# ಗಣಿತ

## MATHEMATICS

## ತರಗತಿ X

**Part - 2**

ಕೇರಳ ಸರಕಾರ
ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ

ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಮಿತಿ (SCERT),
2019

NT-919-1-MATHS-10-K-VOL.2

## ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

ಜನಗಣ ಮನ ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ
ಪಂಜಾಬ ಸಿಂಧು ಗುಜರಾತ ಮರಾಠಾ
ದ್ರಾವಿಡ ಉತ್ಕಲ ವಂಗ
ವಿಂಧ್ಯ ಹಿಮಾಚಲ ಯಮುನಾ ಗಂಗಾ
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿತರಂಗ
ತವಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ
ತವಶುಭ ಆಶಿಷ ಮಾಗೇ
ಗಾಹೇ ತವ ಜಯ ಗಾಥಾ
ಜನಗಣ ಮಂಗಲದಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ
ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ
ಜಯ ಜಯ ಜಯ ಜಯಹೇ

## ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

ಭಾರತವು ನನ್ನ ದೇಶ. ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ ಸಹೋದರ, ಸಹೋದರಿಯರು.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ಅದರ ಸಂಪನ್ನ ಹಾಗೂ ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣವಾದ ಪರಂಪರೆಗೆ ನಾನು ಹೆಮ್ಮೆಪಡುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ತಂದೆ, ತಾಯಿ ಮತ್ತು ಗುರುಹಿರಿಯರನ್ನು ಗೌರವಿಸುತ್ತೇನೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರೊಡನೆ ಸೌಜನ್ಯದಿಂದ ವರ್ತಿಸುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶ ಮತ್ತು ನನ್ನ ದೇಶದ ಜನರಿಗೆ ನನ್ನ ಶ್ರದ್ಧೆಯನ್ನು ಮುಡಿಪಾಗಿಡುತ್ತೇನೆ. ಅವರ ಕ್ಷೇಮ ಮತ್ತು ಸಮೃದ್ಧಿಯಲ್ಲೇ ನನ್ನ ಆನಂದವಿದೆ.

ಪ್ರೀತಿಯ ಮಕ್ಕಳೇ,

ಅಳತೆಗಳ ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳ ಅಧ್ಯಯನವು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಪ್ರಧಾನ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದಲೇ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಸಮಾಜಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಮಂಡಿಸಲು ಗಣಿತವು ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಬರುವುದು. ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನಾಗಿಸಿಯೂ ಆರಂಭಿಸುವಾಗ ಗಣಿತದ ಆಶಯ ಮಂಡಲವು ರೂಪುಗೊಳ್ಳುವುದು. ಸಂಖ್ಯಾಸಂಬಂಧಗಳು ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಕ್ಯಗಳಾಗುವುದು. ವಸ್ತುಗಳ ಕಾರ್ಯಕಾರಣ ಸಂಬಂಧವು ಆಶಯಗಳ ಯುಕ್ತಿಯುಕ್ತತೆಗಳಾಗಿ ಬೆಳೆಯುವುದು. ಗಣಿತ ತತ್ವಗಳು ರೂಪುಗೊಳ್ಳುವುದು. ಇವು ಹೆಚ್ಚಿನ ಫಲಪ್ರದವಾದ ಪ್ರಯೋಗಗಳತ್ತ ಮುನ್ನಡೆಸುವುದು. ಗಣಿತ ತತ್ವಗಳ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇಂದು ಕ್ಲಿಷ್ಟಕರವಾದ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವುದು ಮತ್ತು ಸಂಕೀರ್ಣವಾದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯಾಗಿದೆ. ಕಾರ್ಯದಕ್ಷತೆಯಿಂದ ಕಂಪ್ಯೂಟರನ್ನುಪಯೋಗಿಸಲು ಗಣಿತವು ಅತ್ಯಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ಗಳಿಗೆ ಗಣಿತದ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲೂ, ಇನ್ನಿತರ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿರುವ ಸ್ವಾಧೀನವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲೂ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ಎಂಬ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ ಮತ್ತು ಪೈಥನ್ ಎಂಬ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಸಮಗ್ರ ಪೋರ್ಟಲ್, ಕ್ಯೂ.ಆರ್. ಕೋಡ್ ಎಂಬಿವುಗಳ ಮೂಲಕ ಲಭ್ಯವಿದೆ.

ಪ್ರೀತಿಪೂರ್ವಕ ಹಾರ್ದ್ರೈಕೆಗಳೊಂದಿಗೆ

**ಡಾ. ಜೆ. ಪ್ರಸಾದ್**

ನಿರ್ದೇಶಕರು

ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ

ವಿದ್ಯಾಭವನ, ಪೂಜಪ್ಪುರ, ತಿರುವನಂತಪುರ–695012

*Prepared by :*

**State Council of Educational Research and Training (SCERT)**
Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012, Kerala

*Website* : www.scertkerala.gov.in
*E-mail* : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869

Typesetting and Layout : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

© Department of General Education, Government of Kerala

# ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ


7. ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ........................................ 159

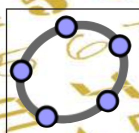
8. ಘನಾಕೃತಿಗಳು ........................................ 187

9. ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ ........................ 211

10. ಬಹುಪದಗಳು ........................................ 233

11. ಸ್ಟ್ಯಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್ ........................................ 243

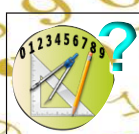
**ಈ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗಿದೆ.**



ಐ.ಸಿ.ಟಿ. ಸಾಧ್ಯತೆ

ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ನೋಡೋಣ

ಸಂಶೋಧನೆ



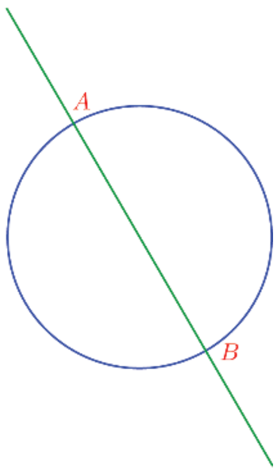

ಚರ್ಚಿಸೋಣ

ಎನ್.ಎಸ್.ಕ್ಯೂ.ಎಫ್.

# ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು

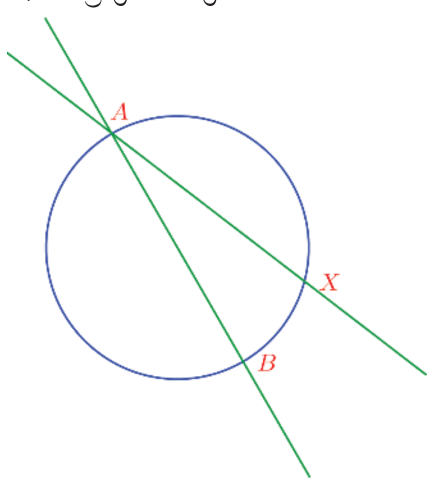
## ಗೆರೆಯೂ ವೃತ್ತವೂ

ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

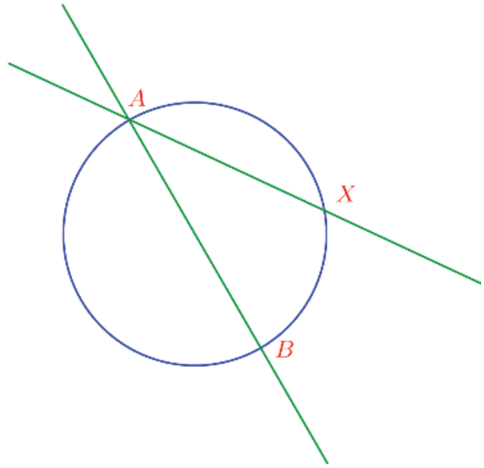



ವೃತ್ತದ $A$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸವು $AB$ ಆಗಿದೆ; ಇದನ್ನು ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲೂ ಮುಂದುವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವ್ಯಾಸದ ಬದಲಾಗಿ $A$ ಯ ಮೂಲಕ ಇನ್ನೊಂದು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಎಳೆದು ಇದರಂತೆ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರವು ಸಿಗುವುದು.

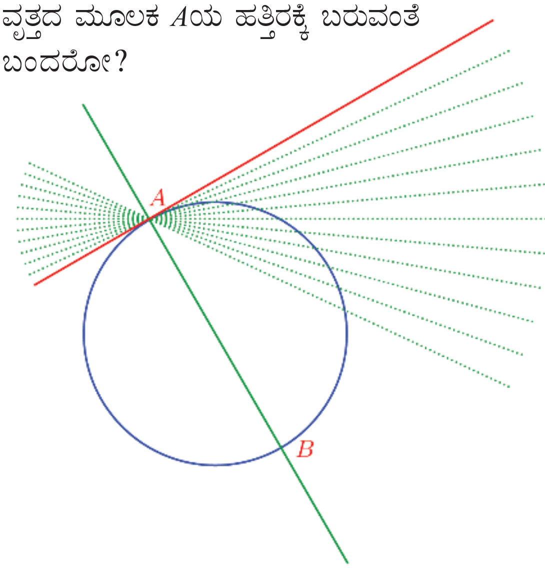


$A$ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆ, $X$ನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ $A$ಯ ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ತರುವುದಾದರೋ?




ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ O ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ A, X ಎಂಬಂತೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. O, A ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು A, X ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. X ನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು A ಯ ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ತರುವಾಗ AX ಎಂಬ ಗೆರೆಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು? X ಎಂಬ ಬಿಂದು A ಗೆ ತಲುಪುವಾಗಲೋ? O, X ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿರಿ. X ನ ಸ್ಥಾನ A ಗೆ ತಲುಪುವಾಗ OAX, AOX ಎಂಬೀ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದೆಂದು ನೋಡಿರಿ.

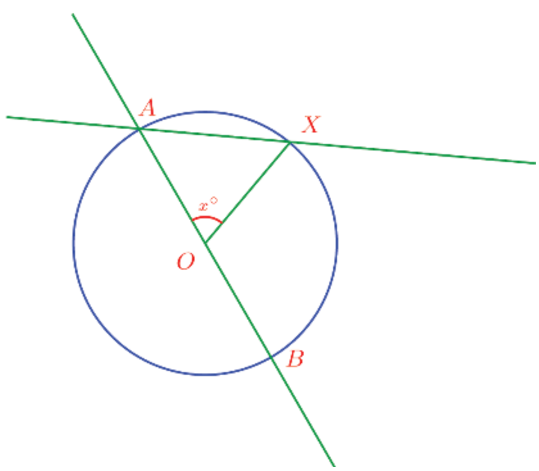
ಹೀಗೆ $X$ನ್ನು ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ $A$ಯ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವಂತೆ ಮಾಡುತ್ತಾ ಬಂದರೋ?



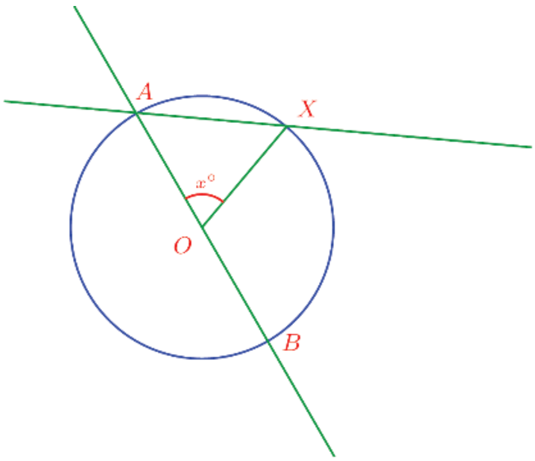

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೆಂಪುಗೆರೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು $A$ಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರವೇ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು ಅಲ್ಲವೆ?

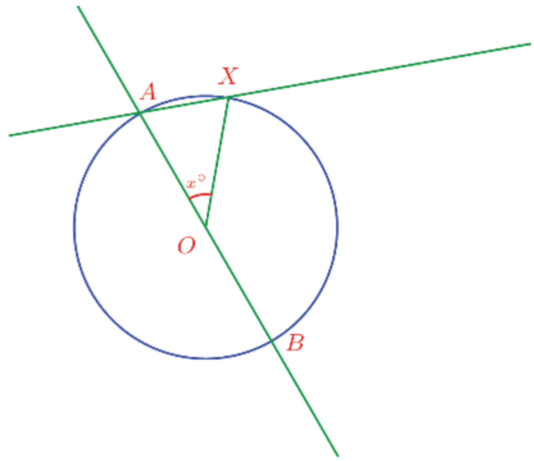
ಈ ಗೆರೆಯನ್ನು ವೃತ್ತದ $A$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ (tangent) ಎಂದು ಹೇಳುವುದು. ಚಿತ್ರವನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ನೋಡಿರಿ. ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೊಳಗೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ?

ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಲು, $AX$ ಎಂಬ ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $x^\circ$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.



$X$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $A$ಯ ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ಬಂದಂತೆ $AX$ ಎಂಬ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವೂ ಅದರ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವೂ ಚಿಕ್ಕದಾಗುವುದು; ಅಂದರೆ $x$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಸೊನ್ನೆಯವರೆಗೆ ತಲುಪುವುದು.

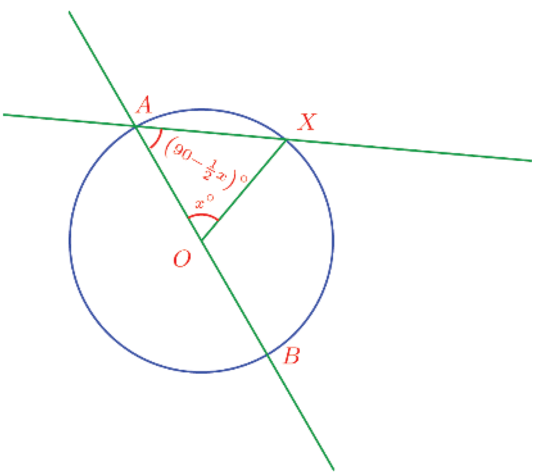



ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನವೋ? $AOX$ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಕೋನ

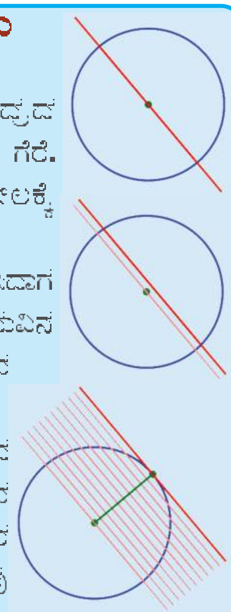
$$\frac{1}{2}(180-x)^{\circ} = \left(90-\frac{1}{2}x\right)^{\circ}$$

ಆಗಿದೆ.



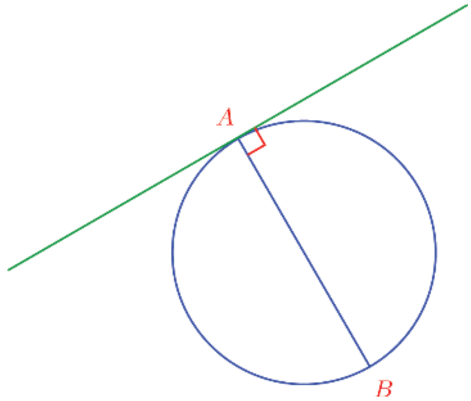

$X$ ಎಂಬ ಬಿಂದು, $A$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ತಲುಪುತ್ತಾ ಇರುವಾಗ, ಈ ಕೋನ $90^{\circ}$ಯ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವುದು. ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗುವಾಗ, ನಿಖರವಾಗಿ $90^{\circ}$ ಆಗುವುದು.

### ಚಲಿಸುವ ಗೆರೆಗಳು



ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಒಂದು ವೃತ್ತ, ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆ. ಗೆರೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಿದರೆ? ಗೆರೆಯನ್ನು ಪುನಃ ಪುನಃ ಸರಿಸಿದಾಗ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಗೆರೆಗೆ ತಲುಪುವುದಲ್ಲವೆ? ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಕೊನೆಗೆ ಸಿಕ್ಕಿದ ಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆ ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗುವುದಲ್ಲವೆ.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ತ್ರಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದು (Point on Object) ವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರ ಮೂಲಕ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ತಲುಪುವಾಗ ಗೆರೆಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು?



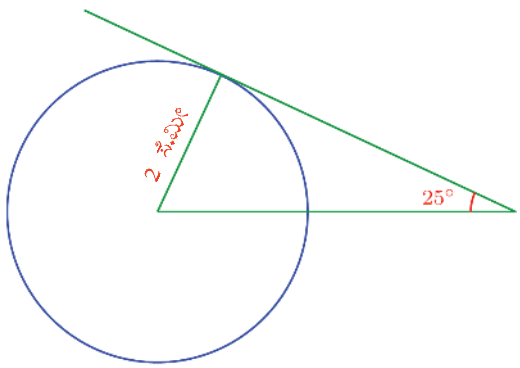

ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

**ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆ, ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು.**

ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸಲು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ Tangents ನ್ನು ತೆಗೆದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಸಾಕು. ಬಿಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಾದರೆ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಲಭಿಸುವುದಲ್ಲವೆ. ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿದ್ದರೋ?

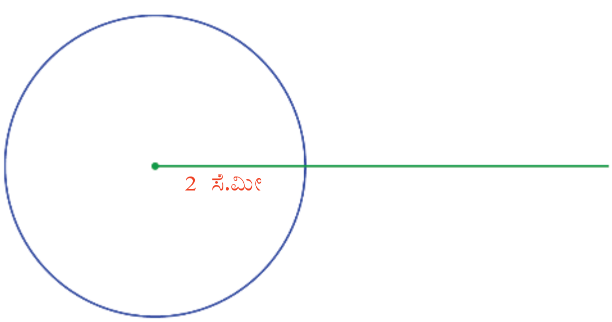
ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಅದರ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಎಳೆದು ಅದಕ್ಕೆ Trace on ನೀಡಿರಿ. ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದ ಬಿಂದುವಿಗೆ Animation ಕೊಟ್ಟು ನೋಡಿರಿ.

