ഗണിതം

ഭാഗം – 2

സ്റ്റാൻഡേർഡ്

VII

കേരളസർക്കാർ
പൊതുവിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

തയ്യാറാക്കിയത്
സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT) കേരളം

2024

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണ്ണവും വൈവിധ്യപൂർണ്ണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

ഗണിതം

7

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in
e-mail : scertkerala@gmail.com, Phone : 0471 - 2341883,
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2024
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of General Education, Government of Kerala

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

ഗണിതത്തിലെ അടിസ്ഥാനാശയങ്ങൾ പലതും നാം
നേടിക്കഴിഞ്ഞു.
എണ്ണൽസംഖ്യകൾ, ഭിന്നസംഖ്യകൾ, ദശാംശരൂപങ്ങൾ,
ബീജഗണിതത്തിലെ ചില കാര്യങ്ങൾ, ... അങ്ങനെ പലതും.
ഇവയെല്ലാം ഉപയോഗപ്പെടുത്തി യുക്തിസഹമായി
പ്രശ്നപരിഹരണം നടത്താനും കാര്യകാരണ ബന്ധം
കണ്ടെത്തി വിശദീകരിക്കാനും പാറ്റേണുകൾ
പൂർത്തിയാക്കാനുമെല്ലാം നമുക്ക് അവസരം ലഭിച്ചിട്ടുണ്ട്.
ഇനിയും നാം മുന്നോട്ടു പോകുകയാണ്.
നേടിയ ആശയങ്ങളുടെ കൂടുതൽ പ്രയോഗതലങ്ങളിലേക്ക്,
പുതിയ ക്രിയാരീതികളിലേക്ക്, സംഖ്യാബന്ധങ്ങളുടെ
യുക്തി കണ്ടെത്തി സ്വന്തം ഭാഷയിൽ വിശദീകരിക്കുകയും
ഗണിതഭാഷയിൽ എഴുതുകയും ചെയ്യുന്നതിലേക്ക്,
ജ്യാമിതിയുടെ ആഴത്തിലുള്ള വിശകലനത്തിലേക്ക്,
കൂടുതൽ സങ്കീർണ്ണമായ പ്രശ്നപരിഹരണത്തിലേക്ക്,
ഗണിതചിന്തയുടെയും ഗണനചിന്തയുടെയും പുതിയ
സാധ്യതകളിലേക്ക് ആത്മവിശ്വാസത്തോടെ,
ചിന്തിച്ചും രസിച്ചും കൂട്ടുകൂടിയും പുതിയ രീതികൾ
അന്വേഷിച്ചും നമുക്ക് മുന്നോട്ടു പോകാം.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. ജയപ്രകാശ് ആർ.കെ.
ഡയറക്ടർ
എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി., കേരളം

പാഠപുസ്തകരചനാസമിതി

അഡ്വൈസർ

ഡോ. ഈ. കൃഷ്ണൻ,
ഗണിതവിഭാഗം മേധാവി (റിട്ട.),
യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം

ചെയർപേഴ്സൺ

സി. വേണുഗോപാൽ
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫസർ (റിട്ട.)
ഐ. എ. എസ്. ഇ., തൃശൂർ

വിദഗ്ധർ

ഡോ. റ്റി. ജി. ശരച്ചന്ദ്രൻ
ഡെപ്യൂട്ടി ഡയറക്ടർ (റിട്ട.),
കോളേജ് വിദ്യാഭ്യാസ വകുപ്പ്, കേരളം

ഡോ. പ്രീനു സി. എസ്.
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫസർ,
യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം

അംഗങ്ങൾ

കുഞ്ഞബ്ദുള്ള എം.
റിട്ടയേർഡ് ഹെഡ്മാസ്റ്റർ
മുയിപ്പോത്ത് എം.യു.പി. സ്കൂൾ,
കോഴിക്കോട്

തുളസീധരൻ പിള്ള കെ.ജി.
ട്രെയിനർ, ബി.ആർ.സി. അഞ്ചൽ,
കൊല്ലം

സുരേഷ് ബാബു റ്റി.
റിട്ട.എൽ.പി.എസ്.റ്റി.
യു.പി.ജി.എസ്, പുനുക്കന്നൂർ,
കൊല്ലം

സജീവ് സി.എസ്.
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. ഗണിതം
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്.
എടത്തനാട്ടുകര, പാലക്കാട്

അച്ചുതൻ സി.ജി.
എച്ച്. എസ്. എസ്. ടി. (ഗണിതം)
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. കാരാക്കുറിശ്ശി,
പാലക്കാട്

ഡി.കെ. ബിജു
യു.പി.എസ്.എ.
കുറുവങ്ങാട് സൗത്ത് യു.പി. സ്കൂൾ
കൊയിലാണ്ടി, കോഴിക്കോട്

ഫാത്തിമ കെ.
യു.പി.എസ്.ടി.,
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്.
കരുവാരകുണ്ട്, മലപ്പുറം

ജോബിൻ കുരുവിള
യു.പി.എസ്.റ്റി., സെന്റ് ആന്റണീസ്
ഹയർ സെക്കന്ററി സ്കൂൾ,
പൂഞ്ഞാർ, കോട്ടയം

ധനേശൻ എം. വി.
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. ഇംഗ്ലിഷ്
ജി.എഫ്.എച്ച്.എസ്.എസ്.
പടന്നക്കടപ്പുറം, കാസറഗോഡ്

രാജീവ് എൻ.ടി.
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. തരിയോട്,
വയനാട്

പ്രകാശൻ പാച്ചൻ
പരുത്തിയറ

ഹരികൃഷ്ണൻ ജി.
എൽ.ടി.എ., ഗവ. വി.എച്ച്.എസ്.എസ്.
ഫോർ ഗേൾസ് കൊട്ടാരക്കര

അക്കാദമിക് കോഡിനേറ്റർ

ഡോ. അനിൽകുമാർ എ.കെ.
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT)
വിദ്യാഭവൻ, പൂജപ്പുര, തിരുവനന്തപുരം 695 012

ഉള്ളടക്കം

8.	ആവർത്തനഗുണനം	111
9.	സംഖ്യാബന്ധങ്ങൾ	127
10.	ത്രികോണപ്പരപ്പ്	135
11.	സമചതുരങ്ങളും മട്ടത്രികോണങ്ങളും	147
12.	ബീജഗണിതം	161
13.	ശതമാനം	181
14.	വിവരചിത്രങ്ങൾ	191

ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി
ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു

കണക്കു ചെയ്തു നോക്കാം

ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത

അന്വേഷണം

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ആമുഖം

ഭാരതത്തിലെ ജനങ്ങളായ നാം ഭാരതത്തെ ഒരു [1]**[പരമാധികാര സ്ഥിതിസമത്വ മതേതര ജനാധിപത്യ റിപ്പബ്ലിക്കായി]** സംവിധാനം ചെയ്യുവാനും അതിലെ പൗരന്മാർക്കെല്ലാം:

സാമൂഹ്യവും സാമ്പത്തികവും രാഷ്ട്രീയവും ആയ **നീതിയും;**

ചിന്തയ്ക്കും ആശയപ്രകടനത്തിനും വിശ്വാസത്തിനും മതനിഷ്ഠയ്ക്കും ആരാധനയ്ക്കും ഉള്ള **സ്വാതന്ത്ര്യവും;**

പദവിയിലും അവസരത്തിലും **സമത്വവും;** സംപ്രാപ്തമാക്കുവാനും;

അവർക്കെല്ലാമിടയിൽ

വ്യക്തിയുടെ അന്തസ്സും [2][രാഷ്ട്രത്തിന്റെ ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും] ഉറപ്പുവരുത്തിക്കൊണ്ട് **സാഹോദര്യം** പുലർത്തുവാനും;

സഗൗരവം തീരുമാനിച്ചിരിക്കയാൽ;

നമ്മുടെ ഭരണഘടനാനിർമ്മാണസഭയിൽ ഈ 1949 നവംബർ ഇരുപത്താറാം ദിവസം **ഇതിനാൽ ഈ ഭരണഘടനയെ സ്വീകരിക്കുകയും നിയമമാക്കുകയും നമുക്കുതന്നെ പ്രദാനം ചെയ്യുകയും ചെയ്യുന്നു.**

---

1. 1976 - ലെ ഭരണഘടന (നാല്പത്തിരണ്ടാം ഭേദഗതി) ആക്റ്റ് 2-ാം വകുപ്പു പ്രകാരം "പരമാധികാര ജനാധിപത്യ റിപ്പബ്ലിക്" എന്നതിന് പകരം ചേർത്തത് (3.1.1977 മുതൽ പ്രാബല്യം).
2. മേല്പറഞ്ഞ ആക്റ്റ് 2-ാം വകുപ്പു പ്രകാരം "രാഷ്ട്രത്തിന്റെ ഐക്യം" എന്നതിനു പകരം ചേർത്തത് (3.1.1977 മുതൽ പ്രാബല്യം).

8 ആവർത്തനഗുണനം

ഘടകങ്ങൾ

ഒന്നിനേക്കാൾ വലിയ ഏതു എണ്ണൽസംഖ്യയെയും അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി പിരിച്ചെഴുതാൻ അറിയാമല്ലോ:

128 എന്ന സംഖ്യയെ ഇങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതുന്നത് എങ്ങനെയാണ് ?

$$128 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

ഇതിൽ എത്ര രണ്ടുകളുണ്ടെന്ന് ഒറ്റനോട്ടത്തിൽ കാണാൻ വിഷമമാണ്; എഴുതാനും അത്ര എളുപ്പമല്ല. ഇത് ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് 2^7 എന്നാണ്. അതായത്, ഏഴു രണ്ടുകൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുന്നതിന്റെ ചുരുക്കെഴുത്ത്:

$$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

ഇതുപോലെ 243 നെ എങ്ങനെ എഴുതാം ?

$$243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

ഒരേ സംഖ്യതന്നെ വീണ്ടും വീണ്ടും കൂട്ടുന്നതിനെ ഗുണനമായി ചുരുക്കി എഴുതുന്നതുപോലെ, വീണ്ടും വീണ്ടും ഗുണിക്കുന്നതിനെയാണ് ഇങ്ങനെ എഴുതുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി,

$$5 + 5 = 5 \times 2 \qquad 5 \times 5 = 5^2$$

$$5 + 5 + 5 = 5 \times 3 \qquad 5 \times 5 \times 5 = 5^3$$

$$5 + 5 + 5 + 5 = 5 \times 4 \qquad 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

എന്നിങ്ങനെ തുടരാം.

ഒരു സംഖ്യയെ അതുകൊണ്ടുതന്നെ വീണ്ടും വീണ്ടും ഗുണിക്കുന്ന ക്രിയയ്ക്ക് കൃതീകരണം (exponentiation) എന്നാണ് പേര്. എത്രയെണ്ണം ഗുണിക്കുന്നു എന്നതിനെ കൃത്യങ്കം (exponent)

എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെയാണ് ഗുണിക്കുന്ന സംഖ്യയുടെ വലതുവശത്ത്, അല്പം മുകളിലായി ചെറുതാക്കി എഴുതുന്നത്.

ഇങ്ങനെ ഒരു സംഖ്യയെ തുടർച്ചയായി ഗുണിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യകളെ ആ സംഖ്യയുടെ കൃതികൾ (powers) എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി,

$2 \times 2 \times 2$	$2^3 = 8$	രണ്ടിന്റെ മൂന്നാം കൃതി
3×3	$3^2 = 9$	മൂന്നിന്റെ രണ്ടാം കൃതി
$7 \times 7 \times 7 \times 7$	$7^4 = 2401$	ഏഴിന്റെ നാലാം കൃതി

ഏതു സംഖ്യയെയും അതിന്റെ തന്നെ ഒന്നാം കൃതിയെന്നു പറയാം

വീണ്ടും ഘടകക്രിയയിലേക്കു വരാം. 128 നെ 2 ന്റെ കൃതിയായും, 243 നെ 3 ന്റെ കൃതിയായും എഴുതിയല്ലോ.

$$128 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$$

$$243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

576 നെ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി പിരിച്ചെഴുതുന്നതെങ്ങനെ ?

$$576 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$= 2^6 \times 3^2$$

1 നേക്കാൾ വലിയ ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയെയും അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാം എന്ന് അറിയാമല്ലോ:

ഇനി ഇതല്പം മാറ്റി ഇങ്ങനെ പറയാം

ഒന്നിനേക്കാൾ വലിയ ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയെയും ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയുടെ കൃതിയോ, വ്യത്യസ്ത അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികളുടെ ഗുണനഫലമോ ആയി എഴുതാം.

ചുവടെപ്പറയുന്ന സംഖ്യകളെ ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയുടെ കൃതിയായോ, വ്യത്യസ്ത അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികളുടെ ഗുണനഫലമായോ എഴുതി നോക്കൂ:

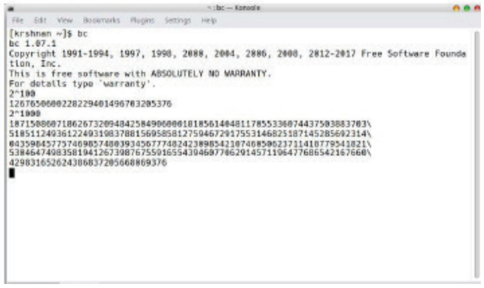
(i) 125 (ii) 72 (iii) 100

(iv) 250 (v) 3600 (vi) 10800

യന്ത്രഗണിതം

സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നിവപോലെ, രണ്ടു സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചു ചെയ്യുന്ന ഒരു ക്രിയയാണ് കൃതീകരണം. എന്നാൽ മറ്റു ക്രിയകളെപ്പോലെ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ ക്രിയയുടെ ചിഹ്നം ചേർത്തല്ല കൃതീകരണം എഴുതുന്നത്.

കാൽക്കുലേറ്റർ, കമ്പ്യൂട്ടർ എന്നീ ഗണിതയന്ത്രങ്ങളിൽ, സംഖ്യകൾ ചെറുതാക്കിയും മുകളിലേക്ക് മാറ്റിയും കൃത്യങ്കങ്ങൾ എഴുതാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. സാധാരണയായി ഇവയിൽ കൃതീകരണത്തിന് ഉപയോഗിക്കുന്നത് ^ എന്ന ചിഹ്നമാണ്. ഉദാഹരണമായി 2^5 കിട്ടാൻ 2^5 എന്നു ടൈപ്പ് ചെയ്യണം. വളരെ വലിയ സംഖ്യകൾ കൈകാര്യം ചെയ്യാൻ കഴിയുന്ന bc എന്നൊരു കാൽക്കുലേറ്റർ, ലിനക്സിൽ ഉണ്ട്. ടെർമിനലിൽ bc എന്നു ടൈപ്പു ചെയ്താൽ ഇതു കിട്ടും. ഇതുപയോഗിച്ച് 2^{100} ഉം 2^{1000} ഉം കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നത് നോക്കൂ:



ഭിന്നകൃതികൾ

വശങ്ങളുടെ നീളം 4 മീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

വശങ്ങളുടെ നീളം $\frac{1}{4}$ മീറ്റർ ആയാലോ ?

4×4 എന്നതിനെ 4^2 എന്നെഴുതിയതുപോലെ

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

എന്നും എഴുതാം. ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ഗുണനം അനുസരിച്ച്

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4 \times 4}$$

ആയതിനാൽ

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4^2}$$

എന്നു കിട്ടുകയും ചെയ്യും.

അപ്പോൾ പൊതുവായി ബീജഗണിതഭാഷയിൽ,

> വശങ്ങളുടെ നീളം x ആയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് x^2

എന്നു പറയാം ($x \times x$ എന്നോ xx എന്നോ എഴുതുന്നതിനേക്കാൾ ഭംഗി x^2 എന്ന് എഴുതുന്നതിൽ അല്ലേ ?).

ഇനി ഈ കണക്ക് ദശാംശരൂപത്തിൽ ആക്കിയാലോ? വശങ്ങളെല്ലാം 0.25 മീറ്ററായ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$(0.25)^2 = 0.25 \times 0.25 = 0.0625$$ ചതുരശ്രമീറ്റർ

ഇതുപോലെ വക്കുകളുടെയെല്ലാം നീളം $\frac{1}{2}$ മീറ്റർ ആയ സമചതുരക്കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$ ഘനമീറ്റർ

എന്നു ചുരുക്കി എഴുതാം (എഴുത്തിൽ മാത്രമാണ് ചുരുക്കം; ഇത് $\frac{1}{8}$ ആണെന്നു കണക്കാക്കാൻ ഗുണിക്കുകതന്നെ വേണം).

ദശാംശരൂപത്തിൽ ആക്കിയാലോ ?

വക്കുകളുടെയെല്ലാം നീളം 0.5 മീറ്റർ ആയ സമചതുരക്കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം

$$(0.5)^3 = 0.5 \times 0.5 \times 0.5$$
$$= 0.125$$ ഘനമീറ്റർ

ശാസ്ത്രചിഹ്നനം

പല ശാസ്ത്രശാഖകളിലും സംഖ്യകൾ, പ്രത്യേകിച്ചും വലിയ സംഖ്യകൾ എഴുതുന്നത് ഒരു പ്രത്യേക രീതിയിലാണ്. 1 നും 10 നും ഇടയ്ക്കുള്ള ഒരു സംഖ്യയും 10 ന്റെ ഒരു കൃതിയും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലമായി എഴുതുന്നതാണ് ഈ രീതി. ഉദാഹരണമായി,

2376	2.376×10^3
237.6	2.376×10^2
23.76	2.376×10

ശാസ്ത്രചിഹ്നനം (scientific notation) എന്നാണ് ഈ രീതി അറിയപ്പെടുന്നത്

ബീജഗണിതഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ,

വക്കുകളുടെ നീളം x ആയ സമചതുരക്കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം x^3

അപ്പോൾ വക്കിന്റെയെല്ലാം നീളം $2\frac{1}{4}$ മീറ്റർ ആയ സമചതുരക്കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ് ?

$$\left(2\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{9}{4}\right)^3 = \frac{9}{4} \times \frac{9}{4} \times \frac{9}{4} = \frac{9 \times 9 \times 9}{4 \times 4 \times 4} = \frac{729}{64}$$

അതായത്, വ്യാപ്തം $\frac{729}{64}$ ഘനമീറ്റർ

ഹരണഫലവും മിച്ചവുമായി പിരിച്ചെഴുതി ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

$$\frac{729}{64} = 11\frac{25}{64}$$

അല്ലെങ്കിൽ ഒരു കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച്,

$$\frac{729}{64} = 11.390625$$

എന്നു കാണുകയും ആവാം.

വേണമെങ്കിൽ ഇത് ഘനസെന്റിമീറ്ററിലാക്കാം:

1 മീറ്റർ = 100 സെന്റിമീറ്റർ

= 10^2 സെന്റിമീറ്റർ

1 ഘനമീറ്റർ = $100 \times 100 \times 100$ ഘനസെന്റിമീറ്റർ

= 10^6 ഘനസെന്റിമീറ്റർ

അപ്പാൾ,

11.390625 ഘനമീറ്റർ

= 11.390625×10^6 ഘനസെന്റിമീറ്റർ

= 11390625 ഘനസെന്റിമീറ്റർ

ഇനി മറ്റു ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം:

2 ന്റെ കുറേ കൃതികൾ ക്രമമായി കണക്കാക്കാൻ വിഷമമില്ല.

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$
$$2^3 = 4 \times 2 = 8$$
$$2^4 = 8 \times 2 = 16$$
$$2^5 = 16 \times 2 = 32$$

ഇതുപയോഗിച്ച് $\frac{1}{2}$ ന്റെ കൃതികളും പെട്ടെന്ന് എഴുതാമല്ലോ.

യന്ത്രപരിധി

കാൽക്കുലേറ്ററുകളിൽ വലിയ സംഖ്യകൾ കാണിക്കുന്നത് ശാസ്ത്രചിഹ്നനം ഉപയോഗിച്ചാണ്

ഇതിൽ 1.267650600E30 എന്നു കാണിക്കുന്നതിന്റെ അർഥം $1.267650600 \times 10^{30}$ അതായത്, 1267650600 എന്നതിന്റെ തുടർച്ചയായി 21 പൂജ്യവും ചേർന്ന സംഖ്യ എന്നാണ്.

ഇത് കൃത്യവുമല്ല. 2^{100} നോട് അടുത്ത ഒരു സംഖ്യ മാത്രമാണ്. ഗണിതയന്ത്രങ്ങൾക്കെല്ലാം കൈകാര്യം ചെയ്യാൻ പറ്റുന്ന സംഖ്യകളുടെ വലുപ്പത്തിന് പരിധിയുണ്ട്. ഇവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന കാൽക്കുലേറ്ററിന് 12 അക്കങ്ങൾ വരെയുള്ള സംഖ്യകളാണ് പരിധി നേരത്തെ പറഞ്ഞ bc എന്ന കാൽക്കുലേറ്ററിന്റെ പരിധി വളരെ വലുതായതിനാൽ, 2^{100} ഉം 2^{1000} ഉം എല്ലാം കൃത്യമായിത്തന്നെ കാണിക്കാൻ കഴിയും.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

2 ന്റെ കൃതികൾ വലുതായി വരുമ്പോൾ, $\frac{1}{2}$ ന്റെ കൃതികൾ ചെറുതായി വരുന്നു. എന്തുകൊണ്ടാണിത് ?

2 കൊണ്ടുള്ള ഓരോ ഗുണനവും രണ്ടു മടങ്ങാക്കി വികസിപ്പിക്കുന്നു;

$\frac{1}{2}$ കൊണ്ടുള്ള ഓരോ ഗുണനവും രണ്ടിലൊന്നായി ചുരുക്കുന്നു.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ,

> ഒന്നിനേക്കാൾ വലിയ സംഖ്യകളുടെ കൃതികൾ ക്രമമായി വലുതാകുന്നു. ഒന്നിനേക്കാൾ ചെറുതും, പൂജ്യത്തേക്കാൾ വലുതും ആയ സംഖ്യകളുടെ കൃതികൾ ക്രമമായി ചെറുതാകുന്നു. ഒന്നിന്റെ കൃതികൾ എല്ലാം ഒന്നുതന്നെ. പൂജ്യത്തിന്റെ കൃതികളും പൂജ്യമായി തന്നെ തുടരുന്നു.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

(1) ചുവടെപ്പറയുന്ന കൃതികൾ ഭിന്നസംഖ്യകളായി കണക്കാക്കുക:

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ (ii) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$ (iii) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ (iv) $\left(2\frac{1}{2}\right)^3$

(2) ചുവടെപ്പറയുന്ന കൃതികൾ ദശാംശരൂപത്തിൽ കണക്കാക്കുക:

(i) $(0.5)^2$ (ii) $(1.5)^2$ (iii) $(0.1)^3$ (iv) $(0.01)^3$

(3) $15^3 = 3375$ ആണ്. ഇത് ഉപയോഗിച്ച്, ചുവടെയുള്ള കൃതികൾ കണക്കാക്കുക:

(i) $(1.5)^3$ (ii) $(0.15)^3$ (iii) $(0.015)^3$

കൃതികളുടെ വലുപ്പം

രണ്ടിന്റെ കൃതികൾ എത്ര വേഗം വലുതാകുന്നു എന്നു കാണിക്കുന്ന പഴയൊരു കഥയുണ്ട്

ഒരു രാജാവ്, തന്നെ ചതുരംഗം കളിയിൽ തോല്പിച്ച ഒരാളോട് എന്തു സമ്മാനമാണ് വേണ്ടത് എന്നു ചോദിച്ചു. അയാൾ ആവശ്യപ്പെട്ടത്, ചതുരംഗപ്പലകയുടെ ഒന്നാം കളത്തിൽ ഒരു മണി അരി, രണ്ടാം കളത്തിൽ രണ്ടു മണി, മൂന്നാം കളത്തിൽ നാലു മണി എന്നിങ്ങനെ ഓരോ കളത്തിലും ഇരട്ടിച്ച് അറുപത്തിനാലു കളങ്ങളും നിറച്ചു കൊടുക്കണം എന്നായിരുന്നു. നിസ്സാരമെന്നു കരുതി തുടങ്ങിയ ഈ ദാനം, രാജ്യത്തെ ധാന്യപ്പുര ഒഴിഞ്ഞിട്ടും, പകുതിയാക്കാൻ പോലും കഴിഞ്ഞില്ല എന്നാണ് കഥ.

ഇതിന്റെ കണക്കു നോക്കാം. ഇവിടെ വേണ്ടത് 1, 2, 4, 8 എന്നിങ്ങനെ 63 വരെയുള്ള 2 ന്റെ കൃതികളുടെ തുകയാണല്ലോ.

bc പോലെയുള്ള ഒരു കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച് ഇതു കണക്കാക്കിയാൽ ലക്ഷം കോടി ക്കോടിയേക്കാൾ കൂടുതലാണ് ഈ സംഖ്യ എന്നു കാണാം. ഒരു അരിമണിയുടെ ഭാരം 30 മില്ലിഗ്രാം എന്ന് എടുത്താൽ ഇത്രയും അരിമണിക്ക് ഏതാണ്ട് അമ്പതിനായിരം കോടി ടൺ ഭാരം വരും.

ഒരു വർഷം ലോകത്തിൽ ആകെ ഉല്പാദിപ്പിക്കുന്ന അരി, ഏകദേശം അഞ്ഞൂറു കോടി ടൺ മാത്രമാണ് എന്നതും ഓർക്കണം

കൃതികളുടെ ഗുണനം

2 ന്റെ 3 മടങ്ങും, 2 ന്റെ 5 മടങ്ങും കൂട്ടിയാൽ 2 ന്റെ 8 മടങ്ങാകും എന്ന് അറിയാമല്ലോ. എന്തു കൊണ്ടാണ് ഇതു ശരിയാകുന്നത്?

$$2 \text{ ന്റെ } 3 \text{ മടങ്ങ്} = 2 + 2 + 2$$

$$2 \text{ ന്റെ } 5 \text{ മടങ്ങ്} = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

ഇവ കൂട്ടിയാലോ?

$$\underbrace{(2 + 2 + 2)}_{3 \text{ എണ്ണം}} + \underbrace{(2 + 2 + 2 + 2 + 2)}_{5 \text{ എണ്ണം}} = \underbrace{2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2}_{8 \text{ എണ്ണം}}$$

ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം,

$$(2 \times 3) + (2 \times 5) = 2 \times (5 + 3) = 2 \times 8$$

ഇനി 2 ന്റെ കൃതികൾ ആയാലോ?

$$2 \text{ ന്റെ } 3\text{-ാം കൃതി} = 2 \times 2 \times 2$$

$$2 \text{ ന്റെ } 5\text{-ാം കൃതി} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

എല്ലാം ഗുണനമായതിനാൽ ഇവ തമ്മിൽ കൂട്ടുന്നതിനു പകരം ഗുണിച്ചു നോക്കാം:

$$\underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{3 \text{ എണ്ണം}} \times \underbrace{(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)}_{5 \text{ എണ്ണം}} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{8 \text{ എണ്ണം}}$$

ഇത് കൃതികളായി എങ്ങനെ എഴുതാം?

$$2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

ഇതുപോലെ $3^2 \times 3^4$ എഴുതിനോക്കിയാലോ ?

$$3^2 = 3 \times 3$$

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

ഇവ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ

$$3^2 \times 3^4 = \underbrace{(3 \times 3)}_{2 \text{ എണ്ണം}} \times \underbrace{(3 \times 3 \times 3 \times 3)}_{4 \text{ എണ്ണം}} = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{6 \text{ എണ്ണം}}$$

അതായത്,

$$3^2 \times 3^4 = 3^6$$

അപ്പോൾ ഒരു സംഖ്യയുടെ കൃതികളുടെ ഗുണനഫലത്തെക്കുറിച്ച് പൊതുവായി എന്തു പറയാം ?

ഒരേ സംഖ്യയുടെ കൃതികൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ, കൃത്യങ്കങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടണം.

ബീജഗണിതഭാഷയിൽ

x ഏതു സംഖ്യയും m, n ഇവ ഏതു രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളും ആയാലും

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

ഇതിൽ രണ്ടുകാര്യങ്ങളുണ്ട്.

(i) ഒരേ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു കൃതികളുടെ ഗുണനഫലം ആ സംഖ്യയുടെതന്നെ കൃതിയാണ്

(ii) ഗുണനഫലത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം, ഗുണിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ കൃത്യങ്കങ്ങളുടെ തുകയാണ്

രണ്ടിൽക്കൂടുതൽ കൃതികൾ ഗുണിക്കുമ്പോഴും ഇതുതന്നെ ചെയ്യാം.
ഉദാഹരണമായി $3^2 \times 3^5 \times 3^4$ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

$$\begin{aligned} 3^2 \times 3^5 \times 3^4 &= (3^2 \times 3^5) \times 3^4 \\ &= 3^7 \times 3^4 \\ &= 3^{11} \end{aligned}$$

ഗുണനഫലങ്ങളെ അഭാജ്യസംഖ്യകളായി ഘടകക്രിയ ചെയ്യാൻ കൃതികളുടെ ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി 96 × 144 നെ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതണമെന്നു കരുതുക. ആദ്യം ഓരോന്നിനെയും ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\begin{aligned} 96 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^5 \times 3 \\ 144 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2 \end{aligned}$$

അപ്പോൾ,

$$\begin{aligned} 96 \times 144 &= (2^5 \times 3) \times (2^4 \times 3^2) \\ &= (2^5 \times 2^4) \times (3 \times 3^2) \\ &= 2^9 \times 3^3 \end{aligned}$$

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം:

1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തെ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതണം.

