പഠനത്തിൽ Y യുടെ മേൽ X ന്റെ സമാശ്രയ ഗുണാങ്കം $= \frac{3}{5}$, Y യുടെ വ്യതിയാനം =30, സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം= $\frac{5}{6}$ ആയാൽ X ന്റെ വ്യതിയാനം കാണുക?

21. സർക്കാർ ജീവനക്കാരുടെ വരുമാന നികുതിയുടെയും (X) (ആയിരത്തിൽ) അവരുടെ വാർഷിക വരുമാന (Y) (ലക്ഷത്തിൽ) ത്തിന്റെയും സമാശ്രയ വിശകലനത്തിൽ താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സമാശ്രയ സമവാക്യങ്ങളാണ് ലഭിച്ചത്.

$25x - 10y + 10 = 0$

$10y - 7x - 100 = 0$

a) സമാശ്രയ രേഖകൾ തിരിച്ചറിയുക. സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

b) X, Y ചരങ്ങളുടെ മാധ്യം കാണുക.

c) X ന്റെ വ്യതിയാനം =36 ആണെങ്കിൽ Y യുടെ വ്യതിയാനം കണ്ടുപിടിക്കുക.

22. വരുമാനത്തിന്റെയും (ആയിരത്തിൽ) (Y) ചെലവിന്റെയും (ആയിരത്തിൽ) (X) സമാശ്രയ വിശകലനത്തിൽ കിട്ടിയ സമാശ്രയ സമവാക്യങ്ങൾ ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

$x - y - 3 = 0$, $5x - 8y + 15 = 0$

a) സമാശ്രയ രേഖകൾ തിരിച്ചറിയുക.

b) വരുമാനവും ചെലവും തമ്മിലുള്ള സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം എന്ത്?

c) $\overline{X}$, $\overline{Y}$ എന്നിവയുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

d) ചെലവ് 2000 രൂപ ആണെങ്കിൽ വരുമാനത്തിന്റെ ഏറ്റവും സാധ്യമായ വില എന്ത്?

23. രണ്ട് സമാശ്രയ രേഖകൾ $4x - 5y + 10 = 0$, $20x - 9y - 75 = 0$ എന്നിവ ആയാൽ

a) Y നു മേൽ X ന്റെ സമാശ്രയ രേഖ ഇവയിലേതാണ്?

b) സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം കാണുക?

c) X ന്റെ മാനക വ്യതിയാനം = 5 ആണെങ്കിൽ Y യുടെ മാനക വ്യതിയാനം കണ്ടുപിടിക്കുക.

24. രണ്ട് ചരങ്ങളുടെ സമാശ്രയ രേഖകളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ $2x - 3y = 0$ ഉം $4y - 5x - 7 = 0$ ഉം എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു.

a) ഇതിൽ ഏതാണ് X നു മേൽ Y യുടേത് എന്നും Y നുമേൽ X ന്റേത് എന്നും കണ്ടുപിടിക്കുക.

b) സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുക.

c) X ന്റെയും Y യുടെയും മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

അധ്യായം 3

Y9I8Y8

പ്രാഥമിക കലനം (Elementary Calculus)

ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിലെ ഒരു പ്രധാന ശാഖയാണ് കലനം (Calculus). ഇതിന് രണ്ട് ഭാഗങ്ങളുണ്ട്.

1) അവകലനം (Differentiation)

2) സമാകലനം (Integration)

സാംഖ്യക വിശകലനത്തിന് സഹായകമാവുന്ന പ്രാഥമിക കലനത്തെക്കുറിച്ചാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം പഠിക്കുന്നത്. X എന്ന ചരത്തിൽ ഉണ്ടാവുന്ന മാറ്റങ്ങൾക്കനുസൃതമായി Y എന്ന ചരത്തിൽ മാറ്റം വരുന്ന രീതിയിലുള്ള രണ്ട് ചരങ്ങളാണ് X, Y എന്നിവ. X ഉം Y ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം $Y = f(X)$ എന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാം. ഇവിടെ X സ്വതന്ത്ര ചരവും Y ആശ്രിത ചരവുമാണ്.

സവിശേഷ പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായത്തിന്റെ പൂർത്തീകരണത്തിന് ശേഷം പഠിതാവ്:

- ഒരു ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം, രംഗം എന്നിവ തിരിച്ചറിയുന്നു.
- അവകലനം എന്ന ആശയം വിവരിക്കുന്നു.
- ഒന്നാം അവകലനം, രണ്ടാം അവകലനം എന്നീ ആശയങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.
- സമാകലനം എന്ന ആശയം വിവരിക്കുന്നു.
- അനുയോജ്യമായ സന്ദർഭങ്ങളിൽ നിശ്ചിത സമാകലനം ഉപയോഗിക്കുന്നു.
- സമാകലന ആശയം സാംഖ്യകത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

X ന് സ്വീകരിക്കാവുന്ന വിലകളുടെ കൂട്ടത്തിന് മണ്ഡലം (Domain) എന്നും X ന്റെ വിലകൾക്കനുസരിച്ച് Y യ്ക്ക് ലഭിക്കുന്ന വിലകളുടെ കൂട്ടത്തിന് രംഗം (Range) എന്നു പറയുന്നു.

X ഉം Y ഉം തമ്മിലുള്ള, Y=2X+3 എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ X സ്വതന്ത്രചരവും Y ആശ്രിതചരവുമാണ്. (അതായത് Y യുടെ വിലകളെ X ന്റെ വിലകൾ സ്വാധീനിക്കുന്നു). X,Y എന്നിവക്ക് $(-\infty,+\infty)$ എന്ന പരിധിയിലെ വിലകൾ സ്വീകരിക്കാം. ഒരു ഉല്പന്നത്തിന്റെ വിതരണം S കൊണ്ടും വില p കൊണ്ടും സൂചിപ്പിച്ചാൽ S=5+2p എന്ന വിതരണ ഏകദം പരിഗണിക്കുക. വില നെഗറ്റീവ് ആവില്ല എന്നതിനാൽ ഇതിന്റെ മണ്ഡലം പോസിറ്റീവ് രേഖീയ സംഖ്യകളുടെ ഗണം ആണ് അതായത് $p \ge 0$. ഇതിന്റെ രംഗം നെഗറ്റീവ് അല്ലാത്ത വിലകളാണ്. D എന്നത് ഒരു ഉല്പന്നത്തിന്റെ ചോദനവും (demand), p എന്നത് അതിന്റെ വിലയും ആയ D=12 - 3p എന്ന ചോദന സമവാക്യത്തിൽ വില സ്വതന്ത്രചരവും ചോദനം വിലയുടെ ആശ്രിത ചരവുമാണ്. ഇവിടെ പൂജ്യം മുതൽ 4 വരെയുള്ള വിലകൾ p സ്വീകരിക്കുന്നു. p>4 ആയാൽ ചോദനം നെഗറ്റീവ് ആകുന്നു. ഇത് സാധ്യമല്ല. അതുകൊണ്ട് ഇവിടെ മണ്ഡലം ($0 \le p \le 4$) ആണ്. p=0 ആകുമ്പോൾ ചോദനം, D=12 ഉം p=4 ആകുമ്പോൾ ചോദനം, D=0 വും ആകുന്നു. അത്കൊണ്ട് രംഗം ($0 \le D \le 12$) ആകുന്നു.

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളിൽ സ്വതന്ത്ര ചരം ആശ്രിതചരം എന്നിവ തിരിച്ചറിയുക.
(i) X = 3Y + 8 (ii) S = D - 2p (iii) Y = 6X - 9 (iv) $K = Z + \frac{1}{3}$. ഈ ഏകദങ്ങളുടെ മണ്ഡലവും രംഗവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

3.1 ഒരു ഏകദത്തിന്റെ അവകലന മൂല്യം (Derivative of a function)

X ഉം Y ഉം ചരങ്ങളായതിനാൽ സ്വതന്ത്ര ചരത്തിലെ മാറ്റങ്ങൾക്കനുസരിച്ച് ഏകദത്തിന്റെ വിലകളിലുണ്ടാവുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടതുണ്ട്. സ്വതന്ത്ര ചരത്തിന്റെ മാറ്റങ്ങൾക്കനുസരിച്ച് ഏകദത്തിന്റെ വിലകളിലുണ്ടാവുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെയാണ് അവകലന മൂല്യം (derivative) എന്ന് വിളിക്കുന്നത്. അവകലന മൂല്യം കാണുന്ന പ്രക്രിയയെ അവകലനം എന്ന് പറയുന്നു.

$Y = 3X + 5$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. X ന്റെ ചില വിലകൾക്ക് Y യ്ക്ക് സ്വീകരിക്കാവുന്ന വിലകൾ താഴെ പറയും പ്രകാരമാണ്.

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	-1	2	5	8	11	14

X ന്റെ വില 1 യൂണിറ്റ് വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ Y യുടെ വില '3' യൂണിറ്റ് വർദ്ധിക്കുന്നു. X ൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം Δx എന്നും Y യുൽ ഉണ്ടാവുന്ന മാറ്റം Δy എന്നും സൂചിപ്പിച്ചാൽ X ലെ മാറ്റത്തിനനുസരിച്ചുള്ള Y ലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം ഇവിടെ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$

ആണ്. സ്വതന്ത്രചരത്തിലെ മാറ്റം വേറിട്ട യുണിറ്റിലാവുമ്പോൾ Δx ന്റെ വില പൂജ്യത്തിലേക്ക് സമീപിക്കുന്ന നിലയിലുള്ള $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ന്റെ പരിധി (limit) യെ ആണ് അവകലന മൂല്യം എന്നിറയപ്പെടുന്നത്. മുകളിലത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ $y = 3x + 5$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ അവകലന മൂല്യം 3 ആകുന്നു. x ആപേക്ഷികമായ y യുടെ അവകലന മൂല്യം $\frac{dy}{dx}$ അല്ലെങ്കിൽ y' അല്ലെങ്കിൽ $f'(x)$ എന്നിങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാം.

$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. ഇത് സ്വതന്ത്ര ചരമായ x ന് അപേക്ഷികമായുള്ള y യുടെ അവകലന വില അഥവാ അവകലന മൂല്യം ആകുന്നു.

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

താഴെതന്നിരിക്കുന്നവയുടെ അവകലന മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $y = 5 - 3x$
2. $y = 8x$
3. $y = \frac{x}{5} + 2$
4. $y = 3 - 0.6x$

അടിസ്ഥാന സമവാക്യങ്ങൾ (Standard formulac)

ഏകദം	അവകലന മൂല്യം $\frac{dy}{dx}$
K, ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ	0 (പൂജ്യം)
x	1 (ഒന്ന്)
x^n	nx^{n-1}
$kf(x)$	$k\frac{df(x)}{dx}$
$f \pm g$	$\frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$

(f , g എന്നിവ x ന്റെ ഏകദങ്ങൾ)

വിശദീകരണം 3.1

$y = x^{-6}$ ന്റെ അവകലന മൂല്യം കാണുക

പരിഹാരം

$$\frac{dy}{dx} = -6\times x^{(-6-1)} = -6x^{-7}$$

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ അവകലന മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $y = x^{10}$ 2. $y = 2x^{5}$ 3. $y = x^{4} + 3x$

കുറിപ്പ്: $R(x)$ വരുമാന ഏകദം (*revenue function*) ആയാൽ $\frac{dR(x)}{dx}$ പാർശ്വവരുമാന ഏകദം (*Marginal Revenue (MR)*) എന്നറിയപ്പെടുന്നു. $C(x)$ ചെലവ് ഏകദം (*cost function*) ആയാൽ $\frac{dC(x)}{dx}$ പാർശ്വ ചെലവ് ഏകദം (*Marginal Cost (MC)*) എന്നറിയപ്പെടുന്നു. $P(x)$ ലാഭ ഏകദം (*profit function*) ആയാൽ $\frac{dP(x)}{dx}$ പാർശ്വലാഭ ഏകദം (*Marginal Profit (MP)*) എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

3.2 രണ്ടാം നിര അവകലന മൂല്യം (Second Order Derivative)

$y = f(x)$, ആയാൽ $\frac{dy}{dx}$ എന്നത് x ആധാരമാക്കിയുള്ള y യുടെ അവകലന മൂല്യം ആണ്. $\frac{dy}{dx}$ നെ ഒന്നാം നിര അവകലന മൂല്യം എന്നും പറയുന്നു. $\frac{dy}{dx}$ നെ വീണ്ടും അവകലനം നടത്തുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഫലത്തെ $\frac{d^2y}{dx^2}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. ഇതിനെ രണ്ടാം നിര അവകലന മൂല്യം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

വിശദീകരണം

വിശദീകരണം 3.2

1. $y = x^3 + x + 2$, ആയാൽ $\frac{d^2y}{dx^2}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3x^2+1) = 6x$$

വിശദീകരണം 3.3

If $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x$, ആയാൽ രണ്ടാം നിര അവകലന മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 6x + 2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(12x^2 - 6x + 2) = 24x - 6$$

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $y = 3x^2 - 26x + 111$ (ii) $y = x^2 - 3x$

(iii) $y = 4x^3 - 3x^{3} + 6$ (iv) $y = 4x^2 - 24x + 9$

3.3 രണ്ടാം നിര അവകലന മൂല്യങ്ങളുടെ ഉപയോഗം

ഒരു ഏകദത്തിന്റെ ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയും കണ്ടുപിടിക്കാൻ രണ്ടാം നിര അവകലന മൂല്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

y $f(x)$ ഒരു ഏകദമാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

താഴെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന വ്യവസ്ഥകൾ ശരിയാവുന്ന ബിന്ദുവിൽ ഒരു ഏകദം അതിന്റെ ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയിലെത്തുന്നു.

1. $\frac{dy}{dx} = 0$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

അതേപോലെ താഴെ പറയുന്ന പ്രത്യേകതകൾ ശരിയാവുന്ന ബിന്ദുവിൽ ഒരു ഏകദം അതിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയിലെത്തുന്നു.

1. $\frac{dy}{dx} = 0$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

വിശദീകരണം 3.4

$f(x) = x^3 - 27x + 3$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയും കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$y = x^3 - 27x + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 27x + 3)$$

$$= (3x^2 - 27)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$3x^2 = 27$$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = -3$ അല്ലെങ്കിൽ $x = +3$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

തരം (1) $x = -3$, ആവുമ്പോൾ $\frac{d^2y}{dx^2} = 6 \times -3 = -18 < 0$

അത് കൊണ്ട് ഈ ഏകദം $x = -3$ എന്ന വിലയിൽ ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയിലെത്തുന്നു.

$x = -3$ ആയാൽ

$$f(x) = (-3)^2 - 27 \times (-3) + 3 = -27 + 81 + 3 = 57$$

അതായത് ഏകദത്തിന്റെ ഏറ്റവും വലിയ വില 57 ആകുന്നു.

തരം (2) $x = +3$ ആയാൽ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6 \times +3 = +18 > 0$$

അത്കൊണ്ട് ഈ ഏകദം $x = +3$ എന്ന വിലയിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയിലെത്തുന്നു.

$x = +3$ ആയാൽ

$$f(x) = (3)^3 - 27 \times 3 + 3 = 27 - 81 + 3 = -51$$

$\therefore f(x)$ ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞവില = - 51

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയും കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $f(x)=2x^3-3x+5$ ii) $f(x)=x^3-5x+14$

3.4 സമാകലനം (Integration)

ഒരു ഏകദത്തിന്റെ അവകലനം അറിയാമെങ്കിൽ ആ ഏകദം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതിയാണ് സമാകലനം (integration). ചില നിശ്ചിത വ്യവസ്ഥകളിൽ ഒരു ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് പരിധിയുടെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ഇത് ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഗണിത ശാസ്ത്ര സാഹചര്യങ്ങളിലും സംഭാവ്യതയിലും ഇത് ഉപയോഗിക്കുന്നു.

f (x) എന്ന ഏകദത്തിന്റെ സമാകലന മൂല്യം $\int f(x)dx$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)+c$, (c സമാകലനത്തിന്റെ സ്ഥിരസംഖ്യ) ആവുന്ന തരത്തിലുള്ള F(x) എന്ന ഏകദമാണ് ഇത്.

ചില ഏകദങ്ങളും അവയുടെ അവകലന മൂല്യങ്ങളും സമാകലന മൂല്യങ്ങളും കാണിക്കുന്ന പട്ടിക ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഏകദം	അവകലന മൂല്യം $\frac{dy}{dx}$	സമാകലന മൂല്യം
k, ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ	0 (പൂജ്യം)	$\int 0dx = k+c$
kx	k	$\int k\,dx = kx+c$
x	1 (One)	$\int dx = x+c$
$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	x^n	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$ax+c$	a	$\int a\,dx = ax+c$
ax^2+bx+c	$2ax+b$	$\int (2ax+b)dx = ax^2+bx+c$

വിശദീകരണം 3.5

$\int x^2dx$ കണ്ടുപിടിക്കുക

പരിഹാരം: $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+c$

വിശദീകരണം 3.6

$\int (6x - 2x^2)dx$ കണ്ടുപിടിക്കുക

പരിഹാരം

$$\int (6x - 2x^2)dx = \int 6x\,dx - \int 2x^2\,dx = \frac{6x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + c$$

$$= 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + c$$

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

(1) $\int x^6\,dx$ (2) $\int (x^3 + 4)dx$

(3) $\int (1 - 3x)\,dx$ (4) $\int (x^4 - 2x + 3)dx$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക

കുറിപ്പ്: പാർശ്വവരുമാന ഏകദം MR ആയാൽ വരുമാന ഏകദം, $R(x) = \int MR\,dx$,

പാർശ്വ ചെലവ് ഏകദം MC ആയാൽ ചെലവ് ഏകദം, $C(x) = \int MC\,dx$,

പാർശ്വലാഭ ഏകദം MP ആയാൽ ലാഭ ഏകദം, $P(x) = \int MP\,dx$ ആയിരിക്കും.

വിശദീകരണം 3.7

ഉല്പന്നങ്ങളുടെ എണ്ണം x ഉം പാർശ്വ ചെലവ് $5x^2 - 6x + 8$ ആണെങ്കിൽ ആകെ ചെലവ് ഏകദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ആകെ ചെലവ്, TC = $\int$ (പാർശ്വ ചെലവ്) dx

$$\text{TC} = \int (5x^2 - 6x + 8)dx$$

$$= \int 5x^2\,dx - \int 6x\,dx + \int 8\,dx$$

$$= \frac{5x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 8x + c = \frac{5x^3}{3} + 3x^2 + 8x + c$$

വിശദീകരണം 3.8

വില്പന നടന്ന ഇനങ്ങളുടെ എണ്ണം p യും പാർശ്വവരുമാന ഏകദം $16p+9$ ഉം ആയാൽ ആകെ വരുമാന ഏകദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ആകെ വരുമാനം, TR $= \int MR\,dp$

$$TR = \int (16p+9)\,dp = \frac{16p^2}{2} + 9p + c = 8p^2 + 9p + c$$

3.5 നിശ്ചിത സമാകലനം (Definite Integrals)

അവകലനം ഉപയോഗിക്കുന്നതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രശ്നങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് നിശ്ചിത സമാകലനം ഉപയോഗിക്കുന്നു. സംഭാവ്യതയിലേയും ഗണിത സാംഖ്യകത്തിലേയും പ്രശ്ന നിർദ്ധാരണത്തിന് ഇത് ഉപയോഗിക്കുന്നു. ചില വ്യവസ്ഥകളിൽ ഒരു ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ഉൾക്കൊള്ളുന്ന തലത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് നിശ്ചിത സമാകലനം ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഈ നിശ്ചിത സമാകലനത്തിന് നിശ്ചിത വിലകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും, $y = f(x)$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ വക്രത്തിന്റെ പരപ്പളവ് പരിഗണിക്കുക.

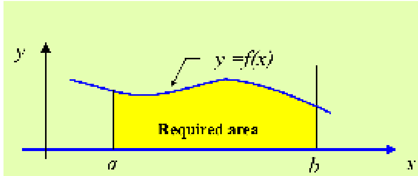


Fig. 3.1

$x=a$ എന്ന ബിന്ദു മുതൽ $x=b$ എന്ന ബിന്ദുവരെയുള്ള $y = f(x)$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ $\int_a^b f(x)\,dx$ എന്ന നിശ്ചിത സമാകലനം കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കാം. ഇവിടെ f(x) എന്നത് വക്രത്തിന്റെ ഏകദ രൂപവും ഇതിന്റെ താഴ്ന്നപരിധി a യും ഉയർന്നപരിധി b യും ആണ്.

വിശദീകരണം 3.9

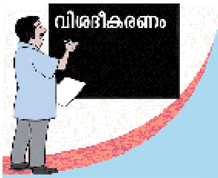
$\int_1^{10} 3x^2\,dx$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\int_1^{10} 3x^2\,dx = \left[3 \times \frac{x^3}{3}\right]_1^{10}$$ (സമാകലനം ചെയ്യുന്നു)

$$= \left[x^3\right]_1^{10}$$

$$= 10^3 - 1^3 = 1000 - 1 = 999$$



വിശദീകരണം 3.10

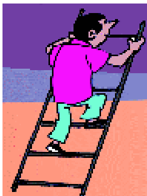
$\int_0^1 (x^2 - x)dx$ ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\int_0^1 (x^2 - x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)_0^1$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - 0 = -\frac{1}{6}$$

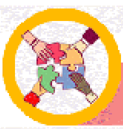


നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

താഴെ പറയുന്നവ കണക്കാക്കുക

(1) $\int_1^2 x^3 dx$ (2) $\int_{-1}^1 x dx$

(3) $\int_2^2 3x^2 dx$ (4) $\int_1^2 (x^2 - 2x + 1)dx$



നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

ഈ അധ്യായത്തിൽ ഒരു ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം, രംഗം എന്നിവ പരിചയപ്പെട്ടു. അവകലനത്തിന്റെയും സമാകലനത്തിന്റെയും അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ നാം ചർച്ച ചെയ്തു. ഒരു സ്വതന്ത്ര ചരത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ഒരു ആശ്രിതചരത്തിലുണ്ടാവുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ അനുപാതം കണ്ടെത്തുന്ന പ്രക്രിയയാണ് അവകലനം. അവകലനത്തിന്റെ പ്രതിക്രിയ ആയി സമാകലനത്തെ കണക്കാക്കാം. അവകലനമൂല്യങ്ങളും സമാകലന മൂല്യങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതികളും ചിലപ്രധാന ഫലങ്ങളും നാം ചർച്ച ചെയ്തു. നിശ്ചിത സമാകലനം എന്ന ആശയവും നാം വിശദീകരിച്ചു.

നമുക്ക് വിലയിരുത്താം

ചോദ്യം 1 മുതൽ 10 വരെ തന്നിരിക്കുന്ന ഉത്തരങ്ങളിൽ നിന്നും ശരിയുത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

1. $\dfrac{d(x^8)}{dx} = \ldots\ldots\ldots$

   a) x^9 b) $8x^7$ c) $\dfrac{x^9}{9}$ d) $\dfrac{x^7}{8}$

2. x^{10} ന്റെ അവകലനമൂല്യം kx^9 ആയാൽ k യുടെ വില .... ആണ്.

   a) 10 b) 9 c) 0 d) 1

3. $\dfrac{d}{dx}(8x+10) = \ldots\ldots\ldots$

   a) 0 b) 8 c) 18 d) 10

4. $\dfrac{1}{x^3}$ ന്റെ സമാകലന മൂല്യം .... ആണ്.

   a) $-3x^{-4}$ b) $3x^2$ c) $-0.5x^{-2}$ d) x^2

5. $\int_0^1 x^2 dx = \ldots\ldots\ldots$

   a) 1 b) 2 c) 0 d) $\dfrac{1}{3}$

6. $\int x^n dx = \dfrac{x^4}{4}$, ആയാൽ n ന്റെ വില .... ആണ്.

   a) 4 b) 3 c) 0 d) 5

7. അവകലന മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

   a) $y = x^5$ b) $y = x^2 + 5x + 8$ c) $y = x^3 + 7x^2 + 10x + 6$

   d) $y = 8x - 10x^2$ e) $y = 10 - 2x$ f) $y = ax + b$

   g) $(x-a)(x+a)$ h) x^{3}

8. താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ രണ്ടാം നിര അവകലന മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

   a) $y = 20x^3$ b) $y = 4x^3 - 20x^2 + 5x - 9$

   c) $y = (x+2)(x^2+3x+5)$

9. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയും അവ ഉണ്ടെങ്കിൽ കാണുക.

a) $y = x^3 - 12x$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

c) $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$ d) $f(x) = (x-1)(x-2)$

e) $f(x) = 2x^3 - 24x + 107$

10. ഒരു കമ്പനിയുടെ മൊത്ത വരുമാന ഏകദം $R(x) = 22x - x^2$, (വില്പനയുടെ എണ്ണം x) ആയാൽ പാരശ്വവരുമാന ഏകദം കണ്ടുപിക്കുക.

11. x എണ്ണം സാധനങ്ങളുടെ നിർമാണ ചെലവ് $c(x) = 2x^2 - 16x + 10$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു. കുറഞ്ഞ ചെലവിൽ ഉൽപാദനം നടത്തുന്നതിന് എത്രഎണ്ണം സാധനങ്ങൾ ഉൽപാദിപ്പിക്കണം എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

12. ലാഭ ഏകദം $p(x) = 500 - 72x + 4x^2$ ആയാൽ ഒരു കമ്പനിക്ക് ലഭിക്കാവുന്ന ഏറ്റവും കൂടിയ ലാഭം എത്രയെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

13. താഴെതന്നിരിക്കുന്നവ സമാകലനം ചെയ്യുക.

a) x^8 b) x^{24} c) x^{-12}

d) $\frac{1}{x^5}$ e) $3x^2 + 5x - 2$ f) $25x^4 - 16x^3 + 10$

g) $4x^5 + 3x^{-1} + 7$

14. താഴെ തന്നിരിക്കുന്നത് കണ്ടുപിടിക്കുക.

a) $\int_1^3 x^2 dx$ b) $\int_1^2 (4x^3 - 3x^2 + 6x + 9) dx$

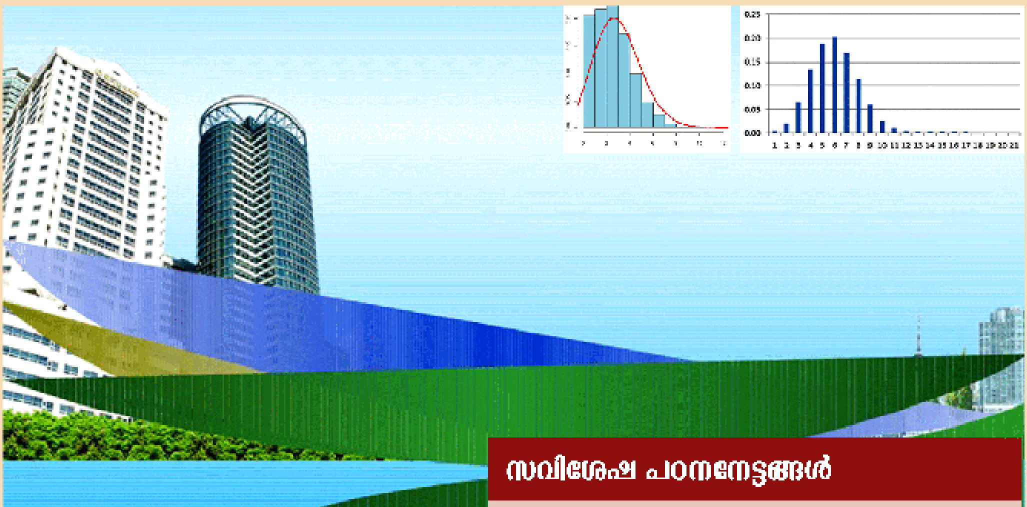
c) $\int_0^8 x^{\frac{5}{3}} dx$ d) $\int_{-1}^1 (x+1) dx$

15. ഉല്പന്നങ്ങളുടെ എണ്ണം x ഉം പാർശ്വ ലാഭം $4 - 6x$ ഉം ആയാൽ ലാഭ ഏകദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

16. ABC കമ്പനിയുടെ ലാഭ ഏകദം $p(x) = 2x - \frac{x^2}{400} - 75$ ആണ് (ഉല്പന്നങ്ങളുടെ എണ്ണം x ആണെങ്കിൽ) കമ്പനിക്ക് ഉണ്ടാക്കാവുന്ന ഏറ്റവും കൂടിയ ലാഭം കണ്ടുപിടിക്കുക.

അധ്യായം 4

അനിയത ചരങ്ങൾ
(Random Variables)



മുൻ വർഷം നമ്മൾ അനിയത ഫല പരീക്ഷണങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിച്ചുവല്ലോ. രണ്ടു നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയം കറക്കുന്നതായി കരുതുക. ഈ പരീക്ഷണവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട സാമ്പിൾ മേഖലയിൽ 4 സാമ്പിൾ ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ട്- HH, HT, TH, TT എന്നിവ. X എന്നത് വാൽ (Tail) എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ X ന് സ്വീകരിക്കാവുന്ന വിലകൾ 0, 1, 2 എന്നിവയാണ്.

X=0 : സാമ്പിൾ ബിന്ദു HH ആകുമ്പോൾ

X=1: സാമ്പിൾ ബിന്ദു HT അഥവാ TH ആകുമ്പോൾ

X=2: സാമ്പിൾ ബിന്ദു TT.

സവിശേഷ പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പൂർത്തീകരിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ പഠിതാവ്

- അനിയതചരത്തിന്റെ പ്രാധാന്യം തിരിച്ചറിയുന്നു
- തുടർ ചരവും വേറിട്ട ചരവും തമ്മിൽ വേർതിരിച്ചറിയുന്നു
- തുടർ സംഭാവ്യതാ വിതരണവും വേറിട്ട സംഭാവ്യതാ വിതരണവും തിരിച്ചറിയുന്നു.
- അനിയചരങ്ങളുടെ ഗണിത പ്രതീക്ഷ വിശദീകരിക്കുന്നു.
- അനിയതചരത്തിന്റെ മാധ്യം, വ്യതിയാനം ഇവ കണക്കാക്കുന്നു.

നാം ഇതേ പരീക്ഷണം 50 അല്ലെങ്കിൽ 100 നാണയങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് നടത്തുമ്പോൾ പ്രക്രിയ വളരെ ബുദ്ധിമുട്ടുള്ളതാകുന്നു. സാമ്പിൾതലം കൂടുതൽ സൗകര്യപ്രദമാക്കുവാൻ X എന്ന ചരത്തെ കൊണ്ടുവരുന്നു. ഇതിനെയാണ് അനിയതചരം എന്നു പറയുന്നത്. ഇതിന്റെ വിലകൾ അനിയത ഫല പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഫലങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. X നെ ഒരു ഏകദമായി കരുതാം. മണ്ഡലം സാമ്പിൾതലവും രംഗം $\{0,1,2\}$ ഉം ആകുന്നു. ഈ അധ്യായത്തിൽ അനിയതചരങ്ങളുടെ സവിശേഷതകളും, പ്രായോഗികതയും നാം പഠിക്കുന്നു.

4.1. അനിയതചരം (Random Variable)

സാമ്പിൾ തലത്തിൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള രേഖീയ സംഖ്യകൾ വിലകളായി സ്വീകരിക്കുന്ന ഏകദമാണ് അനിയത ചരം. അനിയത ചരങ്ങളുടെ വ്യത്യസ്ത വിലകൾക്ക് വ്യത്യസ്ത സംഭാവ്യതകൾ നൽകാൻ സാധിക്കും.

ഒരു അനിയത ഫല പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഫലത്തിനനുസരിച്ച് ചരത്തിന്റെ വിലകൾ നിർണയിക്കപ്പെടുമ്പോൾ ആ ചരത്തെ അനിയത ചരം എന്നു പറയുന്നു. ഇത് രേഖീയ സംഖ്യകൾ മാത്രം വിലകളായി സ്വീകരിക്കുന്ന സാമ്പിൾ തലത്തിൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു ഏകദമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം :

ഒരു വ്യക്തിയുടെ ഉയരം, ഒരു ടെലഫോൺ മേൽവിലാസ പട്ടികയിലെ തെറ്റുകളുടെ എണ്ണം, ഇന്നത്തെ താപനില, കുട്ടികളുടെ പരീക്ഷയുടെ സ്കോറുകൾ മുതലായവ.

സാധാരണയായി ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ വലിയ അക്ഷരങ്ങളാണ് അനിയതചരത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നതിനായി ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

അനിയതചരങ്ങൾ രണ്ടു തരത്തിലുണ്ട്.

1) വേറിട്ട അനിയതചരം (Discrete random variable)

2) തുടർ അനിയതചരം (Continuous random variable)

അവയെ നമുക്ക് വിശദമായി ചർച്ച ചെയ്യാം

4.2. വേറിട്ട അനിയതചരം (Discrete Random Variable)

താഴെപറയുന്ന അനിയതചരങ്ങളെ പരിഗണിക്കുക.

1. ഒരു കുടുംബത്തിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം.
2. ഒരു മാസം ഒരു കേന്ദ്രത്തിൽ ലഭിക്കുന്ന ഫോൺവിളികളുടെ എണ്ണം.

ആദ്യത്തെ സന്ദർഭത്തിൽ അനിയതചരത്തിന്റെ സാധ്യതാവിലകൾ എണ്ണിതിട്ടപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്. രണ്ടാമത്തെ സന്ദർഭത്തിൽ സാധ്യതാവിലകൾ എണ്ണിത്തിട്ടപ്പെടുത്താൻ സാധിക്കത്തക്കവിധം അനന്തമാണ് ഈ രണ്ട് അവസരങ്ങളിലെയും അനിയതചരങ്ങളെ വേറിട്ട അനിയത ചരം എന്നു വിളിക്കുന്നു.

അനിയത വേറിട്ട ചരങ്ങൾ വേറിട്ട ചരങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണങ്ങൾ :

- ഒരു ജില്ലയിലെ വീടുകളുടെ എണ്ണം.
- ഒരു സ്കൂളിലെ ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം.
- ഒരു ദിവസം ഒരു വിമാനകമ്പനിയിൽ ലഭിക്കുന്ന പരാതികളുടെ എണ്ണം.
- ഒരു മണിക്കൂറിൽ ഒരു ബാങ്കിൽ സന്ദർശിക്കുന്ന ഇടപാടുകാരുടെ എണ്ണം.

ഇപ്പറഞ്ഞ എല്ലാ ഉദാഹരണങ്ങളിലും അനിയതചരത്തിന്റെ രംഗത്തിൽ നിശ്ചിത എണ്ണം അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു. അല്ലെങ്കിൽ അവയെ എണ്ണിതിട്ടപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്. അതിനാൽ അവ വേറിട്ട അനിയതചരങ്ങളാണ്.

ഉദാഹരണം 1 :
ഒരു നാണയം എറിയുന്നു. X എന്നത് ലഭിക്കുന്ന തല (Head) കളുടെ എണ്ണമാണെന്ന് ഇരിക്കട്ടെ.

തല	വാൽ
X = 1	X = 0

X എന്നത് **1, 0** എന്നീ വിലകൾ സ്വീകരിക്കുന്നു

H, T എന്നീ ഓരോ സാമ്പിൾ ബിന്ദുക്കൾക്കും, താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ X ന് ഒരു വില നൽകാവുന്നതാണ്.

സാമ്പിൾ ബിന്ദുക്കൾ	T	H
X	0	1

X എന്നത് ഒരു വേറിട്ട അനിയത ചരമാകുന്നു

ഉദാഹരണം 2 : ഒരു നാണയം രണ്ടു തവണ എറിയുന്നു. ഈ പരീക്ഷണത്തിന് 4 സാധ്യതാഫലങ്ങൾ ഉണ്ട്. HH, HT, TH, TT . X എന്ന അനിയതചരം, തലകളുടെ (head) എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ.

Xന് 0, 1, 2 എന്നീ വിലകൾ സ്വീകരിക്കാവുന്നതാണ്. അതുകൊണ്ട് ഇത് ഒരു വേറിട്ട അനിയത ചരമാണ്.

സാമ്പിൾ ബിന്ദുക്കൾ	TT	HT	TH	HH
X	0	1	1	2

ഉദാഹരണം 3 : 3 നാണയങ്ങൾ എറിയുന്നു എന്നു കരുതുക.

സാമ്പിൾതലം = { HHH, HHT, HTH, THH, TTT, TTH, THT, HTT }

X; 0, 1, 2, 3 എന്നീ വിലകൾ സ്വീകരിക്കുന്നു.

X = "തലകളുടെ എണ്ണം" ഒരു അനിയതചരമാണ്.

ഇവിടെ '0' തല (എല്ലാ നാണയങ്ങളുടെയും വാൽ ഭാഗം വീണാൽ)

1 തല, 2 തലകൾ അഥവാ 2 തലകൾ സംഭവിക്കാം.

മൂന്ന് നാണയങ്ങൾ സാധ്യമായ 8 രീതികളിൽ പതിക്കാവുന്നതാണ്.

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടിക പരിശോധിക്കുക

സാമ്പിൾ ബിന്ദുക്കൾ :	HHH	HHT	HTH	THH	TTH	THT	HTT	TTT
X :	3	2	2	2	1	1	1	0

X എന്നത് ഒരു വേറിട്ട അനിയതചരമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 4 : ഒരു പകിട രണ്ടുതവണ എറിയുന്നു. X എന്നത് പകിടയുടെ മുഖത്ത് വരുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുകയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. X ന് 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ,11, 12 എന്നീ വിലകൾ സ്വീകരിക്കാം.

അതിനാൽ X എന്നത് വേറിട്ട അനിയതചരമാണ്.

ഉദാഹരണം 5 : X എന്നത് ഒരു നാണയം തല കിട്ടുന്നതുവരെ എറിയുന്ന എണ്ണമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. X = {1, 2, 3, 4, 5, ...} എന്നതായിരിക്കും. ഇവിടെ ചരത്തിന്റെ വിലകൾ എണ്ണിത്തിട്ടപ്പെടുത്താൻ കഴിയാത്ത വിധം അനന്തമാണ്. X ഒരു വേറിട്ട അനിയത ചരമാണ്.

X, Y എന്നിവ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു അനിയത ചരങ്ങളും, 'a' , 'b' എന്നിവ രണ്ടു സ്ഥിരസംഖ്യകളും ആയാൽ $X + a$, aX, $X + Y$, XY, $\frac{1}{X}$, $X - Y$, $aX + bY$ എന്നിവ അനിയത ചരങ്ങളാണ്.

4.3 സംഭാവ്യത ഘനത്വ ഏകദം (Probability Mass Function)

$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ എന്നീ വ്യത്യസ്ത വിലകൾ സ്വീകരിക്കുന്ന ഒരു വേറിട്ട അനിയതചരമാണ് X എന്നിരിക്കട്ടെ. അവയുടെ സംഭാവ്യതകൾ യഥാക്രമം $p(x_1), p(x_2), p(x_3), p(x_4) \ldots$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നാൽ

i) ഓരോ സംഭാവ്യതയും ഒരു നെഗറ്റീവല്ലാത്ത സംഖ്യയാണ്., $p(x) \geq 0$

ii) എല്ലാ സംഭാവ്യതകളുടെയും ആകെ തുക ഒന്നാണ്., $\sum p(x) = 1$

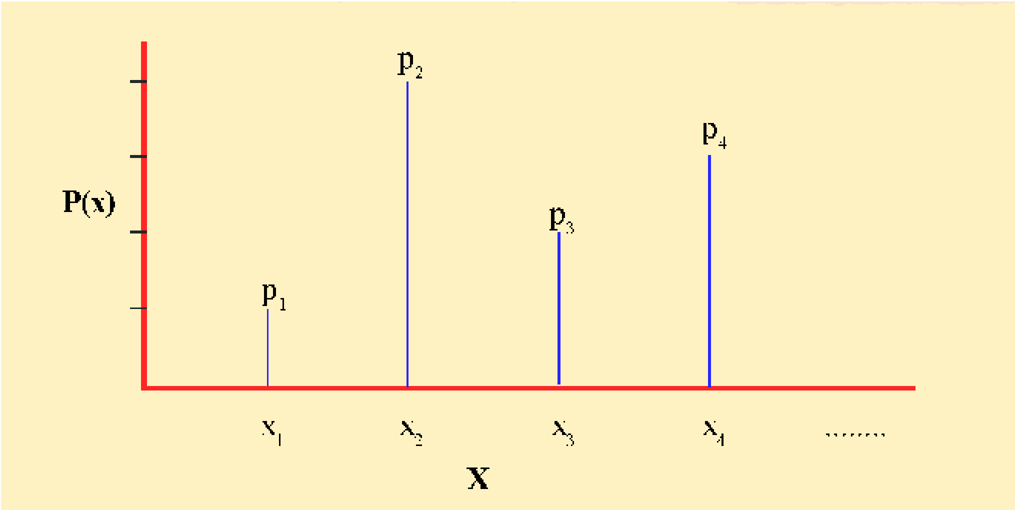
X ന്റെ വിലകളുടെയും അവയുടെ സംഭാവ്യതകളുടെയും ക്രമീകരണത്തെയും അനിയത ചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യത വിതരണം എന്ന് പറയുന്നു.

X	x_1	x_2	x_3	x_4	....	Total
P(x)	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	$p(x_4)$	....	1

ഒരു വേറിട്ട അനിയതചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യത ഏകദം P(X=x) ആകുന്നു.

അതായത്, $P(X = x) = P(x)$

സംഭാവ്യതാ വിതരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 4.1

pmf ന്റെ സവിശേഷതകൾ

1) $p(x) \geq 0$; xന്റെ എല്ലാ വിലകൾക്കും

2) $\sum p(x) = 1$.

3) $P(a < X < c) = P(a < X \leq b) + P(b < X < c)$ (b എന്ന വില a യുടെയും c യുടെയും ഇടയിൽ ആണ്.)

4) $P(x_1 + x_2) = P(x_1) + P(x_2)$.

ഉദാഹരണം 6 : രണ്ടു നാണയങ്ങൾ എറിയുന്നത് പരിഗണിക്കുക. തല കിട്ടുന്ന (head) എണ്ണമാണ് X എന്നിരിക്കട്ടെ

സാമ്പിൾ ബിന്ദുക്കൾ	TT	HT	TH	HH
X	0	1	1	2

$$P(X = 0) = P(TT) = 1/4$$

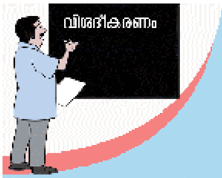
$$P(X = 1) = P(HT, TH) = 2/4$$

$$P(X = 2) = P(HH) = 1/4$$

X = x	0	1	2
P(X = x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

x എന്നത് X ന്റെ വിലകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഇവിടെ $p(x) \geq 0$ എന്നിങ്ങനെയാണ് $\sum p(x) = 1$



വിശദീകരണം 4.1

താഴെ പറയുന്ന വിതരണം ഒരു സംഭാവ്യതാവിതരണം ആണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. അല്ലെങ്കിൽ കാരണം വ്യക്തമാക്കുക.

x	3	7	9	12	14
P(x)	$\frac{4}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$

പരിഹാരം :

ഇവിടെ $p(x)\geq 0$ എല്ലാ x വിലകൾക്കും കൂടാതെ $\sum p(x)=1$ ആകുന്നു. ആയതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള ഏകദം ഒരു സംഭാവ്യത വിതരണം ആണ്.

വിശദീകരണം 4.2

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് ഒരു വേറിട്ട അനിയത ചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യതാവിതരണമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

x	1	2	3	4	5
P(x)	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{3}{12}$

പരിഹാരം :

ഇവിടെ $p(x)\geq 0$ (x ന്റെ എല്ലാ വിലകൾക്കും) എന്നാൽ $\sum p(x)=\frac{14}{12}\neq 1$, അതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഏകദം ഒരു സംഭാവ്യത വിതരണം അല്ല.

വിശദീകരണം 4.3

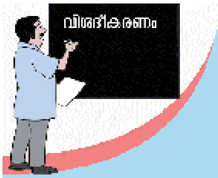
ഒരു പകിട ഒരു തവണ എറിയുന്നു. കറങ്ങിവരുന്ന മുഖത്തുള്ള സംഖ്യയുടെ സംഭാവ്യത വിതരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം :

കറങ്ങി വരുന്ന മുഖത്തുള്ള സംഖ്യയെ X പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. X എന്ന ചരം 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നീ വിലകൾ, ഓരോന്നും $\frac{1}{6}$ സംഭാവ്യതയോടുകൂടി സ്വീകരിക്കുന്നു. X ന്റെ സംഭാവവ്യതാവിതരണം

x	1	2	3	4	5	6
P(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ഇവിടെ $p(x)\geq 0, \sum p(x)=1$. തന്നിട്ടുള്ള ഏകദം സംഭാവ്യത വിതരണം ആകുന്നു.



വിശദീകരണം 4.4

ഒരു അനിയതചരമായ X ന്റെ സംഭാവ്യതാഘനത്വ ഏകദം.

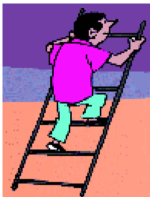
$f(x) = \frac{2x}{k}$; x = 1, 2, 3. ആകുന്നു. k യുടെ വില കാണുക

പരിഹാരം :

X	1	2	3
P(X = x)	$\frac{2}{k}$	$\frac{4}{k}$	$\frac{6}{k}$

f(x) ഒരു സംഭാവ്യതാഘനത്വ ഏകദമായതിനാൽ $p(x) \geq 0$, $\sum p(x) = 1$.

i.e., $\frac{2}{k} + \frac{4}{k} + \frac{6}{k} = 1 \Rightarrow \frac{12}{k} = 1 \Rightarrow k = 12.$



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. താഴെ പറയുന്നവ ഒരു സംഭാവ്യത വിതരണമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. അല്ലെങ്കിൽ കാരണം എഴുതുക.

a)

x	4	6	8	10
P(x)	-0.6	0.2	0.7	1.5

b)

x	1	2	3	4
P(x)	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

c)

x	1	3	5	17
P(x)	0.3	0.1	0.2	0.4

d)

x	5	10	15
P(x)	0.3	0.4	0.2

2. X എന്ന അനിയത ചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യത വിതരണം ചുവടെ തന്ന പ്രകാരം ആയാൽ k യുടെ വില കാണുക

x	4	8	12	16
P(x)	$\frac{1}{6}$	K	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

3. X എന്ന വേറിട്ട അനിയതചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യത വിതരണം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

x	0	1	2	3
P(x)	0.1	0.3	K	0.4

a) K യുടെ വില കാണുക

b) $P(X < 3)$ കാണുക

c) $P(1 < X < 3)$ കാണുക

4. $P(x) = \frac{x}{12}$, $x = 2,4,6$

$= 0$, x ന്റെ മറ്റ് വിലകൾക്ക്

എന്നത് ഒരു സംഭാവ്യത വിതരണം ആയാൽ ചുവടെ പറയുന്നവ കാണുക.

a) $P(X = 2)$

b) $P(X < 6)$

c) $P(X = 2$ അല്ലെങ്കിൽ $3)$

4.4 സഞ്ചിത വിതരണ ഏകദം (Cumulative Distribution Function)

ഒരു അനിയത ചരത്തിന്റെ പ്രത്യേക വിലവരെയുള്ള സംഭാവ്യതയാണ് സഞ്ചിത വിതരണ ഏകദം.

ഒരു വേറിട്ട അനിയത ചരത്തിന്റെ സഞ്ചിതവിതരണ ഏകദം, F(x) നെ നിർവചിക്കുന്നത്.

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{-\infty}^{x} P(x)$$ എന്നാണ്.

അവിടെ P(x) എന്നത് *pmf* ആണ്

ഇതിനെ വിതരണ ഏകദം എന്നു കൂടി പറയുന്നു. കാരണം ഇത് ഒരു അനിയത ചരത്തിന്റെ സഞ്ചിതസംഭാവ്യത നൽകുന്നു.

വിതരണ ഏകദത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

1. $F(x) \ge 0$
2. F(x) കുറഞ്ഞു വരുന്നില്ല
3. F(x) ന് വലതു ഭാഗത്തേക്ക് തുടർച്ച ഉണ്ടാകും
4. $F(-\infty) = 0$ and $F(\infty) = 1$.
5. $P(a < x \le b) = F(b) - F(a)$.
6. F(x) ന്റെ ഗ്രാഫ് പടികളുടെ രൂപത്തിലാണ്

ഉദാഹരണം 7

രണ്ടു നാണയങ്ങൾ എറിയുന്നതായി കരുതുക. സംഭാവ്യതാവിതരണം :

X=x	0	1	2
P(X=x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$P(X=x) = p(x), F(x) = P(X \le x)$

$$F(0) = P(X \le 0) = P(0) = \frac{1}{4}$$

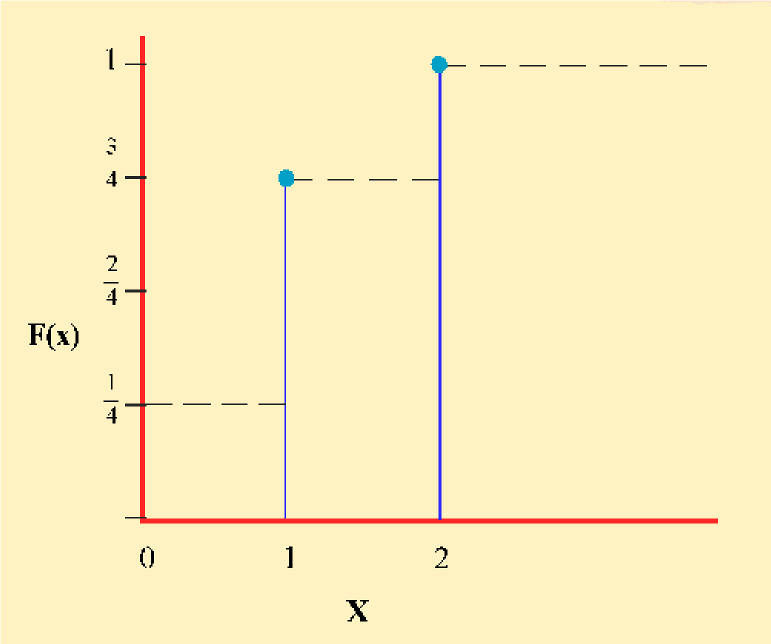
$$F(1) = P(X \le 1) = P(0) + P(1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$F(2) = P(X \le 2) = P(0) + P(1) + P(2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

X ന്റെ വിതരണ ഏകദം താഴെകൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

X	0	1	2
F(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}=1$

*F(x)*ന്റെ ഗ്രാഫ് ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.



വിശദീകരണം 4.5

X എന്ന അനിയത ചരം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിലകൾ സ്വീകരിക്കുന്നു. സഞ്ചിത വിതരണ ഏകദം, $F(x)$ കാണുക.

X	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1

പരിഹാരം :

X	$P(x)$	$F(x)$
0	0.1	0.1
1	0.2	0.3
2	0.3	0.6
3	0.2	0.8
4	0.1	0.9
5	0.1	1

ഉദാഹരണം 4.6

3 അംഗങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു കുടുംബത്തിലെ ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ സംഭാവ്യതാവിതരണം കാണുക. (ആൺകുട്ടികൾക്കും പെൺകുട്ടികൾക്കും ഉള്ള സംഭാവ്യത തുല്യമാണ്.)

പരിഹാരം :

ഒരു കുട്ടി ആൺ/പെൺ ആകുവാനുള്ള സാധ്യത $= \frac{1}{2}$.

(i) എല്ലാം ആൺകുട്ടികൾ

$$P(BBB) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

(ii) രണ്ടു ആൺകുട്ടികൾ ഒരു പെൺകുട്ടി

$$P(BBG + BGB + GBB) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

iii) രണ്ടു പെൺകുട്ടികൾ ഒരു ആൺകുട്ടി

$$P(GGB + GBG + BGG) = \frac{3}{8}$$

(iv) എല്ലാം പെൺകുട്ടികൾ

$$P(GGG) = \frac{1}{8}$$

അതുകൊണ്ട് സംഭാവ്യതാവിതരണം

ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം (x)	0	1	2	3
P(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

4.5 ഗണിതപ്രതീക്ഷ, മാധ്യം, വ്യതിയാനം (Mathematical Expectation, Mean, Variance)

X എന്ന അനിയത ചരം, യഥാക്രമം $x_1, x_2, x_3, \ldots$ എന്നി വിലകൾ സ്വീകരിക്കുകയും അവയുടെ സംഭാവ്യതകൾ യഥാക്രമം $p_1, p_2, p_3, \ldots$ എന്നിവയും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നാൽ X ന്റെ ഗണിതപ്രതീക്ഷ E(X)എന്നത്,

$$E(X) = \Sigma x P(x)$$

E(X) നെ അനിയതചരമായ X ന്റെ മാധ്യം എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഇത് എല്ലാ അനിയത ചരങ്ങൾക്കും ഉണ്ടാകണമെന്നില്ല.

E(X) ന്റെ സവിശേഷതകൾ

X ഒരു അനിയത ചരവും a, b എന്നിവ സ്ഥിരസംഖ്യകളുമായാൽ,

i) $E(a) = a$

ii) $E(aX) = aE(X)$

iii) $E(X + b) = E(X) + b$

iv) $E(aX + b) = aE(X) + b$

v) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$ X ഉം Y യും അനിയത ചരങ്ങളാണ്.

അനിയത ചരത്തിന്റെ വ്യതിയാനം

X എന്ന് അനിയത ചരത്തിന്റെയും അതിന്റെ ഗണിതപ്രതീക്ഷയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ ഗണിത പ്രതിക്ഷയാണ് വ്യതിയാനം.

$$V(X) = E[X - E(X)]^2$$

അതായത്,

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$

വ്യതിയാനത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

X എന്നത് ഒരു അനിയതചരത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. 'a', 'b' എന്നിവ രണ്ടു സ്ഥിരസംഖ്യകളും ആകുന്നുവെങ്കിൽ :

i) $V(a) = 0$ ii) $V(aX) = a^2V(X)$

iii) $V(aX + b) = a^2V(X)$ iv) $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$ ഇവിടെ X ,Y എന്നിവ രണ്ടു സ്വതന്ത്ര അനിയത ചരങ്ങൾ ആണ്.

വിശദീകരണം 4.7

രണ്ടു നാണയങ്ങൾ കറക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന തല (head) കളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ പ്രതീക്ഷിത വില കണക്കാക്കുക.

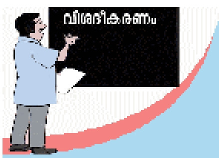
പരിഹാരം :

സാമ്പിൾ തലം = {TT, TH, HT, HH}

X എന്നത് ലഭിക്കുന്ന തലകളുടെ എണ്ണമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നാൽ X ന് 0, 1, 2 എന്നീ വിലകൾ സ്വീകരിക്കാം.

X=x	0	1	2
P(X=x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

ഗണിതപ്രതീക്ഷ $E(X) = \sum x\ P(x) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$



വിശദീകരണം 4.8

ഒരു പകിട എറിയുമ്പോൾ ലഭിക്കാവുന്ന സംഖ്യയുടെ മാധ്യം കണക്കാക്കുക.

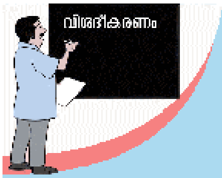
പരിഹാരം :

ഒരു പകിട എറിയുമ്പോൾ ലഭിക്കാവുന്ന സംഖ്യയെ X എന്ന ചരം കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നാൽ X ന് 1, 2 3, 4, 5, 6 എന്നീ വിലകൾ സ്വീകരിക്കാം. അതിന്റെ pmf ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \Sigma x P(x)$$

$$= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$



വിശദീകരണം 4.9

മൂന്നു നാണയങ്ങൾ കറക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കാവുന്ന തലകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ (ഒരേ നാണയം മൂന്നു തവണ എറിയുന്നതായാലും മതി) ഗണിത പ്രതീക്ഷ കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം :

സാമ്പിൾ മേഖല = { HHH,HHT,HTH,THH,TTT,TTH,THT,HTT }

X എന്നത് 3 നാണയങ്ങൾ എറിയുമ്പോൾ ലഭിക്കാവുന്ന തലകളുടെ എണ്ണത്തിനെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന അനിയത ചരമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നാൽ X ന് 0, 1, 2, 3 എന്നീ വിലകൾ സ്വീകരിക്കാം. .

X = X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = \Sigma xP(x) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = 1.5$$

വിശദീകരണം 4.10

1, 2, 3 എന്നീ വിലകൾ സങ്കൽപ്പിക്കുന്ന ഒരു അനിയതചരമാണ് X. അതിന്റെ pmf

$$p(x) = \frac{x}{6},\ x = 1, 2, 3$$

$= 0$, X ന്റെ മറ്റ് വിലകൾക്ക്

എങ്കിൽ i) E (X) ii) V(X) ഇവ കാണുകക.

പരിഹാരം :

X = X	1	2	3
P(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

$$E(X) = \Sigma xP(x) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{2}{6} + 3 \times \frac{3}{6} = \frac{14}{6} = 2.33$$

$$E(X^2) = \Sigma x^2 P(x) = 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{2}{6} + 9 \times \frac{3}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 6 - 5.43 = 0.57$$

വിശദീകരണം 4.11

ഒരു പകിട 3 തവണ എറിയുമ്പോൾ ലഭിക്കാവുന്ന '6'കളുടെ സംഭാവ്യ താവിതരണം കാണുക. കൂടാതെ അതിന്റെ മാധ്യവും, വ്യതിയാനവും കണക്കാക്കുക

പരിഹാരം :

X എന്നത് ഒരു പകിട 3 തവണ എറിയുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന 6 കളെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യണം എന്നു കരുതുക. എങ്കിൽ X ന് സ്വീകരിക്കാവുന്ന വിലകൾ 0,1,2,3 എന്നിവയാണ്.

സാമ്പിൾ മേഖലയിലെ ആകെ ബിന്ദുക്കൾ $= 6^3 = 216$

P (എല്ലാം 6 കിട്ടുന്നത്) $= P(X=3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

P (രണ്ടു 6 കിട്ടുന്നത്) $= P(X=2) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}\right) \times 3 = \frac{15}{216}$

P (ഒരു 6 കിട്ടുന്നത്) $= P(X=1) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}\right) \times 3 = \frac{75}{216}$

P (പൂജ്യം 6 കിട്ടുന്നത്) $= P(X=0) = \left(\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}\right) = \frac{125}{216}$

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$$E(X) = \Sigma x P(x) = 0 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{75}{216} + 2 \times \frac{15}{216} + 3 \times \frac{1}{216} = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{5}{12}$$

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. X എന്നത് 1,2,3,4 എന്നീ വിലകൾ സങ്കൽപ്പിക്കുന്നു. അതിന്റെ pmf ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിധമാണ്

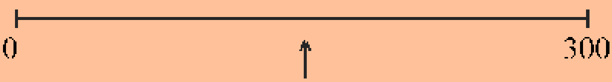
$$P(x) = \begin{cases} \frac{x}{10}, & x = 1, 2, 3, 4 \\ 0, & x\text{ന്റെ മറ്റ് വിലകൾക്ക്} \end{cases}$$

E(X), V(X), F(x) എന്നിവ കാണുക.

2. Y എന്നത് രണ്ട് പകിടങ്ങൾ ഒരേ സമയം എറിയുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന 6 കളുടെ എണ്ണത്തെ (ഒരേ പകിട രണ്ടു തവണ എറിയുമ്പോൾ) സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ Y യുടെ സംഭാവ്യതാവിതരണം കണ്ടു പിടിക്കുക. ഗ്രാഫു വരയ്ക്കുക.
3. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 4 വെള്ളയും 6 ചുവന്നതുമായ പന്തുകൾ ഉണ്ട്. 4 പന്തുകൾ യാദൃശ്ചികമായി സഞ്ചിയിൽ നിന്നും എടുത്തു. വെളുത്ത പന്തുകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ സംഭാവ്യതാവിതരണം കണ്ടു പിടിക്കുക.

4.6 തുടർ അനിയത ചരം (Continuous Random Variable)

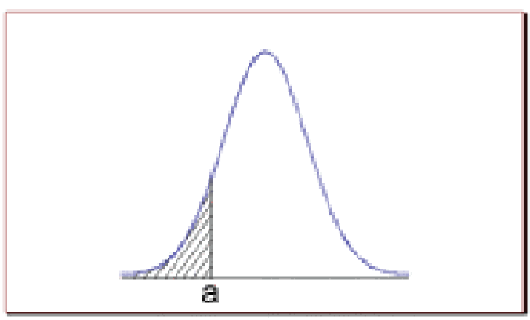
ഒരു ബാറ്ററിയുടെ ആയുർദൈർഘ്യം കണക്കിലെടുക്കുക. അതിനെ നമുക്ക് ആവശ്യാനുസരണം കൃത്യതയോടെ അളക്കുവാൻ സാധിക്കും എന്നു കരുതുക. അത് 40 മണിക്കൂറോ, 40.25 മണിക്കൂറോ 40.349 മണിക്കൂറോ ആകാം. ബാറ്ററിയുടെ പരമാവധി ആയുർദൈർഘ്യം 300 മണിക്കൂറാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക. ഇത്തരത്തിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു ബാറ്ററിയുടെ ആയുർദൈർഘ്യമാണ് X എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ X ന് 0 ത്തിനും 300 നും ഇടയിലുള്ള ഏതു വിലയും സ്വീകരിക്കാം. അപ്പോൾ X എന്നത് ഒരു തുടർ ചരമായി. താഴെ ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രകാരം X ന് $(0, 300)$ എന്ന ഇടവേളയെ പ്രതിനിധികരിക്കുന്ന രേഖയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെ വിലയും സ്വീകരിക്കാം.



ഈ രേഖയിലെ ഓരോ ബിന്ദുവും X ന്റെ സാധ്യമായ വിലകളെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു. ഈ വരയിൽ അനന്തമായ ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ട്. ഈ വിലകൾ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന രേഖയിലെ ബിന്ദുക്കൾ എണ്ണിത്തിട്ടപ്പെടുത്താൻ സാധിക്കാത്തവിധത്തിലാണ്.

ഒന്നോ അതിലധികമോ ഇടവേളകളിലെ ഏതുവിലയും സ്വീകരിക്കുന്ന അനിയത ചരത്തെ **തുടർ അനിയതചരം** എന്നു പറയുന്നു.

അളന്നു തിട്ടപ്പെടുത്തുവാൻ സാധിക്കുന്ന ഡാറ്റയിൽ നിന്നുമാണ്, എണ്ണിത്തിട്ടപ്പെടുത്തുവാൻ കഴിയുന്ന ഡാറ്റയേക്കാൾ എളുപ്പത്തിൽ തുടർ അനിയത ചരങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നത്. അവയ്ക്ക് അനന്തമായ വിലകളും ഭിന്നവിലകളും സ്വീകരിക്കാം. ഊഷ്മാവ്, നീളം, ഭാരം തുടങ്ങിയവ തുടർചരങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങൾ ആണ്. എന്തുകൊണ്ടാണ് ഊഷ്മാവ് തുടർ ചരമാവുന്നത്? തന്നിട്ടുള്ള രണ്ടു ഊഷ്മാവുകൾക്കിടയിലുള്ള അനന്തമായ ഏതുവിലയും സങ്കൽപ്പിക്കുവാൻ കഴിയുന്നു എന്നതുകൊണ്ടാണിത്. ഒരു അനിയത ചരം തുടർചരമായാൽ അതിന്റെ സംഭാവ്യതാവിതരണത്തെ തുടർ സംഭാവ്യത, വിതരണം എന്നു പറയുന്നു. സാധാരണയായി തുടർ സംഭാവ്യത വിതരണത്തെ വിവരിക്കുവാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന

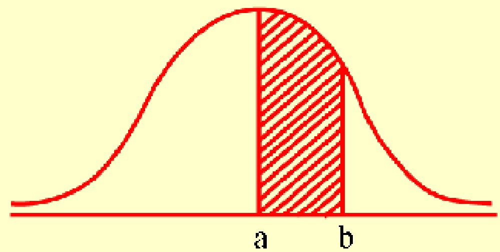


ചിത്രം .4.2

സമവാക്യത്തെ സംഭാവ്യതാ സാന്ദ്രത ഏകദം (Probability density function) എന്നുപറയന്നു.

ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഭാവ്യതാ സാന്ദ്രത ഏകദം നോക്കുക. ഇവിടെ X എന്ന ചരത്തിന്റെ വില 'a' യേക്കാൾ കുറഞ്ഞതാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണണമെന്നിരിക്കട്ടെ. $P(x \leq a)$ എന്നത് ചിത്രത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയതുപോലെ 'a' വിലയേക്കാൾ കുറവുള്ള പരപ്പളവ് (area) ആണ്. (ചിത്രം: 4.2)

കുറിപ്പ്: ചിത്രത്തിൽ കറുപ്പിച്ച ഭാഗം അനിയതചരം 'a' എന്ന വിലയോ, അതിനെക്കാൾ കുറവോ സ്വീകരിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യതയാണ്. ഇത് ഒരു സഞ്ചിത സംഭാവ്യതയാണ്. X എന്നത് കൃത്യമായി 'a' എന്ന വില സ്വീകരിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത പൂജ്യമാണ്. ഒരു തുടർചരത്തിന് അനന്തമായ വിലകൾ സ്വീകരിക്കാം. ഒരു പ്രത്യേക വില സ്വീകരിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത പൂജ്യമായിരിക്കും. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന $y = f(x)$ എന്ന ഗ്രാഫ് പരിഗണിക്കുക.



ചിത്രം 4.3

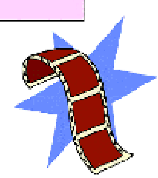
X ന്റെ വില 'a' ക്കും 'b'ക്കും ഇടയിലാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $x = a$, $x = b$ എന്നീ വിലകൾക്കിടയിൽ ഉള്ള വക്രത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ആണെന്ന് തെളിയിക്കാം. ഇതിനെ $\int_a^b f(x)dx$ എന്നു പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു. അതായത് $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

ഡാറ്റ: വേറിട്ടതും തുടരുന്നതും

വേറിട്ട ഡാറ്റക്ക് ചില പ്രത്യേക വിലകൾ മാത്രമെ സ്വീകരിക്കുവാൻ സാധിക്കുകയുള്ളു.	തുടർചരത്തിന് ഒരു നിശ്ചിത ഇടവേളയിലെ ഏത് വിലയും സ്വീകരിക്കാം.

ഉദാഹരണം 1
ഒരു പുസ്തകത്തിലെ താളുകളുടെ എണ്ണം

ഉദാഹരണം 2
ഒരു ഫിലിമന്റെ ദൈർഘ്യം

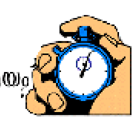


ഉദാഹരണം 3
ഷൂവിന്റെ വലിപ്പം
ഉദാ: $5, 5\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2}$

ഉദാഹരണം 4
ഊഷ്മാവ്

ഉദാഹരണം 5
ഒരു വിഭാഗത്തിന്റെ ആളുകളുടെ എണ്ണം

ഉദാഹരണം 6
ഒരു ഓട്ട മത്സരം വിജയിക്കുവാനുള്ള സമയം



പ്രവർത്തനം

നിത്യജീവിതത്തിലെ വേറിട്ടതും, തുടരുന്നതുമായ അനിയത ചരങ്ങളുടെ/ പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക. എന്തുകൊണ്ടാണ് അവ വേറിട്ടതോ/തുടരുന്നതോ ആകുന്നത് എന്നു വിശദീകരിക്കുക.

pdf ന്റെ സവിശേഷതകൾ

f(x) എന്നത് X എന്ന ഒരു തുടർചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യതാ സാന്ദ്രത ഏകദം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. അതിന് താഴെ പറയുന്ന സവിശേഷതകൾ ഉണ്ട്.

1. $f(x) \geq 0$ ഓരോ x നും

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, ആകെ സംഭാവ്യത

   f(x) എന്ന ഏകദം pdf ആകാനുള്ള ഒഴിവാക്കുവാൻ സാധിക്കാത്ത നിബന്ധനകൾ ആണ് ഇവ രണ്ടും.

3. $P[a \leq X \leq b] = \int_{a}^{b} f(x)dx$

4. $P[a \leq X \leq c] = P[a \leq X \leq b] + P[b \leq X \leq c]$

$$= \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{c} f(x)dx$$ എന്നത് a, c എന്നീ വിലകൾക്കിടയിലാണ്.

വിശദീകരണം 4.12

താഴെപറയുന്നത് ഒരു തുടർചരത്തിന്റെ pdf ആണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

$$f(x) = 2x;\ 0 < x < 1$$
$$= 0;$$ മറ്റെല്ലായിടത്തും

പരിഹാരം

ഇവിടെ ഓരോ x വിലയ്ക്കും $f(x) \geq 0$ ആണ്.

1-ാമത്തെ നിബന്ധന പാലിക്കപ്പെട്ടു. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{\infty} f(x)dx$

$$= 0 + \int_{0}^{1} 2x\,dx + 0$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 = 1 - 0 = 1,$$ രണ്ടാമത്തെ നിബന്ധനനയും പരിശോധിക്കപ്പെട്ടു.

അതിനാൽ $f(x)$ ഒരു pdf ആണ്.

വിശദീകരണം 4.13

X ഒരു തുടർച്ചരത്തിന്റെ pdf താഴെപറയുന്ന പ്രകാരമാണ്.

$$f(x) = \frac{1}{8}; \quad 1 \le x \le 9$$

$$= 0; \quad \text{മറ്റെല്ലായിടത്തും}$$

ഇവ കാണുക (i) $P(2 < X < 5)$ (ii) $P(X < 3)$

(iii) $P(X \ge 3)$ (iv) $P(|X-2| > 3)$

പരിഹാരം

(i) $P(2 < X < 5) = \int_2^5 f(x)dx$

$$= \int_2^5 \frac{1}{8}dx$$

$$= \frac{1}{8} \times [x]_2^5 = \frac{1}{8} \times (5-2) = \frac{3}{8}$$

(ii) $P(X < 3) = \int_1^3 f(x)dx$

$$= \int_1^3 \frac{1}{8}dx$$

$$= \frac{1}{8} \times [x]_1^3 = \frac{1}{8} \times (3-1) = \frac{1}{4}$$

(iii) $P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3)$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(iv) $P(|X-2| > 3) = 1 - P(|X-2| \le 3)$

$$= 1 - P(-3 \le X - 2 \le 3)$$

$$= 1 - P(-1 \leq X \leq 5)$$

$$= 1 - \int_{1}^{5} f(x)dx = 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

വിശദീകരണം 4.14

$f(x) = kx; \quad 0 \leq x \leq 2$

$= 0;$ മറ്റെല്ലായിടത്തും, എന്നത് X എന്ന ചരത്തിന്റെ pdf ആയാൽ k യുടെ വിലകാണുക

പരിഹാരം

$f(x)$ ഒരു pdf ആയതിനാൽ $\int_{0}^{2} f(x)dx = 1$

i.e., $\int_{0}^{2} kx\,dx = 1$

i.e., $k\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^2 = 1$

i.e., $\frac{k}{2}(4-0) = 1$

i.e., $k = \frac{1}{2}$

4.7 വിതരണ ഏകദം (Distribution Function)

X എന്നത് $(-\infty, \infty)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട ഒരു തുടർ ചരമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. X ന്റെ pdf ആണ് $f(x)$ എന്നും കരുതുക. എന്നാൽ വിതരണം ഏകദം,

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

ഇതിനെ സഞ്ചിത വിതരണ ഏകദം (cdf) എന്നുകൂടി അറിയപ്പെടുന്നു.

വിതരണ ഏകദത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. $F(-\infty) = 0, \; F(+\infty) = 1$
3. $F(x)$ കുറഞ്ഞു വരാത്തതും വലതു വശത്തേക്ക് തുടർച്ച ഉള്ളതുമാണ്.
4. $P(a \le x \le b) = F(b) - F(a), \; a < b$

കുറിപ്പ് : $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$, $F(x)$ ന്റെ അവകലന മൂല്യം (derivative) നിലനിൽക്കുന്നു വെങ്കിൽ.

വിശദീകരണം 4.15

ഒരു തുടർചരത്തിന്റെ വിതരണം ഏകദം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

X ന്റെ pdf കാണുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{മറ്റെല്ലായിടത്തും} \end{cases}$$

വിശദീകരണം 4.16

X എന്ന അനിയത ചരത്തിന്റെ pdf $f(x) = \dfrac{1}{4}$, $-2 \le x \le 2$. ആകുന്നു. X ന്റെ വിതരണ ഏകദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

x < -2 ആകുമ്പോൾ $$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$$

$-2 \le x \le 2$ ആകുമ്പോൾ F(X)

$$= \int_{\infty}^{x} f(x)dx$$

$$= \int_{\infty}^{2} f(x)dx + \int_{-2}^{x} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} 0\,dx + \int_{2}^{x} \frac{1}{4}dx$$

$$= \frac{1}{4}[x]_{2}^{x} = \frac{1}{4}(x-(-2)) = \frac{x+2}{4}$$

$x > 2$ ആകുമ്പോൾ F(X)

$$= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} f(x)dx + \int_{2}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{\infty}^{2} 0\,dx + \int_{-2}^{2} \frac{1}{4}dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{4}[x]_{-2}^{2} + 0$$

$$= \frac{1}{4}[2-(-2)] = \frac{2+2}{4} = 1$$

∴ വിതരണഏകദം എന്നത്

$$F(x) = \begin{cases} 0\,; & x \le -2 \\ \dfrac{x+2}{4}, & -2 \le x \le 2 \\ 1\,, & x > 2 \end{cases}$$

തുടർയാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ മാധ്യവും വ്യതിയാനവും

മാധ്യം $x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$,

വ്യതിയാനം $V(X) = E[X-E(X)]^2$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [X-E(X)]^2 f(x)dx$$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ ഇവിടെ $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$ ആണ്.

X ന്റെ മാനകവ്യതിയാനം $= \sqrt{V(X)}$

വിശദീകരണം 4.17

X ന്റെ മാധ്യവും വ്യതിയാനവും കാണുക.

$$f(x) = \frac{x}{2};\ 0 \le x \le 2$$

$= 0$; x ന്റെ മറ്റ് വിലകൾക്ക്

പരിഹാരം

മാധ്യം $E(X) = \int_{\infty}^{\infty} xf(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{2} xf(x)dx + \int_{2}^{\infty} xf(x)dx$$

$$= \int_{\infty}^{0} x.0dx + \int_{0}^{2} x.\frac{x}{2}dx + \int_{2}^{\infty} x.0dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{2} \frac{x^2}{2}dx + 0$$

$$= \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{1}{6}(8-0) = \frac{4}{3}$$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$

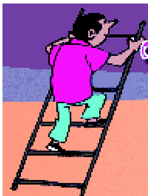
$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)dx + \int_{0}^{2} x^2 f(x)dx + \int_{2}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2.0dx + \int_{0}^{2} x^2.\frac{x}{2}dx + \int_{2}^{\infty} x^2.0dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{2} \frac{x^3}{2}dx + 0 = 2$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. X എന്ന ഒരു തുടർചരത്തിന്റെ pdf,

$$f(x) = \frac{1}{5},\ 2 < x < 7$$

$= 0$, മറ്റെല്ലായിടത്തും, എന്നാകുന്നു.

a) f(x) ന്റെ ഗ്രാഫ് വരക്കുക

b) $P(3 < x < 5)$ കണ്ടു പിടിക്കുക.

2. X എന്ന അനിയത ചരത്തിന്റെ pdf

$$f(x) = 6x(1 - x),\ 0 < x < 1$$

$= 0$, മറ്റെല്ലായിടത്തും

എന്നാണ്.

$P\left(X < \frac{1}{4}\right)$, $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$ ഇവ കണ്ടു പിടിക്കുക.

നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

നമ്മൾ ചരങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിച്ചു. വ്യതിയാനം പ്രകൃതിയിൽ ജന്മനാ ഉള്ളതാണ്. ഒരു അനിയത ഫല പരിക്ഷണവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട വ്യതിയാനം അല്ലെങ്കിൽ സംഭാവ്യത രണ്ടായി തരം തിരിച്ചിരിക്കുന്നു. തുടർചരം, വേറിട്ട ചരം. വിലകളുടെ വിന്യാസത്തെ നോക്കി അനിയത ചരങ്ങളെ തിരിച്ചറിയാൻ സാധിക്കും. അങ്ങനെ നമുക്ക് pdf, pmf എന്നിവ ലഭിക്കുന്നു. ഗണിത പ്രതീക്ഷ ഉപയോഗിച്ച് അനിയത ചരങ്ങളുടെ മാധ്യം, വ്യതിയാനം ഇവ കണക്കാക്കാം.

നമുക്ക് വിലയിരുത്താം...

1. താഴെ പറയുന്ന ചരങ്ങളെ വേറിട്ട, തുടർ എന്നിങ്ങനെ തരംതിരിക്കുക.

   a. ഒരു വലിയ പണിശാലയിൽ ജോലിയെടുക്കുന്നവരുടെ വയസ്സ്.

   b. ഒരു ഭക്ഷണശാലയിൽ വിളമ്പുന്ന കാപ്പികളുടെ എണ്ണം.

   c. ഒരു ഗിനി പന്നിയിൽ കുത്തിവയ്ക്കുന്ന മരുന്നിന്റെ അളവ്.

   d. ഒരു വിദ്യാർത്ഥി പള്ളിക്കൂടത്തിൽ എത്തിച്ചേരുവാൻ എടുക്കുന്ന സമയം.

   e. ഒരു പലചരക്കുകടയിൽ നിന്നു ഒരു ദിവസം വിൽക്കുന്ന പാലിന്റെ അളവ്, ഗാലനിൽ.

   f. ഒരു ഐസ്ക്രീം പാർലറിൽ എല്ലാ ദിവസവും വിൽക്കപ്പെടുന്ന പിസയുടെ എണ്ണം.

   g. പ്രാദേശിക ആശുപത്രികളിൽ ഓപ്പറേഷൻ മുറികളിലെ ആപേക്ഷിക ഈർപ്പത്തിന്റെ അളവ്.

   h. സൂപ്പർമാർക്കറ്റുകളിലെ അടുക്കുകളിൽവെച്ചിരിക്കുന്ന പഴങ്ങളുടെ എണ്ണം.

   i. 15 ഐപോഡ് ബാറ്ററികളുടെ ആയുർദൈർഘ്യം.

   j. ഒരു സ്കൂൾ ബസ്സിൽ ഉള്ള ഒന്നാം തരത്തിൽ പഠിക്കുന്ന കുട്ടികളുടെ സ്കൂൾ ബാഗിന്റെ ഭാരം.

   k. ഒരു ഹയർസെക്കണ്ടറി വിദ്യാലയത്തിൽ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് അധ്യാപകനുമായി കൂടിക്കാഴ്ച നടത്തുന്ന വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം.

   l. ഒരു മാരത്തോണിലെ ഓട്ടക്കാരുടെ രക്ത സമ്മർദം.

(രണ്ടു മുതൽ 17 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ബ്രാക്കറ്റിൽ നിന്നും ശരിയുത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക.)

2. ഒരു കുടുംബത്തിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം എന്നത് .... ചരത്തിനു ഉദാഹരണമാണ്.

(a) ഗുണാത്മകം (b) തുടർ (c) വേറിട്ട (d) സാധാരണ

3. ഒരു അനിയത ഫല പരീക്ഷണത്തിൽ .... ആസ്പദമാക്കി നിർവചിക്കപ്പെട്ട ഒരു രേഖീയ ഏകദം ആണ് അനിയത ചരം.

(a) സംഭവം (b) രംഗം (c) മണ്ഡലം (d) സാമ്പിൾ തലം

4. ഒരു അനിയതചരത്തിന്റെ ഇടവേള .... ആയിരിക്കും

(a) എല്ലായിപ്പോഴും ഒന്ന് അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യം (b) ചരങ്ങൾ

(c) എല്ലാ യഥാർഥ സംഖ്യകൾ (d) എല്ലാ സംഖ്യകളും

5. ഒരു പകിട എറിയുന്നത് ....നുദാഹരണമാണ്.

(a) വേറിട്ടചരം (b) തുടർചരം

(c) വേറിട്ടതും തുടരുന്നതുമായ ചരം

(d) വേറിട്ട ചരവുമല്ല തുടരുന്നതുമായ ചരവുമല്ല

6. ഒരു അനിയത ചരത്തിന്റെ മാധ്യം എന്നത്:

(a) E(x) (b) V(x) (c) F(x) (d) P(x)

7. X എന്ന അനിയത ചരത്തിന്റെ മാധ്യം 24 എന്നാൽ E(X+5) = ...

(a) 24 (b) 5 (c)29 (d) 120

8. ഒരു അനിയത ചരത്തിന്റെ വ്യതിയാനം അതിന്റെ മാധ്യത്തിൽ നിന്നും കണക്കായി വർഗം കണ്ട് അവയുടെ ഗണിത പ്രതീക്ഷ കാണുന്നത് അതിന്റെ .... ആകുന്നു.

(a) മാധ്യം (b) വ്യതിയാനം (c) മോഡ് (d) മീഡിയൻ

9. V(X) = 4 , എങ്കിൽ V(2X+4) = ...

(a) 4 (b) 16 (c) 20 (d)36

10. ഒരു സംഭാവ്യതാവക്രത്തിന്റെ കീഴിൽ വരുന്ന ആകെ പരപ്പളവ് .... ആകുന്നു.

(a) 1 (b) 0 (c) അനന്തത

(d) കാണുവാൻ സാധിക്കില്ല

11. ഒരു പട്ടികയിൽ അനിയത ചരത്തിന്റെ സാധ്യമായ എല്ല വിലകളും അതിന് അനുസരിച്ചുള്ള സംഭാവ്യതകളും നൽകുന്നുവെങ്കിൽ ആ പട്ടികയെ വിളിക്കപ്പെടുന്നത്:

(a) സംഭാവ്യത ഘനത്വ ഏകദം (b) വിതരണ ഏകദം

(c) സംഭാവ്യതാ വിതരണം (d) തുടർ വിതരണം

12. രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്ക് ഇടയിൽ സങ്കൽപ്പിക്കുവാൻ സാധിക്കുന്ന ഏതുവിലയും സ്വീകരിക്കാവുന്ന ചരത്തെ വിളക്കപ്പെട്ടതാണ്.

(a) തുടർ അനിയത ചരം (b) വേറിട്ട അനിയത ചരം
(c) വേറിട്ട സാമ്പിൾ തലം (d) അനിയത ചരം

13. ഒരു തുടർചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യതാ വിതരണം പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന സമവാക്യത്തെ അല്ലെങ്കിൽ സൂത്രവാക്യത്തെ വിളിക്കുന്നത്

(a) സംഭാവ്യതാ വിതരണം (b) വിതരണ ഏകദം
(c) സംഭാവ്യതാ ഘനത്വ ഏകദം (d) ഗണിത പ്രതീക്ഷ

14. X എന്നത് ഒരു തുടർചരവും, f(x) എന്നത് X ന്റെ സംഭാവ്യതയും ആയാൽ; അനിയത ചരത്തിന്റെ ഗണിത പ്രതീക്ഷ

(a) $\sum f(x)$ (b) $\sum [x+f(x)]$ (c) $\sum f(x)+x$ (d) $\sum xf(x)$

15. $E(X) = 6,\ E(Y) = -4;\ E(X - Y) =$...............

(a) 3 (b) 5 (c) 10 (d) 2

16. $f(x) = 2x,\ 0 \leq x \leq 1$ എങ്കിൽ f(x) ഒരു

(a) വേറിട്ട സംഭാവ്യതാ വിതരണം (b) സംഭാവ്യതാ സാന്ദ്രത ഏകദം
(c) വിതരണം ഏകദം (d) തുടർ അനിയത ചരം

17 വിതരണ ഏകദം $F(x) =$

(a) $P(X = x)$ (b) $P(X \leq x)$ (c) $P(X \geq x)$ (d) $\sum P(X \geq x)$

18. താഴെ ഒരു സംഭാവ്യതാ വിതരണം തന്നിരിക്കുന്നു.

X	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	k	2k	2k	3k	K^2	$2k^2$	$7k^2+k$

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

a) k b) $P(X<3)$ c) $P(X \geq 6)$ d) $P(1<X<4)$

19. X എന്ന അനിയത ചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യതാ വിതരണം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

X	-1	0	2
P(X)	0.3	0.2	0.5

a) E (x) b) E(3X) c) E(x+5) d) E(2x+8) ഇവ കാണുക.

20. X നു താഴെ പറയുന്ന സംഭാവ്യതാ വിതരണം ഉണ്ട്

X1	1	2	3	4
P(X)	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{12}$

$P(X \leq 1)$ and $P(1 < X < 4)$ ഇവ കണക്കാക്കുക.

21. $f(x) = \frac{x^2+2}{22}$, $x = 0, 1, 2, 3$. ആയാൽ സംഭാവ്യത വിതരണം പട്ടികാ രൂപത്തിൽ എഴുതുക.

22. 20, 21 എന്നീ ചോദ്യങ്ങളിലെ X ന്റെ വിതരണ ഏകദം കാണുക.

23. X എന്ന ചരത്തിന് താഴെ പറയുന്ന പ്രകാരത്തിലുള്ള സംഭാവ്യതാ വിതരണമുണ്ട്.

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	a	4a	3a	7a	8a	12a	6a	7a

a) a യുടെ വില കാണുക

b) $P(X < 3)$, $P(X \geq 4)$, $P(0 < X < 5)$ ഇവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

24. താഴെപറയുന്ന സംഭാവ്യതാ വിതരണത്തിൽ നിന്നും a) E(X) b) $E(X^2)$ c) V(X) d) E(X+5) e) V(6X) f) V(2X+7) ഇവ കാണുക.

X	8	12	16	20	24
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

25. X ന്റെ pdf , $f(x) = kx^2, 0 < X < 2$

$= 0$, മറ്റെല്ലായിടത്തും എങ്കിൽ k യുടെ വില കാണുക.

26. താഴെ പറയുന്നത് ഒരു pdf ആണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

$$f(x) = \frac{1}{4(x-1)^3}, 1 < x < 3$$

27. താഴെപറയുന്നത് ഒരു pdf ആണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

$f(x) = 3(2 - x)(x - 1)\ ;\ 1 < x < 2$

28. താഴെ പറയുന്ന pdf ന്റെ cdf കാണുക.

$f(x) = \frac{3}{2}x^2,\ -1<x<1$

$= 0$, മറ്റെല്ലായിടത്തും

29. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അനിയത ചരത്തിന്റെ മാധ്യം, വ്യതിയാനം എന്നിവ കാണുക.

$f(x) = \frac{1}{2a}\ ;\ -a < x < a$

30. $f(x) = 3x^2,\ 0 < x < 1$ ഒരു സാന്ദ്രത ഏകകമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

31. Y എന്ന തുടർ അനിയത ചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യതാ സാന്ദ്രത ഏകകം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

$f(y) = \frac{1}{8}(y + 1),\quad 2 < y < 4$

$= 0$, മറ്റെല്ലായിടത്തും

(1) $P(Y < 3.2)$ (2) $P(2.9 < Y < 3.2)$ ഇവ കാണുക.

32. X എന്ന അനിയത ചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യതാ സാന്ദ്രത ഏകകമാണ് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത്.

$f(x) = x,\ 0 < x < 1$

$= 2 - x,\ 1 < x < 2$

$= 0$ മറ്റെല്ലായിടത്തും

വിതരണ ഏകകം കണ്ടുപിടിക്കുക.

33. X എന്ന തുടർചരത്തിന്റെ സഞ്ചിത വിതരണ ഏകകം F(x) തന്നിരിക്കുന്നു.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{x^3}{27}, 0 \le x \le 3 \\ 1, x \ge 3 \end{cases}$$

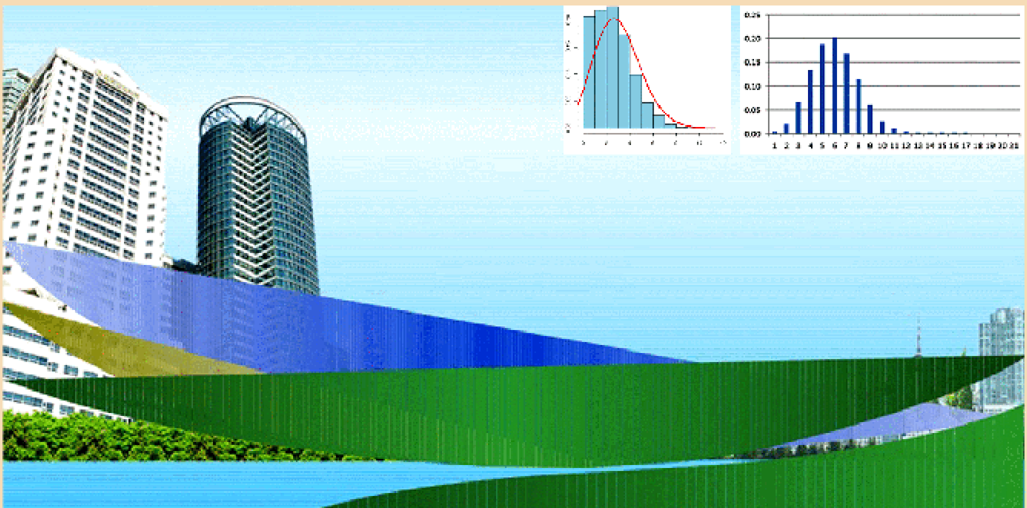
X ന്റെ pdf കണ്ടുപിടിക്കുക.

A3V9W9

അധ്യായം 5

വേറിട്ട സംഭാവ്യത വിതരണങ്ങൾ

(Discrete Probability Distributions)



സംഭാവ്യത വിതരണങ്ങൾ എങ്ങനെ കണക്കാക്കാമെന്നും അവ എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കാമെന്നുമാണ് നാം ഇതുവരെ കണ്ടത്. ലളിതമായ അനിയത ഫല പരീക്ഷണങ്ങളിൽ പരിഗണനയിൽ ഉള്ള അനിയത ചരത്തിന്റെ സാമ്പിൾ മേഖല തിരിച്ചറിയുന്നതും അവയുടെ സംഭാവ്യത വിതരണങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നതും പ്രയാസകരമല്ല. എന്നാൽ ധാരാളം പ്രായോഗിക സന്ദർഭങ്ങളിൽ, സാമ്പിൾ ബിന്ദുക്കൾ പട്ടികയാക്കിയതിന് ശേഷം സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുന്നത് എളുപ്പമായ ഒരു പ്രവൃത്തി അല്ല.

സവിശേഷ പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായത്തിന്റെ പൂർത്തീകരണത്തിന് ശേഷം, പഠിതാവ്

- ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണമാകുന്നതിന് ഉണ്ടായിരിക്കേണ്ട ഉപാധികൾ എന്തൊക്കെയാണെന്ന് വിശദീകരിക്കുന്നു.
- ബൈനോമിയൽ സംഭാവ്യത വിതരണവും പോയ്സോൺ സംഭാവ്യത വിതരണവും നിർവ്വചിക്കുന്നു.
- ബൈനോമിയൽ വിതരണവും പോയ്സോൺ വിതരണവും ഉപയോഗിച്ച് സംഭാവ്യതകൾ കണക്കാക്കുന്നു.

ഒരു വ്യക്തമായ ക്രമം പിന്തുടരുന്ന ചില പ്രത്യേകതരം സംഭാവ്യത വിതരണങ്ങളെ കുറിച്ചാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം പ്രതിപാദിക്കുന്നത്. ഈ രീതി ഒരിക്കൽ മനസിലാക്കിയാൽ അത് ഉപയോഗിച്ച് സംഭാവ്യതകൾ വളരെ പെട്ടെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുവാൻ സാധിക്കും. ഈ രീതി അറിയുന്നതിലൂടെ, മാധ്യവും വ്യതിയാനവും വളരെ കുറഞ്ഞ സമയത്തിലും അധ്വാനത്തിലും കണക്കാക്കുവാൻ സാധിക്കുന്നു. ബൈനോമിയൽ വിതരണവും പോയ്സോൺ വിതരണവും ഇത്തരത്തിലുള്ള രണ്ട് വേറിട്ട സംഭാവ്യത വിതരണങ്ങളാണ്. നമുക്ക് ഇവയെപ്പറ്റി വിശദമായി ചർച്ച ചെയ്യുകയും അവ ഉപയോഗിച്ച് സംഭാവ്യതകൾ കണക്കാക്കുകയും ചെയ്യാം.

5.1. ബൈനോമിയൽ സംഭാവ്യത വിതരണം (Binomial Probability Distribution)

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

ജേക്കബ് ബെർണോളി (1654–1705) ആണ് ബൈനോമിയൽ വിതരണം അവതരിപ്പിച്ചത്. അദ്ദേഹത്തിന്റെ മരണശേഷം അനന്തിരവനായ നിക്കോളസ് ബെർണോളി 1713 ൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ച *Ars Conjenctendi* എന്ന പുസ്തകത്തിലൂടെയാണ് ഇത് ലോകത്തിന് പരിചയപ്പെടുത്തിയത്.

- ഒരു നാണയം നാല് തവണ കറക്കുന്നു. കൃത്യം 2 തലകൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?
- 'അതെ' അല്ലെങ്കിൽ 'അല്ല' എന്ന ഉത്തരം കിട്ടുന്ന ഒരു ചോദ്യം 10 ആൾക്കാരോട് ചോദിച്ചു. 'അതെ' എന്ന ഉത്തരം മൂന്ന് തവണ കിട്ടുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?
- 10 കുട്ടികൾ ഒരു പരീക്ഷയ്ക്ക് ഹാജരാകുന്നു. ഇവരിൽ കുറഞ്ഞത് 3 പേരെങ്കിലും ഈ പരീക്ഷ വിജയിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?
- ഒരു സഞ്ചിയിൽ 80 നല്ല ഓറഞ്ചുകളും 20 കേടായ ഓറഞ്ചുകളും ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും 3 ഓറഞ്ചുകൾ എടുത്താൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു നല്ല ഓറഞ്ച് എങ്കിലും ലഭിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

നമുക്ക് ഈ മുകളിൽ പറഞ്ഞ പരീക്ഷണങ്ങളിലെ ഫലങ്ങളെ ഒന്ന് വിശകലനം ചെയ്യാം.

- നാണയം കറക്കിയാൽ **'തല'** അല്ലെങ്കിൽ **'വാൽ'** ലഭിക്കും.
- ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം **'അതെ'** അല്ലെങ്കിൽ **'അല്ല'** ലഭിക്കും.
- പരീക്ഷക്ക് ഹാജരാകുന്ന വിദ്യാർത്ഥി ഒന്നുകിൽ **വിജയിക്കും** അല്ലെങ്കിൽ **തോൽക്കും.**
- തിരഞ്ഞെടുത്ത ഓറഞ്ച് **നല്ലതാകാം** അല്ലെങ്കിൽ, **കേടുവന്നതാകാം.**

ഈ ഓരോ സന്ദർഭത്തിലും എത്ര ഫലങ്ങളാണ് ഉള്ളത്? രണ്ട് ഫലങ്ങൾ വീതമാണെന്ന് മനസിലാക്കാം.