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ; ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನ ಗೆರೆ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿದೆ.




ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಟುಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದೇ?

ಮೊದಲು 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ತ್ರಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



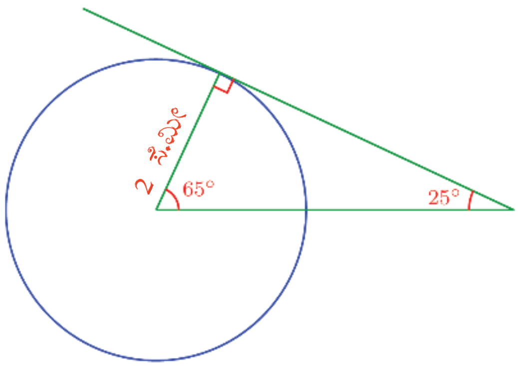

ಈ ಗೆರೆಯೊಂದಿಗೆ 25° ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವ ಗೆರೆಯು ಬೇಕಾಗಿರುವುದು. ಗೆರೆಯಲ್ಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸ್ಥಾನದಿಂದ 25° ಬಾಗುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆದರೆ ಅದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಯಾಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ?

ಇನ್ನು ವೃತ್ತದ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಎಳೆಯಬೇಕು? ಅದು ಮೊದಲಿನ ಗೆರೆಯನ್ನು $25^\circ$ ಬಾಗುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಬೇಕಲ್ಲವೇ.

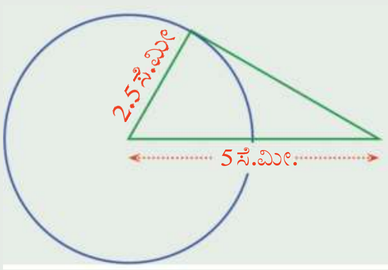
ಮೊದಲಿನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ನೋಡಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಕೋನ ಲಂಬಕೋನ ಮತ್ತು ಮತ್ತೊಂದು ಕೋನವು $25^\circ$ ಆಗಿವೆ.

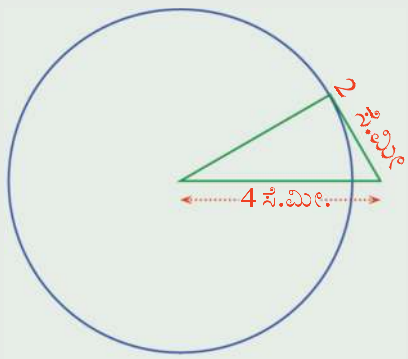
ಆಗ ಮೂರನೇ ಕೋನ $65^\circ$.

ಇನ್ನು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ.



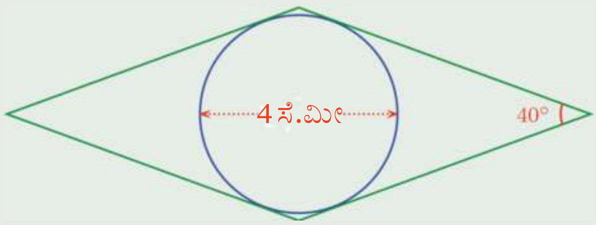
(1) ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ, ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಗೆರೆ, ಇವುಗಳು ಸೇರಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.




ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ.

(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ.



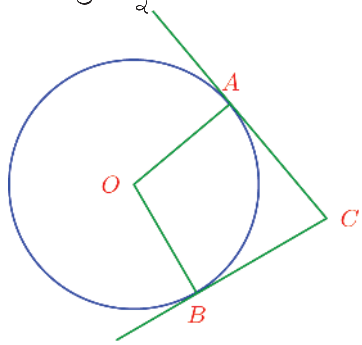

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ.

(3) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರಿ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಚತುರ್ಭುಜ ಉಂಟಾಗುವುದು?

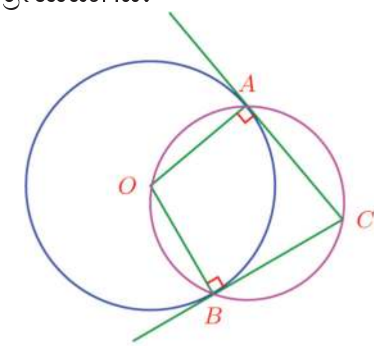
## ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೂ ಕೋನಗಳೂ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.




$O$ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ $A, B$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು, $C$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು.

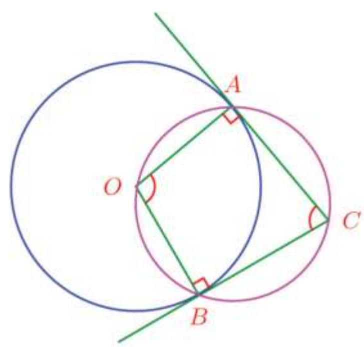
$OACB$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ $A, B$ ಎಂಬೀ ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಕೋನಗಳು ಲಂಬ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ; ಆದುದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ $180^\circ$. ಆಗ ಈ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿದೆ.




ಅಂದರೆ,

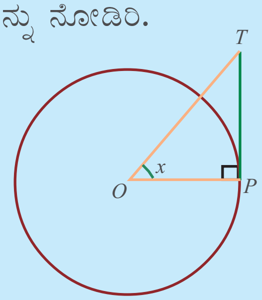
**ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ, ಅದರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು, ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು, ಇವುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿದೆ.**

ಈ ರೀತಿಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವೂ $180^\circ$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ.




### ಹೆಸರಿನ ವಿವರ

ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು ಎಂಬರ್ಥವಿರುವ tangere ಎಂಬ ಲಾಟಿನ್ ಶಬ್ದದಿಂದಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ಇಂಗ್ಲೀಷಿನಲ್ಲಿ tangent ಎಂಬ ಹೆಸರು ಬಂದಿದೆ. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ tan ಎಂಬ ಅಳತೆಯ ಪೂರ್ಣ ಹೆಸರು tangent ಎಂದಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಯೊಂದಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು? ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



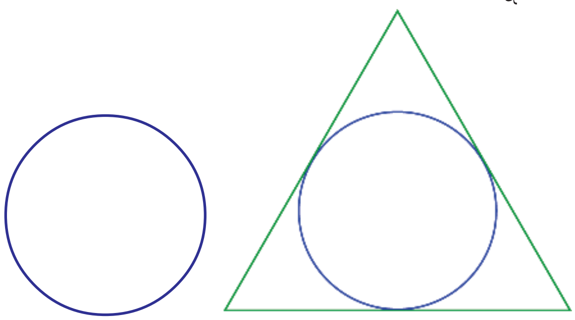

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 1 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $PT$ ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಉದ್ದ $\tan x$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

**ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನ ಮತ್ತು ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನ, ಇವುಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿವೆ.**

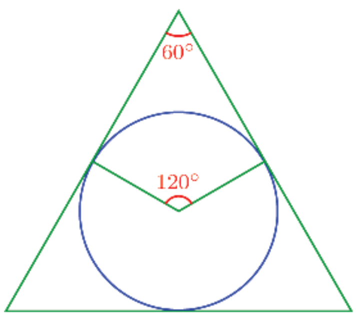
FAC6IJ

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಕೆಲವು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಒಳಗೊಂಡ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

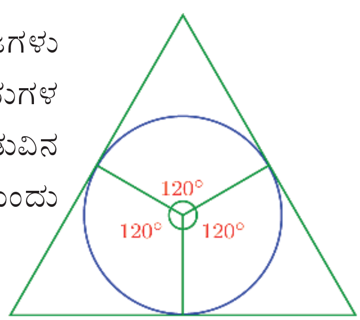


ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಗುವಂತೆ ಮಾಡಬೇಕಲ್ಲವೇ. ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾದುದರಿಂದ, ಇವುಗಳು ಸೇರುವಲ್ಲಿನ ಕೋನ $60^{\circ}$ ಆಗಿದೆ.

ಇವುಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನವೊ?

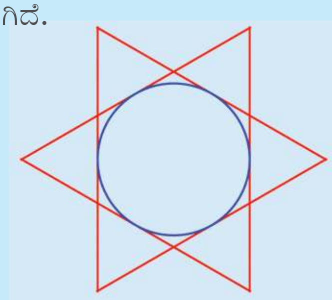



ಇದರಂತೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲಾ $120^{\circ}$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಾಣುವುದು.

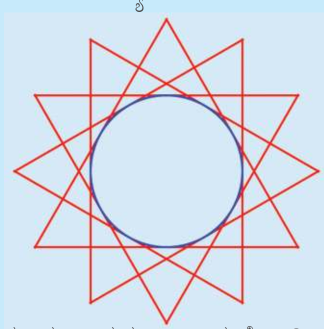



### ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತ

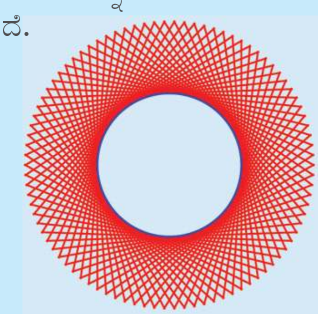
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಆರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಒಂದು ನಕ್ಷತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 12 ಮಾಡಿದರೋ?



ಇದು ಕಂಪ್ಯೂಟರನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, 90 ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ರಚಿಸಲಾದ ಚಿತ್ರವಾಗಿದೆ.

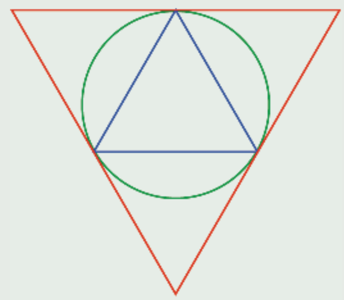


ಆಗ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ $120^\circ$ ಎಡೆಬಿಟ್ಟು ಮೂರು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅವುಗಳ ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ತ್ರಿಕೋನ ಸಿಗುವುದು.

3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

(1) ತ್ರಿಜ್ಯ 2.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಹಾಗೂ ಕೋನಗಳು $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(2) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಚಿಕ್ಕ (ನೀಲ) ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. ಅದರ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ದೊಡ್ಡ (ಕೆಂಪು) ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಾಗಿವೆ.

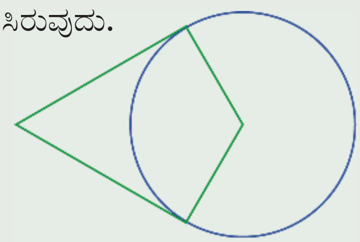


i) ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವೆಂದೂ ಅದರ ಭುಜಗಳು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ii) ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವಂತೆ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

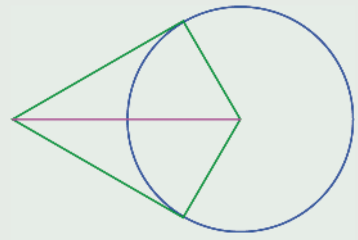
ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Angle with Given Size ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ $120^\circ$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವು ಲಭಿಸುವುದು. ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಹಾಗೂ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲೂ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ $120^\circ$ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟರೆ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು ಸಹ ಸಿಗುವುದು. ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. Segment ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು hide ಮಾಡೋಣ. ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ Trace ನೀಡಿದ ಬಳಿಕ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ತೆಗೆದ ಬಿಂದುವಿಗೆ Animation ನೀಡಿರಿ.

(3) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನೂ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನೂ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವುದು.

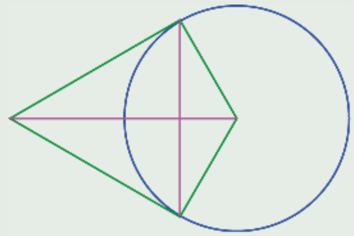


i) ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ii) ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು, ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

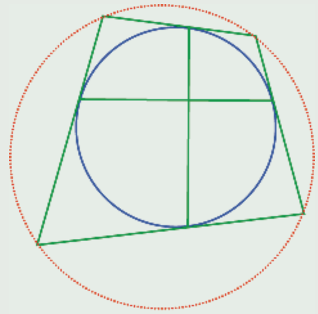


iii) ಈ ಗೆರೆಯು, ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಜ್ಯಾದ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



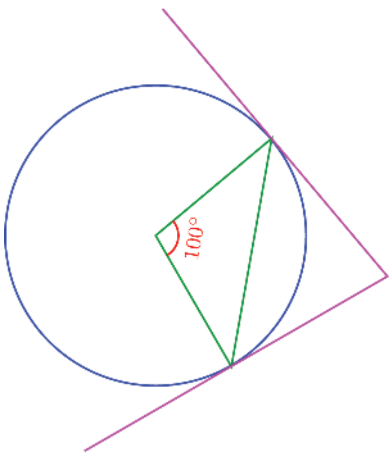
(4) ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. (ವೃತ್ತಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿನ ಜ್ಯಾ, ಕೋನ ಮತ್ತು ಚಾಪ ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿನ ಲೆಕ್ಕ (7) ನ್ನು ನೋಡಿರಿ.) ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ವ್ಯಾಸವಾದರೆ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಿಗುವುದು? ಎರಡೂ ಜ್ಯಾಗಳು ವ್ಯಾಸಗಳಾದರೋ?

FAL2K7

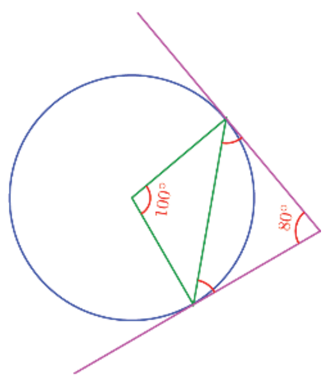


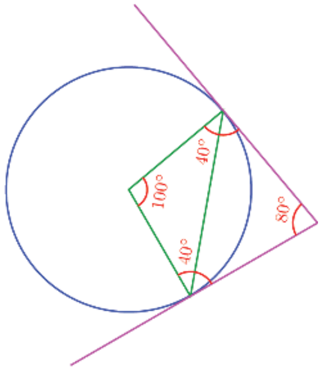
## ಜ್ಯಾವೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯೂ

ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಎರಡು ತುದಿಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವುದು.



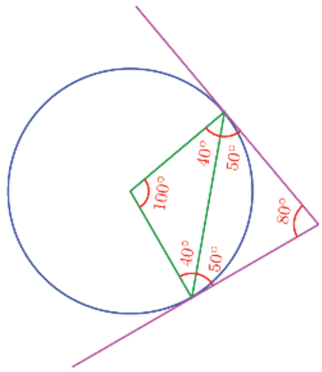

ಇದರಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನವು 80° ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನಗಳೋ?





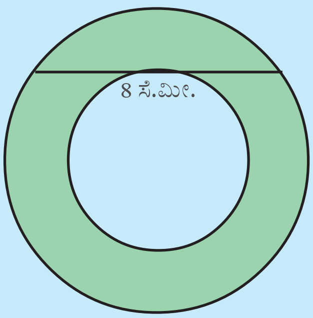

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ಸಮಾನವಾದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ ಆಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನ $40^\circ$ ಆಗಿರುವುದು.

ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನ $90^\circ$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ; ಆಗ ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನ $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$



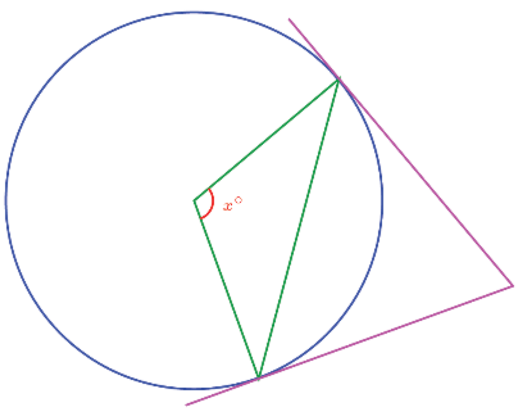

**ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸಮಸ್ಯೆ**

ಕೆಳಗಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಹಸಿರು ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟಾಗಿದೆ?




ಇದು, ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನದ ಅರ್ಧವಲ್ಲವೆ?

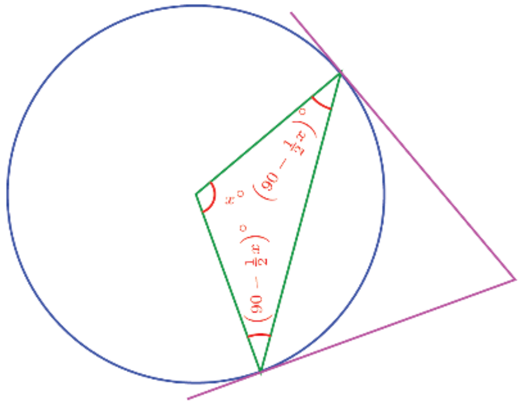
ಯಾವುದೇ ಚಾಪಕ್ಕೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ? ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $x^\circ$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೋಡುವ.