ഇതിലെ അഭാജ്യസംഖ്യകളായ 2, 3, 5, 7 ഇവയെ ഒന്നും ചെയ്യേണ്ടതില്ല. മറ്റുള്ളവയെ അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമാക്കാം:

$$4 = 2^2$$

$$6 = 2 \times 3$$

$$8 = 2^3$$

$$9 = 3^2$$

അപ്പോൾ

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \\ &= (2 \times 2^2 \times 2 \times 2^3) \times (3 \times 3 \times 3^2) \times 5 \times 7 \\ &= 2^7 \times 3^4 \times 5 \times 7 \end{aligned}$$

ഈ കണക്കുകളിൽ ഗുണനഫലങ്ങൾ കണക്കാക്കാതെതന്നെ അവയെ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതിയത് കണ്ടില്ലേ ?

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

(1) ചുവടെപ്പറയുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികളുടെ ഗുണന ഫലമായി എഴുതുക:

(i) 72×162 (ii) 225×135 (iii) 105×175 (iv) $25 \times 45 \times 75$

(2) 1 മുതൽ 15 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തെ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

(3) 1 മുതൽ 25 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ

(i) 2 കൊണ്ട് മിച്ചമില്ലാതെ ഹരിക്കാൻ കഴിയുന്നതും 4 കൊണ്ട് മിച്ചമില്ലാതെ ഹരിക്കാൻ കഴിയാത്തതും ആയ സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

(ii) 4 കൊണ്ട് മിച്ചമില്ലാതെ ഹരിക്കാൻ കഴിയുന്നതും 8 കൊണ്ട് മിച്ചമില്ലാതെ ഹരിക്കാൻ കഴിയാത്തതുമായ സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

(iii) 8 കൊണ്ട് മിച്ചമില്ലാതെ ഹരിക്കാൻ കഴിയുന്നവയും 16 കൊണ്ട് മിച്ചമില്ലാതെ ഹരിക്കാൻ കഴിയാത്തതുമായ സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

(iv) 1 മുതൽ 25 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തെ മിച്ചമില്ലാതെ ഹരിക്കാൻ കഴിയുന്ന 2 ന്റെ ഏറ്റവും വലിയ കൃതി ഏതാണ് ?

(4) 1 മുതൽ 25 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തെ മിച്ചമില്ലാതെ ഹരിക്കാൻ കഴിയുന്ന

(i) 5 ന്റെ ഏറ്റവും വലിയ കൃതി എന്താണ് ?

(ii) 10 ന്റെ കൃതിയോ ?

(iii) 1 മുതൽ 25 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ അവസാനം എത്ര പൂജ്യങ്ങൾ ഉണ്ടാകും ?

കൃതികളുടെ ഹരണം

$256 \div 32$ എത്രയാണ് ?

ഹരിക്കുന്നതിനുമുമ്പ് ഘടകങ്ങളാക്കുന്നത് സൗകര്യമാണല്ലോ.

$$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$$

$$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

അപ്പോൾ കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്,

$$2^8 \div 2^5$$

അതായത്, 2^5 നെ എന്തുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ 2^8 കിട്ടും എന്നാണ് ചോദ്യം

നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്

$$2^5 \times 2^3 = 2^8$$

ഇതിൽനിന്ന്,

$$2^8 \div 2^5 = 2^3$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത്

$$256 \div 32 = 8$$

ഇതുപോലെ 15625 നെ 625 കൊണ്ടു ഹരിച്ചു നോക്കാം.

5 കൊണ്ടു തുടർച്ചയായി ഹരിച്ച്, രണ്ടു സംഖ്യകളെയും 5 ന്റെ കൃതികളായി എഴുതാം:

$$15625 = 5^6$$

$$625 = 5^4$$

അപ്പോൾ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാകും:

$$15625 \div 625 = 5^6 \div 5^4$$

അതായത്,

5^4 നെ എന്തുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ 5^6 ആകും ?

ഒരേ സംഖ്യയുടെ കൃതികൾ ഗുണിക്കുമ്പോൾ കൃത്യങ്കം തുകയാകുമല്ലോ. ഇവിടെ ആദ്യത്തെ കൃത്യങ്കം 4 നെ, രണ്ടാമത്തെ കൃത്യങ്കം 6 ആക്കണം

അപ്പോൾ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

4 നെ 6 ആക്കാൻ എത്ര കൂട്ടണം ?

ഇനി പുറകോട്ട് ആലോചിച്ചാൽ ആദ്യത്തെ കണക്കിന് ഉത്തരമായില്ലേ ?

- $4 + 2 = 6$
- $5^4 \times 5^2 = 5^6$
- $5^6 \div 5^4 = 5^2$
- $15625 \div 625 = 25$

ഇതുപോലെ, $8^{15} \div 8^6$ കണക്കാക്കാൻ എങ്ങനെയാണ് ആലോചിക്കേണ്ടത് ?

- 8^{15} നെ 8^6 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ എന്തു കിട്ടും ?
- 8^6 നെ 8^{15} ആക്കാൻ 8 ന്റെ ഏതു കൃതികൊണ്ടു ഗുണിക്കണം ?
- 6 നെ 15 ആക്കാൻ എന്തു കൂട്ടണം ?

അവസാനത്തെ ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരം കണക്കാക്കിയാൽ, പുറകോട്ട് ആലോചിച്ച്, ആദ്യത്തെ ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാം:

- $15 - 6 = 9$
- $6 + 9 = 15$
- $8^6 \times 8^9 = 8^{15}$
- $8^{15} \div 8^6 = 8^9$

ഇപ്പോൾചെയ്ത മൂന്നു കണക്കുകളും ഒന്നുകൂടി നോക്കാം:

$$2^8 \div 2^5 = 2^3 = 2^{8-5}$$

$$5^6 \div 5^4 = 5^2 = 5^{6-4}$$

$$8^{15} \div 8^6 = 8^9 = 8^{15-6}$$

ഇത് ഒരു പൊതുതത്വമായി പറയാമല്ലോ.

> പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സംഖ്യയുടെ വലിയ കൃതിയെ അതേ സംഖ്യയുടെ ചെറിയ കൃതികൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ, കൃത്യങ്കങ്ങൾ തമ്മിൽ കുറയ്ക്കണം

ഇനി ഇത് ബീജഗണിതഭാഷയിൽ എഴുതാം:

> x പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യയും m, n ഇവ $m > n$ ആയ ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യകളും ആയാലും
>
> $$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

ബീജഗണിതത്തിൽ പൊതുവെ ഹരണത്തെ ഭിന്നരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നതുകൊണ്ടാണ് $x^m \div x^n$ എന്നതിനെ $\frac{x^m}{x^n}$ എന്നെഴുതിയത്.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

$$288 \div 36$$

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ആദ്യം രണ്ടു സംഖ്യകളെയും ഘടകങ്ങളായി പിരിച്ചെഴുതിയാൽ

$$288 = 2^5 \times 3^2$$

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

ഇനിയെന്തു ചെയ്യും ?

ഹരിക്കുമ്പോൾ പൊതുഘടകങ്ങൾ ഒഴിവാക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ

$$(2^5 \times 3^2) \div (2^2 \times 3^2) = 2^5 \div 2^2$$

ഈ ഹരണം എളുപ്പം ചെയ്യാം:

$$2^5 \div 2^2 = 2^{5-2} = 2^3$$

ഈ ചെയ്തതെല്ലാം ഒരുമിച്ച് എഴുതിയാലോ ?

$$\begin{aligned} 288 \div 36 &= (2^5 \times 3^2) \div (2^2 \times 3^2) \\ &= 2^5 \div 2^2 \\ &= 2^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തു നോക്കൂ

(1) ചുവടെയുള്ള ഹരണഫലങ്ങൾ കണക്കാക്കുക

(i) $512 \div 64$ (ii) $3125 \div 125$ (iii) $243 \div 27$ (iv) $1125 \div 45$

(2) (i) 2^{10} ന്റെ പകുതിയെ 2 ന്റെ കൃതിയായി എഴുതുക

(ii) 3^{12} ന്റെ മൂന്നിലൊരു ഭാഗത്തിനെ 3 ന്റെ കൃതിയായി എഴുതുക

ചില ഭിന്നസംഖ്യകളെ ലഘൂകരിക്കാനും കൃത്യങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി $\frac{64}{512}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യ നോക്കുക

അംശത്തെയും ഛേദത്തെയും ഘടകക്രിയ ചെയ്ത് ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$64 = 2^6, \quad 512 = 2^9$$

അപ്പോൾ

$$\begin{aligned} \frac{64}{512} &= \frac{2^6}{2^9} \\ &= \frac{2^6}{2^6 \times 2^3} \\ &= \frac{2^6}{2^6} \times \frac{1}{2^3} \\ &= \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

എന്നു കണക്കാക്കാം.

ഇതുപോലെ,

$$\begin{aligned} \frac{49}{343} &= \frac{7^2}{7^3} \\ &= \frac{7^2}{7^2 \times 7} \\ &= \frac{7^2}{7^2} \times \frac{1}{7} \\ &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

ഇതിൽ രണ്ടിലും ചെയ്ത ക്രിയയുടെ ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

x പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യ ആയാലും, m, n ഇവ $m < n$ ആയ ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ആയാലും

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}}$$

ഇതുപോലെ ചുവടെയുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകൾ ലഘൂകരിച്ച് എഴുതാമല്ലോ:

(i) $\frac{27}{243}$ (ii) $\frac{125}{3125}$ (iii) $\frac{48}{64}$ (iv) $\frac{54}{81}$

മടങ്ങും കൃതിയും

4 ന്റെ 3 മടങ്ങും 6 ന്റെ 3 മടങ്ങും കൂട്ടിയാൽ എന്തു കിട്ടും ?

10 ന്റെ 3 മടങ്ങ്, അല്ലേ ?

എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇതു ശരിയാകുന്നത് ?

4 ന്റെ 3 മടങ്ങ് = 4 + 4 + 4

6 ന്റെ 3 മടങ്ങ് = 6 + 6 + 6

ഇവ തമ്മിൽ കൂട്ടുമ്പോൾ, 4 ഉം 6 ഉം ജോടികളാക്കി കൂട്ടിയാലോ ?

(4 ന്റെ 3 മടങ്ങ്) + (6 ന്റെ 3 മടങ്ങ്) = (4 + 6) + (4 + 6) + (4 + 6) = 10 + 10 +10 = 10 ന്റെ 3 മടങ്ങ്

ഇതു ചുരുക്കി ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$(4 \times 3) + (6 \times 3) = (4 + 6) \times 3$$

മടങ്ങുകൾക്കു പകരം കൃതികളാക്കിയാലോ ?

4 ന്റെ 3-ാം കൃതി = 4 × 4 × 4

6 ന്റെ 3-ാം കൃതി = 6 × 6 × 6

കൂട്ടുന്നതിനു പകരം ഗുണിക്കാം. അതിലും 4 ഉം 6 ഉം ജോടികളാക്കി ഗുണിക്കാം:

(4 ന്റെ 3-ാം കൃതി) × (6 ന്റെ 3-ാം കൃതി) = (4 × 6) × (4 × 6) × (4 × 6) = (4 × 6) ന്റെ 3-ാം കൃതി

(4 × 6) ന്റെ 3-ാം കൃതി എന്നത് $(4 \times 6)^3$ എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ മുകളിലെ സമവാക്യം ഇങ്ങനെ ചുരുക്കാം:

$$4^3 \times 6^3 = (4 \times 6)^3$$

ഇതിലെ 4, 6, 3 എന്നിവയ്ക്കു പകരം മറ്റു സംഖ്യകൾ എടുത്താലും, ഈ രീതിയിൽത്തന്നെ ഇതേ ബന്ധം കിട്ടുമല്ലോ

അപ്പോൾ പൊതുവെ എന്തു പറയാം ?

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഒരേ കൃതികൾ തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം, സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ അതേ കൃതിയാണ്

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാലോ ?

x, y ഇവ ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളും n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയും ആയാലും

$$x^n y^n = (xy)^n$$

ചില ഗുണനക്രിയകൾ എളുപ്പമാക്കാൻ ഇത് ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി 625×16 നോക്കുക.

$$625 = 5^4$$

$$16 = 2^4$$

എന്നു കണ്ടുകഴിഞ്ഞാൽ

$$625 \times 16 = 5^4 \times 2^4 = (5 \times 2)^4 = 10^4 = 10000$$

എന്ന് എളുപ്പം കണക്കാക്കാം.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം.

7 ന്റെ 2 മടങ്ങിന്റെ 5 മടങ്ങ് എത്രയാണ് ?

ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

- 7 ന്റെ 2 മടങ്ങ് $7 \times 2 = 14$
- 14 ന്റെ 5 മടങ്ങ് $14 \times 5 = 70$

ഇങ്ങനെയും ആകാം:

- 2 ന്റെ 5 മടങ്ങ് $2 \times 5 = 10$
- 7 ന്റെ 10 മടങ്ങ് $7 \times 10 = 70$

ഇത് എന്തുകൊണ്ട് ശരിയാകുന്നു എന്നു നോക്കാം:

7 ന്റെ 2 മടങ്ങ് $= 7 + 7$

$(7 + 7)$ ന്റെ 5 മടങ്ങ് $= (7 + 7) + (7 + 7) + (7 + 7) + (7 + 7) + (7 + 7)$

= 7 ന്റെ 10 മടങ്ങ്

ഈ കണക്കുകൂട്ടൽ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$(7 \times 2) \times 5 = 7 \times (2 \times 5)$$

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ മടങ്ങുകൾക്കു പകരം കൃതികളാക്കിയാലോ?

7 ന്റെ 2-ാം കൃതിയുടെ 5-ാം കൃതി എത്രയാണ്?

7 ന്റെ 2-ാം കൃതി = 7×7

(7×7) ന്റെ 5-ാം കൃതി = $(7 \times 7) \times (7 \times 7) \times (7 \times 7) \times (7 \times 7) \times (7 \times 7)$

= 7 ന്റെ 10-ാം കൃതി

കൃതികളായി എഴുതി, ഈ സമവാക്യം ചുരുക്കാം. ഇതിൽ $(7 \times 7)^5$ എന്നതിനെ $(7^2)^5$ എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ സമവാക്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$$(7^2)^5 = 7^{10}$$

വേറെ സംഖ്യകൾ എടുത്താലും ഇതേ ബന്ധംതന്നെ കിട്ടില്ലേ? എന്താണ് ആ ബന്ധം?

ഒരു സംഖ്യയുടെ കൃതിയുടെ കൃതി കണക്കാക്കാൻ, കൃത്യങ്കങ്ങൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കണം

ബീജഗണിതത്തിൽ എഴുതിയാലോ?

x ഏതു സംഖ്യയും m, n ഇവ ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യകളും ആയാലും

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

ഒരു സംഖ്യയെ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതിക്കഴിഞ്ഞാൽ, അതിന്റെ കൃതികളെ ഇങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതാൻ ഈ തത്വങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി

$$144 = 2^4 \times 3^2$$

എന്നു കണ്ടുകഴിഞ്ഞാൽ

$$\begin{aligned} 144^5 &= (2^4 \times 3^2)^5 \\ &= (2^4)^5 \times (3^2)^5 \\ &= 2^{20} \times 3^{10} \end{aligned}$$

എന്നെഴുതാം.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

(1) ചുവടെയുള്ള ഗുണനങ്ങൾ മനക്കണക്കായി ചെയ്യുക

(i) $5^2 \times 4^2$ (ii) $5^3 \times 6^3$ (iii) $25^3 \times 4^3$ (iv) $125^2 \times 8^2$

(2) ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളെ വ്യത്യസ്ത അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക

(i) 15^2 (ii) 30^3 (iii) $12^2 \times 21^2$ (iv) $12^2 \times 21^3$

9 സംഖ്യാബന്ധങ്ങൾ

ഘടകങ്ങൾ

അഭാജ്യസംഖ്യകൾ എന്നു കേട്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ: 1 ഉം ആ സംഖ്യയും മാത്രം ഘടകങ്ങളായുള്ള, 1 നേക്കാൾ വലിയ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ

ഉദാഹരണമായി 2, 3, 5, 7, 11, ...

ഇവ ഓരോന്നിനും രണ്ടു ഘടകങ്ങൾ മാത്രമാണുള്ളത്.

ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയുടെ രണ്ടാംകൃതി എടുത്താലോ ?

ഉദാഹരണമായി, $7^2 = 49$

ഇതിന് എത്ര ഘടകങ്ങളുണ്ട് ?

1, 7, 49 എന്നീ മൂന്നെണ്ണം മാത്രമല്ലേയുള്ളൂ ?

മൂന്നാംകൃതി ആയാലോ ? $7^3 = 343$

എന്തൊക്കെയാണ് ഘടകങ്ങൾ ?

1, 7, 49, 343 എന്നീ നാലു ഘടകങ്ങൾ മാത്രം.

ഇനി 7^4 കണക്കാക്കാതെതന്നെ അതിന് എത്ര ഘടകങ്ങൾ ഉണ്ടെന്ന് പറയാമോ ?

1, 7, 7^2, 7^3, 7^4 എന്നീ 5 ഘടകങ്ങൾ

ഇതുപോലേ, 11^5 എത്രയാണെന്ന് അറിയാതെതന്നെ അതിന്റെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം പറയാമല്ലോ ?

അപ്പോൾ, പൊതുവെ ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയുടെ കൃതിയുടെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ?

ഏത് അഭാജ്യസംഖ്യയുടെ കൃതിയുടെയും ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം, കൃത്യങ്കത്തേക്കാൾ ഒന്നു കൂടുതലാണ്

ഇത് ബീജഗണിതഭാഷയിൽ എഴുതിയാലോ ?

p ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയും, n ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയുമാണെങ്കിൽ, p^n എന്ന സംഖ്യയുടെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം $n + 1$ ആണ്

ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയെ അതുകൊണ്ടുതന്നെ ആവർത്തിച്ചു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ അതിന്റെ കൃതികൾ. അങ്ങനെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം എങ്ങനെ മാറുന്നു എന്നു കണ്ടു.

ഇനി ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയെ മറ്റൊരു അഭാജ്യസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാലോ ?

ഉദാഹരണമായി $5 \times 7 = 35$ നോക്കാം:

ആദ്യം 5 ന്റെ ഘടകങ്ങളായ 1 ഉം 5 ഉം എടുക്കാം. ഇവ രണ്ടും 35 ന്റെയും ഘടകങ്ങളാണല്ലോ

ഇനി ഈ രണ്ടു ഘടകങ്ങളെയും 7 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്ന 7 ഉം 35 ഉം 35 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ തന്നെ.

അപ്പോൾ 35 ന് എത്ര ഘടകങ്ങളായി ?

1	5	(5 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ)
7	35	(5 ന്റെ ഘടകങ്ങളെ 7 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചത്)

എന്നിങ്ങനെ 4 ഘടകങ്ങൾ

$5^2 \times 7 = 25 \times 7 = 175$ ആയാലോ ?

ആദ്യം, $5^2 = 25$ ന്റെ 3 ഘടകങ്ങൾ

$$1, 5, 5^2 \text{ അതായത് } 1, 5, 25$$

ഇനി ഇവ ഓരോന്നിനെയും 7 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്ന വേറെ 3 ഘടകങ്ങൾ

1	5	5^2	അതായത്	1	5	25
7	5×7	$5^2 \times 7$		7	35	175

ആകെ $3 + 3 = 3 \times 2 = 6$ ഘടകങ്ങൾ

ഇനി $5^2 \times 7^2$ ആയാലോ ? ഈ സംഖ്യ ഗുണിച്ചെഴുതാതെ ഘടകങ്ങൾ കണക്കാക്കാം.

നേരത്തെ കണ്ടുപിടിച്ച $5^2 \times 7$ ന്റെ ഘടകങ്ങൾ എല്ലാം $5^2 \times 7^2$ ന്റെയും ഘടകങ്ങൾ ആണല്ലോ. പുതിയതായി വരുന്ന ഘടകങ്ങൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

മുകളിലെ പട്ടികയിൽ, ആദ്യത്തെ വരിയിലെ $1, 5, 5^2$ എന്നിവയെ 7 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാണല്ലോ രണ്ടാമത്തെ വരി എഴുതിയത്.

ഇനി ആദ്യത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകളെ 7^2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ $5^2 \times 7^2$ ന്റെ ബാക്കി ഘടകങ്ങൾ കിട്ടും; അതായത്

$$1 \times 7^2, 5 \times 7^2, 5^2 \times 7^2$$

എല്ലാം ചേർത്തെഴുതിയാൽ

1	5	5^2	(25 ന്റെ ഘടകങ്ങൾ)
7	5×7	$5^2 \times 7$	(25 ന്റെ ഘടകങ്ങളെ 7 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചത്)
7^2	5×7^2	$5^2 \times 7^2$	(25 ന്റെ ഘടകങ്ങളെ 7^2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചത്)

ആകെ $3 \times 3 = 9$ ഘടകങ്ങൾ.

$5^2 \times 7^3$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് വേണ്ടതെങ്കിൽ, ആദ്യത്തെ വരിയിലെ 1, 5, 5^2 ഇവയെ 7^3 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് ഒരു വരി കൂടി എഴുതിയാൽപ്പോരേ ?

1	5	5^2
7	5×7	$5^2 \times 7$
7^2	5×7^2	$5^2 \times 7^2$
7^3	5×7^3	$5^2 \times 7^3$

ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം $3 \times 4 = 12$

$5^3 \times 7^3$ ആയാലോ ?

ആദ്യത്തെ വരിയിൽ 5^3 കൂടി വരും; അതിന്റെ ചുവടെ $5^3 \times 7$, $5^3 \times 7^2$, $5^3 \times 7^3$ ഇവയും ചേർന്ന് ഒരു പുതിയ നിരയും:

1	5	5^2	5^3
7	5×7	$5^2 \times 7$	$5^3 \times 7$
7^2	5×7^2	$5^2 \times 7^2$	$5^3 \times 7^2$
7^3	5×7^3	$5^2 \times 7^3$	$5^3 \times 7^3$

ആകെ $4 \times 4 = 16$ എണ്ണം.

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളിലെ സംഖ്യകൾ മാറിയാൽ, ഘടകങ്ങൾ മാറും; എന്നാലും അവയുടെ എണ്ണം ഇതുപോലെതന്നെ കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി $11^4 \times 17^2$ എന്ന സംഖ്യയ്ക്ക് എത്ര ഘടകങ്ങളുണ്ട് ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

- 11^4 ന്റെ 5 ഘടകങ്ങൾ
- അവ ഓരോന്നിനെയും 17 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്ന 5 എണ്ണം കൂടി
- ആദ്യം പറഞ്ഞ സംഖ്യകളെയെല്ലാം 17^2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്ന 5 എണ്ണം വീണ്ടും
- ആകെ $5 \times 3 = 15$ എണ്ണം

വേണമെങ്കിൽ ഘടകങ്ങൾ ഇങ്ങനെ പട്ടികയാക്കാം:

1	11	11^2	11^3	11^4
17	11×17	$11^2 \times 17$	$11^3 \times 17$	$11^4 \times 17$
17^2	11×17^2	$11^2 \times 17^2$	$11^3 \times 17^2$	$11^4 \times 17^2$

അപ്പോൾ രണ്ടു അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ ഘടകങ്ങളെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ?

രണ്ട് അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികളുടെ ഗുണനഫലമായ സംഖ്യയുടെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം, രണ്ടു കൃത്യങ്കങ്ങളോടും ഓരോന്നു കൂട്ടി ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യയാണ്.

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് എഴുതിയാലോ ?

ഘടകചതുരം

p, q ഇവ വ്യത്യസ്ത അഭാജ്യസംഖ്യകളും, m, n ഇവ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ആണെങ്കിൽ, $p^m q^n$ എന്ന സംഖ്യയുടെ ഘടകങ്ങൾ ഇങ്ങനെ വരിയും നിരയുമായി എഴുതാം:

1	p	p^2	....	p^m
q	pq	p^2q	....	p^mq
q^2	pq^2	p^2q^2	....	p^mq^2
......				
q^n	pq^n	p^2q^n	....	p^mq^n

ആദ്യത്തെ വരിയിൽ, 1 ഉം p യുടെ m കൃതികളും ആയി, $m + 1$ സംഖ്യകൾ. ഇവ ഓരോന്നിനെയും q വിന്റെ n കൃതികൾ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കൂട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ n വരികൾ കൂടി. $m + 1$ സംഖ്യകൾ വീതമുള്ള $n + 1$ വരികൾ അങ്ങനെ ആകെ $(m + 1)(n + 1)$ സംഖ്യകൾ

p, q ഇവ വ്യത്യസ്ത അഭാജ്യസംഖ്യകളും m, n ഇവ ഏതെങ്കിലും എണ്ണൽസംഖ്യകളും ആണെങ്കിൽ $p^m q^n$ എന്ന സംഖ്യയുടെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം $(m + 1)(n + 1)$ ആണ്.

സംഖ്യയുടെ ഘടകങ്ങളായി 3 വ്യത്യസ്ത അഭാജ്യ സംഖ്യകൾ വന്നാലോ ?

ഉദാഹരണമായി $5^3 \times 7^2 \times 19$ എന്ന സംഖ്യയ്ക്ക് എത്ര ഘടകങ്ങളുണ്ട് ?

$5^3 \times 7^2$ ന് $4 \times 3 = 12$ ഘടകങ്ങൾ ഉണ്ടെന്ന് അറിയാം. അവ ഇങ്ങനെ എഴുതുകയും ചെയ്യാം:

1	5	5^2	5^3
7	5×7	$5^2 \times 7$	$5^3 \times 7$
7^2	5×7^2	$5^2 \times 7^2$	$5^3 \times 7^2$

ഈ 12 സംഖ്യകളും $5^3 \times 7^2 \times 19$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണല്ലോ; കൂടാതെ ഇവ ഓരോന്നിനെയും 19 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് കിട്ടുന്ന മറ്റു 12 സംഖ്യകളും ഘടകങ്ങളാണ്.

19	5×19	$5^2 \times 19$	$5^3 \times 19$
7×19	$5 \times 7 \times 19$	$5^2 \times 7 \times 19$	$5^3 \times 7 \times 19$
$7^2 \times 19$	$5 \times 7^2 \times 19$	$5^2 \times 7^2 \times 19$	$5^3 \times 7^2 \times 19$

എല്ലാം കൂടി $12 \times 2 = 24$ ഘടകങ്ങൾ.

$5^3 \times 7^2 \times 19^2$ ആണെങ്കിൽ, ഇതിനെല്ലാം പുറമേ, ആദ്യത്തെ ചതുരത്തിലെ സംഖ്യകളെയെല്ലാം

19^2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചുള്ള മൂന്നാമതൊരു ചതുരവും കൂടി വരും.

19	5×19^2	$5^2 \times 19^2$	$5^3 \times 19^2$
7×19^2	$5 \times 7 \times 19^2$	$5^2 \times 7 \times 19^2$	$5^3 \times 7 \times 19^2$
$7^2 \times 19^2$	$5 \times 7^2 \times 19^2$	$5^2 \times 7^2 \times 19^2$	$5^3 \times 7^2 \times 19^2$

ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം $12 \times 3 = 36$ ആകും.

ഇങ്ങനെ ഓരോ പുതിയ അഭാജ്യസംഖ്യയുടെ കൃതി ചേർക്കുമ്പോഴും, ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം, കൃത്യങ്കത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയ അത്രയും മടങ്ങാകും. പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ:

ഒരു സംഖ്യയുടെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം, അതിനെ വ്യത്യസ്ത അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി പിരിച്ചെഴുതുന്നതിലെ ഓരോ കൃത്യങ്കത്തിനോടും ഒന്നു കൂട്ടിയ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമാണ്

ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തു നോക്കൂ:

(1) ചുവടെപ്പറയുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക:

(i) 40 (ii) 54 (iii) 60 (iv) 100 (v) 210

(2) ഒരു സംഖ്യയുടെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിൽനിന്ന് സംഖ്യയുടെ ചില സവിശേഷതകൾ പറയാൻ കഴിയും. ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം 5 വരെ ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിലുണ്ട്. തുടർന്ന് ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം 10 വരെ എഴുതി, പട്ടിക വലുതാക്കുക:

ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം	സംഖ്യയുടെ രൂപം	ബീജഗണിതരൂപം
1	1	
2	അഭാജ്യസംഖ്യ	
3	അഭാജ്യസംഖ്യയുടെ രണ്ടാംകൃതി	p^2 (p അഭാജ്യസംഖ്യ)
4	അഭാജ്യസംഖ്യയുടെ മൂന്നാംകൃതി	p^3 (p അഭാജ്യസംഖ്യ)
	രണ്ട് അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം	pq (p, q അഭാജ്യസംഖ്യകൾ)
5	അഭാജ്യസംഖ്യയുടെ നാലാംകൃതി	p^4 (p അഭാജ്യസംഖ്യ)

പൊതുഘടകങ്ങൾ

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ പൊതുഘടകങ്ങൾ എന്നാൽ എന്താണെന്ന് ഓർമ്മയുണ്ടോ ?

ഉദാഹരണമായി 12, 18 എന്നീ സംഖ്യകൾ എടുത്താൽ 2, 3, 6 എന്നീ സംഖ്യകൾ 12, 18 എന്നീ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെയും ഘടകങ്ങളാണ്; അതായത് ഇവ 12 ന്റെയും 18 ന്റെയും പൊതു ഘടകങ്ങളാണ്.

12 നും 18 നും ഇനി ഏതെങ്കിലും പൊതുഘടകമുണ്ടോ ?

1 എന്ന സംഖ്യ എല്ലാ സംഖ്യകളുടെയും ഘടകമാണല്ലോ.

ഇതുപോലെ 42, 70 ഇവയുടെ പൊതുഘടകങ്ങൾ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും ?