ഓരോ സന്ദർഭത്തിലും ഉള്ള രണ്ട് ഫലങ്ങളെയും ഒന്ന് വിശകലനം ചെയ്യാം. ഇതിൽ ഒരു ഫലം 'ജയം' ആണെങ്കിൽ രണ്ടാമത്തേത് 'പരാജയം' ആണ്. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു നാണയം കറക്കുന്ന പരീക്ഷണത്തിൽ, 'തല' വരുന്നത് ജയമാണെന്ന് പരിഗണിച്ചാൽ 'വാൽ' വരുന്നത് പരാജയമാണെന്ന് പരിഗണിക്കാം.

ജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യതയെ 'p' കൊണ്ടും പരാജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യതയെ 'q' കൊണ്ടും സൂചിപ്പിച്ചാൽ $p+q = 1$ ആകും.

നാണയം കറക്കുന്ന പരീക്ഷണത്തിൽ ഓരോ പ്രാവശ്യവും നാണയം കറക്കുന്നത് ഓരോ ഉദ്യമമാണ് (trial). ഒരു നാണയം നാല് തവണ കറക്കിയാൽ ഉദ്യമങ്ങളുടെ എണ്ണം 4 ആണ്. ഓരോ ഉദ്യമത്തിലും 'ജയം', 'പരാജയം' എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് ഫലങ്ങളാണ് ഉള്ളത്.

ഒരു ഉദ്യമത്തിലെ ഫലം മറ്റൊരു ഉദ്യമത്തിലെ ഫലത്തിനെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല.

എല്ലാ ഉദ്യമങ്ങളിലും ജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത സ്ഥിരമായിരിക്കും. ഇങ്ങനെ 'ജയം', 'പരാജയം' എന്നിങ്ങനെ പരാമർശിക്കുന്ന രണ്ട് ഫലങ്ങൾ മാത്രമുള്ള സ്വതന്ത്ര ഉദ്യമങ്ങളെ ബെർണോളി ഉദ്യമങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ബെർണോളി ഉദ്യമം (Bernoulli trial)

സാധ്യമായ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം രണ്ടായതും സ്വതന്ത്രമായതുമായ ഉദ്യമങ്ങളെ ബെർണോളി ഉദ്യമം എന്നു പറയുന്നു. ഏത് ഉദ്യമത്തിലും ഒരു ഫലത്തിന്റെ സംഭാവ്യത സ്ഥിരമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു പകിട 50 തവണ എറിയുന്നത് 50 ബെർണോളി ഉദ്യമങ്ങളാണ്. ഓരോ ഉദ്യമത്തിന്റെയും ഫലം ജയം (6 കിട്ടുന്നത് ആണെന്നിരിക്കട്ടെ) അല്ലെങ്കിൽ പരാജയം (6 കിട്ടാതിരിക്കുന്നത്) ആണ്. ഈ 50 ഉദ്യമങ്ങളിലും ജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത (p) തുല്യമായിരിക്കും.

തീർച്ചയായും ഒരു പകിടയുടെ തുടർച്ചയായ 50 ഏറുകൾ അനാശ്രിത ഉദ്യമങ്ങളാണ് (Independent trials).

പകിടയുടെ ഓരോ മുഖവും വരുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത തുല്യമായാൽ ജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത $\frac{1}{6}$ ഉം പരാജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ ഉം ആണ്.

ഒരു ബൈനോമിയൽ സംഭാവ്യത വിതരണം പ്രയോഗിക്കുന്നതിന് അനിയത ചരം വേറിട്ട, രണ്ട് ഫലങ്ങളുള്ളതായിരിക്കണം. മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, പരീക്ഷണത്തിൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ട അനിയത ചരത്തിന് സാധ്യമായ രണ്ട് വിലകളിൽ നിന്ന് ഒരെണ്ണം മാത്രമേ സ്വീകരിക്കാൻ സാധിക്കുകയുള്ളൂ.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന 4 നിബന്ധനകൾ പാലിക്കുന്ന പരീക്ഷണങ്ങൾക്ക് ബൈനോമിയൽ വിതരണം പ്രയോഗിക്കാം.

1. ഒരേ പോലെയുള്ള 'n' (നിശ്ചിത എണ്ണം) ഉദ്യമങ്ങളാണ് ഉള്ളത്. മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഈ പരീക്ഷണം 'n' തവണ ആവർത്തിക്കുന്നു. എല്ലാ ആവർത്തനങ്ങളും ഒരേ പോലത്തെ സാഹചര്യത്തിലാണ് നടത്തുന്നത്.
2. ഓരോ ഉദ്യമത്തിനും കൃത്യം രണ്ട് ഫലങ്ങളാണ് ഉള്ളത്. ഈ ഫലങ്ങളെ സാധാരണയായി 'ജയം', 'പരാജയം' എന്നിങ്ങനെ വിളിക്കുന്നു.
3. ജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യതയെ 'p' എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ടും പരാജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യതയെ 'q' എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ടും സൂചിപ്പിച്ചാൽ, $p+q=1$ ആയിരിക്കും. p, q എന്നീ സംഭാവ്യതകൾ എല്ലാ ഉദ്യമങ്ങളിലും സ്ഥിരമായിരിക്കും.

4. ഉദ്യമങ്ങൾ സ്വതന്ത്രങ്ങളാണ്. മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഒരു ഉദ്യമത്തിന്റെ ഫലം മറ്റൊരു ഉദ്യമത്തിന്റെ ഫലത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല.

ബൈനോമിയൽ പരീക്ഷണത്തിന് വേണ്ട നിബന്ധനകൾ

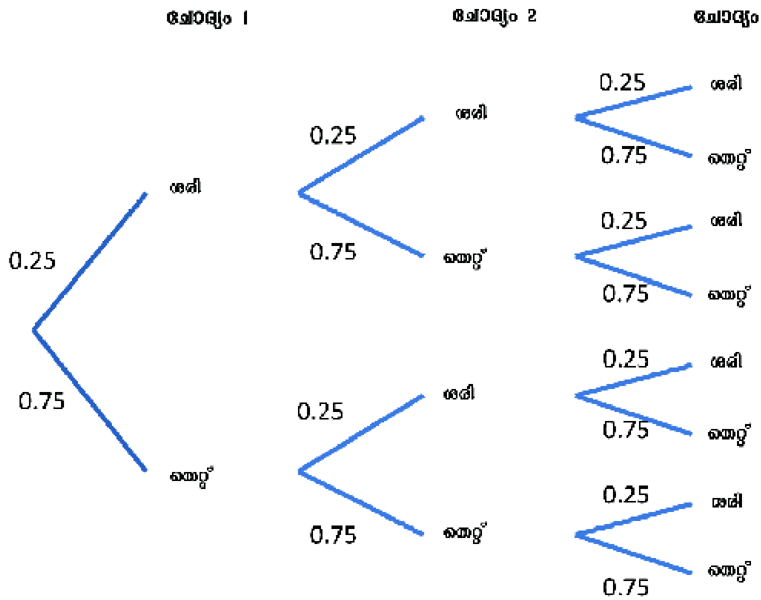
1. ഒരേ പോലത്തെ (നിശ്ചിത എണ്ണം) ഉദ്യമങ്ങൾ ഉണ്ടാകണം.
2. ഓരോ ഉദ്യമത്തിനും സാധ്യമായ രണ്ട് ഫലങ്ങൾ ഉണ്ടാകണം.
3. രണ്ട് ഫലങ്ങളുടെയും സംഭാവ്യതകൾ സ്ഥിരമായിരിക്കണം.
4. ഉദ്യമങ്ങൾ സ്വതന്ത്രങ്ങളായിരിക്കണം.

ബൈനോമിയൽ സൂത്രവാക്യം (Binomial Formula)

നാല് ഉത്തരങ്ങളിൽ നിന്നും ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുന്ന ചോദ്യം നിങ്ങൾക്ക് സുപരിചിതമാണ്. ഈ ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരം അറിയില്ലായെങ്കിൽ, ചില പ്പോൾ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഉത്തരം ഊഹിച്ചെഴുതാറുണ്ട്. ഈ സന്ദർഭത്തിൽ ഉത്തരം ശരിയാകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.25 ഉം ഉത്തരം തെറ്റാകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.75 ആണ്.

ഇത്തരം 3 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടെത്തണമെന്ന് വിചാരിക്കുക. ശരിയായ ഉത്ത രങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ സംഭാവ്യത വിതരണം നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കുവാൻ സാധി ക്കും. ഇതിലൂടെ ഇത്തരം ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം ഊഹിക്കണോ വേണ്ടയോ എന്ന കാര്യം തീരുമാനിക്കുവാൻ സാധിക്കും.

ഈ സാഹചര്യത്തിലെ സംഭാവ്യതയുടെ ശാഖാചിത്രം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.



മൂന്ന് ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ലഭിച്ച ശരിയായ ഉത്തരങ്ങളുടെ എണ്ണം X കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം. സംഭാവ്യത വിതരണം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രകാരം ചുരുക്കിയെഴുതാം.

X	P(X=x)		0.25 ന്റെ കൃത്യങ്കം	0.75 ന്റെ കൃത്യങ്കം
0	$(0.75)^3$	= 0.422	0	3
1	$3x(0.25)^1 (0.75)^2$	= 0.422	1	2
2	$3x(0.25)^2 (0.75)^1$	= 0.140	2	1
3	$(0.25)^3$	= 0.016	3	0

3 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഒരു ശരിയുത്തരം ലഭിക്കുന്ന 3 വഴികൾ ഉണ്ട്. എല്ലാത്തിന്റെയും സംഭാവ്യത $(0.25)^1 (0.75)^2$ ആണ്. ഇതുപോലെ രണ്ട് ശരിയുത്തരങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നതിന് സംഭാവ്യത $(0.25)^2 (0.75)^1$ വീതമുള്ള 3 വഴികൾ ഉണ്ട്.

മൂന്ന് ബൈനോമിയൽ ഉദ്യമങ്ങൾ ചേർന്ന ഒരു പരീക്ഷണത്തിൽ ജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത p ഉം പരാജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത q ഉം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. വിജയങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ (X) സംഭാവ്യത വിതരണം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

X	0	1	2	3
P(X = x)	q^3	$3\,p^1 q^2$	$3\,p^2q^1$	p^3

ഇവിടെ സംഭാവ്യത വിതരണം $(q + p)^3$ എന്ന ബൈനോമിയൽ വിപുലീകരണത്തിലെ പദങ്ങൾ ആണ്.

$q + p = 1$ എന്ന് നമുക്ക് അറിയാം. അതുകൊണ്ട് $(q + p)^3 = 1$

അതായത്, $q^3 + 3\,p^1q^2 + 3\,p^2q^1 + p^3 = 1$.

ഇങ്ങനെ n ഉദ്യമങ്ങൾ ഉള്ള ബെർണോളി പരീക്ഷണത്തിൽ 0,1,2,3,…,n എന്നീ എണ്ണം ജയങ്ങൾ കിട്ടുവാനുള്ള സംഭാവ്യതകൾ $(q+p)^n$ എന്ന ബൈനോമിയൽ വിപുലീകരത്തിലെ യഥാക്രമം ഒന്നാമത്തെ, രണ്ടാമത്തെ..., (n+1)-ാമത്തെ പദങ്ങൾ ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് ജയങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ (X) വിതരണം ചുവടെ പറയും പ്രകാരം എഴുതാം.

X	0	1	2	…	x	…	n
P(X = x)	${}^nC_0q^n$	${}^nC_1p^1q^{n-1}$	${}^nC_2p^2q^{n-2}$	…	${}^nC_xp^xq^{n-x}$	…	${}^nC_np^x$

മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിതരണത്തെ 'n' ഉം 'p' യും പ്രാചലങ്ങളായ (Parameter) ബൈനോമിയൽ വിതരണം എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. കാരണം തന്നിട്ടുള്ള 'n' ന്റെയും 'p' യുടെയും വിലകൾ ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് പൂർണമായ സംഭാവ്യത വിതരണം കണ്ടുപിടിക്കുവാൻ സാധിക്കും.

അങ്ങനെ, ജയങ്ങളുടെ എണ്ണം X ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത,

$$P(X = x) = {}^nC_x p^x q^{n-x} \;;\; x = 0,1,2,\ldots,n;\; q = 1-p.$$

$$\Sigma\, {}^nC_x p^x q^{n-x} = (q+p)^n = 1$$

$P(X=x)={}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x}$; x = 0,1,2,…,n; q = 1-p എന്നത് ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന്റെ സംഭാവ്യത ഘനത്വ ഏകദം (Probability mass function) ആകുന്നു.

> X എന്ന അനിയത ചരം ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിലാണ് എങ്കിൽ അതിന്റെ സംഭാവ്യത ഘനത്വ ഏകദം.
>
> $P(X=x)={}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x}$; x = 0,1,2,…,n; q = 1-p
>
> $= 0$, x ന്റെ മറ്റ് വിലകൾക്ക്

n ഉം p യും പരാമീറ്ററുകളായ ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിനെ B(n,p) എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യവും വ്യതിയാനവും

n ഉം p യും പരാമീറ്ററുകളായ ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിൽ

മാധ്യം, E(X) = np

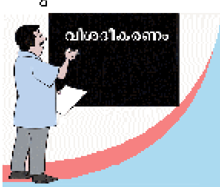
വ്യതിയാനം, V(X) = npq

മാനക വ്യതിയാനം $\sigma=\sqrt{npq}$

> X ~ B(n,p) ആണെങ്കിൽ,
>
> മാധ്യം, E(X) = np, വ്യതിയാനം, V(X) = npq, മാനക വ്യതിയാനം, $\sigma=\sqrt{npq}$

കുറിപ്പ് :

ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിൽ, വ്യതിയാനം < മാധ്യം ആയിരിക്കും



വിശദീകരണം 5.1

ഒരു ചോദ്യപേപ്പറിൽ 5 ചോദ്യങ്ങളുണ്ട്. ഓരോ ചോദ്യത്തിനും നാല് ഉത്തരങ്ങളാണ് ഉള്ളത്. അതിൽ ഓരോ ഉത്തരം വീതം ശരിയാണ്. ഒരാൾ ഉത്തരങ്ങൾ ഊഹിച്ചെഴുതിയാൽ

a. രണ്ട് ഉത്തരങ്ങൾ ശരിയാവുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

b. മൂന്ന് ഉത്തരങ്ങൾ ശരിയാവുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

c. രണ്ടോ മൂന്നോ ഉത്തരങ്ങൾ ശരിയാവുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

d. ശരിയുത്തരം ഒന്നും തന്നെ ലഭിക്കാതിരിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

e. ശരിയുത്തരം ലഭിക്കുന്നതിന്റെ എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യവും വ്യതിയാനവും കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

ഉത്തരങ്ങൾ ഊഹിച്ചെഴുതുന്നത്കൊണ്ട്, ഒരു ഉത്തരം ശരിയാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത,

$$p = \frac{1}{4} = 0.25$$

തെറ്റായ ഉത്തരം കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത, $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = 0.75$

X എന്നത് ശരിയായ ഉത്തരങ്ങളുടെ എണ്ണം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ $X \sim B(5, 1/4)$;

$P(X = x) = 5\,C_x (0.25)^x (0.75)^{5-x},\ x = 0, 1, \ldots, 5$

a. രണ്ട് ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം കിട്ടുവാനുള്ള സംഭാവ്യത, $= P(X = 2)$

$$= {}^5C_2\ (0.25)^2(0.75)^{5-2}$$

$$= 10 \times 0.0625 \times 0.421875$$

$$= 0.264$$

b. മൂന്ന് ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത$=P(X = 3)$

$$= {}^5C_3\ (0.25)^3(0.75)^{5-3}$$

$$= 10 \times 0.015625 \times 0.5625$$

$$= 0.0879$$

c. രണ്ടോ മൂന്നോ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $=P(X = 2$ അല്ലെങ്കിൽ $X = 3)$

$$= P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= 0.264 + 0.0879$$

$$= 0.3519$$

d. ഒരു ചോദ്യത്തിനും ശരിയായ ഉത്തരം ലഭിക്കാതിരിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത

$$= P(X = 0)$$

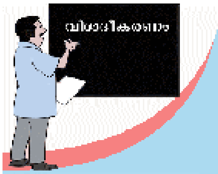
$$= (0.75)^5$$

$$= 0.237$$

e. മാധ്യം, $E(X) = np = 5 \times 0.25 = 1.25$

വ്യതിയാനം, $V(X) = npq = 5 \times 0.25 \times 0.75 = 0.9375$

മാനവിക വ്യതിയാനം $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{0.9375} = 0.9682$



വിശദീകരണം 5.2

ഒരു നാണയം 5 തവണ കറക്കുന്നു. കൃത്യം രണ്ട് പ്രാവശ്യം തലകൾ ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

പരിഹാരം :

X എന്നത് തലകളുടെ എണ്ണമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇത് ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണമാണ്.

$X \sim B(n,p)$

$$P(X = x) = {}^nC_x\, p^x q^{n-x} \;;\; x = 0,1,2 \ldots n;\; q = 1-p$$

$$p = \frac{1}{2},\; q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$n = 5,\; x = 2$

തലകൾ എണ്ണം രണ്ട് ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത = P(X = 2)

$$= {}^5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}$$

$$= \frac{5\times 4}{1\times 2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= 0.3125$$

വിശദീകരണം 5.3

52 ചീട്ടുകൾ ഉള്ള ഒരു പായ്ക്കറ്റിൽ നിന്നും ഓരോന്നായി അഞ്ച് ചീട്ടുകൾ എടുക്കുന്നു. എടുക്കുന്ന ചീട്ട് തിരികെ വയ്ക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക. എങ്കിൽ മൂന്ന് ചീട്ടുകൾ ഹൃദയ ചിഹ്നമുള്ള ചീട്ടുകൾ ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം :

X എന്നത് ഹൃദയ ചിഹ്നമുള്ള ചീട്ടുകളുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

52 ചീട്ടുകളിൽ നിന്നും ഒരു ചീട്ട് എടുത്താൽ അത് ഹൃദയ ചിഹ്നമുള്ളതാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത, $p = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \qquad n = 5$$

ഇവിടെ $X \sim B\left(5, \frac{1}{4}\right)$

3 ഹൃദയ ചിഹ്നമുള്ള ചീട്ടുകൾ കിട്ടുവാനുള്ള സംഭാവ്യത, $P(X = 3)$

$$= {}^{5}C_{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{5-3}$$

$$= \frac{45}{512}$$

വിശദീകരണം 5.4

ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം 6 ഉം വ്യതിയാനം 5 ഉം ആണ്.

a. സംഭാവ്യതയുടെ ഘനതാഏകദം എഴുതുക.

b. $P(X= 1)$ കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

മാധ്യം, $np = 6$, വ്യതിയാനം, $npq = 5$

$$\frac{npq}{np} = \frac{5}{6}$$

$$q = \frac{5}{6}$$

$$p = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$np = 6$$

$$\therefore n \times \frac{1}{6} = 6 \Rightarrow n = 6 \times 6 = 36$$

a. സംഭാവ്യത ഘനത്വ ഏകദം

$$f(x) = {}^{36}C_{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{36-x}; x = 0, 1, 2, \ldots, 36;$$

$= 0$, മറ്റെല്ലായിടത്തും

b. $P(X= 1) = {}^{36}C_{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{36-1} = 6\left(\frac{5}{6}\right)^{35}$

വിശദീകരണം 5.5

ഒരു നാണയം 16 തവണ കറക്കുന്നു. കിട്ടുന്ന തലകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യവും വ്യതിയാനവും മാനക വ്യതിയാനവും കാണുക.

പരിഹാരം

X എന്നത് തലകളുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$$n = 16, \; p = \frac{1}{2}$$

ഇവിടെ $X \sim B(16, \frac{1}{2})$

മാധ്യം, $np = 16 \times \frac{1}{2} = 8$

വ്യതിയാനം, $npq = 8 \times \frac{1}{2} = 4$

മാനക വ്യതിയാനം, $\sqrt{npq} = \sqrt{4} = 2$

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

1. ഒരു യന്ത്രം നിർമിക്കുന്ന ഇനങ്ങളിൽ 10% ഗുണനിലവാരമില്ലാത്തവ ആകുവാൻ സാധ്യതയുള്ളതാണ്. ഇതിൽ നിന്നും 5 ഇനങ്ങൾ അനിയതമായി തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. രണ്ടിൽ കൂടുതൽ ഇനങ്ങൾ ഗുണനിലവാരമില്ലാത്തവയാകാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

2. സാധാരണയായി മൃഗങ്ങളിൽ ഒരു പ്രത്യേക രോഗം വരുന്നതിന്റെ നിരക്ക് 25% ആണ്. 6 മൃഗങ്ങളെ അനിയതമായി തിരഞ്ഞെടുത്ത് പരിശോധിക്കുന്നു. ഇതിൽ ഒരു മൃഗത്തിന് പോലും അസുഖം ഇല്ലാതിരിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

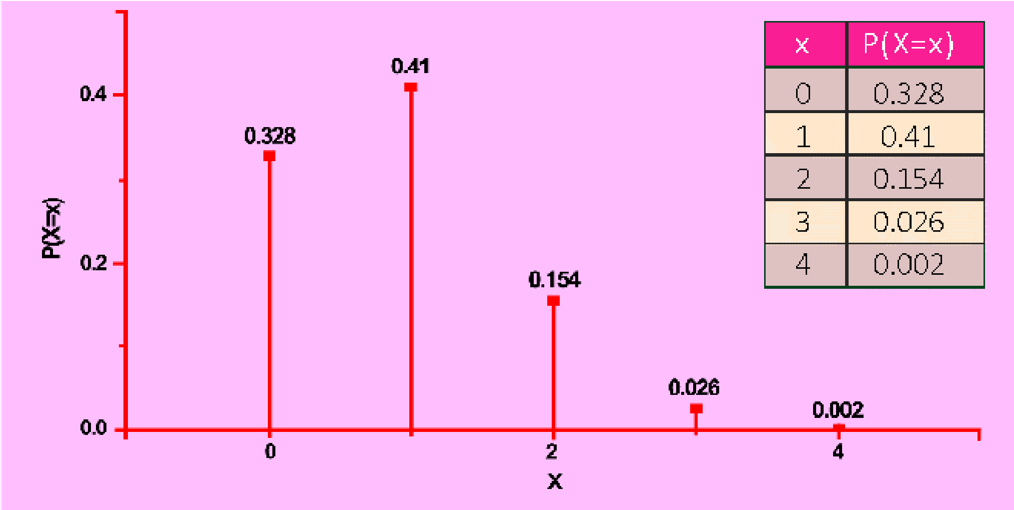
3. ഒരു പകിട 240 തവണ എറിയുന്നു. '6' കിട്ടുന്ന എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യം, വ്യതിയാനം, മാനക വ്യതിയാനം എന്നിവ കാണുക.

4. ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം 40 ഉം മാനക വ്യതിയാനം 2 ഉം ആണ്. n, p, q എന്നിവയുടെ വിലകൾ കാണക്കാക്കുക. സംഭാവ്യതയുടെ ഘനത്വ ഏകദം എഴുതുക.

ജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യതയും ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന്റെ ആകൃതിയും

ഉദ്യമങ്ങളുടെ എണ്ണം, n ന്റെ ഏത് വിലയ്ക്കും

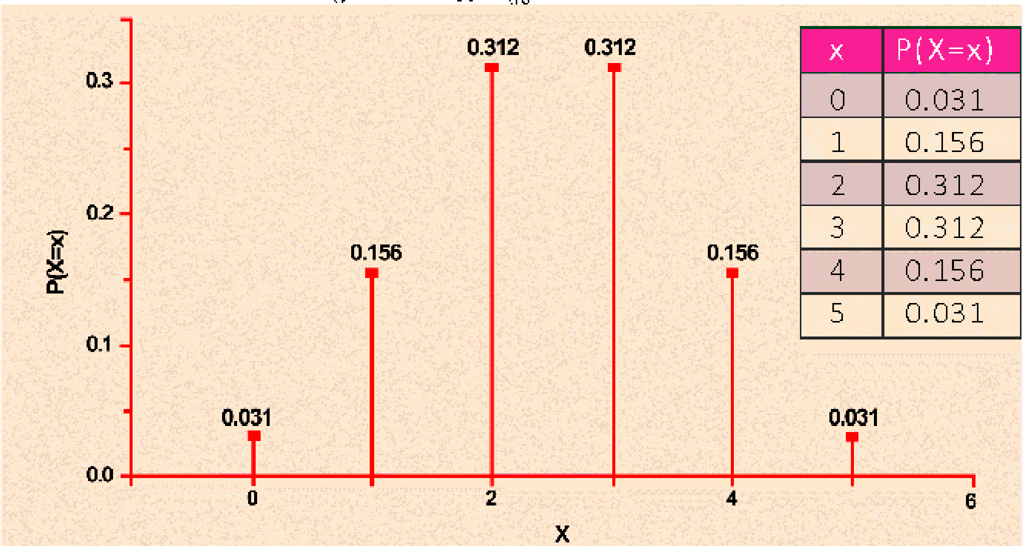
- $p = 0.5$ ആയാൽ ബൈനോമിയൽ വിതരണം സമമിതമായിരിക്കും.
- $p < 0.5$ ആയാൽ ബൈനോമിയൽ വിതരണം പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനസ്സ് ഉള്ളത് ആയിരിക്കും.
- $p > 0.5$ ആയാൽ ബൈനോമിയൽ വിതരണം നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനസ്സ് ഉള്ളത് ആയിരിക്കും.



x	P(X=x)
0	0.328
1	0.41
2	0.154
3	0.026
4	0.002

ചിത്രം 5. 1. n=5 ഉം p=0.3 ഉം ആയ ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

ഇവിടെ വിതരണം പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനസ്സ് ഉള്ളതാണ്.

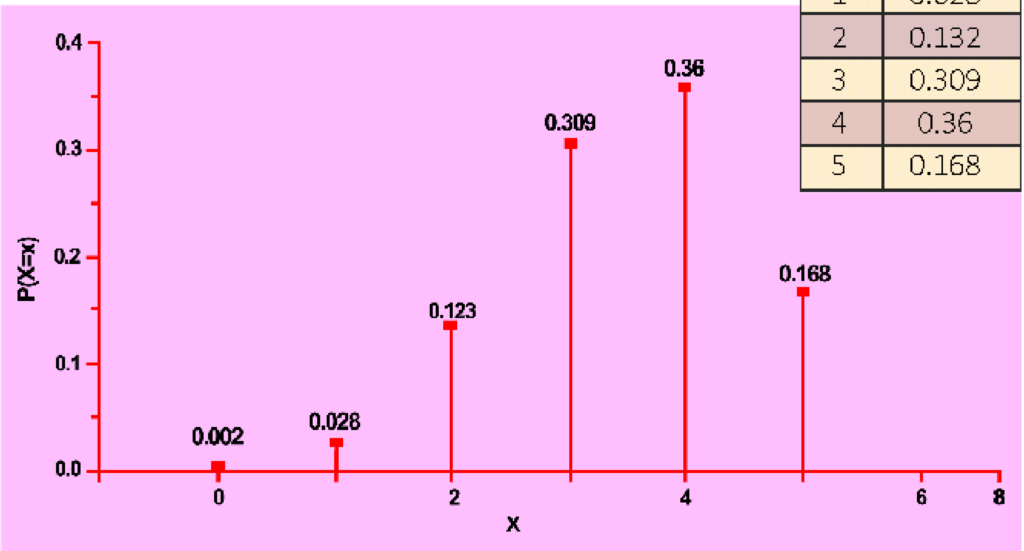


x	P(X=x)
0	0.031
1	0.156
2	0.312
3	0.312
4	0.156
5	0.031

ചിത്രം 5-2. n=5 ഉം p=0.5 ഉം ആയ ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

ഇവിടെ വിതരണം സമമിതമാണ്.

x	P(X=x)
0	0.002
1	0.028
2	0.132
3	0.309
4	0.36
5	0.168



ചിത്രം 5-3. n=5 ഉം p=0.7 ഉം ആയ ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

ഇവിടെ വിതരണം നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനസ്സ് ഉള്ളതാണ്.

ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന്റെ പ്രാധാന്യം

- ബിസിനസ് മേഖലയിൽ തീരുമാനം എടുക്കുന്ന സാഹചര്യങ്ങളിൽ ബൈനോമിയൽ വിതരണം വളരെ ഉപയോഗപ്രദമുള്ളതായി കാണപ്പെടുന്നു.
- സാംഖ്യക ഗുണ നിയന്ത്രണത്തിൽ (Statistical quality control) ഇതിന് വളരെ വലിയ പ്രായോഗികതയുണ്ട്. ബൈനോമിയൽ വിതരണം വ്യത്യസ്തങ്ങളായ ജീവിത സാഹചര്യങ്ങളിലെ സംഭവങ്ങളെ വിവരിക്കുന്നു.
- n ന്റെ വില വളരെ വലുതാകുകയും p യുടെയും q ന്റെയും വിലകൾ തമ്മിൽ കാര്യമായ വ്യത്യാസം ഇല്ലാതിരിക്കുകയും ചെയ്യുന്ന സാഹചര്യങ്ങളിൽ ബൈനോമിയൽ വിതരണം (ഏകദേശം) നോർമൽ വിതരണം ആയിരിക്കും.

ബൈനോമിയൽ ചരങ്ങളുടെ സങ്കലന സ്വഭാവം

X എന്നത് n_1 ഉം p യും പരാമീറ്ററുകളായ ഒരു ബൈനോമിയൽ ചരവും Y എന്നത് n_2 ഉം p യും പരാമീറ്ററുകളായ മറ്റൊരു ബൈനോമിയൽ ചരവും ആയാൽ X + Y എന്നത് $(n_1 + n_2)$ ഉം p യും പരാമീറ്ററുകളായ ബൈനോമിയൽ ചരം ആയിരിക്കും.

അതായത് $X \sim B(n_1, p)$ ഉം $Y \sim B(n_2, p)$ ഉം ആയാൽ $(X + Y) \sim B(n_1 + n_2, p)$ ആയിരിക്കും.

5.2. പോയ്സോൺ സംഭാവ്യത വിതരണം (Poisson Probability Distribution)

സൈമൺ ഡെനീസ് പോയ്സോൺ (1781-1840) എന്ന ഫ്രഞ്ച് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞന്റെ പേരിൽ അറിയപ്പെടുന്ന പോയ്സോൺ സംഭാവ്യത വിതരണം മറ്റൊരു വേരിട്ട സംഭാവ്യത വിതരണമാണ്. ഇത് പ്രായോഗിക തലത്തിൽ ധാരാളം ഉപയോഗിച്ചുവരുന്നു. ഒരു ജലസേചന പദ്ധതിയിലെ പമ്പ് ഒരു മാസത്തിൽ ശരാശരി 3 തവണ പ്രവർത്തനം നിലയ്ക്കുന്നുമെന്ന് വിചാരിക്കുക. നമുക്ക് അടുത്ത മാസം പമ്പ് കൃത്യം 2 തവണ പ്രവർത്തനം നിലയ്ക്കുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കണക്കാക്കണമെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇത് ഒരു പോയ്സോൺ സംഭാവ്യതക്ക് ഉദാഹരണമാണ്. പോയ്സോൺ സാങ്കേതിക ഭാഷയിൽ ഓരോ തവണ പ്രവർത്തനം നിലയ്ക്കുന്നതിനെയും സംഭവം (Occurrence) എന്ന് വിളിക്കുന്നു. സംഭവിക്കാൻ സാധ്യതയുള്ള ഫലങ്ങളുടെ ശരാശരി എണ്ണം മുൻകൂട്ടി അറിയാവുന്നതോ കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതോ ആയ ഒരു വേരിട്ട അനിയതചരത്തിന്റെ ഒരു പ്രത്യേക ഫലം നിശ്ചിത ഇടവേളയിൽ സംഭവിക്കാവുന്ന എണ്ണം കണ്ടെത്താൻ പോയ്സോൺ പ്രക്രിയ ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണങ്ങൾ

- ഒരു ടെലിഫോൺ സ്വിച്ച് ബോർഡിൽ ഓരോ മണിക്കൂറിലും വരുന്ന അന്തർദ്ദേശിയ ഫോൺ വിളികൾ.
- ഒരു ചികിത്സാലയത്തിൽ ഓരോ മണിക്കൂറിലും എത്തുന്ന രോഗികൾ.
- ഒരു നഗരത്തിൽ ഒരു ആഴ്ചയിൽ സംഭവിക്കുന്ന റോഡ് അപകടങ്ങൾ.
- ഒരു ദ്രാവകത്തിന്റെ ഓരോ യൂണിറ്റ് അളവിലും അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന അണുജീവികൾ.
- സർവ്വീസ് സ്റ്റേഷനിൽ സർവ്വീസ് ചെയ്യുന്നതിനായി കാത്തിരിക്കുനന്ന കാറുകൾ.
- ഒരു നല്ല പുസ്തകത്തിലെ ഒരു താളിൽ കാണുന്ന അച്ചടി തെറ്റുകൾ.

ഇവിടെ സംഭവങ്ങൾ ഏതെങ്കിലും രീതി പിന്തുടരുന്നില്ല. അത് കൊണ്ട് അവ പ്രവചിക്കുവാൻ സാധ്യമല്ല. ഈ അർത്ഥത്തിൽ സംഭവങ്ങൾ അനിയതമാണ്. സംഭവങ്ങൾ എല്ലായ്പ്പോഴും ഒരു നിശ്ചിത ഇടവേളയിലാണ് പരിഗണിക്കുന്നത്. ഈ ഇടവേള സമയത്തിന്റെയോ വ്യാപ്തത്തിന്റെയോ അല്ലെങ്കിൽ സ്ഥലത്തിന്റെയോ ആകാം. പമ്പ് സെറ്റിന്റെ ഉദാഹരണത്തിൽ ഇടവേള ഒരു മാസമായിരുന്നു. അത് ഒരു സമയത്തിന്റെ ഇടവേള ആണ്.

ഒരു ദ്രാവകത്തിലുള്ള അണുജീവികളുടെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം ഇടവേള വ്യാപ്തത്തിലാണ്. ഓരോ താളിലും ഉള്ള തെറ്റുകളെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം ഇടവേള ഒരു സ്ഥലത്തിലാണ്.

ഓരോ ഇടവേളയിലും ഉള്ള സംഭവങ്ങൾ അനിയതവും അനാശ്രിതങ്ങളുമാണ്.

നിശ്ചിത ഇടവേളയിലെ സംഭവങ്ങളുടെ ശരാശരി എണ്ണം അറിയാമെങ്കിൽ, ആ ഇടവേളയിൽ സംഭവത്തിന്റെ ഒരു നിശ്ചിത എണ്ണത്തിന്റെ (X) സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുവാൻ സാധിക്കും.

പോയ്സോൺ വിതരണം പ്രയോഗിക്കുന്നതിനുള്ള നിബന്ധനകൾ

ഒരു പോയ്സോൺ വിതരണം പ്രയോഗിക്കുന്നതിന് പാലിക്കേണ്ട മൂന്ന് നിബന്ധനകളാണ് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത്.

1. X ഒരു വേറിട്ട അനിയത ചരമാണ്
2. സംഭവങ്ങൾ അനിയതമായിരിക്കണം.
3. സംഭവങ്ങൾ സ്വതന്ത്രമായിരിക്കണം.

പോയ്സോൺ വിതരണം ഉപയോഗിച്ച് സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുവാൻ സാധിക്കുന്ന ചില വേറിട്ട അനിയത ചരങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണത്തിൽ ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

1. ഒരു പ്രത്യേക ദിവസം ഒരു വീട്ടിൽ വരുന്ന വിൽപ്പനക്കാരുടെ എണ്ണം പരിഗണിക്കുക. വിൽപ്പനക്കാരന്റെ വരവിനെ 'സംഭവം' എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇവിടെ ഇടവേള ഒരു ദിവസമാകുന്നു (സമയത്തിന്റെ ഇടവേള). സംഭവങ്ങൾ അനിയതമാണ്. ഒരു ദിവസം വരുന്ന വിൽപ്പനക്കാരുടെ എണ്ണം 0,1,2,..... എന്നിങ്ങനെ ആകാം. കൂടാതെ വരവുകൾ സ്വതന്ത്രവുമാണ്.

2. ഒരു യന്ത്രത്തിൽ ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കുന്ന 100 ഇനങ്ങൾ അടങ്ങിയ ഒരു കൂട്ടത്തിൽ ഉള്ള ഗുണനിലവാരമില്ലാത്തവയുടെ എണ്ണം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ സംഭവങ്ങൾ (ഗുണനിലവാരമില്ലാത്ത ഇനങ്ങൾ) അനിയതവും സ്വതന്ത്രവുമാണ്. അവ 0,1,2,..... എന്നിങ്ങനെ ആകാം. ഇവിടെയുള്ളത് വ്യാപ്തത്തിന്റെ (100 എണ്ണങ്ങളുടെ) ഇടവേളയാണ്.

3. ആറ് അടിയുള്ള ഒരു പി.വി.സി. പൈപ്പിലെ പൊട്ടലുകളുടെ എണ്ണം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടത്തെ ഇടവേള സ്ഥലപരമായ ഇടവേളക്ക് ഉദാഹരണമാണ്. പൊട്ടലുകൾ അനിയതവും സ്വതന്ത്രവുമാണ്.

പോയ്സോൺ വിതരണം പ്രയോഗിക്കാവുന്ന ധാരാളം ഉദാഹരണങ്ങൾ നമുക്ക് ഉദ്ധരിക്കുവാൻ കഴിയും.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം.

1. ഒരു റോഡിൽ ഒരാഴ്ച നടക്കുന്ന അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം.
2. ഒരു കടയിൽ ഒരു മണിക്കൂറിൽ പ്രവേശിക്കുന്ന ഉപഭോക്താക്കളുടെ എണ്ണം.
3. ഒരു ഗൃഹോപകരണ വിൽപ്പനശാലയിൽ ഒരാഴ്ചയിൽ വിൽക്കുന്ന അലക്കു യന്ത്രങ്ങളുടെ എണ്ണം.

ഇതിന് വിപരീതമായി നിർബന്ധമായും മുൻകൂട്ടി സമയം തീരുമാനിച്ച് സന്ദർശിക്കേണ്ട ഒരു ഡോക്ടറുടെ ചികിത്സാലയത്തിലേക്കുള്ള രോഗികളുടെ സന്ദർശനം പരിഗണിക്കുക. സന്ദർശനങ്ങൾ അനിയതമല്ല, കാരണം രോഗികൾക്ക് ഡോക്ടറെ സന്ദർശിക്കുന്നതിന് മുൻകൂട്ടി സമയം നിശ്ചയിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഒരു റെയിൽവേ സ്റ്റേഷനിലേക്കുള്ള പാസഞ്ചർ ട്രെയിനുകളുടെ ആഗമനവും വിമാനത്താവളത്തിൽ എത്തുന്ന വിമാനങ്ങളുടെ ആഗമനവും അനിയതമല്ല. അവയ്ക്ക് പട്ടിക പ്രകാരമുള്ള സമയങ്ങളുണ്ട്. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ പോയ്സോൺ വിതരണം പ്രയോഗിക്കുവാൻ സാധ്യമല്ല.

പോയ്സോൺ സംഭാവ്യതാ സൂത്രവാക്യം (Poisson Probability Formula)

പോയ്സോൺ സാങ്കേതിക ഭാഷയിൽ ഒരു ഇടവേളയിലെ സംഭവങ്ങളുടെ ശരാശരി എണ്ണത്തെ

λ (ലാംഡ) കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം ഈ ഇടവേളയിൽ സംഭവങ്ങളുടെ യഥാർത്ഥ എണ്ണം X കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇടവേളയിലെ ശരാശരി സംഭവങ്ങളുടെ എണ്ണം, λ അറിയാമെങ്കിൽ ഒരു ഇടവേളയിൽ x സംഭവങ്ങൾ ഉണ്ടാകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത, പോയ്സോൺ സംഭാവ്യത വിതരണം ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കുവാൻ സാധിക്കും.

ഒരു ഇടവേളയിൽ x സംഭവങ്ങൾ സംഭവിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത,

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

$= 0$, x ന്റെ മറ്റുവിലകൾക്ക്

ഇവിടെ λ എന്നത് ശരാശരി സംഭവങ്ങളും, $e = 2.71828$ ഉം ആകുന്നു.

ഒരു വേറിട്ട ചരം X ഒരു പോയ്സോൺ വിതരണത്തിലാണ് എങ്കിൽ അതിന്റെ സംഭാവ്യത ഘനത്വ ഏകദം, $P(X = x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$

$= 0$, x ന്റെ മറ്റുവിലകൾക്ക്

സംഭവങ്ങളുടെ ശരാശരി എണ്ണം, λ യാണ് പോയ്സോൺ വിതരണത്തിന്റെ പരാമീറ്റർ. പോയ്സോൺ വിതരണത്തെ $P(\lambda)$ ഉപയോഗിച്ച് കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം

ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിൻ നിന്ന് പോയ്സോൺ വിതരണത്തിലേക്കുള്ള മാറ്റം

ജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത, (p) വളരെ ചെറുതും n വളരെ വലുതും, മാധ്യം $E(X) = np$ ചെറുതും ആകുന്ന സാഹചര്യങ്ങളിൽ ബൈനോമിയൽ വിതരണം പോയ്സോൺ വിതരണം ആകുന്നു.

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾക്ക് വിധേയമായി ബൈനോമിയൽ വിതരണം പോയ്സോൺ വിതരണമായി മാറുന്നു.

I. ഉദ്യമങ്ങളുടെ എണ്ണം വളരെ കൂടുതലാവുക. $n \to \infty$.

II. ജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത വളരെ കുറവാകുക. $p \to 0$.

III. np യുടെ വില പരിമിതമായിരിക്കുക, അത് λ ആയിരിക്കുക.

പോയ്സോൺ വിതരണം – അസംഭവ്യമായ (അപൂർവമായ) സംഭവങ്ങളുടെ നിയമം

ഒരു സംഭവം വിരളമായി സംഭവിക്കുന്നതാണെന്ന് വിചാരിക്കുക. എങ്കിൽ അത് സംഭവിച്ചതിന്റെ എണ്ണം എണ്ണിനോക്കുവാൻ സാധിക്കും. എന്നാൽ സംഭവിക്കാത്തതിന്റെ എണ്ണം എണ്ണി നോക്കുവാൻ സാധ്യമല്ല. കാരണം പരീക്ഷണങ്ങളുടെ ഉദ്യമങ്ങളുടെ എണ്ണം കൃത്യമായി അറിയില്ല. ഇത്തരം വിരളമായ സംഭവങ്ങളുടെ സ്വഭാവത്തെ പോയ്സോൺ വിതരണം വിശദീകരിക്കുന്നു.

ഒരു സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യത വളരെ കുറവാകുന്ന സാഹചര്യങ്ങളിൽ പോയ്സോൺ വിതരണം പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു. അത് കൊണ്ട് ഈ വിതരണത്തെ വിരളമായ ഇവന്റുകളുടെ നിയമം എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

പോയ്സോൺ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യവും വ്യതിയാനവും

λ പരാമീറ്റർ ആയ പോയ്സോൺ വിതരണത്തിന്റെ

മാധ്യം, $E(X) = \lambda$

വ്യതിയാനം $V(X) = \lambda$

മാനക വ്യതിയാനം $SD(X) = \sqrt{\lambda}$

പരാമീറ്റർ λ അറിയില്ലെങ്കിൽ, അത് np കൊണ്ട് കണക്കാക്കുന്നു. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ p വളരെചെറുതും 'n' വലുതുമാകേണ്ടതാണ്.

λ പരാമീറ്റർ ആയ പോയ്സോൺ വിതരണത്തിന്റെ

മാധ്യം, $E(X) = \lambda$, വ്യതിയാനം $V(X) = \lambda$, മാനക വ്യതിയാനം, $SD(X) = \sqrt{\lambda}$

വിശദീകരണം 5.6

ഒരു ജലസേചന പദ്ധതിയിലെ പമ്പ് സെറ്റ് കഴിഞ്ഞ വർഷം ഒരു മാസത്തിൽ ശരാശരി 3.4 തവണ പ്രവർത്തനം നിലച്ചു

a. പമ്പ് സെറ്റ് അടുത്ത മാസം പ്രവർത്തനം നിലയ്ക്കാതിരിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

b. പമ്പ് സെറ്റ് അടുത്ത മാസം കൃത്യം മൂന്ന് തവണ പ്രവർത്തനം നില്ക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

c. പ്രവർത്തനം നിലയ്ക്കുന്നതിന്റെ എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യവും വ്യതിയാനവും കാണുക

പരിഹാരം

പമ്പ്സെറ്റ് ഒരു മാസത്തിൽ പ്രവർത്തനം നിലയ്ക്കുന്നതിന്റെ എണ്ണം X ആണെന്നിരിക്കട്ടെ $X \sim P(3.4)$

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad , x = 0,1,2,\ldots$$

a. പമ്പ് സെറ്റ് അടുത്ത മാസം പ്രവർത്തനം നിലയ്ക്കാതിരിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത= $P(X=0)$

$$= \frac{e^{-3.4}(3.4)^0}{0!}$$

$$= e^{-3.4}$$

$$= 0.033$$

b. പമ്പ് സെറ്റ് അടുത്ത മാസം കൃത്യം 3 തവണ പ്രവർത്തനം നിലയ്ക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത $= P(X=3)$

$$= \frac{e^{-3.4}(3.4)^3}{3!}$$

$$= \frac{0.033 \times 39.304}{6}$$

$$= 0.216$$

c. മാധ്യം, $E(X) = \lambda = 3.4$

വ്യതിയാനം $V(X) = \lambda = 3.4$

വിശദീകരണം 5.7

500 പേജുള്ള ഒരു കൈയെഴുത്തുപ്രതിയിൽ അനിയതമായി 200 അച്ചടി പിശകുകൾ ഉണ്ട്. എങ്കിൽ അനിയതമായി തിരഞ്ഞെടുക്കുന്ന ഒരു പേജിൽ കൃത്യം മൂന്ന് തെറ്റുകൾ ഉണ്ടാവാനുള്ള സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

ഒരു പേജിലെ ശരാശരി തെറ്റുകളുടെ എണ്ണം $\lambda = \frac{200}{500} = 0.4$

ഒരു പേജിൽ കൃത്യം 3 തെറ്റുകൾ കാണുവാനുള്ള സംഭാവ്യത, $P(X=3)$

$$= \frac{e^{-0.4}(0.4)^3}{3!}$$

$$= 0.0072$$

വിശദീകരണം 5.8

ഒരു ഫാക്ടറിയിൽ ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കുന്ന 0.2% ഇനങ്ങൾ ഗുണനിലവാരമില്ലാത്തതാണ്. ഫാക്ടറിയിലെ ഇനങ്ങൾ 500 എണ്ണം വരുന്ന പായ്ക്കറ്റുകളാകുന്നു. ഇത്തരം 1000 പായ്ക്കറ്റുകളിൽ എത്രയെണ്ണത്തിൽ കൃത്യം ഗുണനിലവാരമില്ലാത്ത ഒരു ഇനം ഉണ്ടാകും?

പരിഹാരം

$n = 500, \; p = 0.002$

$\lambda = np = 500 \times 0.002 = 1$

X എന്നത് ഒരു പായ്ക്കറ്റിലെ കേടുപറ്റിയ ഇനങ്ങളുടെ എണ്ണം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ
$X \sim P(1)$

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad , x = 0,1,2,\ldots.$$

കേടുപറ്റിയ ഇനങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒന്നാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $= P(X=1)$

$$= \frac{e^{-1}1^{1}}{1!}$$

$$= 0.03679$$

കേടുപറ്റിയ ഇനങ്ങളുടെ എണ്ണം കൃത്യം ഒന്നായ പായ്ക്കറ്റുകളുടെ എണ്ണം $= 1000 \times 0.3679$

$= 367.9 \approx 368$ ഇനങ്ങൾ

വിശദീകരണം 5.9

X എന്ന അനിയത ചരം $P(X=1) = P(X=2)$. ആകുന്നു. X പോയ്സോൺ വിതരണത്തിലാണ്. $P(X=0)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad , x = 0,1,2,\ldots.$$

$P(X=1) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{1}}{1!}$ ഉം $P(X=2) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{2}}{2!}$ ഉം ആകുന്നു.

$P(X=1) = P(X=2)$ ആയതിനാൽ

$\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{1}}{1!} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{2}}{2!}$ ആകുന്നു.

ആയതുകൊണ്ട് $\lambda = \dfrac{\lambda^{2}}{2}$

$$\lambda = 2$$

$$P(X=0) = \frac{e^{-2}2^{0}}{0!}$$

$$= e^{-2}$$

$$= 0.1353$$

വിശദീകരണം 5.10

ഒരു കൂട്ടം ആളുകളിൽ ഏകദേശം 2% പേർ ഇടുതുകയ്യൻമാരാണ്. അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ 200 പേരുള്ള കൂട്ടത്തിൽ കൃത്യം 5 പേർ ഇടതുകയ്യൻമാർ ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

പരിഹാരം

$n = 200,\ p = 0.02$

അതായത്, $\lambda = np = 200 \times 0.02 = 4$

X എന്നത് ഇടതുകയ്യൻമാരുടെ എണ്ണം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ $X \sim P(4)$

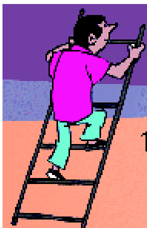
$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\ ,\ x = 0,1,2,\ldots$$

കൃത്യം 5 പേർ ഇടതുകയ്യൻമാർ ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത $= P(X=5)$

$$= \frac{e^{-4}4^{5}}{5!}$$

$$= \frac{0.0183\times 1024}{120}$$

$$= 0.1563.$$



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

1. സ്വയം പ്രവർത്തിക്കുന്ന ഒരു പുതിയ നിർമ്മാണ പ്രക്രിയയിൽ ദിവസേന ശരാശരി 1.5 തവണ പ്രവർത്തനം നിലയ്ക്കുന്നു. പ്രവർത്തനം നിലയ്ക്കുന്നത് അനിയതമാണെന്ന് അനുമാനിക്കുക. ഒരു ദിവസം പ്രവർത്തനം നിലയ്ക്കുന്നതിന്റെ എണ്ണം മൂന്നിൽ കുറവാകുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത എന്ത്?
2. ഒരു ലൈഫ് ഇൻഷ്വറൻസ് കമ്പനി 40 വയസ്സുള്ള 5000 പേരെ ഇൻഷ്വർ ചെയ്യുന്നു. പഠനങ്ങൾ തെളിയിക്കുന്നത് 40 വയസുള്ള ഒരാൾ ഒരു വർഷത്തിനുള്ളിൽ മരണപ്പെടുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.001 ആണെന്നാണ്. ഒരു വർഷം ഇൻഷ്വറൻസ് കമ്പനി കുറഞ്ഞത് രണ്ട് പേർക്കെങ്കിലും നഷ്ട പരിഹാരം നൽകേണ്ടിവരുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.
3. ഒരു നിർമ്മാണ ശാലയിൽ ബ്ലേഡുകൾ 10 എണ്ണത്തിന്റെ പായ്ക്കറ്റുകളിലാക്കി നിർമ്മിക്കുന്നു. ഒരു ബ്ലേഡ് ഗുണനിലവാരമില്ലാത്ത ആകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.002 ആണ്. 10,000 പായ്കറ്റുകളിൽ ഗുണനിലവാരമില്ലാത്ത ബ്ലേഡുകളുടെ എണ്ണം കുറഞ്ഞത് രണ്ടെണ്ണമെങ്കിലും ആയ എത്ര പായ്ക്കറ്റുകൾ ഉണ്ട്.

പോയ്സോൺ വിതരണത്തിന്റെ പ്രാധാന്യം

ഒരു ഇവന്റിന്റെ സംഭാവ്യത വളരെ ചെറുതും അതിന്റെ സാധ്യതകൾ വളരെ കൂടുതലും ആകുന്ന റേറിട്ട അനിയത ചരങ്ങളുടെ സ്വഭാവം പോയ്സോൺ വിതരണം വിശദീകരിക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ പോയ്സോൺ വിതരണത്തിന് വാണിജ്യ മേഖലയിലും, ഇൻഷ്വറൻസ്, ആരോഗ്യശാസ്ത്രം, സാമ്പത്തികശാസ്ത്രം, ഭൗതികശാസ്ത്രം, ജീവശാസ്ത്രം തുടങ്ങിയവയിലും പ്രായോഗിക തലങ്ങളുണ്ട്.

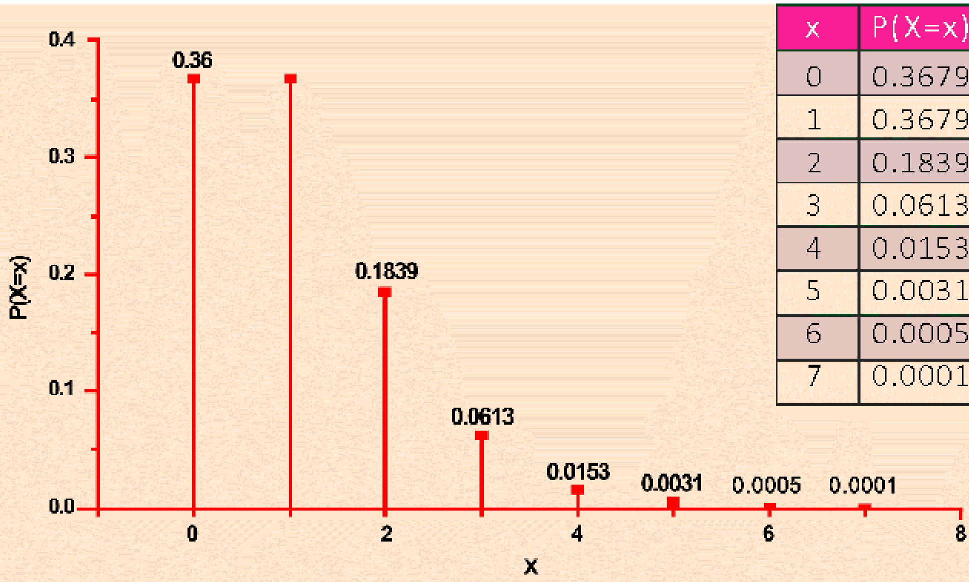
പോയ്സോൺ ചരങ്ങളുടെ സങ്കലന സവിശേഷത

X എന്നത് λ_1 പരാമീറ്ററായിട്ടുള്ള ഒരു പോയ്സോൺ ചരവും Y എന്നത് λ_2, പരാമീറ്ററായിട്ടുള്ള മറ്റൊരു ചരവുമാണെങ്കിൽ $X+Y$ എന്നത് $\lambda_1 + \lambda_2$ പരാമീറ്ററായിട്ടുള്ള ഒരു പോയ്സോൺ ചരം ആയിരിക്കും.

$X \sim P(\lambda_1)$ ഉം $Y \sim P(\lambda_2)$, ഉം ആണെങ്കിൽ $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$ ആയിരിക്കും.

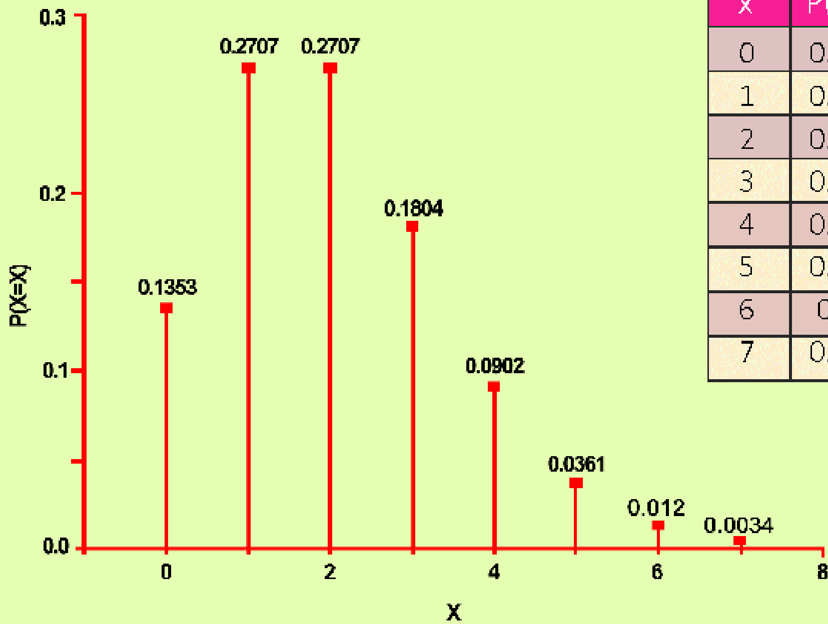
പോയ്സോൺ വിതരണത്തിന്റെ ആകൃതി

ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണം $p < 0.5$ ആണെങ്കിൽ പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉള്ളത് ആണെന്ന് നാം കണ്ടു. ഒരു പോയ്സോൺ വിതരണത്തിൽ ജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത വളരെ ചെറുതാണ്. അത്കൊണ്ട് പോയ്സോൺ വിതരണം എല്ലായ്പ്പോഴും പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനസ് ഉള്ളതായിരിക്കും.



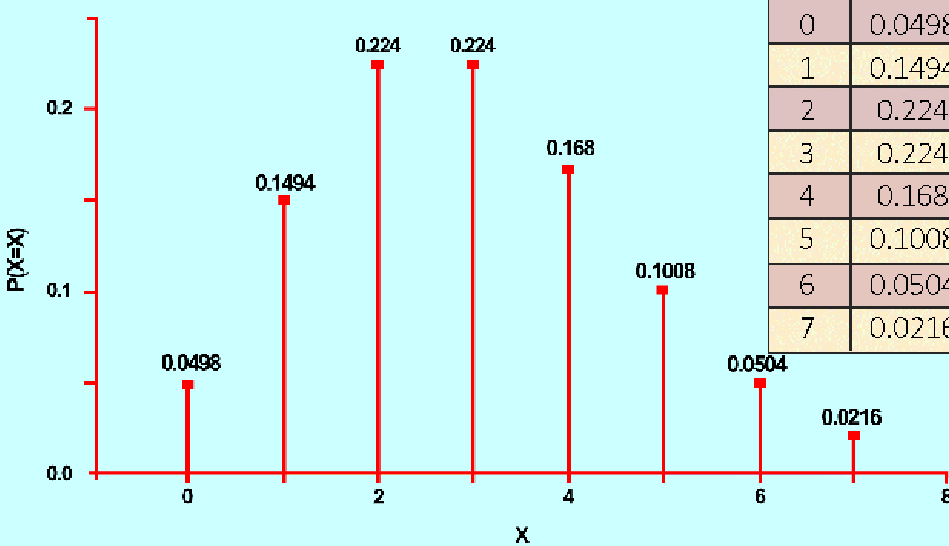
x	P(X=x)
0	0.3679
1	0.3679
2	0.1839
3	0.0613
4	0.0153
5	0.0031
6	0.0005
7	0.0001

ചിത്രം 5.4 $\lambda = 1$ ആയ പോയ്സോൺ വിതരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്



x	P(X=x)
0	0.1353
1	0.2707
2	0.2707
3	0.1804
4	0.0902
5	0.0361
6	0.012
7	0.0034

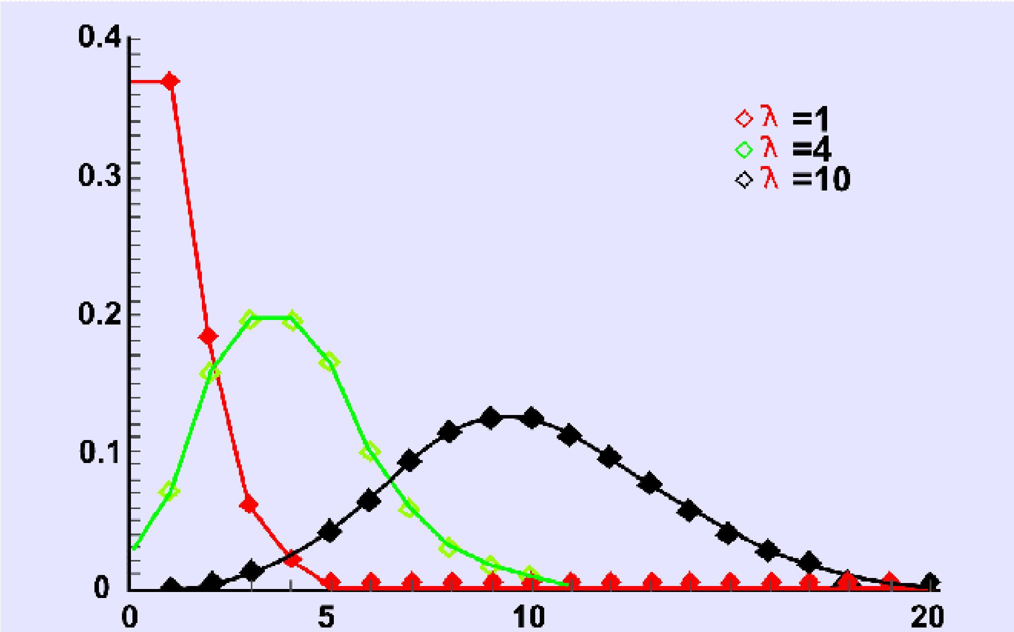
ചിത്രം 5.5 $\lambda = 2$ ആയ പോയസോൺ വിതരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്



x	P(X=x)
0	0.0498
1	0.1494
2	0.224
3	0.224
4	0.168
5	0.1008
6	0.0504
7	0.0216

ചിത്രം 5.6 $\lambda = 3$ ആയ പോയ്സോൺ വിതരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

പോയ്സോൺ വിതരണത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ ആകൃതി കാണുക. അത് λ യെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. λ ചെറുതാണെങ്കിൽ പോയ്സോൺ വിതരണം പോസിറ്റീവ് സ്കൂനസ് ഉള്ളതായിരിക്കും. λ യുടെ വില വലുതാകുന്തോറും അത് സമമിതത്തിലേക്ക് അടുക്കുന്നു.



ചിത്രം 5.7

നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

ഈ അധ്യായത്തിൽ ബെർണോളി പ്രക്രിയ, ബൈനോമിയൽ വിതരണം, പോയ്സോൺ വിതരണം എന്നിവ ചർച്ച ചെയ്തു. ഒരു ഉദ്യമത്തിൽ സാധ്യമായ രണ്ട് ഫലങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കുകയും, ഏത് ഉദ്യമത്തിലെയും ഫലത്തിന്റെ സംഭാവ്യത സ്ഥിരമായിരിക്കുകയും ഉദ്യമങ്ങൾ സ്വതന്ത്രമായിരിക്കുകയും ചെയ്യുന്ന പ്രക്രിയകളെ ബെർണോളി പ്രക്രിയകൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഒരു നിശ്ചിത എണ്ണം സ്വതന്ത്രങ്ങളായ ഉദ്യമങ്ങളിൽ, ഓരോ ഉദ്യമത്തിലും ജയവും പരാജയവും ഉണ്ടായിരിക്കുകയും ജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത എല്ലാ ഉദ്യമത്തിലും ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായിരിക്കുകയും ചെയ്യുന്ന സാഹചര്യത്തിൽ ഒരു പ്രത്യേക എണ്ണം ജയങ്ങൾ ലഭിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുന്നതിന് ബൈനോമിയൽ വിതരണം ഉപയോഗിക്കുന്നു. $X \sim B(n, p)$ ആണെങ്കിൽ, $P(X = x) = {}^nC_x p^x q^{n-x}$; $x = 0, 1, 2, \ldots, n$; $q = 1-p$. n ഉം p ഉം പരാമീറ്ററുകളായ ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം, $E(X) = np$, വ്യതിയാനം $V(X) = npq$ ഉം മാനക വ്യതിയാനം $\sigma = \sqrt{npq}$. ഉം ആണ്. ഉദ്യമങ്ങളുടെ എണ്ണം, n ന്റെ ഏത് വിലയ്ക്കും $p = 0.5$ ആയാൽ ബൈനോമിയൽ വിതരണം സമമിതവും, $p < 0.5$ ന് പോസിറ്റീവ് സ്കൂനസ്സ് ഉള്ളതും $p > 0.5$ ന് നെഗറ്റീവ് സ്കൂനസ്സ് ഉള്ളതും ആകുന്നു.

ഒരു നിശ്ചിത ഇടവേളയിൽ അനിയതമായും സ്വതന്ത്രമായതുമായ ഇവന്റുകൾക്ക് പോയ്സോൺ വിതരണം ഉപയോഗിക്കുന്നു. സംഭവങ്ങളുടെ ശരാശരി എണ്ണം, λ പരിമിതമാണ്. പോയ്സോൺ വിതരണം പ്രയോഗിക്കുന്നതിന് λ യുടെ വില അറിയണം. n ന്റെ വില വളരെ കൂടുകയും p യുടെ വില വളരെ ചെറുതാക്കുകയും ചെയ്യുന്ന അവസരത്തിൽ $\lambda = np$ ആകുന്നു. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ബൈനോമിയൽ വിതരണം പോയ്സോൺ വിതരണമായി മാറുന്നു. $X \sim P(\lambda)$ ആണെങ്കിൽ $P(X = x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$, λ പരാമിറ്റർ ആയ പോയ്സോൺ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം, $E(X) = \lambda$ യും വ്യതിയാനം $V(X) = \lambda$. യും ആയിരിക്കും. പോയ്സോൺ വിതരണം എല്ലായ്പ്പോഴും പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനസ്സ് ഉള്ളത് ആയിരിക്കും.

നമുക്ക് വിലയിരുത്താം

ഒന്നു മുതൽ 15 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ബ്രായ്ക്കറ്റിൽ നിന്നും ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

1) n ഉം p യും പരാമീറ്ററുകളായ ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണമാണ് X ന് ഉള്ളത് എങ്കിൽ X ന്റെ വിലകൾ ....

 a) അനന്തം b) പരിമിതപൂർണ്ണ സംഖ്യകൾ

 c) 0 മുതൽ n വരെയുള്ള പൂർണ്ണ സംഖ്യകൾ d) അനന്ത പൂർണ സംഖ്യകൾ

2) ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം എല്ലായ്പ്പോഴും .... ആയിരിക്കും

 a) വ്യതിയാനത്തെക്കാൾ കുറവായിരിക്കും b) വ്യതിയാനത്തെക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കും

 c) വ്യതിയാനത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും d) ഇതൊന്നുമല്ല

3) n ഉം p യും പരാമീറ്ററുകളായ ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം .... ആയിരിക്കും

 a) npq b) np c) n/p d) n+p

4) n = 6 ഉം p = 0.4 ഉം ആയ ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിൻന്റെ വ്യതിയാനം ....ആയിരിക്കും

 a) 0.24 b) 1.44 c) 1.2 d) 1.24

5) ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം 4 ഉം വ്യതിയാനം 3 ഉം ആണ്. ഇതിൽ ജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത .... ആയിരിക്കും.

 a) 0.25 b) 0.75 c) 0.5 d) 0.35

6) പോയ്സോൺ വിതരണം .... എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു.

 a) ശരാശരികളുടെ നിയമം b) അപൂർവ്വ സംഭവങ്ങളുടെ നിയമം

 c) വലിയ സംഖ്യകളുടെ നിയമം d) വിതരണങ്ങളുടെ നിയമം

7. പോയ്സോൺ വിതരണം .... വിതരണത്തിന്റെ രൂപമാറ്റം എന്നു അറിയപ്പെടുന്നു.
   a) ബൈനോമിയൽ b) നോർമൽ c) ജോമെട്രിക് d) പിയർസൺ
8. പോയ്സോൺ വിതരണത്തിന്റെ പരാമീറ്റർ അതിന്റെ .... ഉം കൂടിയാണ്.
   a) മാധ്യം b) മാനകവ്യതിയാനം c) മധ്യാങ്കം d) വലിപ്പം
9. X ഉം Y യും സ്വതന്ത്രങ്ങളായ പോയ്സോൺ ചരങ്ങളാണെങ്കിൽ X+Y .... വിതരണമായിരിക്കും.
   a) ബൈനോമിയൽ b) തുടർചരം c) നോർമൽ d) പോയ്സോൺ
10. പോയ്സോൺ വിതരണം .... ഉള്ളവ ആയിരിക്കും
   a) പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനെസ്സ് b) നെഗറ്റീവ് സ്കുനസ്സ്
   c) സമമിതം d) പോസിറ്റീവും നെഗറ്റീവും സ്ക്യൂന്നസ്സ്
11. ബൈനോമിയൽ വിതരണം സമമിതമാകുന്നത്.......................ആകുന്ന സന്ദർഭത്തിലാണ്.
   a) p =0.5 b) p= 0.1 c) p=0 d) p=0.9
12. 1000 ഉദ്യമങ്ങളിൽ ജയങ്ങളുടെ ശരാശരി എണ്ണം 5 ആണ്. ജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത ....ആണ്.
   a) 0.05 b) 0.95 c) 0.005 d) 0.995
13. 10 പ്രസവങ്ങളിൽ കൃത്യം 3 ആൺകുട്ടികളെ ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കണമെന്നിരിക്കട്ടെ. ഏത് സംഭാവ്യത വിതരണം നിർദേശിക്കും.
   a) പോയ്സോൺ b) ബൈനോമിയൽ c) നോർമൽ d) പോളിനോമിയൽ
14. $\lambda = 1$, ആയ ഒരു പോയ്സോൺ വിതരണത്തിൽ $P(X = 0) = 0.3679$ ആയാൽ $P(X=1)$ .... ആയിരിക്കും.
   a) 0.6321 b) 0.3679 c) 0.2231 d) 0.2386
15. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പരീക്ഷണങ്ങളിൽ നിന്നും ബൈനോമിയൽ പരീക്ഷണങ്ങളെയോ ബൈനോമിയൽ പരീക്ഷണങ്ങളാക്കി മാറ്റുവാൻ സാധിക്കുന്നതോ ആയവ തിരിച്ചറിയുക.
   a) ഒരു പ്രത്യേക തരം സോപ്പ് ഇഷ്ടപ്പെടുന്നുണ്ടോ എന്ന് 100 പേരിൽ ഒരു സർവ്വേ നടത്തുന്നത്.
   b) ഒരു നാണയം 100 തവണ കറക്കിയിട്ട് അതിലെ തലകളുടെ എണ്ണം നോക്കുന്നത്.
   c) ഒരു കൂട്ടം ചീട്ടുകളിൽ നിന്ന് ഒരു ചീട്ട് എടുക്കുന്നതും അത് ഹൃദയ ചിഹ്നമുള്ള ചീട്ടാകുന്നതും
   d) 1000 പേരോട് അവർ ഏത് ഇനം കാപ്പിപ്പൊടിയാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത് എന്ന് ചോദിക്കുന്നത്.
   e) വിവിധ തരം ആസ്പിരിൻ (വേദനസംഹാരി) മരുന്നുകൾ പരിശോധിച്ച് അതിൽ ഏതിനാണ് ഗുണനിലവാരം ഉള്ളതെന്ന് പരിശോധിക്കുന്നത്
   f) 1000 പേരോട് അവർ പുകവലിക്കുമോ എന്ന് ചോദിക്കുന്നത്.

g) പ്രവേശനം ലഭിച്ചുവോ എന്നറിയുവാൻ 1000 അപേക്ഷകരെ പരിശോധിക്കുന്നത്.

h) 300 മത്സരാർത്ഥികളോട് അവരുടെ വയസ്സ് ചോദിക്കുന്നത്.

i) വാഹനം ഓടിക്കുന്നതിനുള്ള അനുമതി പത്രം ഉണ്ടോ എന്ന് അറിയുവാൻ 1000 കുട്ടികളിൽ ഒരു സർവ്വേ നടത്തുന്നത്.

16. ബൈനോമിയൽ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുക.

a) $n = 2, p = 0.30, x = 1$

b) $n = 4, p = 0.60, x = 3$

c) $n = 5, p = 0.10, x = 0$

17. n ഉം p യും ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന വിലകളായി വരുന്ന ബൈനോമിയൽ വിതരണങ്ങളുടെ മാധ്യം, മാനക വ്യതിയാനം, വ്യതിയാനം എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക

a) $n = 100, p = 0.75.$

b) $n = 300, p = 0.3.$

c) $n = 20, p = 0.5.$

d) $n = 10, p = 0.8.$

e) $n = 1000, p = 0.1.$

f) $n = 36, p = \frac{1}{6}.$

18. ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ 40% ജോലിക്കാർ ഇരു ചക്രവാഹനങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നവരാണ്. ഇവരിൽ നിന്നും 8 ജോലിക്കാരെ തിരഞ്ഞെടുത്താൽ അതിൽ 5 പേർ ഇരു ചക്രവാഹനങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നവരാകാനുള്ള സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുക.

19. കേരളത്തിലെ സ്ത്രീകളിൽ 20% പേർ സ്വന്തം ജില്ലയ്ക്ക് പുറത്ത് ജോലി ചെയ്യുന്നവരാണ്. 9 സ്ത്രീകളടങ്ങുന്ന ഒരു സാമ്പിളിൽ ചുവടെ പറയുന്നവയുടെ സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

a) കൃത്യം 3 പേർ സ്വന്തം ജില്ലയ്ക്ക് പുറത്ത് ജോലി ചെയ്യുന്നു.

b) ജില്ലയ്ക്ക് പുറത്ത് ജോലി ചെയ്യുന്ന സ്ത്രീകളുടെ എണ്ണം പരമാവധി മൂന്ന് ആകുന്നു.

20. ഒരാൾ ഒരു വാഹനം ഓടിക്കുന്ന പരിശോധനയിൽ ഒരാൾ ആദ്യത്തെ തവണ വിജയിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.8 ആണ്. 300 പേരടങ്ങുന്ന ഒരു കൂട്ടത്തിൽ ആദ്യത്തെ തവണ വിജയിക്കുന്ന ആൾക്കാരുടെ എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യം, വ്യതിയാനം, മാനകവ്യതിയാനം എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

21. ഒരു ക്ലാസിൽ 75 കുട്ടികളുണ്ട്. അവരുടെ ഹാജരില്ലായ്മയുടെ നിരക്ക് 12% ആണ്. ഓരോ ദിവസവും ഹാജരാകാത്ത കുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യം. വ്യതിയാനം മാനകവ്യതിയാനം എന്നിവ കാണുക.

22. പോയ്സോൺ വിതരണം അനുമാനിച്ച് കൊണ്ട് λ, x എന്നിവയുടെ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന വിലകൾക്കുള്ള സംഭാവ്യത കണക്കാക്കുക.

a) $\lambda = 0.1$, $x = 2$.

b) $\lambda = 4$, $x = 2$.

c) $\lambda = 2$, $x = 3$.

d) $\lambda = 3$, $x = 5$.

23. കഴിഞ്ഞ വർഷം ഒരു പട്ടണത്തിലെ ഒരു ദിവസത്തെ ശരാശരി അപകട മരണങ്ങളുടെ എണ്ണം 0.1 ആണ്. അപകട മരണങ്ങളുടെ എണ്ണം പോയ്സോൺ ആണെന്ന് അനുമാനിച്ച് കൊണ്ട് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ സംഭാവ്യത കാണുക.

a) ഒരു ദിവസം ഒരു അപകടമരണവും സംഭവിക്കാതിരിക്കുന്നതിന്

b) ഒരു ദിവസത്തെ അപകട മരണങ്ങളുടെ എണ്ണം 3 ൽ കുറവാകുന്നതിന്

24. ഒരു ഘന സെ.മി.ന് രണ്ട് എന്ന നിരക്കിൽ ജലത്തിൽ ഒരു പ്രത്യേക ഇനം ബാക്ടീരിയ കാണപ്പെടുന്നതായി അറിയാം. എന്നാൽ ഒരു ഘന സെ.മി ജലം പ്രതിരൂപണമായെടുത്താൽ, അതിൽ

1. കൃത്യം ഒരു ബാക്ടീരിയ

2. ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് ഒരു ബാക്ടീരിയ

ഉണ്ടായിരിക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത എന്ത്?

25. ഒരു കമ്പനി നിർമിക്കുന്ന ബൾബുകളിൽ 3% ഗുണനിലവാരമില്ലാത്തവയാണ്. ആ കമ്പനി നിർമിച്ച 100 എണ്ണം പരിശോധനക്കെടുത്തപ്പോൾ അതിൽ കൃത്യം 5 എണ്ണം ഗുണനിലവാരമില്ലാത്തതാകാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

26. പുക നിയന്ത്രണ പരിശോധനയിൽ 2% കാറുകൾ പരാജയപ്പെടുന്നു. 200 കാറുകളുടെ പരിശോധനയിൽ 5 എണ്ണം പരാജയപ്പെടാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

27. ഒരു വീഡിയോ ടേപ്പിന് ഓരോ 1000 അടി അളവിലും ശരാശരി ഒന്ന് എന്ന നിരക്കിൽ തകരാർ ഉണ്ട്. എന്നാൽ 3000 അടി ടേപ്പിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് ഒരു തകരാൻ ഉണ്ടാകുവാനുള്ള സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

28. പോയ്സോൺ വിതരണമുള്ള X എന്ന അനിയതചരത്തിന്റെ $P(X=0) = P(X=1)$ എങ്കിൽ $P(X=4)$ കാണുക.

അധ്യായം 6

Z4B2Z8

നോർമൽ വിതരണം (Normal Distribution)

അനിയത ചരമെന്ന ആശയം നിങ്ങൾക്കിപ്പോൾ വളരെ പരിചിതമാണ്. ഖണ്ഡിതവും, തുടർച്ചയുള്ളതുമായ ചരങ്ങളെ സംബന്ധിച്ച വിശദാംശങ്ങൾ അധ്യായം 4 ൽ വിശദമായി ചർച്ച ചെയ്തിരുന്നതാണ്. അതിന്റെ തുടർച്ചയായി, ഇവിടെ തുടർചരങ്ങളുടെ വിതരണങ്ങളെക്കുറിച്ച് നമ്മൾ ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

ഒരു തുടർചരത്തിനു സംഭവിക്കാവുന്ന അനേകം സംഭാവ്യത വിതരണങ്ങളിൽ ഒന്ന് മാത്രമാണ് നോർമൽ വിതരണം. പ്രായോഗികതലത്തിൽ സംഭവിക്കാവുന്ന അനേകം അനിയതചരങ്ങൾ നോർമൽ

സവിശേഷ പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായത്തിന്റെ പൂർത്തീകരണത്തിന് ശേഷം പഠിതാവ്

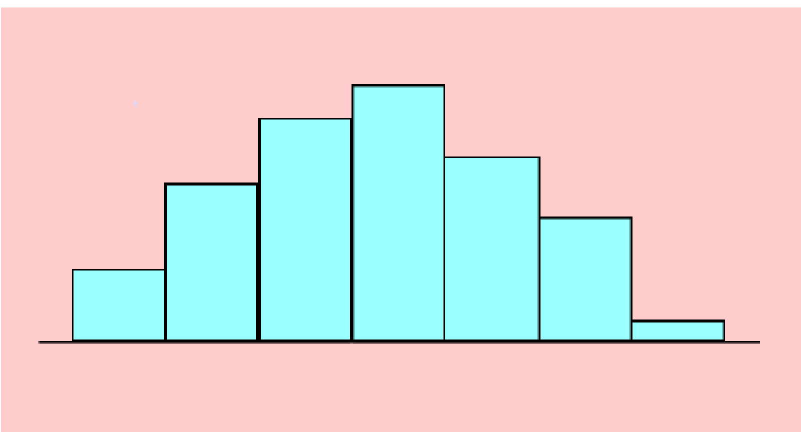
- നോർമൽ വിതരണമെന്ന ആശയം വിശദീകരിക്കുന്നു
- നോർമൽ വിതരണത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ വ്യക്തമാക്കുന്നു.
- നോർമൽ വിതരണത്തിന്റെ പ്രാധാന്യം തിരിച്ചറിയുന്നു.
- വ്യത്യസ്ത സാഹചര്യങ്ങളിൽ നോർമൽ വിതരണം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

വിതരണവുമായി കൂടുതൽ അടുത്തു വരുന്നതിനാൽ, നോർമൽ വിതരണം തുടർചര വിതരണങ്ങളിൽ വളരെയേറെ പ്രാധാന്യമുള്ളതാണ്. അതായത് യഥാർത്ഥജീവിതത്തിലെ അനവധി പ്രതിഭാസങ്ങൾ കൃത്യമായി അല്ലെങ്കിൽ ഏകദേശമായി നോർമൽ വിതരണത്തിലാണ്. ജനങ്ങളുടെ ഉയരം, ഭാരം എന്നിവയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന തുടർചരങ്ങൾ, ഒരു പരീക്ഷയിലെ സ്കോറുകൾ, രക്തത്തിലെ പഞ്ചസാരയുടെ അളവ്, പെരുമാറ്റങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ളശാസ്ത്രം (ബുദ്ധി, നേട്ടങ്ങൾ മുതലായവ), ഒരു ഓട്ടോമാറ്റിക് യന്ത്രം ഉപയോഗിച്ച് നിർമ്മിച്ച സൂചികളുടെ നീളം, ഒരു പ്രത്യേക ഇനം എണ്ണ ടിന്നിലടച്ച് വരുമ്പോഴുള്ള അളവ്, ഒരു ജോലി പൂർത്തീകരിക്കാൻ എടുക്കുന്നസമയം എന്നിവയെല്ലാം നോർമൽ വിതരണ അനിയത ചരങ്ങൾക്കുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. മേൽപ്പറഞ്ഞവയെല്ലാം പല സ്വതന്ത്രഘടകങ്ങളാൽ മാറ്റത്തിന് വിധേയവും എന്നാൽ ഓരോ ഘടകങ്ങൾമൂലമുള്ള ആ മാറ്റം വളരെ ചെറുതുമായിരിക്കും. ഒരു അനിയതകചരത്തെ പല ഘടകങ്ങളും ബാധിക്കുകയും ഓരോ ഘടകങ്ങളും അതിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന മാറ്റം മറ്റു ഘടകങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന മാറ്റത്തെക്കാൾ വലിയ അളവിലുള്ളതല്ലെങ്കിൽ ആ അനിയതചരം നോർമൽ വിതരണത്തിന് വളരെ അടുത്തായിരിക്കും.

ശാസ്ത്രത്തിലും, വൈദ്യശാസ്ത്രത്തിലുമുള്ള പരീക്ഷണാത്മക ഡാറ്റയുടെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും വിശകലനം, വിലയിരുത്തൽ എന്നിവയിൽ നോർമൽ വിതരണം വളരെയേറെ പ്രാധാന്യമുള്ളതാണ്. തുടർന്ന് പഠിക്കാൻ പോകുന്ന അധ്യായങ്ങളിൽ പ്രതിപാദിക്കുന്ന അടിസ്ഥാനപരമായ സാംഖ്യകരീതികളിൽ ഭൂരിഭാഗവും നോർമൽ വിതരണത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ളതാണ്. നോർമൽ വിതരണത്തിന്റെ സവിശേഷതകളും അവയുടെ പ്രയോഗങ്ങളെയും കുറിച്ചു ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

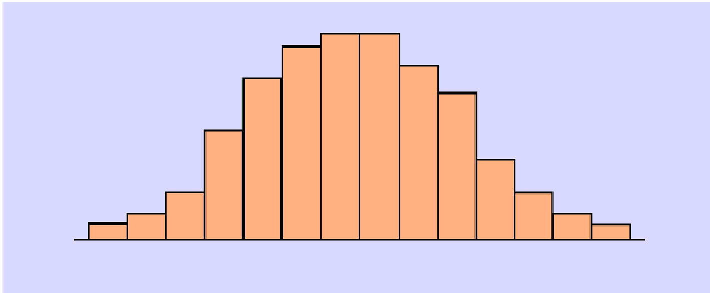
6.1 നോർമൽ വിതരണം – ആശയം

നിങ്ങളുടെ നഗരത്തിലെ 100 മുതിർന്ന ആളുകളുടെ ഉയരത്തിന്റെ അളവ് ശേഖരിക്കുക. ശേഖരിച്ച ഡാറ്റയുടെ ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക. താഴെ തന്നിരിക്കുന്നപോലുള്ള ഒരു ഹിസ്റ്റോഗ്രാം നിങ്ങൾക്ക് ലഭിക്കുന്നു.



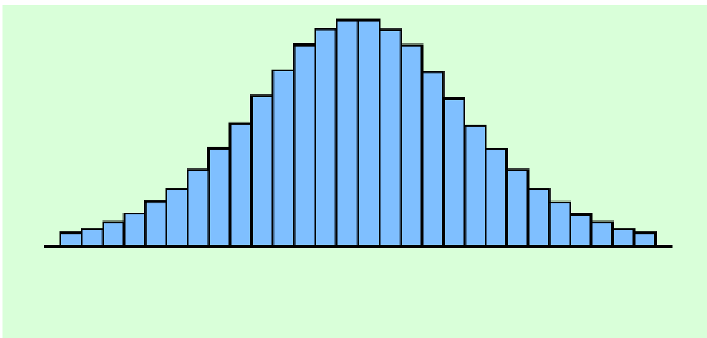
ചിത്രം 6.1

സാമ്പിളുകളുടെ എണ്ണം വർദ്ധിപ്പിക്കുകയും ക്ലാസുകളുടെ അന്തരം കുറക്കുകയും ചെയ്താൽ ഹിസ്റ്റോഗ്രാം താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പോലെയായിരിക്കും.



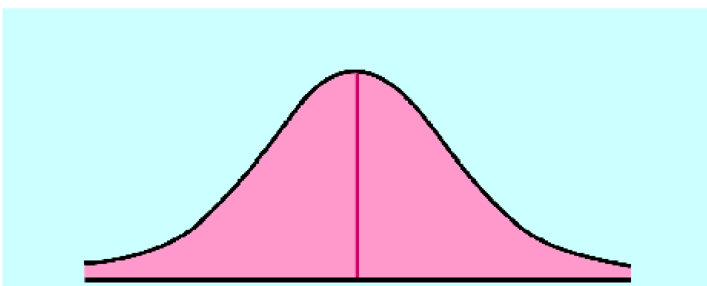
ചിത്രം 6.2

വീണ്ടും സാമ്പിളുകളുടെ എണ്ണം വർദ്ധിപ്പിക്കുകയും, ക്ലാസ് അന്തരം കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ ഹിസ്റ്റോഗ്രാം താഴെ കാണുന്നതുപോലെയായിരിക്കും.



ചിത്രം 6.3

അവസാനമായി, നമ്മുടെ രാജ്യത്തെ 18 വയസ്സിന് മുകളിലുള്ള എല്ലാ ജനങ്ങളുടെയും ഉയരം കൃത്യമായി രേഖപ്പെടുത്തുകയും, ഹിസ്റ്റോഗ്രാം തയാറാക്കുകയും ചെയ്താൽ അത് എത്തിച്ചേരുന്ന വിതരണത്തിനെ നോർമൽ വിതരണം എന്നറിയപ്പെടുന്നു.



ചിത്രം 6.4

നോർമൽ വിതരണത്തിന്റെ ഹിസ്റ്റോഗ്രാം, നമുക്ക് ഏറെ പരിചയമുള്ള സമമിത വക്രത്തെ സൃഷ്ടിക്കുന്നു. അതിനെ നോർമൽ വക്രം അഥവാ ബെൽ ആകൃതി വക്രം എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. ഉയരം, ഭാരം പോലുള്ള പലതരം ചരങ്ങളുടെ വിതരണവും നോർമൽ വിതരണവും തമ്മിലുള്ള വ്യതിയാനം വളരെ ചെറുതായതിനാൽ അത്തരം ചരങ്ങളുടെ വിശദമായ പഠനത്തിന് നോർമൽ വിതരണം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

പ്രവർത്തനം

1) നിങ്ങളുടെ സ്കൂളിലെ എല്ലാ ഹയർസെക്കണ്ടറി വിദ്യാർത്ഥികളുടെയും ഉയരത്തിന്റെ അളവുകൾ ശേഖരിക്കുക.

(i) ഡാറ്റയുടെ ആവൃത്തി വിതരണം തയാറാക്കുക

(ii) ഡാറ്റയുടെ ആവൃത്തി വക്രം വരക്കുക

ആവൃത്തി വക്രം നിരീക്ഷിക്കുക. അനുമാനങ്ങൾ രേഖപ്പെടുത്തുക.

(2) നിങ്ങളുടെ സ്കൂളിലെ എല്ലാ ഹയർസെക്കണ്ടറി വിദ്യാർത്ഥികളുടെയും ഭാരത്തിന്റെ അളവുകൾ ശേഖരിക്കുക.

(i) ഡാറ്റയുടെ ആവൃത്തി വിതരണം തയാറാക്കുക.

(ii) ഡാറ്റയുടെ ആവൃത്തി വക്രം വരക്കുക.

ആവൃത്തി വക്രം നിരീക്ഷിക്കുക. അനുമാനങ്ങൾ രേഖപ്പെടുത്തുക.

(3) ഒരു ഹയർസെക്കണ്ടറി സ്കൂളിലെ പ്ലസ് വൺ ക്ലാസിലെ 50 വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ (നൂറിൽ) സ്കോറുകൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

67	84	80	77	97	59	62	37	33	42
36	54	18	12	19	33	49	24	25	22
24	29	9	21	21	24	31	17	15	21
13	19	19	22	22	30	41	22	18	20
26	33	14	14	16	22	26	10	16	24

a. ഡാറ്റയുടെ ആവൃത്തി വിതരണം തയാറാക്കുക

b. ഡാറ്റയുടെ ഹിസ്റ്റോഗ്രാം തയാറാക്കുക

c. ഹിസ്റ്റോഗ്രാമിന്റെ ആകൃതി വിവരിക്കുക

d. വിതരണം ഏകദേശം നോർമൽ വിതരണമാണ് എന്ന് കരുതുന്നുണ്ടോ?

6.2 നോർമൽ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതാ ഏകദം (Normal Probability density function)

ഒരു തുടർചരം നോർമൽ വിതരണത്തിലാണ് എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ അതിന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഏകദം താഴെ പറയുന്നതായിരിക്കും.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \text{ അവിടെ } -\infty \le x \le \infty, -\infty \le \mu \le \infty, \sigma > 0$$

μ , σ^2 എന്നിവ വിതരണത്തിന്റെ പരാമീറ്ററുകളായി അറിയപ്പെടുന്നു (ഇവിടെ $e \cong 2.718, \pi \cong 3.14$)

X എന്ന തുടർചരം μ, σ എന്നീ പരാമീറ്ററുകളുള്ള നോർമൽ വിതരണത്തിലാണെങ്കിൽ നമുക്കതിനെ താഴെപറയും പ്രകാരം സൂചിപ്പിക്കാം. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

ഒരു തുടർചരം നോർമൽ വിതരണത്തിലാണെങ്കിൽ അതിനെ നോർമൽ തുടർചരം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

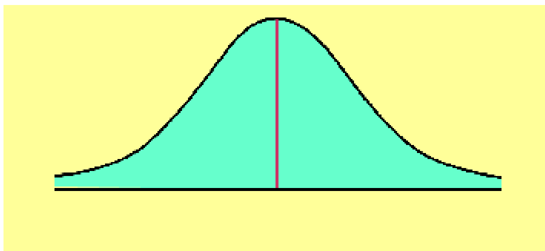
മാധ്യവും, വ്യതിയാനവും

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ എങ്കിൽ മാധ്യം $= E(X) = \mu$

വ്യതിയാനം $= V(X) = \sigma^2$

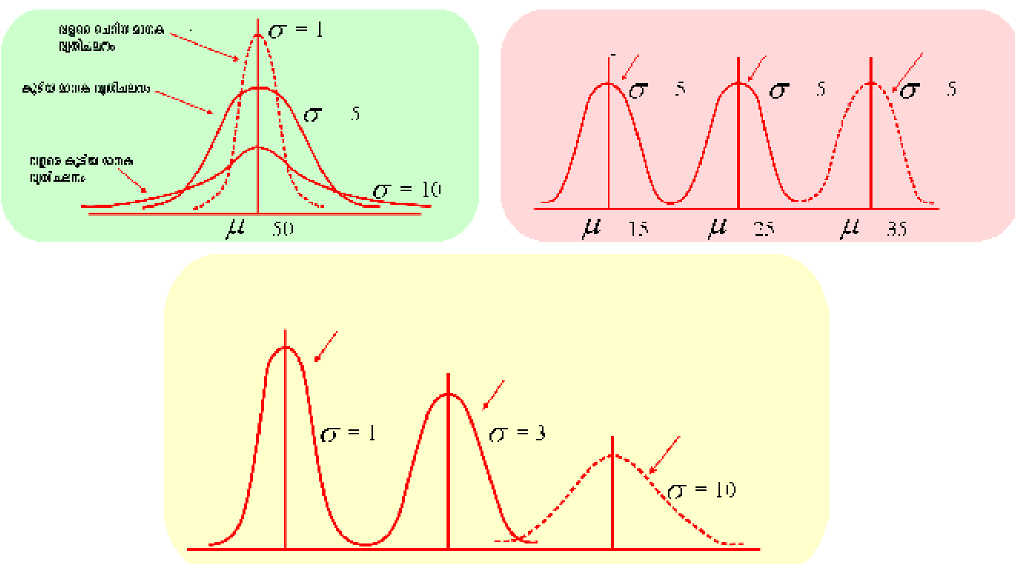
മാനക വ്യതിയാനം $= \sqrt{V(X)} = \sigma$

നോർമൽ വക്രം



ചിത്രം 6.5

μ ന്റെ വില നോർമൽ വിതരണത്തിന്റെ തിരശ്ചീന അക്ഷത്തിലുള്ള മധ്യഭാഗത്തെ നിശ്ചയിക്കുന്നു. കൂടാതെ σ യുടെ വില നോർമൽ വിതരണത്തിന്റെ വ്യാപനത്തിന്റെ മൂല്യം നല്കുന്നു. μ നും σ യ്ക്കും അനുയോജ്യമായ വിലകൾ നല്കി നോർമൽ വിതരണരീതിയുടെ ആവൃത്തി വക്രം വരയ്ക്കാവുന്നതാണ്. μ ന്റെയും, σ യുടെയും ഓരോ വ്യത്യസ്ത വിലകൾക്ക് വ്യത്യസ്ത നോർമൽ വിതരണങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

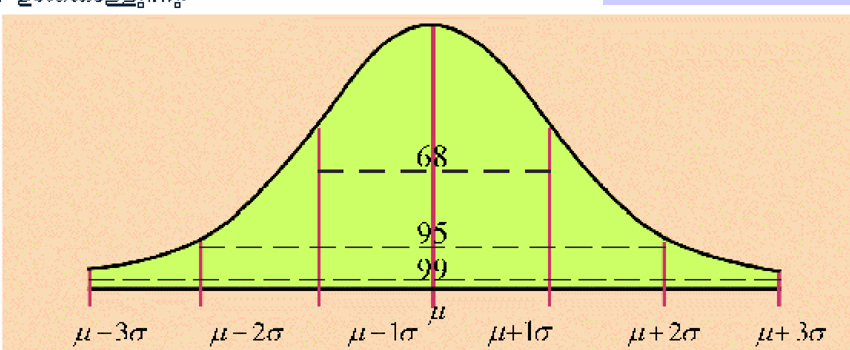


ചിത്രം 6.6

നോർമൽ വക്രത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

1. നോർമൽ വക്രം X = μ ൽ സമമിതവും ബെൽ ആകൃതിയിലുമാണ്.
2. മാധ്യത്തിന്റെയും, മദ്ധ്യാങ്കത്തിന്റെയും, മോഡിന്റെയും വില ഒന്നു തന്നെയാകുന്നു. അതായത് മാധ്യം = മദ്ധ്യാങ്കം = മോഡ്.
3. നോർമൽ വക്രത്തിന്റെ ഉയരം ഏറ്റവും കൂടുതൽ മധ്യഭാഗത്തായിരിക്കും. അതായത് X = μ ൽ, $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ആകുന്നു.
4. മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്ന് ചതുരംശങ്ങൾ തുല്യ അകലത്തിലായിരിക്കും.
5. നോർമൽ വക്രത്തിന് ഒരേയൊരു മോഡാണ് ഉള്ളത്.
6. സ്ക്യൂനസ്സിന്റെ ഗുണാങ്കം പൂജ്യമായിരിക്കും. അതായത് $\beta_1 = 0$ ആകുന്നു.
7. നോർമൽ വക്രം മെസോ കർട്ടിക് ആകുന്നു. അതായത് $\beta_2 = 3$ ആയിരിക്കും.
8. നോർമൽ വക്രം X അക്ഷത്തിനോട് അസംപാത രേഖയിലായിരിക്കും. അതായത്, മദ്ധ്യഭാഗത്ത് നിന്നും രണ്ട് അഗ്ര ഭാഗത്തേക്ക് നീങ്ങുന്തോറും നോർമൽ വക്രം ഉയരം കുറഞ്ഞു വരുന്നു എന്നാൽ X അക്ഷത്തിൽ ഒരിക്കലും തൊടുന്നില്ല.
9. നോർമൽ വക്രത്തിന്റെ താഴെയുള്ള ഭാഗത്തെ ആകെ വിസ്തീർണ്ണം 1 ചതുരശ്ര യൂണിറ്റായിരിക്കും.
10. നോർമൽ വിതരണത്തിന് ചതുരംശ വ്യതിയാനം = $\frac{2}{3}\sigma$ യും മാധ്യവ്യതിയാനം = $\frac{4}{5}\sigma$ യും ആയിരിക്കും.
11. നോർമൽ വക്രത്തിൽ X അക്ഷത്തിൽ $\mu-\sigma$ യ്ക്കും $\mu+\sigma$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ഭാഗത്ത് ആകെയുള്ള നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ ഏകദേശം 68% ഉം ഉൾക്കൊള്ളുന്നു. $\mu-2\sigma$ യ്ക്കും $\mu+2\sigma$ യ്ക്കും ഇടയിൽ ഏകദേശം 95% നിരീക്ഷണങ്ങളും $\mu-3\sigma$ യ്ക്കും $\mu+3\sigma$ യ്ക്കും ഇടയിൽ ഏകദേശം 99% ഉം (ഏതാണ്ട് എല്ലാ നിരീക്ഷണങ്ങളും) ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.