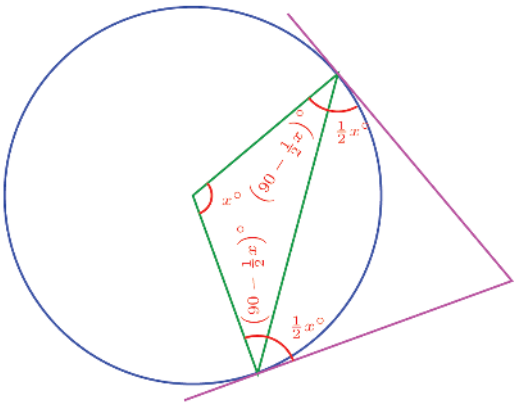


ಆಗ ಹಸಿರು ತ್ರಿಕೋನದ ಇತರ ಎರಡು ಕೋನಗಳು

$$\frac{1}{2}(180 - x)^{\circ} = \left(90 - \frac{1}{2}x\right)^{\circ}$$

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನವು $90^{\circ}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನವು $\frac{1}{2}x^{\circ}$ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ?

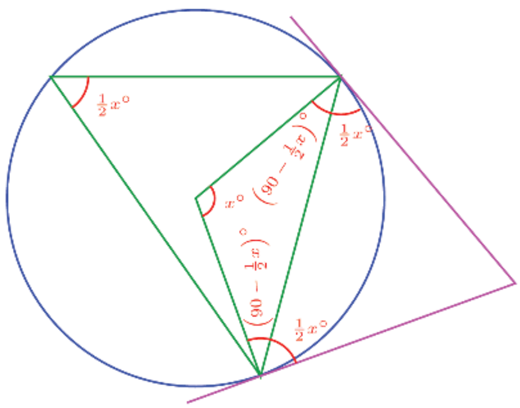



ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾವನ್ನೂ ಅದರ ತುದಿಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳನ್ನೂ ಎಳೆಯಿರಿ. ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನವನ್ನೂ, ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಇವುಗಳೊಂದಿಗಿನ ಕೋನವನ್ನೂ ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಕೋನಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು? ಹಲವು ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ನೋಡಿರಿ.

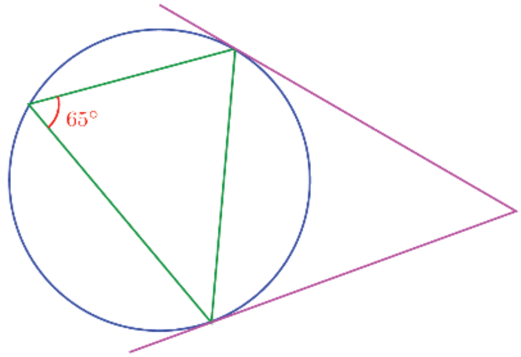
**ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಎರಡು ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಜ್ಯಾದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವು, ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ.**

ವೃತ್ತದ ದೊಡ್ಡದಾದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ. (**ವೃತ್ತಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠಭಾಗ)

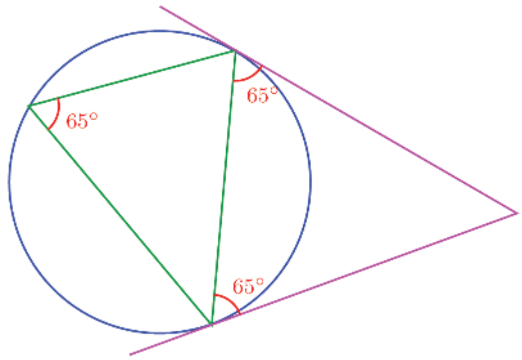



NT-919-3-MATHS-10-K-VOL.2

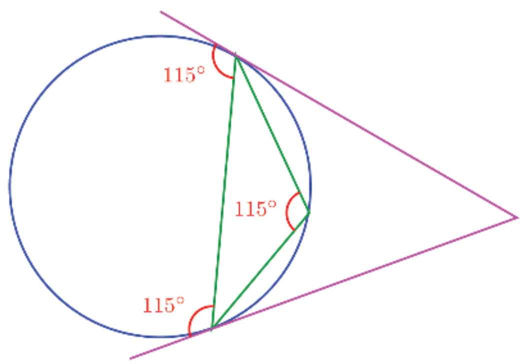
ಆಗ ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಜ್ಯಾದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವು ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?




ಬಲಭಾಗದ ಕೋನಗಳು 65°ಯೇ ಆಗಿದೆ.



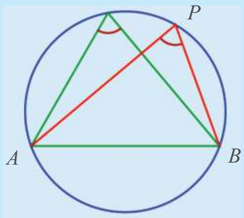

ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು $180° - 65° = 115°$. ಇದು ವೃತ್ತದ ಸಣ್ಣ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾವು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ?



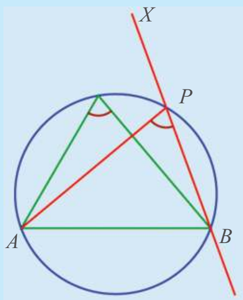

ಆಗ, ಜ್ಯಾವು ಅದರ ತುದಿಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು ಹಾಗೂ ವೃತ್ತದಲ್ಲುಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳು ಇವುಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿ ತೋರಿಸಬಹುದು.

### ಬದಲಾಗದ ಕೋನ

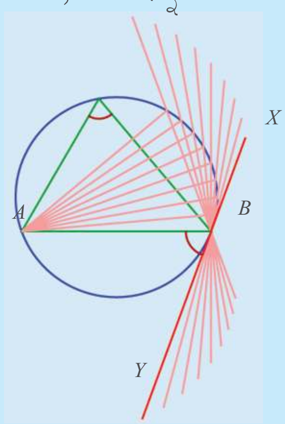
ಒಂದೇ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆಯೆಂದು ನೋಡಿದಿರಲ್ಲವೇ:



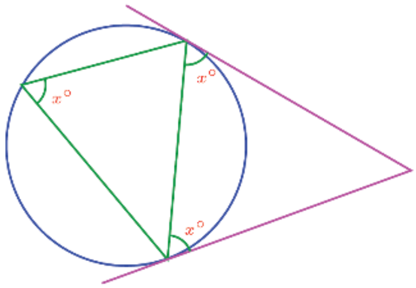

*PB* ಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಮುಂದುವರಿಸಿರಿ

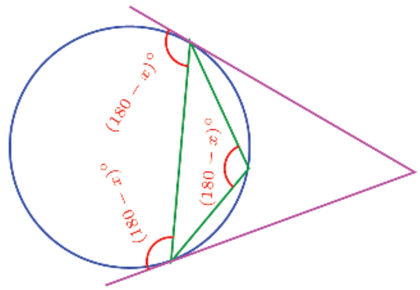



ಇನ್ನು *P* ಯನ್ನು ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಮುಂದುವರಿಸಿ, *B* ಯನ್ನು ತಲಪಿದರೋ?




*XY* ಎಂಬ ಗೆರೆ *B* ಯು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಯಾಗಿರುತ್ತದೆ; ಕೋನದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

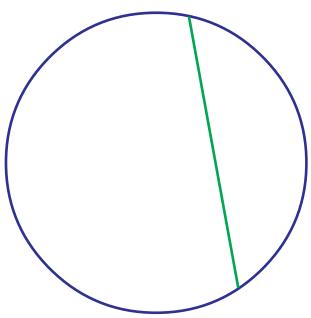


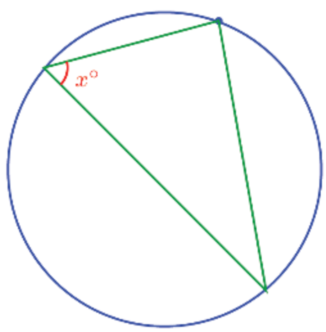



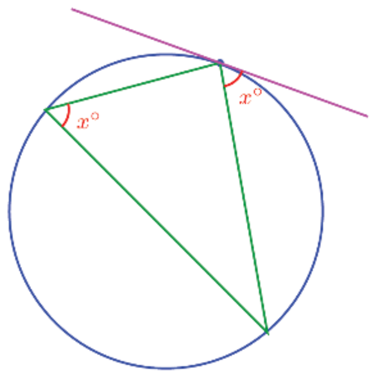

ಹೀಗೆ ಬರೆಯಲೂಬಹುದು.

**ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ಅದರ ತುದಿಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವು, ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.**

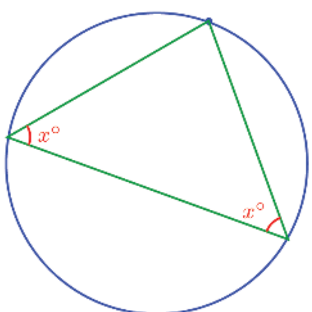
ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದೆಂದರೆ ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದಾಗಿದೆ. ಕೇಂದ್ರವು ತಿಳಿಯದಿದ್ದರೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

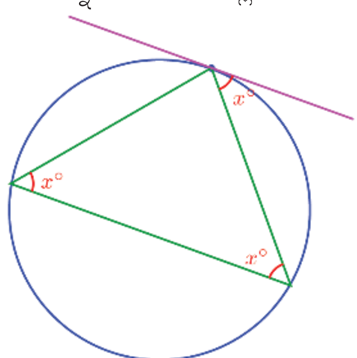





ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ಜ್ಯಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ ಸಾಕು.



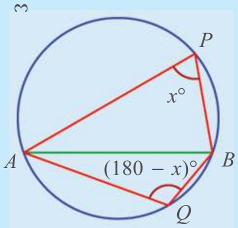

ಇದರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವವಾಗಿ ರಚಿಸಿದರೆ, ಅದರ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದು.

ಆಗ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲು, ಮೊದಲು ಈ ಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಚಾಪ ರಚಿಸಿ, ಅದು ಮೊದಲಿನ ವೃತ್ತವನ್ನು ತುಂಡರಿಸಿಕೊಂಡು ಹೋಗುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬೇಕು.

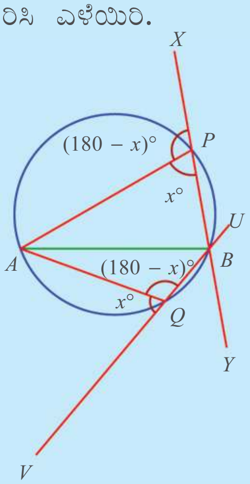
ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತದ A, B ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ C ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, AC, BC ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಎಳೆದು $\angle ACB$ ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. ಈ ಕೋನಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು? A, B, C ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

## ಬದಲಾಗುವ ಕೋನಗಳು

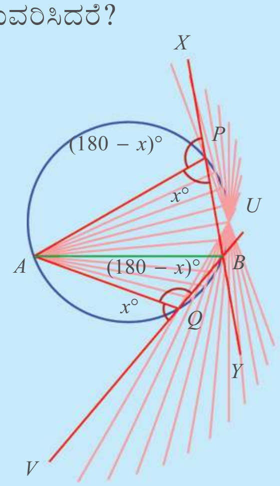
ಮರುವೃತ್ತಖಂಡದ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ.



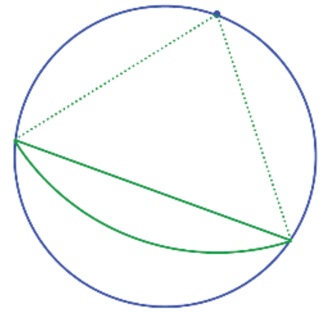

ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದಂತೆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ ಎಳೆಯಿರಿ.



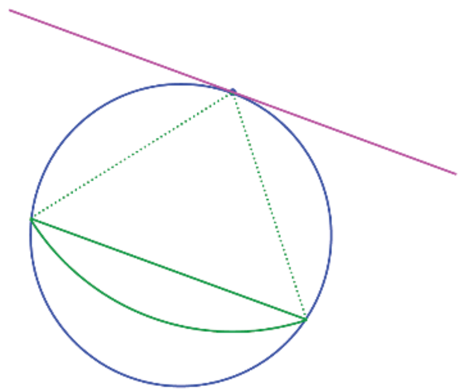

$P$ ಯನ್ನು ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ $Q$ ವಿನ ಕಡೆಗೆ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ?



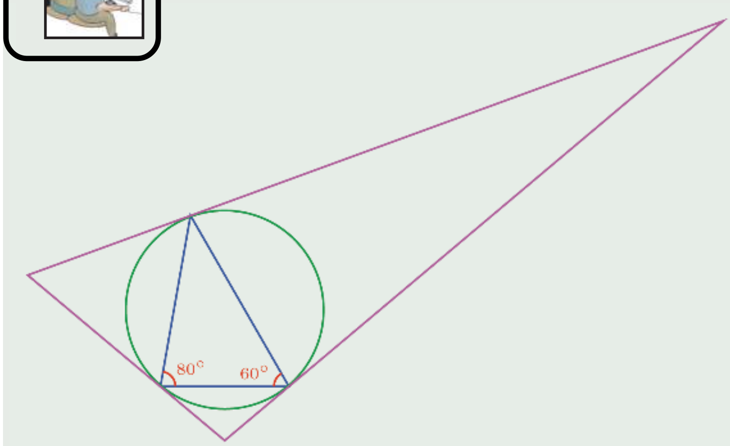

$AP$ ಯು ಕೆಳಗೆ $x°$ ಯೂ ಮೇಲೆ $(180 - x)°$ಯೂ ಆಗಿದೆ. ಚಲನೆಯುದ್ದಕ್ಕೂ ಅಳತೆ ಇದೇ ರೀತಿ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?



ಇನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕಾದ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ, ಈ ಗೆರೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆ ಎಳೆದರೆ ಸಾಕು.



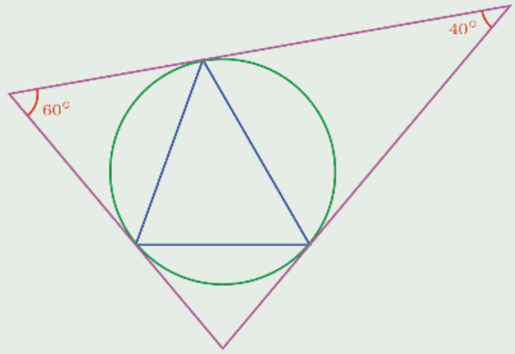
(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಾಗಿವೆ.




ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

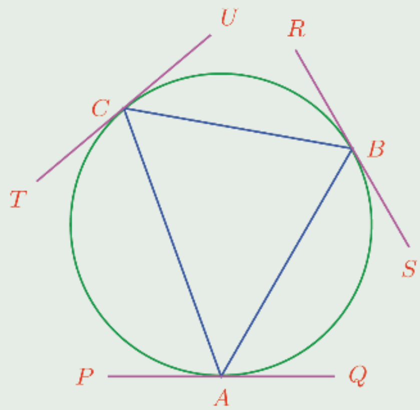
(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು, ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಾಗಿವೆ.

ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



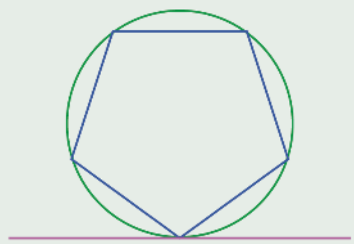

(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $ABC$ ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು $PQ$, $RS$, $TU$ ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಸಮಾನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.



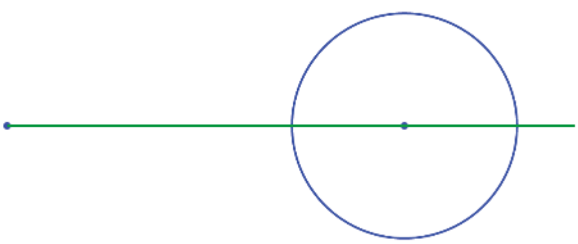

(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಮಪಂಚಭುಜದ ಒಂದು ಶಿರದ ಮೂಲಕ ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವನ್ನು ಒಳಗೊಡಿರುವ ಸಮಪಂಚಭುಜದ ಭುಜಗಳೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



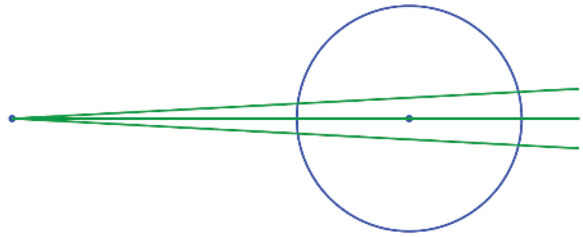
## ಹೊರಗಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

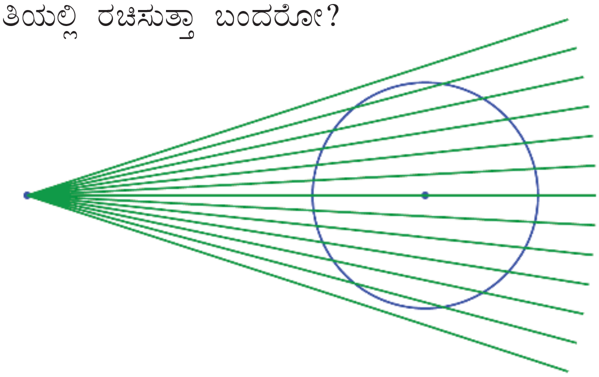


ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಜೋಡಿಸಿಕೊಂಡು ಅಲ್ಲಿಂದ ಮುಂದುವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ.

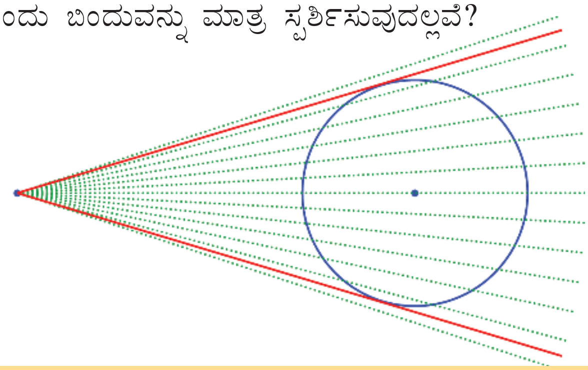
ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿನ ಇದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ಮೇಲೆಯೇ ಕೆಳಗೋ ಒಂದೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿ ಎಳೆದರೋ?



ಗೆರೆಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಖಂಡಿಸಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುಗಳು ಇನ್ನೂ ಹತ್ತಿರವಾಗುವಂತೆ, ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸುತ್ತಾ ಬಂದರೋ?

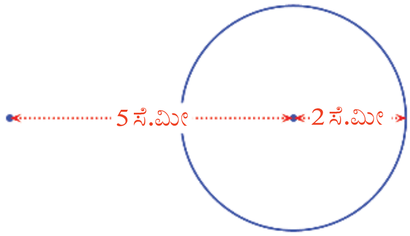


ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ಭೇದಿಸಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಗೆರೆಗಳಿಗೆ, ಒಂದು ಹಂತದ ನಂತರ ವೃತ್ತದೊಂದಿಗೆ ಯಾವ ಸಂಬಂಧವೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಅದರ ಎಡೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯೋ, ಮೇಲೆಯೂ ಮತ್ತು ಕೆಳಗೂ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದಲ್ಲವೆ?



**ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.**

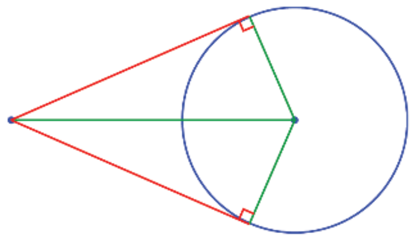
ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಸಿರುವುದಲ್ಲದೆ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜೋಡಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಸಲಿಲ್ಲವಲ್ಲವೆ. ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ತ್ರಿಜ್ಯ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ದೂರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ.

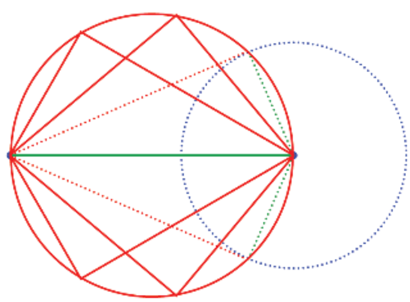
ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ?

ಎಳೆದರೆ ಹೇಗಿರಬಹುದೆಂದು ಆಲೋಚಿಸಿದರೆ, ಎಳೆಯಬೇಕಾದ ವಿಧಾನವು ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ತಿಳಿದು ಬರಬಹುದು.



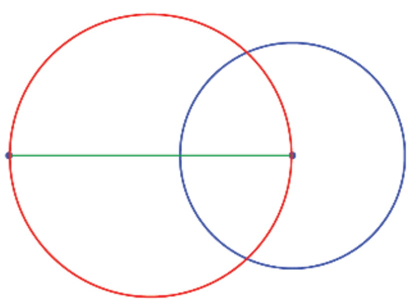
ಹೊರಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದಲೂ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದಲೂ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಜೊತೆ ಗೆರೆಗಳು ಬೇಕಾಗಿರುವುದು.

ಹೀಗೆ ರಚಿಸುವ ಲಂಬ ಜೋಡಿಗಳೆಲ್ಲ ಸಂಧಿಸುವುದು ಹೊರಗಿನ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯೂ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು **ವೃತ್ತಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೆ.



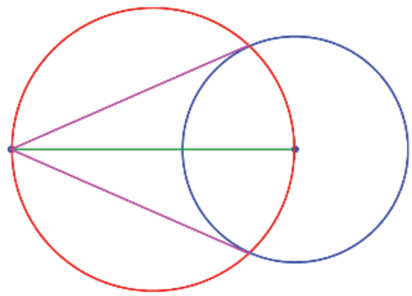
ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಲಂಬಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯು ಮೊದಲ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವೇ ಆಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಗೆರೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವುದು ಮೊದಲ ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲ ವೃತ್ತವು, ನಂತರದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೆ?

ಇನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದಲ್ಲವೆ. ಮೊದಲು, ಹೊರಗಿನ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ವ್ಯಾಸವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

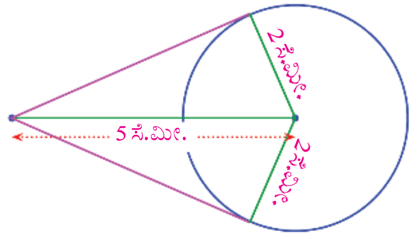


O ಎಂಬ ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ A, B ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು C ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಚತುರ್ಭುಜ OACB ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಇದು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿದೆಯೇ? Circle through Three Points ಉಪಯೋಗಿಸಿ O, A, B ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. A, B ಇವುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಇವುಗಳು ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವಾಗ C ಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು? ದೂರ ಸರಿಯುವಾಗಲೋ? ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳಾಗುವಾಗ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು?

ಈ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಮೊದಲ ವೃತ್ತ ಪರಸ್ಪರ ಖಂಡಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊರಗಿನ ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಿಗುವುವು.



ನಮ್ಮ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು, ಹೊರಗಿನ ಒಂದು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದಲ್ಲವೆ.



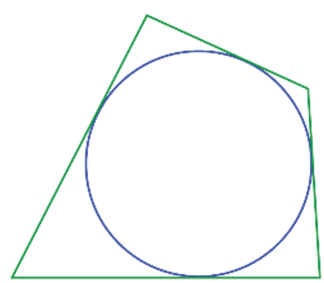

ಆಗ, ಪೈಥಗೋರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$$

ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದಾಗ, ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದವು ಸಮಾನವೆಂದು ಈ ಮೊದಲೇ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅದನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಹೇಳಬಹುದು.

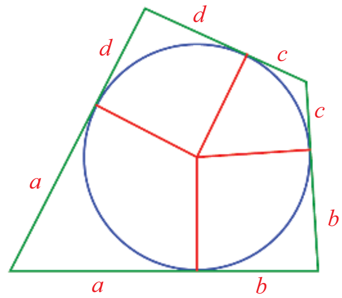
**ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು.**

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಭುಜಗಳಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ?

ಶಿರಗಳಿಂದ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು $a, b, c, d$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಈ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಈ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು.




ಆಗ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೆಳಗಿನ ಮತ್ತು ಮೇಲಿನ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು $(a + b) + (c + d)$. ಎಡಕ್ಕೂ ಬಲಕ್ಕೂ ಇರುವ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತವೋ?

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಶಿರವಾಗುವಂತೆ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು *hide* ಮಾಡಬೇಕು. ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಿ. ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

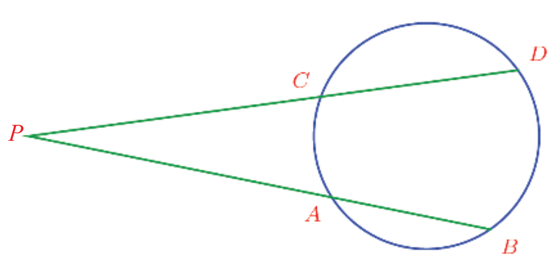
$(a + d) + (b + c)$ ಎರಡೂ ಮೊತ್ತವೂ $a + b + c + d$ ಯೇ ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ

**ಒಂದು ವೃತ್ತದ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.**

ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ, ಈ ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಗುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

ವೃತ್ತದ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಕೊಂಡು ರಚಿಸುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಈ ಮೊದಲೇ ಕಂಡಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ.

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರವೇ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಗೆರೆಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ. ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಗೆರೆಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ, ಗೆರೆಯ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದದ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ವೃತ್ತಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಚಿತ್ರ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮವಾಕ್ಯವು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

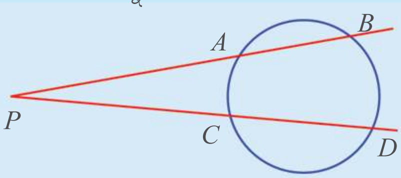



$$PA \times PB = PC \times PD$$

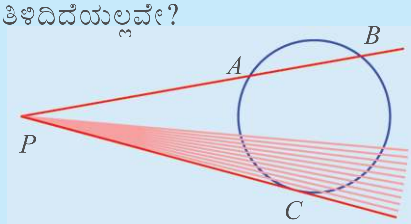
ಇನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿದರೋ?

## ಬದಲಾಗದ ಸಂಬಂಧ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

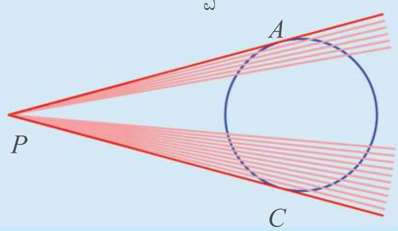



ಇದರಲ್ಲಿ $PA \times PB = PC \times PD$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ?



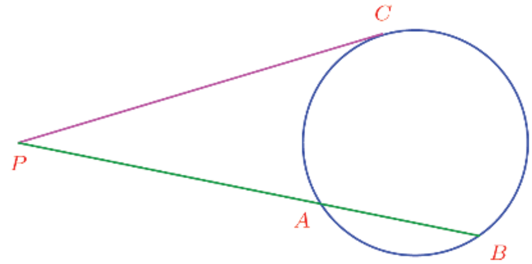

ಕೆಳಗಿನ ರೇಖೆ, ಚಲಿಸಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಆದರೋ? $PD$ ಎಂಬುದು $PC$ ಯೇ ಆಗಿರುವುದು; ಮೊದಲೇ ನೋಡಿರುವ ಸಂಬಂಧ. $PA \times PB = PC^2$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಮೇಲಿನ ರೇಖೆಯೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾದರೋ?

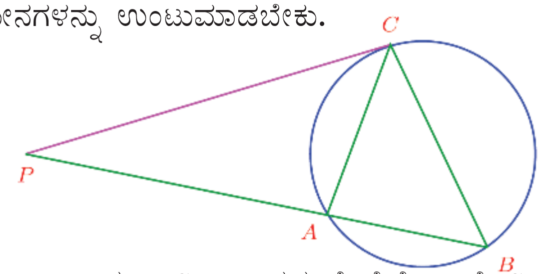



ಈ ಸಂಬಂಧ $PA^2 = PC^2$ ಅಥವಾ $PA = PC$ ಎಂದಾಗುವುದು.

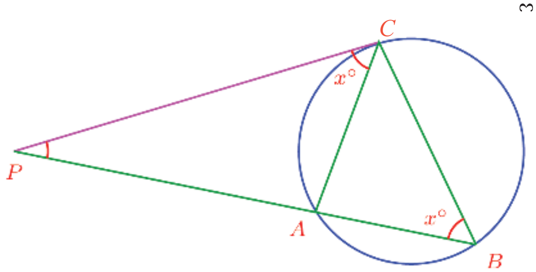
ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದೆಂದು ಮೊದಲೇ ನೋಡಿರುವಿರಲ್ಲವೇ?




ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು, $AC, BC$ ಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಬೇಕು.




$AC$ ಎಂಬ ಜ್ಯಾವು, $PC$ ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ $C$ ಯಲ್ಲಿ $\angle PCA$ ಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವುದು. ಇದು ವೃತ್ತದ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ $AC$ ಉಂಟುಮಾಡುವ $\angle ABC$ ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.




ಅಂದರೆ, ತ್ರಿಕೋನ $PAC$ ಯಲ್ಲಿ $C$ ಯ ಕೋನವು, ತ್ರಿಕೋನ $PBC$ ಯಲ್ಲಿ $B$ ಯ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. $P$ ಯಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೂ ಒಂದೇ ಕೋನವಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.

$PAC$ ಯಲ್ಲಿ $x^\circ$ ಕೋನದ ಎದುರಿರುವ ಭುಜ $PA$ ಯೂ, $PBC$ ಯಲ್ಲಿ $x^\circ$ ಕೋನದ ಎದುರಿರುವ ಭುಜವು $PC$ ಯೂ ಆಗಿದೆ. $PAC$ ಯಲ್ಲಿ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭುಜವು $PC$ ಮತ್ತು $PBC$ ಯಲ್ಲಿ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭುಜವು $PB$ ಆಗಿದೆ.

FB4TNH

ಆಗ

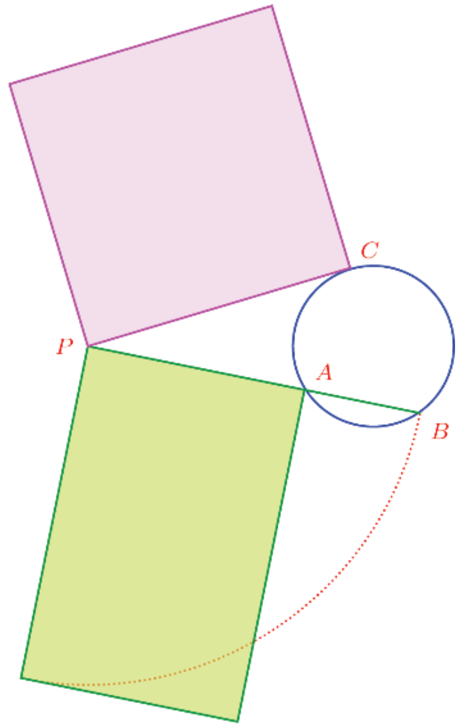
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB}$$

ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$PA \times PB = PC^2$$

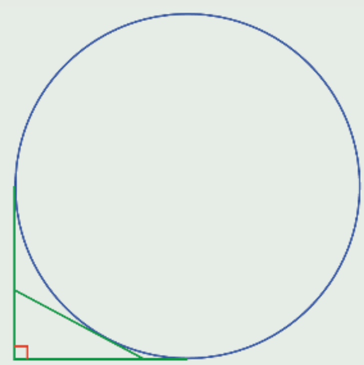
**ವೃತ್ತವನ್ನು ತುಂಡರಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅದೇ ವೃತ್ತದ ಹೊರ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದ ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.**

ಪರಸ್ಪರ ತುಂಡರಿಸಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಜ್ಯಾಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಹೇಳಿದಂತೆ, ಇದನ್ನೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು. ತುಂಡರಿಸುವ ಗೆರೆ ಮತ್ತು ಅದೇ ಗೆರೆಯ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿನ ಭಾಗವು ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ಆಯತಕ್ಕೂ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಭುಜವಾಗಿರುವ ಚೌಕಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವುದು.

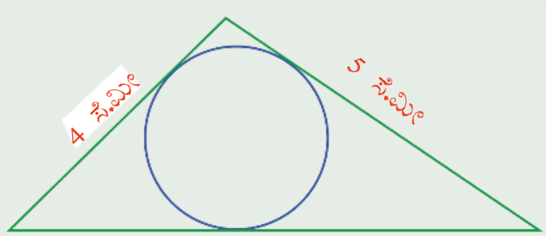


(1) ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಸೇರಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡಿರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮಾನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

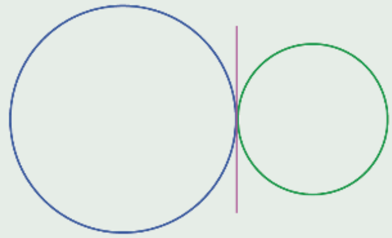


(2) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೂರು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

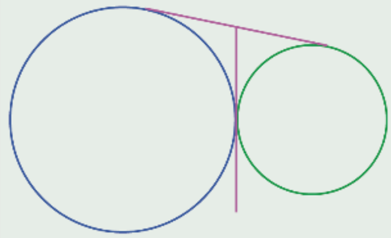



ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಶಿರದಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

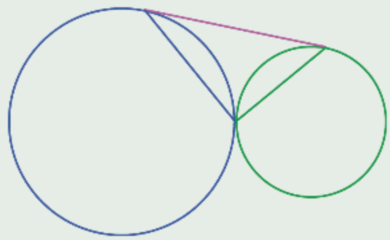
(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



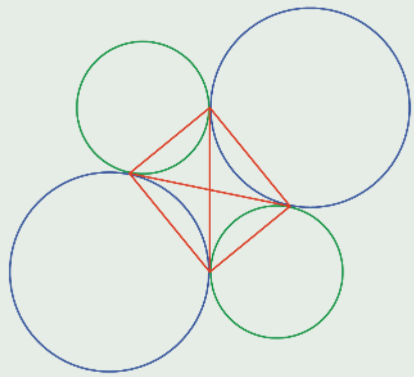
i) ಈ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು, ಮೊದಲ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



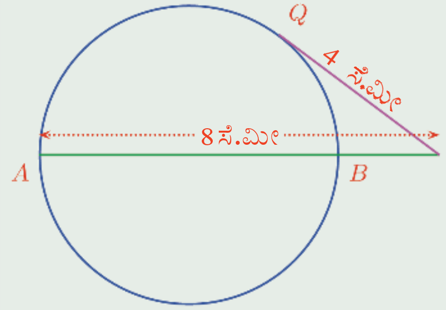
ii) ಈ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವ ತ್ರಿಕೋನವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



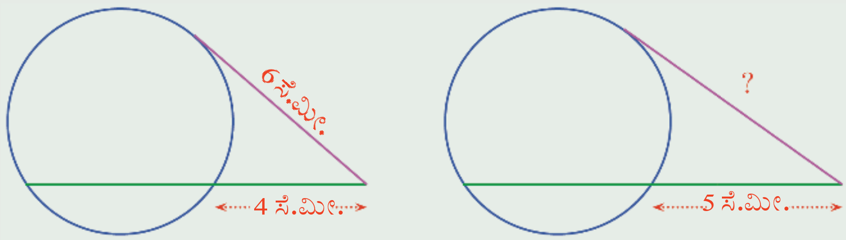
iii) ಬಲಭಾಗದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಅನುಕೂಲವಾದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ನೋಟು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ರಚಿಸುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಶೇಷತೆ ಏನಾಗಿರುವುದು?