42 ന്റെയും 70 ന്റെയും എല്ലാ ഘടകങ്ങളും എഴുതാൻ അറിയാമല്ലോ. അതിൽനിന്ന് പൊതു ഘടകങ്ങൾ തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

കുറേക്കൂടി എളുപ്പത്തിൽ ഇതു ചെയ്യാം. ആദ്യം രണ്ടു സംഖ്യകളെയും അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാം:

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

$$70 = 2 \times 5 \times 7$$

ഇതിൽനിന്ന് 2 ഉം 7 ഉം 42, 70 എന്നീ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെയും ഘടകങ്ങളാണെന്നു കാണാമല്ലോ.

ഇനി 42 ൽ മിച്ചമുള്ള 3 എന്ന ഘടകം, 70 ന്റെ ഘടകമല്ല.

70 ൽ മിച്ചമുള്ള 5 എന്ന ഘടകം, 42 ന്റെ ഘടകവും അല്ല.

അപ്പോൾ 2 ഉം 7 ഉം മാത്രമാണോ പൊതുഘടകങ്ങൾ ?

$2 \times 7 = 14$ ഉം രണ്ടിന്റെയും ഘടകമാണല്ലോ ?

ഇനിയോ ?

അപ്പോൾ 1, 2, 7, 14 ഇവയാണ് 42 ന്റെയും 70 ന്റെയും പൊതു ഘടകങ്ങൾ.

കുറേക്കൂടി വലിയ സംഖ്യകൾ നോക്കാം: 504 ഉം 540 ഉം

ആദ്യം അഭാജ്യഘടകങ്ങളാക്കാം:

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

2, 3 എന്നീ അഭാജ്യസംഖ്യകളാണ് രണ്ടിലും ഉള്ളത്.

2 ന്റെ കൃതികൾ നോക്കുക. ആദ്യത്തെ സംഖ്യയിൽ 2^3. രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയിൽ 2^2

ഇതിൽ 2^2 എന്ന സംഖ്യ 2^3 ന്റെ ഘടകമാണല്ലോ. അപ്പോൾ അത് 504 ന്റെയും 540 ന്റെയും ഘടകമല്ലേ ?

ഇതുപോലെ 3 ന്റെ കൃതികൾ നോക്കിയാൽ, 3^2 രണ്ടു സംഖ്യകളുടെയും പൊതുഘടകമാണെന്നു കാണാം.

അപ്പോൾ $2^2 \times 3^2$ ഉം, അതിന്റെ ഘടകങ്ങളുമാണ് 504 ന്റെയും 540 ന്റെയും പൊതുഘടകങ്ങൾ വിസ്തരിച്ചെഴുതിയാൽ

1	2	2^2		1	2	4
3	2×3	$2^2 \times 3$	അതായത്	3	6	12
3^2	2×3^2	$2^2 \times 3^2$		9	18	36

ഒരു ഉദാഹരണം കൂടി നോക്കാം.

1260 ന്റെയും 1320 ന്റെയും പൊതുഘടകങ്ങൾ കണക്കാക്കുക

എന്തൊക്കെയാണ് ചെയ്യേണ്ടത് ?

(i) രണ്ടു സംഖ്യകളെയും വ്യത്യസ്ത അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക:

$$1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

$$1320 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 11$$

(ii) രണ്ടിലും പൊതുവായുള്ള അഭാജ്യസംഖ്യകൾ 2, 3, 5

(iii) രണ്ടു സംഖ്യകളിലുമുള്ള ഇവ ഓരോന്നിന്റെയും കൃതികളിലെ ചെറിയ കൃതികൾ 2^2, 3, 5

(iv) $2^2 \times 3 \times 5$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് പൊതുഘടകങ്ങൾ

ഇവ നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ഇങ്ങനെ പട്ടികയാക്കാം:

1	2	2^2		1	2	4
3	2×3	$2^2 \times 3$	അതായത്	3	6	12
5	2×5	$2^2 \times 5$		5	10	20
3×5	$2 \times 3 \times 5$	$2^2 \times 3 \times 5$		15	30	60

ഇവിടെ പൊതുഘടകങ്ങളിൽ ഏറ്റവും വലുത് 60 ആണല്ലോ. അതിന്റെ ഘടകങ്ങളാണ് മറ്റെല്ലാ പൊതുഘടകങ്ങളും.

നേരത്തെ ചെയ്ത ഉദാഹരണങ്ങളും നോക്കുക. എല്ലാറ്റിലും ഏറ്റവും വലിയ പൊതുഘടകത്തിന്റെ ഘടകങ്ങളാണോ മറ്റു പൊതുഘടകങ്ങൾ ?

ഇതുപോലെതന്നെ ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെയും പൊതുഘടകങ്ങൾ കണക്കാക്കിക്കൂടെ ?

ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

(1) ചുവടെയുള്ള സംഖ്യകളുടെയെല്ലാം ഏറ്റവും വലിയ പൊതുഘടകവും മറ്റു പൊതുഘടകങ്ങളും കണക്കാക്കുക:

(i) 45, 75 (ii) 225, 275 (iii) 360, 300 (iv) 210, 504 (v) 336, 588

(2) (i) രണ്ടു വ്യത്യസ്ത അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഏറ്റവും വലിയ പൊതുഘടകം എന്താണ് ?

(ii) രണ്ടു ഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഏറ്റവും വലിയ പൊതുഘടകം 1 ആകുമോ ?

(iii) രണ്ടു സംഖ്യകളെ അവയുടെ ഏറ്റവും വലിയ പൊതുഘടകം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഏറ്റവും വലിയ പൊതുഘടകം എന്താണ് ?

അന്വേഷണം

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ പൊതുവായ ഘടകങ്ങൾ പോലെതന്നെ പൊതുവായ ഗുണിതങ്ങളെക്കുറിച്ചും ആലോചിക്കാം. ഉദാഹരണമായി 2 ന്റെയും 3 ന്റെയും ഗുണിതങ്ങൾ നോക്കുക:

2 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...

3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...

രണ്ടിന്റെയും മൂന്നിന്റെയും ഗുണിതമായ സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

പൊതുഗുണിതങ്ങൾ : 6, 12, 18, ...

എന്തുകൊണ്ടാണ് 2 ന്റെയും 3 ന്റെയും പൊതുഗുണിതങ്ങൾ എല്ലാം 6 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളാകുന്നത് ?

മറിച്ച് 6 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ എല്ലാം, 2 ന്റെയും 3 ന്റെയും പൊതുഗുണിതങ്ങൾ ആണോ ? പൊതുഗുണിതങ്ങളെക്കുറിച്ച് ചുവടെപ്പറയുന്ന കാര്യങ്ങൾ ആലോചിച്ചുനോക്കൂ:

(1) 3 ന്റെയും 4 ന്റെയും പൊതുഗുണിതങ്ങൾ എല്ലാംതന്നെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയുടെ ഗുണിതങ്ങളാണോ ?

(2) 4 ന്റെയും 6 ന്റെയും പൊതുഗുണിതങ്ങൾ എല്ലാംതന്നെ 24 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ ആണോ ? അല്ലെങ്കിൽ ഏതു സംഖ്യയുടെ ഗുണിതങ്ങളാണ് ?

(3) രണ്ടു സംഖ്യകളെ വ്യത്യസ്ത അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതിക്കഴിഞ്ഞാൽ അതിൽനിന്ന് സംഖ്യകളുടെ ഏറ്റവും ചെറിയ പൊതുഗുണിതം കണക്കാക്കാൻ കഴിയുമോ ?

(4) രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ പൊതുഗുണിതങ്ങളെല്ലാം ഏറ്റവും ചെറിയ പൊതുഗുണിതത്തിന്റെ ഗുണിതങ്ങളാണോ ?

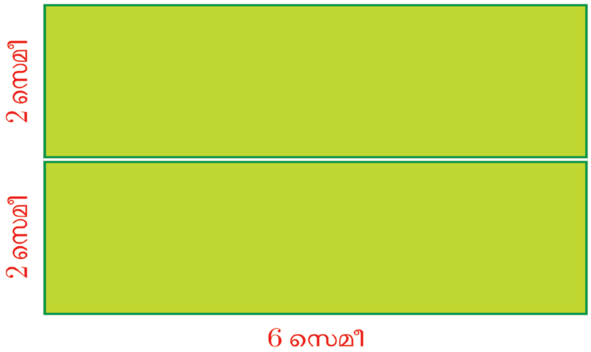
10 ത്രികോണപ്പരപ്പ്

മട്ടത്രികോണങ്ങൾ

ചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ അഞ്ചാംക്ലാസിൽ പഠിച്ചല്ലോ. ചുവടെയുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, നീളത്തിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമല്ലേ? അപ്പോൾ ഈ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $6 \times 4 = 24$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇതിനെ നടുവിൽക്കൂടി വിലങ്ങനെ മുറിച്ച്, രണ്ടു ചതുരമാക്കിയാലോ ?

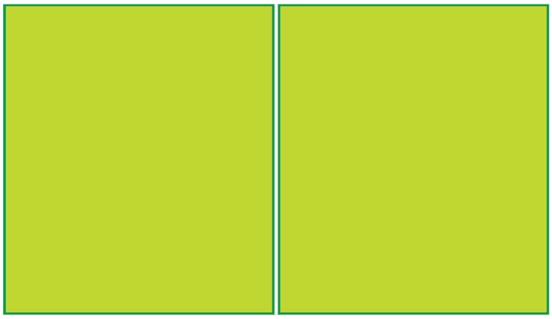


ഓരോ ചെറിയ ചതുരത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ? $6 \times 2 = 12$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കാം

മറ്റൊരു രീതിയിലും ഇതു കാണാം

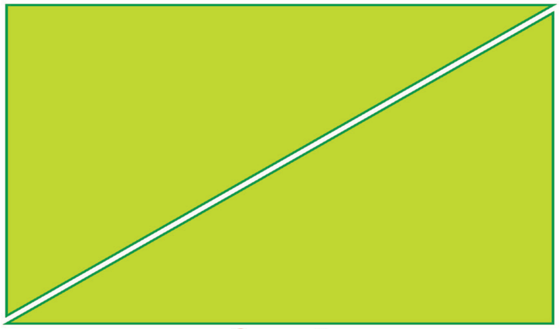
ഓരോ ചതുരവും, ആദ്യത്തെ വലിയ ചതുരത്തിന്റെ പകുതിയല്ലേ ? അപ്പോൾ പരപ്പളവും പകുതിയാകണമല്ലോ. ഇങ്ങനെ ആലോചിച്ചാൽ, പരപ്പളവ് $24 \times \frac{1}{2} = 12$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കാം

വലിയ ചതുരത്തിനെ ഇങ്ങനെ മുറിച്ചാലോ ?



ഓരോ ചെറിയ ചതുരത്തിന്റെയും നീളവും ഉയരവും നോക്കി, പരപ്പളവ്, $4 \times 3 = 12$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കാം; അല്ലെങ്കിൽ, ഓരോന്നും വലിയ ചതുരത്തിന്റെ പകുതി എന്നു കണ്ട്, പരപ്പളവ് $24 \times \frac{1}{2} = 12$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ എന്നും കണക്കാക്കാം

ഇനി ചതുരത്തിനെ മുറിക്കുന്നത് ഇങ്ങനെയാണെങ്കിലോ ?



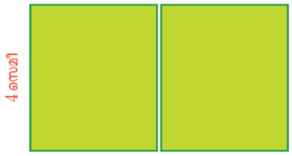
മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന കഷണങ്ങൾ ചതുരങ്ങളല്ല, ത്രികോണങ്ങളാണ്; എന്നാലും ഓരോന്നും ചതുരത്തിന്റെ പകുതിതന്നെയല്ലേ ?

പരപ്പളവും ചുറ്റളവും

ചതുരത്തിനെ വിലങ്ങനെ മുറിച്ചപ്പോൾ, പകുതി പരപ്പളവുള്ള രണ്ടു ചതുരങ്ങൾ കിട്ടിയില്ലേ ?

ചെറിയ ചതുരങ്ങളുടെ ചുറ്റളവും, വലിയ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയാണോ ? കണക്കാക്കി നോക്കൂ

ചതുരത്തിനെ ഇങ്ങനെ മുറിച്ചാലോ ?

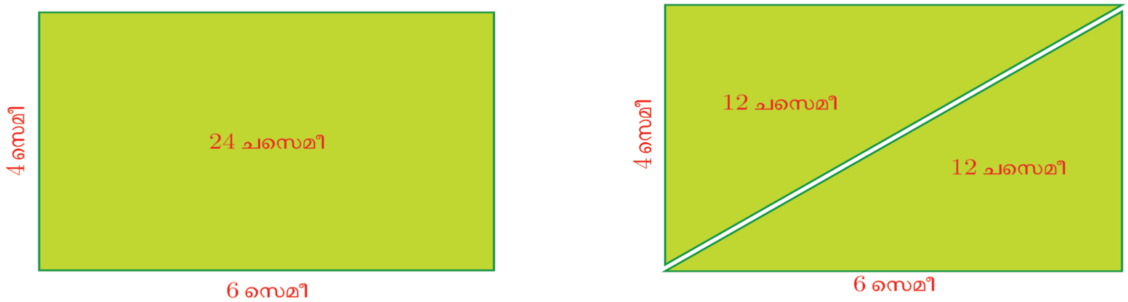


ഈ ചെറിയ ചതുരങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ് ?

വലിയ ചതുരത്തിൽനിന്ന് പകുത് ചുറ്റളവുള്ള ഒരു ചതുരം മുറിച്ചെടുക്കാൻ കഴിയുമോ ?

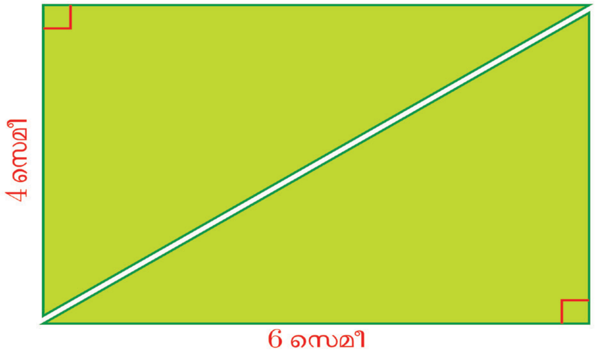
കട്ടിക്കടലാസിൽ ഒരു ചതുരം മുറിച്ചെടുത്ത്, അതിനെ ഇങ്ങനെ കോണോടുകോൺ മുറിച്ചുകിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ ഒന്നിനു മേൽ മറ്റൊന്നായി വച്ചു നോക്കൂ; കൃത്യമായി ചേർന്നിരിക്കുന്നില്ലേ ?

അപ്പോൾ ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ്, $24 \times \frac{1}{2} = 12$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ തന്നെ



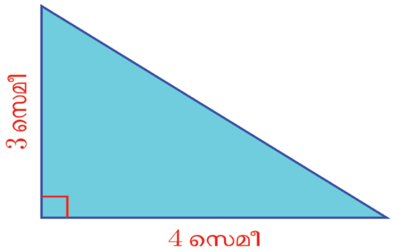
ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും എന്തെങ്കിലും സവിശേഷത കാണുന്നുണ്ടോ ?

ചതുരത്തിന്റെ അടുത്തടുത്തുള്ള വശങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ ത്രികോണങ്ങൾ ഓരോന്നിലും രണ്ടു വശങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമാണ്.



മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഈ ത്രികോണങ്ങൾ ഓരോന്നിലും, ഒരു കോൺ മട്ടമാണ്. ഇത്തരം ത്രികോണത്തിനെ **മട്ടത്രികോണം** (right triangle) എന്നാണു പറയുന്നത്.

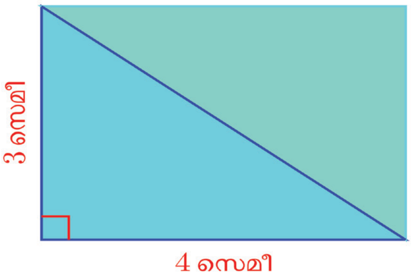
ഈ മട്ടത്രികോണം നോക്കൂ:



ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാമോ ?

ഇതിനെ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ പകുതിയായി കാണാമല്ലോ.

അതായത്, ഇതേപോലെയുള്ള മറ്റൊരു മട്ടത്രികോണം ഇതിന്റെ മുകളിൽ ചേർത്തുവച്ച്, ഇതിനെ ഒരു ചതുരമാക്കാം



ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $4 \times 3 = 12$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ; അതിന്റെ പകുതിയാണ് ത്രികോണം. അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $12 \times \frac{1}{2} = 6$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ഇങ്ങനെ ഏതു മട്ടത്രികോണത്തിനെയും ഒരു ചതുരത്തിന്റെ പകുതിയായി കാണാം. അതിൽ

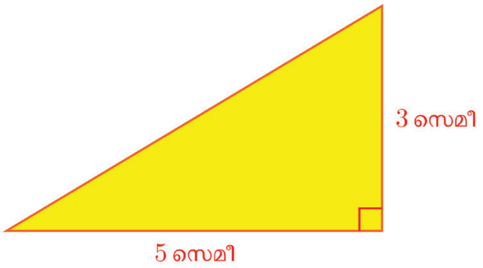
നിന്ന് ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയാണ് ?

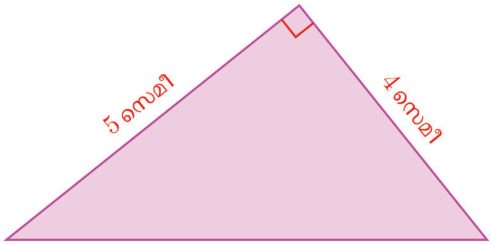
- മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളാണ് ചതുരത്തിന്റെ നീളവും ഉയരവും
- ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, നീളത്തിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലം
- മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ പകുതി

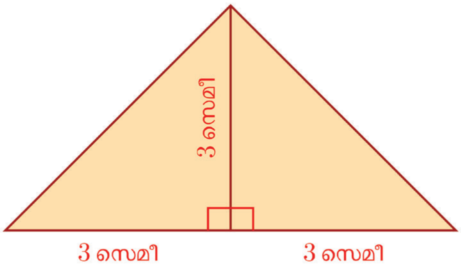
ഇതെല്ലാം ചേർത്തു വായിച്ചാൽ, ചതുരം സങ്കൽപ്പിക്കാതെതന്നെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാം:

> ഏതു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്, ലംബവശങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്

ഇനി ചുവടെയുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാമല്ലോ.

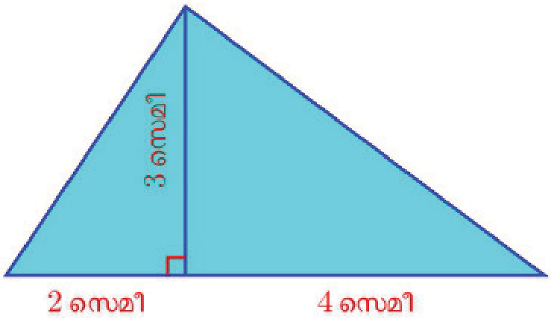




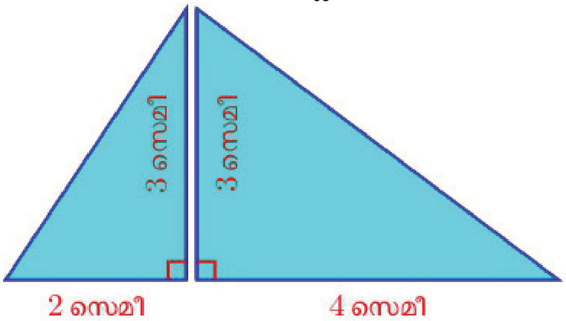


പാദവും ഉയരവും

ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?



രണ്ടു ചെറിയ മട്ടത്രികോണങ്ങൾ ചേർന്നതാണല്ലോ ഈ വലിയ ത്രികോണം:



ഈ മട്ടത്രികോണങ്ങൾ ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാം.

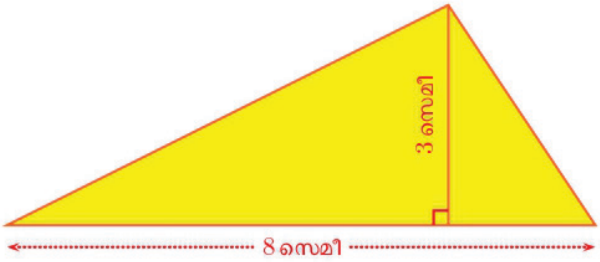
ചെറിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3$ ചസെമീ

വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6$ ചസെമീ

ഇവ കൂട്ടിയാൽ ആദ്യം കണ്ട വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കിട്ടും.

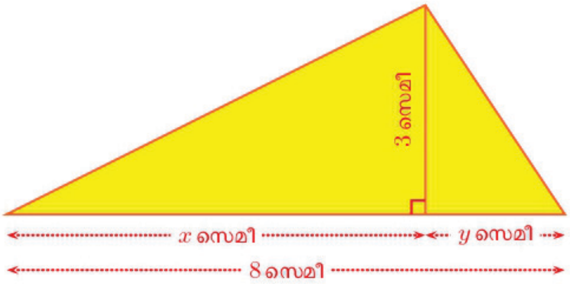
വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= 3 + 6 = 9$ ചസെമീ

ഇനി ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?



ആദ്യം ചെയ്തതുപോലെ കണക്കാക്കാൻ, ഇതിൽ മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ താഴത്തെ വശങ്ങൾ അറിയില്ലല്ലോ.

അത് x സെന്റിമീറ്റർ എന്നും y സെന്റിമീറ്റർ എന്നും എടുക്കാം.



അപ്പോൾ

വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= x \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ചെറിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= y \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}y$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

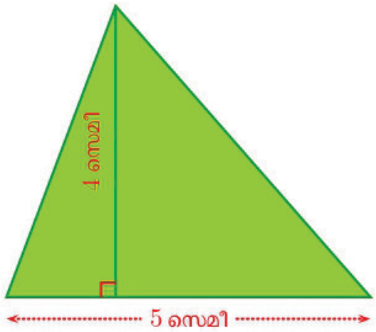
മൊത്തം പരപ്പളവ് കിട്ടാൻ ഇവ രണ്ടും കൂട്ടണം:

$$\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}(x + y)$$

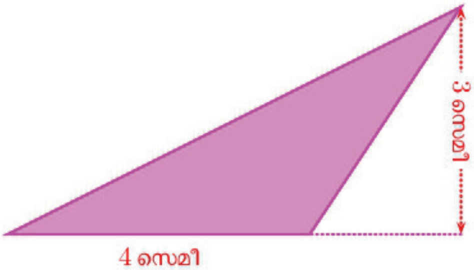
$x + y = 8$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\frac{3}{2} \times 8 = 12 \text{ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ}$$

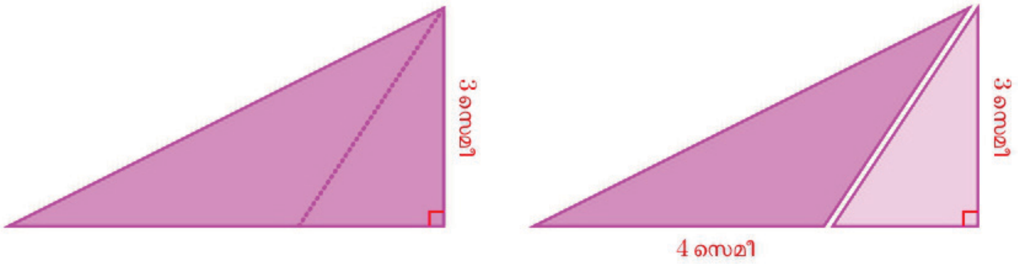
ഇതുപോലെ ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാമോ ?



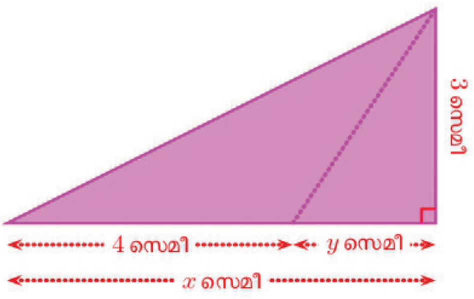
ത്രികോണം ഇങ്ങനെ ആയാലോ ?



ഇതുവരെയുള്ള കണക്കുകളിലെല്ലാം ത്രികോണത്തെ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ ചേർത്തു വച്ചതായിട്ടാണ് കണ്ടത്; ഈ ത്രികോണത്തെ ഒരു വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന് ഒരു ചെറിയ മട്ടത്രികോണം മുറിച്ചു മാറ്റിയതായി കാണണം:



വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം x സെന്റിമീറ്റർ എന്നും, ചെറിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം y സെന്റിമീറ്റർ എന്നും എടുക്കാം:



അപ്പോൾ

വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= x \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

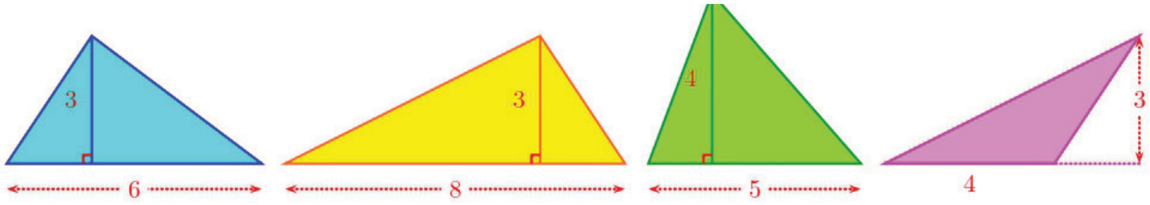
ചെറിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= y \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}y$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കിട്ടാൻ, വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിൽ നിന്ന് ചെറിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കുറയ്ക്കണം:

$$\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}(x - y)$$

$x - y = 4$ ആയതിനാൽ ഇത്, $\frac{3}{2} \times 4 = 6$ ആകും. അതായത്, ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 6 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ഇപ്പോൾ ചെയ്ത കണക്കുകളെല്ലാം ഒരുമിച്ചു നോക്കാം



പരപ്പളവ് $\frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$

പരപ്പളവ് $\frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$

പരപ്പളവ് $\frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$

പരപ്പളവ് $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$

ത്രികോണങ്ങളുടെ ഈ അളവുകൾ മാറിയാലും, പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിച്ച രീതിയ്ക്ക് മാറ്റമൊന്നും ഉണ്ടാകില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുന്നതിനെക്കുറിച്ച് പൊതുവായി ഇങ്ങനെ പറയാം:

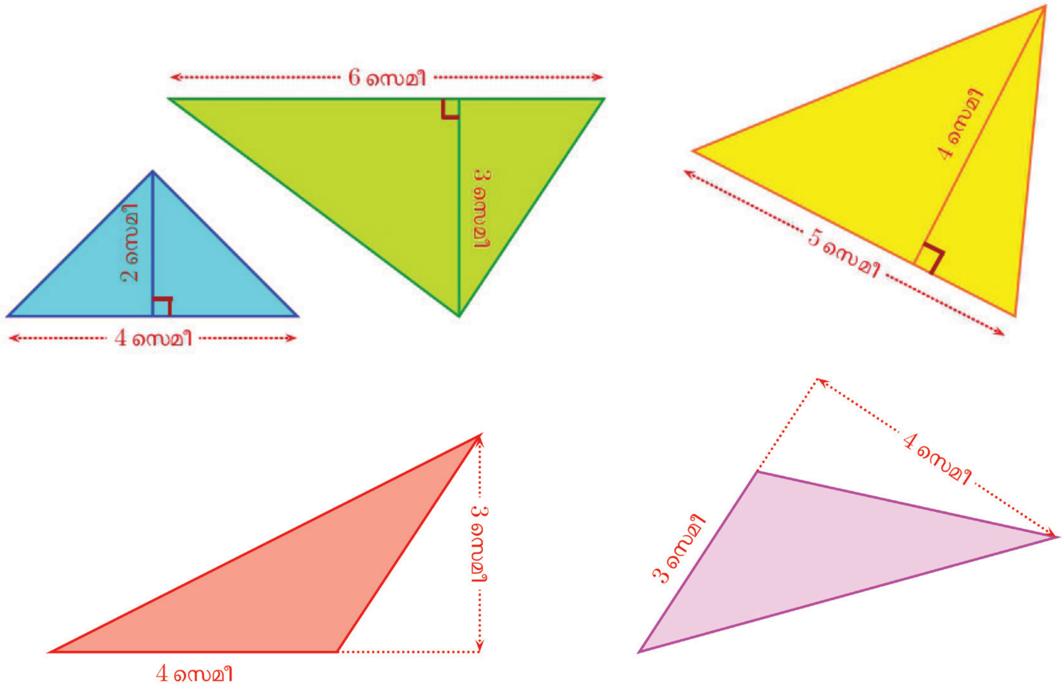
> ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്, ഒരു വശത്തിന്റെയും, ആ വശത്തിൽനിന്ന് എതിർ മൂലയിലേക്കുള്ള ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന വശത്തിന് പാദം എന്നും (base) എതിർമൂലയിലേക്കുള്ള ഉയരത്തിന് ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം (height or altitude) എന്നും പേരിട്ടാൽ, ഇത് അല്പം ചുരുക്കി ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

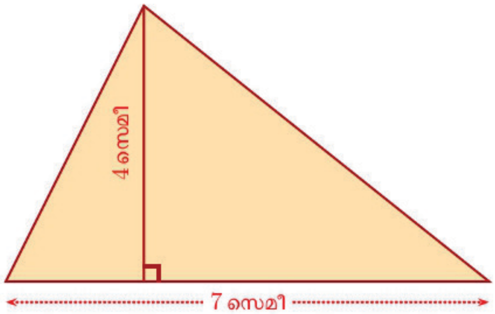
> ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്, പാദത്തിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തു നോക്കൂ

(1) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



(2) ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?