മൂന്ന് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞരുടെ ഗവേഷണങ്ങളുടെ ചുവടുപിടിച്ചാണ് നോർമൽ വിതരണ സമവാക്യം കണ്ടെത്തിയത്. വലിയ എണ്ണം നാണയങ്ങൾ മേല്പോട്ട് എറിയുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന 'തല' കളുടെ എണ്ണത്തിലുണ്ടാകുന്ന അനിയത വ്യതിയാനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഫ്രഞ്ച് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ എബ്രഹാം ഡി. മോവർ 1973 ൽ നോർമൽ വിതരണത്തിന് ഒരു സമവാക്യം കണ്ടെത്തിയിരുന്നു. സ്വാഭാവികമായി സംഭവിക്കുന്ന ചരങ്ങളുമായി ഒരു ബന്ധവും അനുഭവഭേദ്യമാകാത്തതിനാൽ അദ്ദേഹം ഈ സമവാക്യം വളരെകുറച്ച് സുഹൃത്തുക്കളെ മാത്രമേ കാണിച്ചിരുന്നുള്ളൂ. ഏകദേശം നൂറ് വർഷങ്ങൾക്ക് ശേഷം, ഫ്രാൻസിലെ പിയറിലാപ്ലെസ്, ജർമനിയിലെ കാൾ ഗൗസ് എന്നീ രണ്ട് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞർമാർ സ്വതന്ത്രമായി ഡി മോവർ ചെയ്ത ഉദ്യമത്തെക്കുറിച്ച് അറിവും ഇല്ലാതെ, നോർമൽ വക്രത്തിന് സമവാക്യം കണ്ടെത്തുകയുണ്ടായി. ലാപ്ലെസ്സിനും, ഗോസിനും മുമ്പേ ഡി മോവർ സൂത്രവാക്യം കണ്ടെത്തിയിരുന്നതായി 1924 ൽ കാൾ പിയേഴ്സൺ തിരിച്ചറിഞ്ഞിരുന്നു.



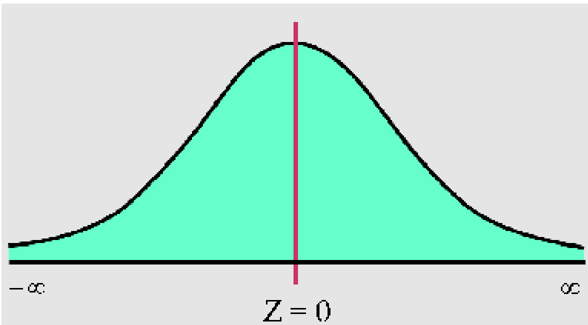
ചിത്രം 6.7

6.3 മാനക നോർമൽ വിതരണം (Standard Normal Distribution)

മാധ്യം പൂജ്യവും, മാനക വ്യതിയാനം 1 ഉം ആയ നോർമൽ ചരത്തെ മാനക നോർമൽ ചരം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. മാനകനോർമൽ ചരത്തിന്റെ വിതരണത്തെ മാനക നോർമൽ h rX eWwF ¶ vh rf n ¸¶ p t\ nÀaÂ Ncs¯ k qN n n ¸¶ X n vk n{ neW b nb nZ എന്ന അക്ഷരം ഉപയോഗിക്കുന്നു. മാനക നോർമൽ വിതരണത്തിന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതാ ഏകദം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \text{ഇവിടെ } -\infty \le z \le \infty$$

മാനക നോർമൽ വക്രം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രകാരമായിരിക്കും.

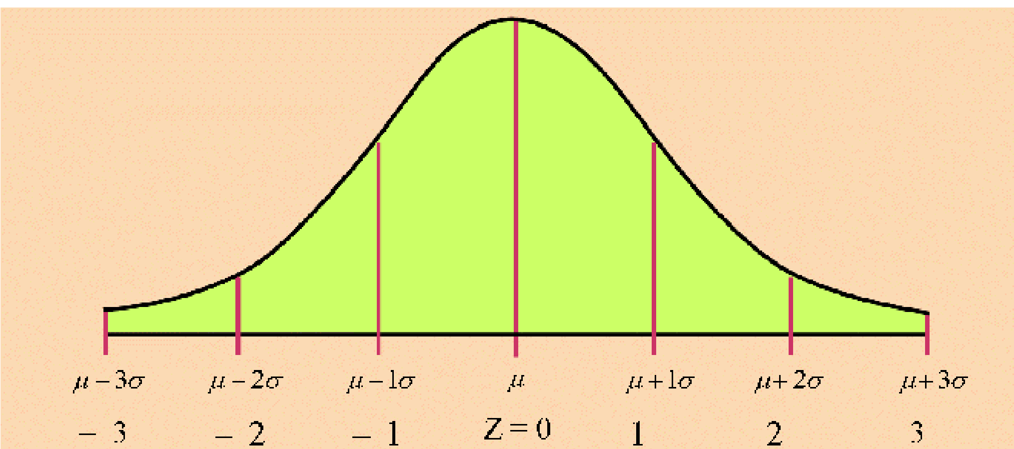


ചിത്രം 6.8

Z പരിവർത്തനം അഥവാ Z സ്കോർ

മാധ്യം μ ഉം മാനകവ്യതിയാനം σ യും ഉള്ള X എന്ന നോർമൽ ചരത്തെ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ എന്ന പരിവർത്തനം കൊണ്ട് മാനക നോർമൽ ചരമാക്കി മാറ്റുന്നതിനെ Z പരിവർത്തനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഒരിക്കൽ X വിലകളെ Z പരിവർത്തനം ഉപയോഗിച്ച് പരിവർത്തനം ചെയ്താൽ അവയെ Z സ്കോർ അഥവാ Z വിലകൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

അതായത് $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ആണെങ്കിൽ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ ആയിരിക്കും.



ചിത്രം 6.9

പ്രവർത്തനം

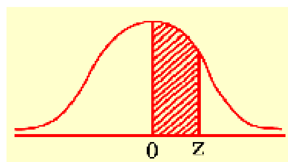
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ആണെങ്കിൽ $E(Z)$, $V(Z)$ എന്നിവ കാണുക.

മാനക നോർമൽ പട്ടിക (Standard Normal Table)

നോർമൽ സംഭാവ്യത രീതി ഉപയോഗിച്ച് ഒരു നോർമൽ ചരത്തിന്റെ പ്രത്യേക അന്തരത്തിലുള്ള സംഭാവ്യത നിർണ്ണയിക്കുക എന്നത് പ്രയാസമുള്ള ജോലിയാണ്.

അതായത് $P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$, ഈ സമകലനം കണ്ടുപിടിക്കാൻ അത്ര എളുപ്പമല്ല.

നോർമൽ സംഭാവ്യത രീതി ഉപയോഗിച്ച് സംഭാവ്യത നിർണയിക്കുന്നതിനുള്ള കണക്കുകൂട്ടൽ എളുപ്പമാക്കുന്നതിന് വേണ്ടി അനിയതചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യതയായി മാനക നോർമൽ വക്രത്തിന് താഴെയുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവുകളുടെ പട്ടിക ഉപയോഗിക്കുന്നു. മാനക നോർമൽ വക്രത്തിന് താഴെയുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവുകളുടെ പട്ടികയെ മാനക നോർമൽ പട്ടിക എന്ന് വിളിക്കുന്നു.



അതായത് $P(0 < Z < z) = \int_0^z f(z)dz$

= $Z = 0$, $Z = z$ എന്നി വിലകൾക്ക് ഇടയിൽ വരുന്ന പരപ്പളവ്.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ആണെങ്കിൽ

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

= മാനക നോർമൽ വക്രത്തിന് താഴെ $\frac{a-\mu}{\sigma}$ യ്ക്കും $\frac{b-\mu}{\sigma}$ യ്ക്കും ഇടയിൽ വരുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

നോർമൽ വിതരണ വക്രത്തിന് താഴെയുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുന്നവിധം

നോർമൽ വിതരണത്തിലെ സംഭാവ്യത കണക്കുകളുടെ ഉത്തരം കാണുന്നതിന് താഴെപ്പറയുന്ന ഘട്ടങ്ങളും രീതികളും ഉപകാരപ്രദമായേക്കാം.

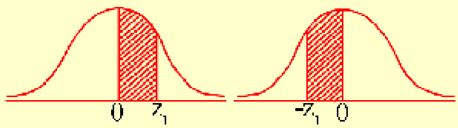
ഘട്ടം 1 : Z പരിവർത്തനം ഉപയോഗിച്ച് നോർമൽ ചരത്തെ മാനക നോർമൽ ചരമാക്കി മാറ്റുക.

ഘട്ടം 2: മാനക നോർമൽ വക്രം വരച്ച് Z വിലയുടെ സ്ഥാനം രേഖപ്പെടുത്തുക. അനുയോജ്യമായ ഭാഗം അടയാളപ്പെടുത്തുക.

ഘട്ടം 3: താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ നിന്ന് അനുയോജ്യമായ ബ്ലോക്ക് തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

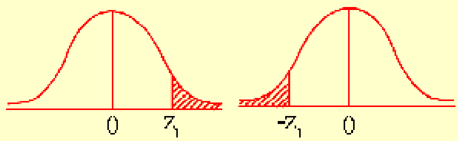
ബ്ലോക്ക് I

0 യ്ക്കും Z_1 നും ഇടയിൽ



ഇടയിൽ വരുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണാൻ പട്ടികയിൽ Z_1 ന് നേരെയുള്ള വില കാണുക.

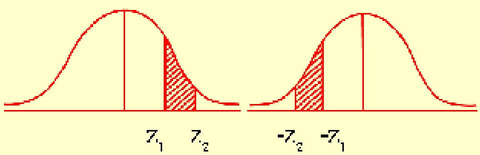
ബ്ലോക്ക് II



1. Z_1 വിലക്ക് നേരെയുള്ള പട്ടിക വില കാണുക
2. 0.5 ൽ നിന്ന് ഈ വില കുറയ്ക്കുക.

ബ്ലോക്ക് III

മാധ്യത്തിന്റെ ഒരേ വശത്ത് രണ്ട് Z വിലകൾക്കിടയിൽ

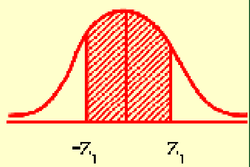


1. Z_1 ന്റെയും Z_2 ന്റെയും നേരെയുള്ള പട്ടിക വിലകൾ കാണുക.
2. ചെറിയ പരപ്പളവ് വലുതിൽ നിന്ന് കുറക്കുക.

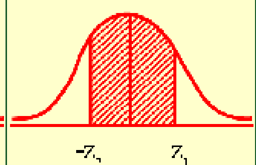
ബ്ലോക്ക് IV(a)

ബ്ലോക്ക് IV (b)

മാധ്യത്തിന്റെ രണ്ട് ഭാഗത്തുമായി Z വിലകൾ വരുമ്പോൾ



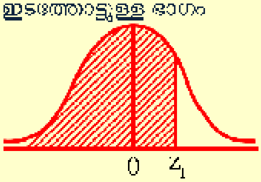
1. Z_1 നേരെയുള്ള പട്ടിക വില നോക്കുക
2. പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടുക



1. Z_1 നും, Z_2 നും നേരെയുള്ള പട്ടികവിലകൾ കാണുക
2. പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടുക

ബ്ലോക്ക് V

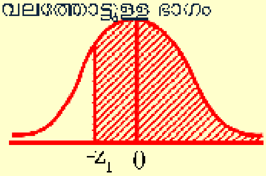
മാധ്യത്തിന്റെ വലതുഭാഗത്തുള്ള ഏതെങ്കിലും Z വിലയുടെ ഇടത്തോട്ടുള്ള ഭാഗം



1. Z_1 നേരെയുള്ള പട്ടിക വില കാണുക
2. ഈ പരപ്പളവിനോട് 0.5 കൂട്ടുക

ബ്ലോക്ക് VI

മാധ്യത്തിന്റെ ഇടതുഭാഗത്തുള്ള ഏതെങ്കിലും Z വിലയുടെ വലത്തോട്ടുള്ള ഭാഗം



1. Z_1 നേരെയുള്ള പട്ടിക വില കാണുക
2. ഈ പരപ്പളവിനോട് 0.5 കൂട്ടുക.

വിശദീകരണം 6.1

$Z \sim N(0,1)$ ആയാൽ താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സംഭാവ്യതകൾ കാണുക.

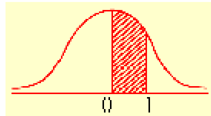
a) $P(0 < Z < 1)$ b) $P(-2 < Z < 0)$ c) $P(-2.5 < Z < 2.72)$

d) $P(2 < Z < 3)$ e) $P(-3 < Z < -2)$ f) $P(Z > 2)$

g) $P(Z < -2)$ h) $P(Z < 1.52)$ i) $P(Z > -1.52)$

പരിഹാരം

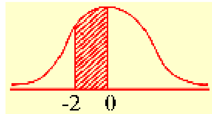
(a) $P(0 < Z < 1) = 0.3413$ (സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ പട്ടിക പ്രകാരം)



(ബ്ലോക്ക് 1 കാണുക

(b) $P(-2 < Z < 0) = P(0 < Z < 2)$ (സമമിതം)

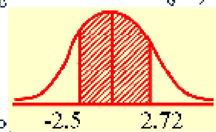
$= 0.4772$ (സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ പട്ടിക പ്രകാരം)



(ബ്ലോക്ക് 3 നോക്കുക)

(c) $P(-2.5 < Z < 2.72) = P(-2.5 < Z < 0) + P(0 < Z < 2.72)$

$= P(0 < Z < 2.5) + P(0 < Z < 2.72)$ (സമമിതം)

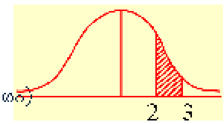


$= 0.4938 + 0.4966$ (സ്റ്റാറ്റിസ്ററിക്കൽ പട്ടികയിൽ നിന്ന്)

$= 0.9904$ (ബ്ലോക്ക് IV(b) നോക്കുക)

(d) $P(2 < Z < 3) = P(0 < Z < 3) - P(0 < Z < 2)$

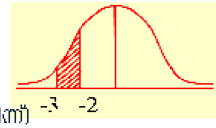
$= 0.49865 - 0.4772$ (സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ പട്ടിക പ്രകാരം)



$= 0.02145$ (ബ്ലോക്ക് 3 നോക്കുക)

(e) $P(-3 < Z < -2) = P(2 < Z < 3)$ (സമമിതം)

$= P(0 < Z < 3) - P(0 < Z < 2)$

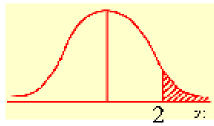


$= 0.49865 - 0.4772$ (സ്റ്റാറ്റിസ്ററിക്കൽ പട്ടികയിൽ നിന്ന്)

$= 0.02145$ (ബ്ലോക്ക് 3 നോക്കുക)

(f) $P(Z > 2) = P(0 < Z < \infty) - P(0 < Z < 2)$

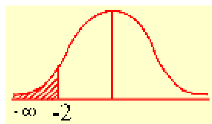
$= 0.5 - 0.4772$ (സ്റ്റാറ്റിസ്ററിക്കൽ പട്ടികയിൽ നിന്ന്)



$= 0.0228$ (ബ്ലോക്ക് -2 ശ്രദ്ധിക്കുക

(g) $P(Z < -2) = P(Z > 2)$ (സമമിതം)

$= P(0 < Z < \infty) - P(0 < Z < 2)$



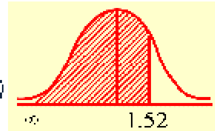
$= 0.5 - 0.4772$ (സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച്)

$= 0.0228$ (ബ്ലോക്ക് -2 ശ്രദ്ധിക്കുക

(h) $P(Z < 1.52) = P(-\infty < Z < 0) + P(0 < Z < 1.52)$

$= 0.5 + 0.4357$ (സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച്)

$= 0.9357$ (ബ്ലോക്ക് 5 നോക്കുക)

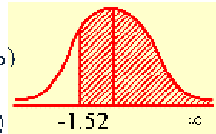


(i) $P(Z > -1.52) = P(-1.52 < Z < 0) + P(0 < Z < \infty)$

$= P(0 < Z < 1.52) + P(0 < Z < \infty)$ (സമമിതം)

$= 0.4357 + 0.5$ (സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച്)

$= 0.9357$ (ബ്ലോക്ക് 6 നോക്കുക)



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

$Z \sim N(0,1)$ ആണെങ്കിൽ താഴെ പറയുന്നവ കാണുക.

(1) $P(Z < 2.3)$ (2) $P(Z > 1.5)$ (3) $P(Z > -1.25)$

(4) $P(Z < -1.02)$ (5) $P(-2.4 < Z < 2.4)$ (6) $P(-1.4 < Z < 3.1)$

(7) $P(1.22 < Z < 2.80)$ (8) $P(-3.03 < Z < 0.72)$ (9) $P(0 < Z < 2.8865)$

വിശദീകരണം 6.2

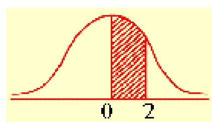
X എന്ന നോർമൽ വിതരണം ചരത്തിന്റെ മാധ്യം 30 ഉം; മാനക വ്യതിയാനം 5 ഉം ആകുന്നു. $P(30 < X < 40)$ കാണുക.

പരിഹാരം : $\mu = 30,\ \sigma = 5$ തന്നിരിക്കുന്നു.

$P(30 < X < 40) = P\left(\frac{30-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{40-\mu}{\sigma}\right)$

$= P\left(\frac{30-30}{5} < Z < \frac{40-30}{5}\right)$

$= P(0 < Z < 2) = 0.4772$ (സ്റ്റാറ്റിസ്റ്ററിക്കൽ പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച്



വിശദീകരണം 6.3

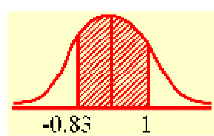
$X \sim N(50, 6^2)$ ആണെങ്കിൽ;

(1) $P(45 < X < 56)$ (2) $P(X > 60)$ (3) $P(X < 45)$ എന്നിവ കാണുക

പരിഹാരം : $\mu = 50,\ \sigma = 6$

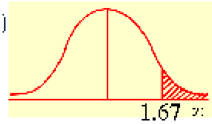
$P(45 < X < 56) = P\left(\frac{45-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{56-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{45-50}{6} < Z < \frac{56-50}{6}\right)$

$= P(-0.83 < Z < 1)$



$= 0.2967 + 0.3413$ (സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ പട്ടിക പ്രകാരം)

$= 0.6380$



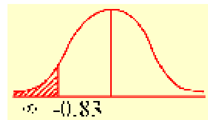
$P(X > 60) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{60-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{60-50}{6}\right)$

$= P(Z > 1.67) = 0.5 - 0.4525 = 0.0475$

$P(X < 45) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{45-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{45-50}{6}\right)$

$= P(Z < -0.83) = P(Z > 0.83)$ സമമിതം

$= 0.5 - 0.2967 = 0.2033$



വിശദീകരണം 6.4

നോർമൽ വിതരണത്തിലുള്ള 300 വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം 68 കി. ഗ്രാം ഉം മാനകവ്യതിയാനം 3 കി.ഗ്രാമുമാണ്. 67 കി.ഗ്രാമിനും 74 കി.ഗ്രാമിലും ഇടയിൽ ഭാരമുള്ള വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം കാണുക.

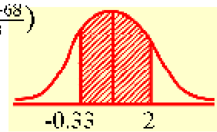
പരിഹാരം: വിദ്യാർത്ഥിയുടെ ഭാരത്തെ X എന്ന നോർമൽ ചരം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$\mu = 68$ ഉം $\sigma = 3$ ഉം തന്നിട്ടുണ്ട്.

$P(67 < X < 74) = P\left(\frac{67-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{74-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{67-68}{3} < Z < \frac{74-68}{3}\right)$

$= P(-0.33 < Z < 2)$

$= 0.1293 + 0.4772 = 0.6065$



67 കി.ഗ്രാമിനും, 74 കി.ഗ്രാമിനും ഇടയിൽ ഭാരമുള്ള വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം. $= 300 \times P(67 < X < 74)$

$= 181.95 \simeq 182$

വിശദീകരണം 6.5

ഒരു പരീക്ഷയിലെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പരീക്ഷയ്ക്ക് 500 വിദ്യാർത്ഥികൾ ഹാജരായി. അവരുടെ ശരാശരി സ്കോർ 50 ഉം മാനക വ്യതിയാനം 10 ഉം ആകുന്നു. 45 ൽ താഴെ സ്കോറുള്ള വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം ശതമാനനിരക്കിൽ കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം:

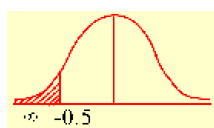
X എന്നത് സ്കോറിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന നോർമൽ ചരം ആണ് എന്ന് കരുതുക.

$\mu = 50$ and $\sigma = 10$ തന്നിട്ടുണ്ട്.

$P(X < 45) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{45-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{45-50}{10}\right)$

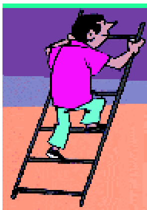
$= P(Z < -0.5)$

$= 0.5 - 0.1915 = 0.3085$



45 ൽ താഴെ സ്കോർ നേടിയ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ശതമാനനിരക്ക് $= 100 \times P(X < 45)$

$= 100 \times 0.3085 = 30.85\%$



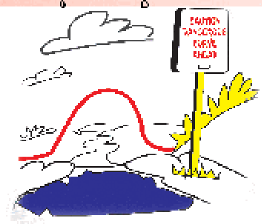
നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1) X എന്ന അനിയതചരം മാധ്യം 40 ഉം മാനക വ്യതിയാനം 8 ഉം ഉള്ള നോർമൽ വിതരണത്തിലാണ്. താഴെ പറയുന്നവ കാണുക
(a) $P(30 < X < 50)$ (b) $P(X < 45)$

2) $X \sim N(50, 5^2)$ ആയാൽ താഴെ പറയുന്നവ കാണുക.
(a) $P(X < 50)$ (b) $P(X < 60)$ (c) $P(30 < X < 70)$

3) 1000 തൊഴിലാളികളുടെ ആഴ്ച വേതനം നോർമൽ വിതരണത്തിലാണ്. അവയുടെ മാധ്യം 70 രൂപയും മാനകവ്യതിയാനം 5 രൂപയും ആകുന്നു. താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ വരുമാനമുള്ളവരുടെ എണ്ണം കാണുക
(a) 70 രൂപയ്ക്കും 72 രൂപയ്ക്കും ഇടയിൽ (b) 75 രൂപയിലും അധികം.

തന്നിരിക്കുന്ന സംഭാവ്യതയുടെ 'Z' മൂല്യം കാണുക



നോർമൽ വക്രത്തിന് താഴെ X അക്ഷത്തിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള പ്രതലത്തിന്റെ പരപ്പളവ് തന്നിരുന്നാൽ, Z മൂല്യങ്ങൾ വിപരീത പ്രക്രിയയിലൂടെ കണ്ടെത്താൻ കഴിയും. താഴെ പറയുന്ന വിശദീകരണങ്ങൾ Z മൂല്യം കാണുന്നതിനുള്ള പ്രക്രിയ വിശദീകരിക്കുന്നു.

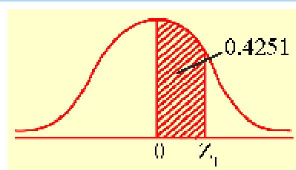
വിശദീകരണം 6.6

$Z \sim N(0,1)$ ആകുന്നു. താഴെ പറയുന്നവയിൽ Z_1 ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

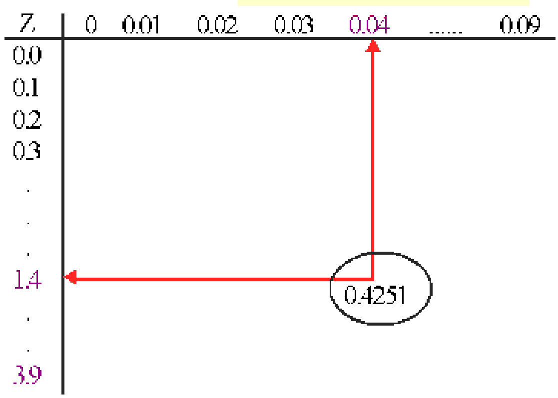
(a) $P(0 < Z < Z_1) = 0.4251$ (b) $P(0 < Z < Z_1) = 0.40$
(c) $P(Z < Z_1) = 0.90$ (d) $P(Z > Z_1) = 0.90$
(e) $P(Z < Z_1) = 0.15$ (f) $P(Z > Z_1) = 0.15$

പരിഹാരം:

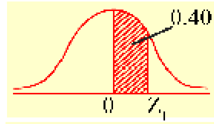
(a)



Z_1 ന്റെ മൂല്യം കാണുന്നതിന് മാനക നോർമൽ പട്ടികയിൽ 0.4251 ന്റെ സ്ഥാനം കണ്ടെത്തുന്നു. തുടർന്ന് 0.4251 ന് ആനുപാതികമായ നിരയിലെയും, വരിയിലെയും സംഖ്യകൾ വായിക്കുന്നു. (ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു) ഈ സംഖ്യകൾ യഥാക്രമം 0.04 ഉം 1.4 ഉം ആകുന്നു. ഈ രണ്ട് വിലകളും കൂട്ടിയാൽ Z_1 ന്റെ വില 1.44 ലഭിക്കും.

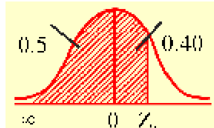


(b)



മാനക നോർമൽ പട്ടികയിൽ 0.40 അല്ലെങ്കിൽ 0.40 നോട് വളരെ അടുത്ത വിലയുടെ സ്ഥാനം കണ്ടെത്തുക. $Z_1 = 1.28$ ലഭിക്കുന്നു.

(c)



$P(Z < Z_1) \quad = 0.90$ തന്നിരിക്കുന്നു

$P(Z < Z_1)$ എന്നത് 0.5 നേക്കാൾ വലുതായതിനാൽ Z_1 പോസിറ്റീവ് ആയിരിക്കും.

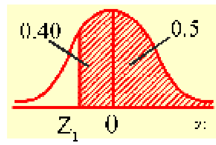
$P(-\infty < Z < 0) + P(0 < Z < Z_1) = 0.90$ (മാനക നോർമൽ വക്രം നോക്കുക)

$0.5 + P(0 < Z < Z_1) = 0.90$

$P(0 < Z < Z_1) = 0.40$

$Z_1 = 1.28$

(d)



$P(Z > Z_1) \quad = 0.90$ തന്നിരിക്കുന്നു.

$P(Z > Z_1)$ എന്നത് 0.5 നേക്കാൾ വലുതായതിനാൽ Z_1 നെഗറ്റീവ് ആയിരിക്കും.

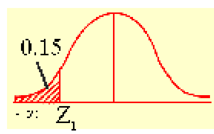
$P(0 < Z < \infty) + P(Z_1 < Z < 0) = 0.90$ (മാനക നോർമൽ വക്രം നോക്കുക)

$0.5 + P(0 < Z < Z_1) = 0.90$ (സമമിതം)

$P(0 < Z < Z_1) = 0.40$

$Z_1 = -1.28$

(e)



$P(Z < Z_1) \quad = 0.15$ തന്നിരിക്കുന്നു.

$P(Z < Z_1)$ എന്നത് 0.5 നേക്കാൾ താഴെയായതിനാൽ ഇവിടെ Z_1 നെഗറ്റീവ് ആയിരിക്കും.

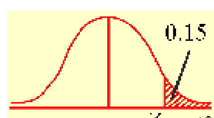
$P(-\infty < Z < 0) - P(Z_1 < Z < 0) = 0.15$ (മാനക നോർമൽ വക്രം നോക്കുക)

$0.5 - P(0 < Z < Z_1) = 0.15$ (സമമിതം)

$P(0 < Z < Z_1) = 0.35$

$Z_1 = -1.04$

(f)



$P(Z > Z_1) \quad = 0.15$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു.

$P(Z > Z_1)$ എന്നത് 0.5 നേക്കാൾ താഴെ ആയതിനാൽ, ഇവിടെ Z_1 പോസിറ്റീവ് ആയിരിക്കും.

$$P(0 < Z < \infty) - P(0 < Z < Z_1) = 0.15$$ (മാനക നോർമൽ വക്രം നോക്കുക)

$$P(0 < Z < Z_1) = 0.35$$

$$Z_1 = 1.04$$

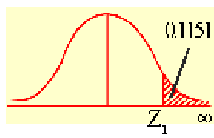
വിശദീകരണം 6.6

പട്ടാളക്കാരുടെ ഉയരത്തിന്റെ അളവ് നോർമൽ വിതരണത്തിലാണ്. 70.4 ഇഞ്ചിനേക്കാൾ കൂടുതൽ ഉയരമുള്ള 11.51% ഉം 65.4 ഇഞ്ചിനേക്കാൾ കുറവ് ഉയരമുള്ള 9.68% ഉം പട്ടാളക്കാർ ഉണ്ടെങ്കിൽ പട്ടാളക്കാരുടെ ഉയരത്തിന്റെ മാധ്യവും, മാനകവ്യതിയാനവും കാണുക.

പരിഹാരം

70.4 ഇഞ്ചിനേക്കാൾ ഉയരക്കൂടുതലുള്ള 11.51% പേർ ഉണ്ട് എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നതിനാൽ,

നമുക്ക് $P(X > 70.4) = 0.1151$ എന്ന് എഴുതാം.



അതായത് $P(Z > Z_1) = 0.1151$ ഇവിടെ $Z_1 = \frac{70.4 - \mu}{\sigma}$

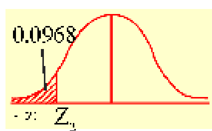
$Z_1 = 1.20$ (സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ പട്ടിക പ്രകാരം)

i.e., $\frac{70.4 - \mu}{\sigma} = 1.20$

ആയതിനാൽ $\mu + 1.20\sigma = 70.4$ - - - - - - - - സമവാക്യം (1)

65.4 ഇഞ്ചിനേക്കാൾ താഴെ ഉയരമുള്ള 9.68% പേർ ഉണ്ട് എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നതിനാൽ,

നമുക്ക് $P(X < 65.4) = 0.0968$ എന്ന് എഴുതാം.



അതായത്, $P(Z < Z_2) = 0.0968$ ഇവിടെ $Z_2 = \frac{65.4 - \mu}{\sigma}$

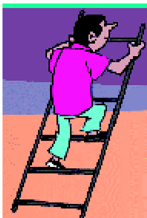
Now $Z_2 = -1.30$ (സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ പട്ടികയിൽ നിന്ന്)

i.e., $\frac{65.4 - \mu}{\sigma} = -1.30$

ആയതിനാൽ $\mu - 1.30\sigma = 65.4$ - - - - സമവാക്യം(2)

(1), (2) സമവാക്യങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്താൽ

മാനകവ്യതിയാനം, $\sigma = 2$ ഇഞ്ച്, മാധ്യം $\mu = 68$ ഇഞ്ച് എന്ന് ലഭിക്കും.



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1) $Z \sim N(0,1)$. എങ്കിൽ താഴെ പറയുന്നവയിൽ Z_1 എന്റെ വില കാണുക.

(a) $P(Z < Z_1) = 0.25$ (b) $P(Z > Z_1) = 0.38$

(c) $P(Z < Z_1) = 0.56$ (f) $P(Z > Z_1) = 0.65$

2) $X \sim N(24, 9)$ ഉം $P(X > a) = 0.974$, ഉം ആയാൽ 'a' യുടെ വില കാണുക.

നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

ഉയരം, ഭാരം, താപനിലകൾ എന്നിങ്ങനെയുള്ള വിവിധ തരം ചരങ്ങളെ വിശദീകരിക്കുവാൻ നോർമൽ വിതരണം ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. 'ബെൽ' ആകൃതിയുള്ള തുടർചര വിതരണമാണ് നോർമൽ വിതരണം. മാധ്യത്തിന് അപേക്ഷികമായി നോർമൽ വക്രം സമമിതമാണ്. നോർമൽ വക്രത്തിന്റെ രണ്ട് അറ്റങ്ങൾ അനന്തമായി നീണ്ടിരിക്കുകയും X അക്ഷത്തിൽ ഒരിക്കലും തൊടാത്തതുമായിരിക്കും. Z പരിവർത്തനം വഴി നോർമൽ ചരങ്ങളെ മാനക നോർമൽ ചരങ്ങളാക്കി മാറ്റപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്. മാനക നോർമൽ വിതരണം എന്നത് മാധ്യം പൂജ്യവും, വ്യതിയാനം ഒന്നും ആയ നോർമൽ വിതരണം ആകുന്നു. രണ്ട് വിലകൾക്കിടയിൽ നോർമൽ ചരം വരാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുന്നതിന്, ആ വിലകൾക്ക് തത്തുല്ല്യമായ മാനക നോർമൽ വക്രത്തിന്റെ താഴെയുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കിയാൽ ലഭ്യമാകും. സംഭാവ്യതാ പ്രസ്താവനകളിൽ നിന്ന് നോർമൽ ചരത്തിന്റെ മാധ്യവും, മാനകവ്യതിയാനവും കണ്ടുപിടിക്കുന്നവിധം നമ്മൾ മനസ്സിലാക്കി. ഏകദേശ നോർമൽ വിതരണമനുവർത്തിക്കുന്ന ചരങ്ങളുടെ വ്യത്യസ്തങ്ങളായ പ്രശ്നങ്ങളുടെ പരിഹാരത്തിനായി നോർമൽ വിതരണം ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

നമുക്ക് വിലയിരുത്താം

1-10 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ നിന്ന് കൃത്യമായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

1. നോർമൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനെസ്സ് ഗുണാങ്കം β_1 എന്നത് .... ആയിരിക്കും.

   a) ഒന്ന് b) പൂജ്യം c) ഒന്നിനേക്കാൾ വലുത് d) ഒന്നിനേക്കാൾ ചെറുത്.

2. $N(\mu, \sigma^2)$ എന്ന നോർമൽ വിതരണത്തിന്റെ മോഡ് .... ആകുന്നു.

   a) μ b) 2μ c) σ d) 0

3. നോർമൽ സംഭാവ്യത വക്രത്തിന്റെ താഴെയുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ ആകെ പരപ്പളവ് .... ആണ്.

   a) ഒന്നിനേക്കാൾ കുറവ് b) ഒന്ന് c) ഒന്നിലേക്കാൾ വലുത് d) പൂജ്യം

4. X എന്ന അനിയതചരം ($\mu - 2\sigma$, $\mu + 2\sigma$) എന്ന പരിധിക്കിടയിൽ വരുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത ഏകദേശം....... ആണ്.

a) 0.95 b) 0.68 c) 0.99 d) 0.0027

5. Z എന്നത് ഒരു മാനക നോർമൽ ചരമാകുന്നുവെങ്കിൽ $P(Z>4)$ ...... ആകുന്നു.

a) 0 b) 1 c) ∞ d) 0.5

6. നോർമൽ വിതരണത്തിൽ .... ആയിരിക്കും

a) മാധ്യം = മീഡിയൻ = മോഡ്
b) മാധ്യം < മീഡിയൻ < മോഡ്
c) മാധ്യം > മീഡിയൻ > മോഡ്
d) മാധ്യം > മീഡിയൻ < മോഡ്

7. X എന്ന നോർമൽ ചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഏകദം,

$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(X-30)^2}{25}}$; $-\infty < X < \infty$ ആകുന്നു എങ്കിൽ മാധ്യവും, വ്യതിയാനവും യഥാക്രമം ...., ... ആയിരിക്കും.

a) 30, 5 b) 0, 25 c) 30, 5 d) 30, 10

8. ഒരു നോർമൽ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം 60 എങ്കിൽ അതിന്റെ മോഡ് എന്നത് .... ആകുന്നു.

a) 60 b) 40 c) 50 d) 30

9. x എന്ന നോർമൽ ചരത്തിന്റെ മാധ്യം = 100 ഉം വ്യതിയാനം = 25 എങ്കിൽ $P(90 < x < 120)$ എന്നതിന് തുല്യമായത് താഴെ പറയുന്നവയിൽ ഏത്?

a) $P(-1 < z < 1)$ b) $P(-2 < z < 4)$ c) $P(4 < z < 4.1)$ d) $P(-2 < z < 3)$

10. $X \sim N(6, 1.2^2)$ ഉം $P(0 < Z < 1) = 0.3413$ ഉം ആണെങ്കിൽ $P(4.8 < X < 7.2)$ .....

a) 0.3413 b) 0.6587 c) 0.6826 d) 0.3174

11. താഴെ പറയുന്നവയിൽ മാനക നോർമൽ വക്രത്തിന് താഴെയുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

a) Z = 1 ന് ഇടതുഭാഗം
b) Z = - 1.6 ന് വലതുഭാഗം
c) Z = - 0.7 ഉം Z = 1.414 ഉം ഇടയിൽ

12. $X \sim N(50, 8)$. ഇവിടെ X എന്നത് ഒരു അനിയത ചരമാണ്. താഴെ പറയുന്നവ കാണുക.

a) $P(48 < X < 54)$
b) $P(52 < X < 55)$
c) $P(46 < X < 49)$
d) $P(|X - 50| < \sqrt{8})$

13. $P|Z < Z_1| = 0.89$ ആണെങ്കിൽ Z_1 ന്റെ വിലകണ്ടുക.

14. നവജാത ശിശുവിന്റെ ഭാരം ഒരു അനിയത ചരമാണ്. അതിന്റെ സംഭാവ്യത ഘനത്വ ഏകദം,

$f(x) = \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e$ [illegible] ; $-\infty < X < \infty$.

i) ശിശുക്കളുടെ ഭാരത്തിന്റെ ശരാശരി കാണുക.

ii) ഭാരത്തിന്റെ മാനകവ്യതിചലനം കാണുക.

iii) ശിശിക്കളുടെ ഭാരം 3 Kg ൽ കുറയാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

15. $X \sim N(40, 5^2)$ എങ്കിൽ $P(45 \leq X \leq 55)$ കാണുക.

16. നോർമൽ വിതരണത്തിലുള്ള X ന്റെ മാധ്യം 40 ഉം മാനകവ്യതിയാനം 3 ഉം ആണെങ്കിൽ $P[X<46]$ കാണുക.

17. നോർമൽ വിതരണത്തിലുള്ള X ചരത്തിന്റെ മാധ്യം 62 ഉം വ്യതിയാനം 9 ഉം എങ്കിൽ X ന്റെ വില 60 നും 65 നും ഇടയിൽ X വരുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

18. ഒരു ഇനം വാഹന ടയറുകളുടെ ശരാശരി ആയുസ്സ് 30,000 മൈൽ ഉം മാനകവ്യതിയാനം 2000 മൈൽ ഉം ആകുന്നു. ഒരു ടയർ എടുത്ത് പരിശോധിക്കുകയാണെങ്കിൽ താഴെ പറയുന്ന ആയുർദൈർഘ്യത്തിന്റെ സംഭാവ്യതകൾ കാണുക. (ചരം നോർമൽ വിതരണത്തിലാണെന്ന് അനുമാനിക്കാം).

a) 25000 നും 28000 നും ഇടക്ക്   b) 27000 നും 33000 നും ഇടക്ക്

19. 500 തൊഴിലാളികളുടെ മാസവരുമാനം നോർമൽ വിതരണത്തിലാണ് എന്ന് കരുതുക. അവയുടെ മാധ്യം 2000 രൂപയും മാനകവ്യതിയാനം 200 രൂപയുമാണ്. താഴെ പറയുന്ന വിധത്തിൽ വരുമാനമുള്ളവരുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കുക.

a) 2300 രൂപയ്ക്ക് മുകളിൽ   b) 1800 രൂപയ്ക്കും 2300 രൂപയ്ക്കും ഇടയിൽ

20. ഒരു കമ്പനി നിർമ്മിച്ച 2000 ബൾബുകൾ പരിശോധിച്ചപ്പോൾ, അവയുടെ ആയുർദൈർഘ്യം നോർമൽ വിതരണത്തിലാണെന്നും മാധ്യം 2040 മണിക്കൂറും മാനകവ്യതിയാനം 60 മണിക്കൂറുമാണെന്ന് കണ്ടെത്തി. ഈ വിവരത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ എത്ര ശതമാനം ബൾബുകൾ താഴെ പറയുന്ന തരത്തിൽ ആയുർ ദൈർഘ്യം ഉണ്ടാകും കാണുക.

a) 2150 മണിക്കൂറിൽ കൂടുതൽ   b) 1960 മണിക്കൂറിൽ കുറവ്

21. മാധ്യം 120 ഉം മാനക വ്യതിയാനം 20 ഉം ഉള്ള നോർമൽ വിതരണത്തിലാണ് വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ബുദ്ധിശക്തി മാനക സ്കോറുകൾ. ബുദ്ധിശക്തി മാനകം താഴെ പറയുന്ന തരത്തിൽ വരാനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

a) 100 നും 130 നും ഇടയിൽ   b) 140 ന് മുകളിൽ   c) 150 ന് താഴെ

22. $X \sim N(100, 6^2)$, $P(X > a) = 0.1093$, എങ്കിൽ a യുടെ വില കാണുക.

23. $X \sim N(70, 25)$, $P(|X - 70| < a) = 0.8$ എങ്കിൽ 'a' യുടെ വില കാണുക.

24. കുറച്ച് ഇനങ്ങളുടെ നീളം നോർമൽ വിതരണത്തിലാണ്. മാധ്യം μ സെ.മി.യും, മാനക വ്യതിയാനം 6 സെ.മീ യും ആകുന്നു. 4.78% ഇനങ്ങൾ 82 ൽ കൂടുതലാണ്. മാധ്യത്തിന്റെ മൂല്യം കാണുക.

25. $X \sim N(100, \sigma^2)$ ഉം $P(X < 106) = 0.8849$ ഉം എങ്കിൽ മാനകവ്യതിയാനം σ കാണുക.

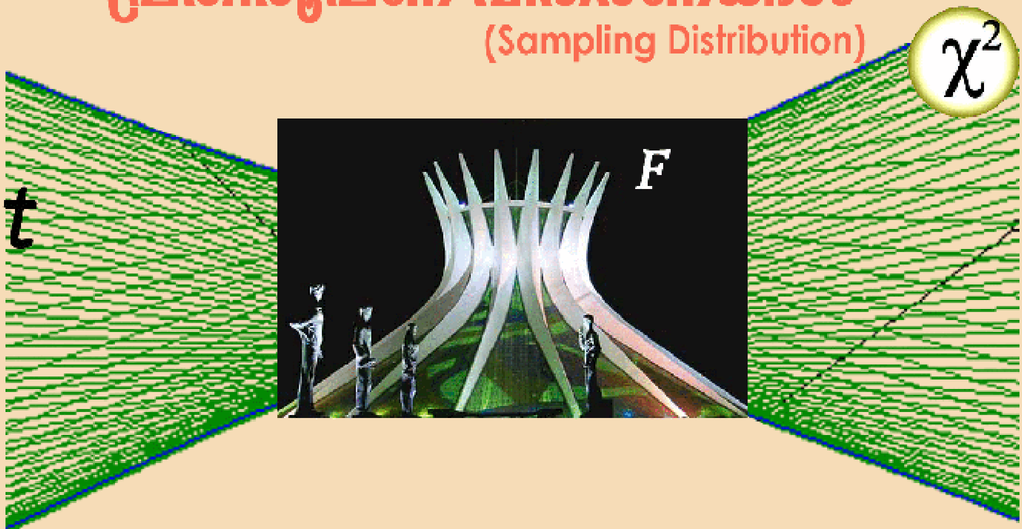
26. കൃത്യമായി നോർമൽ വിതരണത്തിലുള്ള ഇനങ്ങളിൽ 7% ഇനങ്ങൾ 35 ൽ താഴെയും 89% ഇനങ്ങൾ 63 ൽ താഴെയും ആകുന്നു. ഈ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യവും മാനകവ്യതിയാനവും കാണുക.

R8F8R5

അധ്യായം 7

പ്രതിരൂപണ വിതരണങ്ങൾ

(Sampling Distribution)



നമ്മുടെ ജീവിതവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പഠനങ്ങളിൽ സമഷ്ടിയുടെ പൂർണ്ണമായ പഠനം എല്ലായ്പ്പോഴും സാധ്യമാകാത്തതിനാൽ, പ്രതിരൂപണ രീതികൾ ധാരാളമായി ഉപയോഗിക്കുന്നു. വേറിട്ടതും തുടർച്ചയായതുമായ വിതരണത്തിലൂടെ നമ്മുടെ ചർച്ച ഒരു പടി കൂടി മുന്നോട്ടു പോകുന്നു. ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം സാംഖ്യജം (Statistic), പരാമീറ്റർ (Parameter), സാംഖ്യജങ്ങളുടെ സംഭാവ്യത വിതരണം (Probability distribution of statistic) തുടങ്ങിയ ആശയങ്ങൾ പരിചയപ്പെടുന്നു.

സാമ്പിൾ വലിപ്പം കൂടുമ്പോൾ ഉത്ഭവ സമഷ്ടി നോർമൽ അല്ലായെങ്കിൽപോലും സാമ്പിൾ മാധ്യം, $\overline{x}$ ന്റെ വിതരണം നോർമൽ ആണെന്ന് നമുക്ക് അറിയാം. കേന്ദ്രീയപരിധി സിദ്ധാന്തം പ്രകാരമാണ് ഇത് ലഭിക്കുന്നത്. സാമ്പിളും സമഷ്ട്രിയും പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ടതാണ്. ഒരു

സവിശേഷ പഠന നേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായത്തിന്റെ പൂർത്തീകരണത്തിന് ശേഷം പഠിതാവ്:

- പ്രതിരൂപണ വിതരണത്തിന്റെ അർത്ഥവും ആശയവും തിരിച്ചറിയുന്നു.
- പരാമീറ്റർ, സാംഖ്യജം എന്നിവയെ വിവേചിക്കുവാനും അവയ്ക്ക് ഉദാഹരണങ്ങൾ നൽകുവാനും സാധിക്കുന്നു.
- വിവിധ തരം പ്രതിരൂപണ വിതരണങ്ങളെക്കുറിച്ചും അവയുടെ ഉപയോഗങ്ങളെക്കുറിച്ചും ഗ്രഹിക്കുന്നു.
- കൈ-വർഗം, സ്റ്റുഡന്റ്സ് t, സ്നെഡെകേർസ് F സാംഖ്യജങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ രൂപീകരിക്കുന്നു.

സാമ്പിളിൽ നിന്നോ സാമ്പിളുകളുടെ ഒരു ശ്രേണിയിൽ നിന്നോ സമഷ്ടിയെക്കുറിച്ച് മനസിലാക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ വളരെ പ്രധനപ്പെട്ടതാണ്. ഒരു സാമ്പിളിന്റെ വിലകൾ എങ്ങനെ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്ന് മനസിലാക്കുക എന്നുള്ളതാണ് ലക്ഷ്യം. പ്രതിരൂപണ വിതരണങ്ങൾ ഇത്തരം വ്യത്യാസങ്ങൾ എങ്ങനെയാണെന്നുള്ളത് വിശദീകരിക്കുന്നു. ഇവിടെ നമുക്ക് സാമ്പിൾ സാംഖ്യജങ്ങളെ കുറിച്ച് ചില പ്രധാനപ്പെട്ട അറിവ് ലഭിക്കുന്നു. അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളേയും, വിതരണങ്ങളുടെ പട്ടികകളെയും അവ പ്രായോഗിക തലത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന മേഖലകളെയും പരിചയപ്പെടുന്നു.

7.1. പരാമീറ്റർ (Parameter), സാംഖ്യജം (Statistic)

കേരളത്തിലെ ഹയർ സെക്കന്ററി വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ശരാശരി ഉയരം കണ്ടുപിടിക്കുവാൻ നമുക്ക് താൽപര്യമുണ്ടെന്നിരിക്കട്ടെ. മുഴുവൻ കുട്ടിയുടെയും ഉയരം കാണുന്നത് വളരെ പ്രയാസകരമാണ്. അതുകൊണ്ട് സംസ്ഥാനത്തിന്റെ വിവിധ ഭാഗങ്ങളിൽ നിന്നും പ്രാതിനിധ്യം ഉള്ള എണ്ണം കുട്ടികളിൽ നിന്നും വിവരം നാം ശേഖരിക്കുന്നു. ഇവിടെ കേരളത്തിലെ എല്ലാ ഹയർ സെക്കന്ററി വിദ്യാർത്ഥികളുടെയും കൂട്ടം സമഷ്ടിയും അതിലെ ഒരു പ്രാതിനിധ്യം ഉള്ള ഒരു ഭാഗം സാമ്പിളും ആകുന്നു.

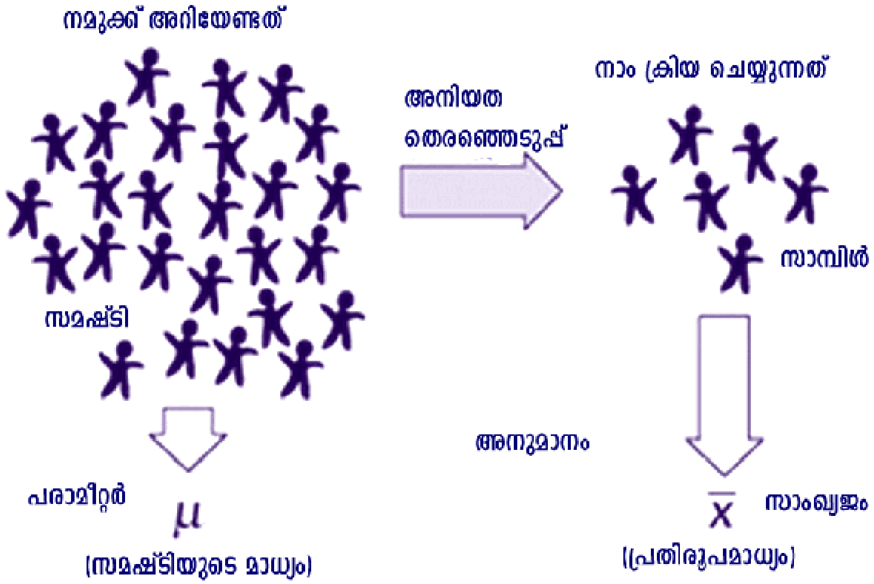
മാധ്യം, മധ്യാങ്കം മോഡ്, പരിധി, മാനക വ്യതിയാനം തുടങ്ങി വിവിധ അളവുകളിലൂടെ വിതരണങ്ങളെ നമുക്ക് വിശദീകരിക്കാം. ഈ അളവുകൾ ഒരു സാമ്പിളിന്റെ സവിശേഷതകളെ വിശദീകരിക്കുകയാണെങ്കിൽ അവയെ സാംഖ്യജങ്ങൾ (Statistics) എന്നും, സമഷ്ട്രിയുടെ സവിശേഷതകളെ വിശദീകരിക്കുകയാണെങ്കിൽ പരാമീറ്ററുകൾ (parameters) എന്നും വിളിക്കുന്നു.

ഒരു സമഷ്ട്രിയുടെ അളക്കാവുന്ന സവിശേഷതയാണ് പരാമീറ്റർ

ഒരു സാമ്പിളിന്റെ അളക്കാവുന്ന സവിശേഷതയാണ് സാംഖ്യജം

സമഷ്ടിയിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളെയും പരിഗണിച്ച് കൊണ്ട് കണക്കാക്കുന്ന സ്ഥിര സംഖ്യകളാണ് സമഷ്ടിയുടെ പരാമീറ്ററുകൾ ഉദാ: സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യം, സമഷ്ടിയുടെ മധ്യാങ്കം, സമഷ്ടിയുടെ മോഡ്. സമഷ്ടിയുടെ പരാമീറ്റർ സ്ഥിരവും എന്നാൽ അറിഞ്ഞു കൂടാത്തതുമാണ്. ഇതിന്റെ വില സാംഖ്യജം ഉപയോഗിച്ചാണ് നിർണയിക്കുന്നത്. സാഖ്യജം എന്നത് സാമ്പിൾ ഡാറ്റകളിൽ നിന്നും കണക്കാക്കുന്ന സ്ഥിരസംഖ്യകളാണ്. ഉദാഹരണമായി സാമ്പിൾ മാധ്യം, സാമ്പിൾ മധ്യാങ്കം, സാമ്പിൾ മാനക വ്യതിയാനം, സാമ്പിൾ വ്യതിയാനം തുടങ്ങിയവ. സാധാരണയായി സാമ്പിൾ മാധ്യത്തെ '$\bar{x}$', കൊണ്ടും സാമ്പിൾ മാനക വ്യതിയാനത്തെ 's' കൊണ്ടും സാമ്പിൾ വ്യതിയാനത്തെ 's^2' കൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതുപോലെ സമഷ്ടി മാധ്യത്തെ 'μ', കൊണ്ടും സമഷ്ടി മാനക വ്യതിയാനത്തെ 'σ', കൊണ്ടും സമഷ്ടി വ്യതിയാനത്തെ 'σ^2' കൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

	സാംഖ്യജം	പരാമീറ്റർ
മാധ്യം	$\bar{x}$	μ
മാനക വ്യതിയാനം	s	σ
വ്യതിയാനം	s^2	σ^2



7.2 പ്രതിരൂപണ വിതരണം (Sampling Distribution)

നിങ്ങൾക്ക് പ്രതിരൂപണത്തിന്റെ വിവിധ രീതികളായ തിരികെ വയ്ക്കുന്ന ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണവും തിരികെ വയ്ക്കാത്ത ക്രമ രഹിത പ്രതിരൂപണവും പരിചിതമാണ്.

'N' എന്നത് സമഷ്ടിയിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണവും 'n' എന്നത് സാമ്പിളിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണവും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. തിരികെ വയ്ക്കാത്ത ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം (SRSWR) രീതിയാണ് നാം പരിഗണിക്കുന്നതെങ്കിൽ 'N' അംഗങ്ങളിൽ നിന്നും 'n' വലിപ്പമുള്ള കൂടിച്ചേരലുകളുടെ എണ്ണം NC_n ഉം ഒരു സാമ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുക്കാവാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{NC_n}$ ഉം ആണ്.

3, 5, 6, 8, 11 എന്നി 5 വിലകൾ അടങ്ങിയ ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും വലിപ്പം 2 ആയ സാമ്പിളുകൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നത് പരിഗണിക്കുക. സാധ്യമായ സാമ്പിളുകളുടെ എണ്ണം $5C_2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = 10$ ആണ്.

നമുക്ക് സാമ്പിളുകളെയും അവയുടെ മാധ്യങ്ങളെയും എഴുതുവാൻ ശ്രമിക്കാം.

സാമ്പിൾ ക്രമ സംഖ്യ	സാമ്പിൾ വിലകൾ (x_1, x_2)	മാധ്യം $(\bar{x})$	സാമ്പിളിന്റെ സംഭാവ്യത
1	(3,5)	4	$\frac{1}{10}$
2	(3,6)	4.5	$\frac{1}{10}$
3	(3,8)	5.5	$\frac{1}{10}$
4	(3,11)	7	$\frac{1}{10}$
5	(5,6)	5.5	$\frac{1}{10}$
6	(5,8)	6.5	$\frac{1}{10}$
7	(5,11)	8	$\frac{1}{10}$
8	(6,8)	7	$\frac{1}{10}$
9	(6,11)	8.5	$\frac{1}{10}$
10	(8,11)	9.5	$\frac{1}{10}$
	ആകെ $(\sum \bar{x})$	**66**	

പട്ടിക 7.1

ഒരു സാമ്പിളിൽ നിന്നും മറ്റൊന്നിലേക്ക് മാറുമ്പോൾ സാമ്പിൾ മാധ്യം വ്യത്യാസപ്പെടുന്നതായി കാണാം.

തിരികെ വയ്ക്കുന്ന ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണത്തിൽ (SRSWR) സാധ്യമായ സാമ്പിളുകളുടെ എണ്ണം N^n ഉം ഒരു സാമ്പിൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{N^n}$ ഉം ആണ്.

തൊട്ടു മുൻപിലത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ തിരികെ വയ്ക്കാത്ത ക്രമരഹിത സാമ്പിളുകളുടെ എണ്ണം $5^2 = 25$ ആണ്.

ഈ ഉദാഹരണത്തിന്റെ പ്രതിരൂപണ വിലകളും പ്രതിരൂപണ മാധ്യങ്ങളും പട്ടികപ്പെടുത്താം.

സാമ്പിൾ ക്രമ സംഖ്യ	സാമ്പിൾ വിലകൾ (x_1, x_2)	മാധ്യങ്ങൾ $(\bar{x})$	സാമ്പിളിന്റെ സംഭാവ്യത	സാമ്പിൾ ക്രമ സംഖ്യ	സാമ്പിൾ വിലകൾ (x_1, x_2)	മാധ്യങ്ങൾ $(\bar{x})$	സാമ്പിളിന്റെ സംഭാവ്യത
1	(3,3)	3	$\frac{1}{25}$	14	(6,8)	7	$\frac{1}{25}$
2	(3,5)	4	$\frac{1}{25}$	15	(6,11)	8.5	$\frac{1}{25}$
3	(3,6)	4.5	$\frac{1}{25}$	16	(8,3)	5.5	$\frac{1}{25}$
4	(3,8)	5.5	$\frac{1}{25}$	17	(8,5)	6.5	$\frac{1}{25}$
5	(3,11)	7	$\frac{1}{25}$	18	(8,6)	7	$\frac{1}{25}$
6	(5,3)	4	$\frac{1}{25}$	19	(8,8)	8	$\frac{1}{25}$
7	(5,5)	5	$\frac{1}{25}$	20	(8,11)	9.5	$\frac{1}{25}$
8	(5,6)	5.5	$\frac{1}{25}$	21	(11,3)	7	$\frac{1}{25}$
9	(5,8)	6.5	$\frac{1}{25}$	22	(11,5)	8	$\frac{1}{25}$
10	(5,11)	8	$\frac{1}{25}$	23	(11,6)	8.5	$\frac{1}{25}$
11	(6,3)	4.5	$\frac{1}{25}$	24	(11,8)	9.5	$\frac{1}{25}$
12	(6,5)	5.5	$\frac{1}{25}$	25	(11,11)	11	$\frac{1}{25}$
13	(6,6)	6	$\frac{1}{25}$	**ആകെ $(\sum \bar{x}) = 165$**			

പട്ടിക 7.2

പട്ടിക 7.1 ൽ നിന്നും 7.2 ൽ നിന്നും സാമ്പിൾ മാധ്യമങ്ങൾ സാമ്പിളുകൾ മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വ്യത്യാസപ്പെടുന്നതായി കാണാം. (പട്ടിക 7.1 ലെ സാമ്പിൾ SRSWOR രീതിയിലും 7.2 ലേത് SRSWR രീതിയിലും)

ഇതിൽ നിന്നും മാധ്യത്തിന്റെ സംഖ്യാപരമായ വില സാമ്പിളുകൾ മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വ്യത്യാസപ്പെടുന്നതായി കാണാം. അത്കൊണ്ട് ഇത് ഒരു അനിയത ചരമാണ്. ഇത്പോലെ മധ്യാങ്കം, മോഡ്, വ്യതിയാന മാധ്യം, മാനക വ്യതിയാനം തുടങ്ങിയ സംഖ്യജങ്ങളും നമുക്ക് കണക്കാക്കുവാൻ സാധിക്കുകയും അവ അനിയത ചരങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുകയും ചെയ്യാം.

ഇത് അർത്ഥമാക്കുന്നത് ഓരോ സാംഖ്യജത്തിനും അതിന്റേതായ വിതരണമുണ്ടെന്നാണ്.

ഈ വിതരണത്തെ പ്രതിരൂപണവിതരണം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

പ്രതിരൂപണ വിതരണങ്ങൾ സാംഖ്യജങ്ങളുടെ സംഭാവ്യത വിതരണങ്ങളാണ്.

> ഒരു സാംഖ്യജത്തിന്റെ സംഭാവ്യത വിതരണമാണ് പ്രതിരൂപണ വിതരണം.

7.3. സാമ്പിൾ മാധ്യത്തിന്റെ വിതരണം (Distribution of Sample Mean)

പട്ടിക 7.1 ൽ നിന്നും 7.2 ൽ നിന്നും ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഭാവ്യത വിതരണം ലഭിക്കുന്നു.

(i) SRSWOR

$\bar{x}$	4	4.5	5.5	6.5	7	8	8.5	9.5	ആകെ സംഭാവ്യത
$P(\bar{x})$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\Sigma P(\bar{x})=1$

പട്ടിക 7.3

(ii) SRSWR രീതിയിൽ

$\bar{x}$	3	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	8	8.5	9.5	11	ആകെ സംഭാവ്യത
$P(\bar{x})$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\Sigma P(\bar{x})=1$

പട്ടിക 7.4

സാമ്പിൾ മാധ്യത്തിന്റെ മാനകപ്പിശക് (Standard error of sampling Mean)

ഒരു സാംഖ്യജത്തിന്റെ മാനക വ്യതിയാനത്തെ മാനകപ്പിശക്ക് (standard error) എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

സാമ്പിളുകൾ SRSWR രീതിയിൽ എടുത്താൽ സാമ്പിൾ മാധ്യത്തിന്റെ വ്യതിയാനം, $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$

സാമ്പിൾ മാധ്യത്തിന്റെ മാനകപ്പിശക്, $SE(\bar{x}) = \sqrt{V(\bar{x})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

സാമ്പിളുകൾ SRSWOR രീതിയിൽ എടുത്താൽ

സാമ്പിൾ വ്യതിയാനം, $V(\bar{x}) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}$

സാമ്പിൾ മാധ്യത്തിന്റെ മാനകപ്പിശക്, $SE(\bar{x}) = \sqrt{V(\bar{x})} = \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}}$

മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച ഉദാഹരണത്തിൽ മാധ്യങ്ങളുടെ പ്രതിരൂപണ വിതരണത്തിലെ മാനക വ്യതിയാനം കണക്കാക്കാം.

x	f(x)	x.f(x)	x^2	x^2. f(x)
3	$\frac{1}{25}$	0.12	9	0.36
4	$\frac{2}{25}$	0.32	16	1.28
4.5	$\frac{2}{25}$	0.36	20.25	1.62
5	$\frac{1}{25}$	0.2	25	1
5.5	$\frac{4}{25}$	0.88	30.25	4.84
6	$\frac{1}{25}$	0.24	36	1.44
6.5	$\frac{2}{25}$	0.52	42.25	3.38
7	$\frac{4}{25}$	1.12	49	7.84
8	$\frac{3}{25}$	0.96	64	7.68
8.5	$\frac{2}{25}$	0.68	72.25	5.78
9.5	$\frac{2}{25}$	0.76	90.25	7.22
11	$\frac{1}{25}$	0.44	121	4.84
	Total	**6.60**		**47.28**

പട്ടിക 7.5

$$V(\bar{x}) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= \sum x^2 \text{f(x)} - [\sum x\text{f}(x)]^2$$

$$= 47.28\text{-}6.6^2 = 3.72. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

സാമ്പിൾ മാധ്യങ്ങളുടെ വ്യതിയാനം 3.72 ആകുന്നു.

ഇനി നമുക്ക് 3, 5, 6, 8, 11 എന്നീ വിലകൾ അടങ്ങിയ സമഷ്ടിയുടെ വ്യതിയാനം കണക്കാക്കാം.

$\sigma^2 = \sum \frac{x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = 7.44$ എന്ന് ലഭിക്കും.

SRSWR ൽ സാമ്പിൾ വ്യതിയാനം

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{7.44}{2} = 3.72 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) ഉം (2) തുല്യമാണ്. സാമ്പിൾ വ്യതിയാനം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് രണ്ടാമത്തെ രീതി കുറച്ച് കൂടി എളുപ്പമാണ്. ഇതുപോലെ സാമ്പിൾ വ്യതിയാനം SRSWOR രീതിയിലും ശരിയാണോ എന്ന് നിങ്ങൾക്ക് പരിശോധിക്കാം.

വിശദീകരണം 7:1

2, 3, 4, 5 എന്നീ വിലകൾ അടങ്ങിയ ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും വലിപ്പം 2 ആയ പ്രതിരൂപങ്ങൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

(i) $E(\bar{x})$ (ii) $V(\bar{x})$ and (iii) സാമ്പിൾ മാധ്യത്തിന്റെ മാനകപ്പിശക് എന്നിവ

(a) SRSWOR രീതിയിലും (b) SRSWR രീതിയിലും കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

(a) SRSWOR രീതിയിൽ സാമ്പിളുകളുടെ എണ്ണം $= 4C_2 = 6$

സാമ്പിൾ സംഖ്യകൾ	സാമ്പിളുകൾ (x_1, x_2)	മാധ്യങ്ങൾ $(\bar{x})$
1	(2,3)	2.5
2	(2,4)	3
3	(2,5)	3.5
4	(3,4)	3.5
5	(3,5)	4
6	(4,5)	4.5
	ആകെ	**21**

(i) $E(\bar{x}) = \frac{21}{6} = 3.5$

(ii) $\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2$

$$= \frac{54}{4} - \left(\frac{14}{4}\right)^2 = 13.5 - 12.25$$

$$= 1.25$$

$$V(\bar{x}) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \left(\frac{4-2}{4-1}\right)\frac{1.25}{2} = 0.42$$

(iii) സാമ്പിൾ മാധ്യങ്ങളുടെ മാനകപ്പിശക്,

$$SE(\bar{x}) = \sqrt{V(\bar{x})} = \sqrt{0.42} = 0.648$$

(b) SRSWR രീതിയിൽ സാധ്യമായ സാമ്പിളുകളുടെ എണ്ണം = $4^2 = 16$

സാമ്പിൾ എണ്ണം	സാമ്പിളുകൾ (x_1, x_2)	മാധ്യം $(\bar{x})$	സാമ്പിൾ എണ്ണം	സാമ്പിളുകൾ (x_1, x_2)	മാധ്യം $(\bar{x})$
1	(2,2)	2	9	(4,2)	3
2	(2,3)	2.5	10	(4,3)	3.5
3	(2,4)	3	11	(4,4)	4
4	(2,5)	3.5	12	(4,5)	4.5
5	(3,2)	2.5	13	(5,2)	3.5
6	(3,3)	3	14	(5,3)	4
7	(3,4)	3.5	15	(5,4)	4.5
8	(3,5)	4	16	(5,5)	5

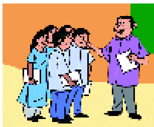
(i) $E(\bar{x}) = \frac{56}{16} = 3.5$

(ii) $\sigma^2 = 1.25$

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{125}{2} = 0.625$$

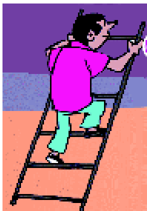
(iii) സാമ്പിൾ മാധ്യങ്ങളുടെ മാനകപ്പിശക്

$$SE(\bar{x}) = \sqrt{V(\bar{x})} = \sqrt{0.625} = 0.79$$



പ്രവർത്തനം

4, 5, 6, 7 എന്നീ നാല് വിലകൾ അടങ്ങിയ ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും വലിപ്പം 2 ആയ സാമ്പിളുകൾ SRSWR രീതിയിൽ എടുക്കുന്നു. ഓരോ സാമ്പിളിന്റേയും മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കുകയും $\bar{x}$ ന്റെ സാമ്പിൾ വിതരണം എഴുതുകയും ചെയ്യുക. ഈ സാമ്പിൾ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യവും മാനക വ്യതിയാനവും കണ്ടുപിടിക്കുക. സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യവുമായി ഈ വിലകൾ താരതമ്യം ചെയ്യുക.



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

5, 8, 10, 11 എന്നീ വിലകൾ അടങ്ങിയ ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും വലിപ്പം 2 ആയ സാധ്യമായ എല്ലാ സാമ്പിളുകളും എടുക്കുക.

(i) $E(\bar{x})$ (ii) $V(\bar{x})$ (iii) സാമ്പിൾ മാധ്യത്തിന്റെ മാനകപ്പിശക് മുതലായവ കാണുക.

(a) തിരികെ വയ്ക്കുന്ന രീതിയിൽ (b) തിരികെ വയ്ക്കാത്ത രീതിയിൽ

7.4. കേന്ദ്രീയ സിദ്ധാന്തവും അതിന്റെ പ്രാധാന്യവും

കേന്ദ്രീയ സിദ്ധാന്തം ചുവടെ പറയും പ്രകാരം ആണ്.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്നത് മാധ്യം μ ഉം വ്യതിയാനം σ^2 ഉം ഉള്ള സ്വതന്ത്ര അനിയത ചരങ്ങളുടെ ഒരു ശ്രേണി ആണ്. n ന്റെ വില കൂടുതലാണെങ്കിൽ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, എന്നിവയുടെ മാധ്യം $\bar{x}$ ന്റെ സംഭാവ്യതാ വിതരണം, മാധ്യം μ ഉം വ്യതിയാനം $\frac{\sigma^2}{n}$ ഉം ആയ ഒരു നോർമൽ വിതരണം ആയിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ

$$z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$ ആയിരിക്കും $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ.

കേന്ദ്രീയ സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച് സാമ്പിൾ വലിപ്പം കൂടുതലാണെങ്കിൽ X ന്റെ വിതരണം ഏതായാലും $\bar{x}$ ന്റെ വിതരണം നോർമൽ വിതരണം ആകും.

സാധാരണയായി വലിപ്പം $n < 30$ ആയ സാമ്പിളുകളെ ചെറിയ സാമ്പിളുകളായി കണക്കാക്കുന്നു.

7.5 കൈ–വർഗം, t, F വിതരണങ്ങൾ

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയാണ് ചില പ്രധാനപ്പെട്ട പ്രതിരൂപണ വിതരണങ്ങൾ

- കൈ-വർഗ വിതരണം (Chi-square distribution)
- t - വിതരണം
- F- വിതരണം

കൈ–വർഗ വിതരണം (Chi-Square distribution)

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ എന്നിവ 'n' സ്വതന്ത്ര മാനക നോർമൽ ചരങ്ങളാണെങ്കിൽ അവയുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക സ്വതന്ത്രതാമാനം (degrees of freedom) n ആയ കൈ - വർഗം ആയിരിക്കും ഇതിനെ $\chi^2_{(n)}$ ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

അതായത് $Z_1^2+Z_2^2+\ldots+Z_n^2 = \chi^2_{(n)}$

കൈ-വർഗം ചരത്തിന്റെ വിതരണത്തെ കൈ-വർഗ വിതരണം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ എന്നിവ മാധ്യം μ ഉം വ്യതിയാനം σ^2 ഉം ആയ ഒരു നോർമൽ വിതരണത്തിൽ നിന്നുള്ള അനിയത സാമ്പിൾ അണെന്ന് വിചാരിക്കുക. $Z_i = \dfrac{x_i - \mu}{\sigma}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ സ്വതന്ത്ര മാനക നോർമൽ വിതരണങ്ങളാണ്

അത് കൊണ്ട് $\sum Z_i^2 = \sum \left(\dfrac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2$ എന്ന ചരത്തിനെ χ^2 ചരം എന്നു വിളിക്കുന്നു.

സ്വതന്ത്രതാമാനം (Degrees of freedom): ഒരു കൂട്ടം ഡാറ്റകളിൽ ഉള്ള സ്വതന്ത്രമായ വിലകളുടെ എണ്ണത്തെ സ്വതന്ത്രതാമാനം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. നമ്മളോട് 10 സംഖ്യകൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുവാൻ പറഞ്ഞു വെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ നമുക്ക് നമുക്ക് ഇഷ്ടമുള്ള 10 സംഖ്യകൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സ്വാതന്ത്ര്യം ഉണ്ട്. അതിനാൽ സ്വതന്ത്രമാനം 10 ആണ്. എന്നാൽ സഖ്യകൾ തമ്മിൽ ഒരു നിബന്ധന ഏർപ്പെടുത്തുന്നുവെന്ന് വിചാരിക്കുക. നമ്മൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്ന സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ 100 കിട്ടും എന്നുള്ളതാണ് നിബന്ധന. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ 10 സംഖ്യകളും നമ്മുടെ ഇഷ്ടത്തിന് തെരഞ്ഞെടുക്കുവാൻ സാധ്യമല്ല. 9-ാമത്തെ സംഖ്യ തെരഞ്ഞെടുത്തതിന് ശേഷം, സംഖ്യകളുടെ തുക 94 ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ നമ്മുടെ 10-ാമത്തെ സംഖ്യ 6 ആയിരിക്കും, നമുക്ക് വേറെ തിരഞ്ഞെടുപ്പ് സാധ്യമല്ല. ഇവിടെ നമുക്ക് 9 സ്വതന്ത്രതാമാനങ്ങളെ ഉള്ളൂ. നമുക്ക n സംഖ്യകളെ തെരഞ്ഞെടുക്കുകയും ആ സംഖ്യകളുടെ തുകയിൽ മേൽ ഒരു നിബന്ധന ഏർപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്താൽ സ്വതന്ത്രതമാനങ്ങളായ എണ്ണം (n-1) ആയിരിക്കും.

കൈ–വർഗ വിതരണത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

1. 'n' സ്വതന്ത്രതാമാനമുള്ള ഒരു കൈ വർഗ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം n ഉം വ്യതിയാനം 2n ഉം ആയിരിക്കും.
2. Z ഒരു മാനക നേർമൽ വിതരണമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ വർഗം $Z^2 \rightarrow \chi^2_{(1)}$ ആയിരിക്കും.

3. കൈ - വർഗത്തിന് പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനസ് ആണ് ഉള്ളത്.

4. $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ χ^2 വിതരണത്തെ നോർമൽ വിതരണം ഉപയോഗിച്ച് സമീപിക്കാം

കുറിപ്പ്: $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ എന്നത് സ്വതന്ത്രതാമാനം (n-1) ഉള്ള χ^2 ആയിരിക്കും, s^2 എന്നത് സാമ്പിൾ വ്യതിയാനം ആണ്.

ഫ്രെഡ്റിച്ച് റോബർട്ട് ഹെൽമർട്ട് എന്ന ജർമൻ സാംഖ്യക ശാസ്ത്രജ്ഞൻ ഒരു നോർമൽ വിതരണത്തിന്റെ സാമ്പിൾ വ്യതിയാനം കണക്കാക്കുന്ന വേളയിലാണ് ആദ്യമായി കൈ-വർഗ വിതരണം ആദ്യമായി വിശദീകരിച്ചത്. അങ്ങനെ ജർമനിൽ ഇത് പാരമ്പര്യമായി ഹെൽമെർഷെ (ഹെൽമെരിറ്റൻ) അല്ലെങ്കിൽ ഹെൽമെർട്ട വിതരണം എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

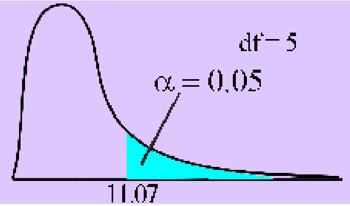
ഈ വിതരണം കാൾ പിയേഴ്സൺ എന്ന ഇംഗ്ലീഷ് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ അനുയോജ്യമായ വൈശിഷ്ട്യം (goodness of fit) എന്ന സന്ദർഭത്തിൽ സ്വതന്ത്രമായി കണ്ടുപിടിക്കുകയുണ്ടായി, ഇതിനായി കണ്ടുപിടിച്ച പട്ടികയുടെ വിലകൾ ഉപയോഗിച്ച്. അദ്ദേഹം പിയേഴ്സൺസ് കൈ-വർഗ പരിശോധന വികസിപ്പിച്ചെടുത്തു. കൈ-വർഗം എന്ന പേര് അന്തിമമായി പിയേഴ്സന്റെ ചുരുക്കെഴുത്തായ ഗ്രീക്ക് അക്ഷരം കൈ നിന്നാണ്. ഇതിനെ χ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

കൈ-വർഗ വിതരണത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ

കൈ-വർഗ വിതരണം ഉപയോഗിക്കുന്നത്

- അനുയോജ്യമായ വൈശിഷ്ട്യം പരിശോധിക്കുന്നതിന്
- ഗുണാത്മക ചരത്തിന്റെ സ്വതന്ത്രത പരിശോധിക്കുന്നതിന്
- ഒരു സമഷ്ടിയുടെ വ്യതിയാനം തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു വിലയ്ക്ക് തുല്യമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുന്നതിന്

കൈ-വർഗത്തിന്റെ പട്ടിക



ഒരു പ്രത്യേക സാർഥകതല (α) ത്തിൽ (Significance level) വ്യത്യസ്തങ്ങളായ സ്വതന്ത്രതാമാനങ്ങൾക്ക് ലഭിക്കുന്ന കൈ വർഗ വിലകളാണ് കൈ-വർഗ പട്ടികയിൽ ഉൾക്കൊള്ളുന്നത്. ഇതിൽ α പട്ടികയുടെ മുകൾ ഭാഗത്തും സ്വതന്ത്രതാമാനം പട്ടികയുടെ ഇടത് വശത്തെ നിരയിലും ആയി കാണുന്നു.

$\alpha = 0.05$ നും സ്വതന്ത്രതാമാനം 5 ഉം ആയാൽ കൈ വർഗത്തിന്റെ വില $\chi^2 = 11.07$ ആണ്.

ഇതിനെ $P(\chi^2_{(5)} > 11.07) = 0.05$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

വിശദീകരണം 7.2

ചുവടെ പറയുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ χ^2 ന്റെ വില കാണുക.

(a) $P(\chi^2_{(10)} > \chi^2) = 0.1$ (b) $P(\chi^2_{(8)} > \chi^2) = 0.01$

(c) $P(\chi^2_{(2)} > \chi^2) = 0.05$

പരിഹാരം:

(a) $\chi^2 = 15.99$ (b) $\chi^2 = 20.09$ (c) $\chi^2 = 5.99$

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

ചുവടെ പറയുന്ന സാഹചര്യങ്ങളിൽ χ^2 ന്റെ വില കാണുക.

(a) $P(\chi^2_{(15)} > \chi^2) = 0.10$ (b) $P(\chi^2_{(7)} > \chi^2) = 0.05$

(c) $P(\chi^2_{(10)} > \chi^2) = 0.01$

t വിതരണം (t distribution)

Z ഒരു മാനക നോർമൽ വിതരണവും Y എന്നത് 'n' സ്വതന്ത്രതാമാനമുള്ള ഒരു സ്വതന്ത്രമായ χ^2 ചരവുമാണെങ്കിൽ $\frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ നെ 't' ചരം അല്ലെങ്കിൽ 'n' സ്വതന്ത്രതാമാനമുള്ള സ്റ്റുഡന്റ്സ് t ചരം എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

അതായത്,
$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

അയർലെന്റിലെ ഡബ്ലിൻ എന്ന സ്ഥലത്തെ ഗിന്നസ് മദ്യനിർമാണശാലയിൽ ജോലി ചെയ്തിരുന്ന വില്യം സീലി ഗോസറ്റ് (1876-1937) എന്ന രസതന്ത്രജ്ഞൻ ആണ് t സാംഖ്യജം 1908 ൽ ആദ്യമായി അവതരിപ്പിച്ചത്. (സ്റ്റുഡന്റ് എന്നത് അദ്ദേഹത്തിന്റെ തൂലികാനാമമായിരുന്നു). ഗിന്നസ് കമ്പനിയിലെ നിയമം അതിലെ രസതന്ത്രജ്ഞൻമാരെ തങ്ങളുടെ കണ്ടുപിടിത്തങ്ങൾ പ്രസിദ്ധികരിക്കുന്നതിൽ നിന്നും വിലക്കിയിരുന്നു. അത്കൊണ്ട് സ്റ്റുഡന്റ് എന്ന തൂലികാനാമത്തിലാണ് ഗോസറ്റ് തന്റെ ഗണിതശാസ്ത്ര കണ്ടുപിടിത്തങ്ങൾ പ്രസിദ്ധീകരിച്ചിരുന്നത്.

t- വിതരണത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ

1. t പിൻതുടരുന്നത് 'n' സ്വതന്ത്രതാമാനങ്ങളുള്ള t വിതരണം ആണെങ്കിൽ

   $E(t) = 0$, $V(t) = \frac{n}{n-2}$ $n > 2$ ആയാൽ.

2. t വിതരണം $t=0$ യിൽ സമമിതമാണ്.
3. $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ t വിതരണം $\to$ നോർമൽ വിതരണം.

കുറിപ്പ്: $\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ എന്നത് ഒരു മാനക നോർമൽ സാംഖ്യജത്തിന്റെയും $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ എന്ന χ^2 സാംഖ്യജത്തിന്റെ വർഗ മൂലത്തിനെ അതിന്റെ സ്വതന്ത്രതാമാനം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നതിന്റെയും അംശബന്ധം (n-1) സ്വതന്ത്രതാമാനമുള്ള t സാംഖ്യജം ആയിരിക്കും.

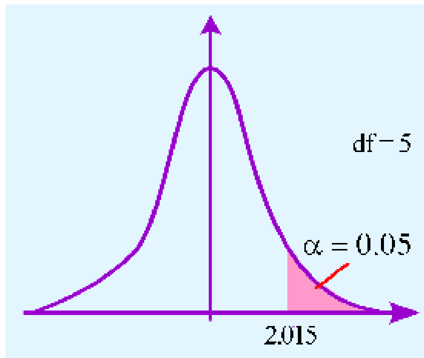
അതായത്
$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} \sim t(n-1)$$

t സാംഖ്യജത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ

t സാംഖ്യജം ഉപയോഗിച്ച് സാധാരണയായി ചുവടെ പറയുന്ന പരിശോധനകൾ നടത്തുന്നു.

- സമഷ്ടിയുടെ മാനക വ്യതിയാനം അറിഞ്ഞു കൂടാത്ത സാഹചര്യത്തിൽ നോർമൽ വിതരണത്തിൽ നിന്നും എടുത്ത ചെറിയ സാമ്പിളുകളുടെ മാധ്യത്തെ കുറിച്ച്.
- രണ്ട് സ്വതന്ത്രമായ തുല്യ മാധ്യമുള്ള അനിയത സാമ്പിളുകളുടെ മാധ്യങ്ങളെ കുറിച്ച്.

t വിതരണത്തിന്റെ പട്ടിക



ചില പ്രത്യേക വിലകളിലുള്ള സ്വർഥകതലങ്ങൾക്ക് ഉള്ള t വിലകളാണ് t പട്ടികയിൽ ഉൾക്കൊള്ളിച്ചിരിക്കുന്നത് (α).

α =0.05 ഉം ഡി.എഫ് = 5, ഉം ആയാൽ t യുടെ വില 2.015 ആണ്.

സാംഖ്യകമായി ഇതിനെ

$P(t_5 > 2.015) = 0.05$ (ഒരു വാൽ) എന്നും

$P(|t_5| > 2.015) = 2 \times 0.05$

$= 0.10$ (രണ്ട് വാൽ) എന്നും മനസിലാക്കാം

വിശദീകരണം 7.3

t യുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

(a) $P(t_{(10)} > t) = 0.10$ (b) $P(t_{(8)} > t) = 0.01$ (c) $P(t_{(2)} > t) = 0.05$

(d) $P(|t_5| > t) = 0.05$ (e) $P(|t_{10}| > t) = 0.02$

പരിഹാരം:

(a) t= 1.372 (b) t= 2.896 (c) t= 2.92 (d) t=2.57 (e) t=2.76

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സാഹചര്യങ്ങളിൽ t യുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

(a) $P(t_{(15)} > t) = 0.10$ (b) $P(t_{(7)} > t) = 0.05$ (c) $P(|t_6| > t) = 0.01$

സ്നെഡെകോർസ് F വിതരണം

χ_1^2 ഉം χ_2^2 ഉം യഥാക്രമം n_1 ഉം n_2 ഉം സ്വതന്ത്രതാമാനങ്ങളുള്ള രണ്ട് സ്വതന്ത്രങ്ങളായ കൈ-വർഗ അനിയത ചരങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഈ കൈ വർഗ വിതരണങ്ങളെ അവയുടെ സ്വതന്ത്രതാമാനങ്ങൾ കൊണ്ട് ഹരിച്ചവയുടെ അംശബന്ധം (n_1, n_2) സ്വതന്ത്രതാമാനങ്ങൾ ഉള്ള F ചരം ആയിരിക്കും.

അതായത് $F = \dfrac{\chi_1^2 / n_1}{\chi_2^2 / n_2}$. F ചരം പിൻതുടരുന്ന വിതരണത്തെ F വിതരണം എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

F വിതരണത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ

1. F എന്നത് (n_1, n_2) സ്വാതന്ത്ര്യതാമാനങ്ങൾ ഉള്ള F വിതരണമാണെങ്കിൽ $\frac{1}{F}$ എന്നത് (n_2, n_1) സ്വാതന്ത്ര്യതാമാനങ്ങൾ ഉള്ള F വിതരണം ആയിരിക്കും.

2. F വിതരണത്തിന് പോസിറ്റീവ് സ്കൂനസ് ആണ് ഉള്ളത്

3. $n_1 \to \infty$ ഉം $n_2 \to \infty$ ആയാൽ F വിതരണം $\to$ നോർമൽ വിതരണം

4. s_1^2 ഉം s_2^2 ഉം വ്യതിയാനങ്ങളായുള്ള രണ്ട് നോർമൽ സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും യഥാക്രമം n_1 ഉം n_2 ഉം വലിപ്പങ്ങളുള്ള രണ്ട് അനിയത സാമ്പിളുകകളുടെ വ്യതിയാനങ്ങൾ യഥാക്രമം σ_1^2 ഉം σ_2^2 , ആയാൽ

$$\frac{\left.\frac{n_1 s_1^2}{\sigma_1^2}\right/ n_1 - 1}{\left.\frac{n_2 s_2^2}{\sigma_2^2}\right/ n_2 - 1}$$

(n_1-1, n_2-1) സ്വാതന്ത്ര്യതാമാനങ്ങൾ ഉള്ള F വിതരണം ആയിരിക്കും.

F വിതരണം സ്നെഡക്കേർസ് F വിതരണം എന്ന് കൂടി അറിയപ്പെടുന്നു. സ്നെഡക്കർ ഒരു അമേരിക്കാൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനും സാംഖിക ശാസ്ത്രജ്ഞനുമായിരുന്നു. വ്യതിയാന വിശകലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനങ്ങൾ, ഡാറ്റാ വിശകലനം, പരീക്ഷണാത്മക രൂപകല്പന (experimental design) സാംഖ്യക നീതിശാസ്ത്രം എന്നിവയിൽ സംഭാവനകൾ അർപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട്.

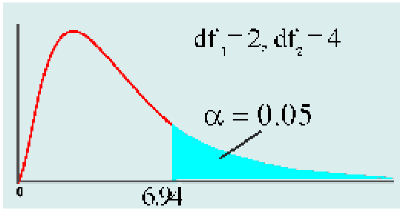
F വിതരണത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ

F- വിതരണം ഉപയോഗിച്ച് സാധാരണയായി പരിശോധിക്കുന്നത്

- അതിലധികമോ മാധ്യങ്ങളുടെ തുല്യത.
- രണ്ട് സാമ്പിൾ വ്യതിയാനങ്ങളുടെ തുല്യത.

F വിതരണത്തിന്റെ പട്ടിക

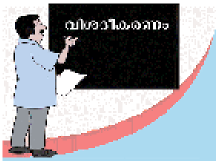
വിവിധ സ്വാതന്ത്ര്യതാ മാനങ്ങളുടെ ക്രമജോടിക്കും (n_1, n_2) വിവിധ സാർഥകതലങ്ങൾക്കും (0.01 ഉം 0.05) ഉള്ള F വിലകളാണ് F പട്ടികയിൽ ഉൾക്കൊള്ളിച്ചിരിക്കുന്നത്. ആദ്യത്തെ വരിയിൽ n_1ന്റെ വിലകളും ആദ്യത്തെ നിരയിൽ n_2 ന്റെ വിലകളും ഉൾക്കൊള്ളിച്ചിരിക്കുന്നു.



F- പട്ടിക ഒരു പ്രത്യേക സാർത്ഥക തലങ്ങളിൽ ഉള്ള F ന്റെ വിലകൾ ഉൾക്കൊള്ളിച്ചിരിക്കുന്നു.

α =0.05 ഉം n_1=2 ഉം n_2=4 ഉം ആയാൽ F=6.94.

അതായത് $P(F_{(2,4)} > 6.94) = 0.05$.



വിശദീകരണം 7.4

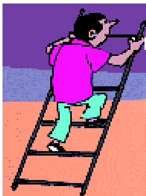
F ന്റെ വില കാണുക.

(a) $P(F_{(5,12)} > F) = 0.05$ (b) $P(F_{(8,15)} > F) = 0.05$

പരിഹാരം

(a) F= 3.11 (b) F= 2.64

ഈ പട്ടികകൾ സാംഖ്യക നിഗമനങ്ങൾ ഉള്ള പ്രശ്നങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് ഈ പട്ടികൾ വളരെയധികം പ്രയോജനകരമാണ്.



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

Fന്റെ വില കാണുക.

(a) $P(F_{(8,19)} > F) = 0.05$ (b) $P(F_{(8,15)} > F) = 0.01$

7.6 Z, χ^2, t, F സാംഖ്യജങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

Z ഉം χ^2 ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

$Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ എന്നിവ സ്വതന്ത്രങ്ങളായ മാനക നോർമൽ ചരങ്ങളാണെങ്കിൽ $Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2$ എന്നത് 'n' സ്വതന്ത്രമാനമുള്ള ഒരു χ^2 ആയിരിക്കും

n = 1, ആയാൽ Z^2 എന്നത് χ^2_1 ആയിരിക്കും.

χ^2 ഉം t ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

Z എന്നത് ഒരു മാനക നോർമലും Y എന്നത് $\chi^2_{(n)}$ ഉം ആയാൽ Z ന്റെയും $\sqrt{\frac{Y}{n}}$ ന്റെയും അംശബന്ധം 'n' സ്വതന്ത്രതാ മാനമുള്ള t സാംഖ്യജമായിരിക്കും. അത്കൊണ്ട് t യുടെ വർഗം രണ്ട് കൈ-വർഗങ്ങളുടെ അംശബന്ധമായിരിക്കും.

χ^2 ഉം F തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

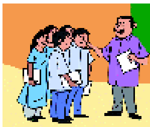
രണ്ട് കൈ വർഗങ്ങളെ അവയുടെ സ്വതന്ത്രതാ മാനങ്ങൾ ആയ n_1 ഉം n_2 ഉം ഉപയോഗിച്ച് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നവയുടെ അംശബന്ധം F (n_1, n_2) ആയിരിക്കും.

t യും F ഉം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം

t - വിതരണം, $t = \dfrac{z}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n}}}$ ഇവിടെ $z \sim N(0,1)$ ഉം $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ ഉം ആണ്.

ഇരുവശത്തും വർഗമെടുത്താൽ $t^2 = \dfrac{z^2}{\frac{\chi^2}{n}} = \dfrac{\frac{z^2}{1}}{\frac{\chi^2}{n}} = \dfrac{\frac{\chi^2}{1}}{\frac{\chi^2}{n}} = F(1,n)$

അതായത് t_n എന്ന സാംഖ്യജത്തിന്റെ വർഗം F (1, n) ആയിരിക്കും.