(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $P$ ಎಂಬುದು $AB$ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿರುವುದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು ಆಗಿದೆ. $P$ ಯಿಂದ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು $Q$ ವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?



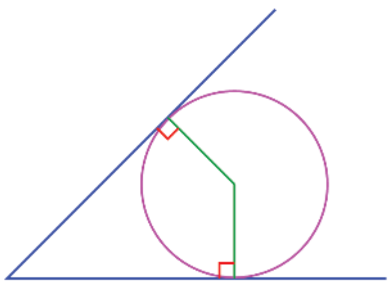
(5) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ, ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ಗೆರೆಯನ್ನು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮುಂದುವರಿಸಿ, ಅಲ್ಲಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ.




ಇದೇ ಗೆರೆಯನ್ನು 1ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಸಿದ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿದೆ ಎರಡನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವುದು. ಈ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

## ಗೆರೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತ

ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹೇಗೆ ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದು ನೋಡಿದೆವು.

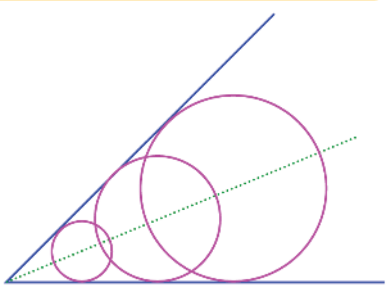


ಆಗ ಹೀಗೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೇ? ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

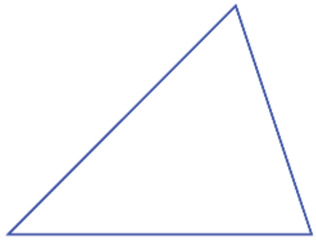
ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಈ ಗೆರೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬಗಳಾಗಿವೆ. ಅಂದರೆ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವು ಈ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಆಗ ಅದು ಈ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಾಗಬೇಕಲ್ಲವೇ. (ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ **ವಿಸ್ತೀರ್ಣ** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ, **ತ್ರಿಕೋನ ಭಾಗ** ಎಂಬುದರಲ್ಲಿನ ಲೆಕ್ಕ (4))

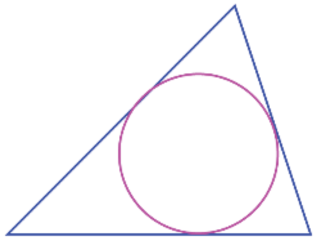
**ಸಂಧಿಸುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು ಗೆರೆಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಾಗಿದೆ.**

ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕದ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದರೂ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.



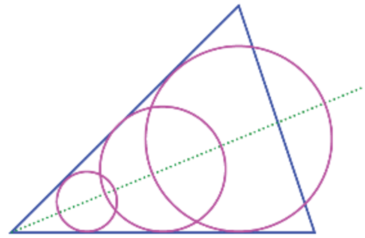
ಆಗ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ.



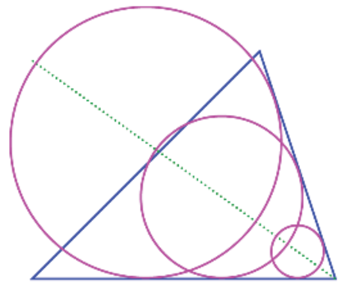


ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕೋನದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದು, ಲಂಬವೂ ಭುಜವೂ ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಸಮಭಾಜಕದ ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗುವಂತೆ, ಭುಜಗಳ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಈ ವೃತ್ತವು, ಕೋನದ ಎರಡನೇ ಭುಜವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದಿಲ್ಲವೆ? ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಹಾಗೂ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಭುಜಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ, ಆ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

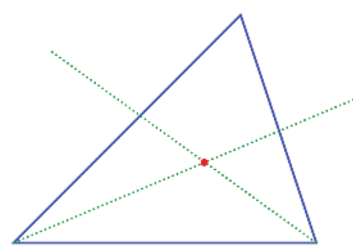


ಕೆಳಗಿನ ಹಾಗೂ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ ಈ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.



ಆಗ ಈ ಎರಡೂ ಸಮಭಾಜಕಗಳಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವನ್ನು, ಪರಿಗಣಿಸಿದರೋ? ಅಂದರೆ ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು?

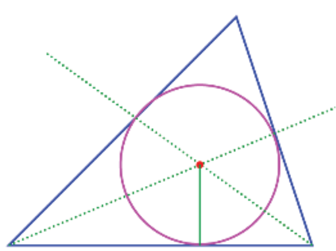
ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮೂರು ಭುಜಗಳಿರುವ ಲಂಬಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದಲ್ಲವೇ? ಈ ಉದ್ದವು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗುವಂತೆಯೂ ಈ ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗುವಂತೆಯೂ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ?



ಈ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ತ್ರಿಕೋನದ **ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತ** (incircle) ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

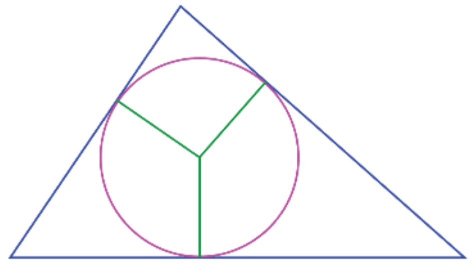
ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ಕೂಡಾ ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಕ್ಕಿರುವ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಲಂಬಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವು ಈ ಭುಜಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿರುವುದು.



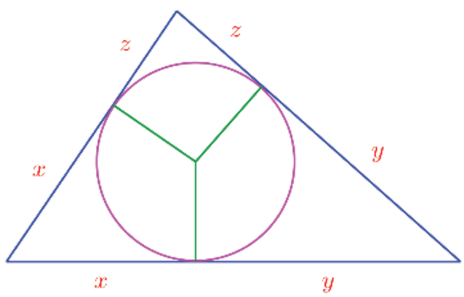
**ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಕೋನಗಳ ಸಮಭಾಜಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು.**

ಅಂತರ್ವೃತ್ತವು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ಭುಜಗಳೊಳಗೆ ಕೆಲವು ಸಂಬಂಧಗಳಿವೆ.

ಅದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್ವೃತ್ತವು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಎಳೆದು ಜೋಡಿಸಿರಿ.

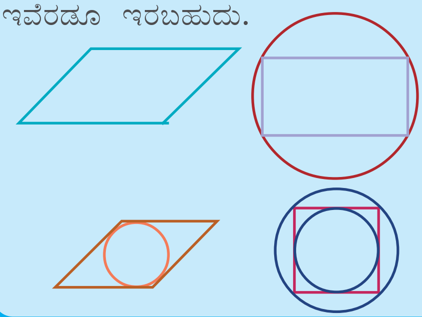


ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದಿಂದಲೂ ಅಂತರ್ವೃತ್ತಕ್ಕಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರಿರುವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರಗಳಿಂದಲೂ, ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆಗ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು $x, y, z$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.




### ಪರಿವೃತ್ತವೂ ಅಂತರ್ವೃತ್ತವೂ

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೂ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನೂ ಅಂತರ್ವೃತ್ತವನ್ನೂ ರಚಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಕೆಲವಕ್ಕೆ ಇವುಗಳು ಎರಡೂ ಇರಲಾರದು. ಕೆಲವಕ್ಕೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಮಾತ್ರ, ಕೆಲವಕ್ಕೆ ಇವೆರಡೂ ಇರಬಹುದು.



ಈ ಉದ್ದಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ $2(x + y + z)$ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, $x + y + z$ ಎಂಬುದು ಸುತ್ತಳತೆಯ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು $s$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ

$$x + y + z = s$$

ಇನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು $a, b, c$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಿಂದ

$$x + y = a$$

$$y + z = b$$

$$z + x = c$$

ಎಂಬಿತ್ಯಾದಿಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ.

ಇನ್ನು $x$ ಸಿಗಲು $x+y+z$ ನಿಂದ $y+z$ ನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಸಾಕು. ಅಂದರೆ

$$x = (x+y+z) - (y+z) = s - b$$

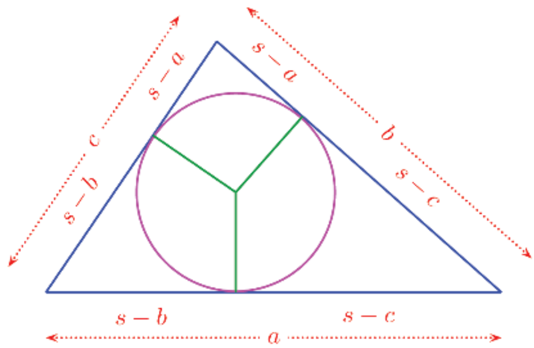
ಇದರಂತೆ

$$y = (x+y+z) - (z+x) = s - c$$

ಎಂದೂ

$$z = (x+y+z) - (x+y) = s - a$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.




**ವಿಸ್ತೀರ್ಣ**

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್ವೃತ್ತವು ಮೂರು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿದಿರಲ್ಲವೇ.

ಇದನ್ನು ಕೂಡಾ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಇತರ ಕೆಲವು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಲಭಿಸುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸದೃಶವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಕ್ರಿ.ಶ ಒಂದನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಸ್‌ನ ಹೆರೋನ್ ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದನು. ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು $a, b, c$ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

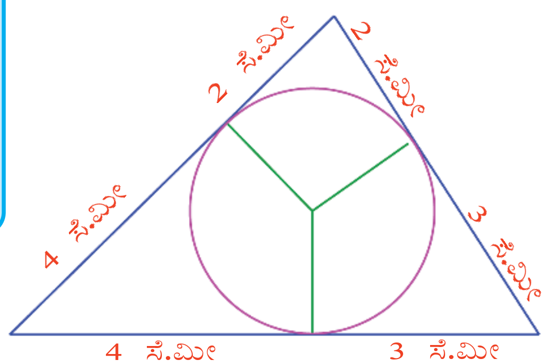
$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ಎಂಬುದಾಗಿ ಹೆರೋನ್ ಕಂಡುಹಿಡಿದನು.

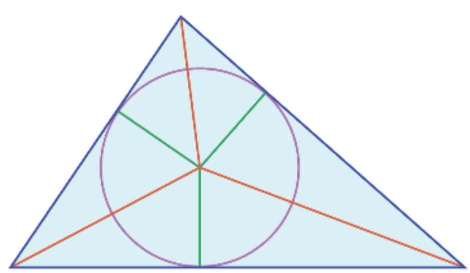
(https://en.wikipedia.org/wiki/Heron's_formula)

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು, 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು, 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಅರ್ಧ 9 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು.

ಆಗ ಅಂತರ್ವೃತ್ತವು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಭುಜವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದು $9-5=4, 9-6=3, 9-7=2$ ಎಂಬೀ ಕ್ರಮದಲ್ಲಾಗಿದೆ.




ಅಂತರ್ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೂ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದೊಂದಿಗೆ ಸಂಬಂಧವಿದೆ. ಅಂತರ್ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳಿಗಿರುವ ಗೆರೆಗಳು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಮೂರಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವುದಲ್ಲವೆ.



ಈ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಭುಜವು, ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜವೇ ಆಗಿದೆ; ಅದಕ್ಕಿರುವ ಉನ್ನತಿಯು ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆಗ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು $a, b. c$ ಎಂದೂ, ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $r$ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2}ar, \frac{1}{2}br, \frac{1}{2}cr,$ ಎಂದಾಗುವುದು. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತವು, ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ; ಅದನ್ನು $A,$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ,

$$A = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)\,r = sr$$

ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು

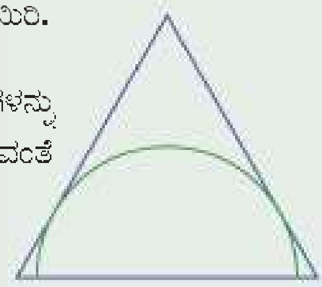
$r = \frac{A}{s}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

**ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಸುತ್ತಳತೆಯ ಅರ್ಧದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದುದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ.**

(1) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವು 4ಸೆಂಟಿಮೀಟರು, 5ಸೆಂಟಿಮೀಟರು, 6ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 5ಸೆಂಟಿಮೀಟರು, ಒಂದು ಕೋನ $50^{\circ}$ ಆಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅದರ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿರಿ.



(4) ಲಂಬ ಭುಜಗಳು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ $h$ ಮತ್ತು ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r$ ಎಂದಾದರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, $r\,(h+r)$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(6) ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

## ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ $a, b, c$ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 35 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 43 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ,

$a = 12, b = 35, c = 43$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $s = \frac{12+35+43}{2} = 45, s-a = 33, s-b = 10, s-c = 2$ ಆಗಿರುವುದು.

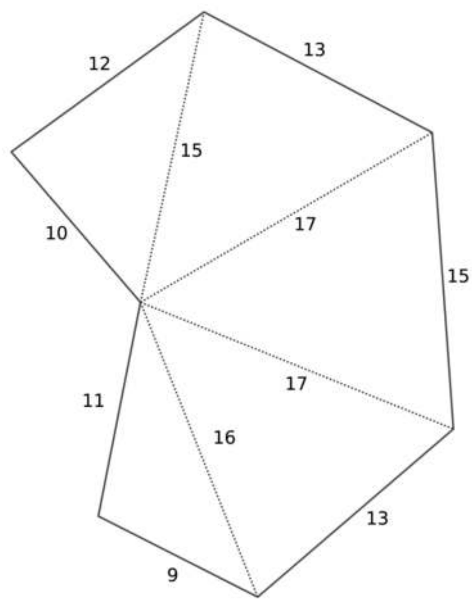
ಆಗ,

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \sqrt{45 \times 33 \times 10 \times 2} \approx 172.33$ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.

ಎಂಬುದಾಗಿ ಕಾಲ್ಕುಲೇಟರನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವು ನೇರ ಗೆರೆಗಳಾಗಿರುವ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ಜಾಗದ ಸರಿಸುಮಾರು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿರುವುದನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

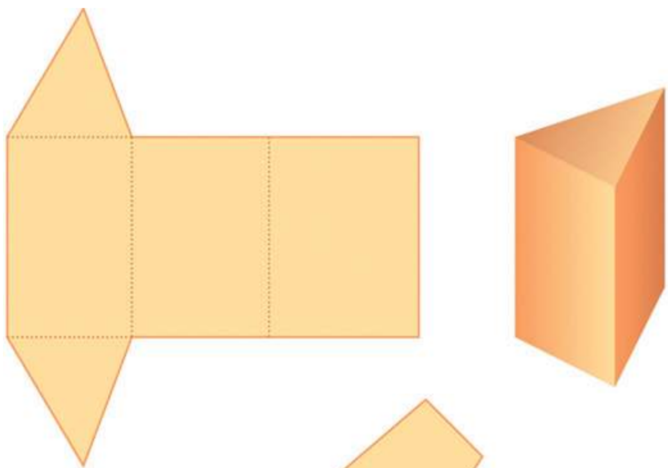


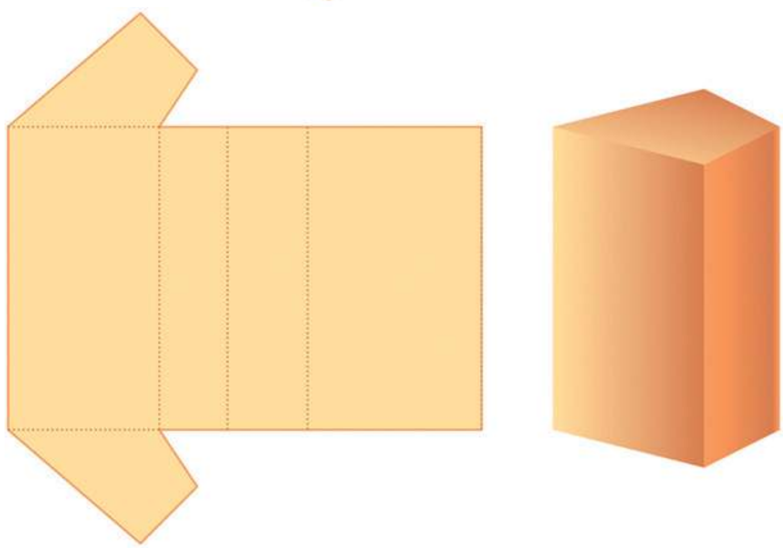

ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಇವೆಯಲ್ಲವೇ (ಎಲ್ಲವೂ ಮೀಟರಿನಲ್ಲಿ). ಆಗ ಮೊದಲು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಜಾಗದ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

# 8 ಘನಾಕೃತಿಗಳು

## ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು

ಹಲವು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಗದಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ, ಮಡಚಿ ಅಂಟಿಸಿ, ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದು.