(i) ഇതേ പരപ്പളവുള്ള ഒരു മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(ii) ഇതേ പരപ്പളവുള്ളതും, ഒരു കോൺ മട്ടത്തേക്കാൾ വലുതും ആയ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

പാദത്തിന്റെ നീളം 6 ഉം പരപ്പളവ് 12 ഉം ആയ ഒരു ത്രികോണം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക. ഇത്തരം ഒരു മട്ടത്രികോണവും രണ്ടു വശങ്ങൾ തുല്യമായ മറ്റൊരു ത്രികോണവും വരയ്ക്കുക. (ഗ്രിഡ് ഉപയോഗിച്ചാൽ എളുപ്പത്തിൽ വരയ്ക്കാൻ കഴിയും)

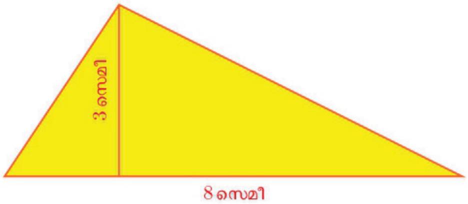
സമാന്തരവരകൾ

ഒരു വശം 8 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററും ആയ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാമോ ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

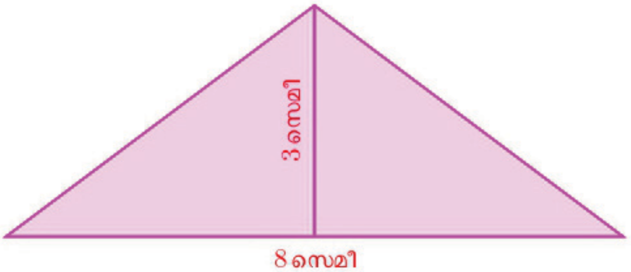
- പാദം 8 സെന്റിമീറ്റർ എന്നെടുക്കാം
  - * പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആകണമെങ്കിൽ, ഉയരം എത്രയാകണം ?
  - * പാദവും ഉയരവും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചാൽ, പരപ്പളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് കിട്ടണ്ടേ ?
- ഉയരം 3 സെന്റിമീറ്റർ

(ഇത്തരം ഒരു ത്രികോണം നേരത്തെ കണ്ടത് ഓർമ്മ യുണ്ടോ ?)



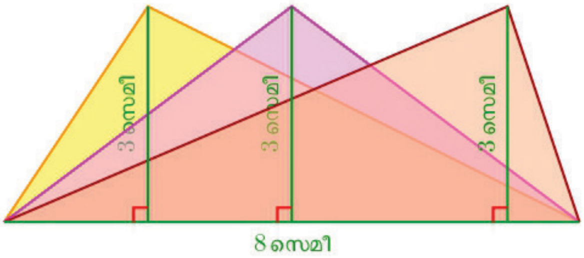
അപ്പോൾ ഇങ്ങനെയൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ, ആദ്യം 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വര വരച്ച്, അതിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരത്തിൽ ലംബം വരയ്ക്കുക. ലംബത്തിന്റെ മുകളറ്റം, താഴത്തെ വരയുടെ അറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ നമുക്കു വേണ്ട ത്രികോണമായില്ലേ ?

ലംബത്തിന്റെ സ്ഥാനം മാറ്റി ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാമല്ലോ.



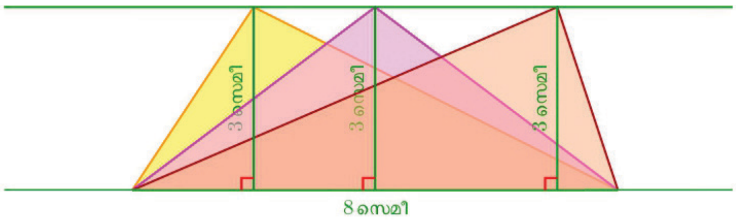
ഇവയുടെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ നീളം മാറിയിട്ടുണ്ട്. പാദവും ഉയരവും പഴയതുതന്നെ ആയതിനാൽ പരപ്പളവ് മാറിയിട്ടുമില്ല.

ഇങ്ങനെ പല ലംബങ്ങൾ വരച്ച്, ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങൾ പലതും വരയ്ക്കാമല്ലോ:

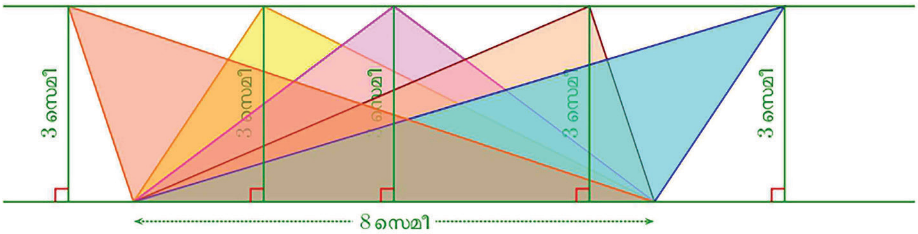


ജിയോജിബ്രയിൽ, നീളം 8 ആയ AB എന്ന ഒരു വര വരച്ച് അതിനു മുകളിലായി 3 അകലത്തിൽ C എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുവിലൂടെ AB ക്ക് സമാന്തരമായി ഒരു വര വരയ്ക്കുക (Parallel Line ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് AB യിലും C യിലും ക്ലിക്കു ചെയ്താൽ മതി). ഈ വരയിൽ ഒരു ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണം ABD വരയ്ക്കുക. Area ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്കു ചെയ്താൽ അതിന്റെ പരപ്പളവ് കാണാൻ സാധിക്കും. D യുടെ സ്ഥാനം വരയിലൂടെ മാറ്റി നോക്കൂ, പരപ്പളവ് മാറുന്നുണ്ടോ ? Distance or Length ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്കുചെയ്താൽ ചുറ്റളവ് കാണാം. ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ് ? D യുടെ സ്ഥാനം എവിടെയാകുമ്പോഴാണ് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചുറ്റളവ് ?

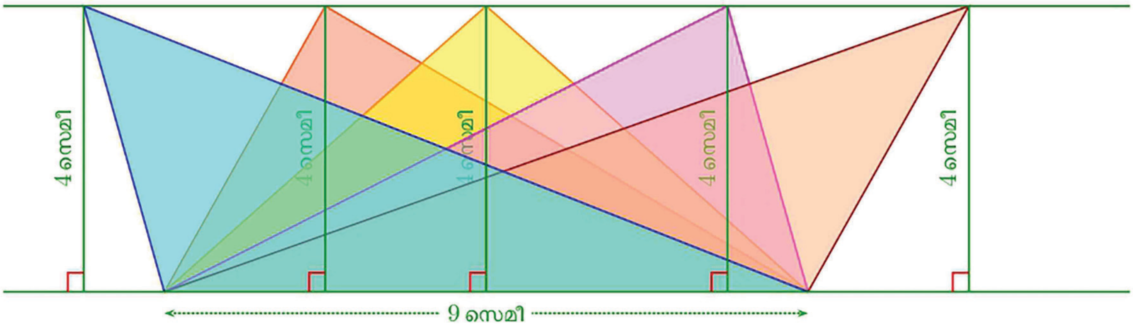
ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം മുകളിലെ മൂലകൾ, പാദത്തിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലല്ലേ? അപ്പോൾ, അവ യോജിപ്പിച്ചാൽ, പാദത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വര കിട്ടുമല്ലോ:



ഈ വര നീട്ടി, അതിലെ ഏതു ബിന്ദുവും താഴത്തെ വരയുടെ അറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ, പാദം 8 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 3 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ത്രികോണം കിട്ടും; അതായത്, പാദം 8 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമായ ത്രികോണം:



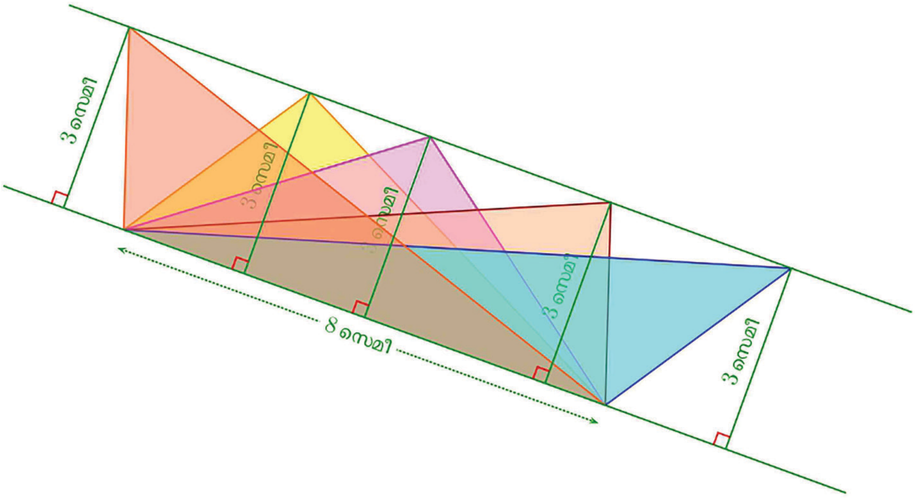
പാദവും പരപ്പളവും മാറ്റിയാലും ഇതുപോലെതന്നെ വരയ്ക്കാമല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, പാദം 9 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 18 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമായ ത്രികോണങ്ങൾ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം:



ഇത് ഒരു പൊതുതത്വമായി ഇങ്ങനെ പറയാം:

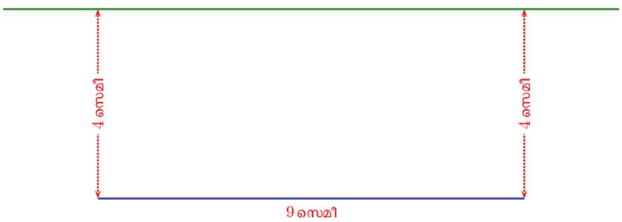
> ഒരേ പാദവും, മൂന്നാം മൂലകളെല്ലാം പാദത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലും ആയ ത്രികോണങ്ങൾക്കെല്ലാം ഒരേ പരപ്പളവാണ്.

ഈ ചിത്രങ്ങളിൽ എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളുടെയും പാദം വിലങ്ങനെയാണ് വരച്ചിരിക്കുന്നത്. അല്പം ചരിച്ചു വരച്ചാലും ഇപ്പറഞ്ഞതു ശരിയാണ്.



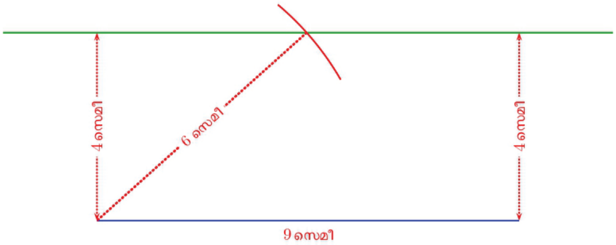
ഇനി ഈ തത്വത്തിന്റെ ചില പ്രയോഗങ്ങൾ നോക്കാം:

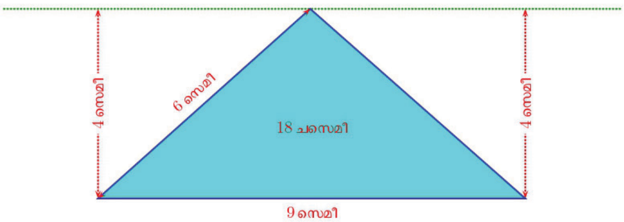
ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 9 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 18 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമായി കുറേ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചല്ലോ. മറ്റൊരു വശം 6 സെന്റിമീറ്റർ ആകണം എന്നു കൂടി പറഞ്ഞാലോ?



ചിത്രം നോക്കൂ. മുകളിലെ വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവും, താഴത്തെ വരയുടെ അറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിച്ച്, 18 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ത്രികോണം വരയ്ക്കാം:

അത്തരമൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശം 6 സെന്റിമീറ്റർ ആകണമെങ്കിലോ?

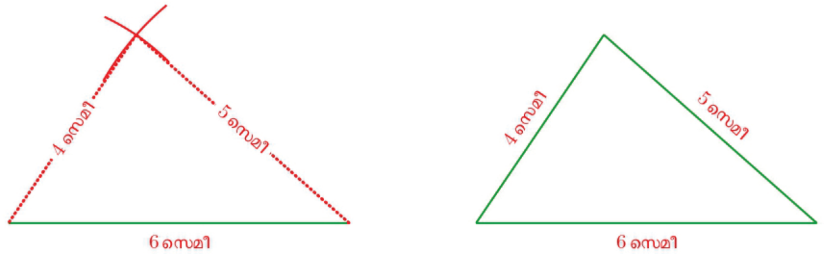




ഇതുപോലെ വലതുവശം 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കാമോ?

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം

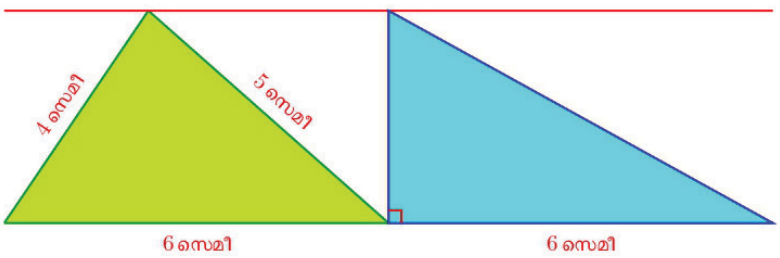
വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്റർ, 5 സെന്റിമീറ്റർ, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ അറിയാമല്ലോ



ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ ഉയരം അളക്കണം.

പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാതെതന്നെ, ഇതേ പരപ്പളവുള്ള മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കാമോ ?

രണ്ടിന്റെയും പാദവും ഉയരവും തുല്യമായാൽ മതിയല്ലോ. ഉയരം തുല്യമാക്കാൻ ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ മുകളിലെ മൂലയിലൂടെ താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായ വര വരച്ചാൽ മതി:



പാദം 4 സെന്റിമീറ്റർ ആയി ഇതേ പരപ്പളവുള്ള മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കാമോ ?

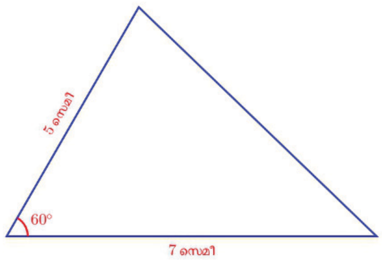
പാദം 5 സെന്റിമീറ്റർ ആയി വരയ്ക്കണമെങ്കിലോ ?

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

(1) വശങ്ങളുടെ നീളം 3, 4, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇതേ പരപ്പളവുള്ള മൂന്നു വ്യത്യസ്ത മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

(2) രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററും, 6 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും ആയ എത്ര വ്യത്യസ്ത ത്രികോണം വരയ്ക്കാം ? പരപ്പളവ് 24 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ ?

(3) ചുവടെക്കാണുന്ന ത്രികോണം നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കുക.



ഇതേ പരപ്പളവുള്ള *ABP, BCQ, CAR* എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ വരയ്ക്കുക.

(i) $\angle BAP = 90°$ (ii) $\angle CBQ = 60°$

(iii) $\angle ACR = 30°$

11 സമചതുരങ്ങളും മട്ടത്രികോണങ്ങളും

സമചതുരപ്പരപ്പ്

വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 3 മീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

$3 \times 3 = 9$ ചതുരശ്രമീറ്റർ, അല്ലേ ?

വശങ്ങളുടെ നീളം $1\frac{1}{2}$ മീറ്റർ ആയാലോ ?

$$\begin{aligned} 1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} &= \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{9}{4} \\ &= 2\frac{1}{4} \end{aligned}$$

പരപ്പളവ് $2\frac{1}{4}$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

വശങ്ങളുടെ നീളം 1.2 മീറ്റർ ആയാലോ ?

$$\begin{aligned} 1.2 \times 1.2 &= \frac{12}{10} \times \frac{12}{10} \\ &= \frac{144}{100} \\ &= 1.44 \end{aligned}$$

പരപ്പളവ് 1.44 ചതുരശ്രമീറ്റർ.

ഈ കണക്കുകളിലെല്ലാം ഒരു സംഖ്യയെ അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിക്കുകയാണല്ലോ ചെയ്തത്; മറ്റൊരുവിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, 3^2, $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$, $(1.2)^2$ എന്നിങ്ങനെ സംഖ്യകളുടെ രണ്ടാംകൃതികളാണ് കണക്കാക്കിയത്.

പൊതുവെ ഒരു സംഖ്യയുടെ രണ്ടാംകൃതിയെ, ആ സംഖ്യയുടെ വർഗം (square) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി,

$$3 \times 3 = 3^2 \qquad \text{3 ന്റെ വർഗം}$$

$$1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 \qquad 1\frac{1}{2} \text{ ന്റെ വർഗം}$$

$$1.2 \times 1.2 = (1.2)^2 \qquad \text{1.2 ന്റെ വർഗം}$$

അപ്പോൾ ഏതു സമചതുരത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്, അതിന്റെ വശത്തിന്റെ വർഗമാണെന്നു പറയാം.

മറിച്ചൊരു ചോദ്യം:

25 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ, വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയായി എടുക്കണം ?

വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ വർഗമാണ് പരപ്പളവ്; അപ്പോൾ ചോദ്യം ഇതാണ്:

ഏതു സംഖ്യയുടെ വർഗമാണ് 25 ?

കുറേക്കൂടി വ്യക്തമായി പറഞ്ഞാൽ,

ഏതു സംഖ്യയെ അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിച്ചാലാണ് 25 കിട്ടുക ?

അല്പമൊന്ന് ആലോചിച്ചാൽ, $5 \times 5 = 25$ എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ, വശത്തിന്റെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ.

ഇവിടെ, ഏതു സംഖ്യയുടെ വർഗമാണ് 25 എന്ന ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരമായിട്ടാണ് 5 കിട്ടിയത്. ഇതു മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറയാം:

25 ന്റെ വർഗമൂലം (square root) ആണ് 5.

5 ന്റെ വർഗം 25 എന്നതിനെ ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത്

$$5^2 = 25$$

എന്നാണല്ലോ; ഇതു തിരിച്ചു പറയുന്നത്, 25 ന്റെ വർഗമൂലം 5 എന്നാണ്; ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് $\sqrt{\ }$ എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ചാണ്. അതായത്,

$$\sqrt{25} = 5$$

നേരത്തെ ചെയ്ത കണക്കുകളെയും ഇത്തരത്തിൽ തിരിച്ചെഴുതാം:

$9 = 3 \times 3 = 3^2$	3 ന്റെ വർഗം 9	$\sqrt{9} = 3$	9 ന്റെ വർഗമൂലം 3
$2\frac{1}{4} = 1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} = \left(1\frac{1}{2}\right)^2$	$1\frac{1}{2}$ ന്റെ വർഗം $2\frac{1}{4}$	$\sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$ ന്റെ വർഗമൂലം $1\frac{1}{2}$
$1.44 = 1.2 \times 1.2 = (1.2)^2$	1.2 ന്റെ വർഗം 1.44	$\sqrt{1.44} = 1.2$	1.44 ന്റെ വർഗമൂലം 1.2

സംഖ്യകളുടെ വർഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് അത്ര എളുപ്പമല്ല. ചെറിയ എണ്ണൽസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ, വർഗങ്ങൾ ഓരോന്നായി നോക്കി കണ്ടുപിടിക്കാം. അല്പം വലിയ എണ്ണൽസംഖ്യകളെ ഘടകങ്ങളാക്കി ഇതു കണക്കാക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ഈ കണക്കു നോക്കുക:

196 ചതുരശ്രമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

ഇവിടെ ഏതു സംഖ്യയുടെ വർഗമാണ് 196 എന്നു കണക്കാക്കണം; അതായത്, 196 ന്റെ വർഗമൂലം കണക്കാക്കണം.

196 നെ ഘടകക്രിയ ചെയ്ത്

$$196 = 2 \times 2 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 7^2$$

എന്നെഴുതാം. കൃതികളുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലത്തിന്റെ കൃതി ആണെന്ന് **ആവർത്തന ഗുണനം** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (ഏതു എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും, $x^n y^n = (xy)^n$)

അപ്പോൾ,

$$196 = 2^2 \times 7^2 = (2 \times 7)^2 = 14^2$$

ഇതു തിരിച്ചെഴുതിയാൽ,

$$\sqrt{196} = 14$$

അതായത് സമചതുരത്തിന്റെ വശം 14 മീറ്റർ

ഈ രീതി ഉപയോഗിച്ചുതന്നെ ചുവടെയുള്ള കണക്കും ചെയ്യാമല്ലോ.

1.96 ചതുരശ്രമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

$$1.96 = \frac{196}{100} = \frac{14^2}{10^2} = \left(\frac{14}{10}\right)^2 = (1.4)^2$$

ഇതു തിരിച്ചെഴുതിയാൽ, $\sqrt{1.96} = 1.4$

അതായത്, വശത്തിന്റെ നീളം 1.4 മീറ്റർ

ചുവടെപ്പറയുന്ന പരപ്പളവുകളുള്ള സമചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കി നോക്കൂ. ഉത്തരങ്ങൾ, സംഖ്യകളുടെ വർഗമൂലമായി എഴുതുക:

(i) 49 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

(ii) 169 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

(iii) 400 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

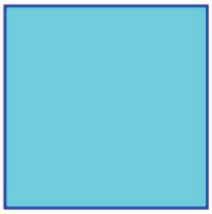
(iv) 225 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

(v) 1.69 ചതുരശ്രമീറ്റർ

(vi) $6\frac{1}{4}$ ചതുരശ്രമീറ്റർ

ഇരട്ടിപ്പരപ്പ്

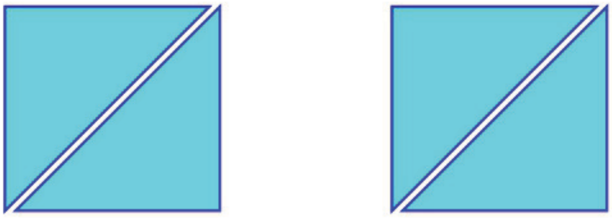
കട്ടിക്കടലാസിൽ ഒരു സമചതുരം വെട്ടിയെടുക്കുക:



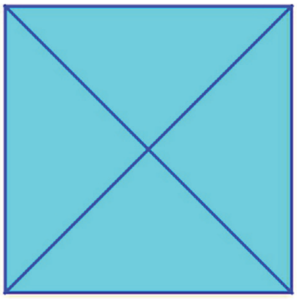
ഇതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം ഉണ്ടാക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

ഈ സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം അളന്നാൽ, അതിന്റെ വർഗമായി പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാം; പരപ്പളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് കണക്കാക്കി, അതിന്റെ വർഗമൂലമെടുത്താൽ, ഇപ്പറഞ്ഞ വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കിട്ടും.

അളക്കുകയോ, കണക്കുകൂട്ടുകയോ ചെയ്യാതെ ഇത്തരമൊരു വലിയ സമചതുരം ഉണ്ടാക്കാം. അതിന് ആദ്യം ഇതേ വലുപ്പത്തിൽ മറ്റൊരു സമചതുരം വെട്ടിയെടുക്കുക (പരപ്പളവ് ഇരട്ടിക്കണമല്ലോ). രണ്ടു സമചതുരങ്ങളെയും വികർണ്ണത്തിലൂടെ മുറിക്കുക.



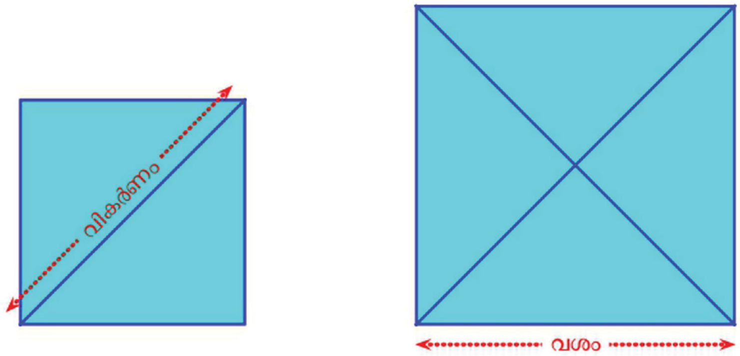
ഈ നാലു മട്ടത്രികോണങ്ങളെ ഇങ്ങനെ അടുക്കുക.



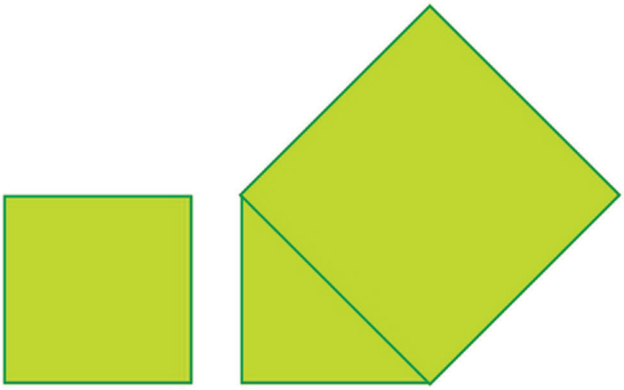
ആദ്യത്തെ രണ്ടു സമചതുരത്തിന്റെയും ഭാഗങ്ങളെല്ലാം ഉപയോഗിച്ചാണ് വലിയ ചതുരം ഉണ്ടാക്കിയത്; അതിനാൽ അതിന്റെ പരപ്പളവ്, ഒരു ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്.

മറ്റൊരു തരത്തിലും ഇതു കാണാം: ഒരുപോലെയുള്ള രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് ഓരോ ചെറിയ സമചതുരവും; വലിയ സമചതുരം ഇത്തരം നാലു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ ചേർന്നതാണ്.

വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ വശം, ചെറിയ സമചതുരങ്ങളുടെ ഏതെങ്കിലും അളവാണോ ?

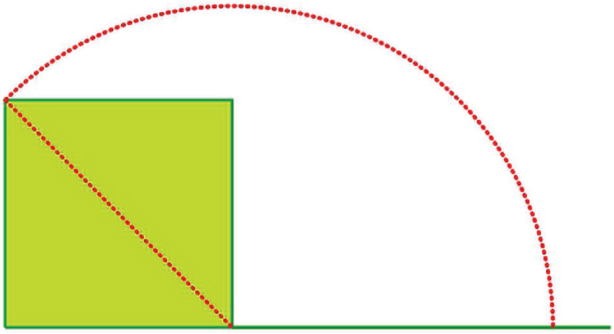


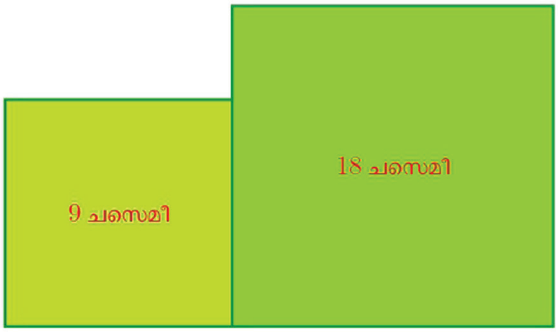
അപ്പോൾ ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുകയാണ് ആവശ്യമെങ്കിൽ, വികർണ്ണം വശമായി ഒരു സമചതുരം വരച്ചാൽ മതി.



ജിയോജിബ്രയിൽ *Regular Polygon* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിൽ ക്ലിക്കുചെയ്ത് മൂലകളുടെ എണ്ണം 4 എന്ന് നൽകി സമചതുരം വരയ്ക്കാം. ഇങ്ങനെ ഒരു സമചതുരം *ABCD* വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ ഒരു വികർണ്ണം വശമായി മറ്റൊരു സമചതുരവും വരയ്ക്കുക (*Regular Polygon* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് *D*, *B* എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ക്ലിക്കുചെയ്താൽ മതി). രണ്ടു സമചതുരങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ് കാണുക (*Area* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് സമചതുരങ്ങൾക്കുള്ളിൽ ക്ലിക്കുചെയ്താൽ മതി). പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ് ? ആദ്യം വരച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം മാറ്റിനോക്കൂ (*B* എന്ന മൂലയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിയാൽ മതി).

രണ്ടു സമചതുരവും വെവ്വേറെ കാണണമെങ്കിൽ, ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും വശം നീട്ടി, അതിൽ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തി, വലിയ സമചതുരം വരയ്ക്കാം:





ഇതുപോലെ ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന പരപ്പളവുകൾ ഉള്ള സമചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കാമല്ലോ:

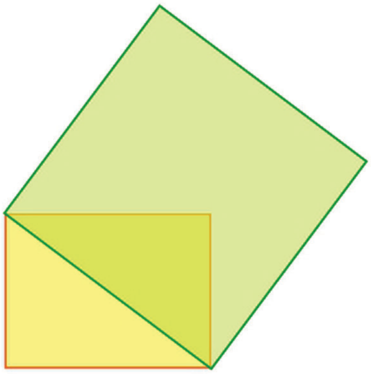
(i) 32 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ (ii) 50 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

(iii) 12.5 ചതുരശ്രമീറ്റർ (iv) $24\frac{1}{2}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

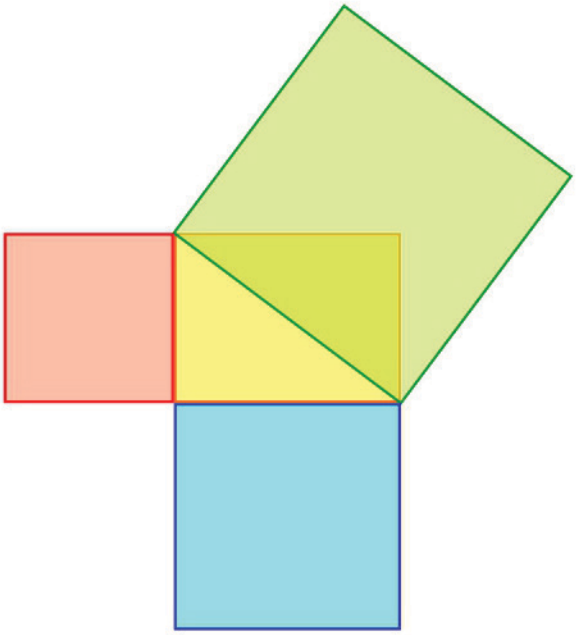
ചതുരവും സമചതുരവും

സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് രണ്ടു മടങ്ങാണെന്നു കണ്ടു.

വശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമല്ലാത്ത ചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിൽ സമചതുരം വരച്ചാലോ ?

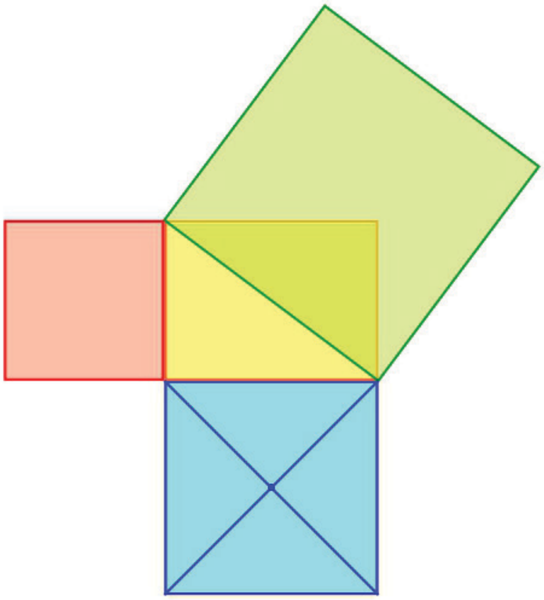


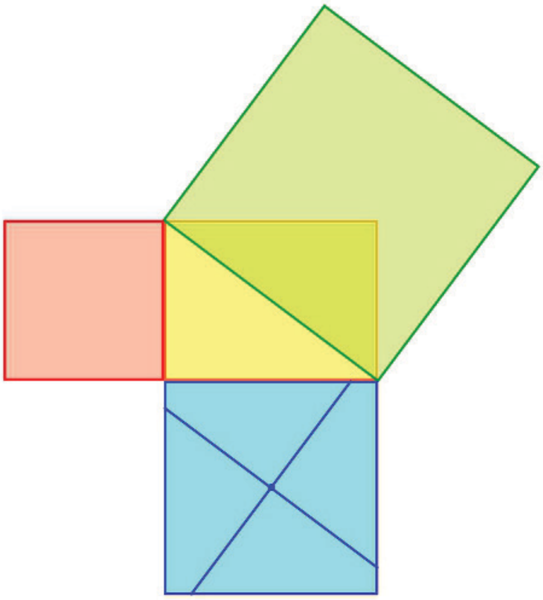
ഈ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുമായാണ് ബന്ധം:



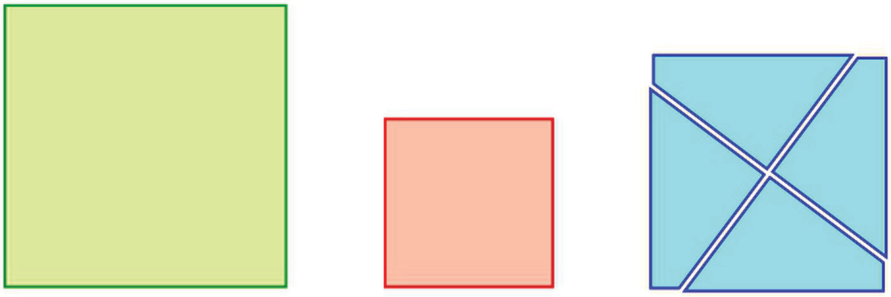
അത് മനസ്സിലാക്കാൻ ഒരു ചതുരവും, അതിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളിലും വികർണ്ണത്തിലും സമചതുരങ്ങളും മുകളിലെ ചിത്രത്തിലെപ്പോലെ കട്ടിക്കടലാസിൽ വരയ്ക്കുക.

ഇത് മുറിച്ചെടുക്കുന്നതിനു മുമ്പ്, ചില വരകൾ കൂടി വരയ്ക്കണം. ആദ്യം താഴത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങൾ വരച്ച്, അവ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്തുക. പിന്നീട് ഈ വികർണ്ണങ്ങൾ മായ്ച്ചുകളഞ്ഞ്, ആദ്യം അടയാളപ്പെത്തിയ കുത്തിലൂടെ, വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായ വരകൾ വരയ്ക്കുക:

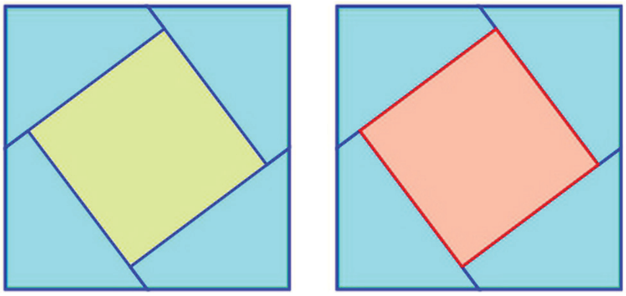




ഇനി ഈ മൂന്നു സമചതുരങ്ങളും വെട്ടിയെടുക്കുക; നീല സമചതുരത്തെ, അതിനുള്ളിൽ വരച്ച വരകളിലൂടെ നാലായി മുറിക്കുക:



നീലച്ചതുരത്തിന്റെ ഈ കഷണങ്ങളും, ചുവന്ന ചതുരം മുഴുവനായും, പച്ചച്ചതുരത്തിനുള്ളിൽ ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ വച്ചുനോക്കൂ:



ജിയോജിബ്രയിൽ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കുക. (*Grid* ഉപയോഗിച്ചാൽ എളുപ്പത്തിൽ വരയ്ക്കാം.) *Regular Polygon* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളിലും വികർണ്ണത്തിലും സമചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഇവയുടെ പരപ്പളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. പരപ്പളവുകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം ? ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം മാറ്റിനോക്കൂ.

ഇതുപോലെ മറ്റു ചതുരങ്ങളും, വശങ്ങളിലെയും വികർണ്ണത്തിലെയും സമചതുരങ്ങളും വെട്ടിയെടുത്ത് പരിശോധിച്ചുനോക്കൂ. വശങ്ങളിലെ സമചതുരങ്ങൾകൊണ്ട് വികർണ്ണത്തിലെ സമചതുരം കൃത്യമായി നിറയ്ക്കാമല്ലോ.

അപ്പോൾ ഈ മൂന്നു സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളെക്കുറിച്ച് പൊതുവെ എന്തു പറയാം ?

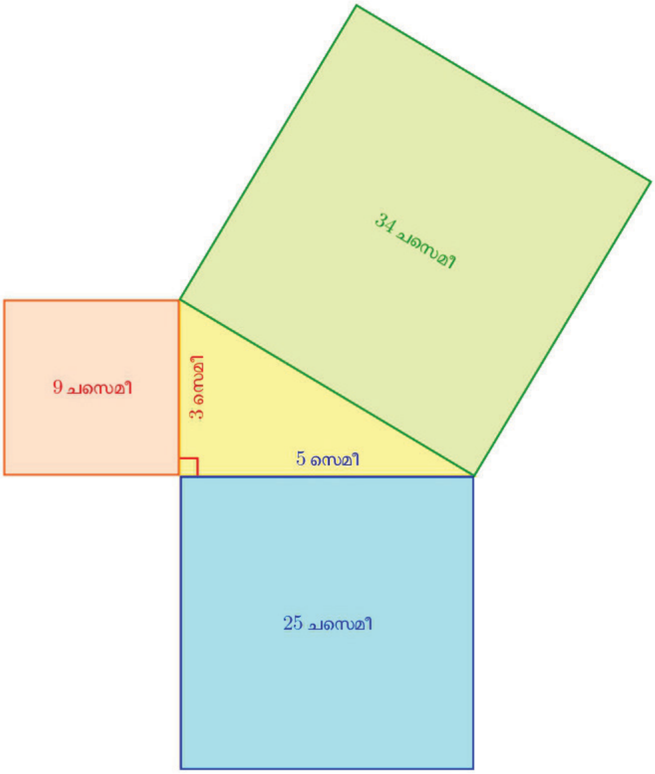
ഏതു ചതുരത്തിന്റെയും വികർണത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, അടുത്തടുത്ത രണ്ടു വശങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണ്

ഇത് മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറയാം.

ഏതു ചതുരത്തിന്റെയും രണ്ടു വശങ്ങളും വികർണ്ണവും ചേർന്ന് ഒരു മട്ടത്രികോണം ഉണ്ടാകുന്നുണ്ടല്ലോ. ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ഈ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളാണ്; ചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണം, മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ വശവും. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ വശത്തിനെ അതിന്റെ കർണ്ണം (hypotenuse) എന്നാണ് പറയുന്നത്. അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയ കാര്യം ഇങ്ങനെയും പറയാം:

ഏതു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെയും കർണത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ലംബവശങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണ്.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ 5 സെന്റിമീറ്ററും 3 സെന്റിമീറ്ററും ആണെങ്കിൽ, അവയിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ $5^2 = 25$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും, $3^2 = 9$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും ആണല്ലോ. അപ്പോൾ കർണ്ണത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $25 + 9 = 34$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ:



ജിയോജിബ്രയിൽ *Min* = 3 ആകത്തക്ക വിധം *n* എന്ന പേരിൽ ഒരു *integer slider* നിർമ്മിക്കുക. ഇതിനായി *slider* ടൂൾ എടുത്ത് ക്ലിക്കുചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ *Min* എന്നത് 3 എന്നു നൽകി ok ക്ലിക്കു ചെയ്യുക. ഇനി ഒരു മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കുക. *Regular Polygon* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു മൂലകളിൽ ക്ലിക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ മൂലകളുടെ എണ്ണം *n* എന്ന് നൽകുക. ഈ രീതിയിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളിൽ *n* വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജങ്ങൾ നിർമ്മിക്കാം. ($n = 3$ ആകുമ്പോൾ സമഭുജത്രികോണം, $n = 4$ ആകുമ്പോൾ സമചതുരം... എന്നിങ്ങനെ). മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളിലും ഈ രീതിയിൽ *n* വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജങ്ങൾ വരച്ച് പരപ്പളവുകൾ കണക്കാക്കുക. പരപ്പളവുകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം? ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവും ബഹുഭുജങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണവും മാറ്റിനോക്കൂ.

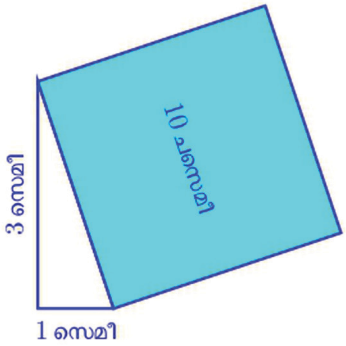
പുരാതന ഗ്രീസിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന പൈഥാഗറസ് എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്റെ പേര് ചേർത്ത്, **പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തം** എന്നാണ് ഇക്കാര്യം അറിയപ്പെടുന്നത്.

നിശ്ചിത പരപ്പളവുള്ള ചില സമചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ ഈ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, 10 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ ആദ്യം 10 നെ ഇങ്ങനെ എഴുതുക.

$$10 = 1 + 9 = 1^2 + 3^2$$

അതായത് വശങ്ങളെല്ലാം 1 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും, വശങ്ങളെല്ലാം 3 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും, കൂട്ടിയാൽ 10 കിട്ടും. അപ്പോൾ പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, ലംബവശങ്ങൾ 1 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും ആയി

മട്ടത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ കർണ്ണത്തിൽ ഒരു സമചതുരം വരച്ചാൽ 10 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം കിട്ടും.



ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന പരപ്പളവുള്ള സമചതുരങ്ങൾ ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് വരയ്ക്കുക. നിങ്ങൾ വരച്ചത് ശരിയാണോ എന്ന് *Area* ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിക്കാം.

i) 13 ii) 20 iii) 26

ഇനി 11 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കണമെങ്കിലോ ?

11 നെ രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുകയായി എഴുതാൻ കഴിയില്ല (പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ!). അതിനാൽ ഇപ്പോൾ ചെയ്തപോലെ ഇങ്ങനെയൊരു സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല.

മറ്റൊരു വഴിക്ക് ആലോചിക്കാം. പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിൽനിന്ന് മറ്റേതെങ്കിലും വശത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കുറച്ചാൽ, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കിട്ടുമല്ലോ.

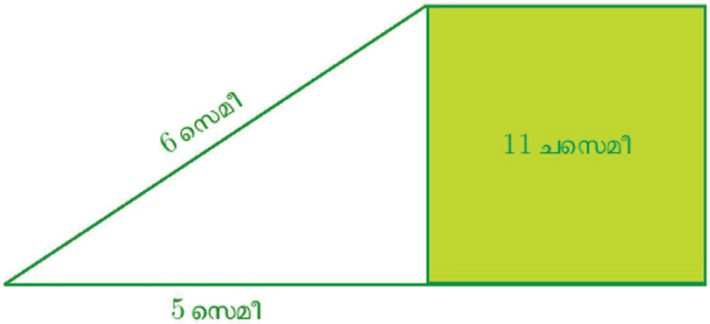
അപ്പോൾ 11 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ, 11 നെ രണ്ടു വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതിയാലും മതി.

അല്പം ആലോചിച്ചാൽ,

$$11 = 36 - 25 = 6^2 - 5^2$$

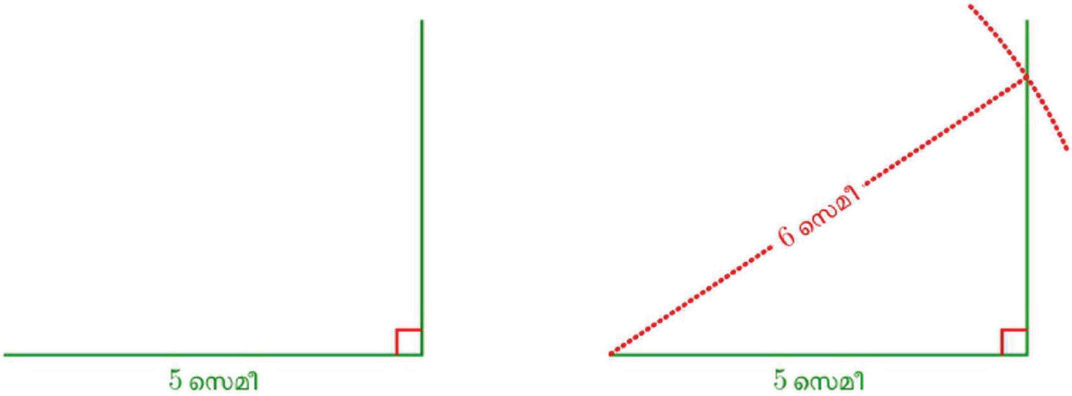
എന്നു കാണാം.

അതിനാൽ, കർണ്ണം 6 സെന്റിമീറ്ററും, മറ്റൊരു വശം 5 സെന്റിമീറ്ററുമായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 11 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആയിരിക്കും.



ഇങ്ങനെയൊരു മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ ഒരു വരയും, അതിന്റെ ഒരറ്റത്ത് ഒരു ലംബവും വരയ്ക്കുക; ഇനി മറ്റേ അറ്റം കേന്ദ്രമായി, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വട്ടത്തിന്റെ ഭാഗം വരച്ച്, ഈ ലംബത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ മതിയല്ലോ:



ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

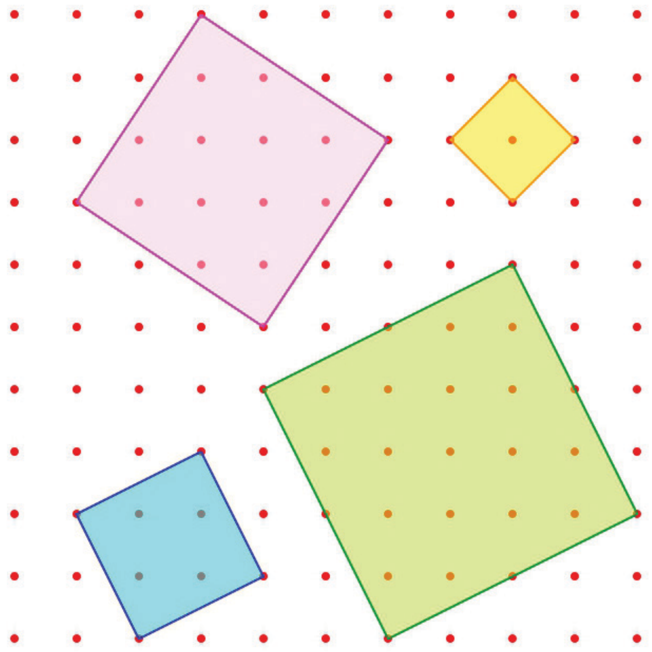
(1) ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന പരപ്പളവുള്ള സമചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

(i) 17 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

(ii) 18 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

(iii) 19 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

(2) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ, 1 സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ടു വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയും ഇട്ട കുത്തുകൾ ചിലത് യോജിപ്പിച്ച് സമചതുരങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.



ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക

നീളക്കണക്കുകൾ

മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളിന്മേൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമാണ് പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തം പറയുന്നത്.

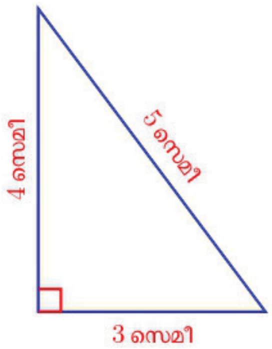
സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ വർഗമാണല്ലോ. അപ്പോൾ പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തം, മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമായും പറയാം:

> ഏതു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെയും കർണ്ണത്തിന്റെ വർഗം, ലംബവശങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുകയാണ്

ഉദാഹരണമായി, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററും 4 സെന്റിമീറ്ററും ആണെങ്കിൽ, കർണ്ണത്തിന്റെ വർഗം

$$3^2 + 4^2 = 25$$

ആണ്. അപ്പോൾ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ



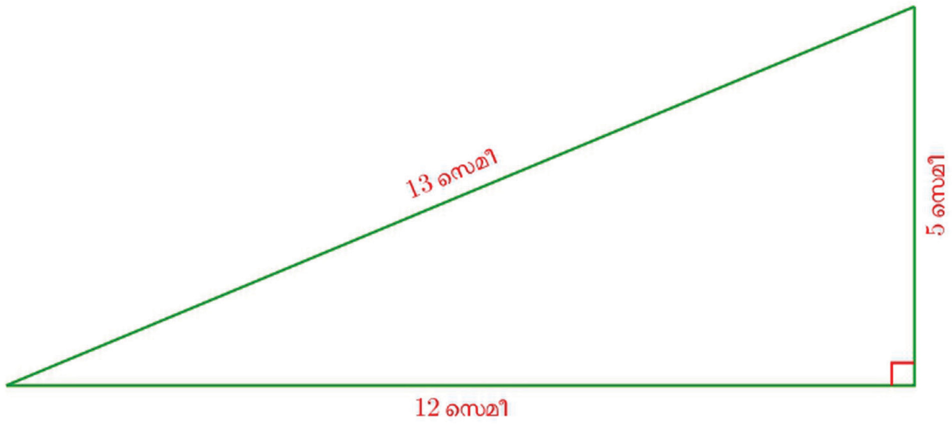
മറ്റൊരു ചോദ്യം:

> കർണ്ണം 13 സെന്റിമീറ്ററും, മറ്റൊരു വശത്തിന്റെ നീളം 12 സെന്റിമീറ്ററും ആയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

മൂന്നാം വശത്തിന്റെ വർഗവും, മറ്റൊരു ലംബവശത്തിന്റെ നീളമായ 12 ന്റെ വർഗവും കൂട്ടിയാൽ, കർണ്ണത്തിന്റെ നീളമായ 13 ന്റെ വർഗം കിട്ടണമല്ലോ. അപ്പോൾ,

$$\text{മൂന്നാം വശത്തിന്റെ വർഗം} = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$$

ഇതിൽനിന്ന് മൂന്നാം വശത്തിന്റെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ എന്നു കാണാമല്ലോ.



ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

(1) ചുവടെയുള്ള ഓരോ കണക്കിലും, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക:

(i) ലംബവശങ്ങൾ 6 സെന്റിമീറ്റർ, 8 സെന്റിമീറ്റർ

(ii) ലംബവശങ്ങൾ 9 സെന്റിമീറ്റർ, 12 സെന്റിമീറ്റർ

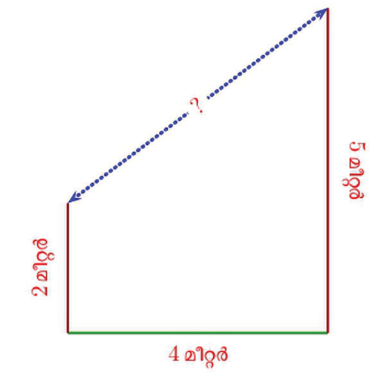
(iii) ലംബവശങ്ങൾ 7 സെന്റിമീറ്റർ, 24 സെന്റിമീറ്റർ

(iv) ലംബവശങ്ങൾ 14 സെന്റിമീറ്റർ, 48 സെന്റിമീറ്റർ

(v) കർണ്ണം 17 സെന്റിമീറ്റർ, മറ്റൊരു വശം, 15 സെന്റിമീറ്റർ

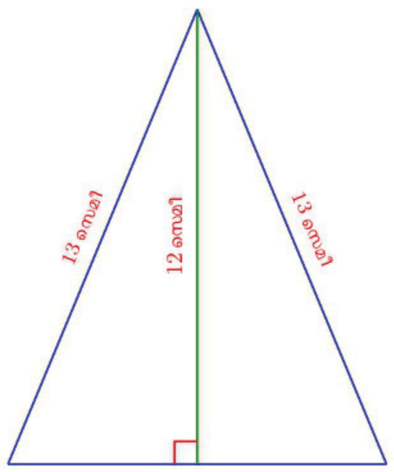
(vi) കർണ്ണം 34 സെന്റിമീറ്റർ, മറ്റൊരു വശം, 30 സെന്റിമീറ്റർ

(2) 2 മീറ്ററും 5 മീറ്ററും ഉയരമുള്ള രണ്ടു തൂണുകൾ 4 മീറ്റർ അകലത്തിൽ നിൽക്കുന്നു.

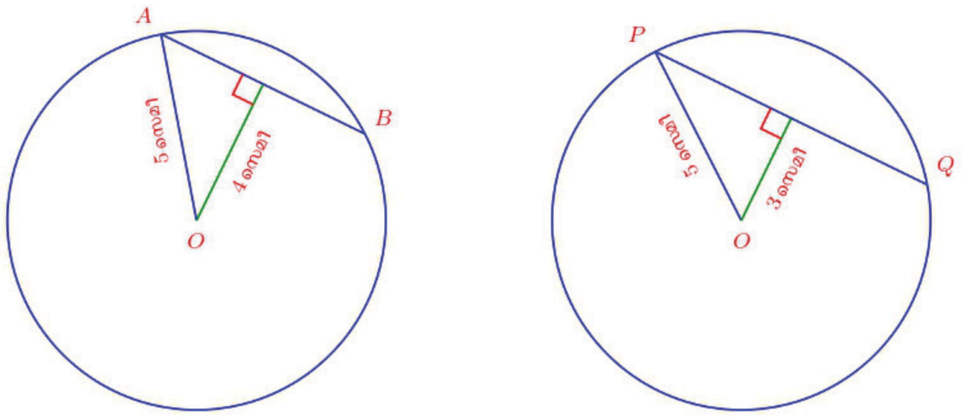


തൂണുകളുടെ മുകളറ്റങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയാണ്?

(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.



(4) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ O വൃത്തകേന്ദ്രവും, A, B, P, Q വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളും ആണ്:



AB, PQ എന്നീ വരകളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

12 ബീജഗണിതം

സംഖ്യകളും ബീജഗണിതവും

അളവുകളെയും സംഖ്യകളെയും കുറിച്ചുള്ള കാര്യങ്ങൾ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു ചുരുക്കിയെഴുതുന്ന ബീജഗണിതരീതി കുറച്ചൊക്കെ മനസ്സിലാക്കിയല്ലോ.

ഇനി ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കുന്ന മറ്റു ചില സന്ദർഭങ്ങൾ നോക്കാം.

സംഖ്യകളിൽനിന്നു തുടങ്ങാം. അടുത്തടുത്ത രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ ഇങ്ങനെ കിട്ടും:

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 3 = 5$$

$$3 + 4 = 7$$

$$4 + 5 = 9$$

ആദ്യത്തെ സംഖ്യയും, കൂട്ടിക്കിട്ടിയ സംഖ്യയും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധം കാണുന്നുണ്ടോ?

$$(1 \times 2) + 1 = 3$$

$$(2 \times 2) + 1 = 5$$

$$(3 \times 2) + 1 = 7$$

$$(4 \times 2) + 1 = 9$$

ഇത് എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും ശരിയാകുമോ ?

ഉദാഹരണമായി, 248 നോട് 249 കൂട്ടിയാലും, 248 ന്റെ 2 മടങ്ങിനോട് 1 കൂട്ടിയാലും ഒരേ സംഖ്യതന്നെ കിട്ടുമോ ?

കൂട്ടിയും ഗുണിച്ചുമൊക്കെ പരിശോധിക്കാം. പക്ഷേ അതുകൊണ്ട് ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്നതിന്റെ കാരണം മനസ്സിലാവില്ലല്ലോ.

നമുക്ക് 248 + 249 നെയും, (248 × 2) + 1 നെയും ബന്ധിപ്പിക്കണം.

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

- ആദ്യത്തെ ക്രിയയിലെ 249 രണ്ടാമത്തെ ക്രിയയിൽ ഇല്ല.
- ആദ്യത്തെ ക്രിയയിൽ നിന്ന് 249 എങ്ങനെ ഒഴിവാക്കും ?
- 249 നെ 248 + 1 എന്നെഴുതിയാലോ ?

അപ്പോൾ ഇങ്ങനെ എഴുതി നോക്കാം:

$$248 + 249 = 248 + (248 + 1)$$

ഇനിയോ ?

ഇതിലെ രണ്ടു 248 കളും ചേർന്ന് 248 ന്റെ 2 മടങ്ങാകില്ലേ ?

$$248 + (248 + 1) = (248 + 248) + 1 = (248 \times 2) + 1$$

അടുത്തടുത്ത വേറെ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്താലും ഇതുപോലെതന്നെ ചെയ്യാമല്ലോ:

$$432 + 433 = 432 + (432 + 1) = (432 + 432) + 1 = (432 \times 2) + 1$$

അപ്പോൾ ഇത് ഒരു പൊതുതത്വമായി എഴുതാം.

> അടുത്തടുത്ത ഏതു രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്നതും, അവയിലെ ചെറിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്നതും ഒരേ സംഖ്യയാണ്.

ഇനി ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറയുന്നത് എങ്ങനെ എന്നു നോക്കാം.

അടുത്തടുത്തുള്ള രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ ചെറുത് x എന്നെടുക്കാം. അടുത്ത എണ്ണൽ സംഖ്യയോ ?

y എന്നെടുക്കാം;

പക്ഷേ ഇവിടെ പരസ്പരം ബന്ധമൊന്നുമില്ലാത്ത സംഖ്യകൾ അല്ലല്ലോ വേണ്ടത്. ഒരു എണ്ണൽ സംഖ്യയും, അടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ് ?

ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയോട് ഒന്നു കുട്ടിയതല്ലേ അടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യ ?

അപ്പോൾ x ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, അടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യ എങ്ങനെ എഴുതാം ?

x നോട് 1 കൂട്ടിയത് $x + 1$.

അപ്പോൾ നമുക്ക് ഇങ്ങനെ തുടങ്ങാം:

(i) x ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ

(ii) അടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യ $x + 1$

(iii) ഇവ രണ്ടും കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ $x + (x + 1)$

അടുത്തതായി, ചെറിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയ സംഖ്യ നോക്കാം:

(i) ചെറിയ സംഖ്യ x

(ii) അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് $2x$

(iii) അതിനോട് 1 കൂട്ടിയത് $2x + 1$

ഇനി മുകളിൽ എഴുതിയ തത്വത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതാമല്ലോ:

x ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും $x + (x + 1) = 2x + 1$

ഇതിൽ ഒരു കാര്യം ശ്രദ്ധിച്ചോ ? **കണക്കിലെ ചുരുക്കെഴുത്ത്** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ട ഒരു കാര്യം:

x, y, z ഏതു സംഖ്യകളായാലും $(x + y) + z = x + (y + z)$

ഈ സമവാക്യം തിരിച്ചു വായിച്ചാൽ

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

ഇതിൽ, y, z എന്നിവ ഏതെങ്കിലും സംഖ്യകളായി എടുക്കുന്നതിനു പകരം x ഉം 1 ഉം ആയി എടുത്താലോ ?

$$x + (x + 1) = (x + x) + 1$$

$x + x = 2x$ ആണല്ലോ. മുകളിലെ സമവാക്യത്തിൽ ഇത് എഴുതിയാൽ,

$$x + (x + 1) = 2x + 1$$

ഇതല്ലേ ഇപ്പോൾ കണ്ട പൊതുതത്വത്തിലെ സമവാക്യം ?

ഇങ്ങനെ നോക്കുമ്പോൾ, മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി കാണാം: x, y, z എന്നീ മൂന്നു സംഖ്യകളുടെ തുകയെക്കുറിച്ചുള്ള സമവാക്യം, എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കു മാത്രമല്ല ഭിന്നസംഖ്യകൾക്കും ശരിയാണല്ലോ.