പ്രവർത്തനം

വിവിധ സ്വതന്ത്രതാ മാനങ്ങളിലും വിവിധ സാർത്ഥക തലത്തിലും ഉള്ള t, χ^2, F എന്നിവയുടെ വിലകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം പരാമിറ്റർ, സാംഖ്യജം എന്നിവയും അവയുടെ വിതരണവും പരിചയപ്പെട്ടു. പരാമീറ്ററും സാംഖ്യജവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾക്ക് ചില ഗണിത ശാസ്ത്ര പരമായ തെളിവുകളിലൂടെ ഈ അധ്യായം കടന്നു പോയി. ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണങ്ങളിൽ സാംഖ്യജത്തിന്റെ പ്രതീക്ഷിത വില പരാമീറ്ററാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കി. ഈ അധ്യായ ¯ nÂ ssI þh ÀKw¦ Ì þU â k vt, F വിതരണം തുടങ്ങി 3 പ്രധാനപ്പെട്ട സാംഖ്യജങ്ങളെ കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്തു. ഈ സാംഖ്യജങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ കുറിച്ചും ചർച്ച ചെയ്തു. ഈ സാംഖ്യജങ്ങളുടെ പട്ടികകളും അവയുടെ ഉപയോഗങ്ങളും പരിചയപ്പെട്ടു. ഇവ ചർച്ച ചെയ്യുവാനുള്ള കാരണം പരികല്പന പരിക്ഷണങ്ങളിൽ ഇവയ്ക്ക് വളരെയധികം പ്രാധാന്യമുള്ളതു കൊണ്ടാണ്.

നമുക്ക് വിലയിരുത്താം

1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളുടെ ശരിയുത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക.

1. ഒരു മാനക നോർമൽ ചരത്തിന്റെ വർഗം ______ ആയിരന്നു.

   a) നോർമൽ b) t-സാംഖ്യജം c) കൈ-വർഗ സാഖ്യജം d) F സാംഖ്യജം

2. രണ്ട് കൈ വർഗ സാംഖ്യജങ്ങളുടെ അംശബന്ധം ______ ആണ്.

   a) നോർമൽ b) t-സാംഖ്യജം c) കൈ-വർഗ സാഖ്യജം d) F സാംഖ്യജം

3. t സാംഖ്യജത്തിന്റെ വർഗം ______ ആണ്.

   a) നോർമൽ b) t-സാംഖ്യജം c) കൈ-വർഗ സാഖ്യജം d) F സാംഖ്യജം

4. $x \sim N(0,1)$ ഉം $y \sim \chi^2$ (n) ഉം ആയാൽ $\frac{x}{\sqrt{y/n}}$ ....

a) 1 ഡി.എഫ് ഉള്ള t വിതരണം
b) n ഡി.എഫ് ഉള്ള t വിതരണം
c) (n,1) ഡി.എഫ് ഉള്ള F വിതരണം
d) (1,n) ഡി.എഫ് ഉള്ള F വിതരണം

5. Y യുടെ വിതരണം n ഡി.എഫ് ഉള്ള t ആണെങ്കിൽ Y^2.

a) n ഡി.എഫ് ഉള്ള t വിതരണം
b) n ഡി.എഫ് ഉള്ള χ^2 വിതരണം
c) (n,1) ഡി.എഫ് ഉള്ള F വിതരണം
d) (1,n) ഡി.എഫ് ഉള്ള F വിതരണം

6. രണ്ട് സ്വതന്ത്രങ്ങളായുള്ള കൈ-വർഗ വിതരണങ്ങളുടെ അംശബന്ധം ______ ആകുന്നു.

7. സമഷ്ടി നോർമൽ അല്ലെങ്കിൽ പോലും ചരങ്ങളുടെ പരിവർത്തനത്തിന് ______ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

8. കേന്ദ്രീയ സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച് മാധ്യം μ ഉം വ്യതിയാനം σ^2 , ഉം ഉള്ള ഒരു വിതരണത്തിൽ, സാമ്പിൾ മാധ്യത്തിന്റെ സാമ്പിൾ വിതരണം. മാധ്യം ______ ഉം വ്യതിനായം ______ ഉം ഉള്ള നോർമൽ വിതരണത്തിലേക്ക് അടുക്കുന്നു.

9. വ്യതിയാനം 25 ആയ ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും വലിപ്പം 10 ആയ ഒരു സാമ്പിൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. സാമ്പിൾ മാധ്യത്തിന്റെ വ്യതിയാനം ______ ആകുന്നു.

10. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശരിയാണോ തെറ്റാണോ എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തുക.

a) ഒരു സാമ്പിൾ ഡാറ്റയിൽ നിന്നും കണ്ടുപിടിക്കുന്ന മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, വ്യതിയാന മാധ്യം, മോഡ്, മാനകവ്യതിയാനം എന്നിവയുടെ സംഖ്യാപരമായ വിലകളെ സാമ്പിൾ സാഖ്യജം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

b) ഒരു സാമ്പിൾ മാധ്യത്തിന്റെ പ്രതീക്ഷിത വില സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യം ആയിരിക്കും.

c) സമഷ്ടിയുടെ വിതരണം ഏതായാലും സാമ്പിൾ വലിപ്പം കൂടുന്നതിന് അനുസരിച്ച് മാധ്യത്തിന്റെ സാമ്പിൾ വിതരണം നോർമൽ വിതരണത്തിലേക്ക് സമീപിക്കുന്നു.

d) $\bar{x}$ എന്ന അനിയത ചരത്തിന്റെ വ്യതിയാനത്തെ മാധ്യത്തിന്റെ മാനക പിശക് എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

e) സാമ്പിൾ വലിപ്പം കുറവായാൽ കേന്ദ്രീയ സിദ്ധാന്തം പ്രയോഗിക്കാം.

f) മാധ്യത്തിന്റെ മാനകപിശക് സമഷ്ടിയുടെ മാനക വ്യതിയാനത്തിന് വിപരീതമായി വ്യത്യാസപ്പെടുന്നു.

11. സാംഖ്യജം, പരാമിറ്റർ എന്നീ ആശയങ്ങൾ ഉദാഹരണ സഹിതം വിശദീകരിക്കുക.

12. സാമ്പിൾ വിതരണം, മാനക പിശക് എന്നീ ആശയങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുക.

13. t സാംഖ്യജം, കൈ- വർഗ സാംഖ്യജം, F സാംഖ്യജം എന്നിവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എഴുതുക

14. ചേരും പടി ചേർക്കുക.

A		B	
1)	$\dfrac{\dfrac{\bar{x}-\mu}{s}}{n-1}$	a)	സ്നെഡെകോറിന്റെ F ചരം
2)	Z^2	b)	മാനക നോർമൽ
3)	t^2	c)	കൈ വർഗ ചരം
4)	$\left[\dfrac{\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$	d)	t - ചരം

15. 55, 52, 56, 63 എന്നീ 4 വിലകൾ അടങ്ങിയ ഒരു സമഷ്ടി പരിഗണിക്കുക.

a) ആവർത്തനമില്ലാതെ സാമ്പിൾ വലിപ്പം 2 ആയി തിരഞ്ഞെടുക്കുന്ന സാധ്യമായ എല്ലാ ക്രമരഹിത സാമ്പിളുകൾ എഴുതുക.

b) സമഷ്ടിയുടെ മാനക വ്യതിയാനം കണ്ടുപിടിക്കുക.

16. 2, 3, 6, 8, 11 എന്നീ വിലകളിൽ നിന്നും തിരികെ വയ്ക്കാത്ത രീതിയിലുള്ള ക്രമരഹിത പ്രതീരൂപണം (SRSWOR) ഉപയോഗിച്ച് വലിപ്പം 2 ആയ സാമ്പിളുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

a) എല്ലാ സാമ്പിളുകളും എഴുതുക.

b) സമ്പിൾ മാധ്യത്തിന്റെ മാനക പിശക് കണ്ടുപിടിക്കുക.

17. ഒരു സമഷ്ടിയിൽ 2, 4, 6, 8, 10 എന്നീ വിലകൾ ഉണ്ട്. SRSWOR ൽ സാമ്പിൾ വലിപ്പം 3 ആയ സാധ്യമായ എല്ലാ അനിയത സാമ്പിളുകളും പരിഗണിക്കുക.

a) സാധ്യമായ എല്ലാ സാമ്പിളുകളും എഴുതുക. b) $E(\bar{x})$ and $V(\bar{x})$ എന്നിവ കാണുക.

18. ഒരു സ്കൂളിലെ ബാഡ്മിന്റൻ കളിക്കാരുടെ പ്രായങ്ങൾ 18, 15, 16, 19 എന്നിവയാണ്.

a) കളിക്കാരുടെ പ്രായത്തിന്റെ ശരാശരി കാണുക.

b) SRSWOR രീതിയിൽ സാമ്പിൾ വലിപ്പം 2 ആയ ടീമുകൾ തിരഞ്ഞെടുത്താൽ, സാധ്യമായ സാമ്പിളുകളുടെ എണ്ണം എത്ര? സാമ്പിളുകൾ എഴുതുക.

c) സാംഖ്യജത്തിന്റെ മാനക പിശക് കണക്കാക്കുക.

19. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിലെ വിട്ടുപോയ വിലകൾ, പൂരിപ്പിക്കുക.

ക്രമസംഖ്യ	ചരത്തിന്റെ വില	α	d.f.
1	χ^2 = ———	0.80	18
2	χ^2 = 22.362	———	13
3	t = ———	0.025	16
4	t = 2.779	0.005	———
5	t = ———	0.025	160

G8V1U4

അധ്യായം 8

പരാമീറ്ററുകളുടെ മതിപ്പ് (Estimation of Parameters)

എല്ലാ മനുഷ്യരും അവരുടെ വ്യക്തി ജീവിതത്തിൽ പലവിധ മതിപ്പ് വിലകൾ കണ്ടുപിടിക്കാറുണ്ട്. ഒരു റോഡ് മുറിച്ചു കടക്കുന്നതിനിടെ നിങ്ങൾക്കടുത്തേക്ക് കുതിച്ച് വരുന്ന വാഹനങ്ങളുടെ ഏകദേശ വേഗം മതിക്കുന്നു, നിങ്ങളും വാഹനവും തമ്മിലുള്ള ഏകദേശഅകലം, നിങ്ങളുടെ നടത്തത്തിന്റെ വേഗത എന്നിവയും കണക്കാക്കുന്നു. ഈ വിലകളെല്ലാം അപഗ്രഥിച്ചതിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ നിങ്ങൾ പെട്ടന്ന് തന്നെ ഒരു തീരുമാനത്തിലെത്തുകയും റോഡ് മുറിച്ച് കടക്കുകയോ അവിടെതന്നെ കാത്തു നിൽക്കുകയോ ചെയ്യുന്നു. മറ്റൊരു ഉദാഹരണം പരിഗണിക്കാം. ഒരു കമ്പനിക്ക് തങ്ങൾ നിർമിക്കുന്ന ബൾബുകളുടെ ആയുർ ദൈർഘ്യം കണ്ടു പിടിക്കണമെന്നിരിക്കട്ടെ. കമ്പനി നിർമിക്കുന്ന എല്ലാ ബൾബുകളും ഉപയോ

സവിശേഷ പ്രധാന പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ പാഠഭാഗങ്ങൾ പൂർത്തിയാക്കുന്നതോടെ പഠിതാവ്,

- സാംഖ്യകാനുമാനത്തിന്റെ പ്രയോഗിക മേഖലകൾ തിരിച്ചറിയുന്നു.
- മതിപ്പ്, ഗണകം എന്നിവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം തിരിച്ചറിയുന്നു.
- കൃത്യമതിപ്പ്, ഇടനില മതിപ്പ് എന്നിവയെ കുറിച്ച് വിശദീകരിക്കുന്നു.
- ഒരു നല്ല ഗണകത്തിന്റെ ഗുണഗണങ്ങൾ വിവരിക്കുന്നു.
- ഗണകങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ പരിശോധിക്കുന്നു.
- മൊമെന്റുകൾ ഉപയോഗിച്ച് മതിപ്പ് വില കണ്ടെത്തുന്നു.
- സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ വിശ്വസ്ത ഇടനില കണ്ടുപിടിക്കുന്നു.

ഗിച്ച് നോക്കിയിട്ട് ആയുർദൈർഘ്യം കണ്ടു പിടിക്കുക എന്നത് അർത്ഥ ശൂന്യമാണല്ലോ. പകരം കമ്പനി ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കുന്ന കുറച്ച് ബൾബുകൾ ഉപയോഗിക്കുകയും ഈ സാമ്പിളിൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്ന ശരാശരി ആയുർ ദൈർഘ്യത്തെ ഉപയോഗിച്ച് സമഷ്ടിയിലെ മുഴുവൻ ബൾബുകളുടെയും ആയുർദൈർഘ്യത്തിന്റെ മതിപ്പ് വില കണ്ടെത്താൻ സാധിക്കും. നമ്മുടെ ഉദ്ദേശ്യം സമഷ്ടിയുടെ വിലകളെക്കുറിച്ചുള്ള നിഗമനങ്ങളിൽ എത്തിച്ചേരുക എന്നതാണെങ്കിലും പലപ്പോഴും സാമ്പിളുകൾ ശേഖരിച്ച് അവയിൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്ന വിലകളെ പരിഗണിച്ച്കൊണ്ടാണ് സമഷ്ടിയുടെ വിലകളെക്കുറിച്ചുള്ള നിഗമനങ്ങളിൽ എത്തിച്ചേരാറുള്ളത്.

സാംഖ്യകാനുമാനം (Statistical Inference)

സാമ്പിളുകളിൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്ന വിവരങ്ങളുടെയും വിലകളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമഷ്ടിയുടെ സവിശേഷതകളെക്കുറിച്ചുള്ള നിഗമങ്ങളിൽ എത്തിച്ചേരുന്ന സാംഖ്യക ശാസ്ത്രത്തിന്റെ ശാഖയാണ് സാംഖ്യകാനുമാനം. അഥവാ അനുമാന സിദ്ധ സാംഖ്യകം. ഇവിടെ സമഷ്ടിയുടെ സവിശേഷതകൾ എന്നത് കൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത് പരാമീറ്ററിന്റെ വില, സമഷ്ടിയുടെ വിതരണത്തിന്റെ നില തുടങ്ങിയവയാണ്. സാംഖ്യകാനുമാനം അടിസ്ഥാനപരമായി സാമ്പിളിന്റെ സവിശേഷതകളെ സമഷ്ടിയുടെ സവിശേഷതകളുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്തുന്നു. സാംഖ്യാനുമാനത്തെ പരാമീറ്ററുകളുടെ മതിപ്പ്, പരികൽപന പരീക്ഷണം (Testing of hypothesis) എന്നിങ്ങനെ രണ്ടായി തിരിക്കാം. സമഷ്ടിയുടെ പരിമിതികളുടെ വിലകൾ സാമ്പിൾ വിവരങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള ശാസ്ത്രീയ രീതിയാണ് പരാമീറ്ററുകളുടെ മതിപ്പ്. സാമ്പിളുകളിലെ വിലയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമഷ്ടിയുടെ പരാമീറ്ററുകളെ കുറിച്ചുള്ള മുൻധാരണകളെ അംഗീകരിക്കുകയോ നിരാകരിക്കുകയോ ചെയ്യുന്ന ശാസ്ത്രീയമായ പ്രക്രിയയാണ് പരികൽപന പരീക്ഷണം. ഈ അധ്യായത്തിൽ നമുക്ക് പരാമീറ്ററുകളുടെ മതിപ്പിനെ കുറിച്ചുള്ള അടിസ്ഥാനപരമായ ചില കാര്യങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാം. പരികൽപന പരിശോധനയെ കുറിച്ച് വിശദമായി അടുത്ത അധ്യായത്തിൽ പ്രതിപാധിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഗണകവും മതിപ്പും (Estimator and Estimate)

സാമ്പിളിന്റെ ഒരു ഏകദത്തിന്റെ സഹായത്തോടെയാണ് സാധാരണയായി പരാമീറ്ററുകളുടെ വില കണക്കാക്കുന്നത്. ഈ ഏകദത്തെ പരാമീറ്ററിനെ ഗണകം എന്ന് പറയുന്നു. ഗണകം ഒരു സാംഖ്യജം ആണ് എന്നത് കൊണ്ട്തന്നെ ഒരു അനിയത ചരവും ആയിരിക്കും. സാമ്പിളുകൾ മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ഗണകത്തിന്റെ വിലയും മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതായി കാണാൻ സാധിക്കും. ഒരു പ്രത്യേക സാമ്പിളിൽ നിന്നും ഗണകത്തിന് ലഭിക്കുന്ന വിലയെ മതിപ്പ് എന്ന് പറയുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന്, കേരളത്തിലെ ഹയർ സെക്കന്ററി വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഉയരത്തിന്റെ മതിപ്പ് വില കാണണം എന്നിരിക്കട്ടെ, 5000 കുട്ടികളുടെ ഒരു സാമ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുത്ത് അവരുടെ ശരാശരി ഉയരം കാണാൻ സാധിക്കുമല്ലോ. അത് 54 കിഗ്രാം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. അങ്ങിനെയെങ്കിൽ ഇവിടെ സാമ്പിൾ മാധ്യം ($\bar{x}$) എന്നത് സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ (μ) ഗണകവും സാമ്പിളിൽ നിന്ന് ലഭിച്ച മാധ്യത്തിന്റെ വിലയായ 54 കിഗ്രാം എന്നത് സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ (μ) മതിപ്പും ആണ് എന്ന് പറയാം.

പരാമീറ്ററുകളുടെ മതിപ്പ് രണ്ടു തരത്തിൽ ഉണ്ട്.

- കൃത്യ മതിപ്പ് (Point estimation)
- ഇട മതിപ്പ് (Interval estimation)

സമഷ്ടിയിൽ നിന്ന് ഒരു സാമ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുത്ത് പരാമീറ്ററിന് അനുസൃതമായ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ നിർദേശിക്കുന്ന രീതിയാണ് കൃത്യമതിപ്പ്. ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ നിർദേശിക്കുന്നതിന് പകരം പരിമിതിയുടെ വില പ്രതീക്ഷിക്കാൻ സാധിക്കുന്ന ഒരു ഇടവേള നിർദേശിക്കുന്ന രീതിയാണ് ഇട മതിപ്പ്.

8.1 കൃത്യ മതിപ്പ് (Point Estimation)

ഒരേ പരാമീറ്ററിന് തന്നെ വിവിധ ഗണകങ്ങൾ നിർദേശിക്കാൻ സാധിക്കും. അതായത് സാമ്പിളിന്റെ വ്യത്യസ്ഥങ്ങളായ ഏകദങ്ങൾ ഒരേ പരാമീറ്ററിന്റെ തന്നെ ഗണകങ്ങളായി ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണത്തിന് സാമ്പിൾ മാധ്യം, സാമ്പിൾ മധ്യാങ്കം, സാമ്പിൾ മോഡ് തുടങ്ങി വിവിധ ഏകദങ്ങളെ നമുക്ക് സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ ഗണകങ്ങളായി ഉപയോഗിക്കാം. ഒരു സാംഖ്യക വിദഗ്ദൻ ഇവയുടെ കൂട്ടത്തിൽ നിന്ന് ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ ഒന്നിനെ തെരഞ്ഞെടുക്കാൻ സാധിക്കും. മികച്ച ഗണകത്തെ കണ്ടെത്തുന്നതിന് ചില മാനദണ്ഡങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാൻ സാധിക്കും. അവ ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

- നിഷ്പക്ഷത (Unbiasedness)
- സ്ഥിരത (Consistency)
- ക്ഷമത (Efficiency)
- പര്യാപ്തത (Sufficiency)

നിഷ്പക്ഷ ഗണകം (Unbiased estimator)

എല്ലാ ഗണകങ്ങളും സാംഖ്യജങ്ങളാണ്, എല്ലാ സാംഖ്യജങ്ങളും അനിയത ചരങ്ങളും ആണ്. അതിനാൽ തന്നെ വിവിധ സാമ്പിളുകളിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്ന ഒരേ ഗണകത്തിന്റെ വിലകൾ തന്നെ വ്യത്യസ്തങ്ങളായിരിക്കും. ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്ന് ശേഖരിക്കാൻ സാധിക്കുന്ന എല്ലാ സാമ്പിളുകളിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്ന സാംഖ്യജത്തിന്റെ വിലകളുടെ മാധ്യവും പരാമീറ്ററിന്റെ യഥാർത്ഥ വിലയും ഒന്നു തന്നെയാണെങ്കിൽ അത്തരം സാംഖ്യജങ്ങളെ നിഷ്പക്ഷ സാംഖ്യജം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതായത്, ഒരു സാംഖ്യജത്തിന്റെ പ്രതീക്ഷിത (ഗണിത പ്രതീക്ഷ) വിലയും പരാമീറ്ററിന്റെ യഥാർത്ഥ വിലയും ഒന്നു തന്നെയാണെങ്കിൽ അത്തരം സാംഖ്യജങ്ങളെ നിഷ്പക്ഷ ഗണകം എന്നു പറയുന്നു. ഒരു പരാമീറ്ററിന് തന്നെ ഒന്നിലധികം നിഷ്പക്ഷ ഗണകങ്ങൾ ഉണ്ടാകാം.

> 't' എന്ന ഒരു ഗണകത്തെ 'θ', എന്ന പരാമീറ്ററിന്റെ നിഷ്പക്ഷഗണകമാണ് എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ $E(t)=\theta$ ആയിരിക്കണം.

സാമ്പിൾ മാധ്യം ($\bar{x}$) എന്നത് മാധ്യം μ ഉം മാനക വ്യതിയാനം σ യും ആയിട്ടുള്ള ഒരു സാംഖ്യജമായിരിക്കും എന്ന് കഴിഞ്ഞ അധ്യായത്തിൽ നാം മനസ്സിലാക്കിയല്ലോ! അതിനർത്ഥം സാമ്പിളുകളുടെ മാധ്യത്തിന്റെ മാധ്യം സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന് സമമായിരിക്കും. എന്നാണല്ലോ? അതിൽ നിന്നും സാമ്പിൾ മാധ്യങ്ങളുടെ പ്രതീക്ഷിത വില സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ വില തന്നെയായിരിക്കും എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. അതായത് $E(\bar{x}) = \mu$. അതിനാൽ സാമ്പിൾ മാധ്യം, $\bar{x}$ സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ (μ) ഒരു നിഷ്പക്ഷ ഗണകം ആയിരിക്കും.

വിശദീകരണം 8.1

X_1, X_2, X_3, X_4 എന്നിവ മാധ്യം μ ആയിട്ടുള്ള ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും എടുത്തിട്ടുള്ള ഒരു സാമ്പിളാണ്. $T = X_1 + X_2 + X_3 - 2X_4$ എന്നത് μ ന്റെ നിഷ്പക്ഷ ഗണകമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = E(X_4) = \mu \quad \text{(തന്നിരിക്കുന്നു)}$$

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + X_3 - 2X_4)$$

$$= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) - 2E(X_4)$$

$$= \mu + \mu + \mu - 2\mu = \mu$$

$$i.e.\ E(T) = \mu$$

അതായത് $E(T) = \mu$, അതിനാൽ T എന്നത് μ ന്റെ ഒരു നിഷ്പക്ഷ ഗണകം ആണ്.

വിശദീകരണം 8.2

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമഷ്ടിയിൽ നിന്ന് തിരികെ വെക്കാത്ത രീതിയിൽ ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണത്തിലൂടെ സാമ്പിൾ വലിപ്പം രണ്ടായിട്ടുള്ള മുഴുവൻ സാമ്പിളുകളും തെരഞ്ഞെടുക്കുക 4, 5, 6, 7, 8.

സാമ്പിൾ മാധ്യം സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ നിഷ്പക്ഷ ഗണകമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

സാധ്യമായ സാമ്പിളുകളുടെ (SRSWR) $=5C_2=10$

സാമ്പിൾ നമ്പർ	സാമ്പിൾ	സാമ്പിൾ മാധ്യം ($\bar{x}$)
1	(4,5)	4.5
2	(4,6)	5
3	(4,7)	5.5
4	(4,8)	6
5	(5,6)	5.5
6	(5,7)	6
7	(5,8)	6.5
8	(6,7)	6.5
9	(6,8)	7
10	(7,8)	7.5
	ആകെ	60

$$E(\overline{X}) = \frac{60}{10} = 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യം $\mu = \frac{4+5-6+7-8}{10} \quad 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$

(1) ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും $E(X) = \mu$ എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

അതിനാൽ $\overline{X}$, μന്റെ ഒരു നിഷ്പക്ഷ ഗണകമാണ്.

വിശദീകരണം 8.3

4, 6, 8 എന്നീ വിലകളുള്ള സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും സാമ്പിൾ വലിപ്പം രണ്ടായിട്ടുള്ള മുഴുവൻ സാമ്പിളുകളും തിരികെ വെക്കുന്ന തരത്തിലുള്ള ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണ രീതിയിൽ തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

(a) എല്ലാ സാമ്പിളുകളും എഴുതുക.

(b) സാമ്പിൾ മാധ്യം സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ നിഷ്പക്ഷ ഗണകമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

SRSWR പ്രകാരം സാധ്യമായ സാമ്പിളുകളുടെ എണ്ണം = $3^2 = 9$.

സാമ്പിൾ നമ്പർ	സാമ്പിൾ	സാമ്പിൾ മാധ്യം ($\overline{x}$)
1	(4,4)	4
2	(4,6)	5
3	(4,8)	6
4	(6,4)	5
5	(6,6)	6
6	(6,8)	7
7	(8,4)	6
8	(8,6)	7
9	(8,8)	8
	ആകെ	**54**

$$E(\bar{X}) = \frac{54}{9} \quad 6 \qquad \text{-- -- -- -- -- -- -- --} \ (1)$$

സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യം $\mu = \frac{4 \quad 6 \quad 8}{3} = 6$ -- -- -- -- -- -- -- -- (2)

(1) ൽ നിന്നും (2) ൽ നിന്നും $E(\bar{X}) = \mu$ എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

അതിനാൽ സാമ്പിൾ മാധ്യം ($\bar{X}$) സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ (μ)നിഷ്പക്ഷ ഗണകമാണ്.

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

1) X_1, X_2, X_3 എന്നിവ മാധ്യം μ ഉം മാനകവ്യതിയാനം σ യും ആയിട്ടുള്ള ഒരു നോർമൽ വിതരണത്തിൽ നിന്നും എടുത്തിട്ടുള്ള വിലകളാണ്. μ ന്റെ ഗണകങ്ങളായിട്ടുള്ള

$$T_1 = 4X_1 + 3X_2 - 5X_3 \quad T_2 = \frac{X_1 + X_3}{2}, \quad T_3 = X_1 + X_2 - X_3$$

എന്നിവയുടെ നിഷ്പക്ഷത പരിശോധിക്കുക.

2) ഒരു സമഷ്ടിയിലെ വിലകളാണ് 2, 4, 6, 10 എന്നിവ. വലിപ്പം രണ്ടായിട്ടുള്ള മുഴുവൻ സാമ്പിളുകളും SRSWOR രീതിയിലും SRSWR. രീതിയിലും തെരഞ്ഞെടുക്കുക. സാമ്പിൾ മാധ്യം സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ നിഷ്പക്ഷ ഗണകമാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

സ്ഥിരനില ഗണകം (Consistent estimater)

സാമ്പിളിന്റെ വലിപ്പം കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് കൃത്യത വർദ്ധിക്കുക എന്നത് ഒരു നല്ല ഗണകത്തിന്റെ ലക്ഷണമായി കരുതുന്നു. അതായത് സാമ്പിളിന്റെ വലിപ്പം വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ ഗണകത്തിന്റെ വില പരാമീറ്ററിന്റെ യഥാർത്ഥ വിലയുടെ അടുത്തേക്ക് വരികയും വ്യതിയാനത്തിന്റെ വില പൂജ്യത്തോടടുക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

't' എന്ന ഒരു ഗണകം 'θ' എന്ന പരാമീറ്ററിന്റെ സ്ഥിരനില ഗണകമാണ് എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ $E(t) \to \theta$ യും $V(t) \to 0$ യും ആകണം

ക്ഷമതാ ഗണകം (Efficient estimater)

ഒരു ഗണകത്തിന്റെ ക്ഷമത അതിന്റെ വ്യതിയാനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഒരു പരാമീറ്ററിന് അനേകം നിഷ്പക്ഷ ഗണകങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ അവയിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വ്യതിയാനമുള്ളതിനെ ക്ഷമതാ ഗണകം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

t_1, t_2 എന്നിവ 'θ' എന്ന പരിമിതിയുടെ നിഷ്പക്ഷ ഗണകങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ, $V(t_1) < V(t_2)$ ആണെങ്കിൽ t_1 ന് t_2 വിനേക്കാൾ ക്ഷമതയുണ്ട് എന്ന് പറയുന്നു.

വിശദീകരണം 8.4

മാധ്യം μ ഉം മാനക വ്യതിയാനം σ യും ആയിട്ടുള്ള ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും എടുത്തിട്ടുള്ള ക്രമരഹിത സാമ്പിളാണ് X_1, X_2, X_3, X_4

$T_1 = X_1 + 2X_2 + 2X_3 - 4X_4$, $T_2 = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$ എന്നിവ μ ന്റെ നിഷ്പക്ഷ ഗണകങ്ങളാണ്. T_1, T_2 എന്നിവയിൽ ക്ഷമതാഗണകം ഏത്.

പരിഹാരം

T_1, T_2 എന്നിവ μ ന്റെ നിഷ്പക്ഷഗണകങ്ങളാണ് എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു.

$$T_1 = X_1 + 2X_2 + 2X_3 - 4X_4$$

$$V(T_1) = V(X_1 + 2X_2 + 2X_3 - 4X_4)$$

$$= V(X_1) + V(2X_2) + V(2X_3) + V(4X_4) \quad [\text{ഇവിടെ } V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)]$$

$$= V(X_1) + 4V(X_2) + 4V(X_3) + 16V(X_4) \quad [\text{ഇവിടെ } V(aX) = a^2V(X)]$$

$$= \sigma^2 + 4\sigma^2 + 4\sigma^2 + 16\sigma^2 = 25\sigma^2$$

$$T_2 = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$$

$$V(T_2) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4)$$

$$= \sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2$$

$$= 4\sigma^2$$

$V(T_2) < V(T_1)$. T_2 വിന് T_1 നേക്കാൾ ക്ഷമതയുണ്ട്.

വിശദീകരണം 8.5

മാധ്യം μ ഉം മാനകവ്യതിയാനം σ യും ആയിട്ടുള്ള ഒരു നോർമൽ വിതരണത്തിൽ നിന്നും എടുത്തിട്ടുള്ള സാമ്പിൾ വിലകളാണ് X_1, X_2, X_3 എന്നിവ.

$T_1 = \dfrac{X_1 + 2X_2 + X_3}{4}$, $T_2 = \dfrac{X_1 - X_2 + X_3}{2}$, $T_3 = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ എന്നിവ μ. ന്റെ ഗണകങ്ങളാണ്. ഇവയിൽ ക്ഷമതാഗണകം ഏത്?

പരിഹാരം

$T_1 = \dfrac{X_1 + 2X_2 + X_3}{4}$, $T_2 = \dfrac{X_1 - X_2 + X_3}{2}$, $T_3 = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ എന്നിങ്ങനെ തന്നിരിക്കുന്നു.

$$E(T_1) = E\left(\frac{X_1 + 2X_2 + X_3}{4}\right)$$

$$= \frac{E(X_1) + 2E(X_2) + E(X_3)}{4}$$

$$= \frac{\mu + 2\mu + \mu}{4}$$

$$= \frac{4\mu}{4}$$

$$= \mu$$

അതായത് $E(T_1) = \mu$, അതിനാൽ μ ന്റെ നിഷ്പക്ഷ ഗണകമാണ് T_1

$$E(T_2) = E\left(\frac{X_1 - X_2 + X_3}{2}\right)$$

$$= \frac{E(X_1) - E(X_2) + E(X_3)}{2}$$

$$= \frac{\mu - \mu + \mu}{2}$$

$$= \frac{\mu}{2}$$

അതായത് $E(T_2) \neq \mu$, $\therefore$ μ ന്റെ നിഷ്പക്ഷഗണകം അല്ല T_2

$$E(T_3) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}\right)$$

$$= \frac{E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)}{3}$$

$$= \frac{\mu+\mu+\mu}{3}$$

$$= \frac{3\mu}{3}$$

$$= \mu$$

അതായത് $E(T_3) = \mu$, $\therefore$ μ ന്റെ നിഷ്പക്ഷ ഗണകമാണ് T_3.

$$V(T_1) = V\left(\frac{X_1+2X_2+X_3}{4}\right)$$

$$= \frac{V(X_1)+4V(X_2)+V(X_3)}{16}$$

$$= \frac{\sigma^2+4\sigma^2+\sigma^2}{16}$$

$$= \frac{6\sigma^2}{16}$$

$$= \frac{3\sigma^2}{8} = 0.375\sigma^2$$

$$V(T_3) = V\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)$$

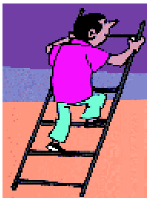
$$= \frac{V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)}{9}$$

$$= \frac{\sigma^2+\sigma^2+\sigma^2}{9}$$

$$= \frac{3\sigma^2}{9}$$

$$= \frac{\sigma^2}{3} = 0.333\sigma^2$$

$V(T_3) < V(T_1)$, അതിനാൽ T_3 യാണ് കൂട്ടത്തിൽ ക്ഷമതാഗണകം.



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

മാധ്യം μ ഉം മാനക വ്യതിയാനം σ യും ആയിട്ടുള്ള ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും എടുത്തിട്ടുള്ള സാമ്പിൾ വിലകളാണ് . X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 എന്നിവ.

$$T_1 = X_1 + 2X_3 - X_4 - X_5;\; T_2 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4},$$

$$T_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}$$

എന്നിവ μ , ന്റെ നിഷ്പക്ഷഗണകങ്ങളാണ്. ഇവയിൽ ക്ഷമതാഗണകം ഏത്?

പര്യാപ്ത ഗണകം (Sufficient estimator)

പരാമീറ്ററുകൾക്ക് പകരം വെക്കാനുള്ള വിലകളാണ് ഗണകങ്ങളുപയോഗിച്ച് സാമ്പിളുകളിൽ നിന്ന് കണ്ടെത്തുന്നവ. ഒരു നല്ല ഗണകത്തിന് പരാമീറ്ററിനെ കുറിച്ച് സാമ്പിളിൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന പരമാവധി വിവരങ്ങൾ നൽകാൻ സാധിക്കണം. ഒരു ഗണകത്തിന് പരാമീറ്ററിനെ കുറിച്ച് സാമ്പിളിൽ നിന്ന് ലഭ്യമാകാവുന്ന മുഴുവൻ വിവരങ്ങളും നൽകാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ അവയെ നമുക്ക് പരാമീറ്ററിന്റെ പകര വിലയായി ഉപയോഗിക്കാൻ സാധിക്കും. അത്തരം ഗണകങ്ങളെ പര്യാപ്ത ഗണകം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

പരാമീറ്ററിനെ കുറിച്ച് സാമ്പിളിൽ ലഭ്യമായിട്ടുള്ള മുഴുവൻ വിവരങ്ങളും നൽകാൻ സാധിക്കുന്ന ഗണകങ്ങളെ പര്യാപ്ത ഗണകം എന്ന് പറയുന്നു.

കുറിപ്പ്:-

സാമ്പിൾ മാധ്യം സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ നിഷ്പക്ഷവും, സംഗതവും, പര്യാപ്തവുമായ ഗണകമാണ്.

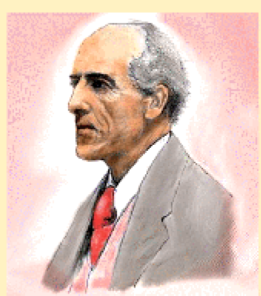
8.2 പരിവൃത്തി ശ്രേണീ രീതി (Method of Moments)

പരിവൃത്തി ശ്രേണി (Moments) എന്ന ആശയത്തെ കുറിച്ച് നമ്മൾ പതിനൊന്നാം ക്ലാസ്സിൽ മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ടല്ലോ? രണ്ട് തരം പരിവൃത്തി ശ്രേണികളാണുള്ളത്. സ്വേച്ഛാ പരിവൃത്തി ശ്രേണിയും (raw moments) കേന്ദ്രീയ പരിവൃത്തി ശ്രേണിയും (central moments).

ഒരു സാമ്പിളിന്റെ r ാമത്തെ സ്വേച്ഛ പരിവൃത്തി ശ്രേണി.

$$m'_r = \frac{\sum x^r}{n} \text{ ആണ്.}$$

സമഷ്ടിയുടെ സ്വേച്ഛ പരിവൃത്തി ശ്രേണികളെ സാധാരണയായി μ'_r എന്നും സാമ്പിളിന്റെ



പരിവൃത്തി ശ്രേണി രീതി കണ്ടെത്തുകയും വിശദമായി പഠിക്കുകയും ചെയ്തത് **കാൾ പിയേർസൺ** ആണ്.

സ്വേച്ഛപരിവൃത്തി ശ്രേണികളെ m'_r എന്നും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

സമഷ്ടിയുടെയും സാമ്പിളിന്റെയും സ്വേച്ഛ പരിവൃത്തി ശ്രേണികളെ സമീകരിക്കുമ്പോൾ

$\mu'_r = m'_r$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഇവിടെ $\mu'_r = E(X^r)$

ഒന്നാം പരിവൃത്തി ശ്രേണി പരിഗണിക്കുമ്പോൾ $\mu'_1 = m'_1$,

അതായത് $E(X) = \bar{x}$ ($m'_1 = \bar{x}$ ആയതിനാൽ)

അല്ലെങ്കിൽ $\mu = \bar{x}$

ഇതിൽ നിന്നും സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ (μ) പരിവൃത്തി ശ്രേണി ഗണകമാണ് സാമ്പിൾ മാധ്യം ($\bar{x}$) എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ഇതിനെ ചുവടെ കൊടുത്ത പ്രകാരം സൂചിപ്പിക്കാം.

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

വിശദീകരണം 8.6

ഒരു സാമ്പിളിന്റെ വിലകൾ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

സാമ്പിൾ: 18, 14, 14, 17, 15, 13, 16, 15, 16, 19, 15, 17, 19, 15, 17

സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ പരിവൃത്തി ശ്രേണി ഗണകം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

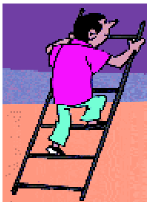
$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

$$= \frac{\sum x}{n}$$

$$= \frac{1}{15}(18 + 14 + \ldots + 17)$$

$$= \frac{240}{15}$$

$$\hat{\mu} = 16$$



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

മാധ്യത്തികുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് വേണ്ടി ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും ഒരു സാമ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുത്തു.

സാമ്പിൾ: 45, 40, 42, 46, 48, 43, 58, 52, 43, 44

മാധ്യത്തിന്റെ പരിവൃത്തി ശ്രേണി ഗണകം കണ്ടുപിടിക്കുക.

8.3 ഇട മതിപ്പ് (Interval estimation)

കൃത്യമതിപ്പ് ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് പരാമീറ്ററിന്റെ ഒരു ഏകവില നിർണയിക്കാൻ സാധിക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ ലഭിച്ച മതിപ്പ് വില പരാമീറ്ററിന്റെ യഥാർത്ഥ വിലയ്ക്ക് തുല്യമാകുമെന്ന് നമുക്ക് പ്രതീക്ഷിക്കാൻ സാധിക്കുകയില്ല. എന്നാൽ ഏകദേശം തുല്യമായിരിക്കും എന്ന് പറയാൻ സാധിക്കും. പരാമീറ്ററിന്റെ യഥാർത്ഥ വില ഈ മതിപ്പു വിലയുടെ സമീപത്തായിരിക്കും എന്ന് പ്രതീക്ഷിക്കാൻ സാധിക്കും. ചില ഘട്ടങ്ങളിൽ യഥാർത്ഥ വില മതിപ്പുവിലയുടെ വളരെ അടുത്തായിരിക്കും. ചിലപ്പോൾ വളരെ അകലത്തിലും ആയതിനാൽ പരാമീറ്ററിന്റെ വില ഉൾക്കൊള്ളാൻ സാധ്യതയുള്ള ഒരു ഇടവേള നിർദേശിക്കാൻ സാധിച്ചാൽ വളരെ ഗുണകരമായിരിക്കും. ഒരു വലിയ ഇടവേള നിർദേശിക്കുകയാണെങ്കിൽ അത് പരാമീറ്ററിന്റെ വില ഉൾക്കൊള്ളാനുള്ള സാധ്യതയും വളരെ വലുതായിരിക്കും. ഇടവേളയുടെ വലിപ്പം കുറയുന്നതിനനുസരിച്ച് അതിന് പരാമീറ്ററിനെ ഉൾക്കൊള്ളാനുള്ള സാധ്യതയും കുറഞ്ഞ് വരുന്നു. അത്തരത്തിലുള്ള ഇടവേളകളെ വിശ്വസ്ത ഇടനില (confidence Interval) അല്ലെങ്കിൽ $(1-\alpha)\times 100\%$ വിശ്വസ്ത ഇടനില എന്ന് പറയുന്നു. ഇവിടെ $(1-\alpha)$ എന്നതിനെ വിശ്വസ്തത ഗുണാങ്കം (confidence coefficient) എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇത് പരാമീറ്ററിന്റെ യഥാർത്ഥ വില നിർദേശിക്കപ്പെട്ട ഇടനിലയിൽ ഉൾപ്പെടുവാനുള്ള സംഭാവ്യത തന്നെയായിരിക്കും.

8.4 മാധ്യത്തിന്റെ വിശ്വസ്ത ഇടനില (Confidence Interval for Mean)

മാനക വ്യതിചലനം σ ആയിട്ടുള്ള ഒരു നോർമൽ സമഷ്ടിയിൽ നിന്ന് n വിലകളുള്ള ഒരു സാമ്പിൾ എടുത്തു എന്നിരിക്കട്ടെ $\bar{x}$ എന്നത് സാമ്പിളിന്റെ മാധ്യവും s എന്നത് സാമ്പിളിന്റെ മാനക വ്യതിയാനവും ആണെന്ന് കരുതുക. എന്നാൽ മാധ്യത്തിന്റെ $(1-\alpha)\times 100\%$ വിശ്വസ്ത ഇടനില ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

$$\left(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2},\ \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)$$

α യുടെ വിവിധ വിലകൾക്കനുസരിച്ച് $Z_{\alpha/2}$ ന്റെ വില നോർമൽ പട്ടികയിൽ നിന്നും കണ്ടുപിടിക്കാം. $P(-Z_{\alpha/2}<Z<Z_{\alpha/2})=1-\alpha$ ആയിരിക്കും. σ അറിയില്ലെങ്കിൽ 'n' ന്റെ വില വലുതാവുന്ന ഘട്ടങ്ങളിൽ ചുവടെ നൽകിയ പ്രകാരം വിശ്വസ്ത ഇടനില കണ്ടു പിടിക്കാം.

$$\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2},\ \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right)$$

കുറിപ്പ്: 95% വിശ്വസ്ത ഇടനിലയിൽ $Z_{\alpha/2}=1.96$ ഉം 99% വിശ്വസ്ത ഇടനിലകളിൽ $Z_{\alpha/2}=2.58$ ഉം ആയിരിക്കും.

വിശദീകരണം 8.7

ഒരു ദിവസം രാവിലെ മുറ്റത്തെ പുൽത്തകിടിയിൽ 16 പുഴുക്കളെ കാണാനിടയായി. അവയുടെ നീളം ശരാശരി 10.39 cm ആണ്. ഇവയുടെ സമഷ്ടിയുടെ മാനക വ്യതിയാനം 4 cm ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. പുഴുക്കളുടെ നീളത്തിന്റെ മാധ്യത്തിന്റെ 99% വിശ്വസ്ത ഇടനില കാണുക.

പരിഹാരം

$\bar{x}=10.39$, $\sigma=\sqrt{4}=2$ കൂടാതെ n = 16 എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു. സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ 99% വിശ്വസ്ത ഇടനില

$$\left(\bar{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\left(10.39-2.58\times\frac{2}{\sqrt{16}},\ 10.39+2.58\times\frac{2}{\sqrt{16}}\right)$$

$$=(9.1,\ 11.68)$$

പുൽത്തകിടിയിലെ പുഴുക്കളുടെ നീളത്തിന്റെ മാധ്യത്തിന്റെ 99% വിശ്വസ്ത ഇടനില (9.1, 11.68) ആകുന്നു.

വിശദീകരണം 8.8

ഒരു ജില്ലയിലെ 100 പുരുഷൻമാരുടെ സാമ്പിൾ പരിശോധിച്ചതിൽ നിന്നും അവരുടെ ഉയരത്തിന്റെ ശരാശരി 178.2 cm ആണെന്ന് മനസ്സിലായി. അവരുടെ ഉയരത്തിന്റെ മാനക വ്യതിയാനം 4.8 cm ആണെന്നും കണ്ടു. ഇവരുടെ സമഷ്ടി നോർമൽ വിതരണത്തിലാണ് എന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ച് ഉയരത്തിന്റെ മാധ്യത്തിന്റെ 95% വിശ്വസ്ത ഇടനില കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$\bar{x} = 178.2$, $s = 4.8$ and $n = 100$ എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു.

മാധ്യത്തിന്റെ 95% വിശ്വസ്ത ഇടനില,

$$\left(\bar{x} - 1.96 \times \frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + 1.96 \times \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(178.2 - 1.96 \times \frac{4.8}{\sqrt{100}},\ 178.2 + 1.96 \times \frac{4.8}{\sqrt{100}}\right)$$

$$= (177.26,\ 179.14)$$

മാധ്യത്തിന്റെ 95% വിശ്വാസ്ത ഇടനില (177.26, 179.14) എന്നതാകുന്നു.

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. മാനക വ്യതിയാനം 12 ആയിട്ടുള്ള ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്ന് 100 വിലകളുള്ള ഒരു സാമ്പിൾ എടുക്കുന്നു. സാമ്പിൾ മാധ്യം 76 ലഭിച്ചു. സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ 95% വിശ്വസ്ത ഇടനില കണ്ടുപടിക്കുക.

2. 80 പേരുടെ രാവിലെ ഉണർന്നയുടനെയുള്ള ഹൃദയമിടിപ്പ് പരിശോധിച്ചു അവയുടെ മാധ്യം 69 എന്നും മാനകവ്യതിയാനം 4 എന്നും ലഭിച്ചു. സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ 99% വിശ്വസ്ത ഇടനില കണ്ടുപിടിക്കുക.

നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

സാമ്പിളുകളിൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്ന വിവരങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമഷ്ടിയുടെ വിലകൾ നിർണയിക്കുന്നതിനുള്ള സാംഖ്യക ശാസ്ത്രത്തിലെ ഒരു ശാഖയാണ് സാംഖ്യക അനുമാനം പരാമീറ്ററിന്റെ വില നിശ്ചയിക്കുന്നതിനോ വിതരണത്തിന്റെ സ്വഭാവം അറിയുന്നതിനോ വേണ്ടി സാംഖ്യക അനുമാനം ഉപയോഗിക്കാം. സാംഖ്യക അനുമാനത്തിന്റെ രണ്ട് വിഭാഗങ്ങളാണ് പ്രാചലങ്ങളുടെ മതിപ്പ്, പരികൽപനാ പരീക്ഷണം എന്നിവ. സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും എടുത്തിട്ടുള്ള സാമ്പിളുകളുടെ വിലകളിൽ നിന്നും സമഷ്ടിയുടെ പരാമീറ്ററുകളുടെ വിലകൾ നിശ്ചയിക്കുന്ന ശാഖയാണ് പരാമീറ്ററുകളുടെ മതിപ്പ്. രണ്ടുതരത്തിൽ മതിപ്പ് വിലകാണാം - കൃത്യ മതിപ്പ്, ഇടമതിപ്പ്. കൃത്യമതിപ്പിൽ പരാമീറ്ററിന്റെ വിലയ്ക്ക് പകരമായി ഒരു സാംഖ്യജത്തെ നിർദേശിക്കുന്നു. ഈ സാംഖ്യജത്തെ കൃത്യമതിപ്പ് വില എന്ന് പറയുന്നു. ഒരു പരാമീറ്ററിന് തന്നെ നിരവധി സാംഖ്യജങ്ങളെ മതിപ്പു വില കാണാനായി നിർദേശിക്കാൻ സാധിക്കും. അതിനാൽ ഇവയിൽ നിന്നും ഏറ്റവും മികച്ച മതിപ്പുവില നിർണയിക്കുന്നതിന് മാനദണ്ഡ

ങ്ങൾ നിശ്ചയിക്കേണ്ടതുണ്ട്. നിക്ഷ്പക്ഷത, സ്ഥിരത, ക്ഷമത, പര്യാപ്തത എന്നിവയാണ് ഒരു നല്ല മതിപ്പിന് പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഗുണങ്ങൾ. മതിപ്പ് വില നിർണയിക്കുന്നതിന് വിവിധ രീതികൾ അവലംബിക്കാവുന്നതാണ്. ഇവയിൽ ഒന്നാണ് പരിവൃത്തി ശ്രേണി രീതി. ഇട നില മതിപ്പ് രീതിയിൽ നമ്മൾ പരാമീറ്ററിന്റെ വില ഉൾക്കൊള്ളാൻ സാധ്യതയുള്ള ഒരു ഇട വേള നിർദേശിക്കുന്നു. ഈ ഇടവേളയിൽ പരാമീറ്ററിന്റെ വില ഉൾപ്പെടാനുള്ള സംഭാവ്യതയും ഒപ്പം നിർദേശിക്കുന്നു. ഈ സംഭാവ്യതയെ വിശ്വസ്തതാ ഗുണാങ്കം എന്നു പറയുന്നു. ഇട വേളയെ വിശ്വസ്തതാ ഇടനില എന്ന് വിളിക്കുന്നു. മാധ്യത്തിന്റെ വിശ്വസ്തത ഇടനില കാണുന്ന രീതി ഈ അധ്യായത്തിൽ നമ്മൾ മനസ്സിലാക്കി.

നമുക്ക് വിലയിരുത്താം

ഒന്നു മുതൽ മൂന്ന് വരെ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയുത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

1. X_1, X_2, X_3 എന്നിവ മാധ്യം μ ആയിട്ടുള്ള ഒരു സമഷ്ടിയിലെ മൂന്ന് സാമ്പിൾ വിലകളാണ്. $T_1 = \dfrac{X_1 + 2X_2 + X_3}{k}$ എന്നത് μ ന്റെ ഒരു നിഷ്പക്ഷ മതിപ്പാണെങ്കിൽ k യുടെ വിലയെന്ത്?

   a) 4 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{4}$

2. n ന്റെ വില വലുതാകുമ്പോഴുള്ള വ്യതിയാനത്തിന്റെ വിലയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഗണകത്തിന്റെ ഗുണം ഏത്

   a) നിക്ഷ്പക്ഷത b) സ്ഥിരത c) പര്യാപ്തത d) ക്ഷമത

3. t_2 എന്ന ഗണകം t_1 നേക്കാൾ കാര്യക്ഷമമാകുന്നത് എപ്പോൾ.

   a) $V(t_1) = V(t_2)$ b) $V(t_1) > V(t_2)$ c) $V(t_1) < V(t_2)$ d) $V(t_1) = V(t_2) = 0$

4. ഒരു കൂട്ടം വിദ്യാർത്ഥികളോട് അവർ സ്കൂളിലെത്താനെടുക്കുന്ന സമയത്തിന്റെ ശരാശരിയെ കുറിച്ച് അധ്യാപകർ ചോദിച്ചു. ചിലർ ഏകദേശം 25 മിനിട്ട് വേണമെന്നും മറ്റു ചിലർ 20 മുതൽ 30 വരെ മിനിട്ട് വേണമെന്നും മറുപടി പറഞ്ഞു. ഈ രണ്ട് മറുപടികളുമായും ബന്ധപ്പെട്ട വിവിധയിനം മതിപ്പുകൾ ഏവ?

5. X_1, X_2, X_3 എന്നിവ മാധ്യം μ ഉം മാനകവ്യതിയാനം σ യും ആയിട്ടുള്ള ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും എടുത്തിട്ടുള്ള സാമ്പിൾ വിലകളാണ്. ഇവയിൽ μ ന്റെ നിഷ്പക്ഷ ഗണകങ്ങൾ ഏതൊക്കെ?

$$U_1 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}X_3$$

$$U_2 = \frac{4}{5}X_1 + \frac{1}{10}X_2 + \frac{1}{10}X_3, \quad U_3 = \frac{1}{6}X_1 + \frac{2}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3$$

6. X_1, X_2, X_3 എന്നിവ മാധ്യം μ ഉം മാനകവ്യതിയാനം σ യും ആയിട്ടുള്ള ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും എടുത്തിട്ടുള്ള സാമ്പിൾ വിലകളാണ്.

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}, T_2 = \frac{X_1 + 2X_2}{3}, T_3 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{3}$$

7. ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന സാമ്പിളുകളിൽ നിന്നും സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ മതിപ്പ് വിലകാണുക.

   a) 46, 48, 51, 50, 45, 53, 50, 48.

   b) 35, 42, 38, 55, 70, 69.

   c) 1.684, 1.691, 1.687, 1.688, 1.689, 1.688, 1.690, 1.693, 1.685.

8. ഒരു പ്രത്യേകതതരം ടെന്നീസ് പന്തുകൾ നിലത്ത് വീണ് പൊങ്ങുന്ന ഉയരം മാനക വ്യതിയാനം 2 cm ആയിട്ടുള്ള ഒരു നോർമൽ വിതരണത്തിലാണ്. 100 പന്തുകൾ പൊങ്ങുന്നതിന്റെ ഉയരം പരിശോധിച്ചപ്പോൾ ശരാശരി 140 cm ആണെന്ന് മനസ്സിലാക്കി. ശരാശരി ഉയരത്തിന്റെ 95% വിശ്വസ്ത ഇടനില കണ്ടുപിടിക്കുക.

9. ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും 100 വിലകളുള്ള ഒരു സാമ്പിൾ എടുത്തു. സാമ്പിളിന്റെ മാധ്യം 76 ഉം മാനക വ്യതിയാനം 12 ഉം ലഭിച്ചു. സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന് 99% വിശ്വസ്ത ഇടനില കണ്ടുപടിക്കുക.

10. ഒരു കമ്പനിയുടെ 150 സഞ്ചികളിലുള്ള ധാന്യങ്ങളുടെ ഭാരത്തിന്റെ ശരാശരി 748 ഗ്രാമും മാനക വ്യതിയാനം 3.6 ഗ്രാമും ആണെന്ന് മനസ്സിലായി. സഞ്ചിയിലുള്ള ധാന്യങ്ങളുടെ ഭാരത്തിന്റെ 95% വിശ്വസ്ത ഇടനിലയും 99% വിശ്വസ്ത ഇടനിലയും കാണുക.

11. 80 പേരുടെ ഹൃദയമിടിപ്പ് രാവിലെ ഉറക്കമുണർന്ന ഉടനെ രേഖപ്പെടുത്തി. അവയുടെ ശരാശരി 68 ഉം മാനക വ്യതിയാനം 5 ഉം ലഭിച്ചു. ഹൃദയമിടിപ്പിന്റെ 95% വിശ്വസ്ത ഇടനില കണ്ടു പിടിക്കുക.

12. ഗുണകം, മതിപ്പ് വില എന്നിവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമെന്ത്?

13. ഒരു സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന് മൂന്ന് കൃത്യമതിപ്പ് ഗണകങ്ങൾ നിർദേശിക്കുക.

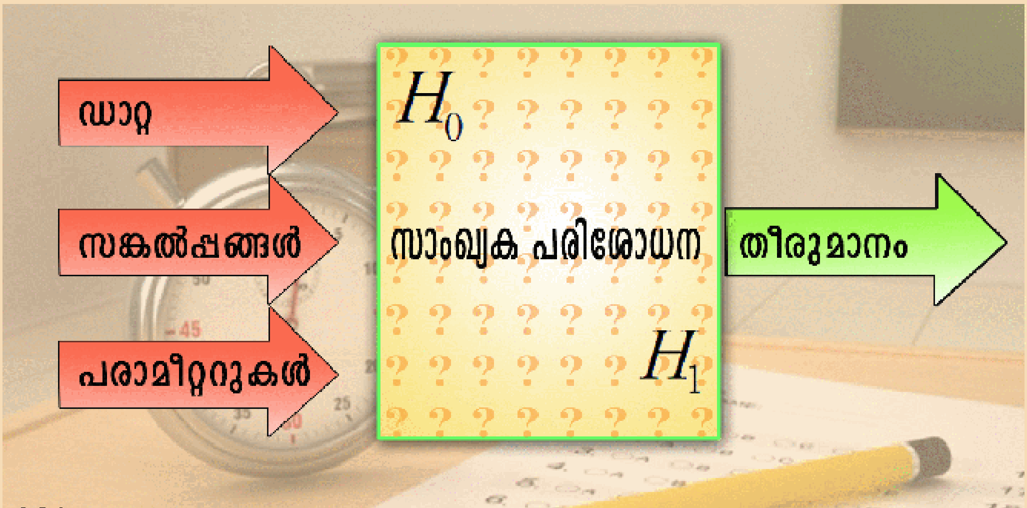
14. ഒരു സ്കൂളിലെ ബാറ്റ്മിന്റൺ കളിക്കാരുടെ പ്രായം 18, 15, 16, 19 എന്നിങ്ങനെയാണ്. രണ്ട് പേരുടെ വ്യത്യസ്ത സാമ്പിളുകൾ SRSWOR രീതിയിൽ എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ "സാമ്പിൾ മാധ്യം സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ നിഷ്പക്ഷ ഗണകമായിരിക്കും" എന്ന പ്രസ്താവന ശരിയാകുമോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

15. ഒരു പട്ടണത്തിലെ 600 പാത മുറിച്ചുകടക്കലുകളിൽ 64 എണ്ണം പരിശോധിച്ചു. വാർഷിക ശരാശരി അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം 4.2 ഉം അവയുടെ മാനക വ്യതിയാനം 0.8 ഉം ആണ്. ശരാശരി അപകടങ്ങളുടെ 95% വിശ്വസ്തത ഇടനില കണ്ടു പിടിക്കുക.

V2D9Y4

അധ്യായം 9

പരികൽപന പരീക്ഷണം (Testing of Hypothesis)



സാംഖ്യകത്തിൽ സമഷ്ടിയുടെ പരാമീറ്റർ നിർണയത്തിന് കൃത്യമതിപ്പും ഇട മതിപ്പും ഉപയോഗിക്കുന്നതിന് ഒരു സാമ്പിളിനെ എങ്ങനെ പ്രയോജനപ്പെടുത്താമെന്ന് കഴിഞ്ഞ അധ്യായത്തിൽ നാം ചർച്ച ചെയ്തു. സാംഖ്യകാനുമാനം നടത്തുന്നത് മതിപ്പും പരികല്പന പരീക്ഷണവും അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണെന്ന് നമുക്കറിയാം.

ഈ അധ്യായത്തിൽ സാംഖ്യകാനുമാനത്തിൽ പരികല്പന പരീക്ഷണം ഉപയോഗിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നതിനെക്കുറിച്ചാണ് നമ്മൾ ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.

സാംഖ്യകാനുമാനത്തിന്റെ ആത്മാവാണ് പരികല്പന പരീക്ഷണം. കൂടാതെ ഗവേഷകർക്ക് അനുമാനത്തിലെത്തിച്ചേരാൻ സഹായിക്കുന്ന ഒരു പ്രധാന കരു കൂടിയാണിത്.

സവിശേഷ പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പഠിക്കുന്നതോടെ, പഠിതാവ്:

- സാംഖ്യക പരികല്പനകൾ തിരിച്ചറിയുകയും ഉണ്ടാക്കുകയും ചെയ്യും.
- തരം I, തരം II പിശകുകളെ തിരിച്ചറിയും.
- പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം, നിർണ്ണായക മേഖല, സാർത്ഥക തലം, പരീക്ഷണ ക്ഷമത എന്നിവ വിവരിക്കും.
- സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യ പരിശോധന മാർഗ്ഗങ്ങൾ വിവരിക്കും.
- ഗുണാത്മക ചരങ്ങളുടെ അനാശ്രിതത്വ പരിശോധനാ മാർഗ്ഗമായ കൈവർഗ്ഗ പരീക്ഷണം വിവരിക്കും.
- ഒരു സാഹചര്യത്തിനുതകുന്ന സാംഖിക പരീക്ഷണം രൂപീകരിക്കും.

തീരുമാനമെടുക്കലിന്റെ ഒരു അവിഭാജ്യഭാഗം എന്ന നിലയിൽ വ്യവസായം, ജീവശാസ്ത്രം, സാമൂഹ്യ ശാസ്ത്രം, സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്രം തുടങ്ങി നിരവധി മേഖലകളിൽ പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിന് പ്രാമുഖ്യമുണ്ട്.

9.1 സാംഖ്യക പരികല്പന (Statistical Hypothesis)

ഒരു സമഷ്ടിയുടെ പരാമീറ്ററിനെക്കുറിച്ചോ വിതരണത്തെക്കുറിച്ചോ ഉള്ള തെളിയിക്കപ്പെടേണ്ടതോ അല്ലാത്തതോ ആയ അനുമാനങ്ങളെയാണ് പൊതുവെ സാംഖ്യക പരികല്പന എന്നറിയപ്പെടുന്നത്. ഉദാഹരണമായി, ഒരു ലഘുപാനീയ നിർമ്മാണ കമ്പനിയുടെ മാനേജർക്ക് പാനീയം കുപ്പികളിൽ നിറയ്ക്കുന്ന പ്രക്രിയ നിയന്ത്രണ വിധേയമാണോ അല്ലയോ എന്ന് തീരുമാനിക്കണമെന്നിരിക്കട്ടെ. കമ്പനി യന്ത്ര സഹായത്താൽ 1 ലിറ്റർ വീതമുള്ള കുപ്പികളിൽ നിറച്ചാണ് പാനീയം വില്പന നടത്തുന്നത്. ഇവിടെ മാനേജർക്ക് പരിശോധിക്കാനുള്ളത് ശരാശരി ഒരു കുപ്പിയിൽ 1 ലിറ്റർ പാനീയമുണ്ടായിരിക്കും എന്ന വാദമാണ്. അതായത് ഈ സാഹചര്യത്തിലെ പരികല്പന "ഒരു കുപ്പിയിൽ നിറച്ചിരിക്കുന്ന പാനീയത്തിന്റെ ശരാശരി അളവ് 1 ലിറ്റർ ആയിരിക്കും" എന്നതാണ്. ഈ പരികല്പന ശരിയാണെങ്കിൽ കുപ്പിയിൽ പാനീയം നിറയ്ക്കുന്ന പ്രക്രിയ നിയന്ത്രണ വിധേയമാണെന്നും പരികല്പന ശരിയല്ലെങ്കിൽ നിറയ്ക്കൽ പ്രക്രിയ നിയന്ത്രണ വിധേയമല്ലെന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

ഒരു സമഷ്ടിയുടെ പരാമീറ്ററിനെക്കുറിച്ചോ വിതരണത്തെക്കുറിച്ചോ ഉള്ള ഒരു അനുമാനമാണ് സാംഖ്യക പരികല്പന. ഈ അനുമാനം ശരിയോ തെറ്റോ ആകാം.

അസാധു പരികല്പനയും വൈകല്പിക പരികല്പനയും (Null and Alternative Hypothesis)

പരിശോധിക്കാനുള്ള അനുമാനങ്ങളെ പരികല്പനകളുടെ രൂപത്തിലേക്ക് മാറ്റുന്നതാണ് പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിന്റെ ആദ്യഘട്ടം. എല്ലാ പരികല്പന പരീക്ഷണങ്ങളിലും നമ്മൾ ഒരു ജോഡി പരികല്പനകളെയാണ് അഭിമുഖീകരിക്കേണ്ടത്. ഇതിൽ ഒന്നു മാത്രമേ സത്യമാകാറുള്ളൂ. ഈ ജോഡിയിൽ ഒന്നിനെ അസാധു പരികല്പനയെന്നും (Null hypothesis) രണ്ടാമത്തേതിനെ വൈകല്പിക പരികല്പനയെന്നും (Alternative hypothesis) എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു.

ഏത് പരികല്പനയെയാണോ പരിശോധിക്കപ്പെടേണ്ടത് അതിനെ അസാധു പരികല്പന എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇതിനെ H_0 എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അസാധു പരികല്പനയിൽ കൂടി അവകാശപ്പെടുന്നത് യാഥാർത്ഥ്യം അനുമാനവുമായി ഒരു വ്യത്യാസവുമുണ്ടായിരിക്കില്ല എന്നതാണ്. തള്ളിക്കളയാൻ ശക്തമായ കാരണങ്ങളൊന്നുമില്ലെങ്കിൽ അസാധു പരികല്പന ശരിയാണെന്ന് കരുതപ്പെടും.

അസാധു പരികല്പനയുടെ ഖണ്ഡനമാണ് വൈകല്പിക പരികല്പന (Alternative hypothesis). ഇതിനെ H_1 എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അനുമാനത്തിൽ വ്യത്യാസമുണ്ടായിരിക്കും എന്നാണ് വൈകല്പിക പരികല്പനയിലൂടെ വാദിക്കുന്നത്. അസാധു പരികല്പന തള്ളിക്കളയപ്പെടുന്ന അവസരത്തിൽ വൈകല്പിക പരികല്പന സ്വീകരിക്കപ്പെടും.

ഉദാഹരണമായി, മുമ്പ് നാം ചർച്ച ചെയ്ത കുപ്പിയിൽ പാനീയം നിറയ്ക്കൽ പ്രക്രിയ

യുമായി ബന്ധപ്പെട്ട സാഹചര്യം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ അസാധു, വൈകല്പിക പരികല്പനകൾ താഴെ പറയുന്നവയാണ്.

H_0 : ഒരു കുപ്പിയിലുള്ള പാനീയത്തിന്റെ ശരാശരി അളവ് 1 ലിറ്റർ ആണ്.

H_1 : ഒരു കുപ്പിയിലുള്ള പാനീയത്തിന്റെ ശരാശരി അളവ് 1 ലിറ്റർ അല്ല.

മറ്റൊരുദാഹരണം പരിശോധിക്കാം.

ഒരു നാണയം നിഷ്പക്ഷമായുള്ളതാണോയെന്ന് പരിശോധിക്കണമെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടുത്തെ അസാധു പരികല്പന (H_0) എന്നത്, ആ നാണയം മേൽപോട്ടെറിയുന്ന പകുതി അവസരത്തിൽ തലയും (head) പകുതി അവസരത്തിൽ വാലും (tail) ലഭിക്കും എന്നാണ്.

അതായത് H_0: $p = \frac{1}{2}$ ഇവിടെ p എന്നത് തല ലഭിക്കുന്നതിന്റെ അനുപാതമാണ്.

ഇനി വൈകല്പിക പരികല്പനയുടെ കാര്യം പരിശോധിക്കാം. അത് തലകളുടെ എണ്ണവും വാലുകളുടെ എണ്ണവും തുല്യമായിരിക്കില്ല എന്നതാണ്.

അതായത്, H_1: $p \neq \frac{1}{2}$.

മുമ്പ് സൂചിപ്പിച്ച പ്രകാരം അസാധു പരികല്പനയും വൈകല്പിക പരികല്പനയും രണ്ട് വിരുദ്ധ പ്രസ്താവനകളാണ്. അതിനാൽ H_0, H_1 എന്നിവ ഒരേ സമയം സത്യമാകാറില്ല. ഏതെങ്കിലും ഒരെണ്ണം മാത്രമേ സത്യമാകാറുള്ളൂ. അതുകൊണ്ടു തന്നെ ഒന്നിനെ സ്വീകരിക്കുന്നത് മറ്റേതിനെ തള്ളിക്കളയുന്നതിനു തുല്യമാണ്. ശ്രദ്ധിക്കേണ്ട മറ്റൊരു കാര്യം ഈ രണ്ട് പരികല്പനകളും സമമിതങ്ങളല്ല എന്നതാണ്. ഇവ പരസ്പരം മാറ്റാൻ കഴിയില്ല.

പരിശോധിക്കപ്പെടേണ്ട അനുമാനമാണ് ***അസാധു പരികല്പന (Null hypothesis).*** *ഇതിനെ H_0 എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. പരാമീറ്ററിന്റെ യഥാർത്ഥ വിലയും അനുമാനിക്കപ്പെട്ട വിലയും തമ്മിൽ വ്യത്യാസമുണ്ടായിരിക്കില്ല എന്നാണ് അസാധു പരികല്പന പ്രസ്താവിക്കുന്നത്.*

അസാധു പരികല്പനയുടെ ഖണ്ഡനമാണ് വൈകല്പിക പരികല്പന (Alternative hyupothesis). ഇതിനെ H_1 എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. പരാമീറ്ററിന്റെ യഥാർത്ഥ വിലയും അനുമാന വിലയും തമ്മിൽ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുമെന്നാണ് ഈ പരികല്പന പ്രസ്താവിക്കുന്നത്.

പരികല്പനകളെക്കുറിച്ചുള്ള നല്ല ഗ്രാഹ്യത്തിന് വേണ്ടി മറ്റൊരുദാഹരണം പരിശോധിക്കാം.

ഒരു കുറ്റം ചെയ്തതായി ആരോപിക്കപ്പെടുന്നയാളിന്റെ വിചാരണ കോടതിയിൽ നടക്കുകയാണ്. കോടതിയിൽ അയാൾ കുറ്റവാളിയാണെന്ന് തെളിയിക്കാത്തിടത്തോളം അയാൾ നിരപരാധിയാണ്. അതായത് വിചാരണ തുടങ്ങുന്നതിന് മുമ്പ് അയാൾ നിര

പരാധിയായി കണക്കാക്കപ്പെടുന്നു. കോടതി വിചാരണ ഒരു പരികല്പന പരീക്ഷണ മായി കണക്കാക്കിയാൽ പരികല്പനകളെ നമുക്ക് താഴെ പറയും പ്രകാരം പ്രസ്താ വിക്കാം.

H_0: ആരോപിക്കപ്പെട്ട വ്യക്തി നിരപരാധിയാണ്.

H_1: കുറ്റാരോപിതൻ അപരാധിയാണ്.

വിചാരണയുടെ പരിണിത ഫലങ്ങൾ താഴെപറയുന്നവയാണ്.

- ശിക്ഷിക്കപ്പെടാൻ ശക്തമായ തെളിവില്ലെങ്കിൽ അയാളെ വെറുതെ വിട്ടയക്കാം. അതായത് H_0 സ്വീകരിക്കപ്പെടാം. പക്ഷേ അയാൾ യഥാർത്ഥത്തിൽ നിരപരാധി യാണെന്ന് ഇത് അർത്ഥമാക്കുന്നില്ല.
- കുറ്റം ചെയ്തതായി തെളിയിക്കപ്പെട്ടാൽ അയാളെ കുറവാളിയെന്നുറപ്പിച്ച് ശിക്ഷി ക്കപ്പെടാം. അതായത് H_0 നെ തള്ളി H_1 സ്വീകരിക്കപ്പെടാം.

കോടതി വിചാരണകളിൽ ഒരാളുടെ നിരപരാധിത്വം തെളിയിക്കുന്നതിനായി അയാ ളുടെ കുറ്റങ്ങൾ തള്ളിക്കളയാറില്ല. പക്ഷേ കുറ്റവാളിയാണെങ്കിൽ അത് തെളിയിക്കാൻ അയാളുടെ നിരപരാധിത്വം തള്ളിക്കളയാം. അതായത് H_0 നെ സ്വീകരിക്കാനായി H_1 നെ തള്ളിക്കളയാറില്ല. പക്ഷേ H_1 നെ സ്വീകരിക്കാനായി H_0 നെ തള്ളിക്കളയാം. ഇതിൽ നിന്നും H_0, H_1 എന്നിവ പരസ്പരം മാറ്റപ്പെടാൻ കഴിയില്ലെന്ന് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം. അതിനാൽ തന്നെ ഒരു അവസരത്തിൽ എടുക്കുന്ന അസാധു, വൈകല്പിക പരിക ല്പനകളെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് വ്യക്തമായ ധാരണയുണ്ടായിരിക്കണം. അല്ലെങ്കിൽ പരി ശോധന അർത്ഥരഹിതമാകും.

9.2 രണ്ട് തരം പിശകുകൾ (Two types of Errors)

പരികല്പനകൾ നിർണയിച്ചതിന് ശേഷമുള്ള ഘട്ടം സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും സാമ്പിൾ എടുത്ത് പരികല്പനകളെ പരിശോധിക്കുന്നതിനുള്ള വിവരം ശേഖരിക്കുന്നതാണ്. സാമ്പിളിൽ നിന്നും വിവരിക്കുമ്പോഴുള്ള പ്രധാന പ്രശ്നം കിട്ടുന്ന വിവരം 100% വും ശരിയാകണമെന്നില്ല എന്നതാണ്. സാമ്പിളിന്റെ വലിപ്പം വർദ്ധിപ്പിച്ചാൽ തെറ്റുകൾ നമുക്ക് പരമാവധി കുറയ്ക്കാം. സാധാരണ ഗതിയിൽ ഓരോ സാമ്പിൾ മൂലമുണ്ടാ കുന്ന വ്യതിയാനങ്ങളെ നമുക്ക് ഇല്ലാതാക്കൻ കഴിയില്ല. ഇതുമൂലം തീരുമാനങ്ങൾ പലപ്പോഴും തെറ്റാൻ സാധ്യതയുണ്ട്. ഒരു പരികല്പനാ പരീക്ഷണത്തിന് നാല് രീതി യിലുള്ള ഫലങ്ങൾ ഉണ്ടാകാം. ഒരു അസാധു പരികല്പന ശരിയോ തെറ്റോ ആയി രിക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ സാമ്പിൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള പരിശോധന വഴി നമുക്ക് ആ പരികല്പനയെ സ്വീകരിക്കാനോ തള്ളിക്കളയാനോ തീരുമാനമെടുക്കാം.

താഴെയുള്ള പട്ടിക നാല് തരം ഫലങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഇതിൽ രണ്ട് ഫലങ്ങൾ ശരിയായ തീരുമാനത്തിലും രണ്ട് ഫലങ്ങൾ തെറ്റായ തീരു മാനത്തിലും എത്തിച്ചേരുന്നതായി കാണാം.

സാമ്പിൾ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള തീരുമാനം	സമഷ്ടിയുടെ അവസ്ഥ: H_0 ശരിയാണ്	സമഷ്ടിയുടെ അവസ്ഥ: H_0 തെറ്റാണ്
H_0 നെ തള്ളിക്കളയുന്നു	പിശക് (തരം I)	ശരിയായ തീരുമാനം (പിശകില്ല)
H_0 നെ സ്വീകരിക്കുന്നു (H_0 നെ തള്ളിക്കളയുന്നില്ല)	ശരിയായ തീരുമാനം (പിശകില്ല)	പിശക് (തരം II)

പട്ടിക 9.1

മുകൾ പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നാല് തരം തീരുമാനങ്ങളെ നമുക്ക് താഴെ പറയും പ്രകാരം മൂന്നായി തിരിക്കാം.

- പിശകില്ല (ശരിയായ തീരുമാനം)
- തരം I പിശക്
- തരം II പിശക്

ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു തീരുമാനമായിരിക്കും ഒരു പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിനുണ്ടാവുക.

തരം I പിശക് (Type I Error)

ഒരു പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിലൂടെ ശരിയായിരുന്ന അസാധു പരികല്പനയെ തള്ളിക്കളയാനെടുക്കുന്ന തീരുമാനമാണ് തരം I പിശക് എന്നറിയപ്പെടുന്നത്. അതായത് ശരിയായ H_0 നെ തള്ളിക്കളയുന്ന തീരുമാനമാണ് തരം I പിശക് എന്നറിയപ്പെടുന്നത്.

തരം II പിശക് (Type II Error)

തെറ്റായ അസാധു പരികല്പനയെ സ്വീകരിക്കാനെടുക്കുന്ന തീരുമാനമാണ് തരം II പിശക്. അതായത് തെറ്റായ H_0 നെ സ്വീകരിക്കാൻ (തള്ളിക്കളയാതിരിക്കാൻ) എടുക്കുന്ന തീരുമാനത്തെയാണ് തരം II പിശക് എന്നറിയപ്പെടുന്നത്.

ഒരു പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിൽ ഈ രണ്ട് തരം പിശകുകളും അഭിലഷണീണവുമല്ല പരമാവധി കുറയ്ക്കുകയും വേണം. എന്നിരുന്നാലും ഇത്തരം പിശകുകളെ നമുക്ക് പൂർണ്ണമായി ഒഴിവാക്കാനാകില്ല.

പല സാംഖ്യക വിദഗ്ധരുടെ അഭിപ്രായം "**അസാധു പരികല്പനയെ സ്വീകരിക്കുക**" എന്ന് പറയരുത്. പകരം "**അസാധു പരികല്പനയെ തള്ളികളയുന്നില്ല**" എന്ന് പറയണമെന്നാണ്. അങ്ങനെയാകുമ്പോൾ പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിലുണ്ടാകുന്ന രണ്ട് തീരുമാനങ്ങൾ, "**അസാധു പരികല്പന തള്ളിക്കളയുന്നു**", "**അസാധു പരികല്പന തള്ളിക്കളയുന്നില്ല**" എന്നിവയാണ്.

ശരിയായ അസാധു പരികല്പനയെ തള്ളിക്കളയാൻ തീരുമാനിക്കുമ്പോഴാണ് **തരം I പിശക്** ഉണ്ടാകുന്നത്.

തെറ്റായ അസാധു പരികല്പനയെ തള്ളിക്കളയാതിരിക്കാനെടുക്കുന്ന തീരുമാനമാണ് **തരം II പിശക്.**

9.3 സാർഥകതലവും (level of significance) പരീക്ഷണ ക്ഷമതയും (Power of a test)

ഒരു പരികല്പന പരീക്ഷണ ഫലത്തിൽ അനുവദിക്കാവുന്ന പിശകിന്റെ സംഭാവ്യതയുടെ പരമാവധി വിലയെയാണ് സാർഥകതലം (level of significance) എന്ന് വിളിക്കുന്നത്. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ H_0 ശരിയായിരിക്കുന്ന അവസരത്തിൽ H_0 നെ തള്ളിക്കളയാൻ തീരുമാനിക്കുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യതയാണ് സാർഥകതലം. സാർഥകതലത്തിനെ ഗ്രീക്ക് അക്ഷരമായ α (ആൾഫ) ഉപയോഗിച്ചാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിന് വേണ്ടി സാമ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന് മുന്നേ തന്നെ സാർഥകതലം തീരുമാനിച്ചിരിക്കും.

α = P (H_0 നെ തള്ളുന്നു/H_0 ശരിയാണ്)

= P (തരം I പിശക്)

പരിശോധനകളിൽ സാധാരണയായി നിജപ്പെടുത്തുന്ന സാർഥകതലത്തിന്റെ അളവുകൾ 0.05, 0.01 എന്നിവയാണ്. അതായത് ഒരു പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിൽ അസാധു പരികല്പന തള്ളപ്പെടാനുള്ള തീരുമാനമെടുത്താൽ അതിൽ തരം I പിശക് വരുന്നതിന് 5% അല്ലെങ്കിൽ 1% സംഭാവ്യതയുണ്ട് എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം (സാർഥകതലം നിജപ്പെടുത്തുന്നതിനനുസരിച്ച്). $\alpha = 0.05$ ആകുമ്പോൾ ശരിയായ ഒരു അസാധു പരികല്പനയെ തള്ളാൻ 5% സാധ്യതയാണുള്ളത്. മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ നമ്മളെടുത്ത തീരുമാനം ശരിയായിരിക്കുമെന്ന് 95% നമുക്ക് വിശ്വസിക്കാം.

തരം II പിശക് വരുവാനുള്ള സംഭാവ്യതയെ ഗ്രീക്ക് അക്ഷരമായ β (ബീറ്റ) ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

β = P (തരം II പിശക്)

=P (H_0 നെ സ്വീകരിക്കുന്നു/H_0 തെറ്റാണ്)

തെറ്റായ ഒരു അസാധു പരികല്പനയെ സ്വീകരിക്കുന്ന തെറ്റായ തീരുമാനമെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതയാണ് തരം II പിശക്.

ഒരു പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിന്റെ പരീക്ഷണ ക്ഷമത (Power of a test) എന്നത് തെറ്റായ ഒരു അസാധു പരികല്പനയെ തള്ളിക്കളയാൻ തീരുമാനിക്കുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യതയാണ്.

പരീക്ഷണ ക്ഷമത = P (H_0 നെ തള്ളുന്നു/H_0 തെറ്റാണ്)

= 1 – P (H_0നെ സ്വീകരിക്കുന്നു/H_0 തെറ്റാണ്)

= $1 - \beta$

അതായത് പരീക്ഷണ ക്ഷമതയെന്നത് തരം II പിശക് വരുത്താതിരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതയാണ്.

ഒന്നാം ഇനം പിശക് സംഭവിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതയുടെ കൂടിയ വില യെയാണ് **സാർഥകതലം** എന്നറിയപ്പെടുന്നത്. ഇതിനെ ഗ്രീക്ക് അക്ഷരമായ α ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

പരീക്ഷണക്ഷമത എന്നത് തെറ്റായ ഒരു H_0 നെ തിരസ്കരിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതയാണ്. ഇത് രണ്ടാം ഇനം പിശക് സംഭവിക്കാതിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യതയാണ്.

പരീക്ഷണക്ഷമത = P (H_0 നെ തിരസ്കരിക്കുന്നു/ H_0 തെറ്റാണ്)

= 1 – P(H_0 നെ സ്വീകരിക്കുന്നു H_0 തെറ്റാണ്)

= 1 – P(രണ്ടാം ഇനം പിശക്) = 1 - β

9.4 പരീക്ഷണ സാംഖ്യജവും നിർണായക മേഖലയും (Test Statistic and Critical Region)

പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം (Test Statistic)

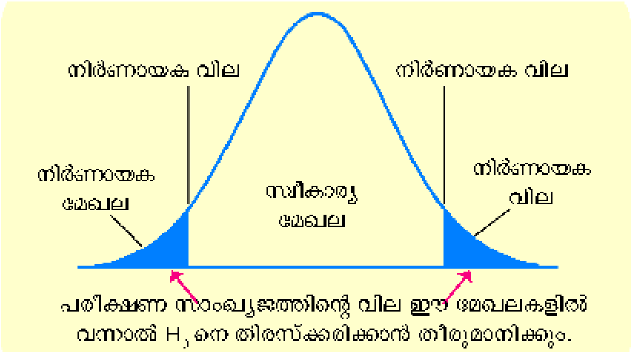
ഒരു സാംഖ്യജം എന്നത് സാമ്പിൾ വിലകളുടെ ഏകദമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം. അതു പോലെ ഒരു സാംഖ്യക പരിശോധന നടത്തുന്നത് സമഷ്ടിയിൽ നിന്നെടുക്കുന്ന ഒരു സാമ്പിൾ ഉപയോഗിച്ചാണെന്നും നമുക്കറിയാം. അതിനാൽ പരിശോധനാ പ്രക്രിയ യിൽ നമുക്ക് സാംഖ്യജത്തിന്റെ സഹായം ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. ഇങ്ങനെ ഉപ യോഗിക്കുന്ന സാംഖ്യജത്തിനെ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഉചിത മായ സംഭാവ്യതാ വിതരണത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ് സാംഖ്യജം തെരഞ്ഞെടു ക്കുന്നത്. പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ സഹായത്താലാണ് ഒരു അസാധു പരികല്പ നയെ സ്വീകരിക്കണമോ തിരസ്കരിക്കണമോ എന്ന് തീരുമാനിക്കുന്നത്. അസാധു പരികല്പനയിലെ സങ്കല്പവും യഥാർഥ ഡാറ്റയും തമ്മിൽ പരീക്ഷണസാംഖ്യജം താരതമ്യം ചെയ്യുന്നു. സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന പരീക്ഷണ സാംഖ്യജങ്ങ ളാണ്, Z – സാംഖ്യജം, t – സാംഖ്യജം, F – സാംഖ്യജം, കൈവർഗ സാംഖ്യജം മുത ലായവ

നിർണായക മേഖല (Critical region)

നമ്മൾ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തെക്കുറിച്ച് പറഞ്ഞല്ലോ: ഇതിന് ഒരു സംഭാവ്യതാ വിതരണം ഉണ്ടായിരിക്കും. ഒരു പരിശോധന പ്രക്രിയയിൽ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജ ത്തിന്റെ സംഭാവ്യതാവിതരണ വക്രത്തിന് കീഴിലുള്ള ഭാഗത്തെ രണ്ട് മേഖലകളായി തിരിക്കുന്നു.

- തിരസ്ക്കരണ മേഖല (Rejection region)
- സ്വീകാര്യമേഖല (Acceptance region)

തിരസ്ക്കരണ മേഖല: അസാധു പരികല്പന തള്ളിക്കളയപ്പെടുന്ന മേഖലയാണ് തിരസ്ക്കരണ മേഖല. തിരസ്ക്കരണ മേഖലയെയാണ് നിർണായക മേഖല എന്ന് വിളിക്കുന്നത്. അതായത്, ഒരു പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ പ്രതിരൂപണ വിതരണത്തിലെ പരീക്ഷിക്കപ്പെടേണ്ട പരിശോധനയെ തിരസ്ക്കരിക്കാൻ നയിക്കുന്ന മേഖലയോ മേഖലകളോ ആണ് നിർണായകമേഖല എന്നറിയപ്പെടുന്നത്. നിർണായകമേഖലയുടെ പരപ്പളവ് സാർഥകതലത്തിന് (α) തുല്യമായിരിക്കും.



ചിത്രം 9.1

സ്വീകാര്യമേഖല: അസാധു പരികല്പന സ്വീകരിക്കപ്പെടുന്ന മേഖലയാണ് സ്വീകാര്യ മേഖല. സ്വീകാര്യമേഖലയെയും നിർണായകമേഖലയെയും വേർതിരിക്കുന്ന വിലയാണ് നിർണായക വില (critical value)

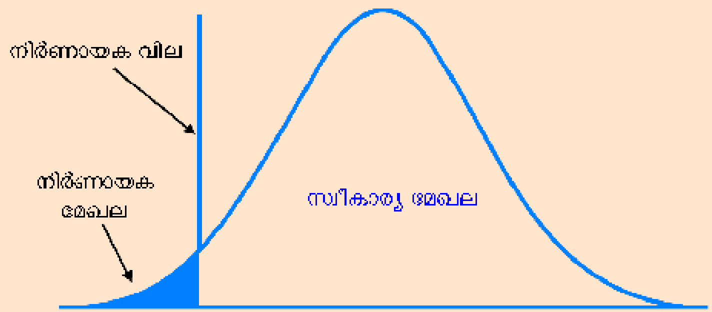
അസാധു പരികല്പന തിരസ്ക്കരിക്കപ്പെടണമെന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്ന പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ മേഖലയാണ് **നിർണായക മേഖല** എന്നറിയപ്പെടുന്നത്. നിർണായക മേഖലയെയും സ്വീകാര്യമേഖലയേയും വേർതിരിക്കുന്ന വിലയാണ് **നിർണായകവില.**

9.5 ഒരു വാൽ പരീക്ഷണവും ഇരു വാൽ പരീക്ഷണവും (One - Tailed and Two - Tailed Tests)

ഒരു സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യം (μ) പരിശോധിക്കുന്നതിലെ പരികല്പനകൾ പരിഗണിക്കുന്നു.

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \ , \ H_1: \ \mu < \mu_0$$

ഇവിടെ നാം H_0 നെ തിരസ്ക്കരിക്കുന്നത് പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില μ_0 യിൽ നിന്നും കുറഞ്ഞിരിക്കുമ്പോൾ മാത്രമാണ്. അതായത് തിരസ്ക്കരണം നടക്കുന്നത് പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം അതിന്റെ വിതരണത്തിലെ നിർണായകവിലയേക്കാൾ കുറഞ്ഞ വില അഥവാ നിർണായക വിലയ്ക്ക് ഇടത് ഭാഗത്തുള്ള വില സ്വീകരിക്കുമ്പോഴാണ്. ഈ പരിശോധനയെ ഇടത് വാൽ പരീക്ഷണം (left tailed test) എന്നുപറയുന്നു.

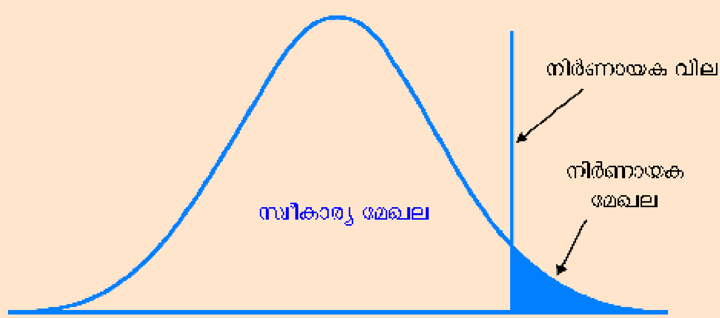


ചിത്രം 9.2 ഇടത് വാൽ പരീക്ഷണം

ഇനി ചുവടെ പറയുന്ന പരികല്പനകൾ പരിഗണിക്കും.

$$\mathbf{H}_0: \ \mu = \mu_0 \ \text{ and } \ H_1: \ \mu > \mu_0$$

ഇവിടെ H_0 നെ തിരസ്കരിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നത് പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില μ_0 നേക്കാൾ കുടിയിരിക്കുമ്പോഴാണ്. അതായത് തിരസ്ക്കരണം നടക്കുന്നത് പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം അതിന്റെ വിതരണത്തിൽ നിർണായക വിലയെക്കാൾ കൂടിയ വില അഥവാ നിർണായക വിലയ്ക്ക് വലതുഭാഗത്തുള്ള വില സ്വീകരിക്കുമ്പോഴാണ്. ഈ പരിശോധനയെ വലതുവാൽ പരീക്ഷണം (right tailed test) എന്നുപറയുന്നു.



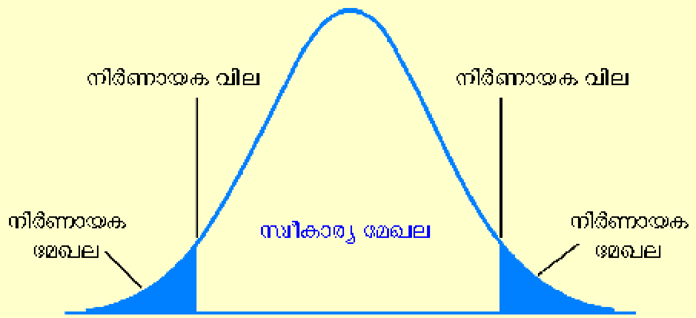
ചിത്രം 9.2 വലതു വാൽ പരീക്ഷണം

ഇടതുവാൽ പരീക്ഷണത്തിലായാലും വലതുവാൽ പരീക്ഷണത്തിലായാലും തിരസ്ക്കരണം നടക്കുന്നത് ഏതെങ്കിലും ഒരു വാൽ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന മേഖലയിലാണ്. അതിനാൽ ഈ പരീക്ഷണങ്ങളെ ഒരു വാൽ പരീക്ഷണം (**one tailed test**) എന്ന് പറയുന്നു.

അവസാനമായി, താഴെപ്പറയുന്ന പരികല്പനകൾ പരിഗണിക്കുക.

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \ , H_1: \ \mu \neq \mu_0$$

ഇവിടെ തിരസ്ക്കരണം രണ്ട് മേഖലകളിലും നടക്കാം. നിർണായക വിലയെക്കാൾ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില കൂടുകയോ കുറയുകയോ ചെയ്താൽ തിരസ്ക്കരണം നടക്കുന്നു. അതായത് രണ്ട് അറ്റങ്ങളിലും തിരസ്ക്കരണം നടക്കുന്നു. അതിനാൽ ഈ പരിശോധനയെ ഇരുവാൽ പരീക്ഷണം (two tailed test) എന്നു പറയുന്നു.



ചിത്രം 9.4 ഇരു വാൽ പരീക്ഷണം

ഒരു വാൽ പരീക്ഷണത്തിൽ അസാധു പരികല്പന തിരസ്ക്കരിക്കപ്പെടുന്നത് നിർണായക മേഖല ഏതെങ്കിലും ഒരറ്റത്ത് മാത്രമാകുമ്പോഴാണ്. ഒരു വാൽ പരീക്ഷണ ഒന്നുകിൽ ഇടതുവാൽ പരീക്ഷണമോ അല്ലെങ്കിൽ വലതുവാൽ പരീക്ഷണമോ ആയിരിക്കും.

ഇരുവാൽ പരീക്ഷണത്തിൽ അസാധു പരികല്പന തിരസ്കരിക്കപ്പെടുന്നത് നിർണായക മേഖല രണ്ട് ഭാഗത്തുമായിരിക്കുമ്പോഴാണ്.

പരികല്പനാ പരീക്ഷണത്തിന്റെ 5 ഘട്ടങ്ങൾ

നമ്മളിതുവരെ പരികല്പനാ പരീക്ഷണത്തിലെ ചില അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങളെക്കുറിച്ചാണ് ചർച്ച ചെയ്തത്. സമഷ്ടിയുടെ ഒരു പരാമീറ്ററിന്റെ മതിപ്പ് വില നാം സാമ്പിളുപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തുന്നു. അതായത് സാമ്പിളുപയോഗിച്ച് ഒരു സാംഖ്യജത്തെ കണ്ടെത്തുകയും ആ സാംഖ്യജമുപയോഗിച്ച് പരാമീറ്ററിന്റെ മതിപ്പ് വില കാണുകയും ചെയ്യുന്നു. ഈ മതിപ്പ് വില പരിശോധിക്കുന്നതിനായി ഒരു വ്യവസ്ഥാപിത പരിശോധന പ്രക്രിയ ആവശ്യമാണ്. ആ പരിശോധന പ്രക്രിയയുടെ അഞ്ച് ഘട്ടങ്ങളാണ് ഇവിടെ വിവരിക്കുന്നത്.

ഘട്ടം 1: പരികല്പനകൾ പ്രസ്താവിക്കുന്നു.

ഘട്ടം 2: അനുയോജ്യമായ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തെ തീരുമാനിക്കുന്നു.

ഘട്ടം 3: സാർഥകതലവും നിർണായക മേഖലയും ഉറപ്പിക്കുന്നു.