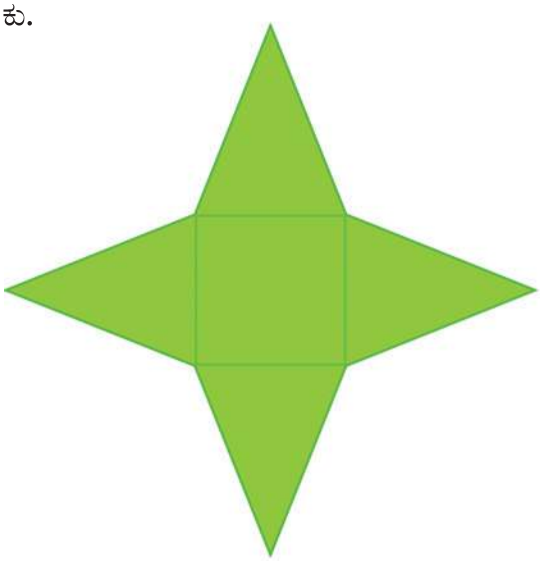




ಇಂತಹ ಸ್ತಂಭಗಳ ಕುರಿತು ಹಲವು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವೆವು.

ಇನ್ನು ಬೇರೊಂದು ಆಕೃತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ ನೋಡೋಣ.

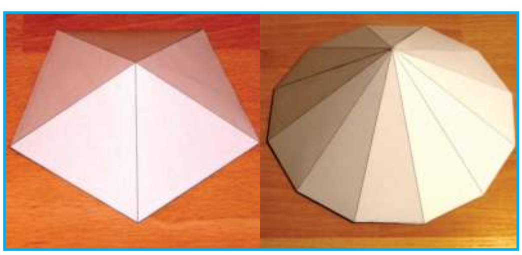
ಮೊದಲು ಈ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕು.



ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಚೌಕ. ಸುತ್ತಲೂ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳು; ಇವು ನಾಲ್ಕು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ (ಸಮಾನವಾದ) ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿರಬೇಕು. ಇನ್ನು ಇವುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಮಡಚಿ ಅಂಟಿಸಿರಿ.

**ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ**

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂಬುದನ್ನು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತೆವಲ್ಲವೇ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. 3D Graphics ನ್ನು ತೆರೆದು ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಸಿದ್ಧತೆಯನ್ನೂ ಮಾಡಬೇಕು. (9 ನೇ ತರಗತಿಯ **ಸ್ತಂಭಗಳು** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದ **ಘನಾಕೃತಿಗಳು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ** ಎಂಬ ಭಾಗವನ್ನು ನೋಡಿರಿ) Graphics ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. 3D Graphics ನಲ್ಲಿ Extrude to Pyramid or Cone ನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಆಯತದಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ನೀಡಬೇಕು. (ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ, ಎತ್ತರವಾಗಿ ಸ್ಲೈಡರಿನ ಹೆಸರನ್ನು ನೀಡಬೇಕು.)

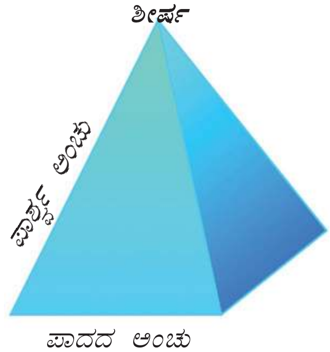


ಇದು ಯಾವ ಆಕೃತಿ? ಸ್ತಂಭವೆಂದು ಕರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಸ್ತಂಭಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಪಾದಗಳು ಮತ್ತು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಆಯತಗಳು ಆಗಿವೆ. ಈಗ ನಿರ್ಮಿಸಿದ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಾದರೆ ಕೆಳಗೆ ಚೌಕ, ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚೂಪಾದ ಒಂದು ತುದಿ, ಸುತ್ತಲೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳು.

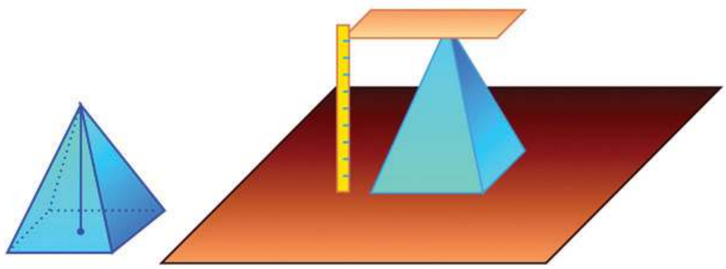
ಚೌಕದ ಬದಲು ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಆಯತವಾಗಬಹುದು; ಅದೂ ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ತ್ರಿಕೋನವೋ ಇತರ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಹುಭುಜಗಳೋ ಆಗಬಹುದು. ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. (ಪಾದವು ಸಮಬಹುಭುಜವಾದಾಗ ಅಂದವಿರುವುದು)

ಇಂತಹ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಹೆಸರು ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು (pyramids) ಎಂದಾಗಿದೆ.

ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಪಾದವಾದ ಬಹುಭುಜದ ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳು (base edges) ಎಂದೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಇತರ ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚುಗಳು (lateral edges) ಎಂದೂ ಕರೆಯುವರು. ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತುದಿಯನ್ನು ಅದರ ಶೀರ್ಷ (apex) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.



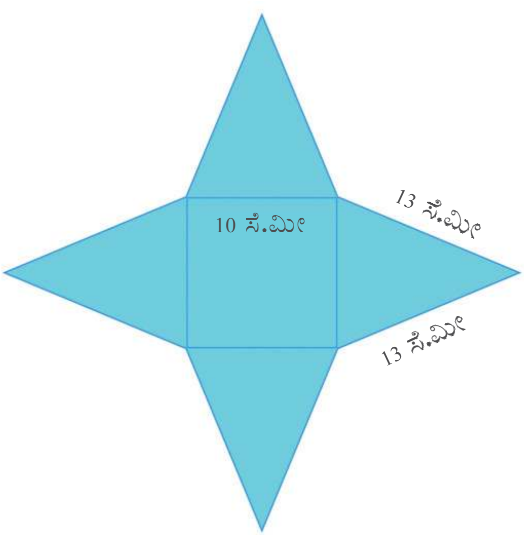

ಒಂದು ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿಯೆಂಬುದು ಅವುಗಳ ಪಾದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಒಂದು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿಯೆಂದರೆ ಅದರ ಶೀರ್ಷದಿಂದ ಪಾದಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬ ದೂರವಾಗಿದೆ.



## ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳು 10ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚುಗಳು 13ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

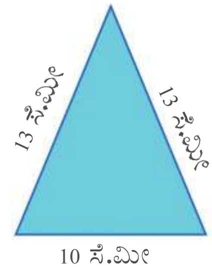
ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಂದರೆ, ಈ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಕಾಗದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಈ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಬಿಡಿಸಿಟ್ಟರೆ ಹೇಗಿರಬಹುದು?




ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ, ರಚಿಸಿದ ಒಂದು ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ತುಂಡರಿಸಿ, ಬಿಡಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲು ಹೇಳಿದಂತೆ 3D Graphics ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. Net ನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿಟ್ಟು ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ತುಂಡರಿಸಿ ಬಿಡಿಸಿದ ಆಕೃತಿಯು ಲಭಿಸುವುದು. (ಇದನ್ನು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ Net ಎಂಬುದಾಗಿ ಕರೆಯುವರು.) ಇದರೊಂದಿಗೆ Graphics ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರೂ ಲಭಿಸುವುದು. ಈ ಸ್ಲೈಡರನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ Net ನಿಂದ ಪಿರಮಿಡ್ಡು ರೂಪಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. Algebra ದಲ್ಲಿ Pyramid ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೆಸರಿನ ನೇರವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು hide ಮಾಡಬೇಕು.

ಇದರ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 100 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿದೆಯೆಂದು ಕೂಡಲೇ ಹೇಳಬಹುದು. ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನಾದರೋ?

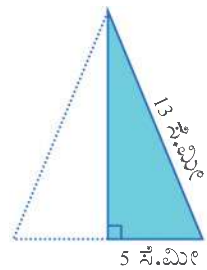
ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪಾದದ ಮತ್ತು ಎತ್ತರದ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧವಾಗಿಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.




ಅದಕ್ಕೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಾದುದರಿಂದ, ಈ ಲಂಬವು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದು.

ಪೈಥಗೋರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಲಂಬದ ಉದ್ದವು

$$\sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ ಸೆ.ಮೀ}$$

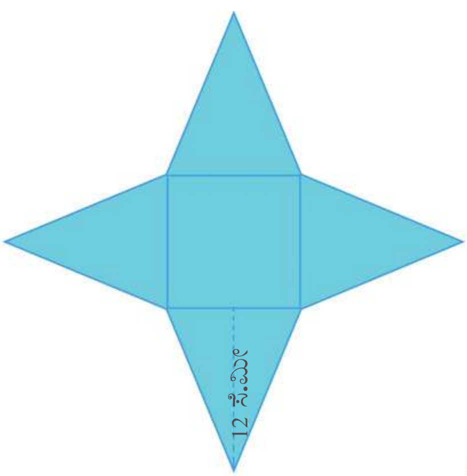



ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆಗ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $5 \times 12 = 60$ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ.

### ಉನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ

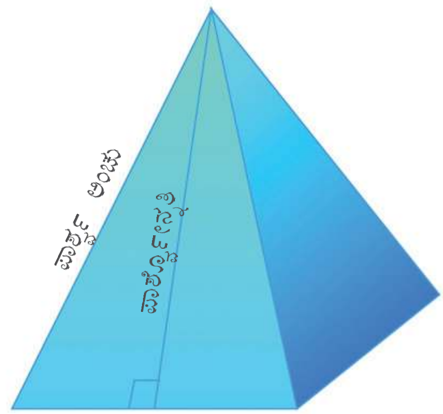
ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. Midpoint or Centre ನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಒಂದು ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಮತ್ತು ಪಾದದ ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. Segment ನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. Polygon ನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಉನ್ನತಿ, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ, ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚು, ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಅರ್ಧ ಎಂಬಿವುಗಳು ಭುಜಗಳಾಗಿ ಬರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. Net ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಬಿಡಿಸಿಟ್ಟು ನೋಡಬಹುದು. ಬೇಕಾದರೆ hide ಮಾಡಬಹುದು.

ಕಾಗದದ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ, ಈಗ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಉನ್ನತಿಯು ಏನಾಗುವುದು?



ಈ ಉದ್ದವನ್ನು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ **ಪಾರ್ಶ್ವಎತ್ತರ** ಅಥವಾ **ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ** (slant height) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಈಗ ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಅಂಚು, ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಇದೆ. ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಅರ್ಧ ಲಂಬ ಬದಿಗಳಾಗಿಯೂ, ಕರ್ಣವಾಗಿ ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚೂ ಇರುವುದು.



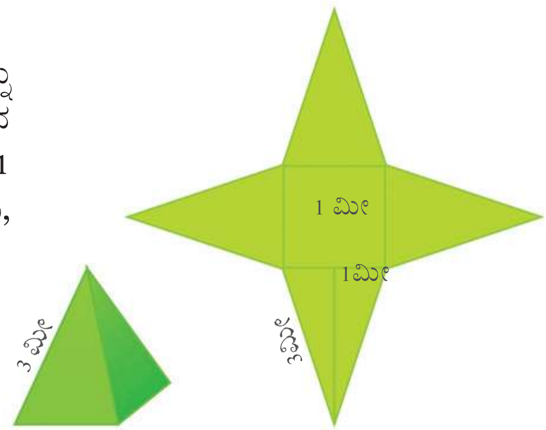

ಇನ್ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಬಹುದೇ?

ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳು 2 ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚುಗಳು 3 ಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 4 ಚದರಮೀಟರು. ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಮೊದಲು ಹೇಳಿದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭುಜವು ಪಾದದ ಅರ್ಧವಾದ 1 ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಕರ್ಣವು ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚು ಆಗಿರುವ 3 ಮೀಟರು, ಆದುದರಿಂದ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು

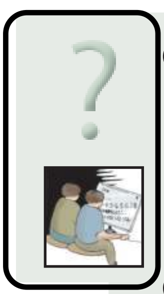
$$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \text{ ಮೀಟರು.}$$

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಮುಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ಚದರಮೀಟರು.




ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $4 + \left(4 \times 2\sqrt{2}\right) = 4 + 8\sqrt{2}$ ಚದರಮೀಟರು.

ಇದರಿಂದ ತೃಪ್ತಿಯಾಗದಿದ್ದರೆ, ಕಾಲ್ಕ್ಯುಲೇಟರನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ (ಅಲ್ಲವಾದರೆ $\sqrt{2}$ ಕ್ಕೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ), ಇದು ಸುಮಾರು 15.31 ಚದರಮೀಟರು ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.



(1) ಅಂಚುಗಳು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕ; ಒಂದು ಭುಜ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಕ್ಕಿರುವ ಉನ್ನತಿ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು; ಇವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಟ್ಟು ಒಂದು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಎಷ್ಟು ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಕಾಗದ ಬೇಕಾಗುವುದು?

(2) ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಆಟಿಕೆಯ ಪಾದದ ಅಂಚು 16 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಇಂತಹ 500 ಆಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ಚದರಮೀಟರಿಗೆ ರೂಪಾಯಿ 80 ರಂತೆ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಖರ್ಚಾಗಬಹುದು?

(3) ಒಂದು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳು ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಅದರ ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದ 30 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆದರೆ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

(4) ಒಂದು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ 40 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು, ಅಂಚುಗಳ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ 92 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5) ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ?

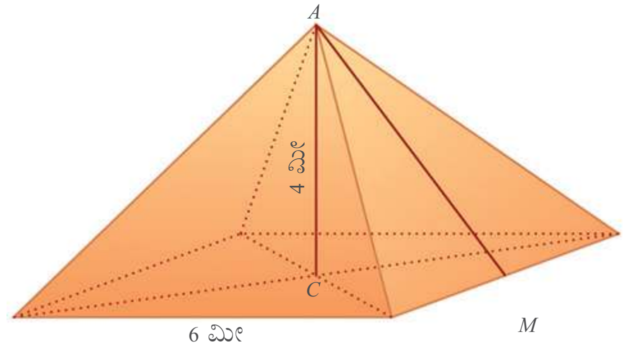
## ಉನ್ನತಿಯೂ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯೂ

ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಉನ್ನತಿಯು ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಧಾನ್ಯತೆಯಿರುವ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

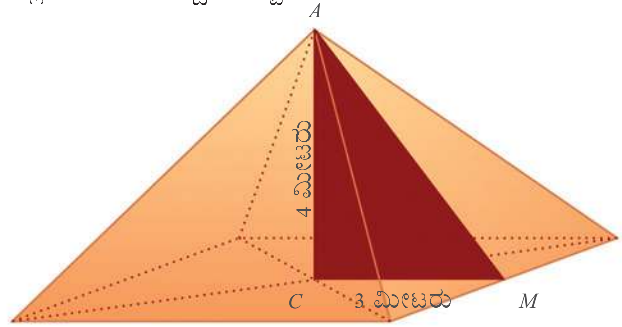
ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಡೇರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಡೇರೆಯ ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳು 6 ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 4 ಮೀಟರು ಇರಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಎಷ್ಟು ಚದರಮೀಟರು ಕ್ಯಾನ್‌ವಾಸ್ ಬಟ್ಟೆ ಬೇಕಾಗುವುದು?

ಡೇರೆಯ ಅಂಚುಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ ಅಗತ್ಯವಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:




ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು $AM$ ಆಗಿದೆ. $CM$ನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ, $AM$ ಕರ್ಣವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವು ಲಭಿಸುವುದಲ್ಲವೇ? ಅದರಲ್ಲಿ $CM$ನ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?




ಚಿತ್ರದಿಂದ $AM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ಮೀಟರು ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

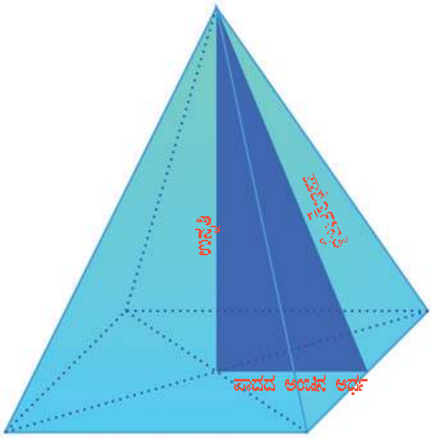
**ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು**

ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು ಎಂದಾಕ್ಷಣ ಮನಸ್ಸಿಗೆ ಹೊಳೆಯುವ ಚಿತ್ರವು ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳಾಗಿವೆ. ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಹಲವು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಾಗಿ 138 ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆ ಹಚ್ಚಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಿ.ಪೂ ಎರಡು ಸಾವಿರದ ಆಸುಪಾಸಿನಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಆಗ ಡೇರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಒಂದು ಅಂಚಿನ ಉದ್ದ 6ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಅದರಿಂದಿರುವ ಉನ್ನತಿ 5ಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಆಗತ್ಯವಿದೆ. ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, $4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 60$ ಚದರಮೀಟರು ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ. ಡೇರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಇಷ್ಟು ಕ್ಯಾನ್‌ವಾಸ್ ಆಗತ್ಯವಿದೆ.

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಡ ವಿಚಾರವು ಎಲ್ಲಾ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸರಿಯಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ.

ಯಾವುದೇ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳಾದರೂ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು ಕರ್ಣವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಊಹಿಸಬಹುದು. ಅದರ ಲಂಬ ಅಂಚುಗಳು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಅರ್ಧ ಆಗಿರುವುದು.