അപ്പോൾ എണ്ണൽസംഖ്യകളെക്കുറിച്ച് കണ്ടുപിടിച്ച തത്വം എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും ശരിയാണ്. അടുത്തടുത്ത സംഖ്യകൾ എന്നതിനു പകരം, സംഖ്യയും അതിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയതും എന്നു

ബീജഗണിതശക്തി

5 ഉം 6 ഉം കൂട്ടുമ്പോൾ, തുക 11 എന്നു കണക്കാക്കുകയല്ലാതെ, 5 നോട് 1 കൂട്ടിയതാണ് 6 എന്ന കാര്യം ഓർക്കണമെന്നില്ല എന്നാൽ ബീജഗണിതത്തിൽ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ, അടുത്ത സംഖ്യ $x + 1$ എന്നല്ലാതെ എഴുതാൻ കഴിയില്ല.

ഇതുകൊണ്ടുള്ള ഗുണം, ഇവയുടെ തുക $x + (x + 1)$ നെ $2x + 1$ എന്നും, തുടർന്ന് ഇത് ചെറിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒന്ന് കൂട്ടിയതാണ് എന്നും, പെട്ടെന്നു കാണാൻ കഴിയുന്നു എന്നതാണ്.

മാത്രവുമല്ല, ഇതിലൂടെ കിട്ടിയ

$$x + (x + 1) = 2x + 1$$

എന്ന സമവാക്യവും, നേരത്തെ എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും ശരിയാകുമെന്നു കണ്ട

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

എന്ന സമവാക്യവും ഒത്തുനോക്കി, ആദ്യത്തേതും എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും ശരിയാകില്ലേ എന്ന പുതിയ ചിന്തയും ഉണ്ടാകുന്നു

മാറ്റണം എന്നുമാത്രം:

> ഒരു സംഖ്യയും അതിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയ സംഖ്യയും തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്നതും, അവയിലെ ചെറിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്നതും ഒരേ സംഖ്യ തന്നെയാണ്.

ഉദാഹരണമായി,

$$\begin{aligned} 5\tfrac{1}{2} + \left(5\tfrac{1}{2} + 1\right) &= \left(5\tfrac{1}{2} + 5\tfrac{1}{2}\right) + 1 \\ &= \left(5\tfrac{1}{2} \times 2\right) + 1 \\ &= 11 + 1 \\ &= 12 \end{aligned}$$

ഇനി അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്ത്, ആദ്യത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും മാത്രം കൂട്ടിനോക്കൂ:

$1 + 3 = 4$

$2 + 4 = 6$

$3 + 5 = 8$

$4 + 6 = 10$

ഓരോന്നിലും തുകയും, ഒഴിവാക്കിയ നടുവിലെ സംഖ്യയുമായി എന്തെങ്കിലും ബന്ധം കാണുന്നുണ്ടോ ?

ഓരോന്നിന്റെയും നേർക്ക് അത് എഴുതിനോക്കാം:

$1 + 3 = 4$	$2 \times 2 = 4$
$2 + 4 = 6$	$3 \times 2 = 6$
$3 + 5 = 8$	$4 \times 2 = 8$
$4 + 6 = 10$	$5 \times 2 = 10$

ഇത് എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും ശരിയാണോ എന്നും, ആണെങ്കിൽ എന്തുകൊണ്ട് എന്നും നോക്കാൻ അടുത്തടുത്ത വേറെ ചില സംഖ്യകൾ എടുത്തു പരിശോധിക്കാം.

27, 28, 29 എടുത്ത് നോക്കാം. $27 + 29$ ഉം 28×2 ഉം ഒരേ സംഖ്യയാണോ എന്നാണ് അറിയേണ്ടത്.

ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ ചെയ്തതുപോലെ, 27 നെയും 29 നെയും, നമുക്ക് ആവശ്യമുള്ള 28 നോട് ബന്ധിപ്പിക്കാം.

$$27 = 28 - 1$$

$$29 = 28 + 1$$

അപ്പോൾ,

$$27 + 29 = (28 - 1) + (28 + 1)$$

ഇനി $(28 - 1) + (28 + 1)$ ൽ ചെയ്യുന്ന ക്രിയകൾ മൊത്തമായി നോക്കാം:

- രണ്ട് 28 കൾ കൂട്ടിയിട്ടുണ്ട്
- ഒരു 1 കൂട്ടിയിട്ടുണ്ട്
- ഒരു 1 കുറച്ചിട്ടുമുണ്ട്

അതായത്,

$$(28 - 1) + (28 + 1) = (28 \times 2) + 1 - 1$$

ഏതു സംഖ്യയോടും ഒന്നു കൂട്ടി, പിന്നീട് ഒന്നു കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ, തുടങ്ങിയ സംഖ്യതന്നെ ആവില്ലേ ?

അപ്പോൾ,

$$(28 \times 2) + 1 - 1 = 28 \times 2$$

ഇവിടെ എഴുതിയ സമവാക്യങ്ങളെല്ലാം ചേർത്തുവച്ചാലോ ?

$$\begin{aligned} 27 + 29 &= (28 - 1) + (28 + 1) \\ &= (28 \times 2) + 1 - 1 \\ &= 28 \times 2 \end{aligned}$$

27, 28, 29 നു പകരം, അടുത്തടുത്ത ഏതു മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്താലും ഇതു ശരിയാകില്ലേ ?

അപ്പോൾ പൊതുവായി എന്തു പറയാം ?

അടുത്തടുത്ത മൂന്നു എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകളുടെ തുകയും നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങും ഒരേ സംഖ്യയാണ്.

ഇനി ഇത് ബീജഗണിതത്തിൽ എങ്ങനെ പറയും ?

ഇതിൽ നടുവിലെ സംഖ്യ ഉപയോഗിച്ചാണ് രണ്ടാമത്തെ ക്രിയ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. അതുകൊണ്ട്, ആ സംഖ്യ x എന്നെടുക്കാം.

- നടുവിലെ സംഖ്യ x
- ആദ്യത്തെ സംഖ്യ x ൽ നിന്ന് 1 കുറച്ചത്, അതായത് $x - 1$
- അവസാനത്തെ സംഖ്യ x നോട് 1 കൂട്ടിയത്, അതായത് $x + 1$

അപ്പോൾ മുകളിൽ പറഞ്ഞ കാര്യം സമവാക്യമായി എഴുതിയാൽ,

$$(x - 1) + (x + 1) = 2x$$

നേരത്തെ പറഞ്ഞതുപോലെ $(x - 1) + (x + 1)$ ലെ ക്രിയകളെല്ലാം ഒരുമിച്ചു നോക്കിയാൽ, രണ്ട് x കൂട്ടി, വീണ്ടും 1 കൂട്ടി, 1 കുറച്ചു; ഫലത്തിൽ രണ്ട് x കൂട്ടിയതു മാത്രം. അതായത് x നെ രണ്ടുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്.

x ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും, $(x - 1) + (x + 1) = 2x$

ഇതുതന്നെ ഇങ്ങനെയും എഴുതാം:

x, y, z ഇവ അടുത്തടുത്ത ഏതു മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ആയാലും $x + z = 2y$

പക്ഷേ ഇത് എന്തുകൊണ്ടു ശരിയാകുന്നു എന്ന് വേറെ പറയേണ്ടിവരും

ചുവടെ പറയുന്ന കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

(1) അടുത്തടുത്ത മൂന്നു എണ്ണൽസംഖ്യകൾ പലത് എടുത്ത് കൂട്ടിനോക്കുക.

(i) ഈ തുകയ്ക്ക്, കൂട്ടുന്ന സംഖ്യകളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയുമായി എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(ii) ഈ ബന്ധം അടുത്തടുത്ത ഏതു മൂന്ന് എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കും എന്തുകൊണ്ടു ശരിയാകുന്നു എന്നു വിശദീകരിക്കുക.

(iii) ഈ ബന്ധം സാധാരണഭാഷയിലും, തുടർന്ന് ബീജഗണിതരൂപത്തിലും എഴുതുക.

(2) അടുത്തടുത്തുള്ള ഏതാനും നാലു എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ, ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകളുടെ തുകയും, നടുക്കുള്ളവയുടെ തുകയും ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

$1 + 4 = 5$	$2 + 3 = 5$
$2 + 5 = 7$	$3 + 4 = 7$
$3 + 6 = 9$	$4 + 5 = 9$
$4 + 7 = 11$	$5 + 6 = 11$

(i) അടുത്തടുത്ത ഏതു നാലു എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്താലും, ഇങ്ങനെയുള്ള തുകകൾ ഒരേ സംഖ്യകൾ ആകുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

(ii) ഈ പൊതുതത്വത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

(3) അടുത്തടുത്തുള്ള നാലു എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ, ഒന്നാമത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും സംഖ്യകളുടെ തുകയും, മൂന്നാമത്തെയും നാലാമത്തെയും സംഖ്യകളുടെ തുകയും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ ? ഈ ബന്ധത്തിന്റെ കാരണം വിശദീകരിക്കുക. ബന്ധം ബീജഗണിത രീതിയിൽ എഴുതുക. അടുത്തടുത്തുള്ള നാല് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ ഒന്നാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും സംഖ്യകളുടെ തുകയും, രണ്ടാമത്തെയും നാലാമത്തെയും സംഖ്യകളുടെ തുകയും തമ്മിലോ ?

സംഖ്യാകൗതുകങ്ങൾ

ഇനി മറ്റു ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം:

അടുത്തടുത്തുള്ള ഏതെങ്കിലും മൂന്നു സംഖ്യകൾ ഒരു വരിയിൽ എഴുതുക.

5 6 7

ഇവയിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകൾ കൂട്ടി മുകളിൽ എഴുതുക:

11 13

5 6 7

ഈ രണ്ടു സംഖ്യകളും കൂട്ടി ഏറ്റവും മുകളിൽ എഴുതുക.

24

11 13

5 6 7

അടുത്തടുത്തുള്ള മറ്റു സംഖ്യകളിൽനിന്നു തുടങ്ങി, ഇതുപോലെ ചില സംഖ്യാഗോപുരങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കി നോക്കൂ:

44	80	104
21 23	39 41	51 53
10 11 12	19 20 21	25 26 27

എല്ലാ ഗോപുരങ്ങളിലും, ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യ, 4 ന്റെ ഗുണിതം തന്നെയാണോ ?

ഏതു സംഖ്യയുടെ 4 മടങ്ങാണ് കിട്ടുന്നത് ?

ഇതിന്റെ കാരണവും ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു വിശദീകരിക്കാം.

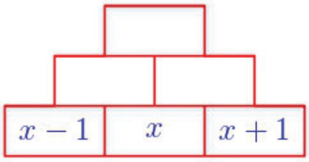
തുടങ്ങുന്ന മൂന്നു സംഖ്യകളിൽ, നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ 4 മടങ്ങാണല്ലോ അവസാനം കിട്ടുന്നത്. അപ്പോൾ അത് x എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം.

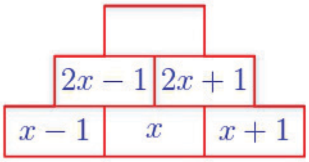
അതിന്റെ ഇടതും വലതുമുള്ള സംഖ്യകൾ എങ്ങനെ എഴുതും ?

അടുത്തടുത്തുള്ള മൂന്നു സംഖ്യകളിൽ, നടുവിലെ സംഖ്യയിൽനിന്ന് ഒന്നു കുറച്ചതും, ഒന്നു കൂട്ടിയതും അല്ലേ അപ്പുറത്തും ഇപ്പുറത്തും ഉള്ള സംഖ്യകൾ ?

അപ്പോൾ താഴത്തെ വരി, $x - 1$, x, $x + 1$

അതിനു മുകളിലെ രണ്ടു സംഖ്യകളോ ?



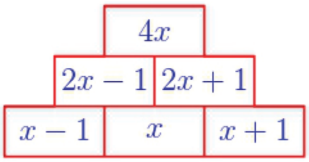


$(x - 1) + x = 2x - 1$

$x + (x + 1) = 2x + 1$

ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യയോ ?

$$(2x - 1) + (2x + 1) = 4x$$



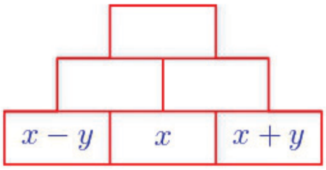
ഇതിൽ മറ്റൊരു കാര്യം ആലോചിക്കാം: തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യകൾ $x - 1, x, x + 1$ എന്നതിനു പകരം $x - 2$, x, $x + 2$ എന്നെടുത്താലോ ?

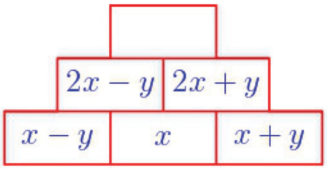
അടുത്ത വരി എന്താകുമെന്ന് മനസ്സിൽത്തന്നെ കണക്കാക്കാമല്ലോ $2x - 2$, $2x + 2$

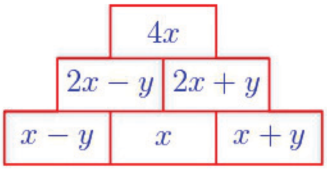
ഏറ്റവും മുകളിലോ ?

വീണ്ടും $4x$ തന്നെ.

ഇനി x ൽ നിന്ന് ഏതെങ്കിലും സംഖ്യ കുറച്ച് ഇടതുവശത്തും, അതേ സംഖ്യ x നോട് കൂട്ടി വലതുവശത്തും ആയാലോ ?







അതായത് ഗോപുരത്തിന്റെ താഴത്തെ പടിയായി ഒരേ അകലം ഇടവിട്ടുള്ള ഏതു മൂന്നു സംഖ്യകളും ആവാം; ഏറ്റവും മുകളിൽ നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ നാലു മടങ്ങുതന്നെ കിട്ടും.

6	10	14

16	24	
6	10	14

40		
16	24	
6	10	14

ഇനി ഇതുപോലെ നാലു നിലയുള്ള രണ്ടു ഗോപുരങ്ങൾ നോക്കൂ:

36			
16	20		
7	9	11	
3	4	5	6

100			
44	56		
19	25	31	
8	11	14	17

ആദ്യത്തേതിൽ താഴത്തെ വരി 3, 4, 5, 6 എന്ന തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ.

രണ്ടാമത്തേതിൽ 8 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി 3 വീതം കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന നാലു സംഖ്യകൾ 8, 11, 14, 17.

രണ്ടിലും ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യയും, താഴത്തെ വരിയുടെ നടുവിലുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകളും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ ?

ഇതുപോലെ മറ്റു സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതിനോക്കൂ. എല്ലാറ്റിലും ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യ, താഴത്തെ വരിയിലെ നടുവിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ നാലു മടങ്ങാണോ ?

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് എഴുതി നോക്കാം. x ൽനിന്നു തുടങ്ങി y വീതം കൂട്ടിയ നാലു സംഖ്യകളിൽനിന്നു തുടങ്ങാം:

$$x, x + y, x + 2y, x + 3y$$

x	$x+y$	$x+2y$	$x+3y$

അടുത്ത വരിയിലോ ?

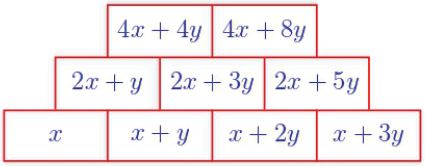
$$x + (x + y) = 2x + y$$

$$(x + y) + (x + 2y) = 2x + 3y$$

$$(x + 2y) + (x + 3y) = 2x + 5y$$

$2x+y$	$2x+3y$	$2x+5y$	
x	$x+y$	$x+2y$	$x+3y$

മൂന്നാമത്തെ വരി

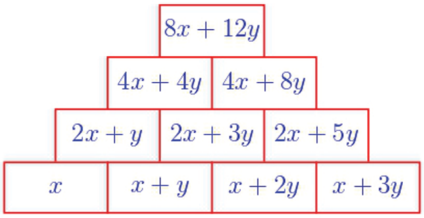


$$(2x + y) + (2x + 3y) = 4x + 4y$$

$$(2x + 3y) + (2x + 5y) = 4x + 8y$$

ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യ

$$(4x + 4y) + (4x + 8y) = 8x + 12y$$



ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യ, ആദ്യത്തെ വരിയുടെ നടുവിലെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ നാലു മടങ്ങുതന്നെയാണോ ?

ആദ്യത്തെ വരിയുടെ നടുവിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക

$$(x + y) + (x + 2y) = 2x + 3y$$

ഇതിന്റെ നാലു മടങ്ങ്

$$(2x + 3y) \times 4 = (2x \times 4) + (3y \times 4) = 8x + 12y$$

(തുകയുടെ ഗുണനഫലം, ഗുണനഫലങ്ങളുടെ തുക ആണെന്ന് **കണക്കിലെ ചുരുക്കെഴുത്ത്** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ)

അല്പം ആലോചിച്ചിരുന്നെങ്കിൽ, രണ്ടാമത്തെ വരി എഴുതിയപ്പോൾത്തന്നെ ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാമായിരുന്നു.

രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകൾ,

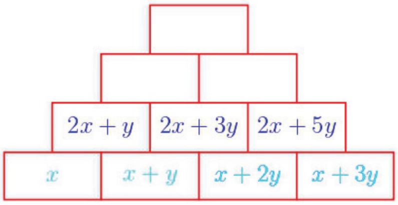
$$2x + y, \quad 2x + 3y, \quad 2x + 5y$$

ഇവയെ ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതിയാലോ ?

$$2x + y$$

$$2x + 3y = (2x + y) + 2y$$

$$2x + 5y = (2x + 3y) + 2y$$

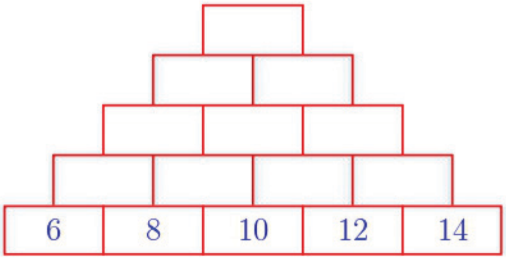


അതായത്, $2y$ അകലം ഇടവിട്ട് മൂന്നു സംഖ്യകൾ

അപ്പോൾ നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, ഈ സംഖ്യകളിന്മേൽ പണിയുന്ന മൂന്നു നില ഗോപുരത്തിന്റെ ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യ, നടുവിലെ സംഖ്യ ആയ $2x + 3y$ യുടെ നാലു മടങ്ങുതന്നെ ആകണമല്ലോ

ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

(1) മൂന്നും, നാലും നിലകളുള്ള സംഖ്യാഗോപുരങ്ങൾ പോലെ അഞ്ചു നിലയുള്ള ഒരു സംഖ്യാ ഗോപുരത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ നിലയാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

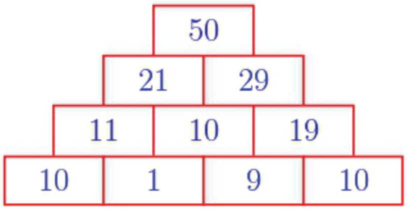


(i) തുടർന്നുള്ള സംഖ്യകൾ എഴുതുന്നതിനുമുമ്പ്, ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യ നടുവിലുള്ള 10 ന്റെ എത്ര മടങ്ങായിരിക്കും എന്ന് ഊഹിച്ചുനോക്കൂ. അതു ശരിയാണോ എന്ന് മറ്റു സംഖ്യകൾ എല്ലാം എഴുതി പരിശോധിക്കൂ.

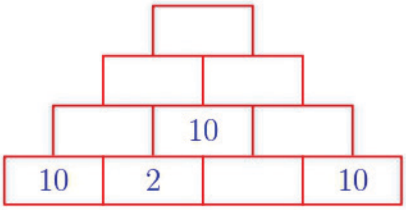
(ii) ഒരേ അകലം ഇടവിട്ടുള്ള ഏത് അഞ്ചു സംഖ്യകളിൽനിന്നു തുടങ്ങിയാലും അഞ്ചു നില ഗോപുരങ്ങളിൽ എല്ലാം അവസാനസംഖ്യ, ആദ്യവരിയിലെ സംഖ്യകളിൽ നടുവിലെ സംഖ്യയുടെ ഒരേ മടങ്ങായിരിക്കും എന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു വിശദീകരിക്കുക.

(iii) എല്ലാ സംഖ്യകളും എഴുതാതെതന്നെ ഇതു നിശ്ചയിക്കാനുള്ള എന്തെങ്കിലും വഴി ഉണ്ടോ ?

(2) ഇവിടെ കണ്ടതുപോലെ സംഖ്യാഗോപുരം ഉണ്ടാക്കാൻ ഏതു സംഖ്യകളിൽ നിന്നും തുടങ്ങാം (ഒരേ അകലം ഇടവിട്ട് ആകണമെന്നില്ല). ഉദാഹരണമായി ഈ ഗോപുരം നോക്കുക.



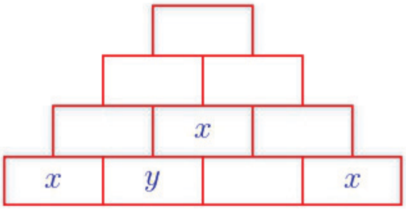
(i) ഇതുപോലെ ഈ ഗോപുരത്തിലെ ഒഴിഞ്ഞ കളങ്ങളിലെ സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കി എഴുതുക.



(ii) ഇതുപോലെയുള്ള ഒരു ഗോപുരത്തിൽ, 10 കൾ ഒന്നും മാറ്റാതെ, താഴത്തെ വരിയിലെ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ മാത്രം മാറ്റി (1 നും 2 നും പകരം) എഴുതി തുടർന്നുള്ള സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക. ഏറ്റവും മുകളിലെ സംഖ്യ 50 തന്നെ കിട്ടുന്നുണ്ടോ ?

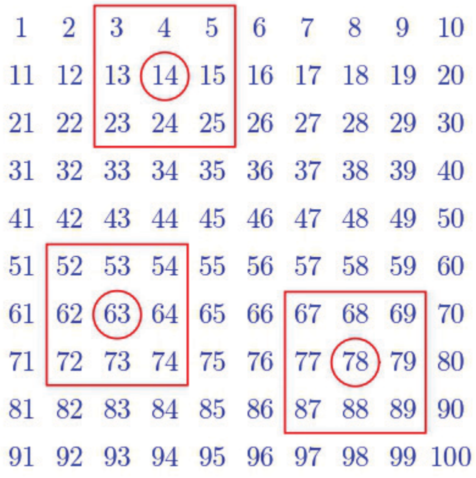
(iii) ഇതിന്റെ കാരണം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു വിശദീകരിക്കുക.

(iv) ചുവടെയുള്ള ഗോപുരത്തിലെ ഒഴിഞ്ഞ കളങ്ങളിലെ സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കി എഴുതുക.



(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ ആദ്യത്തേതിലേതുപോലെ 1 മുതൽ 100 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ വരിയും നിരയുമായി എഴുതുക; രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലെപ്പോലെ അതിൽ 9 സംഖ്യകൾ മാത്രമുള്ള പല സമചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. എല്ലാ സമചതുരങ്ങളുടെയും നടുക്കുള്ള സംഖ്യകളും അടയാളപ്പെടുത്തുക:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



ഓരോ സമചതുരത്തിലും ചുവടെ പറയുന്നവ കണക്കാക്കുക:

(i) നടുക്കുള്ള സംഖ്യയും അതിന്റെ ഇടതും വലതുമുള്ള സംഖ്യകളുടെ തുകയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

(ii) നടുക്കുള്ള സംഖ്യയും അതിന്റെ മുകളിലും താഴെയുമുള്ള സംഖ്യകളുടെ തുകയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

(iii) നടുക്കുള്ള സംഖ്യയും സമചതുരത്തിന്റെ എതിർമൂലകളിലെ സംഖ്യകളുടെ തുകകളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

(iv) നടുക്കുള്ള സംഖ്യയും സമചതുരത്തിലെ എല്ലാ സംഖ്യകളുടെ തുകയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

ഇവയെല്ലാം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(4) കലണ്ടറിൽ അടുത്തടുത്തുള്ള ഏതെങ്കിലും നാലു സംഖ്യകൾ വരുന്ന സമചതുരങ്ങൾ പലയിടത്തായി വരയ്ക്കുക:

ഞായർ	തിങ്കൾ	ചൊവ്വ	ബുധൻ	വ്യാഴം	വെള്ളി	ശനി
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

(i) ഇങ്ങനെയുള്ള ഏതു സമചതുരത്തിലും നാലു സംഖ്യകളുടെയും തുക നാലിന്റെ ഗുണിതം ആകുന്നതിന്റെ കാരണം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു വിശദീകരിക്കുക.

(ii) ഈ തുകയും സമചതുരത്തിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

മടങ്ങും മിച്ചവും

ഏതു എണ്ണൽസംഖ്യയെയും മറ്റൊരു എണ്ണൽസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച്, മടങ്ങും മിച്ചവുമായി എഴുതാം എന്ന് അഞ്ചാംക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി, 9 നെ 4 കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$9 = (4 \times 2) + 1$$

മറിച്ച്, 4 നെ 9 കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ഇങ്ങനെയും:

$$4 = (9 \times 0) + 4$$

ഇങ്ങനെ 2 കൊണ്ടു മിച്ചമില്ലാതെ ഹരിക്കാൻ കഴിയുന്ന സംഖ്യകളെയാണ് ഇരട്ടസംഖ്യകൾ എന്നു വിളിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി,

$$2 = 2 \times 1$$

$$4 = 2 \times 2$$

$$6 = 2 \times 3$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാം; അതിനാൽ 2, 4, 6 എന്നീ സംഖ്യകൾ ഇരട്ടസംഖ്യകളാണ്; പൂജ്യമോ?

$$0 = 2 \times 0$$

അപ്പോൾ 0 വും ഇരട്ടസംഖ്യതന്നെ.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ,

2 കൊണ്ട് മിച്ചമില്ലാതെ ഹരിക്കാൻ കഴിയുന്ന സംഖ്യകളാണ് ഇരട്ടസംഖ്യകൾ.

ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതത്തിൽ പറയാം:

ഏത് ഇരട്ടസംഖ്യയെയും $2n$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാം; ഇതിൽ n എന്നത്, 0, 1, 2, 3, ... എന്നീ സംഖ്യകളിൽ ഏതെങ്കിലുമാണ്.

ഇനി 2 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ മിച്ചം വരുന്ന സംഖ്യകളോ?

ഉദാഹരണമായി,

$$1 = (2 \times 0) + 1$$

$$3 = (2 \times 1) + 1$$

$$5 = (2 \times 2) + 1$$

ഇവയെല്ലാം ഒറ്റസംഖ്യകളാണ്.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ,

2 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ 1 മിച്ചം വരുന്ന സംഖ്യകളാണ് ഒറ്റസംഖ്യകൾ.

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാലോ?

ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയെയും $2n + 1$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാം; ഇതിൽ n എന്നത്, 0, 1, 2, 3, . . . എന്നീ സംഖ്യകളിൽ ഏതെങ്കിലുമാണ്.

ഇങ്ങനെ പ്രത്യേക സ്വഭാവമുള്ള സംഖ്യകളെ പൊതുവായി ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നത്, അവയുടെ മറ്റു സവിശേഷതകൾ മനസ്സിലാക്കാൻ സഹായിക്കും.

ഉദാഹരണമായി, ഏതു രണ്ട് ഇരട്ടസംഖ്യകൾ തമ്മിൽ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്നതും ഇരട്ടസംഖ്യതന്നെയാണെന്ന് ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ കാണാം.

ഇത് എന്തുകൊണ്ടാണ് എന്നു മനസ്സിലാക്കാൻ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം.

അതിന് ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ഇരട്ടസംഖ്യകൾ എടുക്കാം. നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്, ഇവയെ $2m$, $2n$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാമല്ലോ. ഇതിൽ, m, n ഇവ പൂജ്യമോ, ഏതെങ്കിലും എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ആകാം.

ഇവ കൂട്ടിയാലോ ?

$$2m + 2n = 2(m + n)$$

ഇതിലെ $m + n$ എന്ന തുകയെ p എന്ന ഒരക്ഷരംകൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചാൽ, ആദ്യമെടുത്ത ഇരട്ടസംഖ്യകൾ കൂട്ടിക്കിട്ടിയ സംഖ്യയെ $2p$ എന്നെഴുതാം; m, n ഇവ പൂജ്യമോ എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ആയതിനാൽ, അവയുടെ തുകയായ p യും അത്തരം ഒരു സംഖ്യയാണ്.

അപ്പോൾ തുകയായ $2p$ യും ഇരട്ടസംഖ്യതന്നെ.

ഇനി ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലോ ?

എന്തുകൊണ്ടാണ് തുക ഇരട്ടസംഖ്യ ആകുന്നത് ?

രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകൾ $2m + 1$, $2n + 1$ എന്നെടുക്കാം; m, n ഇവ പൂജ്യമോ, ഏതെങ്കിലും എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ആണ്.

ഇവ കൂട്ടിയാൽ

$$\begin{aligned}(2m + 1) + (2n + 1) &= 2m + 2n + 2 \\ &= 2(m + n + 1)\end{aligned}$$

ഇതിലും $m + n + 1$ എന്ന സംഖ്യയെ p എന്നെഴുതിയാൽ, ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക $2p$ എന്ന രൂപത്തിലാകും; ഇതിൽ p ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയാണ്.

അപ്പോൾ തുക ഇരട്ടസംഖ്യ ആണല്ലോ.

ഇതുപോലെ ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയും ഒരു ഒറ്റസംഖ്യയും കൂട്ടിയാൽ ഒറ്റസംഖ്യ കിട്ടുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു വിശദീകരിക്കാമോ ?