ഘട്ടം 4: സാമ്പിൾ ഉപയോഗിച്ച് പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില കാണുന്നു.

ഘട്ടം 5: തീരുമാനമെടുക്കുന്നു.

ഈ ഘട്ടങ്ങളോരോന്നും വിവരിക്കാം.

ഘട്ടം 1: പരികല്പനകൾ പ്രസ്താവിക്കുന്നു

അസാധു പരികല്പനയും വൈകല്പിക പരികല്പനയും പ്രസ്താവിച്ചുകൊണ്ടാണ് ഒരു പരികല്പന പരീക്ഷണം ആരംഭിക്കുന്നത്. അസാധു പരികല്പന (H_0) എന്നത് ആ പരികല്പന ശരിയാണെന്ന അനുമാനത്തിൽ തിരസ്ക്കരണ സാധ്യത പരിശോധിക്കാനുള്ള പരികല്പനയാണ്. കാര്യമാത്ര വ്യത്യാസമുണ്ടായിരിക്കില്ല എന്നാണ് സൈദ്ധാന്തികമായി അസാധു പരികല്പന അർഥമാക്കുന്നത്. അസാധു പരികല്പന പരിശോധിക്കുന്നതിന്റെ കാരണം അസാധു പരികല്പന തെറ്റായിരിക്കും എന്നുള്ള തോന്നൽ മാത്രമാണ്. അസാധു പരികല്പനയുടെ എതിരായുള്ളതിനെയാണ് വൈകല്പിക പരികല്പന (H_1) എന്ന് വിളിക്കുന്നത്. അതായത് അസാധു പരികല്പനയുടെ നിഷേധമാണ് വൈകല്പിക പരികല്പന.

ഘട്ടം 2: അനുയോജ്യമായ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തെ തീരുമാനിക്കുന്നു.

പരികല്പനകൾ തീരുമാനിക്കപ്പെട്ടതിന് ശേഷം സാംഖിക വിശകലനത്തിനുതകുന്ന ഒരു സാംഖിക പരീക്ഷണം നടത്തുന്നതിന് തീരുമാനിക്കുന്നു. വിശകലനത്തിനായു പയോഗിക്കുന്ന സാംഖ്യജത്തെ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം (test statistic) എന്ന് പറയുന്നു. ഒരു പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിന്റെ വിജയം അനുയോജ്യമായ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഘട്ടം 3: സാർഥകതലവും നിർണായക മേഖലയും ഉറപ്പിക്കുന്നു.

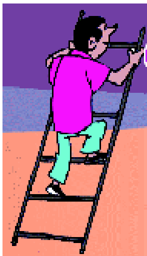
പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിൽ തീരുമാനമെടുക്കുന്നതിനുള്ള മാനദണ്ഡം ക്രമീകരിക്കുന്നതിന് നാം സാർഥകതലത്തെ (α) ഉറപ്പിക്കുന്നു. സാധാരണയായി സാർഥകതലം 0.05 അല്ലെങ്കിൽ 0.01 എന്നിങ്ങനെയായിരിക്കും ഉറപ്പിക്കുന്നത്. ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടുന്ന കാര്യം പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിനായി നാം സാമ്പിൾ ശേഖരിക്കുന്നതിന് മുമ്പ് തന്നെ സാർഥകതലം തീരുമാനിക്കണമെന്നതാണ്. ഇതിലൂടെ പരീക്ഷണഫലം തീരുമാനമെടുക്കുന്ന ആളിന്റെ പക്ഷപാതത്തിൽ നിന്നും വിമുക്തമാവുന്നതാണ്. സാർഥകതലം ഉറപ്പിച്ചതിനുശേഷം നിർണായകമേഖല തീരുമാനിക്കണം. ഏത് മേഖലയിൽ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില വരുമ്പോഴാണ് H_0 നെ തിരസ്കരിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നത്, ആ മേഖലയെയാണ് നിർണായക മേഖല (critical region) എന്ന് പറയുന്നത്.

ഘട്ടം 4: സാമ്പിൾ ഉപയോഗിച്ച് പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില കാണുന്നു.

ഈ ഘട്ടത്തിൽ നാം ഒരു സാമ്പിൾ ശേഖരിച്ച ശേഷം പരീക്ഷണസാംഖ്യജത്തിന്റെ വില കണക്കാക്കുന്നു.

ഘട്ടം 5: തീരുമാനം കൈക്കൊള്ളുന്നു.

പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില ഉപയോഗിച്ചാണ് തീരുമാനം കൈക്കൊള്ളുന്നത്. പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില നിർണായക മേഖലയിലാണെങ്കിൽ H_0 നെ തിരസ്കരിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. സ്വീകാര്യ മേഖലയിലാണ് പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില വരുന്നതെങ്കിൽ H_0 നെ സ്വീകരിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു.



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

1. സാംഖ്യക പരികല്പന എന്നാൽ എന്ത്?
2. അസാധുപരികല്പനയ്ക്കും വൈകല്പിക പരികല്പനയ്ക്കും ഓരോ ഉദാഹരണമെഴുതുക.
3. പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിലുണ്ടാകുന്ന രണ്ട് തരം തെറ്റുകൾ വിവരിക്കുക.
4. താഴെപറയുന്ന പദങ്ങൾ വിവരിക്കുക – സാർഥകതലം, നിർണായകമേഖല, പരീക്ഷണക്ഷമത
5. പരികല്പന പരീക്ഷണ പ്രക്രിയയുടെ ഘട്ടങ്ങളെക്കുറിച്ച് ലഘുവിവരണം തയാറാക്കുക.
6. ഒരു വാൽ പരീക്ഷണവും ഇരുവാൽ പരീക്ഷണവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം വിശദമാക്കുക.

9.6 ഒരു മാധ്യത്തിന്റെ സാർഥകതയെ കുറിച്ചുള്ള പരീക്ഷണങ്ങൾ (Tests of significance of single mean)

മാധ്യം μ വും മാനകവ്യതിയാനം σ യും ആയ ഒരു സമഷ്ടി പരിഗണിക്കുക. മാധ്യത്തെക്കുറിച്ചുള്ള പരിശോധനയ്ക്ക് നാം ഉപയോഗിക്കുന്നത് Z – പരീക്ഷണമോ t – പരീക്ഷണമോ ആയിരിക്കും. പരീക്ഷണത്തിന്റെ പലഘട്ടങ്ങൾ നമുക്ക് പരിശോധിക്കാം.

ഘട്ടം 1: പരികല്പനകൾ പ്രസ്താവിക്കുന്നു.

ഒരു പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഒന്നാം ഘട്ടം പരികല്പനകൾ പ്രസ്താവിക്കുന്നതാണ്. സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യം μ_0 ആണെന്ന് അനുമാനിക്കുകയാണെങ്കിൽ അസാധു പരികല്പന എന്നത്.

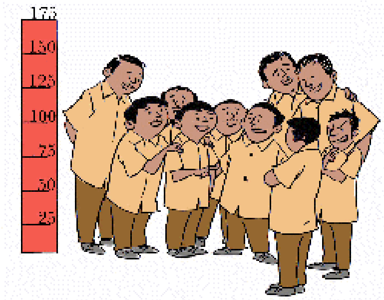
H_0: $\mu = \mu_0$ ആയിരിക്കും.

ചുവടെ പറയുന്നവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നായിരിക്കും വൈകല്പിക പരിശോധന.

H_1: $\mu \neq \mu_0$ (ഇരു വാൽ പരിശോധന)

H_1: $\mu > \mu_0$ (ഒരു വാൽ പരിശോധന)

H_1: $\mu < \mu_0$ (ഒരു വാൽ പരിശോധന)



ഘട്ടം 2: അനുയോജ്യമായ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തെ തീരുമാനിക്കുന്നു

സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തെക്കുറിച്ച് പരിശോധിക്കാൻ പല വ്യവസ്ഥകൾ പ്രകാരം നമ്മൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത് Z – പരീക്ഷണമോ t – പരീക്ഷണമോ ആയിരിക്കും.

(a) Z – പരീക്ഷണം

Z എന്ന പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം ഉപയോഗിച്ച് നടത്തുന്ന പരിശോധനയാണ് Z – പരീക്ഷണം. Z – പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന് ഒരു മാനക നോർമൽ വിതരണമാണുള്ളത്. അതായത് മാധ്യം 0 ഉം മാനകവ്യതിയാനം 1 ഉം ആയ നോർമൽ വിതരണത്തിലാണ് Z – പരീക്ഷണ സാംഖ്യജമുള്ളത്.

മാധ്യ പരിശോധനയ്ക്ക് Z – പരീക്ഷണം ഉപയോഗിക്കുന്നത് താഴെ പറയുന്ന അവസ്ഥകളിലാണ്.

അവസ്ഥ 1: സമഷ്ടിയുടെ വിതരണം നോർമൽ വിതരണമാവുകയും സമഷ്ടിയുടെ മാനക വ്യതിയാനം അറിയുകയും ചെയ്താൽ

അവസ്ഥ 2: സമഷ്ടിയുടെ മാനക വ്യതിയാനം അറിയുകയും പരിശോധനക്കുപയോഗിക്കുന്ന സാമ്പിളിന്റെ വലിപ്പം 30 ൽ കൂടുതലാവുകയും (വലിയ സാമ്പിൾ) ചെയ്താൽ. ഇവിടെ സമഷ്ടിയുടെ വിതരണം നോർമൽ വിതരണമാകണമെന്നില്ല.

അവസ്ഥ 3: സമഷ്ടിയുടെ മാനക വ്യതിയാനം അറിയില്ല. പക്ഷേ സമഷ്ടി നോർമൽ വിതരണത്തിലാവുകയും പരിശോധനയ്ക്ക് എടുക്കുന്ന സാമ്പിൾ വലുതാവുകയും (വലിപ്പം 30 ൽ കൂടിയാൽ) ചെയ്താൽ

സമഷ്ടിയിൽ നിന്നെടുത്ത, വലിപ്പം n ആയ ഒരു പരിശോധനാ സാമ്പിളിന്റെ മാധ്യം $\bar{x}$ ഉം മാനക വ്യതിയാനം s ഉം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. Z – പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം ചുവടെ പറയുന്നവയാണ്.

1 ഉം **2** ഉം അവസരങ്ങളിലെ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം,

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ആണ്. ഇതൊരു മാനക നോർമൽ വിതരണ N(0, 1) ത്തിലാണ്.

അവസ്ഥ **3** ലെ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം,

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$ ആണ്. ഇതും N(0, 1) ൽ ആണ്.

ഘട്ടം 3: സാർഥക തലവും നിർണായക മേഖലയും തീരുമാനിക്കുന്നു.

പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തെക്കുറിച്ച് തീരുമാനമെടുത്താൽ പിന്നെ സാർഥകതലം α യെ തീരുമാനിക്കണം. സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന സാർഥകതലത്തിന്റെ വില കൾ 0.05, 0.01 ഇവയിലേതെങ്കിലുമായിരിക്കും. അടുത്തതായി നമുക്ക് വേണ്ടത് നിർണാ യക മേഖലയാണ്. പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയാണ് നിർണായ മേഖലയെ നിർവചിക്കുന്നത്. വിവിധ അവസരങ്ങളിലെ നിർണായക മേഖല ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

പരീക്ഷണം	വൈകല്പിക പരികല്പന	നിർണായക മേഖല
ഇരുവാൽ പരീക്ഷണം	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$\lvert Z \rvert \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$
വലതുവാൽ പരീക്ഷണം	$H_1: \mu > \mu_0$	$\lvert Z \rvert \geq Z_{\alpha}$
ഇടതുവാൽ പരീക്ഷണം	$H_1: \mu < \mu_0$	

പട്ടിക 9.2 Z - ഇരു പരീക്ഷണത്തിലെ നിർണായക മേഖലകൾ

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$, Z_{α} എന്നിവയുടെ വിലകൾ കണ്ടെത്തുന്നത് മാനക നോർമൽ പട്ടിക ഉപയോ ഗിച്ച് താഴെ പറയും വിധമാണ്.

i.e. $P\left(\lvert Z \rvert \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \alpha$ കൂടാതെ $P\left(Z \geq Z_{\alpha}\right) = \alpha$

ഇവിടെ α സാർഥക തലമാണ്.

പല സാർഥക വിലകൾക്ക് $Z_{\frac{\alpha}{2}}$, Z_{α} എന്നീ നിർണായക വിലകൾ ചുവടെ പട്ടിക യിൽ ചേർക്കുന്നു.

സാർഥകതലം	നിർണായക വില	
	$Z_{\frac{\alpha}{2}}$	Z_{α}
$\alpha = 0.01$	2.58	2.33
$\alpha = 0.05$	1.96	1.645

പട്ടിക 9.3 Z - പരീക്ഷണത്തിലെ നിർണായക വിലകൾ

ഘട്ടം 4: പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില കണക്കാക്കുന്നു.

സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും ഒരു സാമ്പിൾ ശേഖരിച്ചതിനുശേഷം പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില കണക്കാക്കുന്നു.

ഘട്ടം 5: തീരുമാനമെടുക്കുന്നു.

പരീക്ഷണ സാംഖ്യത്തിന്റെ വിലയെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തി തീരുമാനമെടുക്കുകയാണ് ഇനി ചെയ്യുന്നത്. നിർണായക മേഖലയ്ക്കുള്ളിലാണ് പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില വരുന്നതെങ്കിൽ H_0 നെ തിരസ്ക്കരിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില നിർണായക മേഖലയിലല്ല വരുന്നതെങ്കിൽ H_0 നെ തിരസ്ക്കരിക്കാതിരിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു.

വിശദീകരണം: 9.1

ഒരു പ്രത്യേക യന്ത്രം കൊണ്ട് നിർമിക്കുന്ന ലോഹദണ്ഡുകളുടെ നീളങ്ങൾ മാധ്യം 420 സെ.മീ.യും മാനക വ്യതിയാനം 12 സെ.മീ.യും ആയ ഒരു വിതരണത്തിലാണുള്ളത്. വലിപ്പം 100 ആയ ഒരു സാമ്പിൾ ശേഖരിക്കുന്നു. സാമ്പിളിന്റെ മാധ്യം 423 സെ.മീ. ആണ്. ദണ്ഡുകളുടെ ശരാശരി നീളത്തിൽ വ്യത്യാസം ഉണ്ടായിരിക്കും എന്നതിന് 5% സാർഥക തലത്തിൽ തെളിവുണ്ടോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

ദണ്ഡുകളുടെ നീളത്തെ X എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുക. X ന്റെ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം, $\mu = 420$ സെ.മീ., മാനക വ്യതിയാനം, $\sigma = 12$ സെ.മീ. എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ നമുക്ക് പരിശോധനയ്ക്കായി താഴെ പറയുന്ന ഘട്ടങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

1. പരികല്പനകൾ പ്രസ്താവിക്കുന്നു.	ഇവിടെ ഉപയോഗിക്കേണ്ടുന്ന പരികല്പനകൾ H_0: $\mu = 420$ (മാധ്യത്തിൽ വ്യത്യാസമുണ്ടാകില്ല) H_1: $\mu \neq 420$ (മാധ്യം വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കും) എന്നിവയാണ്.
2. അനുയോജ്യമായ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം തീരുമാനിക്കുന്നു.	ഇവിടെ സാമ്പിളിന്റെ വലിപ്പം, $n = 100$ ആണ്. അതായത് വലിയ സാമ്പിളാണ്. കൂടാതെ സമഷ്ടിയുടെ മാനക വ്യതിയാനവും തന്നിട്ടുണ്ട്. അതിനാൽ ഉപയോഗിക്കേണ്ടുന്ന പരിശോധന Z – പരീക്ഷണവും പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം, $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ N(0, 1) ഉം ആണ്.

3. സാർഥകതലവും നിർണായക മേഖലയും തീരുമാനിക്കുന്നു.	സാർഥകതലം 5% ($\alpha = 0.05$) ആയി നിജപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ $H_1: \mu \neq 420$, ആയതിനാൽ ഇതൊരു രണ്ടുവാൽ പരീക്ഷണമാണ്. അതിനാൽ നിർണായക മേഖല എന്നത് $\lvert Z \rvert \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ആണ്. $\alpha = 0.05$ ആകുമ്പോൾ $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ആണ്. അപ്പോൾ നിർണായക മേഖല എന്നത്. $\lvert Z \rvert \geq 1.96$ ആണ്.
4. പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില കണക്കാക്കുന്നു.	ഇവിടെ $\bar{x} = 423, n = 100, \sigma = 12$ എന്നിങ്ങനെയാണ്. പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില, $Z = \frac{423-420}{\frac{12}{\sqrt{100}}} = 2.5$ ആണ്.
5. തീരുമാനമെടുക്കുന്നു.	$\lvert Z \rvert = 2.5 \geq 1.96$, ആയതിനാൽ H_0 നെ തിരസ്ക്കരിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. അതായത് പരിശോധനയുടെ ഫലം എന്നത് യന്ത്രം നിർമ്മിക്കുന്ന ദണ്ഡിന്റെ ശരാശരി നീളം സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിൽ നിന്നും വ്യത്യസ്തമായിരിക്കും എന്നാണ്.

വിശദീകരണം: 9.2

ഒരു പരീക്ഷയ്ക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 70 ഉം വ്യതിയാനം 36 ഉം ആയ ഒരു നോർമൽ വിതരണത്തിലാണെന്ന് അനുഭവത്തിൽ നിന്നും മനസ്സിലായിട്ടുണ്ട്. 36 കുട്ടികളിൽ ഈ പരീക്ഷ നടത്തിയപ്പോൾ അവരുടെ സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 68.5 എന്ന് ലഭിച്ചു. കുട്ടികളുടെ പ്രകടനം പ്രതീക്ഷിച്ച നിലവാരം പുലർത്തിയില്ല എന്ന വാദത്തിന് 5% സാർഥകതലത്തിൽ തെളിവുണ്ടോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

ഒരു കുട്ടിക്ക് ലഭിച്ച സ്കോർ X ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. X മാധ്യം, $\mu = 70$ വ്യതിയാനം, $\sigma^2 = 36$ ആയ ഒരു നോർമൽ വിതരണത്തിലാണ്.

ഇവിടുത്തെ പരിശോധന പരികല്പനകൾ ചുവടെ പറയുന്നു.

H_0: $\mu = 70$, H_1: $\mu < 70$.

ഇവിടെ സമഷ്ടിയുടെ വിതരണം നോർമലും മാനക വ്യതിയാനം അറിയാവുന്നതിനാലും ഉപയോഗിക്കേണ്ട പരിശോധന Z – പരീക്ഷണമാണ്. പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം,

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{N(0, 1) ആണ്.}$$

സാർഥകതലം $\alpha = 0.05$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു.

വൈകല്പിക പരിശോധന H_1: $\mu < 70$, ആയതിനാൽ പരിശോധന ഒരുവാൽ പരിശോധനയാണ്. അതിനാൽ നിർണായക മേഖല $|Z| \geq Z_\alpha$ ആണ്.

$\alpha = 0.05$ ആകുമ്പോൾ $Z_\alpha = 1.645$ ആണ്. അപ്പോൾ നിർണായകമേഖല, $|Z| > 1.645$ എന്നാകും.

ഇവിടെ $\bar{x} = 68.5$; n 36, σ 6, എന്നിങ്ങനെയാണ്.

$$Z = \frac{68.5 - 70}{\frac{6}{\sqrt{36}}} = -1.5$$

$|Z| = 1.5 < 1.645$, ആയതിനാൽ H_0 നെ തിരസ്കരിക്കാതിരിക്കാൻ (സ്വീകരിക്കാൻ H_0) തീരുമാനിക്കുന്നു. അതായത് കുട്ടികളുടെ പ്രകടനം 5% സാർഥകതലത്തിൽ പ്രതീക്ഷയ്ക്കൊത്തുള്ളതാണ്.

വിശദീകരണം: 9.3

100 കുട്ടികളുള്ള ഒരു സാമ്പിളിന്റെ ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം 52 കിലോഗ്രാമും മാനക വ്യതിയാനം 3 കി.ഗ്രാമും ആണ്. ഈ സാമ്പിൾ മാധ്യം 50 കി.ഗ്രാമിൽ കൂടുതലുള്ള ഒരു നോർമൽ സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും എടുത്തതാണെന്ന് കരുതാൻ 1% സാർഥകതലത്തിൽ കഴിയുമോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

X എന്നത് ഒരു കുട്ടിയുടെ ഭാരം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. X മാധ്യം μ ആയ ഒരു നോർമൽ വിതരണത്തിലുമാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

H_0: $\mu = 50$, H_1: $\mu > 50$.

$\bar{x} = 52$, $s = 3$, n 100 എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു.

ഇവിടെ സമഷ്ടിയുടെ വിതരണം നോർമലും മാനക വ്യതിയാനം അജ്ഞാതവുമാണ്. പക്ഷേ സാമ്പിളിന്റെ വലിപ്പം $n = 100$, വലുതായതിനാൽ നമുക്ക് Z – പരീക്ഷണം

ഉപയോഗിക്കാം. പരീക്ഷണസാംഖ്യജം

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad N(0, 1)$$

സാർഥകതലം, $\alpha = 0.01$.

$H_1: \mu > 50$, ആയതിനാൽ പരിശോധന ഒരുവാൽ പരീക്ഷണമാണ്. അതിനാൽ നിർണായകമേഖല, $|Z| > Z_\alpha$ ആയിരിക്കും. $\alpha = 0.01$ ആകുമ്പോൾ $Z_\alpha = 2.33$ ആയിരിക്കും. അതിനാൽ നിർണായകമേഖല, $|Z| > 2.33$ ആയിരിക്കും. പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില,

$$Z = \frac{52 - 50}{\frac{3}{\sqrt{100}}} = 6.67$$

$|Z| = 6.67 > 2.33$ ആയതിനാൽ H_0 നെ തിരസ്ക്കരിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. അതായത് 1% സാർഥകതലത്തിൽ കുട്ടികളുടെ ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം 50 കി.ഗ്രാമിന് മുകളിലായിരിക്കും.

(b) t – പരീക്ഷണം

സമഷ്ടിയുടെ മാനകവ്യതിയാനം അജ്ഞാതമായിരിക്കുന്ന അവസ്ഥയിൽ Z – പരീക്ഷണം സാധാരണ ഉപയോഗിക്കാറില്ല. ഇത്തരം അവസ്ഥയിൽ നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന പരിശോധനയാണ് t – പരീക്ഷണം. ഇതിനെ t പരീക്ഷണം എന്നറിയപ്പെടുന്നതിന് കാരണം ഇവിടെ നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം t പരീക്ഷണ സാംഖ്യജമായിരിക്കുന്നതിലാണ്. t പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം ഒരു സ്റ്റുഡന്റ് t വിതരണത്തിലാണുള്ളത്. t പരിശോധന ഉപയോഗിക്കുന്നത് താഴെപ്പറയുന്ന സാഹചര്യങ്ങൾക്കാശ്രയിച്ചാണ്.

1. സമഷ്ടി ഒരു നോർമൽ വിതരണത്തിലായിരിക്കണം.
2. സമഷ്ടിയുടെ മാനക വ്യതിയാനം അജ്ഞാതമായിരിക്കുകയും സാമ്പിളിന്റെ മാനക വ്യതിയാനം ജ്ഞാതവുമായിരിക്കണം.
3. സാമ്പിളിന്റെ വലിപ്പം ചെറുതാകണം. ($n < 30$).

t – പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം;

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} \quad \text{ആണ്.}$$

ഇത് സ്വതന്ത്രതാമാനം (degrees of freedom) $n - 1$ ആയ t വിതരണത്തിലായിരിക്കും.

നിർണായക മേഖലകൾ ചുവടെ പട്ടികയിൽ കൊടുക്കുന്നു.

പരിശോധന	വൈകല്പിക പരികല്പന	നിർണായക മേഖല
ഇരുവാൽ പരീക്ഷണം	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$\lvert t \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}$
വലതുവാൽ പരീക്ഷണം	$H_1: \mu > \mu_0$	$\lvert t \rvert \geq t_{\alpha}$
ഇടതുവാൽ പരീക്ഷണം	$H_1: \mu < \mu_0$	

പട്ടിക 9.4 t - പരീക്ഷണത്തിന്റെ നിർണായക മേഖലകൾ

$t_{\frac{\alpha}{2}}$, t_α എന്നീ നിർണായക വിലകൾ t – പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ കണക്കാക്കുന്നു.

$$P\left(\lvert t \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \alpha \; ; \; P\left(t \geq t_{\alpha}\right) = \alpha$$

α എന്നത് സാർഥകതലമാണ്.

ഒരു വാൽ പരിശോധനകളിൽ t_α കാണുന്നതിന് സാർഥകതലം α പട്ടികയുടെ ഏറ്റവും മുകൾ വശത്തെ വരിയിലും സ്വതന്ത്രതാമാനം പട്ടികയുടെ ഇടതുവശത്ത് നിരയിലും നോക്കുക.

വിശദീകരണം: 9.4

സ്വയം പ്രവർത്തിക്കുന്ന ഒരു നിറയ്ക്കൽ യന്ത്രം വഴി നിറച്ച 16 എണ്ണ പാട്ടകളുടെ ഒരു സാമ്പിൾ എടുക്കുന്നു. അതിന്റെ ശരാശരി ഭാരം 14.2 കി.ഗ്രാമും മാനക വ്യതിയാനം 0.40 കി.ഗ്രാമും ആണ്. ഒരു പാട്ടയിൽ നിറയ്ക്കേണ്ടത് 14 കി.ഗ്രാം എണ്ണയാണെങ്കിൽ ഈ നിറയ്ക്കൽ യന്ത്രം അധികം എണ്ണ പാട്ടകളിൽ നിറച്ച് പാഴ്ച്ചെലവ് ഉണ്ടാക്കുന്നു എന്ന് 5% സാർഥകതലത്തിൽ തീരുമാനിക്കാൻ കഴിയുമോ? (ഭാരങ്ങൾ നോർമൽ വിതരണത്തിലാണെന്ന് കരുതുക.)

പരിഹാരം

ഒരു പാട്ടയിലെ എണ്ണയുടെ ഭാരം X എന്നിരിക്കട്ടെ. മാധ്യം μ, മാനക വ്യതിയാനം σ ആയ നോർമൽ വിതരണത്തിലാണ് X എന്നും സങ്കല്പിക്കുക. (σ അജ്ഞാതമാണ്).
പരിശോധനാ പരികല്പനകൾ,

$H_0: \mu = 14$ കി.ഗ്രാം $H_1: \mu > 14$ കി.ഗ്രാം

$\bar{x} = 14.2,\ s = 0.40$, n 16 എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു.

ഇവിടെ σ അജ്ഞാതവും സാമ്പിൾ വലിപ്പം ചെറുതും സമഷ്ടി നോർമലുമായതിനാൽ t പരീക്ഷണം ഉപയോഗിക്കാം. t പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം,

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} \sim t_{(n-1)}$$

പരിശോധന ഒരു വാൽ പരിശോധനയായതിനാൽ നിർണായകമേഖല, $|t| > t_{\alpha}$ ആയിരിക്കും. α എന്നത് സാർഥകതലമാണ്.

t – പട്ടികയിൽ നിന്നും സ്വതന്ത്രതാമാനം $n - 1$ 15 ഉം α 0.05 ഉം ആയിരിക്കുമ്പോൾ $t_{\alpha} = 1.7530$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

$\therefore$ നിർണായകമേഖല $|t| > 1.7530$ എന്നാകും.

ഇവിടെ $$t = \frac{14.2 - 14}{\frac{0.40}{\sqrt{15}}} = 1.936$$

അതായത് $|t|$ 1.936 > 1.7530, ആയതിനാൽ H_0 നെ തിരസ്കരിക്കുന്നു. അതിനാൽ ഈ യന്ത്രം ഉപയോഗിച്ച് എണ്ണ നിറയ്ക്കുന്നത് പാഴ്ചെലവുണ്ടാക്കും എന്ന് നമുക്ക് അനുമാനിക്കാം.

വിശദീകരണം: 9.5

ഒരു കഷണം കമ്പിയുടെ പ്രതിരോധം ഓമിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ 5 അളവുകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

1.51, 1.49, 1.54, 1.52, 1.54

ആ കമ്പി കഷണം ശുദ്ധമായ വെള്ളിയിലായിരുന്നുവെങ്കിൽ അതിന്റെ പ്രതിരോധത്തിന്റെ അളവ് 1.50 ഓം ആയേനെ. അതിൽ മായം ചേർത്തിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ പ്രതിരോധത്തിന്റെ അളവ് വീണ്ടും കൂടിയിരിക്കും. ഈ കമ്പി കഷണം ശുദ്ധമായ വെള്ളിയിലുള്ളതാണോയെന്ന് 5% സാർഥകതലത്തിൽ പരിശോധിക്കുക. (പ്രതിരോധത്തിന്റെ അളവുകൾ നോർമൽ വിതരണത്തിലായിരിക്കുമെന്ന് സങ്കല്പിക്കുക.)

പരിഹാരം

കമ്പി കഷ്ണത്തിന്റെ പ്രതിരോധത്തിന്റെ അളവ് X ഓം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. X ന്റെ വിതരണം, മാധ്യം μ, മാനക വ്യതിയാനം σ ആയ നോർമൽ വിതരണമാണെന്നുമിരിക്കട്ടെ. പരിശോധനയുടെ പരികല്പനകൾ താഴെ പറയുന്നു.

$H_0: \mu = 1.50$ ഓം $H_1: \mu > 1.50$ ഓം

ഇവിടെ പരിശോധന ഒരു വാൽ പരീക്ഷണവും സാർഥകതലം $\alpha = 0.05$ ഉം ആണ്.

സമഷ്ടിയുടെ വിതരണം നോർമലും സമഷ്ടിയുടെ മാനക വ്യതിയാനം അജ്ഞാതവും സാമ്പിളിന്റെ വലിപ്പം ചെറുതും ($n = 5$) ആയതിനാൽ നമുക്ക് t- പരീക്ഷണം ഉപയോഗിക്കാം.

പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം,

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} \sim t_{(n-1)}$$ ആണ്.

s എന്നത് സാമ്പിൾ മാനക വ്യതിയാനത്തെ കുറിക്കുന്നു. നിർണായക മേഖല – $|t| > t_\alpha$

t - പട്ടികയിൽ നിന്നും $\alpha = 0.05$, സ്വതന്ത്രതാമാനം $n \quad 1 = 4$ എന്നിവയ്ക്ക് t_α യുടെ വില 2.132 ആണ്. ആയതിനാൽ നിർണായക മേഖല എന്നത് $|t| > 2.132$ ആണ്. തന്നിരിക്കുന്ന സാമ്പിൾ ഡാറ്റയിൽ നിന്നും $\bar{x}$, s എന്നിവ കണ്ടെത്താം.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{7.6}{5} = 1.52$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{11.5538}{5} - (1.52)^2} = 0.019$$

പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില

$$t = \frac{1.52 - 1.50}{\frac{0.019}{\sqrt{4}}} = 2.105$$

ഇവിടെ $|t| \quad 2.105 < 2.132$, ആയതിനാൽ H_0 നെ തിരസ്കരിക്കാതിരിക്കാൻ (സ്വീകരിക്കാൻ) തീരുമാനിക്കാം. അതായത് 5% സാർഥക തലത്തിൽ, തന്നിരിക്കുന്ന സാമ്പിൾ അളവുകൾ തരുന്ന ഫലം ആ കമ്പി കഷണം ശുദ്ധമായ വെള്ളി ആണെന്നുള്ളതാണ്.

വിശദീകരണം: 9.6

വലിപ്പം 16 ആയ ഒരു അനിയത സാമ്പിളിന്റെ മാധ്യം 53 ആണ്. സാമ്പിൾ വിലകൾക്ക് മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗങ്ങളുടെ തുക 150 ആണ്. ഈ സാമ്പിൾ മാധ്യം 56 ആയ ഒരു സമഷ്ടിയിൽനിന്നും ശേഖരിച്ചതാണെന്ന് കരുതാമോ? (സാർഥക തലം 5%)

പരിഹാരം

സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യം, μ എന്നിരിക്കട്ടെ. പരിശോധന പരികല്പനകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

$H_0: \mu = 56$, $H_1: \mu \neq 56$.

ഇവിടെ വലിപ്പം n = 16 ആയ ഒരു സാമ്പിളിന്റെ മാധ്യം $\bar{x}$ = 53 എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു. സമഷ്ടിയുടെ മാനകവ്യതിയാനം അജ്ഞാതമായതിനാൽ t - പരീക്ഷണം ഉപയോഗിക്കാം. പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} \sim t_{(n-1)}$$ ആണ്.

ഈ പരിശോധന ഇരു വാൽ പരീക്ഷണവും $\alpha = 0.05$ ഉം ആണ്. നിയന്ത്രണ മേഖല

_ $|t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}$.

t - പട്ടികയിൽ നിന്നും സ്വതന്ത്രതാമാനം $n - 1 = 15$ ഉം $\alpha = 0.05$ ആകുമ്പോൾ

$|t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. അതിനാൽ നിയന്ത്രണമേഖല $|t| \geq 2.132$ ആയിരിക്കും.

സാമ്പിൾ ഡാറ്റയിൽ നിന്നും നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്,

$\bar{x} = 53$ and $\sum (x - \bar{x})^2 = 150$ എന്നിവയാണ്.

അതിനാൽ $s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = 9.375$

പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില

$$t = \frac{53 - 56}{\sqrt{\frac{9.375}{15}}} = -3.79$$

ഇവിടെ $|t| = 3.79 > 2.132$, ആയതിനാൽ H_0 നെ തിരസ്കരിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. അതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന സാമ്പിൾ, മാധ്യം 56 ആയ ഒരു സമഷ്ടിയിൽ നിന്നെടുത്തതാണെന്ന് കരുതാൻ കഴിയില്ല.

പ്രവർത്തനം

നിങ്ങളുടെ സ്കൂളിലെ പ്ലസ് ടു കുട്ടികളിൽ നിന്നും വലിപ്പം 30 ആയ ഒരു ലഘു ക്രമരഹിത സാമ്പിൾ എടുക്കുക. ഈ സാമ്പിളുപയോഗിച്ച് അവർക്ക് പ്ലസ് വൺ പരീക്ഷയ്ക്ക് ഇംഗ്ലീഷിന് ലഭിച്ച സ്കോറിന്റെ ശരാശരി കാണുക. ഈ ശരാശരിയെ വലിപ്പം 20 ആയ മറ്റൊരു സാമ്പിളിന്റെ സഹായത്താൽ അംഗീകരിക്കാൻ കഴിയുമോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

1. ഒരു സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തെ കുറിച്ചുള്ള പരിശോധനയിൽ Z – പരീക്ഷണം ഉപയോഗിക്കേണ്ടിവരുന്ന അവസ്ഥകൾ ഏതെല്ലാമാണ്?

2. ഒരു സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യ പരിശോധനയ്ക്ക് t – പരീക്ഷണം ഉപയോഗിക്കേണ്ടതിന്റെ നിബന്ധനകൾ എന്തെല്ലാമാണ്?

3. ഒരു കമ്പനിയിൽ ഒന്നാംതരം തേയിലയെ 500 ഗ്രാം വീതം ജാറുകളിലാക്കുന്നു. ജാറിൽ 500 ഗ്രാം തേയില ഉണ്ടായിരിക്കുന്നിടത്തോളം അവരുടെ നിറയ്ക്കൽ പ്രക്രിയ നിയന്ത്രണവിധേയമായിരിക്കുമെന്നാണ് കമ്പനിയുടെ കാഴ്ചപ്പാട്. ജാറുകളിലെ തേയിലയുടെ അളവിന്റെ മാനക വ്യതിയാനം 50 ഗ്രാമാണ്. 225 ജാറുകളുടെ ഒരു സാമ്പിൾ പരിശോധനയിൽ സാമ്പിളിന്റെ മാധ്യം 510 ഗ്രാമാണെന്ന് കണ്ടെത്തി. എങ്കിൽ കമ്പനിയുടെ നിറയ്ക്കൽ പ്രക്രിയ നിയന്ത്രണാതീതമാണോയെന്ന് 5% സാർഥക തലത്തിൽ പരിശോധിക്കുക.

4. വലിപ്പം 400 ആയ ഒരു സാമ്പിളിന്റെ മാധ്യം 99 എന്ന് ലഭിച്ചു. ഈ സാമ്പിൾ, മാധ്യം 100 ഉം വ്യതിയാനം 64 ഉം ആയ ഒരു നോർമൽ വിതരണത്തിൽ നിന്നെടുത്തതാണോ എന്ന് 5% സാർഥകതലത്തിൽ പരിശോധിക്കുക.

5. തങ്ങൾ നിർമ്മിച്ച മോട്ടോർ സൈക്കിളിന്റെ ശരാശരി മൈലേജ് 60 കി.മീ./ലിറ്റർ ആണെന്ന് ഒരു നിർമാതാവ് അവകാശപ്പെടുന്നു. 16 പ്രാവശ്യത്തെ പരിശോധനയിൽ ആ മോട്ടോർ സൈക്കിളിന്റെ ശരാശരി മൈലേജ് 57 കി.മീ/ലിറ്ററും മാനക വ്യതിയാനം 2 കി.മീ/ലിറ്റർ എന്നും ലഭിച്ചു. 1% സാർഥകതലത്തിൽ നിർമാതാവിന്റെ വാദം അംഗീകരിക്കാമോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. (വിതരണം നോർമൽ ആണെന്ന് സങ്കല്പിക്കുക.)

9.7 രണ്ട് സമഷ്ടികളുടെ മാധ്യങ്ങളുടെ തുല്യതയുടെ പ്രാധാന്യ പരിശോധന (Z - പരീക്ഷണം)

രണ്ട് സമഷ്ടികളുടെ മാധ്യങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തെക്കുറിച്ചുള്ള പരിശോധനയാണ് ഇവിടെ നാം ചർച്ച ചെയ്യാൻ പോകുന്നത്. പല അവസരങ്ങളിലും രണ്ട് സമഷ്ടികളിൽ നിന്നെടുത്ത രണ്ട് സാമ്പിളുകളുടെ മാധ്യങ്ങൾ തമ്മിൽ ഒരു ഗവേഷകന് താരതമ്യം ചെയ്യേണ്ടതായി വരാറുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, ഒരു പ്രത്യേക ഉല്പന്നത്തിന്റെ തിരുവനന്തപുരം, ചെന്നൈ എന്നീ നഗരങ്ങളിലെ ജനങ്ങളുടെ ഉപഭോക്തൃ

സംതൃപ്തിയിലെ വ്യത്യാസത്തെ കുറിച്ചുള്ള ഒരു ഗവേഷകന്റെ വിശകലനം. ഇതിനുവേണ്ടി ആ ഗവേഷകൻ ഈ രണ്ട് നഗരങ്ങളിൽ നിന്നും രണ്ട് വ്യത്യസ്ത സാമ്പിളുകൾ ശേഖരിച്ച്, സാമ്പിളുകളുടെ മാധ്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ച് അവയെ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നു. ഈ സാമ്പിൾ മാധ്യങ്ങളിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്ന വിവരങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഗവേഷകൻ തന്റെ അവസാന നിഗമനങ്ങളിൽ എത്തിച്ചേരുന്നു.

μ_1 , μ_2 എന്നിവ രണ്ട് സമഷ്ടികളുടെ മാധ്യങ്ങളാണെന്ന് കരുതുക. അവയുടെ മാനക വ്യതിയാനങ്ങൾ σ_1 , σ_2 എന്നിങ്ങനെയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവ പരിശോധിക്കുന്നതിനുള്ള അസാധു പരികല്പന,

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ ആണ്.

വൈകല്പിക പരികല്പനകൾ താഴെ പറയുന്നവയിലൊരെണ്ണമായിരിക്കും.

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ (ഇരു വാൽ പരീക്ഷണം)

H_1: $\mu_1 > \mu_2$ (വലതു വാൽ പരീക്ഷണം)

H_1: $\mu_1 < \mu_2$ (ഇടതു വാൽ പരീക്ഷണം)

ഇവിടെ നാം Z പരീക്ഷണമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. Z പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ എന്നിവ രണ്ട് സമഷ്ടികളിൽ നിന്നും എടുത്ത സാമ്പിളുകളുടെ മാധ്യങ്ങളാണ്.

H_0 ശരിയായിരിക്കുന്ന സന്ദർഭത്തിൽ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില താഴെ പറയുന്നു.

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

നിർണായക മേഖലയും നിർണായക വിലയും പട്ടിക 9.2 പട്ടിക 9.3 എന്നിവയിൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നതുപോലെയാണ്.

Z പരീക്ഷണം ഉപയോഗിക്കുന്നതിന് താഴെ പറയുന്ന വ്യവസ്ഥകളുണ്ട്.

1. രണ്ട് സമഷ്ടികളിൽ നിന്നെടുക്കുന്ന സാമ്പിളുകളും ക്രമരഹിത സാമ്പിളുകളായിരിക്കണം.
2. സാമ്പിളുകൾ പരസ്പരം സ്വതന്ത്രങ്ങളാകണം.
3. സാമ്പിളുകളുടെ വലിപ്പം 30 ൽ കുറവാണെങ്കിൽ രണ്ട് സമഷ്ടികളുടെയും മാനക വ്യതിയാനത്തിന്റെ വിലയെക്കുറിച്ച് അറിവുണ്ടാവുകയും സമഷ്ടികൾ നോർമൽ വിതരണത്തിലുള്ളതാവുകയും വേണം.

രണ്ട് സാമ്പിളുകളും വലുതാവുകയും സമഷ്ടിയുടെ മാനകവ്യതിയാനങ്ങൾ അജ്ഞാതമാവുകയും ചെയ്താൽ ഈ മാനക വ്യതിയാനങ്ങൾക്ക് പകരം സാമ്പിളുകളുടെ മാനകവ്യതിയാനങ്ങളായ s_1, s_2എന്നിവയെ ഉപയോഗിക്കാം. ആ സമയത്തെ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

വിശദീകരണം: 9.7

വ്യതിയാനം 40 ആയ ഒരു നോർമൽ സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും വലിപ്പം 100 ആയ ഒരു സാമ്പിളെടുത്തു. ആ സാമ്പിളിന്റെ മാധ്യം 38.3 ആണ്. വ്യതിയാനം 30 ആയ മറ്റൊരു നോർമൽ സമഷ്ടിയിൽ നിന്നും വലിപ്പം 80 ആയ ഒരു സാമ്പിളെടുക്കുന്നു. അതിന്റെ മാധ്യം 40.1 ആണ്. രണ്ട് സമഷ്ടികളുടെയും മാധ്യങ്ങൾ തമ്മിൽ കാര്യമായ വ്യത്യാസമുണ്ടോയെന്ന് 5% സാർഥകതലത്തിൽ പരിശോധിക്കും.

പരിഹാരം

സമഷ്ടികളുടെ മാധ്യങ്ങൾ μ_1 , μ_2 എന്നിവയും മാനക വ്യതിയാനങ്ങൾ σ_1 , σ_2 എന്നിവയുമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. പരിശോധനയ്ക്കായുള്ള പരികല്പനകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

H_0: $\mu_1 = \mu_2$, H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ,

$n_1 = 100$, $\bar{x}_1 = 38.3$, $\sigma_1^2 = 40$ and

$n_2 = 80$, $\bar{x}_2 = 40.1$, $\sigma_2^2 = 30$.

പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$Z = \frac{(38.3 - 40.1)}{\sqrt{\frac{40}{100} + \frac{30}{80}}} = -2.04$$

ഇവിടെ പരിശോധനയുടെ സാർഥകതലം 0.05 ഉം പരീക്ഷണം ഇരുവാൽ പരീക്ഷണവുമാണ്. ആയതിനാൽ നിർണായക മേഖല $|Z| \geq 1.96$ ആണ്.

ഇവിടെ $|Z| = 2.04 > 1.96$ ആയതിനാൽ H_0 നെ തിരസ്ക്കരിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. അതായത് സമഷ്ടികളുടെ മാധ്യമങ്ങൾ തമ്മിൽ കാര്യമായ വ്യത്യാസമുണ്ടെന്ന് നമുക്ക് അനുമാനിക്കാം.

വിശദീകരണം: 9.8

ജനങ്ങളുടെ വാങ്ങൽ ശീലങ്ങളെക്കുറിച്ച് ഒരു സർവ്വേ നടത്തുന്നതിനായി കേരളത്തിലെ ഒരു നഗരത്തിലെ A, B എന്നീ രണ്ട് ഭാഗങ്ങളിലെ വിപണികൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. വിപണി A യിൽ നിന്നും 400 സ്ത്രീ ഉപഭോക്താക്കളെ തെരഞ്ഞെടുത്തു. ഭക്ഷണത്തിന് വേണ്ടി അവർ ഒരാഴ്ച ചെലവാക്കുന്ന തുകയുടെ മാധ്യം 750 രൂപയും മാനകവ്യതിയാനം 40 രൂപയെന്നും കണ്ടെത്തി. വിപണി B യിൽ നിന്നും തെരഞ്ഞെടുത്ത 500 സ്ത്രീ ഉപഭോക്താക്കളെ സംബന്ധിച്ച് മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച തുകകൾ യഥാക്രമം 660 രൂപയും 55 രൂപയുമാണ്. ഇവരെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന രണ്ട് സമഷ്ടികളുടെയും ഒരാഴ്ചയിലെ ഭക്ഷണ ചെലവിന്റെ മാധ്യങ്ങൾ തുല്യമാണോയെന്ന് 1% സാർഥകതലത്തിൽ പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

μ_1 , μ_2 എന്നിവ സമഷ്ടികളുടെ മാധ്യങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. പരിശോധന പരികല്പനകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

$H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ,

$n_1 = 400,\ \bar{x}_1 = 750,\ s_1 = 40$ and

$n_2 = 500,\ \bar{x}_2 = 660,\ s_2 = 55.$

ഇവിടെ സാമ്പിളുകളുടെ വലിപ്പം വലുതും സമഷ്ടികളുടെ മാനക വ്യതിയാനങ്ങൾ അജ്ഞാതവും സാമ്പിളുകളുടെ മാനകവ്യതിയാനങ്ങൾ അറിയുകയും ചെയ്യാം. അതി

നാൽ നമുക്ക് ചുവടെ പറയുന്ന പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം ഉപയോഗിക്കാം.

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$Z = \frac{(750 - 660)}{\sqrt{\frac{40^2}{400} + \frac{55^2}{500}}} = 28.39$$

പരീക്ഷണം രണ്ടറ്റ പരീക്ഷണവും സാർഥകതലം $\alpha = 0.01$ ഉം ആയതിനാൽ നിർണായക മേഖല, $|Z| \geq 2.58$ ആയിരിക്കും. ഇവിടെ $|Z| = 28.39 > 2.58$ ആയതിനാൽ H_0 നെ തിരസ്കരിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. അതായത് രണ്ട് വിപണിയിലേയും ഉപഭോക്താക്കളുടെ വാങ്ങൽ ശീലങ്ങൾ തമ്മിൽ കൃത്യമായ വ്യത്യാസമുണ്ടെന്ന് അനുമാനിക്കാം.

വിശദീകരണം: 9.9

100 സ്കൗട്ടുകൾക്കും 144 ഗൈഡുകൾക്കും ഒരേ പരീക്ഷ നടത്തുന്നു. സ്കൗട്ടുകളുടെ സ്കോറിന്റെ മാധ്യം 27.53 ഉം ഗൈഡുകളുടേത് 26.81 ഉം ആണ്. രണ്ട് സമഷ്ടികളുടെയും മാനക വ്യതിയാനങ്ങൾ യഥാക്രമം 3.48 ഉം 2.52 ഉം ആണ്. സ്കൗട്ടുകളുടെ പ്രകടനം ഗൈഡുകളെക്കാൾ മെച്ചമാണോയെന്ന് 5% സാർഥകതലത്തിൽ പരിശോധിക്കുക. സ്കോറുകൾ നോർമൽ വിതരണത്തിലാണെന്ന് സങ്കല്പിക്കുക.

പരിഹാരം

സ്കൗട്ടുകളുടെ സമഷ്ടിയുടെയും ഗൈഡുകളുടെ സമഷ്ടിയുടെയും സ്കോറുകളുടെ മാധ്യങ്ങൾ μ_1, μ_2 എന്നിവയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. പരിശോധന പരികല്പനകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ and H_1: $\mu_1 > \mu_2$

തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ,

$n_1 = 100,\ \bar{x}_1 = 27.53,\ \sigma_1 = 3.48$

$n_2 = 144,\ \bar{x}_2 = 26.81,\ \sigma_2 = 2.52.$

സമഷ്ടി നോർമലാണ് കുടാതെ മാനക വ്യതിയാനങ്ങൾ അറിയുകയും ചെയ്യാം. അതിനാൽ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം,

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$Z = \frac{(27.53 - 26.81)}{\sqrt{\frac{(3.48)^2}{100} + \frac{(2.52)^2}{144}}} = 1.77$$

ഇവിടെ പരീക്ഷണം ഒരറ്റവാൽ പരീക്ഷണവും സാർഥകതലം 0.05 ഉം ആണ്. നിർണായക മേഖല, $|Z| > 1.645$ ആണ്.

ഇവിടെ $|Z| = 1.77 > 1.645$ ആയതിനാൽ H_0 നെ തിരസ്ക്കരിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. അതായത് സ്കൗട്ടുകളുടെ പ്രകടനം ഗൈഡുകളുടെ പ്രകടനത്തേക്കാൾ മെച്ചമാണെന്ന് നമുക്ക് അനുമാനിക്കാം.

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

1. രണ്ട് സമഷ്ടികളുടെ മാധ്യങ്ങളുടെ തുല്യത പരിശോധിക്കാനുപയോഗിക്കുന്ന പരീക്ഷ സാംഖ്യജം ഏത്?

2 ന്യൂഡൽഹി, മുംബൈ എന്നിവിടങ്ങളിലെ ശരാശരി ഹോട്ടൽ മുറി വാടക യഥാക്രമം 1015 രൂപ, 1020 രൂപ എന്നിങ്ങനെയാണെന്ന് സർവെയിൽ കൂടി കണ്ടെത്തി. 50 വീതമുള്ള സാമ്പിളുകളുടെ സഹായത്താലാണ് ഈ വിവരങ്ങൾ ലഭിച്ചത്. രണ്ട് സമഷ്ടികളുടെയും മാനക വ്യതിയാനങ്ങൾ യഥാക്രമം 15.62 രൂപയും 14.83 രൂപയുമാണ്. രണ്ട് പ്രദേശത്തെയും ഹോട്ടൽ വാടകകൾ തമ്മിൽ കാര്യമായ വ്യത്യാസമുണ്ടോയെന്ന് $\alpha = 0.05$ തലത്തിൽ പരിശോധിക്കുക.

9.8 കൈ-വർഗ പരീക്ഷണം - ഗുണാത്മക ചരങ്ങളുടെ അനാശ്രിതത്വത്തെക്കുറിച്ചുള്ള പരിശോധന (Chi – square test for independence of attributes)

ഡാറ്റയെ ആവൃത്തികളുടെ പട്ടികാരീതിയുപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്ന വേളയിലെ പലതരം പരികല്പനകൾ പരിശോധിക്കുന്നതിന് കൈ-വർഗ പരീക്ഷണം ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. അതിലൊരെണ്ണമാണ് ഗുണാത്മക ചരങ്ങളുടെ അനാശ്രിതത്വത്തെ (സ്വതന്ത്രാവസ്ഥയെ) കുറിച്ചുള്ള പരിശോധന.

രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണെന്നും അല്ലെങ്കിൽ അവ സ്വതന്ത്ര ചരങ്ങളാണോയെന്നുമൊക്കെ ഒരു ഗവേഷകന് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട പല സന്ദർഭങ്ങളും ഉണ്ടാ

കാറുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, ഒരു മോട്ടോർ കമ്പനിക്ക് മോട്ടോർ സൈക്കിളിന്റെ വില്പനയും ഉപഭോക്താവിന്റെ വയസ്സും തമ്മിൽ ബന്ധമുണ്ടോ ഇല്ലയോ എന്ന് പഠിക്കാൻ താല്പര്യമുണ്ടാകും. മറ്റൊരുദാഹരണം, കുട്ടികളുടെ ഭാഷാപാടവവും ഗണിതപാടവവും സ്വതന്ത്രങ്ങളാണോ അല്ലയോ എന്ന് ഒരു വിദ്യാഭ്യാസ വിദഗ്ദ്ധന് പഠിക്കാൻ താല്പര്യമുണ്ടാകാം.

ഒരു ഡാറ്റയിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെ രണ്ട് ചരങ്ങളെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തി ഒരു പട്ടികയുടെ രൂപത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിനെ സംഭവപട്ടിക (contingency table) എന്ന് പറയുന്നു.

X , Y എന്നീ ചരങ്ങളുടെ ആവൃത്തികളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരു സംഭവ പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

ചരം X

ചരം Y	X_1	X_2	X_3	.	.	.	X_k	Row Total
Y_1	O_{11}	O_{12}	O_{13}				O_{1k}	R_1
Y_2	O_{21}	O_{22}	O_{23}				O_{2k}	R_2
Y_3	O_{31}	O_{32}	O_{33}				O_{3k}	R_3
.								.
.								.
.								.
Y_j	O_{j1}	O_{j2}	O_{j3}				O_{jk}	R_j
Column Total	C_1	C_2	C_3	.	.	.	C_k	N

പട്ടിക 9.5 സംഭവപട്ടിക (Contingency table)

ഓരോ അറയിലുമുള്ള ആവൃത്തികൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ആ അറയ്ക്ക് പൊതുവായുള്ള വരിയിലും നിരയിലുമായുള്ള പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണമാണ്. വരികളുടെ തുകകളെ $R_1, R_2, \ldots$ എന്നിങ്ങനെയും നിരകളുടെ തുകകളെ $C_1, C_2, \ldots$ എന്നിങ്ങനെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. വരികളുടെ തുകകൾ കൂട്ടിയാലോ നിരകളുടെ തുകകൾ കൂട്ടിയാലോ കിട്ടുന്നത് ആകെ ആവൃത്തിയാണ്. കൈവർഗ പരീക്ഷണം നടത്തണമെങ്കിൽ ഈ രണ്ട് ചരങ്ങളും സ്വതന്ത്രങ്ങളാണെന്ന് സങ്കല്പിച്ചുകൊണ്ടുള്ള പ്രതീക്ഷിത ആവൃത്തികൾ (expected frequency) കാണേണ്ടതിന്റെ ആവശ്യകതയുണ്ട്.

പ്രതീക്ഷിത ആവൃത്തികൾ കാണുന്ന വിധം

ij - ാമത്തെ അറയിലെ പ്രതീക്ഷിതാവൃത്തിയെ നാം E_{ij} എന്നെഴുതുന്നു.

$$E_{ij} = \frac{R_i \times C_j}{N}$$

ഇവിടെ R_i – i - ാമത്തെ വരിയുടെ തുക

C_j – j - ാമത്തെ നിരയുടെ തുക

N – ആകെ ആവൃത്തി

$$\text{പ്രതീക്ഷിതാവൃത്തി} = \frac{\text{വരിയുടെ തുക} \times \text{നിരയുടെ തുക}}{\text{ആകെ ആവൃത്തി}}$$

ഉദാഹരണമായി,

$$E_{11} = \frac{R_1 \times C_1}{N},\ E_{12} = \frac{R_1 \times C_2}{N},\ E_{23} = \frac{R_2 \times C_3}{N}$$, തുടങ്ങിയവ

ഇനി നമുക്ക് യഥാർത്ഥ ആവൃത്തി (observed frequency) യോടൊപ്പം പ്രതീക്ഷിത ആവൃത്തികൂടി ഉൾപ്പെടുത്തി താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയുണ്ടാക്കാം.

ചരം X

ചരം Y

	X_1	X_2	X_3	.	.	.	X_k	Row Total
Y_1	$O_{11}(E_{11})$	$O_{12}(E_{12})$	$O_{13}(E_{13})$				$O_{1k}(E_{1k})$	R_1
Y_2	$O_{21}(E_{21})$	$O_{22}(E_{22})$	$O_{23}(E_{23})$				$O_{2k}(E_{2k})$	R_2
Y_3	$O_{31}(E_{31})$	$O_{32}(E_{32})$	$O_{33}(E_{33})$				$O_{3k}(E_{3k})$	R_3
.								.
.								.
.								.
Y_j	$O_{j1}(E_{j1})$	$O_{j2}(E_{j2})$	$O_{j3}(E_{j3})$				$O_{jk}(E_{jk})$	R_j
Column Total	C_1	C_2	C_3	.	.	.	C_k	N

പട്ടിക 9.6 പ്രതീക്ഷിതാവൃത്തിയോടെയുള്ള സംഭവപട്ടിക

പ്രതീക്ഷിതാവൃത്തി കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി കൂടുതൽ മനസ്സിലാക്കാൻ നമുക്കൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം.

ആശുപത്രിയും രോഗികളിലുണ്ടാകുന്ന അണുബാധയുടെ സ്വഭാവും തമ്മിൽ ബന്ധമുണ്ടോയെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഒരു ഗവേഷകൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. അതിനായി രണ്ട് ആശുപത്രികളിൽ നിന്നും എടുത്ത 400 രോഗികളുടെ ഒരു സാമ്പിൾ പരിശോധിച്ച ഫലം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

ആശുപത്രി	അണുബാധയുണ്ടായ രോഗികളുടെ എണ്ണം		
	ശസ്ത്രക്രിയ വഴി	ന്യുമോണിയ	രക്തചംക്രമണം വഴി
A	100	80	20
B	50	120	30

ഇത് 2 വരികളും 3 നിരകളും ഉള്ള ഒരു സംഭവ പട്ടിക എന്ന് പറയുന്നു.

ഇവിടുത്തെ യഥാർത്ഥ ആവൃത്തികൾ, $O_{11}=100$, $O_{12}=80$, $O_{13}=20$, $O_{21}=50$, $O_{22}=120$ and $O_{23}=30$ എന്നിവയാണ്. പ്രതീക്ഷിതാവൃത്തികൾ കണ്ടെത്തണമെങ്കിൽ നമുക്ക് വരികളുടെ തുകയും നിരകളുടെ തുകകളും ആകെ ആവൃത്തിയും കാണണം. അവയെ പട്ടികയിൽ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

B i þ {Xn	അണുബാധയുണ്ടായ രോഗികളുടെ എണ്ണം			Xp
	i k {X {l rb h gn	\ yq anW rb	cà Nw(l aW w h gn	
A	100	80	20	**200 (R_1)**
B	50	120	30	**200 (R_2)**
തുക	**150 (C_1)**	**200 (C_2)**	**50 (C_3)**	**400 (N)**

പ്രതീക്ഷിത ആവൃത്തികൾ കാണുന്ന വിധം

$$E_{11}=\frac{R_1\times C_1}{N}=\frac{200\times 150}{400}=75$$

$$E_{12}=\frac{R_1\times C_2}{N}=\frac{200\times 200}{400}=100$$

$$E_{13}=\frac{R_1\times C_3}{N}=\frac{200\times 50}{400}=25$$

$$E_{21}=\frac{R_2\times C_1}{N}=\frac{200\times 150}{400}=75$$

$$E_{22}=\frac{R_2\times C_2}{N}=\frac{200\times 200}{400}=100$$

$$E_{23}=\frac{R_2\times C_3}{N}=\frac{200\times 50}{400}=25$$

പ്രതീക്ഷിതാവൃത്തിയോടെയുള്ള സംഭവ പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

ആശുപത്രി	അണുബാധയുണ്ടായ രോഗികളുടെ എണ്ണം			തുക
	ശസ്ത്രക്രിയ വഴി	ന്യൂമോണിയ	രക്തചംക്രമണം വഴി	
A	100 (75)	80 (100)	20 (25)	**200**
B	50 (75)	120 (100)	30 (25)	**200**
തുക	**150**	**200**	**50**	**400**

കൈവർഗ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം

ഗുണാത്മക ചരങ്ങളുടെ അനാശ്രിതത്വം പരിശോധിക്കുന്നതിനുപയോഗിക്കുന്ന കൈവർഗ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജമാണ്.

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

ഈ സാംഖ്യജം ഒരു കൈവർഗ വിതരണത്തിലുള്ളതാണ്. അതിന്റെ സ്വതന്ത്രതാമാനം (വരികളുടെ എണ്ണം -1) $\times$ (നിരകളുടെ എണ്ണം -1) എന്നതാണ്. ഓരോ വരിയിലും നിരയിലും ഉള്ള പ്രതീക്ഷിത വിലകളിൽ ഒരെണ്ണമൊഴികെ മറ്റെല്ലാം സ്വതന്ത്രമായി വില സ്വീകരിക്കാൻ കഴിവുള്ളവയായതിനാലാണ് സ്വതന്ത്രതാമാനം. (വരികളുടെ എണ്ണം -1) $\times$ (നിരകളുടെ എണ്ണം -1) എന്നാകുന്നത്. മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച ഉദാഹരണത്തിൽ സ്വതന്ത്രതാമാനം $(2-1) \times (3-1) = 2$ ആണ്. കാരണം ഇവിടെ 2 വരികളും 3 നിരകളുമുണ്ട്. കൂടാതെ കൈവർഗ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം,

$$\chi^2 = \frac{(100-75)^2}{75} + \frac{(80-100)^2}{100} + \ldots + \frac{(30-25)^2}{25} = 26.67$$

നിർണായകമേഖല

സ്വതന്ത്രത പരിശോധിക്കാനുപയോഗിക്കുന്ന കൈവർഗ പരീക്ഷണത്തിലെ നിർണായക മേഖല ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

$$\chi^2 \geq \chi_\alpha^2$$

ഇവിടെ χ_α^2 എന്നത് P $(\chi^2 \geq \chi_\alpha^2)$ $=$ α ആകത്തക്കവിധം അനുയോജ്യമായ സ്വതന്ത്രതാമാനത്തിനനുസരിച്ച് കൈവർഗ പട്ടികയിൽ നിന്നും കണ്ടെത്തുന്ന വിലയാണ്. α എന്നത് സാർഥക തലവുമാണ്. അതായത് χ^2 ന്റെ വില പട്ടികയിൽ

നിന്നെടുത്ത വിലയായ χ_{α}^{2} യെക്കാൾ വലുതാകുകയാണെങ്കിൽ സ്വതന്ത്രതാ പരിശോധന തള്ളിക്കളയുന്നു.

പരിശോധനാ ഘട്ടങ്ങളെ താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ വിവരിക്കാം.

ഘട്ടം 1: പരികല്പനകൾ രൂപപ്പെടുത്തുന്നു.

ഗുണാത്മക ചരങ്ങളുടെ സ്വതന്ത്രതാവസ്ഥ പരിശോധിക്കുമ്പോഴുള്ള പരികല്പനകളെ താഴെ പറയും പ്രകാരം സൂചിപ്പിക്കാം.

H_0: ചരങ്ങൾ സ്വതന്ത്രരാണ്

H_1: ചരങ്ങൾ സ്വതന്ത്രരല്ല.

ഘട്ടം 2: പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു.

ഇവിടുത്തെ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം,

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} \text{ ആണ്.}$$

ഇതിന്റെ സ്വതന്ത്രതാമാനം $(R-1)\times(C-1)$ ആണ്. R എന്നത് വരികളുടെ എണ്ണവും C എന്നത് നിരകളുടെ എണ്ണവുമാണ്.

ഘട്ടം 3: നിർണായക മേഖലയും സ്ഥാർഥകതലവും നിർണയിക്കുന്നു.

സാർഥകതലം സാധാരണയായി $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.01$, എന്നിങ്ങനെയായിരിക്കും.

നിർണായകമേഖല $\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^{2}$ ആണ്.

ഘട്ടം 4: പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില കാണുന്നു.

പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില കാണുന്നതിനു മുമ്പ് സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള രീതിയിൽ പ്രതീക്ഷിതാവൃത്തി കണക്കാക്കണം. പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം താഴെപ്പറയുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് കാണുന്നു.

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

ഘട്ടം 5: തീരുമാനമെടുക്കുന്നു.

പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില പട്ടികയിൽ നിന്നും കണ്ടുപിടിച്ച വിലയെക്കാൾ കൂടുതലായാൽ H_0 നെ തിരസ്കരിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു.

അതായത്, $\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^{2}$ ആയാൽ H_0 നെ തിരസ്കരിക്കുന്നു.

വിശദീകരണം: 9.10

ഡ്രൈവിംഗ് പരീക്ഷയിൽ ആദ്യമായി പങ്കെടുത്ത 100 പേരുടെ പരീക്ഷാഫലം ഒരു ഡ്രൈവിംഗ് സ്കൂളധികൃതർ വിലയിരുത്തുന്നു. 40 പുരുഷന്മാരിൽ 28 പേരും 60 സ്ത്രീകളിൽ 34 പേരും പരീക്ഷ ജയിച്ചതായി അവർ കണ്ടെത്തി. ഈ ഫലത്തിൽ നിന്നും 5% സാർഥകതലത്തിൽ പരീക്ഷാർത്ഥികളുടെ ലിംഗഭേദവും ആദ്യത്തെ തവണ പരീക്ഷ ജയിക്കുവാനുള്ള കഴിവും തമ്മിൽ ബന്ധമുണ്ടെന്ന് അനുമാനിക്കാൻ കഴിയുമോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

ചോദ്യത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങളെ താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ ക്രോഡീകരിക്കാം.

ലിംഗം	പരീക്ഷാഫലം		ആകെ
	ജയം	തോൽവി	
പുരുഷൻ	28	12	40
സ്ത്രീ	34	26	60
ആകെ	62	38	100

ഇതൊരു 2 x 2 സംഭവ പട്ടികയാണ്.

പരിശോധനയിലെ പരികല്പനകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

H_0: ലിംഗവും ആദ്യതവണയിലെ പരീക്ഷാവിജയവും സ്വതന്ത്രങ്ങളാണ്.

H_1: ലിംഗവും ആദ്യതവണയിലെ പരീക്ഷാവിജയവും സ്വതന്ത്രങ്ങളല്ല.

ഈ പരികല്പന പരിശോധനയിൽ ചുവടെ കൊടുക്കുന്ന കൈവർഗ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

ഇത് $(C - 1)(R - 1)$ എണ്ണ സ്വതന്ത്ര്യ മാനത്തിലുള്ള കൈവർഗ വിതരണത്തിലാണ്.

ഇവിടെ $R = 2$, $C = 2$ ആയതിനാൽ സ്വതന്ത്രതാമാനം $1 \times 1 = 1$ ആയിരിക്കും.

നിർണായക മേഖല $\chi^2 \geq \chi_\alpha^2$

സാർഥകതലം $\alpha = 0.05$ ഉം സ്വതന്ത്രതാമാനം 1 ഉം ആകുമ്പോൾ പട്ടികയിൽ നിന്നും

$\chi^2 \geq 3.84$ എന്ന് കിട്ടും. അതിനാൽ നിർണായകമേഖല, $\chi^2 \geq 3.84$ ആകുന്നു.

χ^2 ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനായി പ്രതീക്ഷിതാവൃത്തികളെ താഴെ പറയുന്ന വിധം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$E_{11} = \frac{40 \times 62}{100} = 24.8, \quad E_{12} = \frac{40 \times 38}{100} = 15.2,$$

$$E_{21} = \frac{60 \times 62}{100} = 37.2, \quad E_{22} = \frac{60 \times 38}{100} = 22.8$$

യഥാർഥ ആവൃത്തിയും പ്രതീക്ഷിതാവൃത്തിയും ചേർന്ന സംഭവപട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

ലിംഗം	പരീക്ഷാഫലം		ആകെ
	ജയം	തോൽവി	
പുരുഷൻ	28 (24.8)	12 (15.2)	40
സ്ത്രീ	34 (37.2)	26 (22.8)	60
ആകെ	**62**	**38**	**100**

പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില,

$$\chi^2 = \frac{(28-24.8)^2}{24.8} + \frac{(12-15.2)^2}{15.2} + \frac{(34-37.2)^2}{37.2} + \frac{(26-22.8)^2}{22.8} = 1.81$$

ഇവിടെ $\chi^2 = 1.81 < 3.84$, ആയതിനാൽ H_0 നെ തിരസ്കരിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു.

അതായത് ലിംഗഭേദവും പരീക്ഷയിൽ ആദ്യതവണ തന്നെ ജയിക്കാനുള്ള കഴിവും സ്വതന്ത്രചരങ്ങളല്ല. അവ തമ്മിൽ ബന്ധമുണ്ട് എന്ന് അനുമാനിക്കാം.

വിശദീകരണം: 9.11

150 പേരുടെ ഒരു സാമ്പിളിനെ അവരുടെ കണ്ണിന്റെ നിറവും തലമുടിയുടെ നിറവും അനുസരിച്ച് തരംതിരിച്ചിരിക്കുന്നതാണ് ചുവടെയുള്ള പട്ടിക. ഈ രണ്ട് ചരങ്ങളും തമ്മിൽ ബന്ധമുണ്ടോയെന്ന് 5% സാർഥകതലത്തിൽ പരിശോധിക്കുക.

കണ്ണിന്റെ നിറം	മുടിയുടെ നിറം			ആകെ
	വെൺ നിറം	തവിട്ട് നിറം	കറുത്ത നിറം	
നീല നിറം	15	5	20	40
ചാര നിറം	20	10	20	50
തവിട്ട് നിറം	25	15	20	60
ആകെ	60	30	60	150

പരിഹാരം

പരിശോധന പരികല്പനകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

H_0: കണ്ണിന്റെ നിറവും മുടിയുടെ നിറവും സ്വതന്ത്ര ചരങ്ങളാണ്.

H_1: കണ്ണിന്റെ നിറവും മുടിയുടെ നിറവും സ്വതന്ത്ര ചരങ്ങളല്ല.

യഥാർത്ഥ ആവൃത്തികളെ ഒരു 3 x 3 സംഭവപട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു.

ചരങ്ങളുടെ സ്വതന്ത്രത പരിശോധിക്കുന്നതിനായി നമുക്ക് താഴെ പറയുന്നു. കൈവർഗ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം ഉപയോഗിക്കാം.

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

ഇത് സ്വതന്ത്രതാമാനം $(R-1)\times(C-1)$ ആയ കൈവർഗ വിതരണത്തിലുള്ളതാണ്. ഇവിടെ C = 3 , R = 3 എന്നിവയാണ്. അതിനാൽ സ്വതന്ത്രതാമാനം 2 x 2 = 4.

സാർഥകതലം, $\alpha = 0.05$ ഉം സ്വതന്ത്രതാമാനം 4 ഉം ആകുമ്പോൾ $\chi^2 \geq 9.5$ ആയിരിക്കും.

$\therefore$ നിർണായക മേഖല $\chi^2 \geq 9.5$ ആയിരിക്കും. പ്രതീക്ഷിതാവൃത്തികളെ താഴെ പറയുംവിധം കണക്കാക്കാം.

$$E_{11} = \frac{40\times60}{150} = 16,\ E_{12} = \frac{40\times30}{150} = 8,\ E_{13} = \frac{40\times60}{150} = 16$$

$$E_{21} = \frac{50\times60}{150} = 20,\ E_{22} = \frac{50\times30}{150} = 10,\ E_{23} = \frac{50\times60}{150} = 20$$

$$E_{31} = \frac{60\times60}{150} = 24,\ E_{32} = \frac{60\times30}{150} = 12,\ E_{33} = \frac{60\times60}{150} = 24$$

യഥാർഥ ആവൃത്തിയും പ്രതീക്ഷിതാവൃത്തിയും കൂടിയുള്ള സംഭവപട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

കണ്ണിന്റെ നിറം	മുടിയുടെ നിറം			ആകെ
	വെൺ നിറം	തവിട്ട് നിറം	കറുത്ത നിറം	
നീല നിറം	15 (16)	5 (8)	20 (16)	40
ചാര നിറം	20 (20)	10 (10)	20 (20)	50
തവിട്ടു നിറം	25 (24)	15 (12)	20 (24)	60
Total	*60*	*30*	*60*	*150*

പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില,

$$\chi^2 = \frac{(15-16)^2}{16} + \frac{(5-8)^2}{8} + \ldots + \frac{(20-24)^2}{24} = 3.6$$

ഇവിടെ $\chi^2 = 3.6 < 9.5$ ആയതിനാൽ H_0 നെ സ്വീകരിക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. അതായത് കണ്ണിന്റെ നിറവും മുടിയുടെ നിറവും സ്വതന്ത്രങ്ങളായ ചരങ്ങളാണ്.

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

1. ഗുണാത്മക ചരങ്ങളുടെ സ്വതന്ത്രതാ പരിശോധനയിലെ അസാധു പരികല്പന ഏതാണ്?
2. ഒരു സംഭവപട്ടികയിലെ ഒരു അറയിലെ പ്രതീക്ഷിതാവൃത്തി കാണുന്നതെങ്ങനെയാണ്?
3. ചരങ്ങളുടെ സ്വതന്ത്രത പരിശോധനയ്ക്കുപയോഗിക്കുന്ന പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം ഏതാണ്?
4. ഗുണാത്മക ചരങ്ങളുടെ സ്വതന്ത്രതാ പരിശോധനയിലെ നിർണായകമേഖല ഏത്?
5. ഒരു കൈവർഗ പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ സ്വതന്ത്രതാമാനം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെയാണ്?
6. സ്വതന്ത്രതാ പരിശോധന പരീക്ഷണ പ്രക്രിയ വിവരിക്കുക.

നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

തീരുമാനമെടുക്കുന്നതിലെ അനിശ്ചിതത്വം തരണം ചെയ്ത് ശാസ്ത്രീയമായ തീരുമാനമെടുക്കുന്നതിന് നമ്മെ സഹായിക്കുന്ന സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ ഒരു ശാഖയാണ് സാംഖ്യകാനുമാനം (Statistical inference). സാംഖ്യകാനുമാനം നടത്തുന്നത് സമഷ്ടിയുടെ മതിപ്പിന്റെയും പരികല്പനാപരീക്ഷണങ്ങളുടെയും അടിസ്ഥാനത്തിലാണ്. സാംഖ്യകാനുമാനത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാന ഭാഗമാണ് പരികല്പനാ പരീക്ഷണം. ഒരു സമഷ്ടി

യിൽ നിന്നെടുത്ത സാമ്പിൾ മുഖേന ഒരു പരികല്പനയെ സ്വീകരിക്കാനോ തിരസ്കരിക്കാനോ തീരുമാനിക്കുന്ന മാർഗങ്ങളാണ് പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്നത്. ഒരു സമഷ്ടിയുടെ വിലയെക്കുറിച്ചോ ഒരു വിതരണത്തിന്റെ രൂപത്തെക്കുറിച്ചോ നടത്തുന്ന അനുമാനങ്ങളെ അല്ലെങ്കിൽ ഊഹങ്ങളെയാണ് പരികല്പനകളെന്ന് പറയുന്നത്. പരികല്പനാപരിശോധനയിൽ രണ്ട് തരം പരികല്പനകളുണ്ട് - അസാധു പരികല്പനയും വൈകല്പിക പരികല്പനയും. വൈകല്പിക പിരികല്പനയെ അടിസ്ഥാനമാക്കി പരീക്ഷണങ്ങളെ ഒരു വാൽ പരീക്ഷണം എന്നും രണ്ടു വാൽ പരീക്ഷണമെന്നും തിരിച്ചിരിക്കുന്നു. സമഷ്ടിയിൽ നിന്നെടുക്കുന്ന സാമ്പിളിന്റെ സഹായത്താൽ നാം പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. പരിശോധനയ്ക്കായി നാം ഒരു സാർഥകതലം നിശ്ചയിക്കുന്നു. പരീക്ഷണസാംഖ്യജത്തിന്റെ വിലകൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗങ്ങളെ രണ്ടായി തിരിച്ചിരിക്കുന്നു - തിരസ്കരണമേഖലയും സ്വീകാര്യമേഖലയും. തിരസ്കരണ മേഖലയെ നിർണായക മേഖലയെന്നറിയപ്പെടുന്നു.

ഈ അധ്യായത്തിൽ ഒരു പരീക്ഷണ പ്രക്രിയയുടെ വിവിധ ഘട്ടങ്ങളാണ് നമ്മൾ ചർച്ച ചെയ്തത്. ഒരു സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തെക്കുറിച്ചുള്ള പരീക്ഷണങ്ങളായ Z- പരീക്ഷണം, t -പരീക്ഷണം എന്നിവയും രണ്ട് സമഷ്ടികളുടെ മാധ്യങ്ങളുടെ തുല്യതാ പരിശോധനയ്ക്കായി Z – പരീക്ഷണവും ഗുണാത്മക ചരങ്ങളുടെ സ്വതന്ത്രതയെക്കുറിച്ചുള്ള പരിശോധനയെ കൈവർഗ പരീക്ഷണവുമാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ വിവരിച്ചിരിക്കുന്നത്.

ലാബ് പ്രവർത്തനം

1. രണ്ട് ഇനം തക്കാളികൾ ഓരോ ചെടിയിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന വിളയുടെ എണ്ണമാണ് ചുവടെ കൊടുക്കുന്നത്. രണ്ട് തരങ്ങളുടെയും ശരാശരി വിളവ് തുല്യമാണോയെന്ന് പരിശോധിക്കും. (സാർഥകതലം – 0.05).

   തരം A   6 8 10 12 12 14 11 6 8 9 14 13 7 8 10 12
   14 15 7 8 13 16 9 10 13 14 13 14 14 9 11

   തരം B   8 10 12 13 15 17 19 9 8 11 13 15 17 21 14 17
   16 14 14 8 9 12 15 19 12 10 13 15 16

2. വ്യതിയാനങ്ങൾ യഥാക്രമം 6.76, 7.34 ആയ രണ്ട് സമഷ്ടികളിൽ നിന്നെടുത്ത രണ്ട് സാമ്പിളുകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. സമഷ്ടികളുടെ മാധ്യം തുല്യമാണോയെന്ന് 1% സാർഥകതലത്തിൽ പരിശോധിക്കുക.

   A: 10 12 15 18 13 15 16 6 15 16 14 18 12 14 18

   B: 5 8 10 9 9 11 12 16 16 8 8 9 10 11 7

നമുക്ക് വിലയിരുത്താം

ചോദ്യങ്ങൾ 1 മുതൽ 14 വരെ ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

1. ഒരു സമഷ്ടിയുടെ പ്രാചലത്തിന്റെ വിലയെക്കുറിച്ചുള്ള അനുമാനമാണ്.

   a) പരികല്പന b) അനുമാനം c) വിശ്വാസ്യത d) സാർഥകം

2. അസാധു, വൈകല്പിക പരികല്പനകൾ എന്തിനെക്കുറിച്ചുള്ള പ്രസ്താവനകളാണ്.

   a) സാമ്പിൾ സാംഖ്യജങ്ങളെക്കുറിച്ച്

   b) സമഷ്ടിയുടെ പ്രാചലങ്ങളെക്കുറിച്ച്

   c) സാമ്പിൾ പ്രാചലങ്ങളെക്കുറിച്ച്

   d) ചില സമയത്ത് സമഷ്ടിയുടെ പ്രാചലങ്ങളെക്കുറിച്ചും ചിലസമയം സാമ്പിൾ പ്രാചലങ്ങളെക്കുറിച്ചും

3. അസാധു വൈകല്പിക പരികല്പനകൾ സാധ്യതകളെ .... ആയി ഭാഗിക്കുന്നു.

   a) കൂടിച്ചേരർന്നു നില്കുന്ന രണ്ട് ഗണങ്ങൾ

   b) രണ്ട് വിയുക്ത ഗണങ്ങൾ

   c) കൂടിച്ചേർന്നു നില്ക്കുകയോ അല്ലാതിരിക്കുകയോ ചെയ്യുന്ന രണ്ട് ഗണങ്ങൾ

   d) എല്ലാ സാധ്യതകളും ഉൾപെടുത്താൻ ആവശ്യമായ അത്രയും ഗണങ്ങൾ

4. പരികല്പനകളെക്കുറിച്ച് ശരിയായ പ്രസ്താവന ഏത്?

   a) ഒരേയൊരു പരികല്പന മാത്രമേ ശരിയാകാറുള്ളൂ.

   b) രണ്ട് പരികല്പനകളും ശരിയാണ്.

   c) രണ്ട് പരികല്പനകളും ശരിയാകാൻ സാധ്യതയുണ്ട്.

   d) രണ്ട് പരികല്പനകളും ശരിയാകാതിരിക്കാൻ സാധ്യതയുണ്ട്.

5. വൈകല്പിക പരികല്പനയാകാവുന്നത്.

   a) ഒരു വാൽ b) രണ്ടു വാൽ

   c) ഒരു വാലുമല്ല രണ്ടു വാലുമല്ല d) ഒരു വാലോ രണ്ടു വാലോ

6. ഒരു വിശകലന വിദഗ്ദ്ധൻ തെളിയിക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്ന പരികല്പനയാണ്:

   a) തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട പരികല്പന b) വൈകല്പിക പരികല്പന

   c) ഐച്ഛിക പരികല്പന d) അസാധു പരികല്പന

7. രണ്ടറ്റ പരികല്പനകൾ സൂചിപ്പിക്കാനുപയോഗിക്കുന്നത്?

a) $\neq$ b) $<$ അല്ലെങ്കിൽ $>$ c) $\leq$ അല്ലെങ്കിൽ $\geq$ d) $=$ അല്ലെങ്കിൽ $\approx$

8. തരം I പിശക് സംഭവിക്കുന്നത്?

a) തെറ്റായ അസാധു പരികല്പനയെ സ്വീകരിക്കുമ്പോൾ

b) ശരിയായ അസാധുപരികല്പനയെ തിരസ്കരിക്കുമ്പോൾ

c) സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യവും സാമ്പിളിന്റെ മാധ്യവും തുല്യമാകാതിരിക്കുമ്പോൾ

d) പരിശോധന പക്ഷപാതപരമാകുമ്പോൾ

9. ഒരു പരികല്പന പരീക്ഷണത്തിൽ തരം II പിശക് വരുന്നത്?

a) ശരിയായ അസാധു പരികല്പന തിരസ്കരിക്കപ്പെടാതിരിക്കുമ്പോൾ

b) ശരിയായ അസാധു പരികല്പന തിരസ്കരിക്കപ്പെടുമ്പോൾ

c) വൈകല്പിക പരികല്പന ശരിയായാൽ അസാധു പരികല്പനയെ തിരസ്കരിക്കാതിരുന്നാൽ

d) വൈകല്പിക പരികല്പന ശരിയായാൽ അസാധു പരികല്പനയെ തിരസ്കരിച്ചാൽ

10. α , β എന്നിവയുടെ തുക.

a) എല്ലായ്പ്പോഴും 1 ൽ കുറവായിരിക്കും

b) എല്ലായ്പ്പോഴും 0.5 ൽ കുറവായിരിക്കും

c) തരം II പിശകിന്റെ സംഭാവ്യതയായിരിക്കും. d) ഇവയൊന്നുമല്ല.

11. ഒരു സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യം 100 ആണോയെന്ന് പരിശോധിക്കണം. ഇവിടുത്തെ വൈകല്പിക പരികല്പന:

a) $\bar{x} = 100$ b) $\mu \geq 100$ c) $\mu \neq 100$ d) $\mu \leq 100$

12. കൊളസ്ട്രോളിന്റെ അളവുകളുടെ ഒരു സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യം $\mu = 200$ ഉം മാനക വ്യതിയാനം 24 ഉം ആണ്. ഇതിൽ നിന്നും വലിപ്പം 9 ആയ ഒരു സാമ്പിളെടുത്തപ്പോൾ സാമ്പിൾ മാധ്യം $\bar{x} = 180$ ആയാൽ ഇവിടുത്തെ Z –പരീക്ഷണ സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില എന്ത്?

a) - 3.75 b) - 2.50 c) -0.83 d) 2.50

13. ചരങ്ങളുടെ സ്വതന്ത്രാവസ്ഥയെ പരിശോധിക്കുന്ന ഒരു കൈവർഗ പരീക്ഷണത്തിന്റെ അസാധുപരികല്പന സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, ചരങ്ങൾ:

a) പരസ്പരാശ്രയമുള്ളതാണ് b) ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതാണ്

c) സ്വതന്ത്രമാണ് d) എല്ലായ്പ്പോഴും 0 ആണ്.

14. ഗുണാത്മകചരങ്ങളുടെ സ്വതന്ത്രതാ പരിശോധനയായ കൈവർഗ പരീക്ഷണത്തിലെ സ്വതന്ത്രതാമാനം

a) n b) $(R-1)\times(C-1)$

c) n - 1 d) ഇതൊന്നുമല്ല

15. അസാധു, വൈകല്പിക പരികല്പനകൾ നിർവചിക്കുക. ഓരോന്നിനും ഉദാഹരണം നൽകുക.

16. തരം I പിശക്, തരം II പിശകുകൾ എന്താണ്? ഇവയുടെ സംഭാവ്യതകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചിഹ്നങ്ങൾ ഏതെല്ലാമാണ്?

17. ഒരു വാൽ പരീക്ഷണവും രണ്ടു വാൽ പരീക്ഷണവും ഉപയോഗിക്കുന്നത് എപ്പോഴെല്ലാമാണ്?

18. പരികല്പന പരിശോധന പരീക്ഷണ പ്രക്രിയയുടെ ഘട്ടങ്ങൾ എഴുതുക.

19. ഒരു കോളേജിലെ അധ്യാപനത്തിന്റെയും ഫീസുകളുടെയും ശരാശരി ചെലവ് 5700/- രൂപയിൽ കൂടുതലാണെന്ന അവകാശവാദം ഒരു ഗവേഷകൻ പരിശോധിക്കുന്നു. അയാൾ 36 കുട്ടികളുടെ ഒരു സാമ്പിൾ പരിഗണിക്കുന്നു. സാമ്പിളിന്റെ ശരാശരി 5950/- രൂപായെന്ന് ലഭിക്കുന്നു. സമഷ്ടിയുടെ മാനകവ്യതിയാനം 659/- രൂപയാണ്. $\alpha = 0.05$ ആണെങ്കിൽ പ്രസ്തുത അവകാശവാദം സാധുകരിക്കാൻ തെളിവുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

20. ഒരു നഗരത്തിലെ കാറ്റിലെ ശരാശരി വേഗത 8 മൈൽ/മണിക്കൂർ ആണെന്ന് ഒരു ഏജൻസി അവകാശപ്പെടുന്നു. 32 ദിവസങ്ങളുടെ ഒരു സാമ്പിൾ പരിശോധനയിൽ ശരാശരി വേഗത 8.2 മൈൽ/മണിക്കൂർ ആണെന്ന് ലഭിച്ചു. സമഷ്ടിയുടെ മാനകവ്യതിയാനം 0.6 മൈൽ/മണിക്കൂറാണ്. ഏജൻസിയുടെ അവകാശവാദം തള്ളിക്കളയുന്നതിന് 5% സാർഥകതലത്തിൽ എന്തെങ്കിലും തെളിവുണ്ടോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

21. ഒരു നഗരത്തിലെ പ്രമേഹ രോഗികളായ സ്ത്രീകളുടെ രക്തസമ്മർദത്തിന്റെ സമഷ്ടിയുടെ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം μ ഉം മാനകവ്യതിയാനം, $\sigma = 9$ mmHg യും ആണ്. സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യം 77 mmHg ആണോ എന്നറിയുന്നത് ഡോക്ടർമാർക്ക് സഹായകരമാകും. അതിന് വേണ്ടി പ്രമേഹരോഗികളായ 10 സ്ത്രീകളെ തെരഞ്ഞെടുത്തു. അവരുടെ രക്തസമ്മർദത്തിന്റെ മാധ്യം 84 mmHg എന്ന് ലഭിച്ചു. ഈ വിവരങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഒരു രണ്ടറ്റ പരീക്ഷണം 5% സാർഥകതലത്തിൽ നടത്തുക.

22. വിദ്യാഭ്യാസ സാംഖ്യകത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഒരു വയസ്സിൽ താഴെയുള്ള ഒരു കൂട്ടം കുട്ടികളിലുള്ള പരിശോധനയിൽ അവർ ഒരാഴ്ചയിൽ ശരാശരി 30.9 മണിക്കൂർ രക്ഷിതാക്കളോടല്ല കഴിയുന്നത്. 82 കുട്ടികളുടെ ഒരു സാമ്പിൾ പരിശോധനയിൽ അവർ ഒരാഴ്ചയിൽ ശരാശരി 32.1 മണിക്കൂർ രക്ഷിതാക്കളോടൊപ്പമല്ലെന്ന് കണ്ടെത്തി. സമഷ്ടിയുടെ മാനകവ്യതിയാനം 306 മണിക്കൂറാണ്.

$\alpha = 0.01$, ആയാൽ സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യവും സാമ്പിളിന്റെ മാധ്യവും തമ്മിൽ വ്യത്യാസമുണ്ടായിരിക്കുമെന്ന് അനുമാനിക്കാൻ കഴിയുമോ?

23. ആരോഗ്യ പരിപാലന സംഘടനകളിൽ (HMO) രാജ്യത്തെ ഡോക്ടർമാർ അവരവരുടെ മേഖലകളിൽ ശരാശരി 13.5 വർഷം പ്രവർത്തന പരിചയം ഉണ്ടെന്ന് കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്. മാനകവ്യതിചലനം 7.6 വർഷമാണ്. എന്നാൽ ഡോക്ടർമാരുടെ പ്രവർത്തന പരിചയം ദേശീയ ശരാശരിയെക്കാൾ കുറവാണോയെന്ന് ഒരു HMO യുടെ ഡയറക്ടർ പരിശോധിക്കുന്നു. അതിനായി HMO കളിൽ നിന്നും 150 ഡോക്ടർമാരുടെ ഒരു സാമ്പിൾ എടുത്ത് പരിശോധിച്ചു. പരിശോധനയിൽ അവരുടെ ശരാശരി പ്രവർത്തി പരിചയം 10.9 വർഷം മാത്രമാണെന്നാണ് ലഭിച്ചത്.

   a. ഡോക്ടർമാർക്ക് ദേശീയ ശരാശരിയെക്കാൾ കുറച്ച് പ്രവർത്തി പരിചയമേയുള്ളൂവെന്ന് പരിശോധനയുടെ അസാധു, വൈകല്പിക പരികല്പനകൾ എഴുതുക.

   b. $\alpha = 0.01$ ആകുമ്പോൾ പരിശോധന നടത്തുക.

24. ഒരു നോർമൽ വിതരണത്തിൽ നിന്നും തെരഞ്ഞെടുത്ത 10 പേരുടെ ഉയരം ഇഞ്ചിൽ 63, 63, 66, 67, 68, 69, 70, 70, 71, 71 എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഇതിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമഷ്ടിയുടെ ശരാശരി ഉയരം 66 ഇഞ്ച് ആണോയെന്ന് പരിശോധിക്കൂ.

25. ഒരു ആശുപത്രിയിൽ ഒരാഴ്ചയുണ്ടാകുന്ന ശരാശരി അണുബാധ 16.3 എന്ന് ഒരു ആരോഗ്യപരിശോധനകൾ അവകാശപ്പെടുന്നു. 10 ആഴ്ചകളിലെ അണുബാധ പരിശോധിച്ചതിൽ ശരാശരി 17.7 എന്ന് ലഭിച്ചു. സാമ്പിൾ മാനകവ്യതിയാനം 1.8 ആണ്. 5% സാർഥകതലത്തിൽ പരിശോധകന്റെ അവകാശവാദം അംഗീകരിക്കാൻ കഴിയുമോയെന്ന് പരിശോധിക്കൂ.

26. 10 വൈദ്യുത ബൾബുകളുടെ ജീവിതദൈർഘ്യം പരിശോധിച്ചപ്പോൾ മാധ്യം 1190 മണിക്കൂറും മാനകവ്യതിയാനം 10 മണിക്കൂറെന്നും ലഭിച്ചു. ഈ വിവരത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഇത്തരം ബൾബുകളുടെ ശരാശരി ജീവിതദൈർഖ്യം 1200 മണിക്കൂറായ ഒരു നോർമൽ വിതരണത്തിലാണോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

27. ഓക്സിജൻ ആഗിരണം ചെയ്യുന്നതിന്റെ അളവ് മുതിർന്നവരെക്കാൾ കൂടുതൽ കാൽനടക്കാരിലായിരിക്കുമെന്ന് ഒരു ഡോക്ടർ അവകാശപ്പെടുന്നു. 15 കാൽനടക്കാരുടെ സാമ്പിൾ പരിശോധിച്ചതിൽ അവരുടെ ഓക്സിജൻ ആഗിരണം ചെയ്യുന്നതിന്റെ മാധ്യം 40.6 മില്ലിലിറ്റർ/കിലോഗ്രാമും (ml/kg) മാനക വ്യതിയാനം 6 ml/kg എന്നും ലഭിച്ചു. മുതിർന്നവരുടെയെല്ലാം ശരാശരി ഓക്സിജൻ ആഗിരണത്തിന്റെ അളവ് 36.7 ml/kg ആണ്. $\alpha = 0.05$ ആകുമ്പോൾ ഡോക്ടറുടെ അവകാശവാദം അംഗീകരിക്കാൻ കഴിയുമോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

28. ഒരു വലിയ നഗരത്തിലെ 30 ഉം അതിൽ കൂടുതലും നിലകളുള്ള കെട്ടിടങ്ങളുടെ ശരാശരി ഉയരം 700 അടി ആണെന്നാണ് ഒരു ഗവേഷകൻ അനുമാനിച്ചത്. 10 കെട്ടിടങ്ങളുടെ ഒരു സാമ്പിൾ തെരഞ്ഞെടുത്തു. അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. 5% സാർഥക തലത്തിൽ ഗവേഷകന്റെ അവകാശവാദം തള്ളികളയാമോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

485 511 841 725 615 520 535 635 616 582

29. സെൽഫോൺ വിളികളുടെ ശരാശരി സമയം 2.27 മിനിട്ടാണ്. 20 ഫോൺ വിളികളുടെ സാമ്പിൾ പരിശോധിച്ചപ്പോൾ ശരാശരി 2.98 മിനിട്ടെന്നും മാനക വ്യതിയാനം 0.98 മിനിട്ടെന്നും ലഭിച്ചു. $\alpha = 0.05$ ആകുമ്പോൾ സാമ്പിളിന്റെ മാധ്യം സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിൽ നിന്നും വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുമോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

30. ഒരു സർവ്വേയിൽ നിന്നും മനസ്സിലാക്കിയത്, ന്യൂ ഡെൽഹിയിലെ ഹോട്ടൽ മുറികളുടെ ശരാശരി വാടക 5380/- രൂപയും മുംബൈയിലേത് 4840 രൂപയുമാണെന്നാണ്. രണ്ടിടത്തെയും 50 ഹോട്ടലുകൾ വീതം സർവ്വെയിൽ പങ്കെടുപ്പിച്ചുവെന്ന് കരുതുക. രണ്ട് സമഷ്ടിയുടെയും മാനക വ്യതിയാനങ്ങൾ യഥാക്രമം 312/- രൂപയും 288/- രൂപയുമാണ്. $\alpha = 0.05$ ആയാൽ രണ്ടിടത്തെയും മുറി വാടകകൾ തമ്മിൽ കാര്യമായ വ്യത്യാസമുണ്ടോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

31. ജനങ്ങളുടെ വാങ്ങൽ ശീലങ്ങളെക്കുറിച്ച് ഒരു സർവ്വേ നടത്തുന്നതിനായി കേരളത്തിലെ ഒരു നഗരത്തിലെ A, B എന്നീ രണ്ട് വിപണികൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. വിപണി A യിൽ നിന്നും 400 സ്ത്രീ ഉപഭോക്താക്കളെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. അവർ ഭക്ഷണത്തിനുവേണ്ടി ഒരാഴ്ച ചെലവാക്കിയ തുകയുടെ മാധ്യം 750 രൂപയും മാനകവ്യതിയാനം 40 രൂപയുമാണ്. വിപണി B യിൽ നിന്നും തെരഞ്ഞെടുത്ത 500 സ്ത്രീ ഉപഭോക്താക്കളുടെ മാധ്യം 660 രൂപയും മാനകവ്യതിയാനം 55 രൂപയുമാണ്. രണ്ട് സമഷ്ടികളുടെയും മാധ്യങ്ങൾ തുല്യമാണോയെന്ന് 1% സാർഥകതലത്തിൽ പരിശോധിക്കുക.