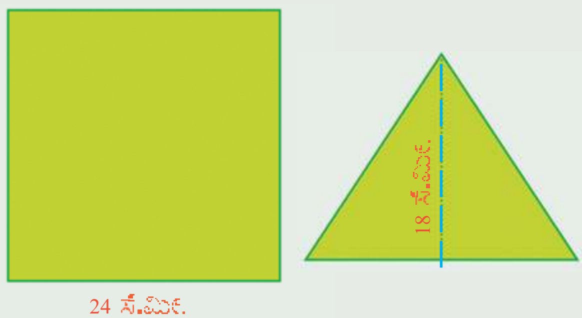

## ಮಹಾಪಿರಮಿಡ್ಡು

ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಗಿರ್ಝಾದಲ್ಲಿರುವ ಮಹಾಪಿರಮಿಡ್ಡು (Great Pyramid of Giza) ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಪಿರಮಿಡ್ಡಾಗಿದೆ.

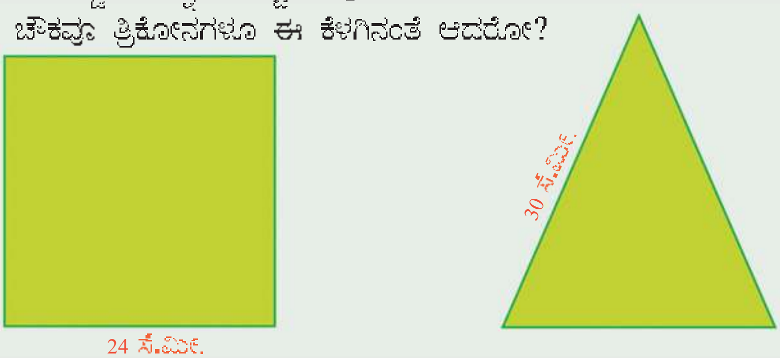
ಇದರ ಪಾದವಾಗಿರುವ ಚೌಕಕ್ಕೆ ಸುಮಾರು ಅರ್ಧಲಕ್ಷ ಚದರ ಮೀಟರಿನಷ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿದೆ. ಉನ್ನತಿ ಸುಮಾರು 140 ಮೀಟರು ಇದೆ. ಇದನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಇಪ್ಪತ್ತು ವರ್ಷಗಳ ಅವಧಿ ಬೇಕಾಗಿ ಬಂದಿರಬಹುದು ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗಿದೆ.

ನಿಖರವಾದ ಚೌಕದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಬೃಹದಾಕಾರದ ಕಲ್ಲುಗಳಿಂದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿ, ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಈ ವೈಭವೋಪೇತವಾದ ಸಮಾಧಿಗಳು ಮಾನವ ಪರಿಶ್ರಮದ, ನಿರ್ಮಾಣ ಕೌಶಲ್ಯದ ಹಾಗೂ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಜೀವಂತ ಸಾಕ್ಷಿಯಾಗಿ ಎದ್ದು ನಿಂತಿವೆ.

(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಾಯಿತು.



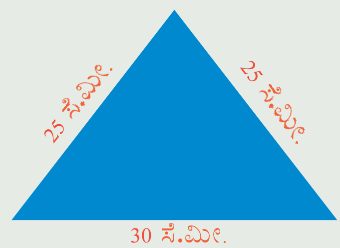

ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?
ಚೌಕವೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳೂ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಆದರೋ?



(2) ಕಾಗದವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಒಂದು ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಪಾದದ ಅಂಚು 10ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 12ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರಬೇಕು. ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

(3) ಯಾವುದೇ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಉನ್ನತಿ, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚುಗಳ ವರ್ಗಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವು ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳಾಗಿ ಒಂದು ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಅದರ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು? ಪಾದದ ಅಂಚು 30 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನ ಬದಲು 40 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾದರೋ?

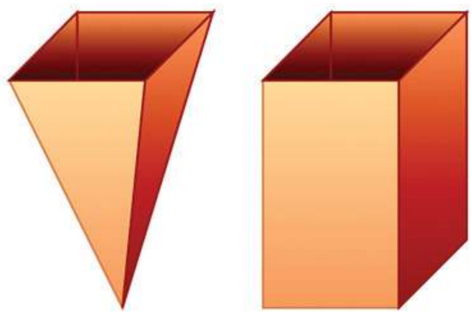



ಸಮಾನವಾದ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೋ?

## ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ

ಯಾವುದೇ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವೆಂಬುದು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಒಂದು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವೋ?

ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನೇ ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಮೊದಲು ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡೋಣ. ದಪ್ಪ ಕಾಗದವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ತೆರೆದ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ.



**ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ**

ಸಮಾನ ಪಾದ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡು ಮತ್ತು ಚೌಕಸ್ತಂಭವನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಇವುಗಳನ್ನು ಪಕ್ಕನೆ ಗುರುತಿಸಲು ಒಳಗಿರುವ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಬಣ್ಣವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ Opacity 100 ನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ ಸಾಕು. Object properties → colour) Volume ನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು? ಇವುಗಳ ಪಾದ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದರೋ?

ಇನ್ನು ಅಷ್ಟೇ ಪಾದದ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯಿರುವ ಒಂದು ತೆರೆದ ಚೌಕ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು.

ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಹೊಗೆ ತುಂಬಿಸಿ ಸ್ತಂಭಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾಯಿಸಿರಿ. ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದ ಹೊಗೆಯ ಗಾತ್ರದ ಎತ್ತರವು ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಬೇಕು. ಮೂರನೇ ಒಂದಲ್ಲವೇ? ಸಂಭದಲ್ಲಿ ಹೊಗೆ ತುಂಬಲು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಲ ಹೊಗೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು?

ಆಗ ಘನಫಲವು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲದ ಮೂರು ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು.(ಇದರ ಗಣಿತ ಪರವಾದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಪಾಠದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ)

ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವೆವು. ಹಾಗಾದರೆ

ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲದ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

**ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಮೂರರಲ್ಲೊಂದಾಗಿದೆ.**

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳು 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು $\frac{1}{3} \times 10^2 \times 8 = 266\frac{2}{3}$ ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ.

ಲೋಹದಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ಒಂದು ಚೌಕ ಗಟ್ಟಿಯ ಒಂದು ಅಂಚಿನ ಉದ್ದ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ 25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಪಾದದ ಅಂಚಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ತಯಾರಿಸಲಾಯಿತು. ಅದರ ಉನ್ನತಿ ಎಷ್ಟು?

ಚೌಕ ಗಟ್ಟಿಯ ಘನಫಲ $15^3$ ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

ಇದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ತಯಾರಿಸಿದ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು ಇದುವೇ ಆಗಿದೆ. ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಉನ್ನತಿಯ ಮೂರರಲ್ಲೊಂದರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $25^2$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಉನ್ನತಿಯ ಮೂರರಲ್ಲೊಂದು $\frac{15^3}{25^2}$ ಆಗಿದೆಯೆಂದೂ, ಇದರಿಂದ ಉನ್ನತಿಯು

$$3 \times \frac{15^3}{25^2} = 16.2 \text{ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು}$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

(1) ಪಾದದ ಅಂಚು 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟು?

(2) ಎರಡು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಘನಫಲಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಎರಡನೆಯ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದವು ಮೊದಲನೆಯ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಎರಡನೆಯ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿಯು ಒಂದನೇ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿಯ ಎಷ್ಟು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ?

(3) ಎರಡು ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳು 1 : 2 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಅವುಗಳ ಉನ್ನತಿಗಳು 1 : 3 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಒಂದನೆಯ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು 180 ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆದರೆ ಎರಡನೆಯ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬಹುದು?

(4) ಅಂಚುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದ 18 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

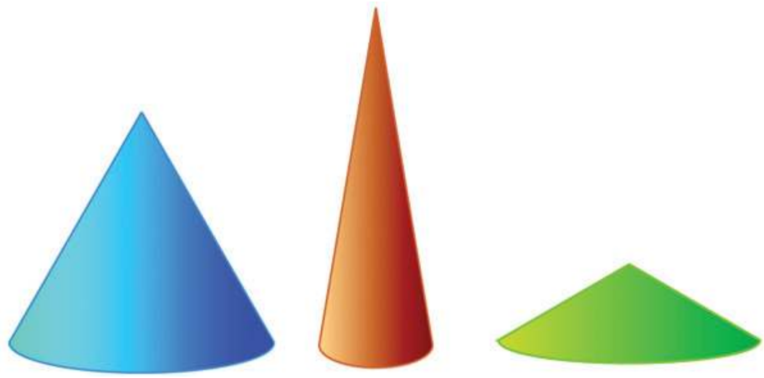
(5) ಒಂದು ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು 25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 896 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6) ಅಂಚುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟು?

(7) ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ 64 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಘನಫಲವು 1280 ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

## ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡು

ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭಗಳಂತೆ, ಪಾದವು ವೃತ್ತವಾಗಿರುವ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳೂ ಇವೆ:

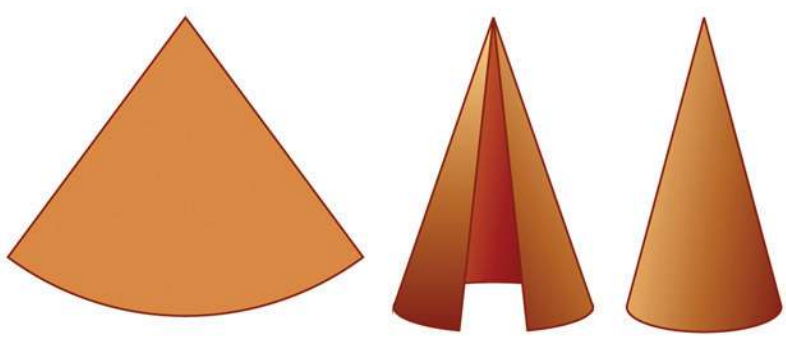


ಇವುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು (cones) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

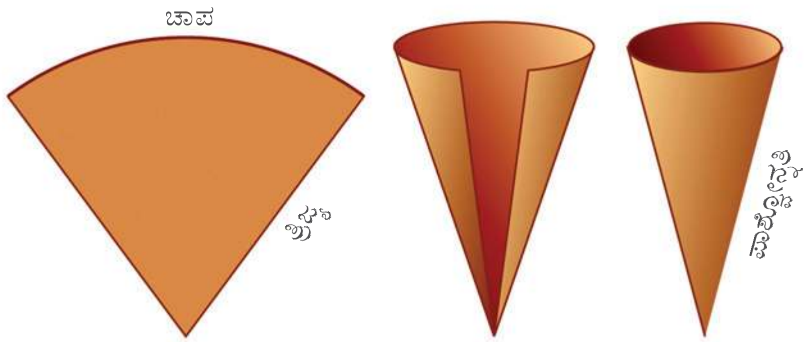
ಆಯತವನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿದಂತೆ ಒಂದು ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನೂ ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದು. (ಮುಚ್ಚಿದ ಪಿರಮಿಡ್ ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬೇರೆಯೂ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತ ಬೇಕಾಗುವುದು.)

**ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡು**

ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಂತೆ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. Graphics ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ 3D Graphics ನಲ್ಲಿ Extrude to Pyramid or Cone ನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಅಗತ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಲು ಸ್ಲೈಡರನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.



ಇದರಲ್ಲಿ ಬಾಗಿಸುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಅಳತೆಗಳು ಮತ್ತು ನಿರ್ಮಿಸಿದ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?




ಸೆಕ್ಟರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯಾಗುವುದು; ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪದ ಉದ್ದವು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗುವುದು.

ಸೆಕ್ಟರಿನ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾಗಿದೆ. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

> ತ್ರಿಜ್ಯ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದಿಂದ $45°$ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವಿರುವ ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು. ಇದನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸುವ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು?

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾದ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು, ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯೂ ಆಗಿದೆ. ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವೋ?

$45°$ ಎಂಬುವುದು, $360°$ ಯ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪದ ಉದ್ದವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ. ಆಗ ಈ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪದ ಉದ್ದವು ಒಟ್ಟು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಈ ಚಾಪವು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ವೃತ್ತವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು, ಸುತ್ತಳತೆಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $12 \times \frac{1}{8} = 1.5$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು.

ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆಯಾದರೆ?

> ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸೆಕ್ಟರ್ ಬೇಕು. ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಿಂದಲೇ ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಇದರ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದವಾಗಿರುವ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯುವ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. (ಅದು ಹೇಗೆ?). ಆಗ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪದ ಉದ್ದವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪವು ಅದನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ವೃತ್ತದ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದರ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು $360 \times \frac{1}{3} = 120°$.

(1) ತ್ರಿಜ್ಯ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 60° ಆಗಿರುವ ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(2) ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ 25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಎಷ್ಟು?

(3) ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸಿದ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎಷ್ಟು?

## ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭಕ್ಕಿರುವಂತೆಯೇ, ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿಗೂ ಒಂದು ವಕ್ರಮೈ ಇದೆ; ಅದರ ಓರೆಯಾಗಿ ಮೇಲಕ್ಕಿರುವ ಭಾಗ. ಈ ವಕ್ರಮೈಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ. (ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಂಬುವುದು ಅದರ ವಕ್ರಮೈಯನ್ನು ಸುತ್ತಿ ನಿರ್ಮಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡಿನ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು Algebra ದ Surface ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.

ತ್ರಿಜ್ಯ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ 30 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಟೋಪಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಕಾಗದ ಬೇಕಾಗಬಹುದು?

ಇಂತಹ ಟೋಪಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು 30 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇಷ್ಟೇ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಿಂದ ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

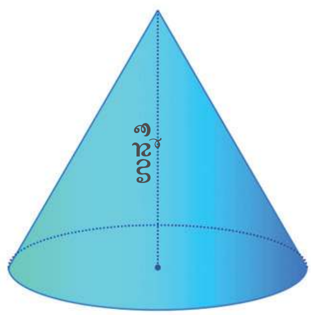
ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದವಾದ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ ಭಾಗ. ಆಗ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{4}{15}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ.

ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾದ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪದ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ನೋಡಿದಾಗ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾದ ಸೆಕ್ಟರು ವೃತ್ತದ $\frac{4}{15}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಈ ವೃತ್ತದ ಇಷ್ಟೇ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ,

$$\pi \times 30^2 \times \frac{4}{15} = \pi \times 2 \times 30 \times 4 = 240\pi$$

ಆದುದರಿಂದ, ಟೋಪಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು $240\pi$ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಕಾಗದ ಬೇಕು. (ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಿ, ಇದು ಸುಮಾರು 754 ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.)

ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೇ ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲೂ ಪಾದದಿಂದ ಶೀರ್ಷಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬ ದೂರವು ಉನ್ನತಿಯಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಇದು ಪಾದವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಶೀರ್ಷಕ್ಕಿರುವ ದೂರವಾಗಿದೆ.




### ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಒಂದು ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r$ ಎಂದೂ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ $l$ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಸೆಕ್ಟರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ $l$ ಎಂದೂ, ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $\frac{r}{l} \times 360$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಆಗ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

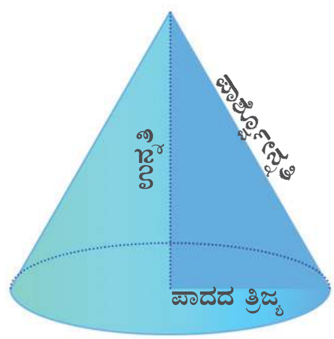
$$\frac{1}{360} \times \left(\frac{r}{l} \times 360\right) \times \pi l^2 = \pi r l$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. (ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿದುದು ನೆನಪಿಸಿರಿ.)

ಅಂದರೆ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಎಂಬವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿದೆ.

ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲೂ ಉನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಎಂಬವುಗಳೊಳಗೆ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಸಂಬಂಧವಿದೆ:

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 5ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ $\sqrt{5^2+10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ.



(1) ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ 25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

(2) ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 30 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 40 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

(3) ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಹೂದಾನಿಯ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಇಂತಹ 10000 ಹೂದಾನಿಗಳ ಹೊರಭಾಗವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಬಣ್ಣದ ಕಾಗದಿಂದ ಅಂಟಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ಚದರಮೀಟರು ಬಣ್ಣದ ಕಾಗದಕ್ಕೆ 2 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆಯಾದರೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಖರ್ಚಾಗಬಹುದು?

(4) ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

## ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ

ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಡೆಸಿದ ಪ್ರಯೋಗದಂತೆ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ನಡೆಸಬಹುದು. ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಅಷ್ಟೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಹೊಗೆಯನ್ನು ತುಂಬಿಸಿ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾಯಿಸಿರಿ. ಇಲ್ಲಿಯೂ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲದ ಮೂರರಲ್ಲೊಂದು ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಎಂದರೆ,

**ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಮೂರರಲ್ಲೊಂದು ಭಾಗ ಆಗಿದೆ.**

**ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ**

ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ ಸಮಾನ ಪಾದ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡು ಮತ್ತು ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಇವುಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ತುಲನೆ ಮಾಡಿರಿ.

(ಇದರ ಗಣಿತ ಪರವಾದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಪಾಠದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.) ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 6 = 32\pi$$ ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ.

(1) ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಮರದ ತುಂಡಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 40 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಕೆತ್ತಿ ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟು?

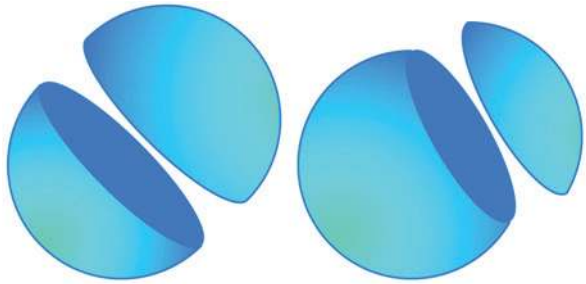
(2) ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 20 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಲೋಹದ ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಎಷ್ಟು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು?