സംഖ്യകളെ 2 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന മിച്ചത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് ഇരട്ടസംഖ്യകൾ, ഒറ്റസംഖ്യകൾ എന്ന രണ്ടു കൂട്ടങ്ങളായി പിരിച്ചത്.

3 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന മിച്ചത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ആയാലോ ?

സംഖ്യാക്കൂട്ടം	സവിശേഷത	ബീജഗണിതരൂപം
0, 3, 6, 9, ...	3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മിച്ചം 0	$3n \quad (n = 0, 1, 2, 3...)$
1, 4, 7, 10, ...	3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മിച്ചം 1	$3n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, 3...)$
2, 5, 8, 11, ...	3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മിച്ചം 2	$3n + 2 \quad (n = 0, 1, 2, 3...)$

ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

(1) 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മിച്ചം 1 വരുന്ന ഒരു സംഖ്യയും, മിച്ചം 2 വരുന്ന ഒരു സംഖ്യയും തമ്മിൽ കൂട്ടുക. ഇത്തരം ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയെയും 3 കൊണ്ട് മിച്ചമില്ലാതെ ഹരിക്കാം എന്നതിന്റെ കാരണം ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(2) 12 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും 11 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളാണ് 12, 23, 34,

(i) ഈ സംഖ്യകളിൽ ഏതിനെയും 11 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മിച്ചം എത്രയാണ് ?

(ii) ഇവയുടെയെല്ലാം പൊതുവായ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

(iii) 100 എന്ന സംഖ്യ ഇക്കൂട്ടത്തിൽ ഉണ്ടാകുമോ ? 1000 ആയാലോ ?

(3) 21 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും 11 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളാണ് 21, 32, 43,...

(i) ഈ സംഖ്യകളിൽ ഏതിനെയും 11 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മിച്ചം എത്രയാണ് ?

(ii) ഇവയുടെയെല്ലാം പൊതുവായ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

(iii) 100 എന്ന സംഖ്യ ഇക്കൂട്ടത്തിൽ ഉണ്ടാകുമോ ? 1000 ആയാലോ ?

അക്കങ്ങളും സംഖ്യകളും

രണ്ടക്ക സംഖ്യകളെയെല്ലാം ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ വരിയും നിരയുമായി എഴുതാം:

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

ആദ്യത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകൾ, 10 നോട് 0 മുതൽ 9 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ കൂട്ടികിട്ടുന്നവ യാണ്. അപ്പോൾ അവയുടെയെല്ലാം പൊതുവായ ബീജഗണിതരൂപം

$$10 + n \quad (n = 0, 1, 2, ..., 9)$$

രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകളോ ?

$$20 + n \quad (n = 0, 1, 2, ..., 9)$$

എന്നെഴുതാം; അല്ലെങ്കിൽ

$$(10 \times 2) + n \quad (n = 0, 1, 2, ..., 9)$$

എന്നും എഴുതാം.

ഇങ്ങനെ ഓരോ വരിയിലെയും സംഖ്യകളുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതാമല്ലോ:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(10 \times 1) + n$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$(10 \times 2) + n$	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$(10 \times 3) + n$	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
$(10 \times 4) + n$	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
$(10 \times 5) + n$	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
$(10 \times 6) + n$	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
$(10 \times 7) + n$	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
$(10 \times 8) + n$	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
$(10 \times 9) + n$	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

ഇങ്ങനെ എഴുതുമ്പോൾ n എന്നത്, ഈ സംഖ്യകളുടെയെല്ലാം ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്തെ അക്കമാണെന്നു കാണാം.

ഇനി വരികളിലൂടെ നോക്കുന്നതിനു പകരം മുകളിൽനിന്നു താഴോട്ടു നോക്കിയാൽ, ഓരോ നിരയിലെയും സംഖ്യകളുടെ പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തെ അക്കം, 1 മുതൽ 9 വരെ മാറുന്നതു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തെ അക്കം m എന്നും കൂടി എഴുതിയാൽ എല്ലാ സംഖ്യകളെയും $10m + n$ എന്ന ബീജഗണിതരൂപത്തിലാക്കാം. അതായത്, രണ്ടക്ക സംഖ്യകളുടെയെല്ലാം പൊതുവായ ബീജഗണിതരൂപം

$$10m + n \qquad (m = 1, 2, ..., 9; \quad n = 0, 1, 2, ..., 9)$$

ഉദാഹരണമായി $m = 2, n = 5$ എന്നെടുത്താൽ
$(10 \times 2) + 5 = 25$ എന്ന സംഖ്യകിട്ടും; മറിച്ച്,
49 എന്ന സംഖ്യ കിട്ടാൻ $m = 4, n = 9$ എന്നെടുക്കണം.

ഇനി ഇത് ഉപയോഗിച്ചുള്ള ഒരു കണക്കുനോക്കാം: ഏതെങ്കിലും ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യയും അത് തിരിച്ചെഴുതിയാൽ കിട്ടുന്ന രണ്ടക്കസംഖ്യയും എടുത്ത്, വലുതിൽനിന്ന് ചെറുത് കുറയ്ക്കുക. ഉദാഹരണമായി,

$$21 - 12 = 9$$

$$64 - 46 = 18$$

$$52 - 25 = 27$$

അക്ഷരവും അർത്ഥവും

രണ്ടക്കസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം ബീജഗണിതരൂപമായ $10m + n$ എന്നതിൽ, m, n ഇവയെ രണ്ടു തരത്തിൽ കാണാം:

m എന്നത്

- സംഖ്യയുടെ പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തെ അക്കം
- സംഖ്യയെ പത്തുകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ഹരണഫലം

n എന്നത്

- സംഖ്യയുടെ ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്തെ അക്കം
- സംഖ്യയെ പത്തുകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള മിച്ചം

ഇങ്ങനെ ചെയ്യുമ്പോഴെല്ലാം അവസാനം കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾക്ക് പൊതുവായ എന്തെങ്കിലും സവിശേഷത കാണുന്നുണ്ടോ ?

ഇത് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പരിശോധിക്കാം:

ഇങ്ങനെയെടുക്കുന്ന സംഖ്യകളിൽ, വലുതിനെ $10m + n$ എന്നെടുക്കാം; ഇതിലെ അക്കങ്ങളായ

m, n ഇവയുടെ സ്ഥാനം പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ, തിരിച്ചെഴുതിയ സംഖ്യയാകുമല്ലോ;

അതായത്, തിരിച്ചെഴുതിയ സംഖ്യ $10n + m$.

ഇനി വലുതിൽ നിന്നു ചെറുതു കുറയ്ക്കാൻ $10m + n$ എന്ന സംഖ്യയിൽനിന്ന് $10n + m$ എന്ന തുക കുറയ്ക്കണം. അതിന് ആദ്യം $10n$ കുറച്ച്, തുടർന്ന് m കുറച്ചാൽ മതിയല്ലോ (**കണക്കിലെ ചുരുക്കെഴുത്ത്** എന്ന പാഠത്തിൽ $x - (y + z) = (x - y) - z$ എന്നു കണ്ടത് ഓർക്കുക)

അതായത്,

$$(10m + n) - (10n + m) = (10m + n - 10n) - m$$

ഇതിലെ $10m + n - 10n$ എന്നതിന്റെ അർഥമെന്താണ്? $10m$ എന്ന സംഖ്യയോട് n എന്ന സംഖ്യ കൂട്ടുക; പിന്നെ n ന്റെ 10 മടങ്ങ് കുറയ്ക്കുക. അപ്പോൾ, ഫലത്തിൽ n ന്റെ 9 മടങ്ങല്ലേ കുറച്ചിട്ടുള്ളൂ? അതായത്.

$$10m + n - 10n = 10m - 9n$$

(മറ്റൊരു വിധത്തിലും ആലോചിക്കാം;

$y > z$ ആണെങ്കിൽ $(x - y) + z = x - (y - z)$ എന്ന്, **കണക്കിലെ ചുരുക്കെഴുത്ത്** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. $10m + n - 10n$ എന്നതിനെ $10m - 10n + n$ എന്നെഴുതിയാൽ, ഇതുപയോഗിച്ച്,

$$\begin{aligned} 10m - 10n + n &= 10m - (10n - n) \\ &= 10m - 9n \end{aligned}$$

എന്നു കണക്കാക്കാം)

ഇനി തിരിച്ചെഴുതിയ സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\begin{aligned} (10m + n) - (10n + m) &= (10m + n - 10n) - m \\ &= (10m - 9n) - m \\ &= 10m - m - 9n \\ &= 9m - 9n \\ &= 9(m - n) \end{aligned}$$

ഈ വ്യത്യാസം 9 ന്റെ ഗുണിതമാണല്ലോ.

ഇങ്ങനെ ചെയ്തതിൽനിന്ന് മറ്റൊരു കാര്യവും കൂടി മനസ്സിലാക്കാം. $m - n$ എന്നത് സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഏതു രണ്ടക്കസംഖ്യയെയും തിരിച്ചെഴുതി വലുതിൽനിന്നു ചെറുതു കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് 9 ന്റെ ഗുണിതം ആണെന്നു മാത്രമല്ല, അക്കങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തെ 9 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യ ആണ് എന്നും കാണാം.

ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

(1) ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യയും, അതു തിരിച്ചെഴുതിയ സംഖ്യയും തമ്മിൽ കൂട്ടുക. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ എല്ലാം 11 ന്റെ ഗുണിതമാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(2) ഏതു രണ്ടക്കസംഖ്യയിൽ നിന്നും അതിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുക കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് 9 ന്റെ ഗുണിതമാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(3) (i) മൂന്നക്കസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം പൊതുവായ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

(ii) ഏതു മൂന്നക്കസംഖ്യയെയും തിരിച്ചെഴുതി, വലുതിൽനിന്നു ചെറുതു കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ 99 ന്റെ ഗുണിതമാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(iii) ഏതു മൂന്നക്കസംഖ്യയിൽ നിന്നും അതിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുക കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് 9 ന്റെ ഗുണിതമാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

13 ശതമാനം

ശതമാനവും ഭിന്നവും

ശതമാനം എന്താണെന്ന് ആറാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. അത് ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില സന്ദർഭങ്ങളും പരിചയപ്പെട്ടു. ഉദാഹരണമായി ഈ കണക്കു നോക്കുക:

> ഓണം പ്രമാണിച്ച് കൈത്തറി വസ്ത്രങ്ങൾക്ക് 30% വിലക്കിഴിവുണ്ട്. 3750 രൂപയ്ക്ക് വസ്ത്രങ്ങൾ വാങ്ങിയാൽ, എത്ര രൂപ കിഴിവു കിട്ടും ?

ഓരോ 100 രൂപയ്ക്കും 30 രൂപ കിഴിവ് എന്നാണല്ലോ പറയുന്നത്. അപ്പോൾ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

3000 രൂപയ്ക്ക് കിഴിവ്	:	900 രൂപ
700 രൂപയ്ക്ക് കിഴിവ്	:	210 രൂപ
50 രൂപയ്ക്ക് കിഴിവ്	:	15 രൂപ
ആകെ കിഴിവ്	:	1125 രൂപ

ഇങ്ങനെ ഓരോന്നായി കണക്കാക്കാതെ, നേരിട്ടു കണക്കാക്കാം. അതിന് ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

- ഏതു വിലയിലും എത്ര 100 കൾ ഉണ്ടോ അതിന്റെ 30 മടങ്ങാണ് കിഴിവ്.
- അതായത്, വിലയുടെ $\frac{1}{100}$ ഭാഗത്തിന്റെ 30 മടങ്ങ്; അഥവാ $\frac{30}{100}$ ഭാഗം.
- $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$
- അപ്പോൾ ഏതുവിലയുടെയും $\frac{3}{10}$ ഭാഗമാണ് കിഴിവ്.
- 3750 ന്റെ $\frac{3}{10}$ ഭാഗം $= 3750 \times \frac{3}{10} = \frac{3750 \times 3}{10} = \frac{375 \times 3 \times 10}{10} = 375 \times 3 = 1125$
- 3750 രൂപയ്ക്ക് കിഴിവ് 1125 രൂപ

ഈ ഗുണനം ദശാംശരൂപം ഉപയോഗിച്ചും ചെയ്യാം:

$$3750 \times 0.3 = 1125.0 = 1125$$

(കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച് ചെയ്യാൻ ഇതാണ് എളുപ്പം).

ശതമാനം ഉപയോഗിക്കുന്ന മറ്റൊരു സന്ദർഭം ഓർമ്മയുണ്ടോ ?

ബാങ്കുകളിലും മറ്റും പണം നിക്ഷേപിച്ചാൽ, നിശ്ചിത കാലത്തിനുശേഷം തിരിച്ചെടുക്കുമ്പോൾ അല്പം കൂടുതൽ കിട്ടുന്ന തുകയെയാണല്ലോ പലിശ എന്നു പറയുന്നത് (കടം തിരിച്ചടയ്ക്കുമ്പോൾ, വാങ്ങിയ തുകയേക്കാൾ കൂടുതൽ കൊടുക്കുന്നതും പലിശ തന്നെ).

ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

> ഒരു സഹകരണ ബാങ്കിൽ ഒരു വർഷത്തെ സ്ഥിരനിക്ഷേപത്തിന് 9% പലിശ കിട്ടും. 7500 രൂപ നിക്ഷേപിച്ചാൽ, ഒരു വർഷത്തിനുശേഷം എത്ര രൂപ കിട്ടും ?

ഓരോ 100 രൂപയ്ക്കും 9 രൂപയാണ് പലിശ. അപ്പോൾ 7500 രൂപയ്ക്ക് എത്ര പലിശ കിട്ടും എന്നാണ് കണക്കാക്കേണ്ടത്.

ഇതും ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ, ഭിന്നസംഖ്യ ഉപയോഗിച്ച് ചെയ്തുകൂടെ ?

100 ന്റെ $\frac{9}{100}$ ഭാഗമാണല്ലോ 9.

അപ്പോൾ ഓരോ 100 രൂപയ്ക്കും 9 രൂപ പലിശ എന്നതിനെ എങ്ങനെ പറയാം ?

ഏതു തുകയ്ക്കും, അതിന്റെ $\frac{9}{100}$ ഭാഗമാണ് പലിശ.

7500 ന്റെ $\frac{9}{100}$ ഭാഗം

$$7500 \times \frac{9}{100} = \frac{75 \times 9 \times 100}{100} = 75 \times 9 = 675$$

ദശാംശരൂപം ഉപയോഗിച്ച്

$$7500 \times 0.09 = 675.00 = 675$$

എന്നും കണക്കാക്കാം.

അപ്പോൾ 7500 രൂപ നിക്ഷേപിച്ചാൽ, ഒരു വർഷം കഴിയുമ്പോൾ 675 രൂപ പലിശയും ചേർത്ത് 7500 + 675 = 8175 രൂപ കിട്ടും.

ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തത് ശതമാനമായി പറഞ്ഞതിനെ ഭിന്നരൂപത്തിൽ ഭാഗമായി മാറ്റിയാണ്. സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില ശതമാനങ്ങളെ ഭിന്നരൂപത്തിൽ എഴുതിയ രണ്ടു പട്ടികകൾ ചുവടെ കാണാം. രണ്ടാമത്തെ പട്ടികയിൽ ഇതുപോലെ ഭിന്നങ്ങൾ എഴുതാമോ?

ശതമാനം	ഭിന്നരൂപം	ലഘുരൂപം
50%	$\frac{50}{100}$ ഭാഗം	$\frac{1}{2}$ ഭാഗം
25%	$\frac{25}{100}$ ഭാഗം	$\frac{1}{4}$ ഭാഗം

ശതമാനം	ഭിന്നരൂപം	ലഘുരൂപം
75%		
20%		

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

(1) ഒരു ഇലക്ട്രോണിക്സ് കമ്പനി, അവർ കഴിഞ്ഞ വർഷം നിർമ്മിച്ച ചില ഉപകരണങ്ങൾ വില കുറച്ചു വിൽക്കുന്നു. ഓരോന്നിന്റെയും വിലക്കുറവ് ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ കാണാം:

ഉപകരണം	പഴയ വില	കിഴിവ്
ലാപ്ടോപ്	65000	10%
മൊബൈൽഫോൺ	25000	20%
സ്മാർട് വാച്ച്	12000	30%

ഓരോന്നിന്റെയും ഇപ്പോഴത്തെ വില കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ ഓരോ മാസവും അയാൾക്കു കിട്ടുന്ന ലാഭത്തിന്റെ 2% ദുരിതാശ്വാസ നിധിയിലേക്ക് സംഭാവന കൊടുക്കുന്നു. 25000 രൂപ ലാഭം കിട്ടിയ ഒരു മാസം, അയാൾ എത്ര രൂപയാണ് ഇങ്ങനെ സംഭാവന കൊടുക്കുന്നത്?

(3) (i) രണ്ടരലക്ഷം മുതൽ അഞ്ചുലക്ഷം വരെ വാർഷിക വരുമാനമുള്ളവർ, അഞ്ചുശതമാനം വരുമാന നികുതി അടയ്ക്കണം. മൂന്നര ലക്ഷം രൂപ വാർഷിക വരുമാനമുള്ള ഒരാൾ എത്ര രൂപ നികുതി അടയ്ക്കണം?

(ii) അഞ്ചുലക്ഷം മുതൽ പത്തുലക്ഷം വരെ വാർഷിക വരുമാനമുള്ളവർ, അഞ്ചുലക്ഷത്തിന്റെ അഞ്ചുശതമാനവും, മിച്ചമുള്ള തുകയ്ക്ക് ഇരുപതു ശതമാനവും നികുതി അടയ്ക്കണം. ഏഴു ലക്ഷം രൂപ വാർഷിക വരുമാനമുള്ള ഒരാൾ എത്ര രൂപ നികുതി അടയ്ക്കണം?

മറ്റ് ചില ശതമാനങ്ങൾ

പണമിടപാടുകളിൽ മാത്രമല്ല, മറ്റു പല സന്ദർഭങ്ങളിലും ശതമാനക്കണക്ക് പറയാറുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി,

450 കുട്ടികൾ എഴുതിയ ഒരു പരീക്ഷയിൽ 80% കുട്ടികൾ ജയിച്ചു

എന്നു പറഞ്ഞാൽ എന്താണ് അർത്ഥം ?

പരീക്ഷ എഴുതിയവരിൽ $\frac{80}{100}$ ഭാഗം ജയിച്ചു എന്നാണ് ഇതിൽനിന്ന് മനസ്സിലാക്കേണ്ടത്.

$$\frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

അതിനാൽ, പരീക്ഷ എഴുതിയവരിൽ $\frac{4}{5}$ ഭാഗം ജയിച്ചു എന്നും പറയാം.

അപ്പോൾ ജയിച്ചവർ എത്ര പേരാണ് ?

$$450 \times \frac{4}{5} = 90 \times 4 = 360$$

മറിച്ചുള്ള ചോദ്യവും ആകാം:

ഒരു പരീക്ഷയെഴുതിയവരിൽ 360 പേർ ജയിച്ചു. ഇത് എഴുതിയവരുടെ 75% ആണ്. ആകെ എത്ര പേരാണ് പരീക്ഷയെഴുതിയത് ?

എഴുതിയവരുടെ $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ ഭാഗമാണല്ലോ ജയിച്ചത്. തിരിച്ചു പറഞ്ഞാൽ, ജയിച്ചവരുടെ $\frac{4}{3}$ മടങ്ങാണ് എഴുതിയവർ (**വിപരീതഭിന്നങ്ങൾ** എന്ന പാഠം). അതായത്, പരീക്ഷ എഴുതിയ വരുടെ എണ്ണം

$$360 \times \frac{4}{3} = 120 \times 4 = 480$$

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

(1) ഒരു സ്കൂളിലെ 50 അധ്യാപകരിൽ 80% സ്ത്രീകളാണ്. അവിടെ എത്ര അധ്യാപികമാരുണ്ട് ?

(2) രണ്ടു പേർ മത്സരിച്ച ഒരു തിരഞ്ഞെടുപ്പിൽ 1450 പേർ വോട്ടു ചെയ്തു. ജയിച്ച സ്ഥാനാർഥി ക്ക് 52% വോട്ടുകൾ കിട്ടി.

(i) ജയിച്ചയാൾക്ക് എത്ര വോട്ടുകിട്ടി ?

(ii) എത്ര വോട്ടുകളുടെ വ്യത്യാസത്തിലാണ് ജയിച്ചത് ?

(3) 1200 പേർ എഴുതിയ ഒരു പരീക്ഷയിൽ 65% പേർക്ക് എ ഗ്രേഡ് കിട്ടി. ഇത് എത്ര പേരാണ് ?

(4) ഒരു പുരയിടത്തിൽ 32 തെങ്ങുണ്ട്. ഇത് ആകെയുള്ള മരങ്ങളുടെ 50% ആണ്. പുരയിട ത്തിൽ ആകെ എത്ര മരങ്ങളുണ്ട് ?

(5) ഒരാൾ ഒരു മാസം ഭക്ഷണത്തിനായി 8400 രൂപ ചെലവാക്കി. ഇത് മാസവരുമാനത്തിന്റെ 25% ആണ്. അയാളുടെ മാസവരുമാനം എത്രയാണ് ?

കുറച്ചും കൂട്ടിയും

പാഠത്തിന്റെ തുടക്കത്തിൽ ചെയ്ത കണക്ക് അല്പം മാറ്റി ഇങ്ങനെ ചോദിച്ചാലോ ?

ഓണം പ്രമാണിച്ച് കൈത്തറി വസ്ത്രങ്ങൾക്ക് 30% വിലക്കിഴിവുണ്ട്. 3250 രൂപയ്ക്ക് വസ്ത്രങ്ങൾ വാങ്ങിയാൽ, എത്ര രൂപ കൊടുക്കണം ?

ഇത് എങ്ങനെയാണ് കണക്കാക്കുന്നത് ?

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ആദ്യം കിഴിവ് കണക്കാക്കാം;

$$3250 \times \frac{3}{10} = 325 \times 3 = 975$$

ഇനി, കൊടുക്കേണ്ട തുക 3250 – 975 = 2275 രൂപ എന്നു കണക്കാക്കാം.

കിഴിവ് കണക്കാക്കി പിന്നീട് അതു കുറയ്ക്കുന്നതിനു പകരം, നേരിട്ടുതന്നെ കൊടുക്കേണ്ട തുക കണക്കാക്കാം

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം,

- വിലയുടെ $\frac{3}{10}$ ഭാഗമാണ് കുറയ്ക്കേണ്ടത്
- ഒരു സംഖ്യയിൽനിന്ന് അതിന്റെ $\frac{3}{10}$ ഭാഗം കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് സംഖ്യയുടെ $\frac{7}{10}$ ഭാഗം
- അപ്പോൾ കൊടുക്കേണ്ടത്, വിലയുടെ $\frac{7}{10}$ ഭാഗം
- 3250 ന്റെ $\frac{7}{10}$ ഭാഗം

$$3250 \times \frac{7}{10} = 325 \times 7 = 2275$$

ഇത് ഇങ്ങനെയും പറയാം:

- 30% കിഴിവ് എന്നാൽ ഓരോ 100 രൂപയ്ക്കും 30 രൂപ കുറയും
- അപ്പോൾ 100 രൂപയുടെ വസ്ത്രങ്ങൾക്ക് 70 രൂപ കൊടുത്താൽ മതി
- അതായത്, വിലയുടെ 70%

നേരത്തെ ചെയ്ത മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കുക:

65000 രൂപ വിലയുണ്ടായിരുന്ന ലാപ്ടോപ്പിന് ഇപ്പോൾ 10% വിലക്കുറവുണ്ട്. ഇപ്പോഴത്തെ വില എത്രയാണ് ?

ഇപ്പോൾ കണ്ടത് പ്രകാരം, 10% വിലക്കുറവ് എന്നാൽ പഴയ വിലയുടെ 90% ആണ്.

ഇപ്പോഴത്തെ വില 65000 ന്റെ 90%

$$65000 \times \frac{90}{100} = 650 \times 90 = 65 \times 9 \times 100 = 58500$$

അതായത്, ഇപ്പോഴത്തെ വില 58500 രൂപ.

ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

സ്കൂട്ടർ നിർമ്മിക്കുന്ന ഒരു കമ്പനി, അടുത്ത മാസം മുതൽ 3% വില കൂട്ടാൻ തീരുമാനിച്ചു. ഇപ്പോൾ 80000 രൂപ വിലയുള്ള സ്കൂട്ടറിന് അടുത്ത മാസം എത്ര രൂപ കൊടുക്കണം ?

ആദ്യം വില എത്ര കൂടിയെന്ന് കണക്കാക്കി, പിന്നീട് അത് ഇപ്പോഴത്തെ വിലയോട് കൂട്ടി പുതിയ വില കണക്കാക്കാം.

അല്ലെങ്കിൽ ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

- ഇപ്പോഴത്തെ വിലയുടെ $\frac{3}{100}$ ഭാഗമാണ് കൂടുന്നത്.
- ഒരു സംഖ്യയോട് അതിന്റെ $\frac{3}{100}$ ഭാഗം കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്നത് $1 + \frac{3}{100} = \frac{103}{100}$ മടങ്ങ്
- അപ്പോൾ പുതുക്കിയ വില, പഴയ വിലയുടെ $\frac{103}{100}$ മടങ്ങ്
- 80000 ന്റെ $\frac{103}{100}$ മടങ്ങ്

$$80000 \times \frac{103}{100} = 800 \times 103 = 8 \times 103 \times 100 = 82400$$

അതായത്, അടുത്ത മാസം കൊടുക്കേണ്ടി വരുന്ന വില 82400 രൂപ.

$\frac{103}{100}$ മടങ്ങ് എന്നതിനെ 103% എന്നും പറയാം.

മറ്റൊരു കണക്ക്:

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം 10% കൂട്ടുകയും, വീതി 10% കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്ത്, പുതിയൊരു ചതുരം ഉണ്ടാക്കിയാൽ, പരപ്പളവിൽ എന്തു വ്യത്യാസമാണ് ഉണ്ടാകുന്നത് ?

10% കൂടുക എന്നാൽ 110% ആകുക; അതായത് $\frac{110}{100} = \frac{11}{10}$ മടങ്ങാകുക.

$$\text{പുതിയ നീളം} = \text{പഴയ നീളം} \times \frac{11}{10}$$

10% കുറയുക എന്നാൽ 90% ആകുക; അതായത് $\frac{90}{100} = \frac{9}{10}$ ഭാഗമാകുക.

$$\text{പുതിയ വീതി} = \text{പഴയ വീതി} \times \frac{9}{10}$$

ഇനി പുതിയ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, പുതിയ നീളവും പുതിയ വീതിയും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചാൽ മതിയല്ലോ.

$$\begin{aligned}\text{പുതിയ പരപ്പളവ്} &= \text{പുതിയ നീളം} \times \text{പുതിയ വീതി} \\ &= (\text{പഴയ നീളം} \times \frac{11}{10}) \times (\text{പഴയ വീതി} \times \frac{9}{10})\end{aligned}$$

$= (\text{പഴയ നീളം} \times \text{പഴയ വീതി}) \times \frac{11}{10} \times \frac{9}{10}$

$= \text{പഴയ പരപ്പളവ്} \times \frac{99}{100}$

= പഴയ പരപ്പളവിന്റെ 99%

അതായത്, പരപ്പളവ് 1% കുറയും

ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

(1) 4000 രൂപ വിലയുള്ള ഒരു സൈക്കിളിന് ഇപ്പോൾ 15% വിലക്കുറവുണ്ട്. ഇപ്പോഴത്തെ വില എത്ര രൂപയാണ് ?

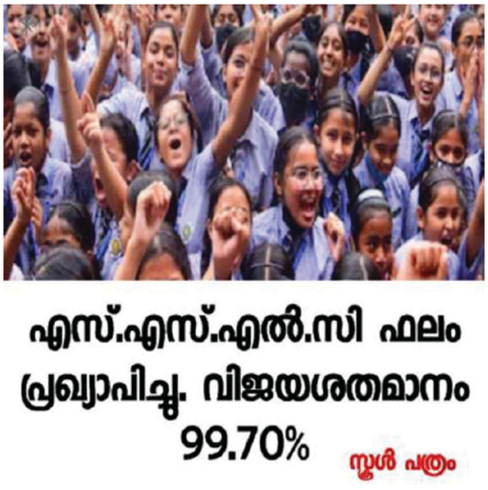
(2) കഴിഞ്ഞ വർഷം ഒരാളുടെ മാസശമ്പളം 30000 രൂപയായിരുന്നു. ഈ വർഷം ഇത് 8% കൂടി. ഇപ്പോൾ മാസശമ്പളം എത്ര രൂപയാണ് ?

(3) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും 10% വീതം കുറച്ചാൽ, പരപ്പളവ് എത്ര ശതമാനം കുറയും ?

(4) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും 10% വീതം കൂട്ടിയാൽ, പരപ്പളവ് എത്ര ശതമാനം കൂടും ?

ഭിന്നവും ശതമാനവും

സ്കൂൾ പത്രത്തിലെ ഈ വാർത്ത നോക്കൂ



99.70% എന്നാൽ എന്താണ് അർഥം ?

ഒരു സംഖ്യയുടെ നൂറിലൊരു ഭാഗത്തിന്റെ നിശ്ചിത മടങ്ങിനെയാണല്ലോ ശതമാനമായി പറയുന്നത്. ഉദാഹരണമായി 99% എന്നാൽ $\frac{99}{100}$ ഭാഗം; അതായത് $\frac{1}{100}$ ന്റെ 99 മടങ്ങ്.

ഇതുപോലെ 99.70% എന്നാൽ $\frac{1}{100}$ ന്റെ 99.70 മടങ്ങ്. അതായത്

$$\frac{1}{100} \times 99.70 = \frac{1}{100} \times \frac{9970}{100} = \frac{997}{1000}$$

ഇങ്ങനെ ഒരു സംഖ്യയുടെ $\frac{997}{1000}$ ഭാഗം എന്നു ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയുന്നതിനു പകരമാണ്, 99.7% (അല്ലെങ്കിൽ 99.70%) എന്നു പറയുന്നത്.