32. ചെറു ആശുപത്രി വാസങ്ങളുടെ ശരാശരി പുരുഷന്മാർക്ക് സ്ത്രീകളുടേതിനേക്കാൾ കൂടുതലാണ്. അടുത്ത കാലത്തെടുത്ത സാമ്പിളുകളിൽ നിന്നും ലഭിച്ച വിവരങ്ങൾ ചുവടെ ചേർക്കുന്നു. $\alpha = 0.01$ ആകുമ്പോൾ പുരുഷന്മാരുടെ ആശുപത്രിവാസം സ്ത്രീകളുടേതിനേക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കുമെന്ന് അനുമാനിക്കാൻ കഴിയുമോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

	പുരുഷൻ	സ്ത്രീ
സാമ്പിൾ വലിപ്പം	32	30
സാമ്പിൾ മാധ്യം	5.5 ദിവസം	4.2 ദിവസം
സമഷ്ടിയുടെ മാനക വ്യതിയാനം	1.2 ദിവസം	1.5 ദിവസം

33. X , Y എന്നീ കമ്പനികളിൽ നിർമിച്ച വൈദ്യുത ബൾബുകളെക്കുറിച്ചുള്ള വിവരങ്ങൾ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

	കമ്പനി X	കമ്പനി Y
ഉപയോഗിച്ച ബൾബുകളുടെ എണ്ണം	100	100
ശരാശരി ആയുസ്സ്	1300	1272
മാനക വ്യതിയാനം	82	93

രണ്ട് കമ്പനികളുടെയും ബൾബുകളുടെ ആയുസ്സുകൾ തമ്മിൽ കാര്യമായ വ്യത്യാസമുണ്ടോയെന്ന് 1% സാർഥകതലത്തിൽ പരിശോധിക്കുക.

34. ഇന്ത്യയിലും US ലും ഉള്ള കോളേജ് കുട്ടികളുടെ ഇന്റർനെറ്റ് ഉപയോഗം കുറച്ച് ഗവേഷകർ പരിശോധിക്കുന്നു. ഇന്റർനെറ്റ് ഉപയോഗം രണ്ട് വിഭാഗങ്ങളായി തിരിച്ചു - വ്യക്തിഗത ഉപയോഗവും പഠനകോഴ്സുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഉപയോഗവും. US ലേയും ഇന്ത്യയിലേയും ശരാശരി ഉപയോഗം താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ ലഭ്യമായി.

	കോഴ്സുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഉപയോഗം (മണിക്കൂറിൽ)	വ്യക്തിഗത ഉപയോഗം (മണിക്കൂറിൽ)
U.S. ലെ കുട്ടികൾ	$\bar{x} = 1.76$	$\bar{x} = 2.08$
n = 149	S = 1.52	S = 1.91
ഇന്ത്യയിലെ കുട്ടികൾ	$\bar{x} = 0.73$	$\bar{x} = 0.87$
n = 306	S = 0.79	S = 0.78

a) US കുട്ടികൾ പഠനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് ഇന്ത്യൻ കുട്ടികളെക്കാൾ കൂടുതൽ ഇന്റർനെറ്റ് ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കും. സാർഥകതലം 0.05.

b) വ്യക്തിഗത ഇന്റർനെറ്റുപയോഗത്തിൽ ഇന്ത്യൻ കുട്ടികളും US കുട്ടികളും തമ്മിൽ ബന്ധമുണ്ടോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക. സാർഥകതലം $\alpha = 0.01$

35. ഒരു കോളേജിലെ 1000 പെൺകുട്ടികളെ അവരുടെ I.Q വിന്റെയും അവരുടെ വീട്ടിലെ സാമ്പത്തിക സാഹചര്യങ്ങളുടേയും അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഗ്രേഡ് തിരിക്കുന്നു. സാമ്പത്തികാവസ്ഥയും I.Q വും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

സാമ്പത്തികാവസ്ഥ	I. Q		
	ഉയർന്നത്	താഴ്ന്നത്	ആകെ
സമ്പന്നർ	100	300	400
ദരിദ്രർ	350	250	600
ആകെ	450	550	1000

(സ്വതന്ത്രതാമാനം 1 , α = 0.05, χ_{α}^2 = 3.84)

36. ഒരു വ്യവസായശാലയിൽ ജോലി ചെയ്യുന്ന 200 ജോലിക്കാരെ അവരുടെ പ്രകടനവും അവർക്ക് ലഭിച്ചിരിക്കുന്ന പരിശീലനത്തിന്റെയും അടിസ്ഥാനത്തിൽ തരംതിരിച്ചിരിക്കുന്നു. ഡാറ്റയെ ചുവടെ പട്ടികയിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. പ്രകടനവും പരിശീലനവും തമ്മിൽ ബന്ധമുണ്ടോയെന്ന് χ_{α}^2 പരീക്ഷണം ഉപയോഗിച്ച് 5% സാർഥകതലത്തിൽ പരിശോധിക്കുക.

പരിശീലനം	പ്രകടനം		ആകെ
	നല്ലത്	മോശം	
ലഭിച്ചവർ	100	50	150
ലഭിക്കാത്തവർ	20	30	50
ആകെ	120	80	200

37. പലതരം സംഗീതത്തോടുള്ള അഭിരുചിയും ശ്രവിക്കുന്നവരുടെ വയസ്സും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം വിശകലനം ചെയ്യുന്നതിനായി റേഡിയോ ശ്രോതാക്കളുടെ ഇടയിൽ നടത്തിയ ഒരു സർവേയുടെ ഫലം പട്ടികയിൽ ചേർത്തിരിക്കുന്നു. അഭിരുചിയും വയസ്സും തമ്മിൽ ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നുണ്ടോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

സംഗീതത്തിന്റെ തരങ്ങൾ	വയസ്സ്			ആകെ
	19 – 25	26 – 35	36 ന് മുകളിൽ	
ദേശീയസംഗീതം	80	60	9	149
വിദേശസംഗീതം	210	325	44	579
താല്പര്യമില്ലാത്തവർ	16	45	132	193
ആകെ	306	430	185	921

അധ്യായം 10

N9A1K6

വ്യതിയാന വിശകലനം

(Analysis of variance)

ഒരു സാമ്പിളിന്റെ മാധ്യത്തിന്റെ വിലയുടെ സവിശേഷത, രണ്ട് സാമ്പിളുകളുടെ മാധ്യങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ സവിശേഷത എന്നിവ എങ്ങനെ പരിശോധിക്കാമെന്നത് പരികൽപ്പന പരിശോധന എന്ന അധ്യായത്തിൽ നമ്മൾ ചർച്ച ചെയ്തുവല്ലോ. ഒരു സമഷ്ടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ വില ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യയാണോ എന്നതും രണ്ട് സമഷ്ടികളുടെ മാധ്യങ്ങളുടെ വിലകൾ തുല്യമാണോ എന്നതും ഈ രീതിയിൽ നമുക്ക് പരിശോധിക്കാൻ സാധിക്കും. എന്നാൽ രണ്ടിലധികം സമഷ്ടികൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ഘട്ടങ്ങളിൽ അവയുടെ മാധ്യങ്ങളുടെ വിലകൾ തുല്യമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കേണ്ട അവസരങ്ങൾ ഉണ്ടായേക്കാം. ഉദാഹരണത്തിന് ഒരു കമ്പനിക്ക് അവരുടെ ആറ്

സവിശേഷ പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായത്തിന്റെ പൂർത്തീകരണത്തിന് ശേഷം പഠിതാവ്:

- വ്യതിയാന വിശകലനം എന്ന ആശയം തിരിച്ചറിയുകയും വിശദീകരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.
- വിവിധതരം വ്യതിയാനങ്ങളെ വർഗ്ഗീകരിക്കുന്നു.
- വ്യതിയാനങ്ങളുടെ കാരണങ്ങളെ തിരിച്ചറിയുന്നു.
- വ്യതിയാന വിശകലന പട്ടിക നിർമ്മിക്കുന്നു.
- വ്യതിയാന വിശകലന പട്ടികയെ വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നു.

വ്യത്യസ്തങ്ങളായ ഉൽപ്പന്നങ്ങൾക്ക് വിപണിയിൽ നിലവിലുള്ള ആവശ്യകത തുല്യ മാണോ എന്നതിനെക്കുറിച്ച് പഠിക്കേണ്ടി വന്നേക്കാം. അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ഗവേഷകന് വ്യത്യസ്തമായ നാല് ബോധനോപാധികളുടെ കാര്യക്ഷമത ഒരേപോലെയാണോ എന്ന് പഠിക്കേണ്ടതുണ്ടായേക്കാം. അതുമല്ലെങ്കിൽ ഒരു കാർഷിക ഗവേഷണശാല യിൽ മൂന്ന് തരം വളങ്ങളുടെ ഉപയോഗത്തിലൂടെ ലഭിക്കുന്ന ഫലങ്ങളുടെ അളവിൽ പറയത്തക്ക വ്യത്യാസം ഉണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കേണ്ടി വന്നേക്കാം. ചിലപ്പോൾ ഒരു മരുന്ന് നിർമ്മാണ കമ്പനിക്ക് ഒരു പ്രത്യേക രോഗത്തിന് വേണ്ടിയുള്ള അഞ്ച് വ്യത്യസ്ത മരുന്നുകൾ ഒരേ പോലെ ഫലപ്രാപ്തിയുള്ളവയാണോ അല്ലയോ എന്ന് പരിശോധിക്കേണ്ടി വന്നേക്കാം.

മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഒന്നും തന്നെ നമുക്ക് t-പരിശോധനയോ Z-പരിശോധനയോ സാധ്യമല്ല. ഇത്തരം ഘട്ടങ്ങളിൽ നമുക്ക് ഉപയോഗിക്കാവുന്ന ഒരു പരികൽപ്പന പരിശോധനാ രീതിയാണ് വ്യതിയാന വിശകലനം (Analysis of Variance) അഥവാ അനോവ (ANOVA). അനേകം മാധ്യങ്ങളുടെ വ്യത്യാസങ്ങൾ പ്രസ ക്തമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുന്ന രീതിയാണ് അനോവ. മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറ ഞ്ഞാൽ k സാമ്പിളുകൾ (k>2) തെരഞ്ഞെടുത്തിരിക്കുന്നത് ഒരേ സമഷ്ടിയിൽ നിന്നാണോ എന്നറിയാൻ അനോവ ഉപയോഗിക്കാം. ഒരേ മാധ്യമുള്ള വിവിധ സമ ഷ്ടികളിൽ നിന്നെടുത്ത സാമ്പിളുകളാണോ എന്നറിയാനും ഇതേ രീതി തന്നെ അവ ലംബിക്കാം.

അനേകം മാധ്യങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം പ്രസക്തമാണോ എന്നറിയുന്നതിനുള്ള ശാസ്ത്രീയമായ പരിശോ ധനാ രീതിയാണ് അനോവ.

ഈ പരിശോധനയുടെ പരികൽപന ഇപ്രകാരമാണ്,

H_0 : മാധ്യങ്ങൾ സമമാണ്

അല്ലെങ്കിൽ $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$

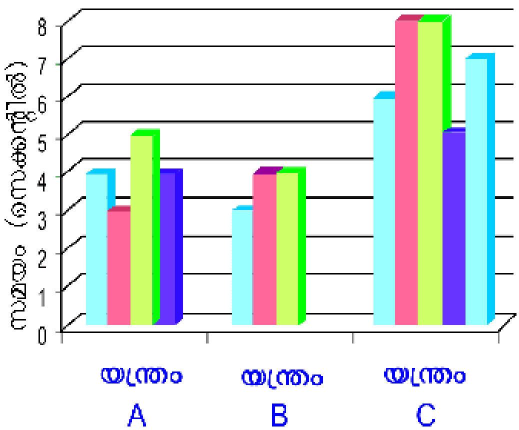
ചുവടെ നൽകിയ ഉദാഹരണം പരിശോധിക്കുക.

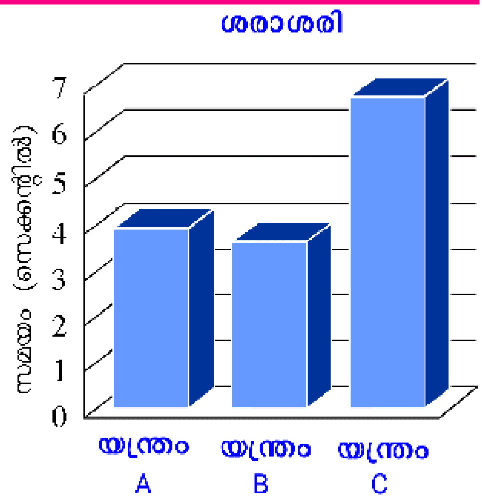
ഒരു കമ്പനിയുടെ ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ പൊതിയുന്നതിന് മൂന്ന് യന്ത്രങ്ങളുണ്ടെന്ന് കരുതുക. ഓരോ യന്ത്രവും ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ പൊതിയാനെടുക്കുന്ന സമയം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

യന്ത്രം	പൊതിയാനെടുത്ത സമയം (സെക്കന്റിൽ)					ശരാശരി
A	4	3	5	4		4
B	3	4	4			3.66
C	6	8	8	5	7	6.8

മുകളിലെ ഡാറ്റ പരിശോധിച്ചാൽ വിവിധ യന്ത്രങ്ങൾ ഉല്പന്നം പൊതിയാൻ എടു ക്കുന്ന ശരാശരി സമയത്തിൽ വ്യത്യാസമുള്ളതായി മനസ്സിലാക്കാം. അതായത് ശരാ ശരി സമയങ്ങൾക്കിടയിൽ വ്യതിയാനം ഉണ്ട്. യന്ത്രം A യും യന്ത്രം B യും ഏറെക്കുറെ ഒരേ സമയമാണ് പൊതിയാൻ വേണ്ടി എടുത്തിട്ടുള്ളതെങ്കിലും യന്ത്രം C അൽപം കൂടുതൽ സമയം എടുത്തിട്ടുണ്ട് എന്ന് ശരാശരികളെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തി നമുക്ക് മന സ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കും. ഇവിടെ സാമ്പിൾ മാധ്യങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവ് പരിശോധിച്ചിട്ടാണ് നമ്മൾ മാധ്യങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം പ്രസക്തമാണോ എന്ന് മനസ്സിലാക്കിയത്. അനോവയിലും വ്യതിയാനങ്ങളെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയാണ് മാധ്യങ്ങളുടെ വ്യത്യാസങ്ങൾ പ്രസക്തമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുന്നത്.

10.1 വിവിധതരം വ്യതിയാനങ്ങൾ





നേരത്തെ പറഞ്ഞ യന്ത്രങ്ങളുടെ ഉദാഹരണത്തിൽ സാമ്പിൾ മാധ്യങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള വ്യതിയാനത്തെക്കുറിച്ച് നമ്മൾ ചർച്ച ചെയ്തു. ഈ വ്യതിയാനങ്ങൾ യന്ത്രങ്ങളുടെ പ്രവർത്തന ക്ഷമതയിലുള്ള വ്യതിയാനങ്ങൾ മൂലം ഉണ്ടായിട്ടുള്ളതാണ് എന്ന് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കും. ഇതിനെയാണ് സാമ്പിളുകൾതമ്മിലുള്ള വ്യതിയാനം (Variation Between Samples) എന്ന് പറയുന്നത്. ഇനി നമുക്ക് ഒരേ യന്ത്രം തന്നെ വിവിധ ഉൽപന്നങ്ങൾ പൊതിയാനെടുത്ത സമയം പരിശോധിക്കാം. യന്ത്രം A ആദ്യത്തെ ഉൽപന്നം 4 സെക്കന്റിൽ പൊതിഞ്ഞപ്പോൾ രണ്ടാമത്തേ ഉൽപന്നം 3 സെക്കന്റ് കൊണ്ട് പൊതിഞ്ഞതായും പിന്നീടുള്ള ഉൽപന്നങ്ങൾ പൊതിയാൻ യഥാക്രമം 5ഉം 4ഉം സെക്കന്റുകൾ എടുത്തതായും കാണാം. സമാനമായ വ്യതിയാനങ്ങൾ യന്ത്രം B യുടെയും യന്ത്രം C യുടെയും പ്രാപ്താങ്കങ്ങളിലും നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും. ഈ വ്യതിയാനത്തെ സാമ്പിളുകൾക്കകത്തുള്ള വ്യതിയാനം (Variation within samples) എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

സാമ്പിളുകൾതമ്മിലുള്ള വ്യതിയാനവും സാമ്പിളുകൾക്കകത്തുള്ള വ്യതിയാനവും ഒന്നിച്ച് ചേർന്നതാണ് ആകെ വ്യതിയാനം

ആകെ വ്യതിയാനം = സാമ്പിളുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യതിയാനം + സാമ്പിളുകൾക്കകത്തുള്ള വ്യതിയാനം

സാമ്പിളുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യതിയാനം കൂടുകയും സാമ്പിളുകൾക്കകത്തുള്ള വ്യതിയാനം കുറയുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ അസാധു പരികൽപന (null hypothesis) തള്ളിക്കളയുന്നതിനുള്ള സാധ്യത വർദ്ധിക്കുന്നു. അനോവയിൽ ഈ വ്യതിയാനങ്ങളുടെ അനുപാതമാണ് പരിശോധനാ സാംഖ്യജമായി (Test Statistic) ഉപയോഗിക്കുന്നത്. വ്യതിയാനങ്ങളുടെ വിതരണം χ^2 -വിതരണമാണ് എന്ന് നമുക്കറിയാമല്ലോ. അതുകൊണ്ട് തന്നെ അവയുടെ അനുപാതത്തിന്റെ വിതരണം F - വിതരണമായിരിക്കും.

10.2 വ്യതിയാനങ്ങളുടെ കാരണങ്ങൾ

എല്ലാ സാംഖ്യക ഡാറ്റയിലും വ്യതിയാനങ്ങൾ അന്തർലീനമായിരിക്കും. ഈ വ്യതിയാനങ്ങൾക്ക് പലവിധ കാരണങ്ങൾ ഉണ്ടാകാം. ഒരു കൃഷിയിൽ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു വളത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കണമെന്നിരിക്കട്ടെ. വ്യത്യസ്ത കൃഷിയിടങ്ങളിൽനിന്ന് ലഭിക്കുന്ന വിളവുകൾ വ്യത്യസ്ത അളവിലായിരിക്കും എന്ന് നമുക്ക് കാണാം. ഓരോ ചെടിയിലും ഒരേ അളവിൽ ഒരേ വളം തന്നെ നൽകിയാലും ഈ വ്യത്യാസം നിലനിൽക്കുന്നതായി നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയും. വളത്തിന്റെ സ്വാധീനം, വിത്തിന്റെ മികവ്, ജലസേചനത്തിന്റെ സ്വാധീനം, മണ്ണിന്റെ വളക്കൂറ്, കാലാവസ്ഥ, മഴയുടെ ലഭ്യത തുടങ്ങിയ അനവധി കാരണങ്ങൾ മൂലമാണ് ഈ വ്യതിയാനങ്ങൾ ഉണ്ടാവുന്നത്. ഇവയിൽ ചിലത് ഗവേഷകന് നിയന്ത്രിക്കാൻ കഴിയുന്നതും കൃത്യമായി അളന്നെടുക്കാൻ കഴിയുന്നവയും ആണ്. വളത്തിന്റെ മികവ്, ജലസേചനത്തിന്റെ ലഭ്യത എന്നിവ ഇത്തരത്തിലുള്ളവയാണ്. എന്നാൽ മണ്ണിന്റെ വളക്കൂറ്, കാലാവസ്ഥ, മഴയുടെ ലഭ്യത തുടങ്ങിയവ ഗവേഷകന്റെ നിയന്ത്രണത്തിൽ ഒതുങ്ങുന്നവയോ കൃത്യമായി അളന്നെടുക്കാവുന്നവയോ അല്ല.

ഗവേഷകന് നിയന്ത്രിക്കുവാനും അളന്നെടുക്കുവാനും കഴിയുന്ന കാരണങ്ങളെ നിയുക്തകാരണങ്ങൾ (Assignable Causes) എന്ന് പറയുന്നു. ഗവേഷകന് നിയന്ത്രിക്കാൻ കഴിയാത്തതും അളന്നെടുക്കാൻ സാധിക്കാത്തതുമായ കാരണങ്ങളെ യാദൃശ്ചിക കാരണങ്ങൾ (Chance Causes) എന്നും വിളിക്കുന്നു.

സാമ്പിളുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യതിയാനങ്ങൾ നിയുക്ത കാരണങ്ങൾ മൂലമുണ്ടാകുന്നതും സാമ്പിളുകൾക്കകത്തെ വ്യതിയാനങ്ങൾ യാദൃശ്ചിക കാരണങ്ങൾ മൂലമുണ്ടാകുന്നതുമാണ് എന്ന സങ്കൽപ്പത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് വ്യതിയാന വിശകലനം (അനോവ) വികസിപ്പിച്ചിട്ടുള്ളത്.

നിയുക്ത കാരണങ്ങൾ മൂലമുണ്ടാകുന്ന വ്യതിയാനങ്ങളെ ട്രീറ്റ്മെന്റ് വ്യതിയാനം (Treatment variation) എന്നും യാദൃശ്ചിക കാരണങ്ങൾ മൂലമുണ്ടാകുന്ന വ്യതിയാനങ്ങളെ അനിയത വ്യതിയാനം (Random Variation) അഥവാ പിശക് വ്യതിയാനം (Error Variation) എന്നും പറയുന്നു.

10.3 അനോവയുടെ അനുമാനങ്ങൾ

അനോവയുടെ അടിസ്ഥാന അനുമാനങ്ങൾ ചുവടെ പറയുന്നവയാണ്.

1. **സ്വാഭാവികത (Normality)**

   വിവിധ സാമ്പിളുകൾ തെരഞ്ഞെടുത്തിരിക്കുന്ന സമഷ്ടി നോർമൽ വിതരണത്തിലാണ്.

2. **സജാതീയത്വം (Homogenity)**

   സാമ്പിളുകൾ തെരഞ്ഞെടുത്തിരിക്കുന്ന സമഷ്ടികളുടെ വ്യതിയാനങ്ങൾ തുല്യമാണ്

3. **അനാശ്രിതത്വം (Independence)**

   സാമ്പിളുകൾ സ്വതന്ത്രമായി തെരഞ്ഞെടുത്തവയാണ്.

4. **സങ്കലനത (Additivity)**

   വിവിധ ഘടകങ്ങളുടെ ഫലങ്ങളെ സംയോജിപ്പിക്കാൻ സാധിക്കും.

10.4 ഏകദിശാ അനോവ (One way ANOVA)

ഒരു ഗവേഷണത്തിൽ ഒരു പരീക്ഷണ യൂണിറ്റിൽ തന്നെ നമുക്ക് അനേകം ട്രീറ്റ്മെന്റുകൾ ഉപയോഗിക്കാൻ സാധിക്കും. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു കമ്പനിക്ക് 12 വിൽപനശാലകൾ ഉണ്ടെന്ന് കരുതുക. നാല് വിൽപനശാലകൾക്ക് വീതം മൂന്ന് തരം വ്യത്യസ്ത പരിശീലന പരിപാടികൾ സംഘടിപ്പിക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക. നാല് വ്യത്യസ്തമായ പരസ്യ സംവിധാനങ്ങൾ മൂന്ന് വിൽപനശാലകളിൽ വീതം നടപ്പിലാക്കി എന്നും കരുതുക. ചുവടെ നൽകിയ പട്ടിക പരിശോധിക്കുക.

	പരിശീലനം – A	പരിശീലനം – B	പരിശീലനം – C
പരസ്യം – I	X_{11}	X_{12}	X_{13}
പരസ്യം – II	X_{21}	X_{22}	X_{23}
പരസ്യം – III	X_{31}	X_{32}	X_{33}
പരസ്യം – IV	X_{41}	X_{42}	X_{43}

വിൽപനശാലകളിലെ വിൽപനയിലുണ്ടാകുന്ന വർദ്ധനവ് പരസ്യത്തിന്റെ ഫലമായുണ്ടായതോ, പരിശീലന പരിപാടിയുടെ ഫലമായുണ്ടായതോ, ഇത് രണ്ടിന്റെയും സംയുക്ത ഫലമായുണ്ടായതോ ആകാം. പരസ്യ തന്ത്രങ്ങളുടെ കാര്യക്ഷമതകൾ തുല്യമാണോ അല്ലയോ എന്നതും വിവിധ പരിശീലന പരിപാടിയുടെ സ്വാധീനങ്ങൾ തുല്യമാണോ അല്ലയോ എന്നതും നമുക്ക് അനോവ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്താം. ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ നമ്മൾ ഒരേ സമയം രണ്ട് ട്രീറ്റ്മെന്റുകളാണ് പരീക്ഷിച്ചത്, പരസ്യ തന്ത്രങ്ങളും, പരിശീലന പരിപാടികളും. ഇതിനെ ദ്വിമാന അനോവ എന്ന് പറയുന്നു. ഇതേ പോലെ മൂന്നോ അതിലധികമോ ട്രീറ്റ്മെന്റുകൾ ഒരേ സമയം പരീക്ഷിക്കാൻ സാധിക്കും. എന്നാൽ നമ്മൾ ഒരു ട്രീറ്റ്മെന്റ് മാത്രമുള്ള പരീക്ഷണങ്ങളെ കുറിച്ചാണ് ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. ഇവയെ ഏകദിശാ അനോവ (One way anova) എന്ന് വിളിക്കുന്നു. നമ്മൾ ആദ്യം ചർച്ച ചെയ്ത യന്ത്രങ്ങളുടെ ഉദാഹരണം ഒരിക്കൽ കൂടി പരിഗണിക്കാം. A, B, C എന്നീ യന്ത്രങ്ങളുടെ കാര്യക്ഷമത മാത്രമാണ് ഇവിടെ പരിശോധിക്കുന്നത്. അതിനാൽ ഇത് ഏകദിശാ അനോവ ഉപയോഗിച്ച് പരിഹരിക്കാം. യന്ത്രങ്ങൾ പൊതിയാനെടുക്കുന്ന സമയം ഒരിക്കൽ കൂടി പരിശോധിക്കാം.

1920 കളിൽ R.A ഫിഷർ ആണ് വ്യതിയാന വിശകലനം വികസിപ്പിച്ചെടുത്തത്.

	പൊതിയാനെടുത്ത സമയം					ആകെ	
യന്ത്രം A	4	3	5	4		16	(T_1)
യന്ത്രം B	3	4	4			11	(T_2)
യന്ത്രം C	6	8	8	5	7	34	(T_3)
					ആകെ	61	(G)

ഏകദിശാ അനോവയുടെ വിവിധ ഘട്ടങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

k ട്രീറ്റ്മെന്റുകൾ ഉണ്ട് എന്നും i-ാമത്തെ ട്രീറ്റ്മെന്റ് n_i ഇടങ്ങളിൽ പരീക്ഷിക്കുന്നുവെന്നും കരുതുക. എങ്കിൽ ആകെ ഇടങ്ങളുടെ എണ്ണം $= n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = N$ (മുകളിലെ ഉദാഹരണത്തിൽ $k = 3$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, അതുകൊണ്ട് $N = 4 + 3 + 5 = 12$)

ഘട്ടം I

ഇവിടുത്തെ അസാധു പരികൽപന

H_0 : മാധ്യങ്ങൾ തുല്യമാണ്

അല്ലെങ്കിൽ $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$

വൈകൽപിക പരികൽപ്പന

H_1 : മാധ്യങ്ങൾ തുല്യമല്ല

ഘട്ടം II

1) തിരുത്തൽ ഘടകം (CF) കണ്ടുപിടിക്കുക, $CF = \frac{G^2}{N}$, G = ആകെത്തുക

2) ആകെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക, TSS = എല്ലാ വിലകളുടെയും വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക – CF.

3) ട്രീറ്റ്മെന്റുകൾ തമ്മിലുള്ള വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക $SSB = \frac{\sum T_i^2}{n_i} - CF$

T_i - i -ാമത്തെ സാമ്പിളിന്റെ തുക

n_i - i-ാമത്തെ സാമ്പിളിന്റെ വലിപ്പം

4) അകത്തുള്ള വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക $SSW = TSS - SSB$

ഘട്ടം III

വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ ശരാശരി കാണുക

വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ ശരാശരി = $\frac{\text{വർഗങ്ങളുടെ തുക}}{\text{സ്വതന്ത്രതാമാനം}}$

ഇവിടെ TSS ന്റെ സ്വതന്ത്രതാമാനം $= N - 1$

SSB യുടെ സ്വതന്ത്രതാമാനം $= k - 1$

SSW യുടെ സ്വതന്ത്രതാമാനം $= N - k$

$\therefore$ ട്രീറ്റ്മെന്റുകൾ തമ്മിലുള്ള വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ ശരാശരി, $MSB = \frac{SSB}{k-1}$

സാമ്പിളിന് അകത്തുള്ള വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ ശരാശരി, $MSW = \frac{SSW}{N-k}$

ഘട്ടം IV

F അനുപാതം കണ്ടുപിടിക്കുക

$$F = \frac{MSB}{MSW}$$

ഇവിടെ MSB യും MSW യും χ^2 - ചരങ്ങളാണ്. അവയുടെ സ്വതന്ത്രതാമാനങ്ങൾ യഥാക്രമം (k-1), (N-k) എന്നിവയാകുന്നു. അതിനാൽ F എന്നത് (k-1, N-k) സ്വതന്ത്രതാമാനമുള്ള ഒരു F അനിയത ചരമായിരിക്കും. തന്നിരിക്കുന്ന സാർത്ഥക തലത്തിന്റെ വിലയ്ക്കനുസരിച്ച് (α) F പട്ടികയിൽ നിന്നും F_α യുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഘട്ടം V

അനോവ പട്ടിക വരയ്ക്കുക. അനോവ പട്ടികയുടെ മാതൃക താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

അനോവ പട്ടിക

അനോവ	df	വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക (SS)	വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ ശരാശരി (MSS)	F	F_α
സാമ്പിളുകൾ തമ്മിൽ (ട്രീറ്റ്മെന്റ്)	k - 1	SSB	MSB	$F = \frac{MSB}{MSW}$	F(k-1, N-k)
സാമ്പിളുകൾക്ക് അകത്ത് (പിശക്)	N - k	SSW	MSW		
ആകെ	N - 1	TSS	-	-	-

ഘട്ടം VI

F സാംഖ്യജത്തിന്റെ വില F_α യുടെ വിലയേക്കാൾ കൂടുതലാണെങ്കിൽ നമുക്ക് അസാധു പരികൽപനയെ തള്ളിക്കളയാം. അല്ലെങ്കിൽ H_0 സ്വീകരിക്കപ്പെടുന്നു.

വിശദീകരണം 9.1

മൂന്ന് വ്യത്യസ്ത യന്ത്രങ്ങൾ ഒരു ഉൽപന്നം പൊതിയാനെടുക്കുന്ന സമയം സെക്കന്റിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. 5% സാർത്ഥകതലത്തിൽ ഈ യന്ത്രങ്ങൾ ഒരേ കാര്യക്ഷമതയുള്ളവയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

	പൊതിയാനെടുക്കുന്ന സമയം				
യന്ത്രം A	4	3	5	4	
യന്ത്രം B	3	4	4		
യന്ത്രം C	6	8	8	5	7

പരിഹാരം

അസാധു പരികൽപന

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

	പൊതിയാനെടുത്ത സമയം					ആകെ	
യന്ത്രം **A**	4	3	5	4		**16**	**(T_1)**
യന്ത്രം **B**	3	4	4			**11**	**(T_2)**
യന്ത്രം **C**	6	8	8	5	7	**34**	**(T_3)**
					ആകെ	**61**	**(G)**

തിരുത്തൽ ഘടകം, $CF = \frac{G^2}{N} = \frac{61^2}{12} = 310.08$

വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ആകെ തുക,

TSS = എല്ലാ വിലകളുടെയും വർഗങ്ങളുടെ തുക – CF.

$= (4^2 + 3^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 8^2 + 5^2 + 7^2) - 310.08$

$= 345 - 310.08$

$= 34.92$

ട്രീറ്റ്മെന്റുകൾ തമ്മിലുള്ള വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക

$$SSB = \sum \frac{T_i^2}{n_i} - CF$$

$$= \left(\frac{16^2}{4} + \frac{11^2}{3} + \frac{34^2}{5}\right) - 310.833$$

$$= (64 + 40.33 + 231.2) - 310.8$$

$$= 335.53 - 310.08 = 25.45$$

ട്രീറ്റ്മെന്റുകൾക്ക് അകത്തുള്ള വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക, $SSW = TSS - SSB$

$= 34.92 - 25.45 = 9.47$

തമ്മിലുള്ള വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ശരാശരി, $MSB = \frac{SSB}{K-1}$

$= \frac{25.45}{2} = 12.725$

അകത്തുള്ള വർഗ്ഗങ്ങളുടെ ശരാശരി, $MSW = \frac{SSW}{N-K} = \frac{9.47}{9} = 1.05$

$$F = \frac{MSB}{MSW} = \frac{12.725}{1.05} = 12.12$$

അനോവ പട്ടിക

ഉറവിടം	df	വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക (SS)	ശരാശരി വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക (MSS)	F	$F_{0.05}$
സാമ്പിളുകൾക്ക് ഇടയിൽ	2	25.45	12.725	12.12	4.26
സാമ്പിളുകൾക്ക് അകത്ത്	9	9.47	1.05		
ആകെ	11	34.92	-	-	-

അനുമാനം

ഇവിടെ F > F_{α} , ആയതിനാൽ അസാധു പരികൽപനയെ 5% സാർത്ഥക തലത്തിൽ നമുക്ക് തള്ളിക്കളയാം. അതായത് യന്ത്രങ്ങളുടെ ശേഷികൾ തുല്യമല്ല.

വിശദീകരണം 10.2

നാല് വ്യത്യസ്തമായ വളങ്ങൾ വിവിധ കാർഷിക നിലങ്ങളിൽ പ്രയോഗിച്ചപ്പോൾ ലഭിച്ച വിളവുകൾ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. 1% സാർത്ഥക തലത്തിൽ അനോവ പരിക്ഷണം നടത്തി വളങ്ങളുടെ കാര്യക്ഷമതകളിൽ വ്യത്യാസം ഉണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

	വിളവ്						
വളം I	12	14	14	11	13	12	
വളം II	14	17	17	16	18	20	20
വളം III	13	10	12	12			
വളം IV	12	11	11	13	12	12	

പരിഹാരം

ഇവിടുത്തെ അസാധു പരികൽപന $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

	വിളവ്							ആകെ
വളം I	12	14	14	11	13	12		76
വളം II	14	17	17	16	18	20	20	122
വളം III	13	10	12	12				47
വളം IV	12	11	11	13	12	12		71
							ആകെ	316

തിരുത്തൽഘടകം $CF = \frac{G^2}{N} = \frac{316^2}{23} = 4341.57$

ആകെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക, TSS = വിലകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക – CF.

$$=(12^2+14^2+14^2+...+13^2+12^2+12^2)-4341.57$$
$$=4524-4341.57=182.43$$

ഇടയിലുള്ള വർഗങ്ങളുടെ തുക, $SSB = \sum \frac{T_i^2}{n_i} - CF$

$$=\left(\frac{76^2}{6}+\frac{122^2}{7}+\frac{47^2}{4}+\frac{71^2}{6}\right)-4341.57$$

$$=4481.38-4341.57 = 139.81$$

അകത്തുള്ള വർഗങ്ങളുടെ തുക, $SSW = TSS - SSB = 182.43 - 139.81 = 42.62$

ഇടയിലുള്ള വർഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ ശരാശരി $MSB = \frac{SSB}{K-1} = \frac{139.81}{3} = 46.60$

അകത്തുള്ള വർഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ ശരാശരി $MSW = \frac{SSW}{N-K} = \frac{42.62}{19} = 2.24$

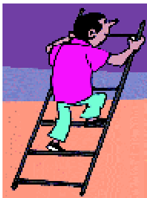
$$F = \frac{MSB}{MSW} = \frac{46.60}{2.24}$$

$$= 20.80$$

ഉറവിടം	df	വർഗങ്ങളുടെ തുക (SS)	വർഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ ശരാശരി (MSS)	F	$F_{u,m}$
സാമ്പിളുകൾക്ക് ഇടയിൽ	9	139.81	46.60	20.80	3.13
സാമ്പിളുകൾക്ക് അകത്ത്	19	42.62	2.24		
ആകെ	22	182.43			

നിഗമനം

ഇവിടെ F ന്റെ വില F_{cr} , യുടെ വിലയെക്കാൾ കൂടുതൽ ആണ്. അതിനാൽ അസാധു പരികൽപന സ്വീകരിക്കാൻ സാധിക്കില്ല. അതായത് വളങ്ങളുടെ ശേഷികൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം പ്രകടമാണ്.



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

ഒരു പ്രത്യേക അസുഖം ഭേദപ്പെടുത്തുന്നതിന് വേണ്ടി നാല് വ്യത്യസ്തമായ മരുന്നുകൾ വികസിപ്പിച്ചെടുത്തു. ഈ മരുന്നുകൾ 100 രോഗികൾക്ക് വീതം മൂന്ന് വ്യത്യസ്ത ആശുപത്രികളിൽ വച്ച് നൽകി. രോഗം ഭേദപ്പെട്ടവരുടെ എണ്ണം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. വ്യതിയാന വിശകലനത്തിലൂടെ മരുന്നുകളുടെ കാര്യക്ഷമതയിൽ വ്യത്യാസമുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

ആശുപത്രി	മരുന്ന്			
	A	B	C	D
H_1	24	20	24	17
H_2	20	25	30	9
H_3	13	18	31	13

വിശദീകരണം 10.3

ഒരു പഠനത്തിൽ ലഭിച്ച വിവരങ്ങളുടെ അപൂർണമായ അനോവ പട്ടിക ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. വിട്ട ഭാഗങ്ങൾ പൂർത്തീകരിച്ച് നിങ്ങളുടെ നിഗമനം എഴുതുക.

ഉറവിടം	df	വർഗങ്ങളുടെ തുക (SS)	വർഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ ശരാശരി (MSS)	F	$F_{u,m}$
സാമ്പിളുകൾക്കിടയിലുള്ളത്	5	-	12	-	-
സാമ്പിളുകൾക്ക് അകത്തുള്ളത്	-	76	-		
ആകെ	24				

പരിഹാരം

ഈ പ്രശ്നത്തിലെ അസാധു പരികൽപ്പന, $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$

$k - 1 = 5,\ N - 1 = 24,\ SSW = 76,\ MSB = 12$ എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു.

$$k - 1 = 5$$

$$k = 5 + 1 = 6$$

ട്രീറ്റ് മെന്റുകളുടെ എണ്ണം = 6

$$N - 1 = 24$$

$$N = 24 + 1 = 25$$

സാമ്പിളുകൾക്കകത്തുള്ള സ്വതന്ത്രതാ മാനം $= N - k = 25 - 6 = 19$

$$MSB = \frac{SSB}{k - 1}$$

$$12 = \frac{SSB}{5}$$

$$SSB \quad 12 \times 5 = 60$$

$$TSS = SSB + SSW = 60 + 76 = 136$$

$$MSW = \frac{SSW}{N - k} = \frac{76}{19} = 4$$

$$F = \frac{MSB}{MSW} = \frac{12}{4} = 3$$

പൂർത്തീകരിച്ച അനോവ പട്ടിക

ഉറവിടം	df	വർഗങ്ങളുടെ തുക (SS)	വർഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ ശരാശരി (MSS)	F	$F_{0.01}$
ഇടയിൽ	5	60	12	3	4.17
അകത്ത്	19	76	4		
ആകെ	24	136			

നിഗമനം

ഇവിടെ $F < F_{\alpha}$ ആണ്. അതിനാൽ 1% സാർത്ഥക തലത്തിൽ നമുക്ക് അസാധു പരികൽപനയെ അംഗീകരിക്കാം.

വിശദീകരണം 10.4

അഞ്ച് പ്രധാന നഗരങ്ങളിൽ ഒരു മാസത്തിനിടയിൽ അമിത മദ്യപാനത്തിന്റെ ഫലമായി ഉണ്ടായിട്ടുള്ള കുറ്റ കൃത്യങ്ങളുടെ എണ്ണം വിശകലനം നടത്തിയതിൽ നിന്ന് ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന അനോവ പട്ടിക ലഭ്യമായി. പട്ടിക പൂർത്തീകരിച്ച് നിഗമനം എഴുതുക.

ഉറവിടം	df	വർഗങ്ങളുടെ തുക (SS)	വർഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ ശരാശരി (MSS)	F	$F_{0.01}$
സാമ്പിളുകൾക്ക് ഇടയിൽ	-	-	-	-	-
സാമ്പിളുകൾക്ക് അകത്ത്	-	-	4.5		
തുക	15	193.5			

പരിഹാരം

ഇവിടെ

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$$

$k = 5$ (തന്നിരിക്കുന്നു)

$k - 1 = 5 - 1 = 4$

പട്ടികയിൽ നിന്നും, $N - 1 = 15$

$$N = 15 + 1 = 16$$

$MSW = 4.5$

$$\frac{SSW}{N-k} = 4.5$$

$$\frac{SSW}{16-5} = 4.5$$

$$\frac{SSW}{11} = 4.5$$

$$SSW = 11 \times 4.5$$

$$SSW = 49.5$$

$TSS = 193.5$ (പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു)

$$SSB + SSW = 193.5$$

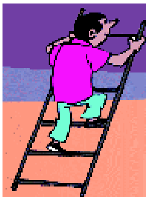
$$SSB = 193.5 - SSW = 193.5 - 49.5 = 144$$

$$MSB = \frac{SSB}{k-1} = \frac{144}{5-1} = \frac{144}{4} = 36$$

$$F = \frac{MSB}{MSW} = \frac{36}{4.5} = 8$$

ഉറവിടം	df	SS	MSS	F	$F_{0.05}$
സാമ്പിളുകൾക്ക് ഇടയിൽ	4	144	36	8	3.36
സാമ്പിളുകൾക്ക് അകത്ത്	11	49.5	4.5		
ആകെ	15	193.5			

ഇവിടെ സാമ്പിളിൽ നിന്നും കണക്കാക്കിയ F ന്റെ വില 8 ഉം പട്ടികയിൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്ന F ന്റെ വില 3.36 ഉം ആണ്. കണക്കാക്കിയ വില പട്ടികയിലെ വിലയേക്കാൾ കൂടുതൽ ആയതിനാൽ അസാധു പരികൽപന സ്വീകാര്യ യോഗ്യമല്ല. അതിനാൽ വ്യത്യസ്ത നഗരങ്ങളിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ കുറ്റകൃത്യങ്ങളുടെ എണ്ണം വ്യത്യസ്തമാണ് എന്ന് അംഗീകരിക്കാം.



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

വിവിധ സംസ്ഥാനങ്ങളിലെ വൃദ്ധസദനങ്ങളിൽ അനാഥകളുടെ എണ്ണത്തെ കുറിച്ച് ഒരു പഠനം നടത്തി. അനോവ പട്ടിക ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു. പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കി നിഗമനം എഴുതുക.

ഉറവിടം	df	വർഗങ്ങളുടെ തുക (SS)	വർഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ ശരാശരി (MSS)	F	$F_{0.05}$
ഇടയിൽ	-	-	-	-	-
അകത്ത്	19	-	5.2		
ആകെ	26	553.8			

വിശദീകരണം 10.5

ആറ് നിർവ്വഹണ തന്ത്രങ്ങളുടെ കാര്യക്ഷമതകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസങ്ങൾ പഠിക്കുന്നതിന് 23 ഇടങ്ങളിൽ ഇവ പ്രയോഗിച്ച് പരിശോധിച്ചു. സാമ്പിളുകൾക്കിടയിലുള്ള വർഗങ്ങളുടെയും സാമ്പിളുകൾക്കകത്തുള്ള വർഗ്ഗങ്ങളുടെയും ശരാശരികൾ യഥാക്രമം 35.2 എന്നും 19.2 എന്നും ലഭിച്ചു. F ന്റെ വില കണ്ട് പിടിച്ച് നിഗമനം എഴുതുക.

പരിഹാരം

$$MSB = 35.2, MSW = 19.2, k = 6, N = 23$$

$$F = \frac{MSB}{MSW} = \frac{35.2}{19.2} = 1.83$$

$$F_\alpha = 2.81$$

ഇവിടെ, $F < F_\alpha$ ആയതിനാൽ അസാധു പരികൽപന ശരിയാണെന്ന് അംഗീകരിക്കാം. അതായത് നിർവഹണ തന്ത്രങ്ങളുടെ കാര്യക്ഷമതകൾ തമ്മിൽ കാര്യമാത്ര വ്യത്യാസമില്ല എന്ന് നമുക്ക് നിഗമനത്തിലെത്താം.

വിശദീകരണം 10.6

നാല് തരം വിത്തുകളുടെ കാര്യക്ഷമത പരിശോധിക്കുന്നതിന് വേണ്ടി 14 ഇടങ്ങളിൽ അവ പരീക്ഷിച്ച് ഒരു പഠനം നടത്തി. സാമ്പിളുകൾക്കിടയിലുള്ള വർഗങ്ങളുടെ തുക 173 ഉം സാമ്പിളുകൾക്കകത്തുള്ള വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക 123 ഉം ആണ്. F അനുപാതം കണ്ടുപിടിച്ച് നിഗമനം എഴുതുക.

$SSB = 173, SSW = 123, k = 4, N = 14$ എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു.

$$MSB = \frac{SSB}{k-1} = \frac{173}{4-1} = \frac{173}{3} = 57.67$$

$$MSW = \frac{SSW}{N-k} = \frac{123}{14-4} = \frac{123}{10} = 12.3$$

$$F = \frac{MSB}{MSW} = \frac{57.67}{12.3} = 4.69$$

F വിതരണത്തിന്റെ പട്ടികയിൽ നിന്നും, $F_\alpha = 3.71$ $(\alpha = 5\%)$

ഇവിടെ $F > F_\alpha$ എന്ന് കാണാം. അതിനാൽ അസാധു പരികൽപന തിരസ്കരിക്കുന്നു. അതായത് വിത്തുകളുടെ കാര്യക്ഷമതകൾ തമ്മിൽ കാര്യമാത്രമായ വ്യത്യാസം ഉണ്ട്.

നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

അനേകം ശരാശരികൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസങ്ങൾ പരിശോധിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന പരീക്ഷണ രീതിയാണ് അനോവ. സാമ്പിളുകൾക്കിടയിലുള്ള വ്യത്യാസവും സാമ്പിളുകൾക്കകത്തുള്ള വ്യത്യാസവും പരിഗണിച്ചാണ് അനോവ നടത്തുന്നത്. ഈ വ്യത്യാസങ്ങൾക്ക് വിവിധങ്ങളായ കാരണങ്ങൾ ഉണ്ടായേക്കാം. ഇവയിൽ നിയന്ത്രണ വിധേയവും അളന്നെടുക്കാവുന്നതുമായ കാരണങ്ങളെ നിയുക്ത കാരണങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു. അല്ലാത്തവയെ യാദൃശ്ചിക കാരണങ്ങൾ എന്നും പറയുന്നു. വ്യതിയാനങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതം F വിതരണം അനുവർത്തിക്കുന്നു. അനുപാതത്തിന്റെ വില ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യയിലും കൂടുകയാണെങ്കിൽ അസാധു പരികൽപനയെ തിരസ്കരിക്കേണ്ടിവരും. കാർഷിക, വാണിജ്യ, വിദ്യാഭ്യാസ, ആരോഗ്യ, മനഃശാസ്ത്ര, സാമൂഹിക ശാസ്ത്ര മേഖലകളിൽ അനോവ വളരെയേറെ ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നു.

നമുക്ക് വിലയിരുത്താം

1 മുതൽ 8 വരെ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക.

1. വ്യതിയാന വിശകലനം ഉപയോഗിക്കുന്നത് .... പരിശോധിക്കുന്നതിന് വേണ്ടി.

   a) വ്യതിയാനം b) മാധ്യം c) സഹവ്യതിയാനം d) സഹബന്ധം

2. അനോവയിൽ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം .... ആണ്.

   a) Z b) t c) χ^2 d) F

3. നിയുക്ത കാരണങ്ങൾ മൂലമുണ്ടാകുന്ന വ്യതിയാനങ്ങൾ അറിയപ്പെടുന്നത്

   a) യാദൃശ്ചിക വ്യതിയാനം b) ട്രീറ്റ്മെന്റ് വ്യതിയാനം

   c) അനിയത വ്യതിയാനം d) ഇതൊന്നുമല്ല

4. ഒരു അനോവ പട്ടികയിൽ SSB = 190, MSB = 95, ട്രീറ്റ്മെന്റുകളുടെ എണ്ണം ....

   a) 2 b) 5 c) 3 d) 4

5. 5 വരിയിലും 5 നിരയിലുമായി ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്ന 25 വിലകളുടെ ആകെ തുക 100 ആണ്. എങ്കിൽ തിരുത്തൽഘടകം ....

   a) 100 b) 50 c) 200 d) 400

6. ഒരു അനോവയിൽ MSB=4 ഉം MSE =2 ആണെങ്കിൽ വ്യതിയാന അനുപാതം, F=----

   a) 2 b) 1/2 c) 8 d) 4

7. അനോവ ഉപയോഗിക്കുന്നത് .... പരിശോധിക്കുന്നതിനാണ്.

a) രണ്ട് വ്യതിയാനങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം b) അനേകം വ്യതിയാനങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം
c) രണ്ട് മാധ്യമങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം d) അനേകം മാധ്യമങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം.

8. ഒരു അനോവയിൽ ട്രീറ്റ്മെന്റുകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക = 30, ട്രീറ്റ്മെന്റുകളുടെ എണ്ണം= 3, ട്രീറ്റ്മെന്റുകളുടെ ശരാശരി വർഗങ്ങളുടെ തുക കാണുക?

a) 90 b)10 c)15 d) 30

9. അനോവയുടെ ഉപയോഗങ്ങൾ എഴുതുക.

10. നിയുക്ത കാരണങ്ങൾ, യാദൃശ്ചിക കാരണങ്ങൾ എന്നിവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം വിശദമാക്കുക.

11. അനോവയുടെ അടിസ്ഥാന അനുമാനങ്ങൾ വിവരിക്കുക.

12. ഒരു അനോവയിൽ ട്രീറ്റ്മെന്റിന്റെയും പിശകിന്റെയും ശരാശരി വർഗങ്ങളുടെ തുക യഥാക്രമം 23.1 ഉം 6.34 ഉം ആണ്. ട്രീറ്റ്മെന്റുകളുടെ ഫലങ്ങൾ കാര്യ പ്രസക്തമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. [$\alpha = 0.05$ എടുക്കുക, df = (4, 17)]

13. അഞ്ച് ട്രീറ്റ്മെന്റുകൾ 24 ഇടങ്ങളിൽ പരീക്ഷിച്ചപ്പോൾ ചുവടെ നൽകിയ വിലകൾ ലഭ്യമായി

സാമ്പിളുകൾക്കിടയിലുള്ള വർഗങ്ങളുടെ തുക = 42

ആകെ വർഗങ്ങളുടെ തുക = 108.

അനോവ പട്ടിക തയാറാക്കി നിഗമനം എഴുതുക.

14. നാല് ചികിൽസാ രീതികൾ 18 രോഗികളിൽ പരീക്ഷിച്ചു. ട്രീറ്റ്മെന്റ് മൂലവും പിശക് മൂലവും ലഭിച്ച വർഗങ്ങളുടെ തുക യഥാക്രമം 67 ഉം 45 ഉം ആണ്. F അനുപാതം കണ്ടു പിടിച്ച് 5% സാർത്ഥക തലത്തിൽ നിഗമനം എഴുതുക.

15. ഒരു അപൂർണ അനോവ പട്ടിക ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. പട്ടിക പൂർത്തീകരിച്ച് നിഗമനത്തിലെത്തുക.

16. ഒരു മാർക്കറ്റിങ്ങ് മാനേജർ അഞ്ച് മാർക്കറ്റിംഗ് തന്ത്രങ്ങൾ പ്രയോഗിച്ച് കൊണ്ട് ഒരു പരീക്ഷണം നടത്തി. അനോവ പട്ടിക പൂർത്തീകരിച്ച് തന്ത്രങ്ങളുടെ കാര്യക്ഷമതയെ

ഉറവിടം	df	വർഗങ്ങളുടെ തുക (SS)	വർഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ ശരാശരി (MSS)	F	F [illegible]
സാമ്പിളുകൾക്ക് ഇടയിൽ	-	63	-	2.4	-
സാമ്പിളുകൾക്ക് അകത്ത്	8	-	-		
തുക	11	-	-		

കുറിച്ച് നിഗമനത്തിലെത്തുക.

17. ഒരു ഗവേഷകൻ ആറ് വളങ്ങളുടെ കാര്യക്ഷമത പരിശോധിക്കുന്നതിന് ഒരു പരി

ഉറവിടം	df	വർഗങ്ങളുടെ തുക (SS)	വർഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ ശരാശരി (MSS)	F	$F_{0.05}$
സാമ്പിളുകൾക്ക് ഇടയിൽ	-	54	-	-	-
സാമ്പിളുകൾക്ക് അകത്ത്	13	-	5.4		
ആകെ	-	-			

ക്ഷണം നടത്തി. അദ്ദേഹം ഈ വളങ്ങളെ 22 വ്യത്യസ്ത നിലങ്ങളിൽ പ്രയോഗിച്ചു. അനോവ പട്ടിക പൂർത്തീകരിച്ച് നിഗമനം എഴുതുക.

18. ഒരു കമ്പനിയുടെ വിവിധ വിൽപന കേന്ദ്രങ്ങളിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ വിൽപന ചുവടെ

ഉറവിടം	df	വർഗങ്ങളുടെ തുക (SS)	വർഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ ശരാശരി (MSS)	F	$F_{0.05}$
സാമ്പിളുകൾക്ക് ഇടയിൽ	120	-	-	-	-
സാമ്പിളുകൾക്ക് അകത്ത്	-	-	3.25		
ആകെ	-	-			

തന്നിരിക്കുന്നു. ഒരു അനോവ നടത്തി വിൽപനയിൽ കാര്യമാത്ര വ്യത്യാസം ഉണ്ടോ എന്ന് 5% സാർത്ഥക തലത്തിൽ പരിശോധിക്കുക.

വിൽപന							
കേന്ദ്രം I	10	11	11	14			
കേന്ദ്രം II	11	13	10	9	9	11	
കേന്ദ്രം III	14	14	15	14			
കേന്ദ്രം IV	11	13	8	8	12	12	13

19. ഒരു കമ്പനിയിൽ നാല് അച്ചടിയന്ത്രങ്ങളുണ്ട്. 10 സെക്കന്റിൽ ഓരോ യന്ത്രവും നൽകുന്ന പ്രിന്റുകളുടെ എണ്ണം ചുവടെ കാണും വിധം നിരീക്ഷിച്ചു. 1% സാർത്ഥക തലത്തിൽ യന്ത്രങ്ങൾ ഒരേ കാര്യക്ഷമതയുള്ളവയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

എണ്ണം						
യന്ത്രം A	21	22	22	24	20	
യന്ത്രം B	16	17	16	19	15	20
യന്ത്രം C	18	20	16	14		
യന്ത്രം D	17	18	20	20	21	

അധ്യായം 11

സാംഖ്യക ഗുണ നിയന്ത്രണം

(Statistical Quality Control)

ആഗോള സാമ്പത്തിക രംഗത്ത് എല്ലാ കമ്പനികളും - അവർ ഉൽപാദകരായാലും സേവന ദാതാക്കളായാലും ഗുണമേന്മ എന്നത് അതിജീവനത്തിന് അത്യന്താപേക്ഷിതമാണ്. എല്ലാ പ്രവർത്തനങ്ങളിലും ഗുണം എന്നതിന് ഒരു പ്രത്യേക പ്രാധാന്യമുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിനായി നാം ഒരു വീട് നിർമിക്കുമ്പോൾ ഇലക്ട്രിക് ഉപകരണങ്ങൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിൽ അല്ലെങ്കിൽ സാനിറ്ററി ഇനങ്ങൾ വാങ്ങുന്നതിലെല്ലാം ഉത്പന്നങ്ങളുടെ ഗുണത്തെക്കുറിച്ച് അന്വേഷിക്കുന്നു. വാഹനങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ അവയുടെ ആകൃതി, ഉത്പാദനം, വിശ്വാസ്യത എന്നിവയും പരിഗണിക്കുന്നു. ഹോട്ടലുകൾ, ബാങ്കുകൾ, വിദ്യാലയങ്ങൾ, ചില്ലറവിൽപനക്കാർ, വാർത്താവിനിമയ കമ്പനികൾ എന്നിവയുടെയെല്ലാം സേവനത്തെയാണ് നാം പരിഗണിക്കുന്നത്.

സവിശേഷ പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പൂർത്തിയാക്കയതിനുശേഷം പഠിതാവ്:

- ഗുണം, സാംഖ്യക ഗുണനിയന്ത്രണം, സാംഖ്യക പ്രക്രിയാനിയന്ത്രണം എന്നിവയെ പ്പറ്റിയുള്ള നിർവചനം കണ്ടെത്തുന്നു.
- ആകസ്മിക കാരണങ്ങൾ, നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ട കാരണങ്ങൾ എന്നിവ വേർതിരിച്ചറിയുന്നു.
- ചരങ്ങളുടേയും ഗുണാത്മക അളവുകളുടെയും ആശയം വിശദീകരിക്കുന്നു.
- ചരങ്ങളുടേയും, ഗുണാത്മക ചരങ്ങളുടേയും നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ നിർമിക്കുന്നു.

11.1 ഗുണം എന്നതിന്റെ അർത്ഥം

മൽസര രംഗത്തുള്ള ഉത്പന്നങ്ങളും സേവനങ്ങളും തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിലും തീരുമാനിക്കുന്നതിനും ഉള്ള ഘടകങ്ങളിൽ പരമപ്രധാനമാണ് ഗുണം. “എന്താണ് ഗുണം?” “ഗുണമേന്മ എന്താണ്?” തുടങ്ങിയ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം വളരെ എളുപ്പമല്ല. സേവനങ്ങളും ഉത്പന്നങ്ങളും അവയുടെ ആവശ്യകത അവ ഉപയോഗിക്കുന്നവർക്ക് നിർവഹിക്കപ്പെടുന്നുണ്ടോ എന്നതാണ് പരമ്പരാഗതമായി ഗുണത്തെ പറ്റിയുള്ള കാഴ്ചപ്പാട്. നമുക്ക് ഗുണത്തെപ്പറ്റിയുള്ള രണ്ടു നിർവചനങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം.

ഡോക്ടർ വാൾട്ടർ. എ ഷെവാർട്ട് ഗുണ നിയന്ത്രണ വിശകലനത്തിന്റെ പിതാവ് എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. അദ്ദേഹമാണ് സാംഖ്യക ഗുണ നിയന്ത്രണം എന്ന ആശയം രൂപപ്പെടുത്തിയത്

ഉപയോഗ യോഗ്യതയാണ് ഗുണം

ഉപയോഗയോഗ്യതയ്ക്ക് പൊതുവായ രണ്ടു കാഴ്ചപ്പാടുകൾ ഉണ്ട്: രൂപകല്പനയുടെ ഗുണവും സ്ഥിരതയും. എല്ലാ ഉത്പന്നങ്ങളും സേവനങ്ങളും പല തലത്തിലുള്ള ഗുണത്തിലാണ് ഉത്പാദിപ്പിക്കപ്പെടുന്നത്. ഇത്തരത്തിലുള്ള വ്യതിയാനം ബോധപൂർവ്വമാണ് എന്നതിനാൽ അവയെ രൂപകല്പനയുടെ ഗുണം എന്നു സാങ്കേതികമായി പറയുന്നത്. ഉദാഹരണത്തിന്, സുരക്ഷിതമായ യാത്രസൗകര്യം ഉണ്ടാക്കുക എന്നതാണ് എല്ലാ വാഹനങ്ങളുടേയും അടിസ്ഥാന ലക്ഷ്യം. എന്നിരുന്നാലും ഇവയെല്ലാം രൂപത്തിലും, ആകൃതിയിലും, പ്രകടനത്തിലും വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഈ വ്യത്യാസങ്ങൾ വാഹനങ്ങളുടെ ഇടയിൽ ബോധപൂർവം ഉണ്ടാക്കുന്നവയാണ്. സ്ഥിരതയുടെ ഗുണം എന്നത് ഒരു ഉത്പന്നം എത്രത്തോളം അതിന്റെ നിബന്ധനകൾ പാലിക്കുന്നു എന്ന് ഉറപ്പ് വരുത്തുന്നു.

സ്ഥിരതയുടെ ഗുണം താഴെ പറയുന്ന ഘടകങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു.

- ജോലിസ്ഥലത്തുള്ള പരിശീലനവും മേൽനോട്ടവും.
- പ്രക്രിയാനിയന്ത്രണങ്ങളുടെ വിവിധയിനങ്ങൾ.
- നടത്തപ്പെട്ട പരീക്ഷണങ്ങളും പരിശോധനയും.
- ഈ നടപടികൾ എത്രത്തോളം നടപ്പിലാക്കി എന്നതിന്റെ പിന്തുടർച്ച.
- ഗുണം ലഭ്യമാകുന്നതിന് അദ്ധ്വാനിക്കുന്ന സമൂഹത്തിന്റെ പ്രചോദനം.

ഗുണം വ്യതിയാനവുമായി വിപരീതാനു പാതത്തിലാണ്.

ഈ നിർവ്വചനം അർത്ഥമാക്കുന്നത് ഒരു ഉത്പന്നത്തിന്റെ വ്യതിയാനം കുറയുമ്പോൾ അതിന്റെ ഗുണം കൂടുന്നു. ഓരോ ഉത്പന്നവും ധാരാളം വസ്തുക്കൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നു. അവയെല്ലാമാണ് ഒരു ഉത്പന്നത്തിന്റെ ഗുണമായി ഉപഭോക്താവ് കരുതുന്നത്. ഈ അളുവുകോലുകളാണ് ഗുണത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ. ഗുണം എന്നതിന്റെ സവിശേഷതകൾ പല തരത്തിലുണ്ട്.

- **ഭൗതികം:** നീളം, ഭാരം, വോൾട്ടേജ്
- **ഇന്ദ്രിയസംബന്ധം:** രുചി, നിറം, രൂപം
- **സമയബന്ധിതം:** വിശ്വാസ്യത, സമിരത, പ്രയോജനക്ഷമത

11.2 ഗുണനിയന്ത്രണം (Quality Control)

സംഖ്യക ഗുണ നിയന്ത്രണ രീതികൾ ഉല്പാദനപ്രകിയയിൽ രണ്ടു ഘട്ടങ്ങളിലായി പ്രയോഗിക്കാം.

1. സാമഗ്രികൾ ഉല്പാദിപ്പിക്കുന്ന പ്രക്രിയയിൽ തന്നെ നിയന്ത്രണങ്ങൾ ഉണ്ടാകേണ്ടതുണ്ട്. അതിനെയാണ് പ്രക്രിയാനിയന്ത്രണം എന്നു പറയുന്നത്. ഉല്പാദന പ്രക്രിയയിൽ തുല്യ ഇടവേളകളിൽ സാമ്പിൾ എടുത്തുകൊണ്ടാണ് ഈ പരിശോധന നടത്തപ്പെടുന്നത്.
2. നിർമിക്കപ്പെട്ട ഉത്പന്നങ്ങളുടെ ഗുണം അതിന്റെ സ്വീകര്യതയെ മാനിച്ചുകൊണ്ട് പരിശോധിക്കുന്നു. ഇവിടെ സാമ്പിൾ ഇനങ്ങൾ യാദൃശ്ചികമായി പരിഗണിക്കപ്പെട്ട ഭാഗങ്ങളിൽ നിന്നും എടുക്കുന്നു. ഇത്തരം സാമ്പിൾ പരിശോധന രീതിയെയാണ് ഉത്പന്ന നിയന്ത്രണം അല്ലെങ്കിൽ സ്വീകര്യതാ സാമ്പിൾ രീതി എന്നു പറയുന്നത്.

പ്രകിയ നിയന്ത്രണത്തിനായി ചാർട്ടിംഗ് രീതികളും സാംഖ്യക നടപടിക്രമങ്ങളും ഷെവാർട്ട് വികസിപ്പിച്ചെടുത്തു. ഈ അധ്യായത്തിൽ നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ നിർമിക്കുന്നതിനും അവയെ വിശകലനം ചെയ്യുന്നതിനും സാംഖിക ഉപകരണങ്ങൾ എങ്ങനെയാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നതെന്നും നാം മനസിലാക്കുന്നു.

11.3 സാംഖ്യക പ്രകിയാ നിയന്ത്രണം (Statistical Process Control)

ഒരു ഉത്പന്നം ഉപഭോക്താവിന്റെ പ്രതീക്ഷക്ക് അനുസരിച്ചോ, അതിലപ്പുറമോ ആകണമെങ്കിൽ അത് വളരെ സ്ഥിരമായ ഒരു പ്രക്രിയയിലൂടെ നിർമ്മിക്കപ്പെട്ടതാകണം. അതായത് പ്രക്രിയ, ഉത്പന്നത്തിന്റെ സവിശേഷഗുണങ്ങളിലെ ചെറിയ വ്യതിയാനം പോലും കൈകാര്യം ചെയ്യുവാൻ സാധിക്കുന്നതായിരിക്കണം. സാംഖ്യക പ്രക്രിയാ നിയന്ത്രണം എന്നത് പ്രക്രിയയുടെ സ്ഥിരത നേടുവാനും കഴിവ് വർദ്ധിപ്പിക്കുവാനുമുള്ള ശക്തിയായ ഒരു ഉപകരണം കൂടിയാണ്. ഷെവാർട്ടിന്റെ നിയന്ത്രണ ചാർട്ട് എന്നത് സാമ്പിൾ വിലകൾ വ്യതിയാനങ്ങളുടെ സാമാന്യ പരിധിക്കുള്ളിലാണോ അന്തരത്തിലാണോ എന്നറിയുവാനുള്ള ഗ്രാഫാണ്.

11.4 വ്യതിയാനവും വ്യതിയാന കാരണങ്ങളും

ഒരു പ്രക്രിയ എന്നത് നിക്ഷേപത്തിന്റെയും ഉല്പന്നത്തിനന്റേയും മൂല്യവർധിത പരിവർത്തനമാണ് ഒരു പ്രക്രിയയുടെ നിക്ഷേപവും ഉല്പന്നവും യന്ത്രങ്ങൾ, നിർമ്മാണ വസ്തുക്കൾ, രീതികൾ, അളവുകൾ, ജനങ്ങൾ, ചുറ്റുപാടുകൾ എന്നിവയെ ഉൾക്കൊള്ളുവാൻ കഴിയുന്നതായിരിക്കും. ഓരോ ഉല്പന്നവും ഒരു വ്യതിയാനത്തിന്റെ ഉറവിടമാണ്. ഉല്പന്നത്തിലുള്ള വ്യതിയാനം മോശമായ സേവനം, ഉത്പന്നത്തിന്റെ മോശമായ ഗുണം (രണ്ടും ഒരു പക്ഷേ ഉപഭോക്താവിന്റെ തൃപ്തിയെ കുറച്ചേക്കാം) എന്നതിലേക്ക് നയിക്കുന്നതായിരിക്കും. നിർമാണ പ്രക്രിയയിലെ വ്യതിയാനം ഗുണത്തിലെ പോരായ്മയിലേക്കും ഉത്പന്നത്തിന്റെ സമിരതയില്ലായ്മയിലേക്കും നയിക്കുന്നു. ബുദ്ധിയുള്ള ഉത്പാദകർ ഇതു മനസ്സിലാക്കുന്നു. ആയതിനാൽ അവർ എല്ലാ നിർമാണ സംവിധാനങ്ങളിലും വ്യതിയാനം കുറവുള്ള രീതികൾ കാഴ്ചവെക്കുന്നു.

ഇനി നമുക്ക് പലതരത്തിലുള്ള വ്യതിയാനങ്ങളെപ്പറ്റി നോക്കാം. ഒരു കടയിൽ വില്പനയിക്ക് വച്ചിരിക്കുന്ന ശീതളപാനീയങ്ങളെ നോക്കുകയാണെങ്കിൽ പലതിലും ഒരേ അളവിൽ കൃത്യമായ നിറച്ചിരിക്കുന്നതായി കാണുവാൻ സാധിക്കുകയില്ല. ചിലത് അല്പം കൂടിയിരിക്കും മറ്റു ചിലത് അല്പം കുറഞ്ഞുമിരിക്കും.

വ്യതിയാനത്തിന്റെ ആകസ്മിക കാരണങ്ങൾ (Chance causes of variation)

ഉത്പാദന പ്രക്രിയയിൽ – അത് എത്ര നല്ലതായി രൂപകൽപന ചെയ്തതായാലും ശ്രദ്ധയോടെ സംരക്ഷിക്കപ്പെടുന്നതായാലും – ഒരു നിശ്ചിത അളവിൽ സ്വാഭാവികമായ അന്തർലീനമായ വ്യതിയാനം എല്ലായിപ്പോഴും നിലനില്ക്കും. ഈ സ്വാഭാവിക വ്യതിയാനം എന്നത് പല ചെറുതും, അന്തർലീനമായതും ഒഴിച്ചുകൂടുവാൻ സാധിക്കാത്തതും ആയ പല കാരണങ്ങളുടേയും സഞ്ചിത ഫലമാണ്. സാംഖ്യക ഗുണനിയന്ത്രണത്തിൽ ഈ സ്വാഭാവിക വ്യതിയാനത്തിന് കാരണം ആകസ്മിക കാരണങ്ങളാണ്.

ആകസ്മിക വ്യതിയാനത്തിന്റെ കാരണങ്ങൾ കൊണ്ട് മാത്രം നടക്കുന്ന ഒരു പ്രക്രിയ സാംഖ്യക നിയന്ത്രണത്തിലാണെന്നു പറയപ്പെടുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന്, 'നീര' എന്ന ശീതള പാനീയത്തിന്റെ ഒരു കുപ്പിയിൽ ശരാശരി 300 ml നീരയുണ്ടെങ്കിൽ, സ്വാഭാവിക വ്യതിയാനം 295 ml നും 305 ml ഇടയിലാണെന്ന് നാം തീരുമാനിക്കും. ഇങ്ങനെ ആയാലും നാം ഈ അന്തരത്തിൽ തന്നെയാണോ ഉത്പാദന പ്രക്രിയ നടക്കുന്നതെന്ന് വീക്ഷിക്കും. ഈ അന്തരത്തിന് അപ്പുറം ഉത്പാദനം പോകുന്നുവെങ്കിൽ (ശരാശരി 290 ml ആണ് കുപ്പിയിലെങ്കിൽ), പ്രക്രിയയ്ക്ക് പ്രശ്നമുണ്ടെന്ന് നാം വിശ്വസിക്കേണ്ടിവരും. കാരണം ഇവിടുത്തെ വ്യതിയാനം സ്വാഭാവിക വ്യതിയാനത്തേക്കാൾ കൂടുതലാണ്.

വ്യതിയാനത്തിന്റെ നിയുക്ത കാരണങ്ങൾ (Assignable causes of variation)

ഒരു പ്രക്രിയയുടെ ഫലത്തിൽ മറ്റൊരുതരത്തിലുള്ള വ്യതിയാനവും ചിലപ്പോൾ ഉണ്ടായെന്ന് വരാം. ഈ വ്യതിയാനം പ്രധാനമായും താഴെ പറയുന്ന മൂന്നു ഉറവിടങ്ങളിൽ നിന്നുമാണ് ഉണ്ടാവുന്നത്.

1. വേണ്ടരീതിയിൽ അല്ലാതെ നിയന്ത്രിക്കപ്പെട്ട അല്ലെങ്കിൽ ശരിയാക്കപ്പെട്ട യന്ത്രങ്ങൾ.
2. പ്രവർത്തിപ്പിക്കുന്ന ആളിന്റെ തെറ്റുകൾ.
3. മോശമായ അസംസ്കൃത പദാർഥങ്ങൾ.

ഇത്തരത്തിലുള്ള വ്യതിയാനങ്ങൾ സാധാരണമായി സ്വാഭാവിക വ്യതിയാനങ്ങളേക്കാലും കൂടുതലായിരിക്കും. സാധാരണയായി അത് പ്രക്രിയാ പ്രകടനത്തിന്റെ അസ്വീകാര്യമായ തലത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു. ഇത്തരം വ്യതിയാനങ്ങളെ നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ട കാരണങ്ങൾ മൂലമുള്ള വ്യതിയാനങ്ങൾ എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ഇവ ആകസ്മിക കാരണങ്ങൾ മൂലമല്ല ഉണ്ടാകുന്നത്. ഈ തരത്തിലുള്ള വ്യതിയാനങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കപ്പെടുമ്പോൾ അവയുടെ കാരണങ്ങൾ കണ്ടെത്തുവാനും നീക്കം ചെയ്യുവാനും കഴിയുന്നു. നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ട കാരണങ്ങളുടെ സാന്നിധ്യത്തിൽ കൈകാര്യം ചെയ്യുന്ന പ്രക്രിയ നിയന്ത്രണാതീതമെന്ന് പറയുന്നു.

ശീതളപാനീയത്തിന്റെ ഉദാഹരണത്തിൽ 290 ml പാനീയം നിറഞ്ഞ ഒരു കുപ്പി പ്രക്രിയയിലെ തകരാറിനെ കാണിക്കുന്നു. യന്ത്രം വേണ്ട രീതിയിൽ പുനക്രമീകരിക്കേണ്ടതാണ്. ഇത് ഒരു നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ട വ്യതിയാനകാരണമാണ്. ഒരു പ്രത്യേക കാരണമായി നമുക്ക് വ്യതിയാനത്തെ നിശ്ചയിക്കാം. (യന്ത്രം പുന: ക്രമീകരിക്കപ്പെടണം). നമുക്ക് ആ പ്രശ്നം പരിഹരിക്കാൻ കഴിയും (യന്ത്രത്തെ പുനഃക്രമീകരിക്കുക).

ആകസ്മിക വ്യതിയാനം: യാദൃശ്ചിക സ്വാഭാവമുള്ള വ്യതിയാനം ഉപകരണത്തിലോ അസംസ്കൃത വസ്തുക്കളിലോ ഉള്ള കാര്യമായ മാറ്റം ഇല്ലെങ്കിൽ ഇത്തരം വ്യതിയാനം പൂർണമായും നിർമാർജ്ജനം ചെയ്യുവാൻ സാധിക്കില്ല.

നിയുക്ത വ്യതിയാനം: യാദൃശ്ചികമല്ലാത്ത വ്യതിയാനം. ഇതിന്റെ കാരണം കണ്ടെത്തി ഇതിനെ നിർമാർജനം ചെയ്യുവാനോ ലഘൂകരിക്കുവാനോ സാധിക്കും. യഥാവിധി ക്രമീകരിക്കാത്ത യന്ത്രങ്ങൾ, കൈകാര്യം ചെയ്യുന്ന ആളിന്റെ തെറ്റുകൾ മോശപ്പെട്ട അസംസ്കൃത വസ്തുകൾ ഇവ ഉൾക്കൊള്ളാൻ പറ്റാത്തവയാണ്, അവ ഉത്പന്നത്തിന്റെ ഗുണത്തിനേയും ഉപയോഗത്തിനേയും ബാധിക്കുന്നു. ഇത്തരം വ്യതിയാനങ്ങളെ നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ട വ്യതിയാനങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

ആകസ്മിക വ്യതിയാനവും നിയുക്ത വ്യതിയാനവും തമ്മിലുള്ള ഒരു ചെറിയ താരതമ്യമാണ് ചുവടെ പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

ആകസ്മിക കാരണങ്ങൾ	നിയുക്ത കാരണങ്ങൾ
1. വ്യക്തിപരമായ നിരവധി കാരണങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നു	1. ഒന്നോ അതിൽ കുറവോ വ്യക്തിഗത കാരണങ്ങൾ മാത്രം ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.
2. ഒരൊറ്റ ആകസ്മിക കാരണം, ഒരു നിമിഷത്തെ വ്യതിയാനത്തിനു കാരണമാകുന്നു.	2. നിയുക്ത കാരണങ്ങൾ നിരവധി വ്യതിയാനങ്ങൾക്കു കാരണമാകുന്നു.
3. ആകസ്മിക കാരണത്തിന്റെ വ്യക്തമായ ചില കാരണങ്ങൾ a. അസംസ്കൃത വസ്തുക്കളിലുള്ള ചെറിയ വ്യതിയാനം. b. യന്ത്രത്തിലുള്ള ചെറിയ വ്യതിയാനം. c. ഉപകരണങ്ങൾ കൈകാര്യം ചെയ്യുവാനും നിയന്ത്രണങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുന്നതിനുമുള്ള മാനുഷികമായ അപര്യാപ്തത.	3. നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ട കാരണങ്ങൾക്കുള്ള ചില കാരണങ്ങൾ a. കേടുവന്ന അസംസ്കൃതവസ്തുക്കളുടെ കൂട്ടം b. പരിശീലനം സിദ്ധിക്കാത്ത തൊഴിലാളികളെ ഉപയോഗിക്കൽ.
4. പ്രക്രിയയിൽ നിന്നും സാമ്പത്തികമായി ആകസ്മിക വ്യതിയാനങ്ങൾ നിർമാർജനം ചെയ്യുവാൻ കഴിയുകയില്ല.	4. നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ട കാരണങ്ങളുടെ സാന്നിധ്യം തിരിച്ചറിയുവാനും അതാത് നടപടികൾ എടുത്തു അവയെ നിർമാർജനം ചെയ്യുവാനും കഴിയും.

അങ്ങനെയെങ്കിൽ സാംഖ്യക ഗുണ നിയന്ത്രണം താഴെ പറയുന്നതരത്തിൽ നിർവചിക്കാം.

സാംഖ്യകമായ അപഗ്രഥനത്തിലൂടെ നിരീക്ഷണത്തിനും, നിയന്ത്രണത്തിനും, പ്രക്രിയ പുരോഗതിക്കും വേണ്ടിയുള്ള രീതിയാണിത്. അടിസ്ഥാനപരമായി 4 ഘട്ടങ്ങൾ ഇതിൽ ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.

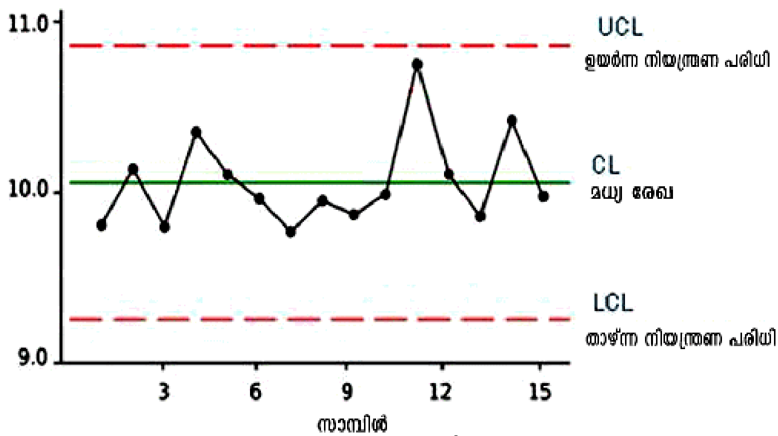
1. പ്രക്രിയയെ അളക്കുന്നു.
2. പ്രക്രിയയിലുള്ള വ്യതിയാനത്തെ നിർമാർജനം ചെയ്ത് അതിനെ സ്ഥിരതയുള്ളതാക്കുന്നു.
3. പ്രക്രിയയെ നിരീക്ഷിക്കുന്നു.
4. പ്രക്രിയയെ ലക്ഷ്യവിലയിലേക്ക് എത്തിക്കുവാനുള്ള പുരോഗതിയുണ്ടാക്കുന്നു.

11.5 നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ (Control Charts)

90 വർഷങ്ങൾക്കുമേറെയായി നിലവിലുള്ളതാണ് നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ. വാർട്ടർ എ. ഷെവേർട്ട് ആണ് 1920 ൽ ബെൽ പരീക്ഷണശാലയിൽ ഈ നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ വികസിപ്പിച്ചെടുത്തത്. നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ ഉത്പാദന പ്രക്രിയ നിരീക്ഷിക്കുന്നതിനും അപ്രകാരം ഉത്പാദനം നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ട വ്യതിയാനം ഇല്ലാതെ, സാധാരണ പരിധിക്കുള്ളിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നുണ്ടെന്ന് ഉറപ്പുവരുത്തുന്നതിനുമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. അതായത് പ്രക്രിയ നിയന്ത്രണാവസ്ഥയിലാണെന്ന് നമുക്ക് ഉറപ്പുവരുത്തേണ്ടതുണ്ട്. ഉത്പാദന പ്രക്രിയ നിരീക്ഷിക്കുവാൻ വിവിധ തരത്തിലുള്ള നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ എങ്ങനെ വികസിപ്പിക്കുമെന്നും ഉപയോഗിക്കുമെന്നും ഇനി നമുക്ക് മനസിലാക്കാം.

ഒരു നിയന്ത്രണ ചാർട്ട് (പ്രക്രിയാചാർട്ട് അല്ലെങ്കിൽ ഗുണനിയന്ത്രണ ചാർട്ട്) എന്നത് ഒരു പ്രക്രിയയിൽ നിന്നുമുള്ള ഡാറ്റ, അതിന്റെ സാധാരണ വ്യതിയാന പരിധിയിൽ തന്നെയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുന്നു. ഒരു നിയന്ത്രണ ചാർട്ടിന് ഉയർന്ന നിയന്ത്രണ പരിധി (UCL), താഴ്ന്ന നിയന്ത്രണ പരിധി (LCL) എന്നിവയുണ്ട്. ഇവയാണ് നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ട വ്യതിയാനവും, ആകസ്മിക വ്യതിയാനവും വേർതിരിക്കുന്നതു. നിയന്ത്രണ ചാർട്ടിലെ മധ്യരേഖ (CL) എന്നത് വ്യതിയാനം തീരെ ഇല്ല എന്നതിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഒരു ഡാറ്റയുടെ ചാർട്ട് വരക്കുമ്പോൾ അതിലെ ഒന്നോ അതിലധികമോ സാമ്പിളുകൾ നിയന്ത്രണരേഖയ്ക്കു പുറത്ത് പോകുകയാണെങ്കിൽ ആ പ്രക്രിയ നിയന്ത്രണത്തിനതീതമാണെന്നു പറയുന്നു.

നിയന്ത്രണചാർട്ടിന്റെ ഒരു സാമാന്യ രൂപം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 11.1

11.6 വിവിധയിനം നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ (Types of Control Charts)

ഒരു ഉത്പന്നത്തിന്റെ സവിശേഷതകളെ നിരീക്ഷിക്കുവാനാണ് നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. (ഒരു. പെട്ടിയുടെ ഭാരം, ഒരു പെട്ടിയിലെ ചോക്കലേറ്റുകളുടെ എണ്ണം, നിറയ്ക്കപ്പെട്ട ശീതള പാനീയത്തിന്റെ വ്യാപ്തി തുടങ്ങിയവ). നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട വിവിധതരം സവിശേഷതകളെ പ്രധാനമായും രണ്ടു ഗ്രൂപ്പുകളായി തരംതിരിക്കാം: ചരങ്ങളും, ഗുണാത്മക ചരങ്ങളും

ചരങ്ങളുടെ നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ

തുടർച്ചയായി അളന്നു തിട്ടപ്പെടുത്തുവാൻ സാധിക്കുന്ന വിലകളായ ഉയരം, ഭാരം, വ്യാപ്തം തുടങ്ങിയ ചരങ്ങളുടെ സവിശേഷതകളെ നിരീക്ഷിക്കുവാനാണ് ചരങ്ങളുടെ നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഒരു ശീതളപാനീയം കുപ്പിയിൽ നിറയ്ക്കുന്നതും അളക്കുന്നതും ഇത്തരം ചരമാണ്. കാരണം അത് പലതവണ അളക്കുകയും പല വിലകൾ സ്വീകരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. പഞ്ചസാര സഞ്ചിയുടെ ഭാരം ഓവനിലെ താപനില, ഒരു ബാൾ ബെയറിങ്ങിന്റെ വ്യാസം തുടങ്ങിയവ മറ്റുദാഹരണങ്ങൾ ആണ്: ഒരു ഡാറ്റയുടെ കേന്ദ്ര പ്രവണതാമാനം അളക്കുവാൻ സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന നിയന്ത്രണ ചാർട്ട് ആണ് $\bar{x}$ ചാർട്ട്. വ്യതിയാനം അളക്കുവാൻ R-ചാർട്ട് ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ഗുണാത്മകചരങ്ങളുടെ നിയന്ത്രണ ചാർട്ട്

വേറിട്ട വിലകളുടെ സവിശേഷതകൾ നിരീക്ഷിക്കുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്നു. ചിലപ്പോൾ അവ "ആണ്" (ഉണ്ട്) അല്ലെങ്കിൽ "അല്ല" (ഇല്ല) എന്ന ലഘുവായ തിരുമാനങ്ങളിലൂടെ അളക്കുവാൻ കഴിയും. നിറം, രുചി, ഗുണം തുടങ്ങിയവ ഇതിനുദാഹരണങ്ങളാണ്. ഗുണാത്മക ചരങ്ങളുടെ നിരീക്ഷണം, ചരങ്ങളുടേതിനേക്കാൾ കുറഞ്ഞസമയം എടുക്കുന്നു. കാരണം, ചരങ്ങളെ അളക്കേണ്ടതായിട്ടുണ്ട് (ശീതള പാനീയത്തിന്റെ കുപ്പി 298 ml ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.)

ഗുണാത്മക ചരത്തിന് ഒരു തീരുമാനം മതി. ഉണ്ട് അല്ലെങ്കിൽ ഇല്ല എന്ന തീരുമാനം. സ്വീകാര്യമാണ് അല്ലെങ്കിൽ സ്വീകാര്യമല്ല.

1. ആപ്പിളുകൾ നല്ലതാണ് അല്ലെങ്കിൽ മോശമാണ്.
2. ഇറച്ചി നല്ലതാണ് അല്ലെങ്കിൽ മോശമാണ്.
3. ഫ്യൂസിന് കേടുണ്ട് അല്ലെങ്കിൽ കേടില്ല.
4. ബൾബ് പ്രവർത്തിക്കുന്നു അല്ലെങ്കിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല.

ഒരു കൂട്ടത്തിലുള്ള തെറ്റുകൾ (കേടുകൾ) നമുക്ക് എണ്ണുവാൻ കഴിയും. ഇത്തരം സവിശേഷതകളെ നിരീക്ഷിക്കുന്നതിനുപയോഗിക്കുന്ന ചാർട്ടുകളാണ് np ചാർട്ടും p-ചാർട്ടും.

അടുത്തതായി വിവിധതരത്തിലുള്ള നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ എങ്ങനെ നിർമിക്കാം എന്നു നോക്കാം.

11.7 നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ നിർമിക്കുന്ന വിധം

നിയന്ത്രണ ചാർട്ട് നിർമിക്കുന്നതിന് നാം ഒരു പ്രക്രിയയുടെ ഉത്പന്നത്തിന്റെ സാമ്പിൾ നിശ്ചയ സമയത്തിനുള്ളിൽ ശേഖരിക്കുന്നു. ഈ സാമ്പിളുകളെ ഉപഗ്രൂപ്പുകൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഈ ഓരോ ഉപഗ്രൂപ്പിനും (സാമ്പിൾ), ഒരു സാമ്പിൾ സാംഖ്യജം (t' എന്നിരിക്കട്ടെ) കണക്കാക്കുക. സാധാരണ ഉപയോഗിക്കുന്ന സാമ്പിളിനങ്ങൾ കേടുവന്നവയുടെ അനുപാതം, കേടുവന്നവയുടെ എണ്ണം, ഒരു ഉപഗ്രൂപ്പിന്റെ മാധ്യം, വ്യതിയാനം എന്നിവയാണ്. ഈ വിലകൾ നിശ്ചിത സമയത്തിനുസരിച്ച് നാം അടയാളപ്പെടുത്തി മധ്യരേഖയുടെ ഇരുവശങ്ങളിലായി നിയന്ത്രണ പരിധികൾ കൂടി ഉൾപ്പെടുത്തി നാം ചാർട്ടിനെ പ്രതിനിധികരിക്കുന്നു. നിയന്ത്രണ ചാർട്ടിന്റെ ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ രൂപം 3 σ യുടെ ഉള്ളിലെ നിയന്ത്രണ പരിധിയിലായിരിക്കും. ഇത്തരം നിയന്ത്രണ പരിധിയെയാണ് ഷെവാർട്ടിന്റെ നിയന്ത്രണ പരിധികൾ എന്നു

പറയുന്നത്. *t* എന്നത് ഒരു ചാർട്ട് വരയ്ക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന സാംഖ്യജം ആയാൽ

മധ്യരേഖ $CL = \mu_t$

ഉയർന്ന നിയന്ത്രണ രേഖ $UCL = \mu_t + 3\sigma_t$

താഴ്ന്ന നിയന്ത്രണ ലേഖ $LCL = \mu_t - 3\sigma_t$

എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഇവിടെ μ_t, σ_t എന്നിവ *t* യുടെ മാധ്യവും, മാനകവ്യതിയാനവും ആകുന്നു. സാഖ്യജം t യുടെ പരീക്ഷിക്കപ്പെട്ട വിലകൾ നിയന്ത്രണ പരിധിയ്ക്ക് പുറത്ത് പോകുകയാണെങ്കിൽ പ്രക്രിയ നിയന്ത്രണ വിധേയമല്ലെന്നു പറയുന്നു. ഉത്പാദനം നിർത്തിവെച്ച് അവയുടെ കാരണങ്ങൾ കണ്ടെത്തി അവയെ പരിഹരിക്കുന്നു.

11.8 ചരങ്ങളുടെ നിയന്ത്രണ ചാർട്ട്

ഈ വിഭാഗത്തിൽ രണ്ടു രീതിയിലുള്ള നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ നാം ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

$\overline{x}$ -ചാർട്ടും R-ചാർട്ടും. രണ്ടും ഒരേ സമയം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$\overline{x}$ - ചാർട്ട്

ഒരു മാധ്യനിയന്ത്രണ ചാർട്ടിനെയാണ് സാധാരണയായി $\overline{x}$ ചാർട്ട് എന്നു വിളിയ്ക്കുന്നത്. ഒരു പ്രക്രിയയുടെ ശരാശരിയിലെ വ്യതിയാനത്തെ നിരീക്ഷിക്കുവാൻ ഇത് ഉപയോഗിയ്ക്കുന്നു. ഒരു മാധ്യചാർട്ട് ഉണ്ടാക്കുവാൻ നാം ആദ്യം ചാർട്ടിന്റെ മധ്യരേഖ നിർമ്മിക്കുന്നു. ഇതിനായി നാം ഒന്നിലധികം സാമ്പിളുകൾ എടുത്ത് അവയുടെ മാധ്യം കാണുന്നു. സാധാരണയായി 4 അല്ലെങ്കിൽ 5 വിലകളുള്ള ചെറിയ സാമ്പിളുകൾ ആയിരിക്കും. ഓരോ സാമ്പിളിനും അതിന്റേതായ മാധ്യമുണ്ട്. സാമ്പിൾ മാധ്യമാണ് വരക്കുവാനുള്ള സംഖ്യജം. എടുത്തിട്ടുള്ള '*m*' സാമ്പിളുകളുടെ മാധ്യത്തിന്റെ മാധ്യമാണ് മധ്യരേഖയായി കണക്കാക്കുന്നത്. '*m*' എന്നത് പ്രക്രിയയുടെ തുല്യ ഇടവേളകളിൽ എടുത്തിട്ടുള്ള സാമ്പിളുകളുടെ എണ്ണമാക്കുന്നു.

$$CL = \overline{\overline{x}} = \frac{\overline{x_1} + \overline{x_2} + \cdots + \overline{x_m}}{m} = \frac{\sum \overline{x}}{m}$$

ഉയർന്ന നിയന്ത്രണ പരിധിയും, താഴ്ന്ന നിയന്ത്രണ പരിധിയും നിർമിക്കുവാൻ താഴെ പറയുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം.

$$UCL = \overline{\overline{x}} + A_2\overline{R}, \; LCL = \overline{\overline{x}} - A_2\overline{R},$$

$\overline{R} = \frac{R_1 + R_2 + \cdots + R_m}{m}$, '*m*' സാമ്പിളുകളുടെ അന്തരത്തിന്റെ മാധ്യവും A_2 സാഖ്യക നിയന്ത്രണ പട്ടികയിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്ന സറിരവിലയുമാണ്. A_2 ന്റെ വില സാമ്പിളിന്റെ എണ്ണത്തെ അനുസരിച്ചിരിക്കുന്നു.

നിയന്ത്രണ രേഖകളും മധ്യരേഖയും ഗ്രാഫ്പേപ്പറിൽ വരയ്ക്കുന്നു. സാമ്പിൾ മാധ്യത്തിന്റെ വിലകൾ y അക്ഷത്തിലും സാമ്പിളിന്റെ എണ്ണം x അക്ഷത്തിലും എടുക്കുന്നു. ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുക്കൾ നിയന്ത്രണ പരിധിക്കപ്പുറത്താണെങ്കിൽ പ്രക്രിയ ശരാശരിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് നിയന്ത്രണത്തിനതീതമാണെന്നു പറയുന്നു.

വിശദീകരണം 11.1

10 ഔൺസ് ജ്യൂസ് ഉൾക്കൊള്ളുന്ന കാനുകളിൽ ഒരു കമ്പനി മാമ്പഴ ജ്യൂസ് ഉണ്ടാക്കുന്നു. കാനുകളിൽ നിറച്ചതിനുശേഷം ജ്യൂസിന്റെ ഭാരം നിർണയിക്കുന്നു. അനിയതമായി 20 സാമ്പിളുകൾ എടുക്കുന്നു. (30 മിനിട്ടുന്റെ ഇടവേളകളിൽ) ഓരോ സാമ്പിളുകളും 4 കാനുകൾ വീതം. സാമ്പിൾ ഭാരം താഴെ പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതു പ്രകാരമാണ്. പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്ന അളവുകൾ 10 ഔൺസിൽ അധികമുള്ള ഭാരത്തിന്റെ 0.01 മടങ്ങാണ്. ഉദാഹരണമായി സാമ്പിൾ 10.15 ഔൺസാണെങ്കിൽ അതിനെ 15 യുണിറ്റായി കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. $\bar{x}$ - ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക.

സാമ്പിൾ	കാനുകളുടെ ഭാരം (4 കാനുകളുടെ സാമ്പിൾ n=4)			
1	15	12	13	20
2	10	8	8	14
3	8	15	17	10
4	12	17	11	12
5	18	13	15	4
6	20	16	14	20
7	15	19	23	17
8	13	23	14	16
9	9	8	18	5
10	6	10	24	20
11	5	12	20	15
12	3	15	18	18
13	6	18	12	10
14	12	9	15	18
15	15	15	6	16
16	18	17	8	15
17	13	16	5	4
18	10	20	8	10
19	5	15	10	12
20	6	14	12	14

പരിഹാരം

20 സാമ്പിളിന് മാധ്യത്തിന്റെയും അന്തരത്തിന്റെയും പട്ടിക ഉണ്ടാക്കുന്നു.

സാമ്പിൾ	കാനുകളുടെ ഭാരം				ആകെ	ശരാശരി	അന്തരം
1	15	12	13	20	60	15.00	8
2	10	8	8	14	40	10.00	6
3	8	15	17	10	50	12.50	9
4	12	17	11	12	52	13.00	6
5	18	13	15	4	50	12.50	14
6	20	16	14	20	70	17.50	6
7	15	19	23	17	74	18.50	8
8	13	23	14	16	66	16.50	10
9	9	8	18	5	40	10.00	13
10	6	10	24	20	60	15.00	18
11	5	12	20	15	52	13.00	15
12	3	15	18	18	54	13.50	15
13	6	18	12	10	46	11.50	12
14	12	9	15	18	54	13.50	9
15	15	15	6	16	52	13.00	10
16	18	17	8	15	58	14.50	10
17	13	16	5	4	38	9.50	12
18	10	20	8	10	48	12.00	12
19	5	15	10	12	42	10.50	10
20	6	14	12	14	46	11.50	8
Total						**263.00**	**211**

$$\bar{\bar{x}} = \frac{263}{20} = 13.15$$

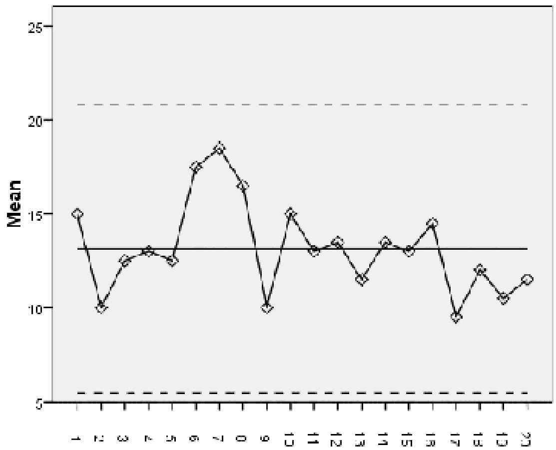
$$\bar{R} = \frac{211}{20} = 10.55$$

$n = 4$ ന് $A_2 = 0.729$ (പട്ടികയിൽ നിന്നും)

UCL = 13.15 +(0.729 x 10.55) =13.15 +7.69 = 20.84

LCL = 13.15 – 7.69 = 5.46

$\overline{X}$ –ചാർട്ട്



ചിത്രം 11.2

എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും നിയന്ത്ര പരിധികൾക്ക് ഉള്ളിലായതിനാൽ പ്രക്രിയ നിയന്ത്രണ വിധേയമാണ്.

റേഞ്ച് ചാർട്ട് (പരിധിചാർട്ട്)

റേഞ്ച് ചാർട്ടിനെ R ചാർട്ട് എന്നും വിളിക്കുന്നു. ഒരു പ്രക്രിയയുടെ വ്യതിയാനത്തിലെ മാറ്റങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കുവാൻ അത് ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇതു നിർമിക്കുവാൻ പലസാമ്പിളുകൾ എടുത്ത് അവ ഓരോന്നിന്റേയും റേഞ്ച് നാം കണക്കാക്കുന്നു. ഈ സാമ്പിൾ റേഞ്ച് ആണ് ചാർട്ട് വരയ്ക്കുനന്നതിനുള്ള സാംഖ്യജം. എല്ലാ 'm' സാമ്പിൾ റേഞ്ചുകളുടേയും മാധ്യം കണ്ടു പിടിച്ചുകൊണ്ട് മധ്യരേഖ വരയ്ക്കുന്നു. ഉയർന്ന പരിധിയും, താഴ്ന്ന പരിധിയും മധ്യരേഖയും താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിധം കണക്കാക്കുന്നു.

$$CL=\overline{R}=\frac{R_1+R_2+\cdots+R_m}{m}$$

$$UCL=D_4\overline{R}$$

$$LCL=D_3\overline{R}$$

D_3 , D_4 എന്നീ സ്ഥിര സംഖ്യയുടെ വിലകൾ പട്ടികയിൽ നിന്നും സാമ്പിന്റെ വലുപ്പമായ 'n' അനുസരിച്ച് കണ്ടു പിടിക്കുന്നു. മധ്യരേഖയും, നിയന്ത്രണ പരിധികളും ഒരു ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ വരയ്ക്കുന്നു. സാമ്പിൾ റേഞ്ചിന്റെ വില y അക്ഷത്തിലും സാമ്പിൾ സംഖ്യകൾ x അക്ഷത്തിലും രേഖപ്പെടുത്തുന്നു. ഏതെങ്കിലും വില നിയന്ത്രണ രേഖകൾക്കപ്പുറത്താണെങ്കിൽ പ്രക്രിയ വ്യതിയാനവുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തിക്കൊണ്ട് നിയന്ത്രണത്തിനതീതമാണെന്ന് പറയാം.

വിശദീകരണം

വിശദീകരണം 11.2

വിശദീകരണം 11.1 ലെ ഡാറ്റയ്ക്ക് R ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക.

പരിഹാരം

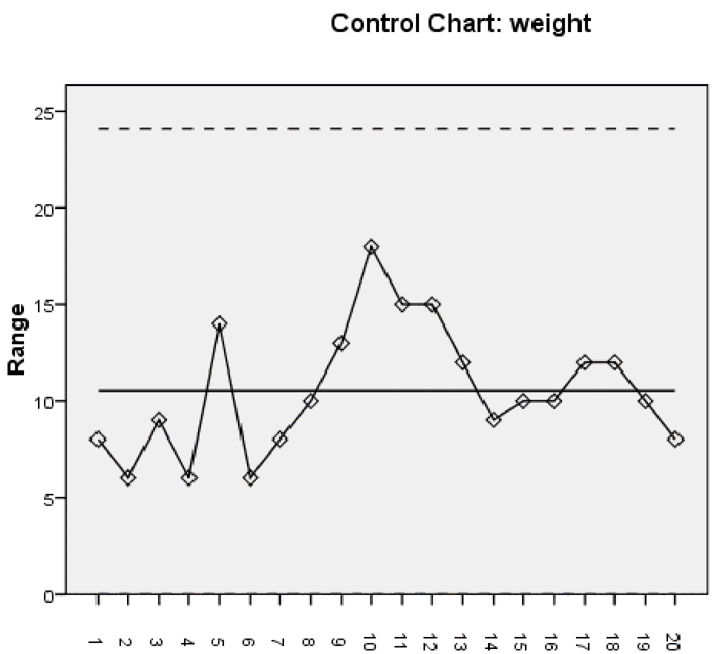
11.1 ലെ വിശദീകരണത്തിൽ നാം റേഞ്ച്കളുടെ മാധ്യം കണക്കാക്കുന്നു.

$$CL=\overline{R}=\frac{R_1+R_2+\cdots+R_m}{m}=10.55$$

$$UCL=D_4\overline{R}=2.282 \text{ x } 10.55=24.08$$

$$LCL=D_3\overline{R}=0 \text{ x } 10.55=0$$

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിധം R ചാർട്ട് വരക്കുന്നു.



ചിത്രം 11.3

പ്രക്രിയ വ്യതിയാനം നിയന്ത്രണത്തിനു വിധേയമാണ്.

വിശദീകരണം 11.3

20 സാമ്പിളുകളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട (4 എണ്ണം വീതമുള്ള സാമ്പിൾ) ഒരു ഡാറ്റ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. $\bar{x}$, R എന്നി നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ വരക്കുക.

Sl.No	x-bar	R	Sl.No	x-bar	R
1	15.0	8	11	13.00	15
2	10.0	6	12	13.50	15
3	12.5	6	13	11.50	15
4	13.0	6	14	13.50	6
5	12.5	14	15	13.00	9
6	17.5	6	16	14.50	10
7	18.5	8	17	9.50	12
8	16.5	10	18	12.00	12
9	10.0	13	19	10.50	10
10	15.0	18	20	11.50	8

പരിഹാരം:

ക്രമ സംഖ്യ	x-ബാർ	R
1	15,0	8
2	10,0	6
3	12,5	6
4	13,0	6
5	12,5	14
6	17,5	6
7	18,5	8
8	16,5	10
9	10,0	13
10	15,0	18
11	13,00	15
12	13,50	15
13	11,50	15
14	13,50	6
15	13,00	9

16	14.50	10
17	9.50	12
18	12.00	12
19	10.50	10
20	11.50	8
	263.0	**207**

$\overline{x}$ ചാർട്ടിന്റെ നിയന്ത്രണ പരിധികൾ

$$\overline{\overline{x}} = \frac{263}{20} = 13.5$$

$$\overline{R} = \frac{207}{20} = 10.35$$

$$UCL = \overline{\overline{x}} + A_2\overline{R} = 13.5 + 0.729 \times 10.35 = 13.5 + 7.545 = 21.04$$

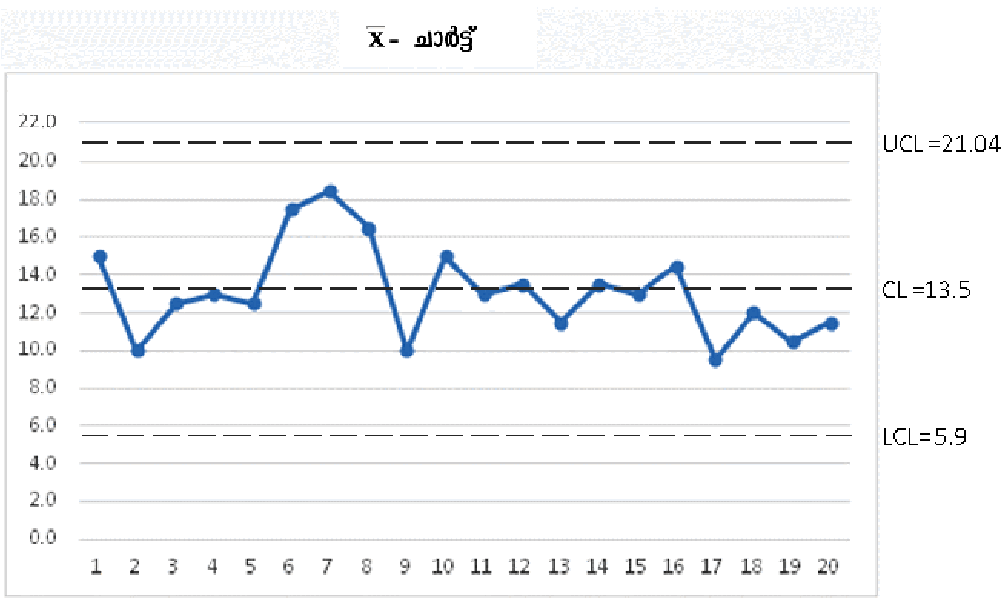
$$LCL = \overline{\overline{x}} - A_2\overline{R} = 13.5 - 7.545 = 5.955$$

R ചാർട്ടിന്റെ നിയന്ത്രണ പരിധികൾ

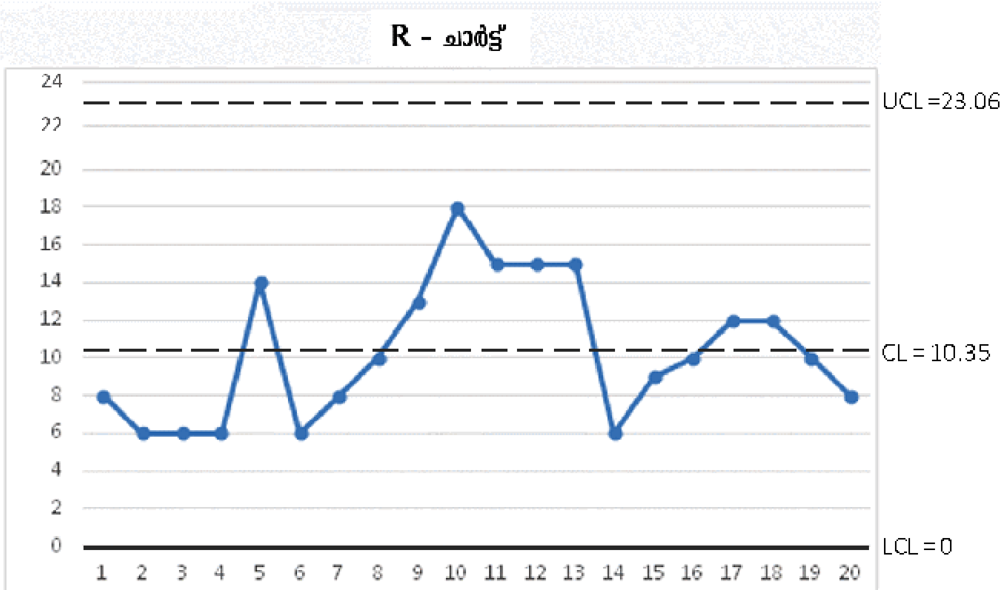
$$\overline{R} = 10.35$$

$$UCL = D_4\overline{R} = 2.282 \times 10.35 = 23.6187$$

$$LCL = D_3\overline{R} = 0 \times 10.35 = 0$$



ചിത്രം 11.4



ചിത്രം 11.5

രണ്ടു ചാർട്ടുകൾ നിയന്ത്രണ വിധേയം

വിശദീകരണം 11.4

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയ്ക്ക് മാധ്യത്തിനും റേഞ്ചിനും (പരിധിക്കും) ഉള്ള ഒരു നിയന്ത്രണ ചാർട്ട് നിർമിക്കുക. ഓരോ മണിക്കൂറിലും 5 എണ്ണം വീതമുള്ള സാമ്പിളുകളാണ് എടുത്തിരിക്കുന്നത്. അവയുടെ വിലകൾ ആരോഹണക്രമത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. ഉത്പാദനം നിയന്ത്രണത്തിലാണോ എന്നും പരിശോധിക്കുക.

12 സാമ്പിൾ വിലകൾ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
42	42	19	36	42	51	60	18	15	69	64	61
65	45	24	54	51	74	60	20	30	109	90	78
75	68	80	69	57	75	72	27	39	113	93	94
78	72	81	77	59	78	95	42	62	118	109	109
87	90	81	84	78	132	138	60	84	153	112	136

പരിഹാരം:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{859.2}{12} = 71.6$$

$$\bar{R} = \frac{716}{12} = 59.67$$

n=5 ആകുമ്പോൾ $A_2 = 0.58$, $D_3 = 0$ and $D_4 = 2.11$ (പട്ടികയിൽ നിന്നും)

$\bar{x}$ - ചാർട്ട്

CL= 71.6

UCL= 106.21

LCL= 36.99

റേഞ്ച് ചാർട്ട്

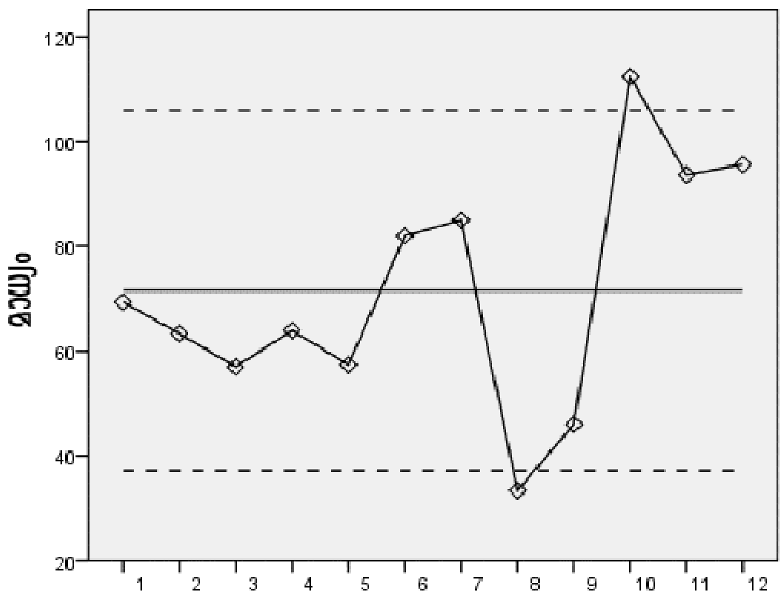
CL = 59.67

UCL = 125.904

LCL = 0

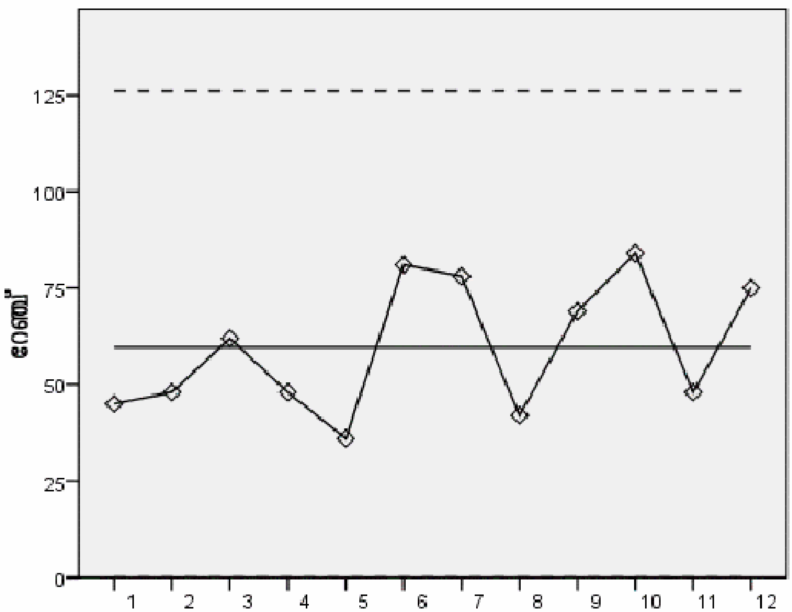
ചാർട്ടുകൾ താഴെ വരച്ചിരിക്കുന്നു.

$\bar{x}$ - ചാർട്ട്



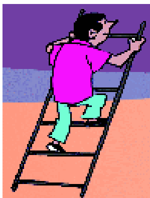
ചിത്രം 11.6

R-ചാർട്ട്



ചിത്രം 11.7

$\overline{X}$ - ചാർട്ട് നിയന്ത്രണനതീതവും R ചാർട്ട് നിയന്ത്രണവിധേയവും ആണ്.



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയാം

1) 4 ഭാഗങ്ങളുടെ പുറമെയുള്ള വ്യാസം, ഒരു ഗുണ നിയന്ത്രണ പരിശോധകൻ ഓരോ മണിക്കൂറിലും അളക്കുന്നു. അവയുടെ അളവുകളാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

സാമ്പിൾ

സമയം	1	2	3	4
9 A.M.	1	4	5	2
10 AM	2	3	2	1
11 AM	1	7	3	5

a) മാധ്യം, പരിധി ഇവ കണക്കാക്കി അവയുടെ നിയന്ത്രണ പരിധി കണ്ടുപിടിക്കുക.

b) ഈ അളവുകൾ നിയന്ത്രണ പരിധിയിലാണോ? ചാർട്ടുകളെ വ്യാഖ്യാനിക്കുക.

2) ഒരു ശീതള പാനീയ കമ്പനിയിൽ നിന്നും ഗുണ നിയന്ത്രണ പരിശോധകൻ 5 എണ്ണം വിതമുള്ള 25 സാമ്പിളുകൾ എടുക്കുന്നു. $\bar{X}$, R എന്നീചാർട്ടുകൾ വരയ്ക്കുക.

സാമ്പിൾ ക്രമം	വിലകൾ			
	1	2	3	4
1	15.85	16.02	15.83	15.93
2	16.12	16.00	15.85	16.01
3	16.00	15.91	15.94	15.83
4	16.2	15.85	15.74	15.93
5	15.74	15.86	16.21	16.10
6	15.94	16.01	16.14	16.03
7	15.75	16.21	16.01	15.86
8	15.82	15.94	16.02	15.94
9	16.04	15.98	15.83	15.98
10	15.64	15.86	15.94	15.89
11	16.11	16	16.01	15.82
12	15.72	15.85	16.12	16.15
13	15.85	15.76	15.74	15.98
14	15.73	15.84	15.96	16.1
15	16.20	16.01	16.10	15.89
16	16.12	16.08	15.83	15.94
17	16.01	15.93	15.81	15.68
18	15.78	16.04	16.11	16.12
19	15.84	15.92	16.05	16.12
20	15.92	16.09	16.12	15.93
21	16.11	16.02	16.00	15.88
22	15.98	15.82	15.89	15.89
23	16.05	15.73	15.73	15.93
24	16.01	16.01	15.89	15.86
25	16.08	15.78	15.92	15.98

11.9 ഗുണാത്മക ചരത്തിന്റെ നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ

ഗുണാത്മക ചരങ്ങളെ സാധാരണയായി നിർണയിക്കുന്നത് അവയിലെ കേടുവന്നവയെ എണ്ണി നോക്കിയോ അതിന്റെ അനുപാതത്തെ നോക്കിയോ ആണ്. കേടുവന്ന ഇനങ്ങളെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തി ഒരു പ്രക്രിയയെ നിരീക്ഷിക്കുന്നതിന് നാം സാധരണയായി np ചാർട്ടുകൾ അല്ലെങ്കിൽ p- ചാർട്ടുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. കേടുകളെ മാത്രം അടിസ്ഥാനമാക്കി ഗുണാത്മക ചരം നിർണയിക്കുമ്പോൾ c ചാർട്ട് ഉപയോഗിക്കണം. താഴെ പറയുന്ന വിഭാഗം np ചാർട്ടുകളെപറ്റിയാണ് വിവരിക്കുന്നത്.

np-ചാർട്ടിന്റെ നിർമാണം

'm' ഉപഗ്രൂപ്പുകളെ നാം പരിശോധിക്കുന്നു d_i എന്നത് i എന്ന ഉപഗ്രൂപ്പിലെ കേടുവന്ന ഇനത്തിന്റെ നമ്പർ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ $p_i = \frac{d_i}{n}$ ആ ഉപഗ്രൂപ്പിലെ കേടുവന്നയുടെ അനുപാതത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

$$CL = n\bar{p}$$

$$UCL = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}\bar{q}}$$

$$LCL = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}\bar{q}}$$

ഇവിടെ $\bar{p} \quad \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_m}{m} = \frac{\frac{d_1}{n} + \frac{d_2}{n} + \cdots + \frac{d_i}{n}}{m}$

$$= \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_m}{mn}$$

നിയന്ത്രണ പരിധികളും മധ്യരേഖയും ഒരു ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ വരക്കുന്നു. കേടുവന്ന ഇനങ്ങളുടെ എണ്ണം y അക്ഷത്തിലും സാമ്പിളുകളുടെ എണ്ണം x അക്ഷത്തിലും എടുക്കുന്നു. $\bar{x}$, R എന്നീ ചാർട്ടുകളിലേതുപോലെ തന്നെ ഇവിടേയും തീരുമാനം എടുക്കുന്നു.

വിശദീകരണം 11.5

20 എണ്ണം വീതം വൈദ്യുത സ്വിച്ചുകളുള്ള 25 പെട്ടികളിൽ നിന്നും ഓരോ പെട്ടിയിലും കേടുവന്നവ എത്രയെന്നു പരിശോധിച്ചു. കേടുവന്നവയുടെ എണ്ണത്തിന്റെ നിയന്ത്രണ ചാർട്ട് വരക്കുക.

പെട്ടി	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
കേട് വന്നവയുടെ എണ്ണം	3	2	1	0	4	2	1	2	3	0	2	1	2
പെട്ടി	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
കേട് വന്നവയുടെ എണ്ണം	0	3	5	4	2	1	3	0	3	1	2	1	

പരിഹാരം:

ഇവിടെ 20 എണ്ണം വീതമുള്ള 25 സാമ്പിളുകളാണ്.

അതുകൊണ്ട്

$$\bar{p} \quad \frac{\text{കേടുവന്നവയുടെ ആകെ എണ്ണം}}{25 \quad 20} = \; = \frac{48}{500} = 0.096$$

$$\bar{q} \quad 1-\bar{p} \quad 1-0.096 \quad 0.904$$

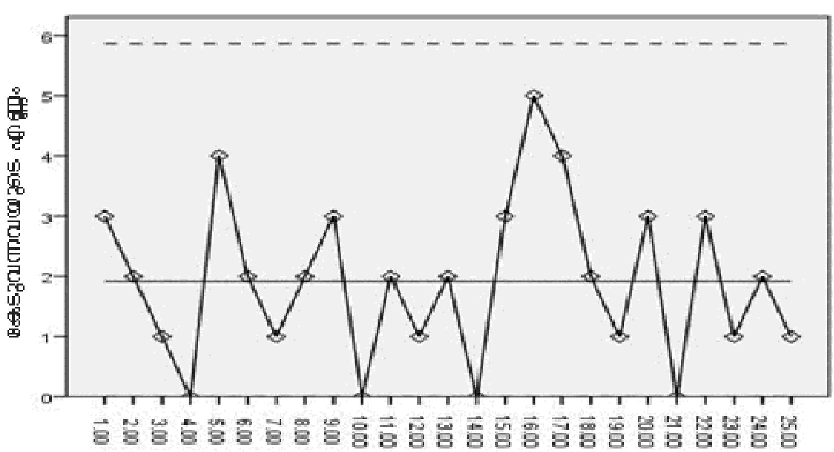
$$n\bar{p} = 20 \times 0.096 = 1.92$$

$$CL = n\bar{p} = 1.92$$

$$UCL = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}\bar{q}} = 5.87$$

$$LCL = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}\bar{q}} = -2.03 \approx 0,$$ (താഴ്ന്ന പരിധി നെഗറ്റീവ് ആകുന്നു)

np-chart ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 11.8

എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും നിയന്ത്രണ പരിധിക്കുള്ളിലായതിനാൽ പ്രക്രിയ നിയന്ത്രണ വിധേയമാണ്.

വിശദീകരണം 11.6

ഒരു കമ്പനി ബോണ്ടു പേപ്പറുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു. 50 പേപ്പർ വീതമുള്ള 20 സാമ്പിളുകൾ പരിഗണിക്കുന്നു. ഓരോ സമ്പിളിലും ഉള്ള ഗുണമില്ലാത്തവയുടെ എണ്ണം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. np ചാർട്ട് തയാറാക്കുക.

സാമ്പിൾ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ഗുണമില്ലാത്തവ	4	3	1	0	5	2	3	1	4	2
സാമ്പിൾ	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ഗുണമില്ലാത്തവ	2	6	0	2	1	6	2	3	1	5

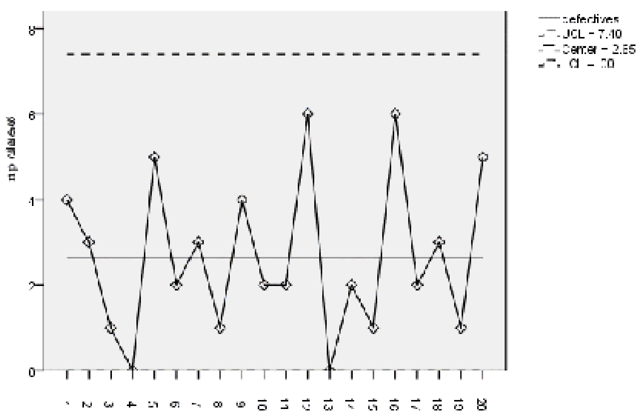
പരിഹാരം:

$CL = n\bar{p} = 50 \times 0.053 = 2.65$

$LCL = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}\bar{q}} = 2.65 - 3\sqrt{50 \times 0.053 \times 0.947} \cong 0$, (താഴ്ന്ന പരിധി നെഗറ്റീവ് ആകില്ല)

$UCL = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}\bar{q}} = 2.65 + 3\sqrt{50 \times 0.053 \times 0.947} = 7.40$

ചാർട്ട് താഴെ കൊടുക്കുന്നു.



ചിത്രം 11.9

എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും നിയന്ത്രണ പരിധിക്കുള്ളിൽ ആയതിനാൽ പ്രക്രിയ നിയന്ത്രണ വിധേയകം

വിശദീകരണം 11.7

പ്ലഗ്ഗുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഒരു ഫാക്ടറിയിൽ നിന്നും 100 എണ്ണം വീതമുള്ള 15 സാമ്പിളുകളിലെ കേടുവന്നവയുടെ എണ്ണം എടുത്തു. അതിനുള്ള ഒരു നിയന്ത്രണ ചാർട്ട് ഉണ്ടാക്കി നിയന്ത്രണ സ്ഥിതിയെപറ്റി പ്രസ്താവിക്കുക.

സാമ്പിൾ	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
കേടുവന്നവ	:	5	10	12	8	6	4	6	3	4	5
സാമ്പിൾ	:	11	12	13	14	15					
കേടുവന്നവ	:	4	7	9	3	4					

പരിഹാരം

CL $= n\bar{p} = 6$

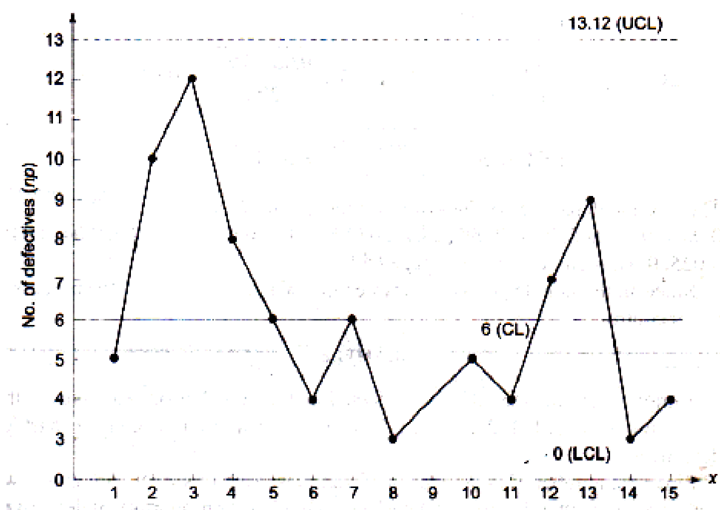
LCL $= n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$

$= 6 - 3\sqrt{6 \times 0.94} = -1.12 \approx 0$ (നെഗറ്റീവ് വില എടുക്കുവാൻ സാധ്യമല്ല)

LCL $= n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$

$= 6 + 3\sqrt{6 \times 0.94} = -13.12 \approx 0$

np-ചാർട്ട്



ചിത്രം 11.10

11.10 സാംഖ്യക ഗുണനിയന്ത്രണത്തിന്റെ ഉപയോഗങ്ങൾ

സാംഖ്യക ഗുണനിയന്ത്രണത്തിന്റെ ചില ഉപയോഗങ്ങൾ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

1. പ്രക്രിയയിലും, ഉത്പന്നത്തിലും ഉള്ള തെറ്റുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുവാനുള്ള ഒരു സംവിധാനം ആകുവാൻ ഇതിന് കഴിയുന്നു.
2. ഇത് ഉത്പന്നത്തിന്റെ ഗുണത്തിൽ ഏകാത്മകത ഉണ്ടാക്കുവാൻ സഹായിക്കുന്നു.
3. ഇത് ഉപഭോക്തൃ ബന്ധം മെച്ചപ്പെടുത്തുന്നു.
4. പരിശോധനാ ചെലവ് ചുരുക്കുവാൻ ഇത് സഹായിക്കുന്നു.
5. ഉപയോഗ ശൂന്യമായവയുടെ എണ്ണം കുറയ്ക്കുകയും അങ്ങനെ അസംസ്കൃത വസ്തുക്കളുടെ ചെലവ് കുറയ്ക്കുവാനും ഇത് സഹായിക്കുന്നു.
6. എത്തിച്ചേരേണ്ടുന്ന അവ്യക്ത നിർദേശത്തിലേക്കുള്ള അടിസ്ഥാനം ഇത് നൽകുന്നു.
7. പ്രക്രിയയുടെ കാര്യപ്രാപ്തി ഇത് കണക്കാക്കുന്നു.

നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ട നിർദേശത്തിലുള്ള ഉത്പന്നങ്ങൾ ആണോ എന്നു നിർണയിക്കുവാൻ സാംഖ്യ ഗുണ നിയന്ത്രണം ഉപകരിക്കുന്നു. പ്രക്രിയയുട സ്ഥിരതയും അതുപ്രകാരം ഗുണവും ഉണ്ടാക്കുവാൻ ഇതു മൂലം സാധിക്കുന്നു. ഗുണനിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ ഇതിനു ഉപയോഗിക്കുന്ന ഒരു ഉപകരണമാണ്. സാമ്പിളുകളുടെ ഗുണത്തെക്കുറിച്ചു മനസ്സിലാക്കുവാനും പരിശോധിക്കുവാനും ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ചുള്ള പ്രതിനിധീകരിക്കൽ സഹായിക്കുന്നു. ഒരു പ്രക്രിയയുടെ പരിധിയിൽ നിന്നും പുറമേ പോകുന്നുണ്ടോ എന്നറിയുവാൻ സാംഖിക ഗുണ നിയന്ത്രണം സഹായിക്കുന്നു. ഉത്പന്നത്തിനു സാരമായ കേടുവരുന്നതിനു മുമ്പ് തന്നെ ഉത്പാദനം നിർത്തുവാനും പ്രശ്ന പരിഹാരത്തിനും ഇത് സഹായകമാകുന്നു

നമുക്ക് വിലയിരുത്താം

1–5 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയുത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

1. ഒരു പെട്ടിയിലെ ധാന്യങ്ങളുടെ ശരാശരി ഭാരം നിരീക്ഷിക്കുന്നതിന് ഏതുതരം ചാർട്ടാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നതത്.

   a) $\bar{x}$ -ചാർട്ട് b) R-ചാർട്ട് c) p-ചാർട്ട് d) c-ചാർട്ട്

2. $\bar{x}$ ചാർട്ടിന്റെ പരിധികൾ കാണുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്നതേത്

   a) A_1 b) A_2 c) D_3 d) D_4

3. ഒരു കൂട്ടം ലാപ്ടോപ്പുകളുടെ ഉത്പാദനത്തിൽ ഉപരിതലത്തിലുള്ള പോറലുകളുടെ കണക്കാക്കുന്നതിന് ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ ചാർട്ട് ഏതാണ്?

   a) $\bar{x}$ -ചാർട്ട് b) R-ചാർട്ട് c) p-ചാർട്ട് d) c-ചാർട്ട്

4. ഗുണാത്മക ചരത്തിനു ഉപയോഗിക്കുന്ന ചാർട്ടാണ് __________.

   a) $\bar{x}$ -ചാർട്ട് b) R-ചാർട്ട് c) np-ചാർട്ട് d) c-ചാർട്ട്

5. താഴെ പറയുന്നവയിൽ ശരിയല്ലാത്തതേത്?

   a) ഗുണം എന്നത് ഉപയോഗത്തിനുള്ള സന്നദ്ധതയാണ്

   b) സേവനങ്ങൾക്ക് ഗുണം നോക്കുന്നില്ല.

   c) ഗുണം വ്യതിയാനത്തിനു വിപരീത അനുപാതത്തിലാണ്.

   d) ഗുണം എന്ന് ഉത്പന്നങ്ങളുടെ.

6 മുതൽ 10 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് വിട്ട ഭാഗം പൂരിപ്പിക്കുക.

6. R ചാർട്ടിൽ പരിവർത്തനത്തിനുപയോഗിക്കുന്ന സ്ഥിരാങ്കമാണ് ______ ഉം ______ ഉം

7. ഒരു ഉത്പന്നത്തിന്റെ ഉൾക്കൊള്ളാവുന്ന പരിധിയിലുള്ള വ്യതിയാനത്തെ ____________ എന്നു വിളിക്കുന്നു.

8. അസംസ്കൃത വസ്തുക്കൾ, തൊഴിലാളികൾ, യന്ത്രങ്ങൾ, പണി ഉപകരണങ്ങൾ, മറ്റു ഘടകങ്ങൾ എന്നിവയിലുള്ള ചെറിയ രീതിയിലുള്ള വ്യതിയാനം ____________ കാരണമാണ്.

9. ഒരു നിയന്ത്രണ ചാർട്ടിന് __________ എണ്ണം നിയന്ത്രണ രേഖകൾ ഉണ്ട്.

10. ചരങ്ങളുടെ നിയന്ത്രണ ചാർട്ടിനായി __________ ഉം __________ ഉം ചാർട്ടുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

11. ഒരു നിശ്ചിത അളവിലുള്ള പാക്കറ്റുകൾ നിർമിച്ച് വിതരണം ചെയ്യുവാനുള്ള ഒരു യന്ത്രം നിർമിക്കുന്നു. 5 എണ്ണം വീതമുള്ള 10 സാമ്പിളുകൾ പരിശോധിച്ചു താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഫലം കിട്ടി.

സാമ്പിൾ നം.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
മാധ്യം	43	49	37	44	45	37	51	46	43	47
റേഞ്ച്	5	6	5	7	7	4	8	6	4	6

$\bar{x}$, R ചാർട്ടുകൾ വരക്കുക.

12. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ $\bar{x}$ ചാർട്ടും R ചാർട്ടും വരക്കുക:

1	42	65	78	87
2	42	45	72	90
3	10	24	81	81
4	36	54	77	84
5	42	51	59	78
6	51	74	78	132
7	60	60	95	138
8	18	20	42	60
9	15	30	62	84
10	69	109	118	153
11	64	90	109	112
12	61	78	109	136

13. ഒരു ചരടിന്റെ ബലം പരിശോധിക്കുന്നതിനായുള്ള നിയന്ത്രണ ചാർട്ടുകൾ ഉണ്ടാക്കി. ഉപഗ്രൂപ്പിന്റെ വലുപ്പം 5 ആകുന്നു. $\bar{x}$ ന്റെയും R ന്റെയും വിലകൾ ഓരോ ഗ്രൂപ്പിലും കണക്കാക്കി. 25 ഉപഗ്രൂപ്പുകളുടെ $\Sigma\bar{x} = 514.8$, $\Sigma R = 120$. $\bar{x}$, R എന്നി ചാർട്ടുകളുടെ നിയന്ത്രണ പരിധികൾ കണക്കാക്കുക.

14. ഒരു ചെമ്പു നിർമാണ വ്യവസായത്തിലെ ഉത്പാദനം നിയന്ത്രണത്തിലാണോ എന്നറിയാൻ 6 എണ്ണം വീതമുള്ള 20 ഉപഗ്രൂപ്പുകൾ എടുത്തു. $\bar{\bar{x}} = 3.126$ gm, $\bar{R} = 0.009$ gm എന്ന് കിട്ടി. $\bar{x}$, R ചാർട്ടുകളുടെ നിയന്ത്രണ പരിധികൾ കണക്കാക്കുക.

15. 5 എണ്ണം വിതമുള്ള 10 സാമ്പിളുകളുള്ള ഒരു ഡാറ്റയുടെ വിലകളാണ് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത് മാധ്യത്തിന്റേയും, റേഞ്ചിന്റേയും മധ്യരേഖയും, നിയന്ത്രണ പരിധികളും കണക്കാക്കി പ്രക്രിയ നിയന്ത്രണത്തിലാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

സാമ്പിൾ നം.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
മാധ്യം	11.2	11.8	10.8	11.6	11.0	9.6	10.4	9.6	10.6	10.0
റേഞ്ച്	7	4	8	5	7	4	8	4	7	9

16. ഒരു ചോക്കളേറ്റ് നിർമാണ കമ്പനിയിൽ പുതിയ തരത്തിലുള്ള ഒരു അടുപ്പ് നിർമിച്ചു. അതിന്റെ ഊഷ്മാവിനെ ക്കുറിച്ചുള്ള വിവരങ്ങൾ അറിയുവാൻ വിവിധ സമയങ്ങളിൽ 1/2 മണിക്കൂർ ഇടവിട്ട് 4 സാമ്പിളുകൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിധം എടുത്തു.

	അളവുകൾ			
Time	1	2	3	4
8.00 AM	40	50	55	39
8.30 AM	44	42	38	38
9.00 AM	41	45	47	43
9.30 AM	39	39	41	41
10.00 AM	37	42	46	41
10.30 AM	39	40	39	40

a) മുകളിലെ ഡാറ്റക്ക് മാധ്യത്തിനുള്ള നിയന്ത്രണ പരിധിക്കണക്കാക്കുക $\bar{x}$, R ചാർട്ടുകൾ വരക്കുക.

b) ചാർട്ട് വ്യാഖ്യാനിക്കുക.

17. ഗ്ലോബൽ നാഷണൽ ബാങ്കിലെ ക്രഡിറ്റ് വിഭാഗമാണ് ഉപഭോഗ്താവിന്റെ മാസവിനിമയം കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നത്. ഓരോ ഡാറ്റ ക്ലാർക്കും 1500 സാമ്പിൾ വിതം പരിശോധിക്കുന്നു. അതിന്റെ ഫലങ്ങൾ ആണ് ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നത്.

പരിശോധകൻ	പരിശോധിച്ചവയുടെ എണ്ണം	പൊരുത്തപെടാത്തവയുടെ എണ്ണം
A	1500	4
B	1500	6
C	1500	6
D	1500	2
E	1500	15
F	1500	4
G	1500	4

np ചാർട്ട് നിർമിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

18. ഓട്ടോലിറ്റ് എന്ന കമ്പനി കാർബാറ്ററികൾ നിർമിക്കുന്നു. ഓരോ ഷിഫ്റ്റിന്റെയും അവസാനത്തിൽ ഗുണനിലവാരം ഉറപ്പുവരുത്തുന്നവിഭാഗം 8 എണ്ണത്തിന്റെ സാമ്പിളുകൾ എടുത്തത് പരിശോധിക്കുന്നു. കഴിഞ്ഞ 12 ഷിഫ്റ്റുകളിലെ കേടുവന്നവയുടെ എണ്ണം 2, 1, 0, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 6, 1 എന്നിങ്ങനെയാണ്. നിയന്ത്രണ ചാർട്ട് വരച്ച് പ്രക്രിയ നിയന്ത്രണത്തിലാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

19. ഒരു ബൈസൈക്കിൾ നിർമിക്കുന്ന ആൾ ദിനംതോറും നിർമിക്കുന്നവയിൽ നിന്നും 10 എണ്ണം പരിശോധിക്കുന്നു. കഴിഞ്ഞ 14 ദിവസങ്ങളിലായി കണ്ടുപിടിച്ച കേടുകളുടെ എണ്ണം 3, 2, 1, 3, 2, 2, 8, 2, 0, 3, 5, 2, 0, 4 എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഈ പ്രക്രിയക്ക് ഒരു നിയന്ത്രണ ചാർട്ട് വരച്ച് നിയന്ത്രണത്തിലാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

20. ഒരു ടയർ കമ്പനി അതിന്റെ പരിശോധന പ്രക്രിയയുടെ ഭാഗമായി 3 എണ്ണം വീതമുള്ള 20 സാമ്പിളുകൾ എടുക്കുന്നു.

സാമ്പിൾ	പുറം ഭാഗത്തിന്റെ തേയ്മാനം			സാമ്പിൾ	പുറം ഭാഗത്തിന്റെ തേയ്മാനം		
1	44	41	19	11	11	33	34
2	39	31	21	12	51	34	39
3	38	16	25	13	30	16	30
4	20	33	26	14	22	21	35
5	34	33	36	15	11	28	38
6	28	23	39	16	49	25	36
7	40	15	34	17	20	31	33
8	36	36	34	18	26	18	36
9	32	29	30	19	26	47	26
10	29	38	34	20	34	29	32

a) മാധ്യം, റേഞ്ച് എന്നി ചാർട്ടുകളുടെ നിയന്ത്രണ പരിധികൾ കാണുക.

b) നിയന്ത്രണ ചാർട്ട് വരച്ച് വ്യാഖ്യാനിക്കുക.

21. The Inter Global Moving and Storage Company അവർക്ക് ലഭിച്ച പരാതികൾ ഉപയോഗിച്ച് നിയന്ത്രണ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുവാൻ ഉദ്ദേശിക്കുന്നു. കഴിഞ്ഞ 12 മാസങ്ങളിലോരൊന്നിലും ലഭിച്ച 50 പരാതികളുടെ സാമ്പിൾ എടുത്തു. ഓരോ മാസവും ലഭിച്ച പരാതികളുടെ എണ്ണം 8, 7, 4, 8, 2, 7, 11, 6, 7, 6, 8, 12 എന്നിങ്ങനെയാണ്.

a) പരാതികളുടെ നിയന്ത്രണ ചാർട്ട് വരയ്ക്കുക.

b) ചാർട്ട് പരിശോധിച്ച് ഏതെങ്കിലും മാസം ലഭിച്ച പരാതികളുടെ എണ്ണം നിയന്ത്രണ വിധേയമല്ലേയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

22. താഴെ പറയുന്ന 5 എണ്ണം വീതമുള്ള 15 സാമ്പിൾ ഉൾപ്പെട്ട ഡാറ്റയുടെ മാധ്യം, പരിധി ചാർട്ടുകൾ വരച്ച് നിയന്ത്രണാവസ്ഥയെക്കുറിച്ച് പ്രസ്താവിക്കുക.

X:	65.0	64.6	64.1	68.5	68.4	67.9	65.0	64.6
R:	9.8	9.8	8.4	3.9	7.6	8.7	0.1	9.7
X:	64.1	63.2	62.9	62.4	67.0	66.6	66.1	
R:	7.7	7.5	1.2	9.8	6.4	0.6	6.3	

23. ഒരു ഭക്ഷണ നിർമാണശാല മാമ്പഴ ജ്യൂസ് പല പെട്ടികളിലാക്കുന്നു. 4 എണ്ണം വീതമുള്ള 20 സാമ്പിളുകൾ എടുക്കണം. ഓരോ സാമ്പിളിലും ഉൾപ്പെട്ട പെട്ടിയുടെ ഭാര

മാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് (30 മിനിറ്റുകളുടെ ഇടവേളയിൽ) X, R ചാർട്ടുകൾ വരച്ച് നിയന്ത്രണസ്ഥിതിയെ ക്കുറിച്ച് വ്യാഖ്യാനിക്കുക.

Sample No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	15	10	8	12	18	20	15	13	9	6
Weights drained	12	8	15	17	13	16	19	23.	8	10
	13	8	17	11	15	14	23	14	18	24
	20	14	10	12	4	20	17	16	5	20
Sample No.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	2 ?
	5	3	6	12	15	18	13	10	5	6
	12	15	18	9	15	17	16	20	15	14
Weights	20	18	12	15	6	8	5	8	10	12
drained	15	18	10	18	16	15	4	10	12	14

24. 50 എണ്ണം വീതമുള്ള 15 സാമ്പിളുകൾ പരിശോധിച്ചു അവയിലലെ കേടുവന്നവയുടെ എണ്ണം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

    2, 3,4, 2,3,0, 1,2, 2,3,5,5, 1,2,3

    കേടുവന്നവയുടെ നിയന്ത്രണ ചാർട്ട് വരക്കുകയും നിയന്ത്രണ സ്ഥിതിയെപറ്റി വിവരിക്കുകയും ചെയ്യുക.

25. ഒരു സാധനത്തിന്റെ 400 എണ്ണം വീതമുള്ള 10 സാമ്പിളുകൾ പരിശോധിക്കുന്നു. അതിലെ കേടുവന്നവയുടെ എണ്ണമാണ് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത്

    19, 4, 9, 12, 9, 15, 26, 14, 15, 17.

    ചാർട്ട് വരച്ച് നിയന്ത്രണ സ്ഥിതി വിശകലനം ചെയ്യുക

H7B8J6

അധ്യായം 12

സമയ ശ്രേണി വിശകലനം (Time Series Analysis)

ജനങ്ങളുടെ ഭാവിയിലെ അവശ്യങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുകയും അതിന് വേണ്ട കണക്ക് കൂട്ടലുകൾ നടത്തുകയും ചെയ്യുക എന്നതാണ് സാമ്പത്തിക വിദഗ്ദ്ധരും വ്യവസായികളും നേരിടുന്ന പ്രധാന വെല്ലുവിളി. ഉദാഹരണത്തിന്, 2025 ലെ സാധ്യമായ വില്പന കണ്ടെത്തുക, 2035 ലേക്ക് അല്ലെങ്കിൽ 2050 ലേക്ക് ഒരു ദീർഘകാലം ആസൂത്രണം നടത്തുക എന്നിവയെല്ലാം ഒരു വ്യവസായിയെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം വളരെ താത്പര്യമുളവാക്കുന്നവയാണ്. ഇത്തരം ആസൂത്രണങ്ങൾ വഴി ഉത്പാദനം ക്രമീകരിക്കുവാനും, വില്ക്കപ്പെടാത്ത ഉത്പന്നങ്ങളെയോ അപര്യാപ്തമായ ഉല്പാദന സാധ്യതകളേയോ ഒഴിവാക്കാനും കഴിയും.

സവിശേഷ പഠന നേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായത്തിന്റെ പൂർത്തീകരണത്തിന് ശേഷം പഠിതാവ്:

- സമയ ശ്രേണിയെ തിരിച്ചറിയുന്നു.
- സമയശ്രേണിയിലെ ഘടകങ്ങളെ വേർതിരിച്ച് വിശകലനം നടത്തുന്നു.
- സമയ ശ്രേണി വിശകലനത്തിന്റെ ഉപയോഗങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുന്നു.
- സമയ ശ്രേണി വിശകലനത്തിലൂടെ ഭാവി വിലകൾ കണക്കാക്കുന്നു.
- പ്രവണതാ രേഖകൾ (Trend lines) വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നു.

അതുപോലെ, വരും വർഷത്തെ ഉല്പാദനശേഷി കണക്കാക്കുന്നതിലൂടെ ഭക്ഷ്യവിതരണം, ജനങ്ങൾക്ക് ലഭ്യമാക്കുന്ന തൊഴിൽ എന്നിവയെ സംബന്ധിച്ച് ശരിയായ ആസൂത്രണം നടത്തുവാൻ ഒരു സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്ര വിദഗ്ദ്ധന് കഴിയുന്നു.

ഭാവി ആവശ്യങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള ആദ്യപടിയാണ് കഴിഞ്ഞകാല വിവരങ്ങൾ ശേഖരിക്കൽ. തുടർച്ചയായ ഇടവേളകളിൽ ശേഖരിക്കുന്നതോ നിരീക്ഷിക്കുന്നതോ രേഖപ്പെടുത്തുന്നതോ ആയ സാംഖ്യക ഡാറ്റകൾക്കായി ഇതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ആളുകൾ സദാ ശ്രദ്ധിച്ച് കൊണ്ടിരിക്കും ഇത്തരം ഡാറ്റകളെ സാധാരണയായി സമയശ്രേണി (Time Series) എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം സമയശ്രേണിയെക്കുറിച്ച് കൂടുതൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

12.1 സമയശ്രേണി (Time Series)

ഒരു ആശുപത്രിയിൽ ഒരു വ്യക്തിയുടെ ഹൃദയമിടിപ്പ് തുടർച്ചയായി നിരീക്ഷിക്കുന്ന സാഹചര്യം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ സമയമാണ് ഏറ്റവും പ്രധാനഘടകം. കൃത്യമായ ഇടവേളകളിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ ഒരു വ്യക്തിയുടെ ഹൃദയമിടിപ്പ് ആ വ്യക്തിയുടെ ഹൃദയത്തിന്റെ ആരോഗ്യത്തെക്കുറിച്ച് വ്യക്തമായ ഒരു ചിത്രം നല്കുന്നു. സമയശ്രേണിയുടെ വിശകലനം ഇവിടെ സുപ്രധാന ഘടകമാണ്. ഇവിടെ നാം പരിമാണാത്മക നിരീക്ഷണങ്ങൾ കൃത്യമായ ഇടവേളകളിൽ ശേഖരിക്കുന്നു. ആയതിനാൽ ഇത് സമയശ്രേണിയ്ക്ക് ഒരു ഉദാഹരണമാണ്.

കൃത്യമായ ഇടവേളകളിൽ തുടർച്ചയായി അളക്കുന്ന പരിമാണാത്മക നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ ശേഖരമാണ് സമയശ്രേണി.

സമയശ്രേണിയുടെ മറ്റ് ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ താഴെ പറയുന്നു.

- ഓരോ മണിക്കൂറിലും രേഖപ്പെടുത്തുന്ന താപനില.
- ഒരു കമ്പനിയുടെ പ്രതിദിന ഓഹരി വില.
- മഴ ലഭ്യതയുടെ പ്രതിമാസ ഡാറ്റ.

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളിലെല്ലാം സമയം ഒരു പ്രധാന ഘടകമാണ്, കാരണമെന്തെന്നാൽ അവയിലെല്ലാം ചരങ്ങൾ സമയവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. വർഷം, മാസം, ആഴ്ച, ദിവസം, മണിക്കൂർ, മിനിറ്റ്, സെക്കന്റ് എന്നിങ്ങനെ ഏതെങ്കിലും സമയരൂപത്തിലാണ് അവ രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നത്.

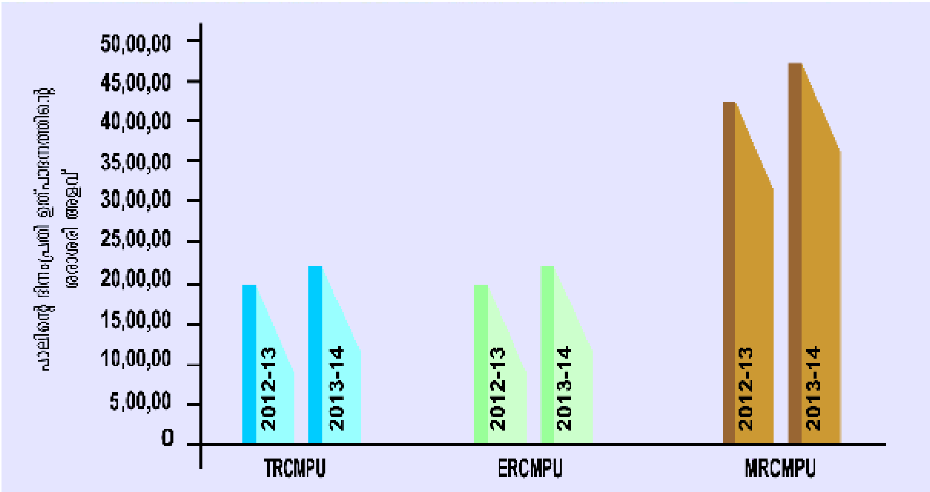
കാലക്രമത്തിനനുസരിച്ച് നിരീക്ഷിച്ചതും ശേഖരിച്ചതും ക്രമീകരിച്ചതും ആയ ഡാറ്റയുടെ ഒരു ശ്രേണിയാണ് സമയശ്രേണി.

നമുക്ക് ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം.

ഉദാഹരണം 1

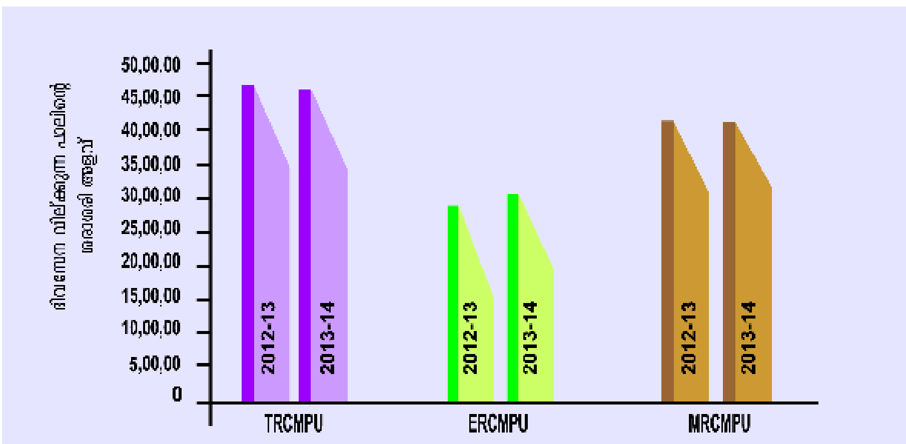
ഗ്രാഫ് രൂപത്തിലുള്ള അവതരണം വിശകലനം ചെയ്യുക.

- തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റ വിശദീകരിക്കുക.
- ഇത് ഒരു സമയ ശ്രേണിയായി കരുതുന്നതിനുള്ള കാരണം എഴുതുക.



ചിത്രം 12.1: ദിവസേന ഉത്പാദിപ്പിക്കുന്ന പാലിന്റെ ശരാശരി ലിറ്ററളവ്.

ഉദാഹരണം 2



ചിത്രം 12:2: ദിവസേന വിൽക്കുന്ന പാലിന്റെ ശരാശരി ലിറ്ററളവ്

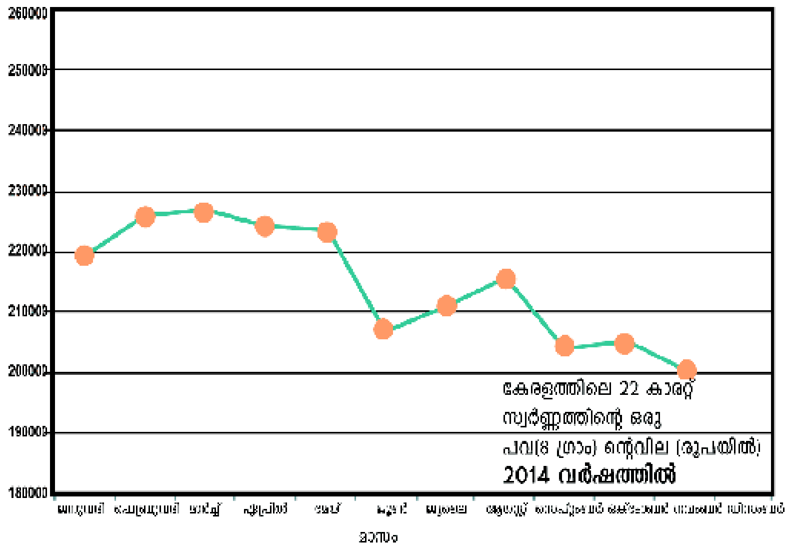
പ്രാദേശിക യൂണിയൻ	2012-13	2013-14	ശരാശരി വ്യത്യാസം
TRCMPU	466198	460100	– 1.31
ERCMPU	299385	303664	1.43
MRCMPU	422924	423034	0.03
ആകെ	1188507	1186798	– 0.14

പട്ടിക 12:1, ദിവസേനയുള്ള പാൽ വില്പന (ലിറ്ററിൽ)

ഉദാഹരണം 3

മാസം	ദിവസം	ഒരു പവൻ സ്വർണ്ണ വില (രൂപയിൽ)
ജനുവരി	15-ജനുവരി-14	21920
ഫെബ്രുവരി	15-ഫെബ്രുവരി-14	22600
മാർച്ച്	15-മാർച്ച്-14	22680
ഏപ്രിൽ	15-ഏപ്രിൽ-14	22400
മേയ്	15-മേയ്-14	22320
ജൂൺ	15-ജൂൺ-14	20640
ജൂലൈ	15-ജൂലൈ-14	21040
ആഗസ്റ്റ്	15-ആഗസ്റ്റ്-14	21480
സെപ്റ്റംബർ	15-സെപ്റ്റംബർ-14	20400
ഒക്ടോബർ	15-ഒക്ടോബർ-14	20480
നവംബർ	15-നവംബർ-14	20000

പട്ടിക 12.2



ചിത്രം 12:3 വിവിധ മാസങ്ങളിൽ സ്വർണ്ണത്തിന്റെ പവൻ നിരക്ക്

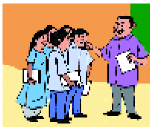
എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇതെല്ലാം സമയശ്രേണിയായി പരിഗണിക്കുന്നത് എന്ന് വിശദീകരിക്കാമോ?

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ നാം ഒരു സൂക്ഷ്മ പരിശോധന നടത്തുമ്പോൾ, ഒരു സമയ ശ്രേണിയിലെ ഡാറ്റ, സമയം ഒരു സ്വതന്ത്രചരമായ ദ്വിചര ഡാറ്റയാണെന്ന് നമുക്ക് കാണാം.

സമയശ്രേണിയുടെ പ്രതീകാത്മക പ്രതിനിധീകരണം

't' എന്നത് സമയത്തെയും y_t എന്നത് **t** സമയത്തിലുള്ള മൂല്യത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ക്രമജോഡി (t, y_t) എന്നത് സമയശ്രേണി ഡാറ്റയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

പ്രതീകാത്മകമായി സമയശ്രേണിയെ $y = f(t)$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.



പ്രവർത്തനം

നിങ്ങളുടെ പ്രദേശത്ത് ലഭ്യമായ വിഭവങ്ങളിൽ നിന്ന് അഞ്ച് സമയ ശ്രേണി ഡാറ്റകൾ ശേഖരിക്കുക.

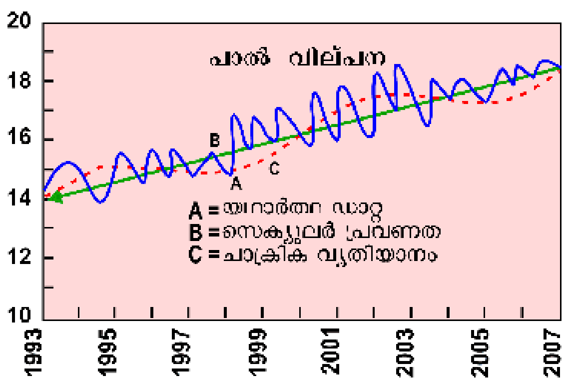
12.2 സമയശ്രേണിയുടെ ഘടകങ്ങൾ (Components of Time Series)

പലവിധ ചലനങ്ങളും അഥവാ വ്യതിയാനങ്ങളും സമയശ്രേണി മൂല്യങ്ങളെ സ്വാധീനിക്കാറുണ്ട്. ഈ ചലനങ്ങൾ അവയുടെ സവിശേഷതകളാണ്. സമയശ്രേണിയുടെ സ്വഭാവ രൂപീകരണത്തിന് സഹായകമാവുന്ന ഇത്തരം ചലനങ്ങളെ സമയശ്രേണിയുടെ ഘടകങ്ങൾ അഥവാ സമയശ്രേണിയുടെ മൂലകങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

വിവിധതരം ചലനങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി സമയ ശ്രേണി മൂന്നായി തരം തിരിക്കാം.

1) **സെക്യുലർ പ്രവണത (Secular trend)**
2) **ആവർത്തന ചലനങ്ങൾ (Periodic movements)**
   - **i) ചാക്രികമായ വ്യതിയാനങ്ങൾ (Cyclical Variations)**
   - **ii) കാലാനുസൃതമായ വ്യതിയാനങ്ങൾ (Seasonal Variations)**
3) **ക്രമരഹിത വ്യതിയാനങ്ങൾ (Irregular Variations)**

1993 മുതൽ 2007 വരെയുള്ള പാൽപാക്കറ്റുകളുടെ വില്പന (ദശലക്ഷക്കണക്കിന്)യുടെ സമയ ശ്രേണി ഡാറ്റ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രീകരിച്ചത് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. ഡാറ്റയിൽ അന്തർലീനമായ സെക്യുലർ പ്രവണത, കാലാനുസൃതമായ വ്യതിയാനം, ചാക്രിക വ്യതിയാനം എന്നിവയുടെ രൂപഘടനം ഈ ചിത്രത്തിൽ തിരിച്ചറിയാൻ കഴിയുന്നു.



ചിത്രം 12.4

നമുക്ക് വിശദമായി ചർച്ച പ്രതിപാദിക്കാം

സെക്യുലർ പ്രവണത (Secular Trend)

സമയ ശ്രേണിയിലെ പ്രധാന ഘടകമാണ് സെക്യുലർ പ്രവണത. അതിനെ ദീർഘകാല പ്രവണത അഥവാ പ്രവണതയെന്നും വിളിക്കാറുണ്ട്. ഒരു നീണ്ട കാലയളവിലേക്ക് ഉയർച്ചയോ താഴ്ചയോ സംഭവിക്കാനുള്ള ഡാറ്റയുടെ പൊതു പ്രവണതയാണ് സെക്യുലർ പ്രവണത ഉദാഹരണത്തിന് ഇന്ത്യയിലെ ജനസംഖ്യ കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്ന പ്രവണത കാണിക്കുന്നു. സാക്ഷരതയിലും, വൈദ്യസംരക്ഷണത്തിലും കൈവരിച്ച പുരോഗതിയുടെ ഭാഗമായി സ്വാതന്ത്ര്യത്തിന്ശേഷം രാജ്യത്ത് മരണനിരക്ക് കുറയുന്ന പ്രവണതയാണുള്ളത്.

ഗണിതപരമായി സെക്യുലർ പ്രവണതയെ രണ്ടായി തരം തിരിച്ചിരിക്കുന്നു.

1) രേഖീയ പ്രവണത

2) വക്രരേഖാ പ്രവണത അഥവാ അരേഖിയ പ്രവണത.

സമയശ്രേണിയുടെ പ്രവണതാ മൂല്യങ്ങൾ ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ രേഖപ്പെടുത്തുമ്പോൾ ഒരു നേർരേഖയാണ് ലഭിക്കുന്നതെങ്കിൽ. അതിനെ രേഖീയ പ്രവണത എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതായത്, രേഖീയ പ്രവണതയിൽ മാറ്റനിരക്ക് സ്ഥിരവും എന്നാൽ രേഖീയമല്ലാത്ത പ്രവണതയിൽ മാറ്റനിരക്ക് അസ്ഥിരവുമാണ്.

ആവർത്തന ചലനങ്ങൾ (Periodic Movements)

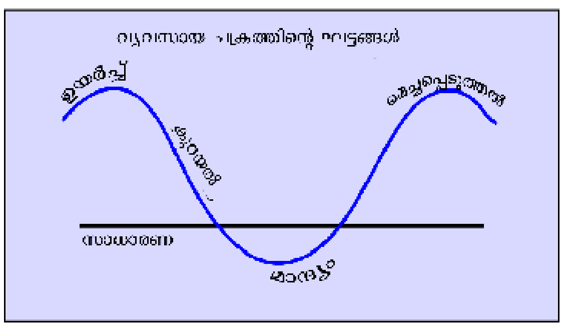
ഒരു ഡാറ്റയുടെ തിരിച്ചറിയാൻ കഴിയുന്ന ആന്ദോളനങ്ങളിലുള്ള വ്യതിയാനം വിശദീകരിക്കുന്നതാണ് ആവർത്തന ചലനങ്ങൾ. ഒരു ഉയർച്ചയിൽ നിന്നും മറ്റൊരു ഉയർച്ചയിലേക്ക് മാറുവൻ എടുക്കുന്ന കാലയളവ് ആന്ദോളന കാലഘട്ടം എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ആവർത്തന ചലനങ്ങളെ സാധാരണയായി രണ്ടായി വേർതിരിച്ചിരിക്കുന്നു: ചാക്രിക വ്യതിയാനവും, കാലാനുസൃത വ്യതിയാനവും.

ചാക്രിക വ്യതിയാനങ്ങൾ (Cyclical Variation)

വ്യതിചലനങ്ങളോ ആന്ദോളനങ്ങളോ ഒരു നിശ്ചിത കാലയളവിലല്ല എങ്കിൽ ചലനങ്ങളെല്ലാം ചാക്രികമാണ്. ഇവിടെ സാധാരണയായി ആന്ദോളന കാലഘട്ടം ഒരു വർഷത്തിനുമപ്പുറമാണ്. ആന്ദോളന കാലഘട്ടം ഒരു ചക്രം എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. വ്യവസായവും സാമ്പത്തികവും ആയി ബന്ധപ്പെട്ട സമയശ്രേണികൾ ചില തരത്തിലുള്ള ചാക്രിക വ്യതിയാനങ്ങൾ കാണിക്കുന്നു.

ഒരു വ്യവസായ ചക്രത്തിൽ വ്യക്തമായി നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട നാല് കാലയളവ് അഥവാ ഘട്ടങ്ങൾ ഉണ്ട്.

- സമൃദ്ധി (ഉയർച്ച)
- കുറയൽ
- മാന്ദ്യം
- മെച്ചപ്പെടുത്തൽ



ചിത്രം 12.5

കാലാനുസൃത വ്യതിയാനങ്ങൾ (Seasonal Variations)

കാലനുസൃത വ്യതിയാനങ്ങളിൽ വ്യതിചലനങ്ങൾ നിശ്ചിതവും, അറിയപ്പെടുന്നതുമായ കാലയളവിലാണ്. ഒരു വർഷത്തിൽ കുറഞ്ഞ കാലയളവിൽ സ്ഥിരമായി സംഭവിക്കുന്ന താളാത്മക ശക്തികൾ മൂലമാണ് ഇത് സംഭവിക്കുന്നത്. ഇവിടെ സമയകാലയളവ് മാസം ആഴ്ച, മണിക്കൂർ എന്നിങ്ങനെ ആകാം.

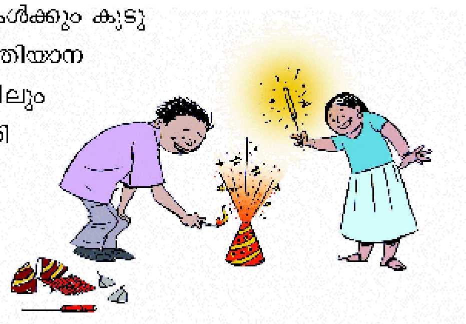
സമയശ്രേണിയിലെ കാലാനുസൃത വ്യതിയാനങ്ങൾ സംഭവിക്കുന്നത് രണ്ട് കാരണങ്ങളാലാണ്.

a) പ്രകൃതി ശക്തികൾ കാരണം.

b) മനുഷ്യനിർമ്മിത ആചാരങ്ങൾ കാരണം.

കാലാനുസൃത വ്യതിയാനങ്ങൾ സംഭവിക്കുന്നതിനുള്ള വളരെ പ്രധാനപ്പെട്ട ഘടകം കാലാവസ്ഥ മാറ്റങ്ങളാണ്. ഈർപ്പം, മഴ, ചൂട് മുതലായ കാലാവസ്ഥയും, പരിസ്ഥിതിയും വിവിധ ഉല്പന്നങ്ങളെയും, വ്യവസായങ്ങളെയും പലതലത്തിൽ ബാധിക്കുന്നുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, ശൈത്യകാലത്ത് കമ്പിളി വസ്ത്രങ്ങൾക്കും, ചൂടുള്ള പാനീയങ്ങൾക്കും ആവശ്യക്കാരേറെയാണ്.

അതുപോലെ ചൂട്കാലത്ത് പരുത്തി വസ്ത്രത്തിനും, ശീതളപാനീയങ്ങൾക്കും വലിയ വില്പന നടക്കും. മഴക്കാലത്ത് കുടകൾക്കും, മഴ കോട്ടുകൾക്കും കൂടുതൽ ആവശ്യക്കാരുണ്ടാകും. കാലനുസൃത വ്യതിയാനങ്ങൾക്ക് പ്രധാന കാരണം പ്രകൃതിയാണ് എങ്കിലും ആചാരങ്ങൾ, വിശ്വാസങ്ങൾ, സ്വഭാവരീതികൾ എന്നിവയെല്ലാം സ്വാധീന ശക്തികളാണ്. ഉദാഹരണമായി, ദീപാവലി, ഓണം, ക്രിസ്തുമസ്സ് തുടങ്ങിയ അവസരങ്ങളിലെല്ലാം മധുരപലഹാരങ്ങൾക്കും, വസ്ത്രങ്ങൾക്കും വലിയ അളവിൽ ആവശ്യക്കാരുണ്ടാകും. സ്കൂളുകളും, കോളേജുകളും ആരംഭിക്കുന്ന മാസങ്ങളിൽ പുസ്തകങ്ങൾക്കും സ്റ്റേഷനറി സാധനങ്ങൾക്കും വലിയ ആവശ്യകതയുണ്ടാകും.



ക്രമരഹിത വ്യതിയാനങ്ങൾ (Irregular Variations)

ഇതുവരെ നാം ചർച്ച ചെയ്ത വ്യതിയാനങ്ങളെല്ലാം ക്രമ വ്യതിയാനങ്ങൾ എന്നറിയപ്പെടുന്നു. പക്ഷെ, ഒരു വിധം എല്ലാ സമയ ശ്രേണിയിലും ക്രമരഹിത വ്യതിയാനങ്ങൾ എന്ന വേറെ ഒരു വ്യതിയാനം കൂടി ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഭൂമികുലുക്കം, യുദ്ധങ്ങൾ, വെള്ളപ്പൊക്കം, വ്യവസായശാലകളിലെ അടച്ചുപൂട്ടൽ തുടങ്ങിയ മനുഷ്യ നിയന്ത്രണത്തിനപ്പുറമുള്ള സാഹചര്യങ്ങൾ മൂലമാണ് ഇത് ഉണ്ടാകുന്നത്. ഈ ഘടകങ്ങൾ കാണാൻ കഴിയാത്തതും, പ്രവചനാതീതവുമാണ് എങ്കിലും മറ്റു വ്യതിചലനങ്ങളെപ്പോലെ വളരെ പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്നു.

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

താഴെ പറയുന്ന സമയശ്രേണികളിൽ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഘടകങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുക.

1. ജനസംഖ്യ വളർച്ച
2. സാമൂഹിക സാമ്പത്തിക സംവിധാനത്തിലെ പരിവർത്തനം
3. ഓണ ദിനങ്ങളിലെ ഏത്തക്കായ വറുത്തത് വില്പനയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റ.
4. ഗ്രാന്റ് കേരള ഫെസ്റ്റിവലിൽ വീട്ടുപകരണങ്ങളുടെ വില്പനയിൽ ഉണ്ടാകുന്ന വർദ്ധനവ്.
5. വാണിജ്യചക്രങ്ങൾ
6. ചില പകർച്ച വ്യാധികൾ കാരണം ഉപയോഗം കുറയുക.
7. ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ അടച്ചു പൂട്ടൽ ഒരു കൂട്ടം ആളുകളുടെ ജീവിത നിലവാരത്തെ ബാധിക്കുന്നത്.

't' യുടെ ഏതൊരു സമയത്തും, സമയശ്രേണിയുടെ y_t എന്ന വില മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഘടകങ്ങളുടെ സംയോജിതഫലമായി സൂചിപ്പിക്കാം. സമയ ശ്രേണിയുടെ ഇത്തരം സൂചകങ്ങളെ സമയശ്രേണി മാതൃകകൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. മിക്ക വാണിജ്യ വിശകലനങ്ങളിലും ഗുണന മാതൃകകളാണ് നമ്മൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. അവ വാണിജ്യ സാഹചര്യങ്ങൾക്ക് കൂടുതൽ അനുയോജ്യമാണ് എന്ന് കണ്ടെത്തുകയും ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ഈ അധ്യായത്തിലും നമ്മൾ സമയശ്രേണിയുടെ ഗുണന മാതൃകകളാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

സമയമാതൃകകൾ രണ്ട് തരത്തിലുണ്ട്.

1. സങ്കലന മാതൃക

$Y = T + S + C + R$. ഈ മാതൃകയിൽ നാം എല്ലാഘടകങ്ങളും സ്വതന്ത്രമാണ് എന്ന് കരുതുന്നു. പക്ഷെ ഒരു വിധം എല്ലാ കാര്യത്തിലും നമുക്കങ്ങനെ എല്ലാഘടകങ്ങളും സ്വതന്ത്രമാണെന്ന് കരുതാൻ കഴിയുകയുമില്ല. അതുകൊണ്ട് സമയശ്രേണിയെ പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ ഗുണന മാതൃകയാണ് കൂടുതൽ ജനകീയം.

2. ഗുണനമാതൃക

$Y = T \times S \times C \times R$

ഇവിടെ
T – സെക്യുലർ പ്രവണത
S – കാലാനുസൃത വ്യതിയാനങ്ങൾ
C – ചാക്രിക വ്യതിയാനങ്ങൾ
R – ക്രമരഹിത വ്യതിയാനങ്ങൾ

12.3 സമയശ്രേണി വിശകലനത്തിന്റെ ഉപയോഗങ്ങൾ

സാമ്പത്തിക വിദഗ്ദ്ധർക്കും, കച്ചവടക്കാർക്കും മാത്രമല്ല, ജ്യോതി ശാസ്ത്രം , ഭൗമശാസ്ത്രം, ജീവശാസ്ത്രം സാമൂഹ്യ ശാസ്ത്രം തുടങ്ങിയ മേഖലകളിലെ ശാസ്ത്രജ്ഞർക്കും, ഗവേഷകർക്കും സമയശ്രേണി വിശകലനം വലിയ പ്രാധാന്യമുള്ളതാണ്.

സമയ ശ്രേണി വിശകലനം പ്രാധാന്യമായിരിക്കുന്നത് എന്തുകൊണ്ട്?

ഇത് മുൻകാല സ്വഭാവം മനസ്സിലാക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു.

ഒരു കാലഘട്ടത്തിലെ ഡാറ്റ നിരീക്ഷിച്ചാൽ കഴിഞ്ഞ കാലങ്ങളിൽ സംഭവിച്ച മാറ്റങ്ങൾ ഒരാൾക്ക് എളുപ്പം മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയും. ഇത്തരം വിശകലനം ഭാവിയിലെ സ്വഭാവം പ്രവചിക്കുന്നതിൽ വളരെ സഹായകരമാകും.

നിലവിലുള്ള നേട്ടങ്ങളെ വിലയിരുത്തുന്നതിന് ഇത് സഹായകരമാണ്

യഥാർത്ഥ പ്രകടനം പ്രതീക്ഷിത പ്രകടനവുമായി താരതമ്യം ചെയ്യാനും വ്യതിയാനങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ അവയുടെ കാരണങ്ങൾ വിശകലനം ചെയ്യാനും കഴിയും. 2014 ൽ പ്രതീക്ഷിച്ച വിൽപ്പന 10000 വും യഥാർത്ഥ വില്പ്പന 9000 മാത്രവുമാണെങ്കിൽ നേട്ടങ്ങളിൽ കുറവുണ്ടായതിന്റെ കാരണം ഒരാൾക്ക് എളുപ്പത്തിൽ അന്വേഷിക്കാൻ കഴിയും.

ഭാവി പ്രവർത്തനങ്ങൾ ആസൂത്രണം ചെയ്യുന്നതിന് സഹായിക്കുന്നു.

സമയശ്രേണി വിശകലനത്തിന്റെ പ്രധാന ഉപയോഗം പ്രവചന സിദ്ധാന്തത്തിലാണ്. കഴിഞ്ഞ കാല പ്രവർത്തനങ്ങളുടെ വിശകലനം ഭാവി പ്രവചിക്കാൻ പ്രാപ്തമാക്കുന്നു. സമ്പദ്‌വ്യവസ്ഥയുടെ വിവിധ മേഖലകളിൽ ബജറ്റ് ആസൂത്രണത്തിനും, അനുവദിക്കുന്നതിനും സമയ ശ്രേണി പ്രവചനം സഹായകമാണ്.

താരതമ്യ പഠനം സാധ്യമാക്കുന്നു.

വ്യത്യസ്ഥ സമയശ്രേണികൾ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിനും അതു വഴി പ്രധാന നിഗമനങ്ങളിൽ എത്തിചേരുന്നതിനും സഹായകരമാണ്.

12.4 പ്രവണതാ വിശകലനം (Trend Analysis)

സമയശ്രേണിയുടെ ദീർഘകാല ചലനമാണ് സെക്യുലാർ പ്രവണത എന്നത് ഇത് ശ്രേണിയുടെ അടിസ്ഥാന പ്രവണതയെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു.

തന്നിരിക്കുന്ന ഏതൊരു സമയ ശ്രേണിയിലും പ്രവണത നിർണ്ണയിക്കുന്നതിനായി താഴെ പറയുന്ന രീതികൾ സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്നു.

1. **സ്വതന്ത്ര വക്രരീതി (Free hand curve method)**
2. **അർദ്ധ ശരാശരി രീതി (Semi average method)**
3. **ചലന ശരാശരി രീതി (Method of Moving Average)**
4. **ന്യൂനതമവർഗരീതി (Method of least squares)**

നമുക്ക് അവയെക്കുറിച്ച് വിശദമായി ചർച്ച ചെയ്യാം.

സ്വതന്ത്ര വക്രരീതി (Freehand curve method)

പ്രവണതാ രേഖാ നിർമ്മിക്കുന്നതിന് ഏറ്റവും പ്രാഥമികവും, എളുപ്പവുമായ മാർഗ്ഗങ്ങളിലൊന്നാണ് ഇത്.

ഈ രീതി താഴെപറയും പ്രകാരമാണ്:-

X- അക്ഷത്തിൽ സമയവും, Y ആക്ഷത്തിൽ മറ്റേ ഘടകത്തിന്റെ തത്തുല്ല്യമായ വിലകളും എടുത്ത് ഗ്രാഫ് പേപ്പറിൽ ഡാറ്റ രേഖപ്പെടുത്തുന്നു. അതിന് ശേഷം ബിന്ദുക്കളെ രേഖാഖണ്ഡങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് യോജിപ്പിക്കുന്നു.

സ്വതന്ത്രവക്ര രീതിയിൽ പ്രവണതാ രേഖ വരക്കുമ്പോൾ താഴെ പറയുന്ന കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതുണ്ട്. പ്രവണതാ രേഖയുടെ മുകളിലുള്ള ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നുള്ള ലംബ ദൂരങ്ങളുടെ തുക, പ്രവണതാ രേഖയുടെ താഴെയുള്ള ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നുള്ള ലംബ ദൂരങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമായിരിക്കും.

അതിന് ശേഷം ഉയർച്ചകളും, താഴ്ചകളും ഒഴിവാക്കികൊണ്ട് വെറും നിരീക്ഷണത്തിലൂടെ ഗ്രാഫിൽ ഒരു നേർരേഖവരക്കുന്നു. ഈ നേർരേഖ ഡാറ്റയുടെ പ്രവണത കാണിക്കുന്നു.

വ്യക്തിഗത തീരുമാനത്തെ ആശ്രയിച്ച് കൊണ്ടുള്ള രീതിയായതിനാൽ പ്രവണതരേഖ ഒരു വ്യക്തിയിൽ നിന്ന് മറ്റൊരുവ്യക്തിയിലേക്ക് മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വ്യത്യാസപ്പെട്ട് കൊണ്ടിരിക്കും. അത് ഈ രീതിയുടെ പോരായ്മയാണ്. അതുകൊണ്ട് തന്നെ കൃത്യമായ പ്രവചനത്തിന് അടിസ്ഥാനമായി ഇത് ഉപയോഗിക്കാറില്ല. പക്ഷെ ഏകദേശം കണക്കുകൂട്ടലിനായി അഥവാ മാറ്റത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ധാരണ ലഭിക്കുന്നതിനായി ഈ രീതി അഭികാമ്യമാണ്.

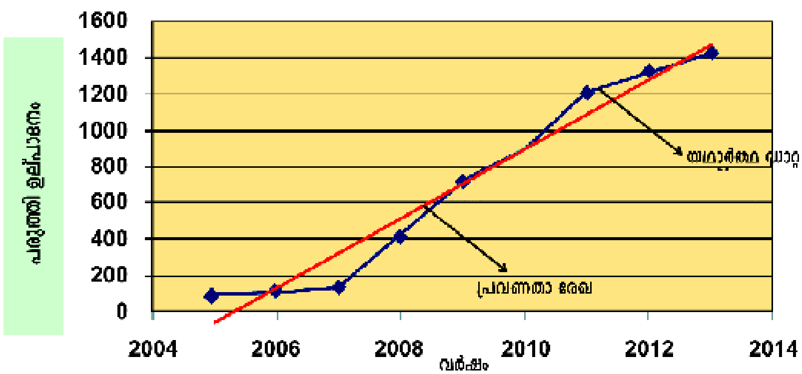
വിശദീകരണം 12.1

2005 മുതൽ 2013 വരെയുള്ള വർഷങ്ങളിലെ പരുത്തി ഉല്പാദനത്തിന്റെ (ടണ്ണിൽ) ഡാറ്റ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. സ്വതന്ത്ര വക്രരീതി ഉപയോഗിച്ച് പ്രവണതാ രേഖ കണ്ടുപിടിക്കുക.

വർഷം	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
ഉല്പാദനം (ടണ്ണിൽ)	91	111	136	412	720	900	1206	1322	1380

പരിഹാരം:

യഥാർത്ഥ ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച് വരച്ച ഗ്രാഫും, പ്രവണതാ രേഖ ഗ്രാഫും നിരീക്ഷിക്കുക.



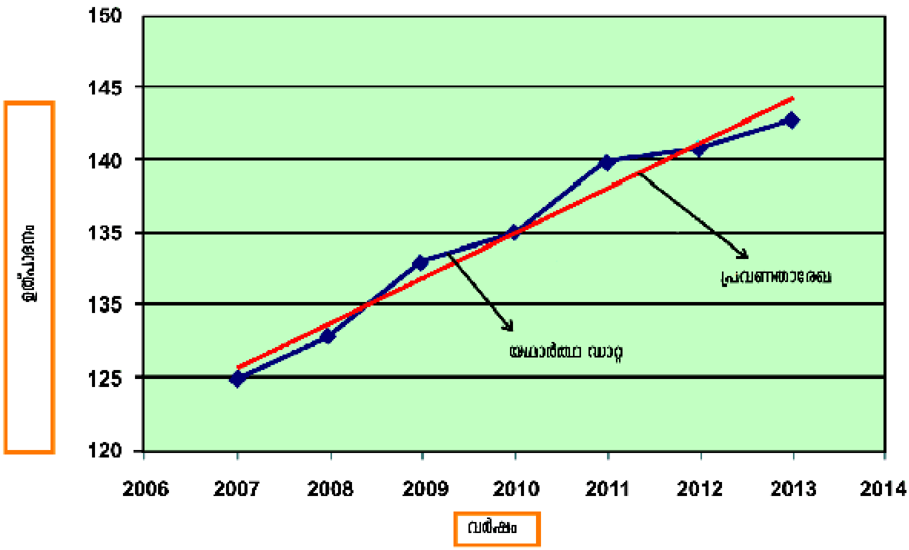
ചിത്രം 12.6

വിശദീകരണം 12.2

2007 മുതൽ 2013 വരെയുള്ള വർഷങ്ങളിൽ ഒരു ബഹുരാഷ്ട്രകമ്പനിയുടെ ഉല്പാദനം (കോടിയിൽ) സംബന്ധിച്ച ഡാറ്റ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. സ്വതന്ത്രവക്ര രീതി ഉപയോഗിച്ച് പ്രവണതാ രേഖ വരക്കുക.

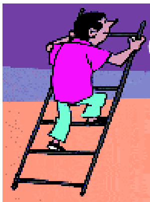
വർഷം	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
ഉല്പാദനം	125	128	133	135	140	141	143

പരിഹാരം:



ചിത്രം 12.7

യഥാർത്ഥ ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച് വരച്ച ഗ്രാഫും, സ്വതന്ത്രവക്ര രീതി ഉപയോഗിച്ച് വരച്ച ഗ്രാഫും നിരീക്ഷിക്കുക.



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. 2008 മുതൽ 2013 വരെയുള്ള വർഷങ്ങളിൽ കേരളം സന്ദർശിച്ച അഭ്യന്തര വിനോദസഞ്ചാരികളുടെ ഡാറ്റ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. സ്വതന്ത്രവക്ര രീതി പ്രകാരം പ്രവണതാ രേഖ വരക്കുക.

വർഷം	2008	2009	2010	2011	2012	2013
ആഭ്യന്തര വിനോദ സഞ്ചാരികൾ (ദശലക്ഷത്തിൽ)	70.59	79.13	85.95	93.81	100.76	108.57

2. 2004 മുതൽ 2009 വരെയുള്ള വർഷങ്ങളിൽ ഒറീസ്സയിലുണ്ടായ മത്സ്യ ഉൽപ്പാദനത്തിന്റെ (ആയിരം മെട്രിക് ടണ്ണിൽ) ഡാറ്റ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

വർഷം	2004	2005	2006	2007	2008	2009
ഉത്പാദനം	40	45	40	42	46	52

സ്വതന്ത്രവക്രരീതി പ്രകാരം പ്രവണതാ രേഖ വരക്കുക.

പ്രവർത്തനം

പ്രവർത്തനം 12.1 ലെ ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച് സ്വതന്ത്രവക്ര രീതി പ്രകാരം പ്രവണതാരേഖ വരക്കുക.

അർദ്ധ ശരാശരി രീതി (Semi Average Method)

അർദ്ധ ശരാശരി രീതിയിൽ മൊത്തം ഡാറ്റയെ സമയത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ രണ്ട് തുല്യ ഭാഗങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു. സമയ ശ്രേണിയിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം ഇരട്ട സംഖ്യയാണെങ്കിൽ അവയെ രണ്ടു തുല്യ ഭാഗങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു. പകുതിപ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ മുകൾ ഭാഗത്തും ബാക്കി താഴെയുള്ള ഭാഗത്തുമായിരിക്കും. പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒറ്റ സംഖ്യയാണെങ്കിൽ ശ്രേണിയിലെ മദ്ധ്യ പ്രാപ്തങ്കത്തെ ഒഴിവാക്കി ശ്രേണിയെ രണ്ട് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.

ഡാറ്റ രണ്ട് ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കപ്പെട്ടതിന് ശേഷം, ഓരോ ഭാഗത്തിന്റെയും ശരാശരി (മാധ്യം) കാണുന്നു. അങ്ങനെ രണ്ട് വിലകൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു. ഓരോ ഭാഗത്തിന്റെയും വിലകൾ മദ്ധ്യ-വർഷത്തിന് ആനുപാതികമായി ഗ്രാഫിൽ രേഖപ്പെടുത്തുന്നു. അങ്ങനെ രേഖപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കളെ ബന്ധിപ്പിച്ച് ഒരു നേർരേഖ വരക്കുന്നു. ഈ രേഖയാണ് പ്രവണതാരേഖ.

പ്രവണതാമൂല്യങ്ങൾ കാണുന്നതിന് അഥവാ ഭാവി മൂല്യങ്ങൾ പ്രവചിക്കുന്നതിന് ഈ രേഖ താഴോട്ടും മുകളിലോട്ടും നീട്ടാൻ കഴിയും. ആയതിനാൽ ഈ രീതിയെ പ്രവചനങ്ങൾക്കുള്ള ശാസ്ത്രീയ രീതിയായി കണക്കാക്കുന്നു. എന്നാൽ മാധ്യത്തിനുള്ള എല്ലാ പോരായ്മകളും ഇതിനുണ്ട്. രണ്ടു ഭാഗങ്ങളുടെ മാധ്യം കാണക്കാക്കുമ്പോൾ, ഈ ഭാഗങ്ങളിലെ വിലകളിൽ സംഭവിക്കാവുന്ന ഒറ്റപ്പെട്ട മൂല്യങ്ങൾ പ്രവണതാമൂല്യങ്ങളെ സാരമായി ബാധിക്കും.

ഉദാഹരണം: 2001 മുതൽ 214 വരെയുള്ള 14 വർഷങ്ങളിലെ ഡാറ്റ തന്നിരിക്കുന്നു എങ്കിൽ, 2001 മുതൽ 2007 വരെയുള്ള 7 വർഷത്തെ മൂല്യങ്ങൾ ഒന്നാം ഭാഗമായും, 2008 മുതൽ 2014 വരെയുള്ള അടുത്ത 7 വർഷത്തെ മൂല്യങ്ങൾ അടുത്ത ഭാഗവുമായിരിക്കും. 2001 മുതൽ 2013 വരെയുള്ള 13 വർഷത്തെ ഡാറ്റയാണ് തന്നിരിക്കുന്നതെങ്കിൽ 2001 മുതൽ 2006 വരെയുള്ള ആദ്യ 6 വർഷത്തെ ഡാറ്റ ഒന്നാം ഭാഗമായിരിക്കും. 2007 വർഷത്തെ ഡാറ്റ ഒഴിവാക്കിയ ശേഷമുള്ള 2008 മുതൽ 2013 വരെയുള്ള മൂല്യങ്ങൾ അടുത്ത ഭാഗവുമായിരിക്കും.