അപ്പോൾ മുകളിലെ വാർത്തയിൽ പറയുന്നത്, പരീക്ഷയിൽ ജയിച്ചവരുടെ എണ്ണം പരീക്ഷ എഴുതിയവരുടെ എണ്ണത്തിന്റെ $\frac{997}{1000}$ ഭാഗം എന്നാണ്.

ദശാംശരൂപത്തിനു പകരം ഭാഗത്തിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാരൂപവും ശതമാനക്കണക്കുകളിൽ പലപ്പോഴും ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, പൊതുമേഖലയിലുള്ള സ്ഥാപനങ്ങളിൽ ജോലി ചെയ്യുന്നവർക്ക് വർഷത്തിലൊരിക്കൽ ശമ്പളത്തിനു പുറമെ ഒരു നിശ്ചിത തുക കൊടുക്കാറുണ്ട്. ഇതിനെ ബോണസ് എന്നാണു പറയുന്നത്. സാധാരണയായി, വാർഷിക വരുമാനത്തിന്റെ $8\frac{1}{3}$% ആണ് ബോണസ്. ഇത് വാർഷിക വരുമാനത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

ആദ്യത്തെ കണക്കിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ ഇത് $\frac{1}{100}$ ന്റെ $8\frac{1}{3}$ മടങ്ങാണ്. അതായത്,

$$\frac{1}{100} \times 8\frac{1}{3} = \frac{1}{100} \times \frac{25}{3} = \frac{25}{300} = \frac{1}{12}$$

അപ്പോൾ $\frac{1}{12}$ ഭാഗം എന്നതിനെയാണ് $8\frac{1}{3}$% എന്നു പറയുന്നത്.

ഇതുപോലെ ചുവടെ ശതമാനമായി പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളെ ഭിന്നസംഖ്യാഭാഗങ്ങളായി എഴുതാമോ?

ഭാഗങ്ങൾ	
ശതമാനരൂപം	ഭിന്നസംഖ്യാരൂപം
$12\frac{1}{2}$%	
$6\frac{1}{4}$%	
$33\frac{1}{3}$%	
$66\frac{2}{3}$%	
$16\frac{2}{3}$%	
$83\frac{1}{3}$%	

ശതമാനമായി പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിനെ ഭിന്നസംഖ്യയായി മാറ്റുന്നത് എങ്ങനെയാണ്?

ഉദാഹരണമായി ഒരു സംഖ്യയുടെ $83\frac{1}{3}\%$ എന്നതിനെ ആ സംഖ്യയുടെ ഭിന്നസംഖ്യാഭാഗം ആക്കുന്നത് $\frac{1}{100}$ ന്റെ $83\frac{1}{3}$ മടങ്ങ് കണക്കാക്കിയാണല്ലോ.

$$\frac{1}{100} \times 83\frac{1}{3} = \frac{1}{100} \times \frac{250}{3} = \frac{250}{300} = \frac{5}{6}$$

ഇത് ഇങ്ങനെയും എഴുതാം.

$$\frac{5}{6} = 83\frac{1}{3} \times \frac{1}{100}$$

അതായത് $83\frac{1}{3}$ ന്റെ $\frac{1}{100}$ ഭാഗമാണ് $\frac{5}{6}$

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ,

> ശതമാനമായി പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിനെ ഭിന്നസംഖ്യയായി മാറ്റാൻ, ആ സംഖ്യയുടെ $\frac{1}{100}$ ഭാഗം കണക്കാക്കണം.

ഉദാഹരണമായി, $12\frac{1}{2}\%$ എന്നതിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാരൂപം ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

$$12\frac{1}{2} \times \frac{1}{100} = \frac{25}{2} \times \frac{1}{100} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$$

അതായത് $12\frac{1}{2}\%$ എന്നാൽ $\frac{1}{8}$ ഭാഗം.

അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യമാകാം: $\frac{1}{3}$ ഭാഗം എന്നതിനെ ശതമാനമായി പറയുന്നതെങ്ങനെ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

- ശതമാനമായി പറയുന്ന സംഖ്യയുടെ $\frac{1}{100}$ ഭാഗമാണ് $\frac{1}{3}$
- അപ്പോൾ ശതമാനസംഖ്യ, $\frac{1}{3}$ ന്റെ 100 മടങ്ങാണ്
- അതായത്,

$$\frac{1}{3} \times 100 = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$$

ഇങ്ങനെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം എന്നത് $33\frac{1}{3}\%$ ആണെന്നു കാണാം.

ഇതുപോലെ ഭിന്നസംഖ്യയായി പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഏതു ഭാഗത്തിനേയും ശതമാനമായി മാറ്റാമല്ലോ. പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ

> ഭിന്നസംഖ്യയായി പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിനെ ശതമാനമായി മാറ്റാൻ, ഭിന്നസംഖ്യയുടെ 100 മടങ്ങ് കണക്കാക്കണം.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

ഒരു പരീക്ഷ എഴുതിയ 120 കുട്ടികളിൽ 110 പേർ ജയിച്ചു. ജയിച്ചവരുടെ എണ്ണം, പരീക്ഷ എഴുതിയവരുടെ എണ്ണത്തിന്റെ എത്ര ശതമാനമാണ്?

ജയിച്ചവരുടെ എണ്ണം, പരീക്ഷ എഴുതിയവരുടെ എണ്ണത്തിന്റെ $\frac{110}{120} = \frac{11}{12}$ ഭാഗമാണല്ലോ

ഇത് ശതമാനമായി പറയാൻ, ഇപ്പോൾ കണ്ടതുപോലെ $\frac{11}{12}$ ന്റെ 100 മടങ്ങ് കണക്കാക്കണം

$$\frac{11}{12} \times 100 = \frac{11 \times 100}{12} = \frac{11 \times 25}{3} = \frac{275}{3} = 91\frac{2}{3}$$

അതായത്, പരീക്ഷ എഴുതിയവരുടെ $91\frac{2}{3}\%$ ജയിച്ചു.

കച്ചവടങ്ങളിൽ ലാഭമോ നഷ്ടമോ പറയുന്നത്, പലപ്പോഴും സാധനങ്ങൾ വാങ്ങാൻ ചെലവഴിച്ച തുകയുടെ ശതമാനമായിട്ടാണ്.

ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

10000 രൂപയ്ക്കു വാങ്ങിയ മേശ 10550 രൂപയ്ക്കു വിറ്റാൽ ലാഭം എത്ര ശതമാനമാണ്?

ലാഭമായി കിട്ടിയ തുക 10550 – 10000 = 550 രൂപ. അതായത് വാങ്ങിയ വിലയുടെ $\frac{550}{10000} = \frac{55}{1000}$ ഭാഗം.

ഇത് ശതമാനമായി പറയാൻ, നേരത്തെ ചെയ്ത കണക്കുകളിലെപ്പോലെ 100 മടങ്ങ് കണക്കാക്കണം:

$$\frac{55}{1000} \times 100 = \frac{55}{10} = 5\frac{1}{2}$$

അതായത്, ലാഭം $5\frac{1}{2}\%$

മറ്റൊരു വിധത്തിലും പറയാം:

$$\frac{55}{10} = 5.5$$

ലാഭം 5.5%

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്യാമല്ലോ

(1) 750 കുട്ടികളുള്ള ഒരു സ്കൂളിൽ 450 പെൺകുട്ടികളുണ്ട്. ആകെ കുട്ടികളുടെ എത്ര ശതമാനമാണ് പെൺകുട്ടികൾ?

(2) 30000 രൂപ ശമ്പളം കിട്ടുന്ന ഒരാൾ 8000 രൂപ ഭക്ഷണത്തിനായി ചെലവാക്കുന്നു. ഇത് ശമ്പളത്തിന്റെ എത്ര ശതമാനമാണ്?

(3) 4500 രൂപയ്ക്ക് വാങ്ങിയ സൈക്കിൾ 4000 രൂപയ്ക്ക് വിൽക്കേണ്ടി വന്നാൽ, നഷ്ടം എത്ര ശതമാനമാണ്?

(4) 1600 പേർ വോട്ടു ചെയ്ത ഒരു തെരഞ്ഞെടുപ്പിൽ ജയിച്ച സ്ഥാനാർഥിക്ക് 900 വോട്ടു കിട്ടി. ഇത് ആകെ വോട്ടിന്റെ എത്ര ശതമാനമാണ്?

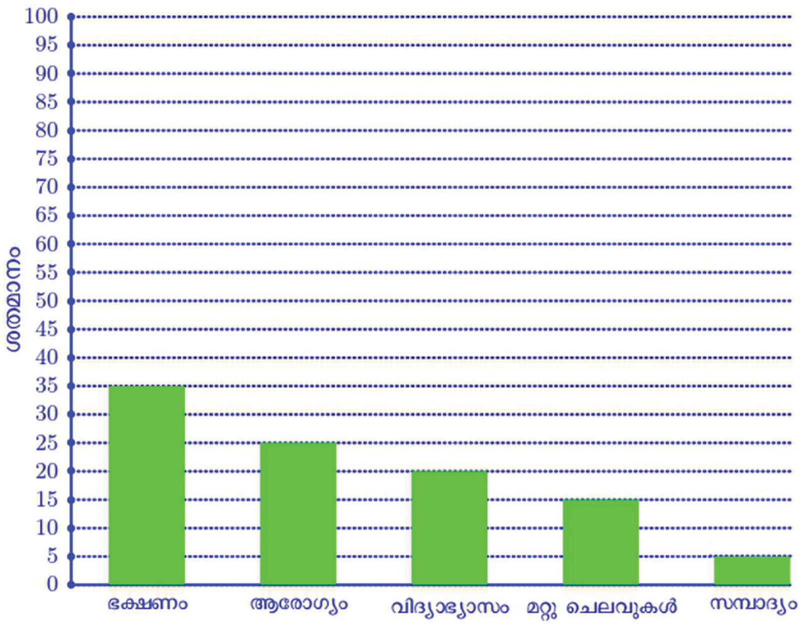
(5) സജയന്റെ ശമ്പളത്തേക്കാൾ 25% കൂടുതലാണ് അജയന്റെ ശമ്പളം. അജയന്റെ ശമ്പളത്തേക്കാൾ എത്ര ശതമാനം കുറവാണ് സജയന്റെ ശമ്പളം?

14 വിവരചിത്രങ്ങൾ

ഒരു വീട്ടിലെ ഒരു മാസത്തെ പലതരം ചെലവുകൾ, മൊത്തം ചെലവിന്റെ ശതമാനമായി കണക്കുകൂട്ടിയ പട്ടികയാണിത്.

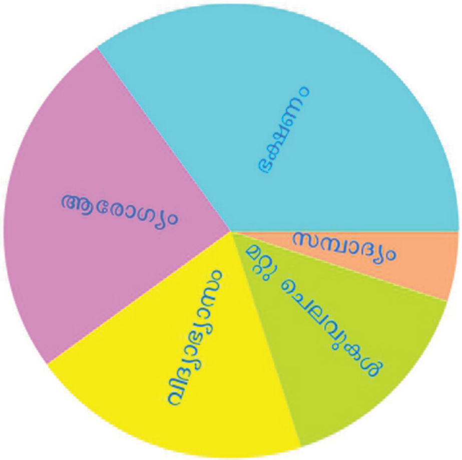
ഇനം	ചെലവ്
ഭക്ഷണം	35%
ആരോഗ്യം	25%
വിദ്യാഭ്യാസം	20%
മറ്റു ചെലവുകൾ	15%
സമ്പാദ്യം	5%

ഇത്തരം വിവരങ്ങളെ ചതുരചിത്രമായി വരയ്ക്കുന്നത് അഞ്ചാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.



ഈ ചിത്രത്തിൽനിന്ന് പല ഇനങ്ങളിലെ ചെലവുകളുടെ ഏറ്റക്കുറച്ചിൽ പെട്ടെന്നു കാണാം. എന്നാൽ ഓരോ ഇനത്തിലും ചെലവഴിച്ചത്, മൊത്തം ചെലവിന്റെ ഏകദേശം എത്ര ഭാഗമാണെന്നോ, ഓരോ ചെലവും മറ്റൊന്നിന്റെ ഏകദേശം എത്ര മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആണെന്നോ നോട്ടം കൊണ്ടു മാത്രം പറയാൻ കഴിയില്ല.

ഇനി ഇതേ വിവരങ്ങൾ മറ്റൊരു രീതിയിൽ വരച്ചിരിക്കുന്നതുനോക്കൂ.



ഈ ചിത്രത്തിൽനിന്ന്, ഭക്ഷണത്തിനാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ ചെലവ് എന്നു മാത്രമല്ല, അത് മൊത്തം ചെലവിന്റെ ഏതാണ്ട് മൂന്നിലൊന്നു ഭാഗമാണെന്നും കാണാമല്ലോ. അതുപോലെ, ആരോഗ്യ ആവശ്യങ്ങൾക്കായി ചെലവിട്ടത് നാലിലൊന്നു ഭാഗമാണെന്നും കാണാം.

ഇത്തരം ചിത്രത്തിനെ വൃത്തചിത്രം (pie chart) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

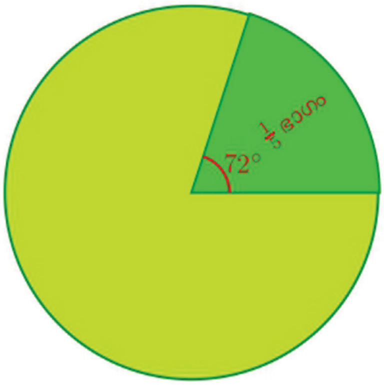
ഈ ചിത്രം വരച്ചത് എങ്ങനെയാണ് ?

പലഹാരചിത്രം

പടിഞ്ഞാറൻ നാടുകളിൽ ഏറെ പ്രചാരമുള്ള ഒരു പലഹാരത്തിന്റെ പേരാണ് പൈ (pie):

ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ കഷണങ്ങളാക്കിയാണ് ഇത് വീതിക്കുന്നത്. ഇതിൽ നിന്നാണ് pie chart എന്ന പേരുവന്നത്.

വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{5}$ ഭാഗം കിട്ടാൻ കേന്ദ്രത്തിൽ $360^\circ \times \frac{1}{5} = 72^\circ$ കോൺ വരച്ചത് ഓർമയുണ്ടോ ?

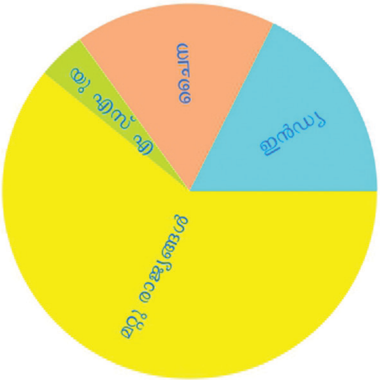


ചെലവു കണക്കിൽ, ഭക്ഷണത്തിനായുള്ള ചെലവ്, മൊത്തം ചെലവിന്റെ $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ ഭാഗമാണല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിൽ ഈ ഭാഗം അടയാളപ്പെടുത്തുന്നതിന്, കേന്ദ്രത്തിൽ എത്ര ഡിഗ്രി കോൺ വരയ്ക്കണം ?

$$360° \times \frac{7}{20} = 126°$$

ഇതുപോലെ ഓരോ ചെലവും അടയാളപ്പെടുത്തുന്നതിനുള്ള കോൺ കണക്കാക്കി, ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കാമോ ?

മറ്റൊരു വൃത്തചിത്രം നോക്കാം. ലോകത്തിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ ജനങ്ങളുള്ള രാജ്യം ഇന്ത്യയും, അടുത്തത് ചൈനയും, മൂന്നാമത് അമേരിക്കൻ ഐക്യനാടുകളുമാണ് (USA). ഈ മൂന്നു രാജ്യങ്ങളിലെ ജനസംഖ്യ വെവ്വേറെയും, മറ്റെല്ലാ രാജ്യങ്ങളിലെ ജനസംഖ്യ ഒന്നിച്ചും, ലോകജനസംഖ്യയുടെ ഭാഗങ്ങളായി ഇതിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



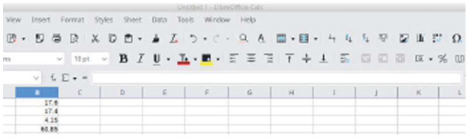
ഈ ചിത്രത്തിൽനിന്ന് ചുവടെപ്പറയുന്ന ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം പറയാമോ ?

- ഇന്ത്യയിലെ ജനസംഖ്യ, ലോകജനസംഖ്യയുടെ ഏതാണ്ട് എത്ര ഭാഗമാണ് ?
- ചൈനയിലെ ജനസംഖ്യയോ ?
- അമേരിക്കൻ ഐക്യനാടുകളിലെ ജനസംഖ്യ, ഇന്ത്യയിലെ ജനസംഖ്യയുടെ ഏകദേശം എത്ര ഭാഗമാണ് ?
- ഇന്ത്യ, ചൈന, യു.എസ്.എ. എന്നീ മൂന്നു രാജ്യങ്ങളിലെ മൊത്തം ജനസംഖ്യ, ലോകജനസംഖ്യയുടെ ഏകദേശം എത്ര ഭാഗമാകും ?

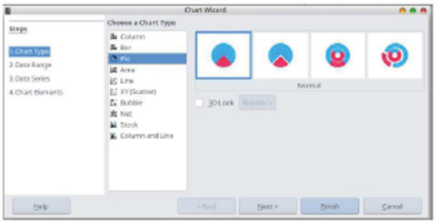
ഇതുപോലെ മറ്റെന്തെല്ലാം കാര്യങ്ങൾ ഈ ചിത്രത്തിൽ നിന്നു മനസ്സിലാക്കാം ?

കമ്പ്യൂട്ടർ ചിത്രം

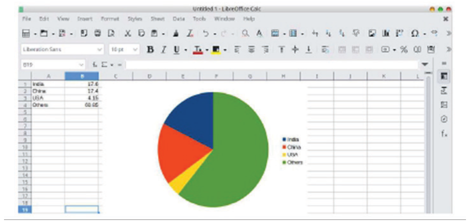
ഇന്ത്യ, ചൈന, യു.എസ്.എ. എന്നീ രജ്യങ്ങളിലെ ജനസംഖ്യ, ലോകജനസംഖ്യയുടെ 17.6%, 17.4%, 4.15% എന്നിങ്ങനെയാണ് കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നത്. ഇതിൽനിന്ന് നമുക്ക് വൃത്തചിത്രം വരയ്ക്കാൻ വിഷമമാണല്ലോ. ഇതിന് കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിക്കാം ആദ്യം LibreOffice Calc ൽ ഈ വിവരങ്ങൾ ടൈപ്പു ചെയ്യുക.



തുടർന്ന് വലതു മുകളിലെ രൂപത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത്, തുറന്നുവരുന്ന ജാലകത്തിലെ Chart Type എന്നതിൽ Pie ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക.

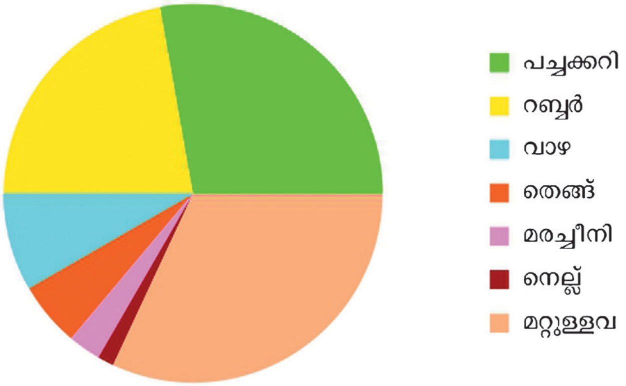


വൃത്തചിത്രം ഇങ്ങനെ കിട്ടും



ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

(1) ഒരു പഞ്ചായത്തിലെ ആകെ കൃഷിസ്ഥലം പല കൃഷികൾക്കായി എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കുന്നു എന്നു കാണിക്കുന്ന വൃത്തചിത്രമാണിത്.



(i) ഏതു കൃഷിക്കാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ സ്ഥലം ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നത് ? അത് മൊത്തം കൃഷിസ്ഥലത്തിന്റെ ഏതാണ്ട് എത്ര ഭാഗമാണ് ?

(ii) ഏതു കൃഷിക്കാണ് ഏറ്റവും കുറച്ചു സ്ഥലം ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നത് ? അത് മൊത്തം കൃഷി സ്ഥലത്തിന്റെ ഏതാണ്ട് എത്ര ഭാഗമാണ് ?

(iii) റബ്ബർകൃഷി ചെയ്തിരിക്കുന്നത് മൊത്തം കൃഷിസ്ഥലത്തിന്റെ ഏതാണ്ട് എത്ര ഭാഗമാണ് ?

(2) ഒരു ക്ലാസ്സിലെ 40 കുട്ടികളിൽ 20 പേർ സ്കൂൾബസ്സിലാണ് വരുന്നത്. 15 പേർ നടന്നും, 5 പേർ സൈക്കിളിലും വരുന്നു. ഈ വിവരങ്ങൾ കാണിക്കുന്ന വൃത്തചിത്രം വരയ്ക്കുക

(3) ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളിൽ 25% പേർക്ക് കണക്കു പരീക്ഷയിൽ A ഗ്രേഡും, 40% പേർക്ക് B ഗ്രേഡും, 20% പേർക്ക് C ഗ്രേഡും, ബാക്കിയുള്ളവർക്ക് D ഗ്രേഡും കിട്ടി. ഈ വിവരങ്ങൾ കാണിക്കുന്ന വൃത്തചിത്രം വരയ്ക്കുക.

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

കുറിപ്പുകൾ

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ഭാഗം IV ക

മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ

51 ക. മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ - താഴെപ്പറയുന്നവ ഭാരതത്തിലെ ഓരോ പൗരന്റെയും കർത്തവ്യം ആയിരിക്കുന്നതാണ് :

(ക) ഭരണഘടനയെ അനുസരിക്കുകയും അതിന്റെ ആദർശങ്ങളെയും സ്ഥാപനങ്ങളെയും ദേശീയപതാകയെയും ദേശീയഗാനത്തെയും ആദരിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഖ) സ്വാതന്ത്ര്യത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള നമ്മുടെ ദേശീയസമരത്തിന് പ്രചോദനം നൽകിയ മഹനീയാദർശങ്ങളെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയും പിൻതുടരുകയും ചെയ്യുക;

(ഗ) ഭാരതത്തിന്റെ പരമാധികാരവും ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും നിലനിർത്തുകയും സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഘ) രാജ്യത്തെ കാത്തുസൂക്ഷിക്കുകയും ദേശീയസേവനം അനുഷ്ഠിക്കുവാൻ ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ അനുഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ങ) മതപരവും ഭാഷാപരവും പ്രാദേശികവും വിഭാഗീയവുമായ വൈവിധ്യങ്ങൾക്കതീതമായി ഭാരതത്തിലെ എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കുമിടയിൽ, സൗഹാർദവും പൊതുവായ സാഹോദര്യമനോഭാവവും പുലർത്തുക, സ്ത്രീകളുടെ അന്തസ്സിന് കുറവു വരുത്തുന്ന ആചാരങ്ങൾ പരിത്യജിക്കുക;

(ച) നമ്മുടെ സമ്മിശ്രസംസ്കാരത്തിന്റെ സമ്പന്നമായ പാരമ്പര്യത്തെ വിലമതിക്കുകയും നിലനിറുത്തുകയും ചെയ്യുക;

(ഛ) വനങ്ങളും തടാകങ്ങളും നദികളും വന്യജീവികളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രകൃത്യാ ഉള്ള പരിസ്ഥിതി സംരക്ഷിക്കുകയും അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തുകയും, ജീവികളോട് കാരുണ്യം കാണിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ജ) ശാസ്ത്രീയമായ കാഴ്ചപ്പാടും മാനവികതയും, അന്വേഷണത്തിനും പരിഷ്കരണത്തിനും ഉള്ള മനോഭാവവും വികസിപ്പിക്കുക;

(ഝ) പൊതുസ്വത്ത് പരിരക്ഷിക്കുകയും ശപഥം ചെയ്ത് അക്രമം ഉപേക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഞ) രാഷ്ട്രം യത്നത്തിന്റെയും ലക്ഷ്യപ്രാപ്തിയുടെയും ഉന്നതതലങ്ങളിലേക്ക് നിരന്തരം ഉയരത്തക്കവണ്ണം വ്യക്തിപരവും കൂട്ടായതുമായ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും ഉൽക്കൃഷ്ടതയ്ക്കുവേണ്ടി അധ്വാനിക്കുക;

(ട) ആറിനും പതിനാലിനും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള തന്റെ കുട്ടിക്കോ തന്റെ സംരക്ഷണയിലുള്ള കുട്ടികൾക്കോ, അതതു സംഗതി പോലെ, മാതാപിതാക്കളോ രക്ഷാകർത്താവോ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനുള്ള അവസരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുക.

കുട്ടികളുടെ അവകാശങ്ങൾ

പ്രിയമുള്ള കുട്ടികളേ,

നിങ്ങൾക്കുള്ള അവകാശങ്ങളെന്തെല്ലാമെന്ന് അറിയേണ്ടതില്ലേ? അവകാശങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള അറിവ് നിങ്ങളുടെ പങ്കാളിത്തം, സംരക്ഷണം, സാമൂഹികനീതി എന്നിവ ഉറപ്പാക്കാൻ പ്രേരണയും പ്രചോദനവും നൽകും. നിങ്ങളുടെ അവകാശങ്ങൾ സംരക്ഷിക്കാൻ ഇപ്പോൾ ഒരു കമ്മീഷൻ പ്രവർത്തിക്കുന്നുണ്ട്. കേരള സംസ്ഥാന ബാലാവകാശസംരക്ഷണ കമ്മീഷൻ എന്നാണ് അതിന്റെ പേര്. എന്തെല്ലാമാണ് നിങ്ങൾക്കുള്ള അവകാശങ്ങൾ എന്നു നോക്കാം.

- സംസാരത്തിനും ആശയപ്രകടനത്തിനുമുള്ള സ്വാതന്ത്ര്യം
- ജീവന്റെയും വ്യക്തിസ്വാതന്ത്ര്യത്തിന്റെയും സംരക്ഷണം
- അതിജീവനത്തിനും പൂർണ്ണവികാസത്തിനുമുള്ള അവകാശം
- ജാതി-മത-വർഗ-വർണ്ണ ചിന്തകൾക്കതീതമായി ബഹുമാനിക്കപ്പെടാനും അംഗീകരിക്കപ്പെടാനുമുള്ള അവകാശം
- മാനസികവും ശാരീരികവും ലൈംഗികവുമായ പീഡനങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള സംരക്ഷണത്തിനും പരിചരണത്തിനുമുള്ള അവകാശം
- പങ്കാളിത്തത്തിനുള്ള അവകാശം
- ബാലവേലയിൽനിന്നും ആപൽക്കരമായ ജോലികളിൽനിന്നുമുള്ള മോചനം
- ശൈശവവിവാഹത്തിൽനിന്നുള്ള സംരക്ഷണം
- സ്വന്തം സംസ്കാരം അറിയുന്നതിനും അതനുസരിച്ച് ജീവിക്കുന്നതിനുമുള്ള സ്വാതന്ത്ര്യം
- അവഗണനകളിൽനിന്നുള്ള സംരക്ഷണം
- സൗജന്യവും നിർബന്ധിതവുമായ വിദ്യാഭ്യാസ അവകാശം
- കളിക്കാനും പഠിക്കാനുമുള്ള അവകാശം
- സ്നേഹവും സുരക്ഷയും നൽകുന്ന കുടുംബവും സമൂഹവും ലഭ്യമാകാനുള്ള അവകാശം

നിങ്ങളുടെ ചില ഉത്തരവാദിത്വങ്ങൾ

- സ്കൂൾ, പൊതുസംവിധാനങ്ങൾ എന്നിവ നശിപ്പിക്കാതെ സംരക്ഷിക്കുക.
- സ്കൂളിലും പഠനപ്രവർത്തനങ്ങളിലും കൃത്യനിഷ്ഠ പാലിക്കുക.
- സ്കൂൾ അധികാരികളെയും അധ്യാപകരെയും മാതാപിതാക്കളെയും സഹപാഠികളെയും ബഹുമാനിക്കുകയും അംഗീകരിക്കുകയും ചെയ്യുക.
- ജാതി-മത-വർഗ-വർണ്ണ ചിന്തകൾക്കതീതമായി മറ്റുള്ളവരെ ബഹുമാനിക്കാനും അംഗീകരിക്കാനും സന്നദ്ധരാവുക.

ബന്ധപ്പെടേണ്ട വിലാസം:

കേരള സംസ്ഥാന ബാലാവകാശസംരക്ഷണ കമ്മീഷൻ

ശ്രീ ഗണേഷ്, റ്റി.സി. 14/2036, വാൻറോസ് ജംങ്ഷൻ,

കേരള യൂണിവേഴ്സിറ്റി പി.ഒ, തിരുവനന്തപുരം – 34

ഫോൺ 0471 – 2326603

ഇ- മെയിൽ childrights.cpcr@kerala.gov.in, rte.cpcr@kerala.gov.in

വെബ്സൈറ്റ് : www.kescpcr.kerala.gov.in

ചൈൽഡ് ഹെൽപ്പ് ലൈൻ - 1098, ക്രൈം സ്റ്റോപ്പർ - 1090, നിർഭയ – 1800 425 1400

കേരള പൊലീസ് ഹെൽപ്പ് ലൈൻ - 0471 – 3243000/44000/45000

*online **R.T.E Monitoring : www.nireekshana.org.in***