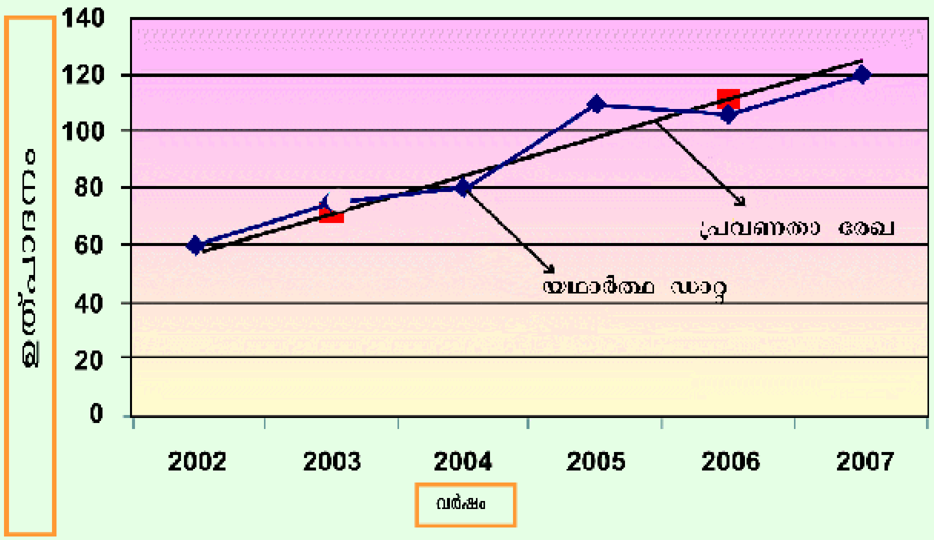
വിശദീകരണം 12.3

2002 മുതൽ 2007 വരെയുള്ള വർഷങ്ങളിൽ ഒരു കമ്പനിയുടെ ഉൽപ്പന്നങ്ങളുടെ ഡാറ്റ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. അർദ്ധ ശരാശരി രീതിയിൽ പ്രവണതാ രേഖ വരക്കുക.

വർഷം	2002	2003	2004	2005	2006	2007
ഉൽപാദനം	60	75	81	110	106	120

പരിഹാരം:

വർഷം	ഉൽപ്പാദനം	അർദ്ധ ശരാശരികൾ
2002	60	
2003	75	(60 + 75 + 81)/3 = 72
2004	81	
2005	110	
2006	106	(110 + 106 + 120)/3 = 112
2007	120	



ചിത്രം 12.8

അർദ്ധ ശരാശരി രീതിയിൽ വരച്ച പ്രവണതാ രേഖയും യഥാർത്ഥ ഡാറ്റയുടെ ഗ്രാഫും നിരീക്ഷിക്കുക.

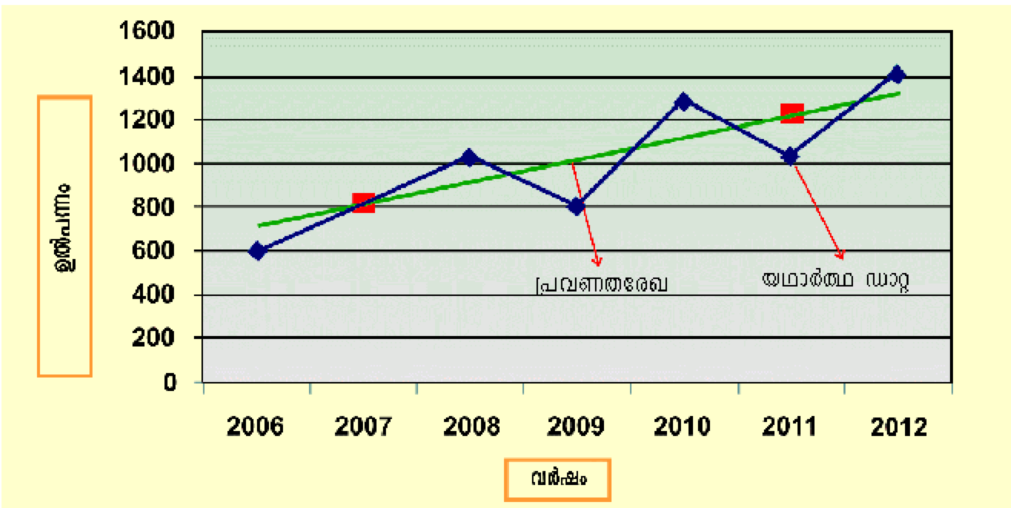
വിശദീകരണം 12.4

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന 2006 മുതൽ 2012 വരെയുള്ള വർഷങ്ങളിലെ ഉൽപ്പാദനത്തിന്റെ പ്രവണതാ രേഖ അർദ്ധ ശരാശരി രീതി പ്രകാരം വരക്കുക.

വർഷം	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
ഉൽപാദനം (എണ്ണത്തിൽ)	600	821	1028	800	1280	1024	1400

പരിഹാരം:

വർഷം	ഉൽപന്നം (എണ്ണത്തിൽ)	അർദ്ധ ശരാശരികൾ
2006	600	
2007	821	(600 + 821 + 1024)/3 = 816.33
2008	1028	
2009	800	
2010	1280	
2011	1024	(1280 + 1024 + 1400)/3 = 1234.667
2012	1400	



ചിത്രം 12.9

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. 2000 മുതൽ 2011 വരെയുള്ള 12 വർഷങ്ങളിലെ ബ്ലീച്ചിംങ് പൗഡർ ഉൽപ്പാദനത്തിന്റെ (ആയിരം ടണ്ണിൽ) ഡാറ്റ താഴെയുള്ള പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. അർദ്ധ ശരാശരി രീതി പ്രകാരം പ്രവണതാ രേഖ വരക്കുക.

വർഷം	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
ഉൽപന്നം	7.1	6.7	7.0	7.9	7.4	10.8	9.2	10.5	15.5	13.7	16.7	15.0

2. 2000 മുതൽ 2009 വരെയുള്ള കാലയളവിൽ ഇന്ത്യയിൽ നിന്നും വിദേശരാജ്യങ്ങളിലേക്ക് കയറ്റുമതി ചെയ്ത കശുവണ്ടി (നൂറ് മെട്രിക്ക് ടണ്ണിൽ) യുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. അർദ്ധ ശരാശരി രീതി ഉപയോഗിച്ച് പ്രവണതാ രേഖ വരക്കുക.

വർഷം	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
അളവ്	18.6	22.6	38.1	40.9	41.4	40.1	46.6	60.7	57.2	53.4

ചലന ശരാശരി രീതി (Moving Average Method)

ക്രമരഹിത വ്യതിയാനങ്ങളും, ഹ്രസ്വകാല വ്യതിയാനങ്ങളും സമയശ്രേണിയിൽ ലഘൂകരിക്കുന്നതിന് വേണ്ടി സാധാരണയായി ചലനശരാശരി ഉപയോഗിക്കുന്നു. **k** കാലയളവിലുള്ള ചലന ശരാശരി എന്നത് സമയശ്രേണിയിലെ ഒന്നാമത്തെ, 2-ാമത്തെ, എന്നിങ്ങനെയുള്ള **k** പദങ്ങളുടെ തുടർച്ചയായ ശരാശരികളുടെ ശ്രേണിയാണ്. അതായത്, ആ **k** പദങ്ങളുടെ മാധ്യമെന്നത് ആദ്യത്തെ ശരാശരി. 2-ാമത്തെ പദം തൊട്ട് (ആദ്യപദം ഒഴിവാക്കിക്കൊണ്ട്) ആരംഭിക്കുന്ന **k** പദങ്ങളുടെ മാധ്യമാണ് രണ്ടാമത്തെ ശരാശരി. മൂന്നാമത്തെ പദം തൊട്ട് ആരംഭിക്കുന്ന (2-ാം പദം ഒഴിവാക്കി കൊണ്ട്) അടുത്ത **k** പദങ്ങളുടെ മാധ്യമാണ് മൂന്നാമത്തെ ശരാശരി. തുടങ്ങിയങ്ങനെ പോകുന്നു. **k** എന്നത് ഒറ്റ സംഖ്യയാണെങ്കിൽ, അത് പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന സമയപരിധി വിലകളുടെ മദ്ധ്യ ഭാഗത്തിന് നേരെയായി ചലന ശരാശരി പ്രതിഷ്ഠിക്കുന്നു. എന്നാൽ **k** ഇരട്ട സംഖ്യയാണെങ്കിൽ, ചലനശരാശരി മദ്ധ്യഭാഗത്തെ രണ്ട് സമയപരിധി വിലകളുടെ മദ്ധ്യഭാഗത്തിന് നേരെയായി പ്രതിഷ്ഠിക്കുന്നു. അത് ഏതെങ്കിലും സമയത്തിന് നേരെയാകില്ല. ആയതിനാൽ തുടർച്ചയായ രണ്ട് ചലന ശരാശരികളുടെ മാധ്യം കണക്കാക്കുകയും തുടർന്ന് അത് ആ ചലന ശരാശരികൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന കാലയളവിന് മദ്ധ്യത്തിൽ പ്രതിഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. അങ്ങനെ ലഭിക്കുന്ന ചലനശരാശരികൾ പ്രവണതാ മൂല്യങ്ങളാകുന്നു

n എന്നത് വർഷങ്ങളുടെ എണ്ണവും, **k** എന്നത് ചലന ശരാശരിയുടെ കാലയളവുമാണെങ്കിൽ

ചലന ശരാശരികളുടെ എണ്ണം = $n-k+1$, k ഒറ്റസംഖ്യ ആയാൽ

= $n-k$, k ഇരട്ടസംഖ്യ ആയാൽ

പ്രവണതാ മൂല്യങ്ങൾ ഒരു ഗണിത രൂപത്തിലേക്കും പൊരുത്തപ്പെടുത്താനാകാത്തതിനാൽ ഭാവി മൂല്യങ്ങളെ പ്രവചിക്കാൻ ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കുന്നില്ല എന്നത് ഈ രീതിയുടെ പ്രധാന പോരായ്മയാണ്. ചലനശരാശരിയുടെ കാലയളവിനുസരിച്ച് സമയശ്രേണിയുടെ തുടക്കത്തിലും അവസാനത്തിലും മൂല്യങ്ങൾ നഷ്ടപ്പെടുന്നതിന് ഇടയാകുന്നു എന്നതാണ് മറ്റൊരു പോരായ്മ.

ഡാറ്റയിലെ ചാക്രികതയാണ് ചലന ശരാശിയുടെ കാലയളവ് തീരുമാനിക്കുന്നത്

വിശദീകരണം 12.5

2005 മുതൽ 2013 വരെയുള്ള വർഷങ്ങളിലെ താഴെ പറയുന്ന ഡാറ്റയ്ക്ക് 3 വർഷ ചലന ശരാശരി കണക്കാക്കുക.

വർഷം	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
ഉല്പാദനം (ടണ്ണിൽ)	45	40	42	46	52	56	61	64	69

പരിഹാരം

വർഷം	ഉൽപാദനം (ടണ്ണിൽ)	3 വർഷ ചലനതുക	3 വർഷ ചലന മാധ്യം
2005	45	———	———
2006	40	45+40+42 = 127	127/3 = 42.33
2007	42	40+42+46 = 128	128/3= 42.67
2008	46	42+46+52 = 140	140/3= 46.67
2009	52	46+52+56 = 154	154/3= 51.33
2010	56	52+56+61 = 169	169/3= 56.33
2011	61	56+61+64 = 181	181/3= 60.33
2012	64	61+64+69 = 194	194/3= 64.67
2013	69	———	———

വിശദീകരണം 12.6

2004 മുതൽ 2012 വരെയുള്ള വർഷങ്ങളിലെ ഒരു കമ്പനിയുടെ ലാഭം (ആയിരം രൂപയിൽ) താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. 4 വർഷ ചലന ശരാശരി രീതി ഉപയോഗിച്ച് പ്രവണതാ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

വർഷം	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
ലാഭം	100	110	111	90	99	98	99	87	75

പരിഹാരം

വർഷം	ലാഭം	4 വർഷ ചലനതുക	4 വർഷ ചലന ശരാശരി	4 വർഷ കേന്ദ്രീകൃത ചലന ശരാശരി
2004	100	———	———	———
2005	110	———	———	———
		411	102.75	
2006	111			(102.75+102.5)/2 = 102.625
		410	102.5	
2007	90			(102.5+99.5)/2 = 101
		398	99.5	
2008	99			(99.5+96.5)/2 = 98
		386	96.5	
2009	98			(96.5+95.75)/2 = 96.25
		383	95.75	
2010	99			(95.75+89.75)/2 = 92.75
		359	89.75	
2011	87	———	———	———
2012	75	———	———	———

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. ഒരു രാജ്യത്തെ കാർഷിക ഉല്പാദനത്തിന്റെ സൂചികാഖ്യങ്ങൾ താഴെ പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു (2005 മുതൽ 2010 വരെ) 5 വർഷ ചലന ശരാശരി പ്രവണതാ മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

വർഷം	2005	2006	2007	2008	2009	2010
സൂചികാഖ്യങ്ങൾ	132.9	125.1	138	117	135.3	142.9

2. 2003-2013 കാലഘട്ടത്തിൽ സംസ്ഥാനത്തുണ്ടായ റോഡപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണിക്കുന്ന പട്ടിക താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. 4 വർഷ ചലന ശരാശരി രീതി പ്രകാരം പ്രവണതാ മൂല്യങ്ങൾ തയാറാക്കുക.

വർഷം	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
റോഡപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം	103	114	110	115	119	127	125	136	145	151	155

ന്യൂനതമവർഗ രീതി (Method of Least Squares)

പ്രവണതാ മൂല്യങ്ങൾ കാണുന്നതിനുള്ള ഗണിത രീതിയാണിത്. പ്രവണതാ രേഖയുടെ സമവാക്യം y=ax+b എന്ന രൂപത്തിലാണ് എന്ന് കരുതുക. ഇവിടെ a യും, b യും അറിയപ്പെടാത്ത സ്ഥിരാങ്കങ്ങളാണ്. അവയെ പരാമീറ്ററുകൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അവ പ്രവണതാ രേഖയുടെ സ്ഥാനം തീരുമാനിക്കുന്നു. 'a' യുടെയും, 'b' യുടെയും വിലകൾ തീരുമാനിക്കുന്നതിന് നാം ന്യൂനതമവർഗരീതി ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഈ രീതി പ്രകാരം 'a' യും 'b' യും തീരുമാനിക്കുന്നതിന് താഴെ പറയുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നു.

1805-ൽ ന്യൂനതമ വർഗരീതി ആവിഷ്കരിച്ചത് ആഡ്രിയൻ മെയർ ലെജൻഡ്രർ ആണ്.

$$\Sigma y = a\Sigma x + nb$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x^2 + b\Sigma x$$

ഈ സമവാക്യങ്ങളെ നോർമൽ സമവാക്യങ്ങൾ അഥവാ കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ എന്നറിയപ്പെടുന്നു. നോർമൽ സമവാക്യങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് a യുടെയും b യുടെയും വിലകൾ ലഭ്യമാകും. ഈ വിലകൾ y=ax+b എന്ന സമവാക്യത്തിൽ ആരോപിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് പ്രവണതാ സമവാക്യം ലഭിക്കുന്നു.

വിവരണം 12.7

2001 മുതൽ 2007 വരെയുള്ള വർഷങ്ങളിലെ ഒരു പഞ്ചസാര ഫാക്ടറിയുണ്ടായ ഉല്പാദനം (ആയിരം ക്വിന്റലിൽ) താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. നേർരേഖാ പ്രവണത കാണുക.

വർഷം	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
ഉല്പാദനം (1000 ക്വിന്റലിൽ)	80	90	92	83	94	99	92

പരിഹാരം

വർഷം(t)	ഉല്പാദനം(y)	x = t-2004	x^2	xy
2001	80	-3	9	-240
2002	90	-2	4	-180
2003	92	-1	1	-92
2004	83	0	0	0
2005	94	1	1	94
2006	99	2	4	198
2007	92	3	9	276
n =7	$\Sigma y = 630$	$\Sigma x = 0$	$\Sigma x^2 = 28$	$\Sigma xy = 56$

നേർരേഖാ സമവാക്യം **y = ax + b** എന്ന് കരുതുക.

a യുടെയും b യുടെയും വിലകൾ കാണുന്നതിന് നോർമൽ സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$$\Sigma y = a\Sigma x + nb$$

$$630 = a \times 0 + 7 \times b$$

$$630 = 7b$$

$$b = 90$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x^2 + b\Sigma x$$

$$56 = a \times 28 + b \times 0$$

$$56 = 28a$$

$$a = 2$$

പ്രവണതാ സമവാക്യം താഴെ പറയുന്നു.

$$y = 2x + 90$$

$$y = 2(t - 2004) + 90$$

വിശദീകരണം 12.8

വിവിധ വർഷങ്ങളിൽ കമ്പനിക്കുണ്ടായ ഉൽപാദന വിവരങ്ങൾ (കോടിയിൽ) ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. ഡാറ്റയ്ക്ക് അനുയോജ്യമായ നേർരേഖ കണ്ടെത്തുക. 2015 എന്ന വർഷത്തിലേക്കുള്ള ഉല്പാദനം കണക്കാക്കുക.

വർഷം	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
ഉൽപാദനം	125	128	133	135	140	141	143	145

പരിഹാരം

വർഷം (t)	ഉൽപാദനം(y)	x = t-2009.5	x^2	xy
2006	125	-3.5	12.25	-437.5
2007	128	-2.5	6.25	-320
2008	133	-1.5	2.25	-199.5
2009	135	-0.5	0.25	-67.5
2010	140	0.5	0.25	70
2011	141	1.5	2.25	211.5
2012	143	2.5	6.25	357.5
2013	145	3.5	12.25	507.5
n =8	$\Sigma y = 1090$	$\Sigma x = 0$	$\Sigma x^2 = 42$	$\Sigma xy = 122$

നേർരേഖയുടെ സമവാക്യം $y = ax + b$ എന്നതാകുന്നു.

a യുടെയും b യുടെയും വിലകൾ കാണുവാൻ നോർമൽ സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$$\Sigma y = a\Sigma x + nb \qquad \Sigma xy = a\Sigma x^2 + b\Sigma x$$

$$1090 = a\times 0 + 8\times b \qquad 122 = a\times 42 + b\times 0$$

$$1090 = 8b \qquad 122 = 42a$$

$$b = 136.25 \qquad a = 2.90$$

പ്രവണതാ സമവാക്യം താഴെ പറയുന്നു.

$$y = 2.9x + 136.25$$

$$y = 2.9\,(t - 2009.5) + 136.25$$

$t = 2015$ ആണെങ്കിൽ

$$y = 2.9\,(2015 - 2009.5) + 136.25$$

$$y = 152.2$$

2015 ലെ ഉല്പാദനം കണക്കാക്കിയത് 152.2 കോടി എന്നാകുന്നു.

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1) ടെലിവിഷൻ സെറ്റുകളുടെ ഉൽപാദനം (ആയിരത്തിൽ) താഴെത്തന്നിരിക്കുന്നു. ന്യൂനതമവർഗ രീതി ഉപയോഗിച്ച് പ്രവണതാ രേഖ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക. കൂടാതെ 2009 വർഷത്തിലെ ഏകദേശ ഉൽപാദനം കണക്കാക്കുക.

വർഷം	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
ഉത്പാദനം	17	20	19	26	24	40	35	55

2) ന്യൂനതമവർഗ രീതി ഉപയോഗിച്ച് പ്രവണതാ സമവാക്യം കാണുക. തുടർന്ന് 2015 ലെ വില്പന കണക്കാക്കുക.

വർഷം	2008	2009	2010	2011	2012
വിൽപന (കോടികളിൽ)	6.7	6.1	7.9	5.6	6.8

പ്രവണതാ ഉത്ഭവ മാറ്റം (Shifting the trend origin)

കണക്ക്ക്കൂട്ടലുകൾ ലളിതമാക്കുന്നതിനും, എളുപ്പമാക്കുന്നതിനുമായി സാധാരണയായി സമയ ശ്രേണിയുടെ മദ്ധ്യഭാഗം ഉത്ഭവമാക്കി എടുത്താണ് പ്രവണത കാണാറുള്ളത്. ചില സമയങ്ങളിൽ ഉത്ഭവം മറ്റു ബിന്ദുക്കളിലേക്ക് മാറ്റേണ്ടതായി വരാറുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന്, കാലാനുസൃതം അല്ലെങ്കിൽ ചാക്രിക ക്രമം പഠിക്കാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നുണ്ടെങ്കിൽ വാർഷിക പ്രവണതാ മൂല്യങ്ങൾ പ്രതിമാസം അല്ലെങ്കിൽ ത്രൈമാസിക മൂല്യങ്ങളിലേക്ക് മാറ്റേണ്ടതുണ്ട്.

പ്രവണതാ ഉത്ഭവം മാറ്റുക എന്നത് ലളിതമായ ഒരു പ്രക്രിയയാണ്. ഉത്ഭവം മാറ്റുന്നതിനുള്ള പ്രക്രിയ താഴെപറയുന്ന വിവരണത്തിലൂടെ സാമാന്യവത്കരിക്കാം.

$$Y = a(X + k) + b$$

ഇവിടെ k എന്നത് മാറ്റപ്പെടേണ്ട സമയ യൂണിറ്റുകളുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഉത്ഭവം മുന്നോട്ട് മാറ്റപ്പെടുന്നു എങ്കിൽ k പോസിറ്റീവും. k ഉത്ഭവം പുറകോട്ട് മാറ്റപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ k നെഗറ്റീവും ആയിരിക്കും.

വിശദീകരണം 12.9

ഉത്ഭവം 2001 ആയ ഒരു പ്രവണതാ സമവാക്യം $Y = 110 + 2X$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു. ഉത്ഭവം 2005 ലേക്ക് മാറ്റുക. പുതിയ പ്രവണതാ സമവാക്യം എഴുതുക.

പരിഹാരം

$Y = a(X + k) + b$. എന്നതാണ് സമവാക്യം ഇവിടെ $a = 2$, $b = 110$, $k = 2005\text{-}2001 = 4$

ലഭിക്കേണ്ട പ്രവണതാ സമവാക്യം $Y = 2(X + 4) + 110$

$$= 2X + 8 + 110$$

$$= 2X + 118$$

വിശദീകരണം 12.10

2005 ഉത്ഭവമായ പ്രവണതാ സമവാക്യം $Y = 210 - 1.5X$ ആകുന്നു. ഉത്ഭവം 2000 ലേക്ക് മാറ്റി പ്രവണതാ സമവാക്യം എഴുതുക.

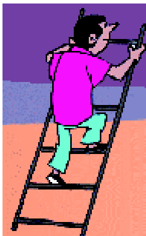
പരിഹാരം

$Y = a(X + k) + b$ എന്നതാണ് പുതിയ പ്രവണതാ സമവാക്യം ഇവിടെ $a = -1.5$, $b = 210$, $k = 2000-2005 = -5$

$$Y = -1.5(X - 5) + 210$$

$$= -1.5X + 7.5 + 210$$

$$= -1.5X + 217.5$$ ഇതാണ് പുതിയ പ്രവണതാ സമവാക്യം



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. 2004 ഉത്ഭവമായിട്ടുള്ള പ്രവണതാ സമവാക്യം $Y = 18.04X + 126.55$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു ഉത്ഭവം 2008 ലേക്ക് മാറ്റി പ്രവണതാ സമവാക്യം എഴുതുക.
2. 2011 ഉത്ഭവമായ പ്രവണതാ സമവാക്യം $Y = 1.68X + 20.6$ എങ്കിൽ 2009 ലേക്ക് ഉത്ഭവം മാറ്റുമ്പോൾ ഉള്ള പ്രവണതാ സമവാക്യം കാണുക.

നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

നിരീക്ഷിച്ചതും, ശേഖരിച്ചതും, കാലക്രമത്തിനനുസരിച്ച് ക്രമീകരിച്ചതുമായ ഡാറ്റയുടെ ഒരു ശ്രേണിയാണ് സമയശ്രേണി. സമയശ്രേണിക്ക് മൂന്ന് ഘടകങ്ങളുണ്ട്. (i) സെക്യുലാർ പ്രവണത (ii) ആവർത്തനചലനങ്ങൾ (iii) ക്രമരഹിത വ്യതിയാനങ്ങൾ. $Y = T \times S \times C \times R$ എന്ന മാതൃകയിൽ ഒരു സമയ ശ്രേണി മാതൃക സൃഷ്ടിക്കാം. ഡാറ്റാ പഠനത്തിനും, ഭൂതകാല സ്വഭാവത്തെക്കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കുന്നതിനും, നിലവിലുള്ള നേട്ടങ്ങൾ വിലയിരുത്തുന്നതിനും, ഭാവി പ്രവർത്തനങ്ങൾ ആസൂത്രണം ചെയ്യുന്നതിനും, താരതമ്യ പഠനത്തിനും സമയശ്രേണി പഠനം വലിയ പ്രാധാന്യം നല്കുന്നു. പ്രവണത വിശകലനം താഴെ പറയുന്ന നാല് രീതികളിലൂടെ ചെയ്യാം. (1) സ്വതന്ത്രവക്രരീതി (2) അർദ്ധ ശരാശരി രീതി (3) ചലന ശരാശരി രീതി (4) ന്യൂനതമവർഗ്ഗ രീതി. കൂടാതെ പ്രവണതയുടെ ഉത്ഭവം മാറ്റുന്നതിനെക്കുറിച്ചും ഈ അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്തിട്ടുണ്ട്.

നമുക്ക് വിലയിരുത്താം...

1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ നിന്നും ശരിയായ ഉത്തരമെഴുതുക.

1. സമയശ്രേണി എന്നത് രേഖപ്പെടുത്തിയ ഡാറ്റകളുടെ കൂട്ടമാണ് ....

   a) ഭൂമി ശാസ്ത്രപരം b) കാലാനുസൃതം

   c) ഭൂമി ശാസ്ത്രപരം, കാലാനുസൃതം d) ഇതൊന്നുമല്ല

2. സമയശ്രേണിയെ രൂപപ്പെടുത്തുന്ന ചലനങ്ങളെ .... എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

   a) ഏറ്റക്കുറച്ചിലുകൾ b) ഘടകങ്ങൾ c) സവിശേഷതകൾ d)ഉറവിടങ്ങൾ

3. സെക്കുലർ പ്രവണത സൂചിപ്പിക്കുന്നത് .... ആകുന്നു.

   a) ദീർഘകാല ചലനം b) ഹ്രസ്വകാല ചലനം

   c) ചാക്രിക ചലനം d) സ്ഥിര ചലനം

4. നിശ്ചിത കാലയളവിലുള്ളതും, സ്ഥിരമായുതുമായ ആവർത്തന ചലനങ്ങളെ .... എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

   a) ചാക്രികവ്യതിയാനങ്ങൾ b) വാണിജ്യ ചക്രം

   c) കാലാനുസൃത വ്യതിയാനങ്ങൾ d) ആന്ദോളനങ്ങൾ

5. ഒരു വ്യവസായ ചക്രത്തിന് വ്യക്തമായി നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട .... എണ്ണം കാലയളവുകൾ ഉണ്ട്

   a) രണ്ട് b) മൂന്ന് c) നാല് d) അഞ്ച്

6. വേനൽക്കാലത്തെ പരുത്തി തുണികളുടെ വില്പന സമയശ്രേണിയുടെ .... ഘടകവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

   a) സെക്കുലർ പ്രവണത b) കാലാനുസൃത വ്യതിയാനം

   c) ചാക്രിക വ്യതിയാനം d) ക്രമരഹിത വ്യതിയാനം

7. മനുഷ്യ നിയന്ത്രണങ്ങൾക്ക് അപ്പുറം ചില ഘടകങ്ങൾ മൂലം സമയശ്രേണിയിലുണ്ടാകുന്ന വ്യതിയാനങ്ങളെ ....എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

   a) സെക്കുലർ പ്രവണത b) കാലനുസൃത വ്യതിയാനം

   c) ചാക്രിക വ്യതിയാനം d) ക്രമരഹിത വ്യതിയാനം

8. കൃത്യമായ പ്രവചനത്തിന് സ്വതന്ത്രവക്രരീതി ഉപയോഗിക്കാതിരിക്കുന്നതിനുള്ള കാരണം .... ആകുന്നു.

   a) അത് ഗ്രാഫിക്കൽ രീതിയാണ് b) വ്യക്തിപരമായ തീരുമാനത്തെ

   c) ഇത് ഒരു ഏകദേശരൂപം മാത്രമെ നൽകുന്നുള്ളു. d) ഇത് വളരെ എളുപ്പമുള്ള രീതിയാണ്.

9. സമയശ്രേണിയിലെ ചലന ശരാശരി രീതി .... ഇല്ലാതാക്കുന്നു.

   a) ദീർഘകാല വ്യതിയാനങ്ങൾ   b) ക്രമരഹിത വ്യതിയാനങ്ങൾ

   c) ഹൃസ്വകാല വ്യതിയാനങ്ങൾ   d) ചാക്രിക വ്യതിയാനങ്ങൾ

10. ഒരു സമയ ശ്രേണിയിൽ 15 നിരീക്ഷണങ്ങൾ ഉണ്ട്. എങ്കിൽ 5 വർഷ കാലയളവിലുള്ള ചലന ശരാശരികൾ എത്ര എണ്ണമുണ്ടാകും?

    a) 15   b) 10   c) 11   d) 9

11. സമയശ്രേണി എന്നാലെന്ത്?
12. സമയശ്രേണിയിലെ ഘടകങ്ങൾ എഴുതുക.
13. ആവർത്തന ചലനങ്ങൾ ഉദാഹരണ സഹിതം വിശദികരിക്കുക.
14. സെക്യുലർ പ്രവണത എന്താകുന്നു?
15. സമയശ്രേണിയിലെ ക്രമരഹിത വ്യതിയാനങ്ങളെക്കുറിച്ച് നിങ്ങൾ ഉദ്ദേശിക്കുനന്നതെന്താണ്?
16. വാണിജ്യ ചക്രം വിശദീകരിക്കുക.
17. സമയശ്രേണി വിശകലനത്തിന്റെ ഉപയോഗങ്ങൾ എന്തെല്ലാം?
18. സമയ ശ്രേണി മാതൃക എഴുതുക.
19. താഴെ പറയുന്ന സമയശ്രേണി ഡാറ്റകൾ ഏത് ഘടകവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്ന് വിശദമാക്കുക.

    a) മാന്ദ്യം

    b) വേനൽക്കാലത്തെ ശീതളപാനീയങ്ങളുടെ വിൽപ്പനയിലെ വർദ്ധന.

    c) പകർച്ചവ്യാധി

    d) ശാസ്ത്രപുരോഗതി മൂലം മരണനിരക്കിലുണ്ടായ കുറവ്

    e) വാഹന വില്പനയിലുണ്ടാകുന്ന തുടർച്ചയായവർദ്ധന

    f) ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ അടച്ചു പൂട്ടൽ

    g) ഉത്സവകാലത്ത് ഒരു തുണിക്കടയിൽ ഉണ്ടാകുന്ന വില്പന.

20. താഴെതന്നിരിക്കുന്ന വിവരം ഉപയോഗിച്ച് പ്രവണതാ രേഖ

    a) സ്വതന്ത്രരീതിയിലും

    b) അർദ്ധ ശരാശരി രീതിയിലും കാണുക.

വർഷം	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
വിൽപന (ആയിരം എണ്ണത്തിൽ)	12	15	17	16	14	14	18	20	16

2015 വർഷത്തിലെ വിൽപ്പന പ്രവചിക്കുക.

21. എ) സ്വതന്ത്ര രീതിയിലും ബി) അർദ്ധശരാശരി രീതിയിലും പ്രവണത രേഖ കാണുക.

വർഷം	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
വിൽപന (ലക്ഷത്തിൽ)	39.2	30.1	38.94	38.6	38.1	38.1	38.1	37.7

22. 3 വർഷ ചലനശരാശരി ഉപയോഗിച്ച് പ്രവണത മൂല്യങ്ങൾ കാണുക

2,6,1,5,3,7,2,8,9,4.

23. ബാങ്കിലെ ഇടപാടുകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ (കോടികളിൽ) പ്രവണതാ മൂല്യങ്ങൾ 5 വർഷ ചലന ശരാശരി രീതിയിൽ തീരുമാനിക്കുക.

വർഷം	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ബാങ്കിടപാടുകൾ	622	680	662	710	690	685	740	724	722	810	800	825

24. രാജ്യത്തെ മുൻനിരയിലുള്ള ഒരു വാഹന നിർമ്മാണ കമ്പനി 2004 മുതൽ 2013 വരെ കേരളത്തിൽ വിറ്റഴിച്ച വാണിജ്യ വാഹനങ്ങളുടെ ഡാറ്റ ചുവടെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. 5 വർഷ ചലന ശരാശരി പ്രകാരം പ്രവണതാ മൂല്യങ്ങൾ കാണക്കാക്കുക.

വർഷം	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
വിൽപന	2880	1693	2136	3707	1931	1637	1746	2638	2655	3576

25. 2005 മുതൽ 2013 വരെയുള്ള ഒരു കമ്പനിയുടെ വില്പന വിവരങ്ങൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. 4 വർഷ ചലന ശരാശരി പ്രകാരം പ്രവണതാ മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

വർഷം	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
വിൽപന (കോടികളിൽ)	26.20	35.40	39.20	45.80	49.00	50.40	54.80	60.00	71.80

26. നഗരത്തിലെ ഒരു കടയിൽ 2005 മുതൽ 2012 വരെ മൊബൈൽ ഫോണുകളുടെ വില്പനയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. 4 വർഷ ചലന ശരാശരി പ്രകാരം പ്രവണതാ മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

വർഷം	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
വില്പന	128	265	341	412	485	531	578	620

27. 2000 മുതൽ 2007 വരെ ഒരു കമ്പനിയുടെ ടെലിവിഷനുകളുടെ ഉല്പാദനം (ആയിരങ്ങളിൽ) വിവരം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. ന്യൂനതമ വർഗ്ഗരീതിയിൽ പ്രവണതാ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

വർഷം	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
ഉൽപാദനം	17	20	19	26	24	40	35	55

28. ഒരുസ്ഥാപനത്തിലെ 2010 വരെയുള്ള അഞ്ച് വർഷത്തെ ലാഭവിവരം താഴെ പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. 2014 ലെ ലാഭം കണക്കാക്കു.

വർഷം	1	2	3	4	5
ലാഭം (ലക്ഷത്തിൽ)	2.08	6.74	23.1	45.27	138

29. 2008 മുതൽ 2013 വരെയുള്ള വാണിജ്യ കപ്പൽ പാളികളുടെ വ്യാപാര വളർച്ച താഴെ പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. തന്നിരിക്കുന്ന വർഷളിലെ പ്രവണതാ മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

വർഷം	2008	2009	2010	2011	2012	2013
കപ്പൽ പാളി	2.65	2.89	3.49	3.87	5.09	5.48

30. ഒരു പ്രദേശത്തെ ആശുപത്രിയിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ അർബുദം മൂലം മരണപ്പെടുന്നവരുടെ വിവരങ്ങൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. പ്രവണതാ സമവാക്യം കാണുക. 2014 ൽ മരണ നിരക്ക് കണക്കാക്കുക.

വർഷം	2009	2010	2011	2012	2013
മരണപ്പെടുന്നവരുടെ എണ്ണം	4	7	11	13	17

31. ഒരു എഞ്ചിനീയറിങ്ങ് കോളേജിൽ ഒരു ബഹുരാഷ്ട്ര കമ്പനി നടത്തിയ ക്യാംപസ് റിക്രൂട്ട്മെന്റ് വഴി ജോലി നേടിയ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ പട്ടിക ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു. ന്യൂനതമവർഗ രീയിയിൽ പ്രവണതാരേഖ കാണുക. 2015 വർഷത്തേക്കുള്ള വില കണക്കാക്കുക.

വർഷം	2010	2011	2012	2013	2014
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	16	18	17	24	29

ലാബ് പ്രവർത്തനം

1. 2004 മുതൽ 2013 വരെയുള്ള വർഷങ്ങളിൽ ഒരു കോളേജിൽ പഠിക്കുന്ന കുട്ടികളുടെ എണ്ണം താഴെ ഒരു പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. 3 വർഷ ചലന ശരാശരികാണുക.

വർഷം	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം	332	317	357	392	402	405	410	427	430	438

2. 2003 മുതൽ 2010 വരെയുള്ള വർഷങ്ങളിലെ ഒരു ഉല്പന്നത്തിന്റെ വിലയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പട്ടിക ചുവടെ തന്നിരിന്നു.

വർഷം	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
വില (രൂപയിൽ)	380	540	650	720	755	815	870	930

a. മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റക്ക് പ്രവണത നേർരേഖ കണ്ടെത്തുക.

b. 2015 വർഷത്തേക്കുള്ള മതിപ്പ് വില കാണുക.

3. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ബാങ്ക് നിക്ഷേപങ്ങളു (കോടിയിൽ) മായി ബന്ധപ്പെട്ടു ഡാറ്റയുടടെ 3 വർഷ ചലന ശരാശരി പ്രവണത മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

വർഷം	1995	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
നിക്ഷേപങ്ങൾ	960	976	984	996	1024	1040	1080	1128	1144	1135	1140	1168	1196

4. 2002 മുതൽ 2012 വരെയുള്ള വർഷങ്ങളിലുള്ള ഒരു കമ്പനിയുടെ വില്പന വിവരം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

വർഷം	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
വിൽപന (ആയിരങ്ങളിൽ)	50.0	46.5	43.0	41.5	38.9	38.1	37.7	35.6	34.9	34.2	33.8

a. പ്രവണതാ വില കണക്കാക്കുക.

b. 2015 ലെ വില്പനയുടെ മതിപ്പ് വില കാണുക.

അധ്യായം 13

F4I5P3

സൂചികാങ്കങ്ങൾ (Index Numbers)

സൂചികാങ്കങ്ങൾ (Index Numbers) എന്നത് വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്ന സാംഖ്യകത്തിലെ ഒരു പ്രായോഗിക തന്ത്രമാണ്. ഒരു സാധനത്തിന്റെ ഒരു പ്രത്യേക വർഷത്തെ വില പരിഗണിക്കുക. മുൻവർഷത്തെ അപേക്ഷിച്ച് ഈ വില ഒന്നുകിൽ കൂടിയിരിക്കും അല്ലെങ്കിൽ കുറഞ്ഞിരിക്കും. അതുപോലെ ഒരു പ്രത്യേക കാലത്തെ ഒരു സാധനത്തിന്റെ ഉല്പാദനമോ ഒരു ഉല്പന്നത്തിന്റെ വില്പനയോ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെയും ഉല്പാദനവും വില്പനയും മുമ്പുള്ള കാലത്തെ അപേക്ഷിച്ച് കൂടിയോ കുറഞ്ഞോ ഇരിക്കുന്നതായി കാണാം. ഇത്തരം പ്രതിഭാസങ്ങളെ കുറിച്ച് വിവരിക്കു

സവിശേഷ പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പഠിക്കുന്നതിലൂടെ പഠിതാവ്

- സൂചികാങ്കങ്ങൾ എന്ന ആശയം വിവരിക്കുന്നു.
- പലതരം ലഘു സൂചികാങ്കങ്ങളും പരിഗണനാ സൂചികാങ്കങ്ങളും വിശദീകരിക്കുന്നു.
- സൂചികാങ്കങ്ങളുടെ വിലയെ വ്യാഖ്യാനിക്കുന്നു.
- ഉപഭോക്തൃ വില സൂചികാങ്കത്തെ തിരിച്ചറിയുകയും ഉപയോഗിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

ന്നതിനാണ് സൂചികാങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. വ്യതിയാനങ്ങളെ ശതമാനങ്ങളാക്കിയാണ് സൂചികാങ്കങ്ങൾ വിവരിക്കുന്നത്.

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടിക പരിശോധിക്കുക. 2012ലും 2013ലും ഒരു കുടുംബം ഉപയോഗിച്ച സാധനങ്ങളുടെ വിലകളാണ് പട്ടികയിലുള്ളത്.

സാധനങ്ങൾ	ഒരു യൂണിറ്റിന്റെ വില 2012	2013	കുറവിന്റെ/വർധനവിന്റെ ശതമാനം	വ്യതിയാനത്തിന്റെ തരം
അരി	20	24	20%	വർധനവ്
പഞ്ചസാര	30	40	33%	വർധനവ്
പാചകവാതകം	450	500	11%	വർധനവ്
മുട്ട	5	3	40%	കുറവ്
തക്കാളി	24	22	8.3%	കുറവ്

പട്ടികയിൽ നിന്നും ചില സാധനങ്ങളുടെ വിലകളിൽ വർധനവും ചിലതിന്റെ വിലകളിൽ കുറവും വന്നതായി കാണാം. ആകെയുള്ള വ്യതിയാനങ്ങളെ ഒരൊറ്റ വിലയായി സൂചിപ്പിക്കുന്നതാണ് സൂചികാങ്കം.

സൂചികാങ്കങ്ങൾ ആദ്യമായി നിർമിച്ചത് 1764 ആണെന്ന് ചരിത്രരേഖകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇറ്റലിയിൽ 1750 ൽ ചില വില സൂചികാങ്കമാണ് നിർമിച്ചിരുന്നത്. താരതമ്യം ചെയ്യുവാൻ 1500 ലെ വിലകളാണ് ഉപയോഗിച്ചത്.

നിർവ്വചനം

"സൂചികാങ്കങ്ങൾ എന്നത് ഒരു ചരത്തിന്റേയോ പരസ്പര ബന്ധമുള്ള ഒരു കൂട്ടം ചരങ്ങളുടേയോ അളവുകളിൽ സമയം, സ്ഥാനം അല്ലെങ്കിൽ മറ്റ് പ്രത്യേകതളായ വരുമാനം, ജോലി മുതലായവ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുണ്ടാകുന്ന വ്യത്യാസങ്ങളെ മനസിലാക്കാനായി രൂപീകരിച്ചിരിക്കുന്ന സാംഖ്യക അളവാണ്"-സ്പീഗൽ (Spiegel).

സൂചികാങ്കം ഒരു ആപേക്ഷിക അളവാണ്. ഒരു പ്രത്യേക സമയത്തിന് ഒരു പ്രത്യേക ആവശ്യത്തിനാണ് ഇവ എപ്പോഴും കണക്കാക്കുന്നത്. ഏത് കാലത്തിന് അല്ലെങ്കിൽ വർഷത്തിനാണോ സൂചികാങ്കം കണക്കാക്കുന്നത് അതിനെ നടപ്പുകാലം (Current Period) അല്ലെങ്കിൽ നടപ്പ് വർഷം (Current year) എന്ന് പറയുന്നു. ആപേക്ഷിക വ്യതിയാനങ്ങളെ മറ്റൊരു കാലത്തെ അല്ലെങ്കിൽ വർഷത്തെ ആസ്പദമാക്കിയാണ് സൂചികാങ്കങ്ങൾ കാണുന്നത്. ഈ കാലം അല്ലെങ്കിൽ വർഷത്തെ അടിസ്ഥാനകാലം (base period) അല്ലെങ്കിൽ അടിസ്ഥാന വർഷം (base year) എന്ന് പറയുന്നു.

13.1 സൂചികാങ്കങ്ങളുടെ വർഗീകരണം (Classification of Index numbers)

സൂചികാങ്കങ്ങളുടെ സവിശേഷതകളനുസരിച്ച് അവയെ ചുവടെ പറയുന്ന രീതിയിൽ തരംതിരിക്കുന്നു.

1) **വില സൂചികാങ്കം** (Price Index number)
2) **അളവ് സൂചികാങ്കം** (Quantity Index number)

ഇവയെകുറിച്ച് വിശദമായി ചർച്ച ചെയ്യണമെങ്കിൽ നമുക്ക് ആപേക്ഷിക വിലയെ ചർച്ച ചെയ്യപ്പെടണം. ആദ്യം അതിനെകുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യാം.

വില സൂചികാങ്കം (Price index number)

ഒരു പ്രത്യേക കാലയളവിൽ വിലയിലുണ്ടാകുന്ന ആപേക്ഷിക വ്യത്യാസത്തെയാണ് വില സൂചികാങ്കങ്ങൾ കൊണ്ട് വിശദീകരിക്കുന്നത്. വിലയിലുണ്ടാകുന്ന ആപേക്ഷിക വ്യത്യാസത്തെ ആപേക്ഷിക വില (Price relative) എന്ന് പറയുന്നു. p_0, p_1 എന്നിവ ഒരു സാധനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനവർഷത്തെ വിലയും നടപ്പുവർഷത്തെ വിലയുമാണെങ്കിൽ $\frac{p_1}{p_0}$ എന്ന അനുപാതത്തെയാണ് ആപേക്ഷിക വില എന്ന് പറയുന്നത്. ഇതിനെ സാധാരണ ശതമാന രൂപത്തിലാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണം: അരിയുടെ ചില്ലറ വില്പന വില 2012-ൽ 26 രൂപയും 2013-ൽ 30 രൂപയുമായാൽ ആപേക്ഷിക വില കാണുക.

$$\text{ആപേക്ഷിക വില} = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

ഇവിടെ $p_1 = 30$, $p_0 = 26$.

$$\text{ആപേക്ഷിക വില} = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

$$= \frac{30}{26} \times 100$$

$$= 115.39$$

ഒരു കൂട്ടം സാധനങ്ങളുടെ വിലയിൽ ഉണ്ടാകുന്ന വ്യതിയാനം ഒരു പ്രത്യേക കാലത്തേക്ക് (നടപ്പ് വർഷം) മറ്റൊരു കാലത്തെ (അടിസ്ഥാനവർഷം) അപേക്ഷിച്ച് അളക്കുന്നതാണ് വില സൂചികാങ്കം.

p_0, p_1 എന്നിവ ഒരു സാധനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാവർഷത്തേയും നടപ്പുവർഷത്തേയും വിലകളായാൽ അവയുടെ ആപേക്ഷിക വിലയുടെ ശതമാനം, $\frac{p_1}{p_0} \times 100$ നെ വില സൂചികാങ്കം എന്ന് പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി: 2010 നെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ഒരു കൂട്ടം സാധനങ്ങളുടെ 2012ലെ വില സൂചികാങ്കം 250 ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് വിലയിൽ 150% വർധനവ് ഉണ്ടായി എന്നാണ്.

അളവ് സൂചികാങ്കം (Quantity Index Number)

ഇവിടെ നമ്മൾ വികൾ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിന് പകരം നടപ്പ് കാലയളവിലും, അടിസ്ഥാന കാലയളവിലും ഉള്ള ഉപയോഗത്തിന്റെ അളവോ, ഉല്പാദനത്തിന്റെ അളവോ ആണ് പരിഗണിക്കുന്നത്.

ഒരു സാധനം അടിസ്ഥാന വർഷവും നടപ്പുവർഷവും ഉപയോഗിച്ച അളവുകൾ യഥാക്രമം q_0 , q_1 എന്നിവയാൽ $\frac{q_1}{q_0}\times 100$ എന്ന അനുപാതത്തിന്റെ ശതമാനത്തെയാണ് അളവ് സൂചികാങ്കമെന്ന് വിളിക്കുന്നത്.

13.2 വിവിധതരം സൂചികാങ്കങ്ങൾ

സൂചികാങ്കങ്ങൾ രണ്ട് തരത്തിലുണ്ട് - ലഘു സൂചികാങ്കവും (Simple Index number) പരിഗണന സൂചികാങ്കവും (Weighted Index number)

ലഘു സൂചികാങ്കം (Simple index number)

ആപേക്ഷിക വിലകളുടെ ലഘു മാധ്യങ്ങളാണ് ലഘു സൂചികാങ്കങ്ങൾ, വിവിധതരം ലളിത സൂചികാങ്കങ്ങൾ ചുവടെ പറയുന്നു.

a) ലഘു മാധ്യ (AM) സൂചികാങ്കം (Simple arithmetic mean(A.M) index)

b) ലഘു ജ്യാമിതീയ മാധ്യ (G.M) സൂചികാങ്കം (Simple geometric mean (G.M) index)

c) ലഘു സന്തുലിത മാധ്യ (HM) സൂചികാങ്കം (Simple harmonic mean(H.M) index)

d) ലഘു മൊത്ത സൂചികാങ്കം (Simple aggregate index)

ഒരു സാധനത്തിന്റെ ആപേക്ഷിക വില $\frac{p_1}{p_0}\times 100 = x$, ഉം ആകെ സാധനങ്ങളുടെ എണ്ണം 'n' ഉം ആയാൽ,

a) ലഘു മാധ്യ സൂചികാങ്കം $= \frac{\sum x}{n}$

b) ലഘു ജ്യോമിതീയ മാധ്യ സൂചികാങ്കം $= \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$

c) ലഘു സന്തുലിത മാധ്യ സൂചികാങ്കം $= \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$ എന്നിവയായിരിക്കും.

വിശദീകരണം 13.1

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ

1) ലഘു മാധ്യ സൂചിയാങ്കം

2) ലഘു ജ്യാമിതീയ മാധ്യ സൂചികാങ്കം

3) ലഘു സന്തുലിത മാധ്യ സൂചികാങ്കം എന്നിവ കാണുക.

സാധനം	1Kg ന് 2012 ലെ വില	1 Kg ന് 2014 ലെ വില
ബീൻസ്	20	25
ഉരുളക്കിഴങ്ങ്	30	30
തക്കാളി	10	15
ഉള്ളി	25	35

പരിഹാരം

സാധനം	P_0	P_1	$x = \frac{p_1}{p_0} \times 100$
ബീൻസ്	20	25	125
ഉരുളക്കിഴങ്ങ്	30	30	100
തക്കാളി	10	15	150
ഉള്ളി	25	35	140
			$\Sigma x = 515$

1) ലഘു അങ്കഗണിത മാധ്യ സൂചികാങ്കം $= \frac{\Sigma x}{n} = \frac{515}{4} = 128.75$

2) ലഘു ജ്യാമിതീയ മാധ്യ സൂചികാങ്കം $= \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$

$$= \sqrt[4]{125 \times 100 \times 150 \times 140} = 127.29$$

3) ലഘു സന്തുലിതമാധ്യ സൂചികാങ്കം $= \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$

$$= \frac{4}{\frac{1}{125} + \frac{1}{100} + \frac{1}{150} + \frac{1}{140}} = 124.22$$

d) ലഘു മൊത്ത സൂചികാങ്കം (Simple Aggregate Index)

വില സൂചികാങ്കത്തെ കാണുന്നതിനുള്ള ഏറ്റവും ലഘുവായ രീതിയാണ് ലഘു മൊത്ത സൂചികാങ്കരീതി.

ലഘുമൊത്ത സൂചികാങ്കം

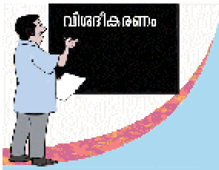
$$= \frac{\text{എല്ലാ സാധനങ്ങളുടെയും നടപ്പു വർഷത്തെ വില}}{\text{എല്ലാ സാധനങ്ങളുടെയും അടിസ്ഥാന വർഷത്തെ വില}} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100$$

p_1 = നടപ്പുവർഷത്തെ വില

p_0 = അടിസ്ഥാന വർഷത്തെ വില

$$\text{ലഘു മൊത്ത വില സൂചികാങ്കം} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100$$



വിശദീകരണം 13.2

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച് 2012 നെ ആസ്പദമാക്കിയുള്ള 2013 ലെ വില സൂചികാങ്കം കാണുക.

സാധനങ്ങൾ	2013 ലെ വില (രൂപയിൽ)	2012 ലെ വില (രൂപയിൽ)
അരി	32	28
എണ്ണ	88	75
പഞ്ചസാര	40	35
ഗോതമ്പ്	22	18

പരിഹാരം

സാധനങ്ങൾ	p_1	p_0
അരി	32	28
എണ്ണ	88	75
പഞ്ചസാര	40	35
ഗോതമ്പ്	22	18
	$\Sigma p_1 = 182$	$\Sigma p_0 = 156$

$$\text{ലഘു മൊത്ത വില സൂചികാങ്കം} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100 = \frac{182}{156} \times 100 = 116.67$$

ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് 2012 നെ അപേക്ഷിച്ച് 2013ൽ സാധനങ്ങളുടെ വിലയിൽ 16.67% വർധനവ് ഉണ്ടായി എന്നാകുന്നു.

പ്രവർത്തനം

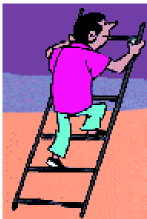
പത്രമാധ്യമം, വെബ്സൈറ്റുകൾ മുതലായവയുടെ സഹായത്താൽ കുറച്ച് സാധനങ്ങളുടെ കഴിഞ്ഞ വർഷത്തെയും ഈ വർഷത്തെയും വിലകൾ ശേഖരിക്കുക. അവ ഉപയോഗിച്ച് താഴെപറയുന്ന സൂചികാങ്കങ്ങൾ കാണുക.

a) ലഘു അങ്കഗണിത മാധ്യ വില സൂചികാങ്കം

b) ലഘു ജ്യാമിതീയ മാധ്യ വില സൂചികാങ്കം

c) ലഘു സന്തുലിത മാധ്യ വില സൂചികാങ്കം

d) ലഘു മൊത്ത വില സൂചികാങ്കം



നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1) ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്നവ കണക്കാക്കുക.

a) ലഘു അങ്കഗണിത മാധ്യ വില സൂചികാങ്കം

b) ലഘു ജ്യാമിതീയ മാധ്യ വില സൂചികാങ്കം

c) ലഘു സന്തുലിത മാധ്യ വില സൂചികാങ്കം

d) ലഘു മൊത്ത വില സൂചികാങ്കം

സാധനങ്ങൾ	2013 ലെ വില	2014 ലെ വില
A	28	25
B	33	30
C	18	15
D	25	35

2. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയ്ക്ക് ലഘു മൊത്ത വില സൂചിക കാണുക

സാധനങ്ങൾ	2013 ലെ വില (രൂപ)	2012 ലെ വില (രൂപ)
അരി	30	28
എണ്ണ	105	95
പഞ്ചസാര	39	35
ഗോതമ്പ്	22	18

പരിഗണന സൂചികാങ്കം (Weighted Index Number)

ലഘു സൂചികാങ്കങ്ങൾ കാണുമ്പോൾ എല്ലാ ഇനങ്ങൾക്കും തുല്യ പരിഗണനയാണ് നൽകിയിരുന്നത്. പക്ഷേ പല അവസരങ്ങളിലും ഉപയോഗിക്കുന്ന ഇനങ്ങൾക്ക് വ്യത്യസ്ത പരിഗണനകൾ നൽകേണ്ടതായി വരാറുണ്ട്. ഇത്തരം അവസരങ്ങളിൽ ആകെ വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ലഘു സൂചികാങ്കങ്ങൾ മതിയാകാറില്ല. അതിനാൽ തന്നെ കൂട്ടത്തിലെ ഓരോ ഇനത്തിന്റെയും ആപേക്ഷിക പ്രാധാന്യം കണക്കിലെടുക്കുമ്പോഴാണ് പരിഗണന സൂചികാങ്കങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നത്. പരിഗണനാ സൂചികാങ്കങ്ങൾ എന്നത് വില അനുപാ

ത്തിന്റെ പരിഗണന മാധ്യങ്ങളാണ്. വില അനുപാതത്തിന്റെ പ്രാധാന്യത്തിനനുസരിച്ച് അവക്ക് പരിഗണന നിശ്ചയിക്കുന്നു.

പരിഗണന സൂചികാങ്കത്തിൽ ഓരോ ഇനത്തിനും ചെലവാക്കിയ തുകയ്ക്കനുസരിച്ചാണ് ഓരോ ഇനത്തിന്റെയും പരിഗണന നിശ്ചയിക്കുന്നത്. അതായത് പരിഗണന എന്നത് pq ആണ്. ഇവിടെ p എന്നത് ഒരു യൂണിറ്റിന് ചെലവാക്കുന്ന തുകയും q എന്നത് ഉപഭോഗത്തിന്റെ അളവുമാണ്. ഇങ്ങനെയാകുമ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്ന പലതരം പരിഗണനകൾ p_0q_0, p_1q_1, p_0q_1, p_1q_0, എന്നിവയാണ്.

സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന പരഗിണന സൂചികാങ്കങ്ങൾ ചുവടെ പറയുന്നു.

1) ലാസ്പിയറുടെ വില സൂചികാങ്കം [Laspeyre's price index number (L)]

2) പാഷെയുടടെ വില സൂചികാങ്കം [Paasche's price index number (P)]

3) ഫിഷറുടെ വില സൂചികാങ്കം [Fisher's price index number (F)]

4) പരിഗണന മൊത്ത വിലസൂചികാങ്കം [Weighted aggregate index number]

പരിഗണനാമാധ്യം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യത്തിന്റെ സഹായത്താൽ ഇവ ഓരോന്നും കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യങ്ങൾ നമുക്ക് ഉണ്ടാക്കിയെടുക്കാം.

(പരിഗണനാമാധ്യം $= \dfrac{\Sigma wx}{\Sigma w}$ എന്ന് നമുക്ക് അറിയാം)

1) ലാസ്പിയറുടെ വില സൂചികാങ്കം (L)

അടിസ്ഥാന കാലയളവിലെ വിലകൾക്ക് പരിഗണന നിശ്ചയിച്ചുകൊണ്ട് കാണുന്ന പരിഗണന സൂചികാങ്കമാണ് ലാസ്പിയറുടെ വില സൂചികാങ്കം.

ഇവിടെ, $x = \dfrac{p_1}{p_0} \times 100$ ഉം

പരിഗണന $w = p_0q_0$ യുമാണ്.

അതിനാൽ $$L = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w} = \frac{\Sigma p_0q_0 \times \dfrac{p_1}{p_0} \times 100}{\Sigma p_0q_0}$$

$$= \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$$

ലാസ്പിയറുടെ വില സൂചികാങ്കം, $L = \dfrac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100$

2) പാഷെയുടെ വില സൂചികാങ്കം (P)

പാഷെയുടെ വില സൂചികാങ്കം കാണുന്നതിന് നടപ്പു കാലയളവിലെ വിലയാണ് പരിഗണന നിശ്ചയിക്കുന്നതിന് അടിസ്ഥാനമാക്കുന്നത്.

ഇവിടെ $w = p_0q_1$ ആണ്

അതുകൊണ്ട്, $$\frac{\Sigma wx}{\Sigma w} = \frac{\Sigma p_0q_1 \times \frac{p_1}{p_0} \times 100}{\Sigma p_0q_1}$$

$$= \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100$$

പാഷെയുടെ വില സൂചികാങ്കം, $P = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100$

3) ഫിഷറുടെ വില സൂചികാങ്കം (F)

ലാസ്പിയറുടെ വില സൂചികാങ്കത്തിന്റെ (L) പാഷെയുടെ വില സൂചികാങ്കത്തിന്റെയും (P) ജ്യാമിതീയ മാധ്യമാണ് ഫിഷറുടെ വില സൂചികാങ്കം.

$$ie \qquad (F) = \sqrt{L \times P} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$$

ഫിഷറുടെ വില സൂചികാങ്കം, $F = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$

ഫിഷറിന്റെ വില സൂചികാങ്കത്തെ ഒരു ഉത്കൃഷ്ട വില സൂചികാങ്കമെന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. ചുവടെ പറയുന്നവയാണ് അതിന് കാരണം.

1) ഇത് ലാസ്പിയറുടെയും പാഷെയുടെയും വില സൂചികാങ്കങ്ങളുടെ ജ്യാമിതീയ മാധ്യമാണ്. സൂചികാങ്കങ്ങൾ നിർണയിക്കുന്നതിനുള്ള ഏറ്റവും ഉത്തമമായ മാധ്യം ജ്യാമിതീയ മാധ്യമാണ്.
2) ഇവിടെ നടപ്പുകാലത്തെയും അടിസ്ഥാനകാലത്തെയും വിലയും ഉപഭോഗവും പരിഗണിക്കുന്നുണ്ട്.
3) ഇത് പക്ഷപാതിത്വത്തിൽ നിന്നും മുക്തമാണ്.

വിശദീകരണം 13.3

താഴെ പറയുന്ന രീതികൾ ഉപയോഗിച്ച് തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ വില സൂചികാങ്കങ്ങൾ കാണുക.

1) ലാസ്പിയർ രീതി

2) പാഷെ രീതി

3) ഫിഷർ രീതി

സാധനങ്ങൾ	2013		2014	
	വില (രൂപയിൽ)	അളവ് (കി.ഗ്രാം)	വില (രൂപയിൽ)	അളവ് (കി.ഗ്രാം)
നെയ്യ്	40	1	60	1
അരി	30	20	36	24
ഗോതമ്പ്	26	5	30	4

പരിഹാരം

സാധനങ്ങൾ	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
നെയ്യ്	40	1	60	1	40	40	60	60
അരി	30	20	36	24	600	720	720	864
ഗോതമ്പ്	26	5	30	4	130	104	150	120
ആകെ					**770**	**864**	**930**	**1044**

1) ലാസ്പിയറുടെ വില സൂചികാങ്കം, $L = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$

$$= \frac{930}{770} \times 100$$

$$= 120.78$$

2) പാഷെയുടെ വില സൂചികാങ്കം, $P = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$

$$= \frac{1044}{864} \times 100$$

$$= 120.83$$

3) ഫിഷറിന്റെ വില സൂചികാങ്കം $F = \sqrt{L \times P}$

$$= \sqrt{120.78 \times 120.83}$$

$$= 120.80$$

വിശദീകരണം 13.4

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന 4 സാധനങ്ങളുടെ സൂചികാങ്കം ഫിഷറിന്റെ രീതിയിൽ കാണുക.

സാധനങ്ങൾ	അടിസ്ഥാന കാലം		നടപ്പുകാലം	
	വില	അളവ്	വില	അളവ്
A	2	20	5	15
B	4	4	8	5
C	1	10	2	12
D	5	5	10	6

പരിഹാരം

സാധനങ്ങൾ	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	2	20	5	15	100	40	75	30
B	4	4	8	5	32	16	40	20
C	1	10	2	12	20	10	24	12
D	5	5	10	6	50	25	60	30
ആകെ					**202**	**91**	**199**	**92**

ഫിഷറിന്റെ വില സൂചികാങ്കം, F $= \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{202}{91} \times \frac{199}{92}} \times 100$$

$$= 219.12$$

4. പരിഗണന മൊത്ത വില സൂചികാങ്കം

പരിഗണന മൊത്ത വില സൂചികാങ്കം $= \frac{\text{നടപ്പു വർഷത്തെ ആകെ ചെലവ്}}{\text{അടിസ്ഥാന വർഷത്തെ ആകെ ചെലവ്}} \times 100$

$$= \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

പരിഗണന മൊത്ത വില സൂചികാങ്കം $= \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$

വിശദീകരണം 13.5

ചുവടെ കൊടുക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ പരിഗണന മൊത്ത വില സൂചികാങ്കം കാണുക.

സാധനങ്ങൾ	അടിസ്ഥാന വർഷം		നടപ്പുവർഷം	
	കി.ഗ്രാം.	നിരക്ക്	കി.ഗ്രാം.	നിരക്ക്
ബ്രെഡ്	10	3	8	3.25
ഇറച്ചി	20	15	15	20
തേയില	2	25	3	23

പരിഹാരം

സാധനങ്ങൾ	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_1q_1
ബ്രെഡ്	3	10	3.25	8	30	26
ഇറച്ചി	15	20	20	15	300	300
തേയില	25	2	23	3	50	69
ആകെ					**380**	**395**

പരിഗണന മൊത്ത വില സൂചികാങ്കം $= \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$

$$= \frac{395}{380} \times 100$$

$$= 103.9$$

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. താഴെ പറയുന്ന രീതികളിൽ വില സൂചികാങ്കം കാണുക

   a) ലാസ്പിയറിന്റെ രീതി

   b) പാഷെയുടെ രീതി

   c) ഫിഷറിന്റെ രീതി

സാധനങ്ങൾ	അടിസ്ഥാനവർഷം		നടപ്പുവർഷം	
	വില	അളവ്	വില	അളവ്
A	22	16	25	15
B	14	9	12	8
C	11	10	15	12
D	15	8	14	10

2) താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ പരിഗണന മൊത്ത വില സൂചികാങ്കം കാണുക.

സാധനങ്ങൾ	അടിസ്ഥാനവർഷം		നടപ്പുവർഷം	
	കി.ഗ്രാം	നിരക്ക്	കി.ഗ്രാം	നിരക്ക്
ബ്രെഡ്	12	6	8	8
ഇറച്ചി	22	75	18	95
തേയില	5	65	3	73

13.3 ഉപഭോക്തൃ വില സൂചിക (ജീവിതനിലവാര സൂചിക) [Consumer Price Index (Cost of Living Index)]

ഒരു പ്രത്യേക പ്രദേശത്ത് കഴിയുന്ന ഒരു കൂട്ടം ജനങ്ങളുടെ ജീവിത നിലവാരത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന വ്യത്യാസങ്ങളെക്കുറിച്ച് വിലയിരുത്തുന്നതിനാണ് ഉപഭോക്തൃ വില സൂചികാങ്കം ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഇവിടെ പ്രദേശം എന്നതുകൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത് ചില്ലറ വിലകൾ ഏതാണ്ട് തുല്യമായിരിക്കുന്ന ഒരു പ്രദേശവും ഒരു കൂട്ടം ജനങ്ങൾ എന്നതുകൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത് വരുമാനത്തേയോ രീതികളേയോ അടിസ്ഥാനമാക്കി പരസ്പരം വേർതിരിച്ച കൂട്ടങ്ങൾ എന്നുമാണ്. അതിനാൽ ഒരു രാജ്യത്തെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വിഭാഗം ആൾക്കാൾക്ക് ബാധകമായ ഒറ്റ ഉപഭോക്തൃ സൂചികാങ്കങ്ങൾ കാണാൻ കഴിയില്ല. എന്തെന്നാൽ ഓരോ പ്രദേശത്തെയും ചില്ലറ വിലകളിൽ വ്യത്യാസമുള്ളതും പല പ്രദേശങ്ങളിലെയും ആൾക്കാരുടെ ഉപഭോഗ ശീലങ്ങളിൽ വ്യത്യാസമുള്ളതും കൊണ്ടാണ്. അതുപോലെ ഒരു പ്രത്യേക പട്ടണത്തിലെ

എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കും ബാധകമായ ഒരു ജീവിത നിലവാര സൂചികാങ്കം നമുക്ക് കാണാൻ കഴിയില്ല. കാരണം പല വിഭാഗം ആൾക്കാരും ഒരേ സാധനങ്ങൾക്ക് നൽകുന്ന പരിഗണന വ്യത്യസ്തമായിരിക്കും.

എന്നിരുന്നാലും സാധാരണയുപയോഗിക്കുന്ന വില സൂചികാങ്കളെക്കാൾ കൂടുതൽ മികച്ച വിവരങ്ങൾ ഉപഭോക്തൃ വിലസൂചിക ഉപയോഗിക്കുന്നതു വഴി ലഭിക്കുന്നുണ്ട്.

ഉപഭോക്തൃ വില സൂചികയുടെ പ്രധാന ഉദ്ദേശ്യം ജീവിത നിലവാരത്തിലുണ്ടാകുന്ന ദിശകൾ (കുറവോ കൂടുതലോ) മനസിലാക്കുക എന്നതാണ്. വിലകളിലുണ്ടാകുന്ന വ്യത്യാസം പല വിഭാഗം ജനങ്ങളെയും ഒരു പോലെയല്ല ബാധിക്കുന്നതിനാൽ പല വിഭാഗം ജനങ്ങൾക്കായി വിവിധ ജീവിത നിലവാര സൂചികാങ്കങ്ങൾ കാണേണ്ടിവരും.

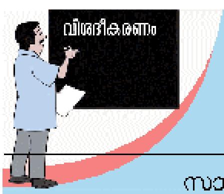
ഉപഭോക്തൃ വില സൂചിക സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ഒരേ കൂട്ടം സാധനങ്ങളുടേയും സേവനങ്ങളുടേയും ഉപഭോഗത്തിൽ രണ്ട് കാലയളവുകളിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ആപേക്ഷിക വ്യത്യാസമാണ്.

ഉപഭോക്തൃ വില സൂചികാങ്കം (ജീവിത നിലവാര സൂചികാങ്കം)

$$= \frac{\text{നടപ്പുവർഷത്തെ ആകെ ചെലവ്}}{\text{അടി സ്ഥാന വർഷത്തെ ആകെ ചെലവ്}} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

വില സൂചികാങ്കങ്ങളിൽ ഏറ്റവും സാധ്യതയുള്ളത് ഉപഭോക്തൃ നില സൂചകാങ്കത്തിനാണ്. വിവിധങ്ങളായ 100 ലധികം സാധനങ്ങളുടെ വിലകളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി യു.എസ്. ബ്യൂറോ ഓഫ് ലേബർ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ഇത് പ്രസിദ്ധീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇതിന്റെ അടിസ്ഥാന വർഷം 1967 ആണ്. അടിസ്ഥാന വിലകളെ പരിഗണനകൾ ആകുന്നതിന് വേണ്ടി ബ്യൂറോ ഓഫ് ലേബർ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ആയിരകണക്കിന് കുടുംബങ്ങളെ നേരിൽ കണ്ട് അവരുടെ ഉപഭോഗരീതി മനസ്സിലാക്കുകയുണ്ടായി. ഓരു രാജ്യത്തിന്റെ പൊതുവായ വിലനിലവാരം പ്രതിഫലിക്കുന്നത് ഉപഭോക്തൃ വില സൂചിക ആയതിനാലാണ് ഇങ്ങനെ ചെയ്തത്.



വിശദീകരണം 13.6

2014 ലെ ജീവിത നിലവാര സൂചികാങ്കം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.

സാധനങ്ങൾ	വില		അളവ്	
	2013	2014	2013	2014
A	5	8	80	100
B	3	4	90	100
C	7	7	60	60
D	11	14	20	25

പരിഹാരം

സാധനങ്ങൾ	p_0	p_1	q_0	q_1	p_0q_0	p_1q_0
A	5	8	80	100	400	640
B	3	4	90	100	270	360
C	7	7	60	60	420	420
D	11	14	20	25	220	280
ആകെ					1310	1700

ജീവിത നിലവാരം സൂചികാങ്കം $= \dfrac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$

$$= \frac{1700}{1310} \times 100$$

$$= 129.77$$

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. 2014 വർഷത്തേക്ക് ജീവിത നിലവാര സൂചികാ കാണുക

സാധനങ്ങൾ	വില		അളവ്	
	2012	2014	2012	2014
A	15	14	75	98
B	13	20	80	90
C	17	19	60	50
D	11	14	30	25

13.4 സൂചികാങ്കങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ

1. സൂചികാങ്കങ്ങൾ ശതമാന രൂപത്തിലാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. ഇവ താരതമ്യ പഠനങ്ങൾക്ക് ഉപയോഗിക്കുന്നു.
2. സൂചികാങ്കങ്ങൾ പ്രത്യേക രീതിയിലുണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്ന ശരാശരികളാണ്.
3. സൂചികാങ്കങ്ങൾ ആപേക്ഷിക അളവുകളാണ്.
4. നേരിട്ട് നിരീക്ഷിക്കാൻ കഴിയാത്ത പല അളവുകളുടെയും വ്യത്യാസങ്ങൾ സൂചികാങ്കങ്ങൾ വഴി കണക്കാക്കാം.
5. സൂചികാങ്കങ്ങളെ സാമ്പത്തിക ബാരോമീറ്ററുകൾ എന്നറിയപ്പെടുന്നു. സമ്പദ്‌വ്യവസ

യുടെ നാഡിസ്പന്ദനം അറിയുന്നതിന് സൂചികാങ്കങ്ങൾ സഹായകമാകും. അതുപോലെ പണപ്പെരുപ്പം, പണച്ചുരുക്കം തുടങ്ങിയവയുടെ ഗതി നിർണയിക്കുന്നതിനും സൂചികാങ്കങ്ങൾ സഹായകരമാണ്.

6. ഒരു പ്രത്യേക ഉദ്ദേശ്യത്തിനാണ് സൂചികാങ്കങ്ങൾ കണക്കുകൂട്ടുന്നത്.

13.5 സൂചികാങ്കങ്ങളുടെ ഉപയോഗങ്ങൾ

1) നയരൂപീകരണത്തിന് സഹായിക്കുന്നു.

ഒട്ടനവധി സാമ്പത്തിക, വാണിജ്യ നയങ്ങളുടെ രൂപികരണത്തിന് മാർഗ്ഗദർശിയാണ് സൂചികാങ്കങ്ങൾ. വേതനങ്ങൾ, ക്ഷാമബത്ത തുടങ്ങിയവ നിർണയിക്കുന്നത് പ്രധാനമായും ഉപഭോക്തൃ വില സൂചികകളുടെ സഹായത്താലാണ്. സാമ്പത്തിക രംഗത്ത് മൊത്ത ചില്ലറ വില്പന വിലകളുടെ വ്യാപ്തി നിശ്ചയിക്കൽ, വേതന നയം, നികുതി നിർണയിക്കൽ, വീട്ടുവാടക ബത്ത നിർണയിക്കൽ തുടങ്ങിയവയിലെല്ലാം സൂചികാങ്കങ്ങൾക്ക് പ്രാധാന്യമുണ്ട്.

2) പ്രവണതാ പഠനത്തിന് സഹായിക്കുന്നു.

ഒരു കാലയളവിലുണ്ടാകുന്ന വ്യത്യാസങ്ങളെകുറിച്ച് പഠിക്കുന്നതിനാണ് സൂചികാങ്കങ്ങൾ സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്നത്. കയറ്റുമതി, ഇറക്കുമതി, അടവുശിഷ്ടം, ദേശീയ വരുമാനം മുതലായവയുടെ പ്രവണതകൾ പരിശോധിക്കാൻ സൂചികാങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

3) ഭാവി സാമ്പത്തിക പ്രവൃത്തികളെ പ്രവചിക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു.

നടന്നു കഴിഞ്ഞതും നടന്നുകൊണ്ടിരിക്കുന്നതുമായ സാമ്പത്തിക പ്രവർത്തനങ്ങൾ വിശകലനം ചെയ്യുന്നതിന് മാത്രമല്ല ഭാവി സാമ്പത്തിക പ്രവർത്തനങ്ങളെ പ്രവചിക്കുന്നതിനും സൂചികാങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. സമയ ശ്രേണീ വിശകലനം, ദീർഘകാല പ്രവണതയെ കുറിച്ചുള്ള പഠനം, കാലാനുസൃത വ്യതിയാന വിശകലനം, വാണിജ്യ ചക്രവികാസം തുടങ്ങിയവയിലും സൂചികാങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്.

4) വേതനത്തിന്റെ യഥാർഥ മൂല്യം കാണുന്നതിന് സഹായിക്കുന്നു.

$$\text{യഥാർഥ വേതന മൂല്യം} = \frac{\text{വേതന തുക}}{\text{ജീവിത നിലവാര സൂചിക}} \times 100$$

5) പണത്തിന്റെ വാങ്ങൽ ശേഷി (Purchasing Power) നിർണയിക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു

$$\text{പണത്തിന്റെ വാങ്ങൽ ശേഷി} = \frac{1}{\text{ജീവിത നില വാര സൂചിക}}$$

6) വിലകയറ്റം (Inflation), വിലച്ചുരുക്കം (Deffation) തുടങ്ങിയവയുടെ പഠനത്തിന് സൂചികാങ്കങ്ങൾ സഹായിക്കുന്നു.

നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം സൂചികാങ്കങ്ങളെ കുറിച്ചും അവയുടെ വിവിധ തരങ്ങളെകുറിച്ചുമാണ് ചർച്ച ചെയ്തത്. സമയം, സ്ഥാനം അല്ലെങ്കിൽ മറ്റ് ചില സവിശേഷതകൾക്കനുസരിച്ച് ഒരു പ്രതിഭാസത്തിന്റെ തലത്തിലുണ്ടാകുന്ന ആപേക്ഷിക വ്യതിയാനങ്ങളെ അളക്കുകയാണ് സൂചികാങ്കങ്ങൾ ചെയ്യുന്നത്. ഒരു കൂട്ടം സാധനങ്ങളുടെ വിലയിൽ കാലത്തിനനുസരിച്ചുണ്ടാകുന്ന വ്യത്യാസങ്ങളുടെ പഠനമാണ് വിലനിലവാര സൂചികകൾ നടത്തുന്നത്.

ഒരു കൂട്ടം സാധനങ്ങളുടെ നടപ്പുവർഷത്തെ ആകെ വിലയെ അടിസ്ഥാനവർഷത്തെ ആകെ വില കൊണ്ട് ഹരിച്ചതിന് ശേഷം ഹരണഫലത്തെ 100 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്നതാണ് ലഘു മൊത്ത വില സൂചികാങ്കം. ലഘു വില സൂചികാങ്കങ്ങൾ കാണുന്നതിന് വില അനുപാതങ്ങളാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ആദ്യം ഓരോ സാധനങ്ങളുടെയും വില അനുപാതങ്ങൾ കണ്ടതിന് ശേഷം അവയുടെ AM, GM, HM എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് ലഘു വില സൂചികാങ്കങ്ങൾ കാണാം.

പരിഗണന വില സൂചികയിൽ ഒരേ സാധനത്തിന്റെ വിലയ്ക്കും അതിന്റെ ആപേക്ഷിക പ്രാധാന്യം അനുസരിച്ച് പരിഗണനകൾ കല്പിക്കും. പ്രധാനപ്പെട്ട പരിഗണന വില സൂചികാങ്കങ്ങളാണ് a) ലാസ്പിയറുടെ വില സൂചികാങ്കം, b) പാഷെയുടെ വില സൂചികാങ്കം, c) ഫിഷറിന്റെ വില സൂചികാങ്കം, d) പരിഗണന മൊത്തവില സൂചികാങ്കം.

നമുക്ക് വിലയിരുത്താം...

ചോദ്യങ്ങൾ 1 മുതൽ 6 വരെ: ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

1) സൂചികാങ്കം എന്നത്:

a) ആപേക്ഷിക വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവ് b) ഒരു പ്രത്യേക തരത്തിലുള്ള മാധ്യം

c) ഒരു അനുപാതത്തിന്റെ ശതമാനം d) ഇവയെല്ലാം.

2) ഉപഭോക്തൃ വില സൂചികകൾ നിർമിക്കുന്നത്:

a) വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ട ഒരു വിഭാഗം ആളുകൾക്ക് വേണ്ടി

b) എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കും വേണ്ടി c) ഫാക്ടറി തൊഴിലാളികൾക്ക് വേണ്ടി

d) ഇവയെല്ലാം

3) സൂചികാങ്കങ്ങൾ കാണുന്നതിന് ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ മാധ്യമാണ്.

a) അങ്കഗണിത മാധ്യം b) ജ്യാമിതീയ മാധ്യം

c) സന്തുലിത മാധ്യം d) ഇവയൊന്നുമല്ല

4) സൂചികാങ്കങ്ങൾ സഹായകരമാകുന്നത്

a) സാമ്പത്തിക നയങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാൻ

b) പണത്തിന്റെ വാങ്ങൽ ശേഷി വിലയിരുത്താൻ

c) ദേശിയ വരുമാനം ക്രമപ്പെടുത്താൻ d) ഇവയെല്ലാം

5) ലാസ്പിയറിന്റെ സൂചികാങ്കത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന പരിഗണന

a) അടിസ്ഥാനവർഷത്തെ b) നടപ്പുവർഷത്തെ

c) കുറച്ച് വർഷങ്ങളുടെ ശരാശരി d) ഇവയൊന്നുമല്ല

6) പാഷെയുടെ സൂചികാങ്കത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന പരിഗണന

a) അടിസ്ഥാന കാലത്തെ b) നടപ്പുകാലത്തെ

c) തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന ഒരു കാലത്തെ d) ഇവയൊന്നുമല്ല

7) 'സൂചികാങ്കങ്ങൾ' നിർവചിക്കുക.

8) സൂചികാങ്കങ്ങളെ "സാമ്പത്തിക ബാരോമീറ്ററുകൾ" എന്ന് വിളിക്കുന്നു. എന്തുകൊണ്ട്?

9) സൂചികാങ്കങ്ങളുടെ ഉപയോഗങ്ങൾ വിവരിക്കുക.

10) ലഘു, പരിഗണന സൂചികാങ്കങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം എഴുതുക.

11) ലാസ്പിയറിന്റെയും പാഷെയുടെയും വില സൂചികാങ്കങ്ങൾ നിർവചിക്കുക.

12) ഫിഷറിന്റെ വില സൂചികാങ്കത്തെ ഉത്കൃഷ്ട സൂചികാങ്കമെന്ന് വിളിക്കുന്നത് എന്തുകൊണ്ട്?

13) ജീവിത നിലവാര സൂചികാങ്കത്തെകുറിച്ച് വിവരിക്കുക.

14) 2012 അടിസ്ഥാന വർഷമാക്കി 2014 ലെ സൂചികാങ്കം കാണുക.

സാധനങ്ങൾ	2012 ലെ വില	2014 ലെ വില
A	90	95
B	40	50
C	90	110
D	30	35

15) 2014 ലെ ലഘു മൊത്ത വില സൂചികാങ്കം കാണുക.

സാധനങ്ങൾ	2013 ലെ വില	2014 ലെ വില
A	50	70
B	40	60
C	80	90
D	110	120
E	20	20

16) ചില സാധനങ്ങൾക്ക് 2012 ലും 2013 ലും ഉള്ള വിലകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. താഴെ പറയുന്നവ കാണുക.

a) ലഘു മാധ്യ വില സൂചികാങ്കം

b) ലഘു ജ്യോമിതീയ മാധ്യ വില സൂചികാങ്കം

c) ലഘു സന്തുലിത മാധ്യ വില സൂചികാങ്കം

സാധനങ്ങൾ	A	B	C	D
2012 ലെ വില	16	25	8	20
2013 ലെ വില	32	28	14	30

17) ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച് 2014 ലെ വില സൂചികാങ്കങ്ങൾ 2010 ലെ വിലയെ ആധാരമാക്കി വില അനുപാതങ്ങളുടെ a) AM b) HM മാധ്യമങ്ങളുപയോഗിച്ച് കാണുക.

സാധനങ്ങൾ	2010 ലെ വില	2014 ലെ വില
A	50	70
B	40	60
C	80	90
D	110	120
E	20	20

18) ഫിഷറിന്റെ വില സൂചികാങ്കം കാണുക.

സാധനങ്ങൾ	അടിസ്ഥാനവർഷം		നടപ്പുവർഷം	
	വില	അളവ്	വില	അളവ്
A	9.25	5	15	5
B	8	10	12	11
C	4	6	5	6
D	1	4	1.25	8

19) ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച് പരിഗണന വില സൂചികാങ്കങ്ങൾ.

a) ലാസ്പിയർ രീതിയിൽ

b) പാഷെ രീതിയിൽ

c) ഫിഷർ രീതിയിൽ കാണുക.

വർഷം	സാധനം 1		സാധനം 2		സാധനം 3	
	വില	അളവ്	വില	അളവ്	വില	അളവ്
2011	5	10	8	6	6	3
2014	4	12	7	7	5	4

20) ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച്

a) ലാസ്പിയറിന്റെ വില സൂചികാങ്കം

b) പാഷെയുടെ വില സൂചികാങ്കം

c) ഫിഷറിന്റെ വില സൂചികാങ്കം എന്നിവ കാണുക.

സാധനങ്ങൾ	അടിസ്ഥാനവർഷം		നടപ്പുവർഷം	
	വില	അളവ്	വില	അളവ്
A	15	5	25	8
B	20	8	28	7
C	30	3	40	4

21) ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച് ഫിഷറിന്റെ വില സൂചികാങ്കം കാണുക.

സാധനങ്ങൾ	അടിസ്ഥാനവർഷം		നടപ്പുവർഷം	
	ഒരു യൂണിറ്റിന്റെ വില	ചെലവ് (തുക)	ഒരു യൂണിറ്റിന്റെ വില	ചെലവ് (തുക)
A	2	40	5	75
B	4	16	8	40
C	1	10	2	24
D	5	25	10	60

22) താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച് 2013 ലെ വിലനിലവാര സൂചിക കാണുക.

സാധനങ്ങൾ	2010		2013	
	വില	അളവ്	വില	അളവ്
A	30	10	35	8
B	18	9	28	12
C	10	7	20	10

23) ഉപഭോക്തൃ വില സൂചികാങ്കം കാണുക

സാധനങ്ങൾ	2010		2013	
	വില	അളവ്	വില	അളവ്
ബിൻസ്	20	8	40	6
ഇറച്ചി	50	10	60	5
ഗോതമ്പ്	20	20	20	25

24) പരിഗണന മൊത്ത വില സൂചികാങ്കം കാണുക.

സാധനങ്ങൾ	അടിസ്ഥാന വർഷം		നടപ്പുവർഷം	
	വില	അളവ്	വില	അളവ്
A	15	5	25	8
B	20	8	28	7
C	30	3	40	4

പദാവലി

അടിസ്ഥാന വർഷം	- Base year
അനാശ്രിതത്വം	- Independence
അനിയത ചരം	- Random variable
അനിയത ഫല പരീക്ഷണം	- Random experiment
അനിയത വ്യതിയാനം	- Random variation
അനോവ	- ANOVA
അരേഖീയം	- Non linear
അർദ്ധ ശരാശരി രീതി	- Semi average method
അളവ് സൂചികാങ്കം	- Quantity index number
അവകലന മൂല്യം	- Derivative
അവകലനം	- Differentiation
അസാധു പരികല്പന	- Null hypothesis
ആകസ്മിക കാരണങ്ങൾ	- Chance causes
ആവർത്തന ചലനങ്ങൾ	- Periodic movements
ആശ്രിത ചരം	- Dependent variable
ഇട മതിപ്പ്	- interval estimation
ഇടത് വാൽ പരീക്ഷണം	- Left tailed test
ഇന്ദ്രിയ സംബന്ധം	- Sensory
ഇരു വാൽ പരീക്ഷണം	- Two tailed test
ഉദ്യമം	- Trial
ഉപഭോക്തൃ വില സൂചിക	- Consumer price index number
ഉപയോഗ യോഗ്യത	- fitness for use
ഏകദം	- Function
ഏകദിശാ അനോവ	- One way ANOVA
ഒരു വാൽ പരീക്ഷണം	- One tailed test
കലനം	- Calculus
കാലാനുസൃതമായമായ വ്യതിയാനങ്ങൾ	- Seasonal variations
കൃത്യ മതിപ്പ്	- Point estimation
കേന്ദ്രീയ പരിധീ സിദ്ധാന്തം	- Cetnral limit theorem
കേന്ദ്രീയ പരിവൃത്തി ശ്രേണി	- Cetnral moments
കൈ വർഗം	- Chi square
ക്രമരഹിത പ്രതിരൂപണം	- Random sampling
ക്രമരഹിത വ്യതിയാനങ്ങൾ	- Irregular variations
ക്ഷമത	- Efficiency

ക്ഷമതാ ഗണകം - Efficient estimator
ഗണകം - Estimator
ഗണിത പ്രതീക്ഷ - Mathematical expectation
ഗുണാത്മക ചരം - Qualitative variable / Attribute
ചലന ശരാശരി രീതി - Moving average method
ചാക്രികമായ വ്യതിയാനങ്ങൾ - Cyclical variations
ചെലവ് ഏകദം - Cost function
ജീവിത നിലവാര സൂചിക - Cost of living index number
തരം I പിശക് - Type I error
തരം II പിശക് - Type II error
തിരസ്കരണ മേഖല - Rejection region
തിരികെ വയ്ക്കാത്ത - without replacement
തുടർ ചരം - Continuous variable
ദ്വിചരം - Bivariate
നടപ്പുവർഷം - Current year
നിയന്ത്രണ ചാർട്ട് - Control chart
നിയുക്ത കാരണങ്ങൾ - Assignable causes
നിർണായക മേഖല - Critical region
നിർണായക വില - Critical value
നിശ്ചിത സമാകലനം - Definite integral
നിഷ്പക്ഷഗണകം - Unbiased estimator
നിഷ്പക്ഷത - Unbiasedness
നെഗറ്റീവ് സഹബന്ധം - Negative correlation
നോർമൽ വക്രം - Normal curve
നോർമൽ വിതരണം - Normal distribution
ന്യൂനതമ വർഗ രീതി - Method of least squares
ന്യൂനതമ വർഗ സിദ്ധാന്തം - Principle of least squares
പരാമീറ്റർ - Parameter
പരികല്പന - Hypothesis
പരികല്പന പരീക്ഷണം - Testing of hypothesis
പരിഗണന സൂചിക - Weighted index
പരിഗണനാ മൊത്ത വില സൂചികാങ്കം - Weighted aggregate price index number
പരിവർത്തനം - Transformation
പരിവൃത്തി ശ്രേണി - Moments
പരിവൃത്തി ശ്രേണി രീതി - Method of moments

പരീക്ഷണ ക്ഷമത	-	Power of a test
പരീക്ഷണ സാംഖ്യജം	-	Test statistic
പര്യാപ്തത	-	Sufficiency
പര്യാപ്തതാ ഗണകം	-	Sufficient estimator
പാർശ്വ ചെലവ് ഏകദം	-	Marginal cost function
പാർശ്വ ലാഭ ഏകദം	-	Marginal profit function
പാർശ്വ വരുമാന ഏകദം	-	Marginal revenue function
പാഷെയുടെ വില സൂചികാങ്കം	-	Paasche's price index number
പിശകുകൾ	-	Errors
പിശക് വ്യതിയാനം	-	Error variation
പൂജ്യം സഹബന്ധം	-	Zero correlation
പൂർണ സഹബന്ധം	-	Perfect correlation
പോയ്സോൺ സംഭാവ്യത വിതരണം	-	Poisson probabiltiy distribution
പോസിറ്റീവ് സഹബന്ധം	-	Positive correlation
പ്രതിരൂപണ വിതരണം	-	Sampling distribution
പ്രതിരൂപണം	-	Sampling
പ്രതീക്ഷിത ആവൃത്തി	-	Expected frequency
പ്രവണതാ ഉത്ഭവ മാറ്റം	-	Shifting of trend origin
പ്രവണതാ രേഖകൾ	-	Trend lines
പ്രവണതാ വിശകലനം	-	Trend analysis
പ്രാപ്താങ്കം	-	Observation
ഫിഷറുടെ സൂചികാങ്കം	-	Fisher's price index number
ബൈനോമിയൽ സംഭാവ്യത വിതരണം	-	Binomial probabiltiy distribution
ബൈനോമിയൽ സൂത്രവാക്യം	-	Binomial formula
ഭൗതികം	-	Physical
മണ്ഡലം	-	Domain
മതിപ്പ്	-	Estimation
മാധ്യം	-	Mean
മാനക നോർമൽ പട്ടിക	-	Standard Normal table
മാനക നോർമൽ വിതരണം	-	Standard Normal distribution
മാനക പിശക്	-	Standard error
മാനക വ്യതിയാനം	-	Standard deviation
യഥാർത്ഥ ആവൃത്തി	-	Observed frequency
യാദൃശ്ചിക കാരണങ്ങൾ	-	Chance causes
രംഗം	-	Range

രണ്ടാം നിര - Second order
രേഖീയ സമാശ്രയം - Linear regression
റാങ്ക് സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം - Rank correlation coefficient
റാങ്ക് സഹബന്ധം - Rank correlation
റേഞ്ച് - Range
ലഘു ജ്യാമിതീയ മാധ്യ സൂചികാങ്കം - Simple geomteric mean index number
ലഘു മാധ്യ സൂചികാങ്കം - Simple arithmetic mean index number
ലഘു മൊത്ത സൂചികാങ്കം - Simple aggregate index number
ലഘു സന്തുലിത മാധ്യ സൂചികാങ്കം - Simple harmonic mean index number
ലഘു സൂചിക - Simple index
ലാഭ ഏകദം - Profit function
ലാസ്പിയറുടെ വില സൂചികാങ്കം - Laspeyre's price index number
വരുമാന ഏകദം - Revenue function
വലത് വാൽ പരീക്ഷണം - Right tailed test
വാങ്ങൽ ശേഷി - Purchasing power
വിഭാഗപരം - Categorical
വില സൂചികാങ്കം - Price index number
വിലക്കയറ്റം - Inflation
വിലചുരുക്കം - Deflation
വിശ്വസ്ത ഇടനില - Confidence interval
വിശ്വസ്തതാ ഗുണാങ്കം - Confidence coefficient
വേറിട്ട ചരം - Discrete variable
വേറിട്ട സംഭാവ്യത വിതരണം - Discrete probabiltiy distribution
വൈകല്പിക പരികല്പന - Alternative hypothesis
വ്യതിയാന കാരണങ്ങൾ - Causes of variation
വ്യതിയാന വിശകലനം - Analysis of variance
വ്യതിയാനം - Variance
ശൂന്യ സഹബന്ധം - No correlation
സംഖ്യക ഗുണ നിയന്ത്രണം - Statistical qualtiy cotnrol
സംഖ്യക പരികല്പന - Statistical hypothesis
സംഭവ പട്ടിക - Contingency table
സംഭാവ്യത ഘനത്വ ഏകദം - Probabiltiy mass function
സംഭാവ്യത വിതരണം - Probabiltiy distribution
സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഏകദം - Probabiltiy denstiy function
സങ്കലന സവിശേഷത - Additive propetry

സങ്കലനത	-	Additivtiy
സജാതീയത്വം	-	Homogentiy
സഞ്ചിത വിതരണ ഏകദം	-	Cumulative distribution function
സമയ ബന്ധിതം	-	Time oriental
സമയ ശ്രേണി	-	Time series
സമയ ശ്രേണി വിശകലനം	-	Time series analysis
സമഷ്ടി	-	Population
സമാകലന മൂല്യം	-	Integral
സമാകലനം	-	Integration
സമാശ്രയ ഗുണാങ്കം	-	Regression coefficient
സമാശ്രയം	-	Regression
സമാശ്രയസമവാക്യം	-	Regression equation
സഹബന്ധ ഗുണാങ്കം	-	Correlation coefficient
സഹബന്ധ വിശകലനം	-	Correlation analysis
സഹബന്ധം	-	Correlation
സഹവർത്തനം	-	Association
സഹവ്യതിയാനം	-	Covariance
സാംഖ്യക പ്രക്രിയാ നിയന്ത്രണം	-	Statistical process cotnrol
സാംഖ്യകാനുമാനം	-	Statistical inference
സാംഖ്യജം	-	Statistic
സാമ്പിൾ	-	Sample
സാമ്പിൾ മാധ്യം	-	Sample mean
സാർഥക തലം	-	Significance level
സൂചികാങ്കങ്ങൾ	-	Index numbers
സെക്യൂലർ പ്രവണത	-	Seculart rend
സ്കാറ്റർ ഡയഗ്രം	-	Scatter diagram
സ്ഥിരത	-	Consistency
സ്ഥിരനില ഗണകം	-	Consistent estimator
സ്വതന്ത്ര ചരം	-	Independent variable
സ്വതന്ത്ര വക്ര രീതി	-	Freehand curve method
സ്വതന്ത്രതാ മാനം	-	Degrees of freedom
സ്വാഭാവികത	-	Normaltiy
സ്വീകാര്യ മേഖല	-	Acceptance region
സ്വേച്ഛാ പരിവൃത്തി ശ്രേണി	-	Raw moments