(3) $216^{\circ}$ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಮತ್ತು 25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದರೆ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವೂ ಉನ್ನತಿಯೂ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು? ಘನಫಲವೋ?

(4) ಎರಡು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು 3 : 5 ಹಾಗೂ ಉನ್ನತಿಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 2 : 3, ಆಗಿರುವುದಾದರೆ ಅವುಗಳ ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎಷ್ಟು?

(5) ಸಮಾನ ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು 4 : 5 ಆಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಉನ್ನತಿಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

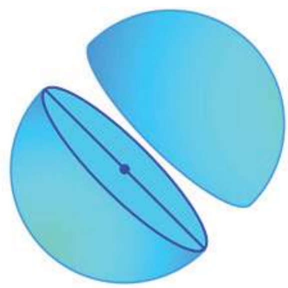
## ಗೋಳ



ಚೆಂಡಾಟದ ಉತ್ಸಾಹದಲ್ಲಿಯೂ, ಲಡ್ಡಿನ ಸಿಹಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಗೋಳಗಳನ್ನು ಆಸ್ವಾದಿಸಿದ್ದೇವಲ್ಲವೆ. ಇನ್ನು ಗೋಳದ ಗಣಿತವನ್ನು ನೋಡೋಣ. (ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ ಗೋಳಕ್ಕೆ sphere ಎಂದು ಹೆಸರು.)

ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಅಥವಾ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ, ವೃತ್ತ ಸಿಗುವುದು. ಗೋಳವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕತ್ತರಿಸಿದರೂ ವೃತ್ತ ಸಿಗುವುದು.

ಒಂದು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅದರ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಅಂತರ ಸಮಾನವಲ್ಲವೇ. ಗೋಳಕ್ಕೂ ಒಂದು ಕೇಂದ್ರವಿದೆ; ಅದರಿಂದ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುಗಿರುವ ದೂರ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಆ ಅಂತರವನ್ನು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎನ್ನುವರು. ಅದರ ಎರಡು ಮಡಿಯನ್ನು ವ್ಯಾಸವೆಂದೂ ಹೇಳುವರು.



ಒಂದು ಗೋಳವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಅರ್ಧವಾಗುವಂತೆ ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ, ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸಗಳು ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರ, ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸಗಳೇ ಆಗಿವೆ.

ಇದುವರೆಗೆ ನೋಡಿದ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ, ಗೋಳವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಬಿಡಿಸಿಟ್ಟು ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಸ್ವಲ್ಪವಾದರೂ ನೆರಿಗೆಗಳಿಲ್ಲದೆ ಗೋಳವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಸಮತಲವನ್ನಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ವಾಸ್ತವ. ಆದರೆ ಒಂದು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು $r$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $4\pi r^2$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. (ವಿವರಣೆ ಪಾಠದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.).

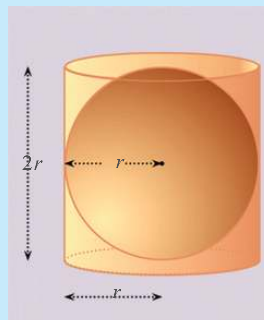
ಅಂದರೆ,

**ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗವನ್ನು $4\pi$ ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದುದಾಗಿದೆ.**

ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ತ್ರಿಜ್ಯ $r$ ಆಗಿರುವ ಗೋಳದ ಘನಫಲವು $\frac{4}{3}\pi r^3$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. (ಇದರ ವಿವರಣೆಗಳನ್ನು ಪಾಠದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.).

### ಗೋಳವೂ ಸ್ತಂಭವೂ

ಒಂದು ಗೋಳವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಆವರಿಸುವ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ತ್ರಿಜ್ಯವೇ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಈ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಎರಡು ಮಡಿ ಉನ್ನತಿ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ: ಅಂದರೆ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r$, ಉನ್ನತಿ $2r$. ಆಗ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ




$$(2\pi r \times 2r) + (2 \times \pi r^2) = 6\pi r^2$$

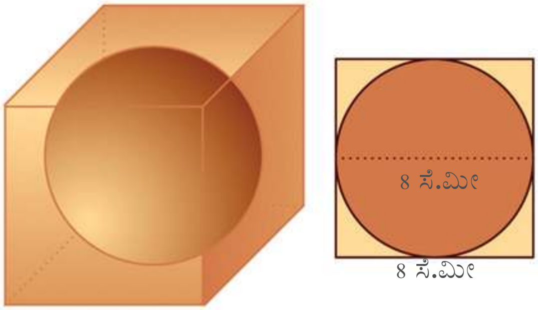
ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $4\pi r^2$. ಈ ಎರಡೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 3: 2 ಆಗಿದೆ.

ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲ

$$\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$$

ಮತ್ತು ಗೋಳದ ಘನಫಲ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು 3 : 2 ಆಗಿದೆ.

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

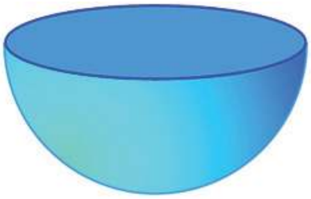



ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಚಿನ ಉದ್ದವೂ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕಗಟ್ಟಿ (ಘನ)ಯಿಂದ ಕೆತ್ತಿ ತಯಾರಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸವು ಚೌಕಗಟ್ಟಿಯ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಚಿತ್ರದಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$4\pi \times 4^2 = 64\pi \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ ಗಮನಿಸಿರಿ:



12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಒಂದು ಗೋಳವನ್ನು ಎರಡು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಹೊರಮೈ (hemisphere) ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅರ್ಧ ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತ ಸೇರಿರುವುದಲ್ಲವೇ ಅರ್ಧಗೋಳ.

ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$4\pi \times 12^2 = 576\pi \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಇದರ ಅರ್ಧ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸೇರಿರುವುದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು,

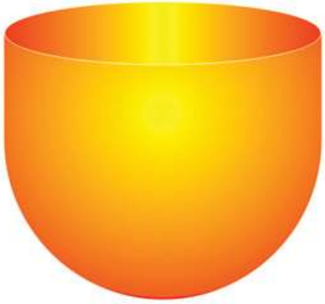
$$\pi \times 12^2 = 144\pi \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

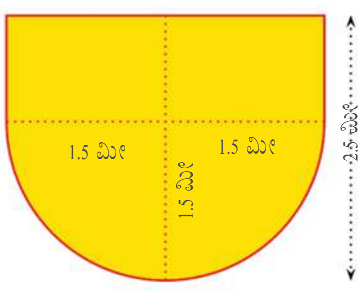
ಆಗ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\frac{1}{2} \times 576\pi + 144\pi = 432\pi \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ:

ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಒಂದು ತುದಿಯಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಗೋಳವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕಿಯ ಒಟ್ಟು ಎತ್ತರ 2.5 ಮೀಟರು ಮತ್ತು ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 1.5 ಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರು ನೀರು ಹಿಡಿಯಬಹುದು?





ಟ್ಯಾಂಕಿಯ ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಭಾಗದ ಘನಫಲ

$$\frac{2}{3}\pi \times (1.5)^3 = 2.25\pi \text{ ಘನಮೀಟರು}$$

ವೃತ್ತಸ್ತಂಭ ಭಾಗದ ಘನಫಲ

$$\pi \times (1.5)^2 (2.5 - 1.5) = 2.25\pi \text{ ಘನಮೀಟರು}$$

ಆಗ ಟ್ಯಾಂಕಿಯ ಒಟ್ಟು ಘನಫಲ

$$2.25\pi + 2.25\pi = 4.5\pi \approx 14.13 \text{ ಘನಮೀಟರು}$$

FBDPQ5

ಒಂದು ಘನಮೀಟರು ಎಂಬುದು, 1000 ಲೀಟರು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಟ್ಯಾಂಕಿಯಲ್ಲಿ ಸುಮಾರು 14130 ಲೀಟರು ನೀರು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

?

(1) ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಒಂದು ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 120 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಅದನ್ನು ತುಂಡರಿಸಿ ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

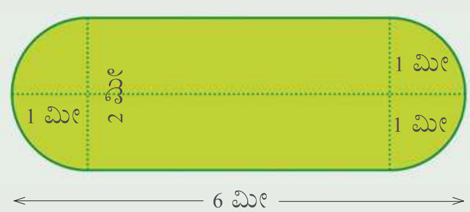
(2) ಎರಡು ಗೋಳಗಳ ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 27 : 64 ಆಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎಷ್ಟು? ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎಷ್ಟು?

(3) ಲೋಹದಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಉದ್ದ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಆಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ, 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಎಷ್ಟು ಗೋಳಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು?

(4) 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಲೋಹದ ಗೋಳವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಸಮಾನ ಗಾತ್ರವಿರುವ 27 ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಗೋಳಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದರೆ ಸಣ್ಣ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(5) 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಒಂದು ಗೋಳದಿಂದ 16 ಸೆಂಟಿಮೀಟರು ಉನ್ನತಿಯಿರುವ ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು. ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು ಗೋಳದ ಘನಫಲದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆ?

(6) ಒಂದು ಪೆಟ್ರೋಲ್ ಟ್ಯಾಂಕಿಯ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ:




ಇದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರು ಪೆಟ್ರೋಲ್ ಹಿಡಿಯಬಹುದು?

(7) ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಒಂದು ಗೋಳವನ್ನು ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳಗಳಾಗಿ ತುಂಡರಿಸಿ ಒಂದರಿಂದ ಗರಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರವಿರುವ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನೂ ಇನ್ನೊಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನೂ ತುಂಡರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು. ಇವುಗಳ ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಯಾವುದು?

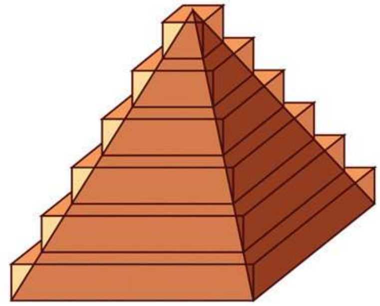
FBHKRS

ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದಿಂದ ಕೆತ್ತಿ ತೆಗೆಯಲಾಗುವ ಅತಿದೊಡ್ಡದಾದ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯೇನು?

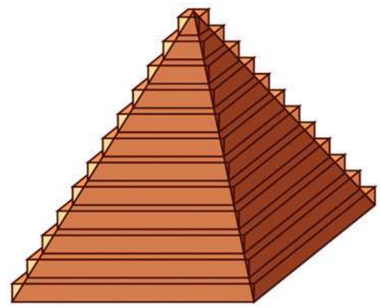
## ಅನುಬಂಧ

ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಘನಫಲ, ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಘನಫಲ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವಲ್ಲವೇ ನೋಡಿದ್ದು. ಇವುಗಳು ಹೇಗೆ ಸಿಕ್ಕಿದುವು ಎಂಬುದನ್ನರಿಯಲು ಆಸಕ್ತಿಯಿರುವವರಿಗಾಗಿ, ಅವುಗಳ ವಿವರಣೆಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

### ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ



ಒಂದು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಸರಿಸುಮಾರು ರೂಪವಾಗಿ ಕೆಲವು ಚೌಕ ಚಪ್ಪಡಿಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ಊಹಿಸಬಹುದು.

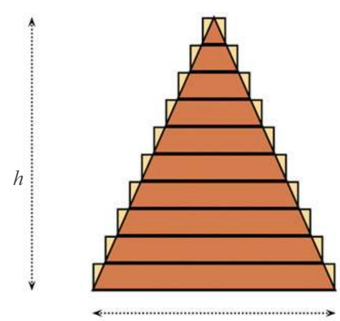


ಚಪ್ಪಡಿಗಳ ದಪ್ಪ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಅಟ್ಟಿಯ ಹೊಂದಿಕೆಯು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿಗೆ ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾಗುವುದು.

ಆಗ ಈ ಚಪ್ಪಡಿಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತವು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ನಿಕಟವಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 10 ಚಪ್ಪಡಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಯಿತೆಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಪ್ಪಡಿ ಒಂದೊಂದು ಚೌಕಸ್ತಂಭವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ; ಇವುಗಳ ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ಸಮಾನವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಆಗ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿ $h$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ಚಪ್ಪಡಿಯ ಉನ್ನತಿ $\frac{1}{10}h$ ಇನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಪ್ಪಡಿಯ ಪಾದವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಿ?

ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನೂ ಅದನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವ ಚಪ್ಪಡಿಗಳ ಅಟ್ಟಿಯನ್ನು ಶೀರ್ಷದ ಮೂಲಕ ಲಂಬವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ, ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಆಕೃತಿ ಸಿಗುವುದು:




ಮೇಲಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತಾ ಬರುವುದಲ್ಲವೇ; ಇವುಗಳ ಉನ್ನತಿ ವೃದ್ಧಿಸುವುದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಪ್ಪಡಿಯಲ್ಲೂ $\frac{1}{10}h$ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಇವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸದೃಶವಾಗಿರುವುದರಿಂದ (ಕಾರಣವೇನು?) ಪಾದಗಳೂ ಇದೇ ದರದಲ್ಲಿಯೇ ಹೆಚ್ಚಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದವನ್ನು $b$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಮೇಲಿನಿಂದಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪಾದ $\frac{1}{10}b, \frac{2}{10}b, ...., b$ ಎಂಬಂತಿರುವುದು.

ಆಗ ಈ ಚಪ್ಪಡಿಗಳ ಘನಫಲ

$$\left(\frac{1}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, \left(\frac{2}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, ...b^2 \times \frac{1}{10}h$$

ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು?

$$\frac{1}{10}b^2h\left(\frac{1}{10^2} + \frac{2^2}{10^2} + ... + \frac{9^2}{10^2} + \frac{10^2}{10^2}\right) = \frac{1}{1000}b^2h\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2\right)$$

ಇಂತಹ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು **ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ವರ್ಗಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಹೇಳಲಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2 = \frac{1}{6} \times 10 \times (10 + 1) \times (2 \times 10 + 1)$$

ಆಗ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\frac{1}{1000}b^2h \times \frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 21 = \frac{1}{6}b^2h \times \frac{10}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{21}{10} = \frac{1}{6}b^2h \times 1.1 \times 2.1$$

ಇನ್ನು ಇದರಂತೆ 100 ಚಪ್ಪಡಿಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. (ಅದನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ). ಚಪ್ಪಡಿಗಳ ದಪ್ಪ $\frac{1}{100}h$ ಆಗುವುದು; ಪಾದಗಳ ಅಂಚು $\frac{1}{100}b, \frac{2}{100}b, \frac{3}{100}b, ...$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\frac{1}{100^3}b^2h\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2\right) = \frac{1}{100^3}b^2h \times \frac{1}{6} \times 100 \times 101 \times 201$$

$$= \frac{1}{6}b^2h \times \frac{100}{100} \times \frac{101}{100} \times \frac{210}{100}$$

$$= \frac{1}{6}b^2h \times 1.01 \times 2.01$$

ಚಪ್ಪಡಿಗಳು 1000 ಆದರೆ? ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕದೆಯೇ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\frac{1}{6}b^2h \times 1.001 \times 2.001$$

ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದಲ್ಲವೇ. ಈ ಮೊತ್ತಗಳು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಹೆಚ್ಚೆಚ್ಚು ನಿಕಟವಾಗುವುದು?

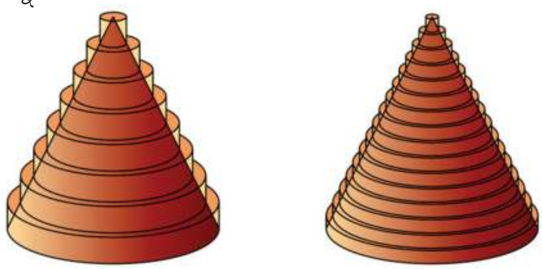
ಇದುವೇ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ. ಅಂದರೆ,

$$\frac{1}{6}b^2h \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}b^2h$$

## ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ

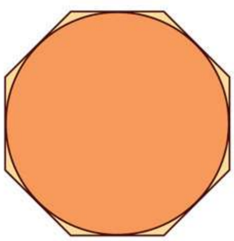
ಚೌಕ ಹಲಗೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಸಿಟ್ಟು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಸರಿಸುಮಾರು ಆಕೃತಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿದಂತೆಯೇ, ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಹಲಗೆಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಹೊಂದಿಸಿಟ್ಟು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಸರಿಸುಮಾರು ಆಕೃತಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಬಹುದು:

ಇದರ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕು. (ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.)



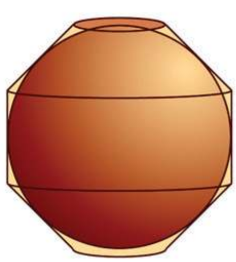
## ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಇದಕ್ಕಾಗಿ, ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಗೋಳದ ಮಧ್ಯದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೂ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ ಅದನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಒಂದು ಸಮಬಹುಭುಜವನ್ನೂ ಊಹಿಸಿರಿ.



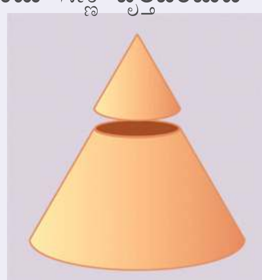
ಇನ್ನು ಈ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಒಮ್ಮೆ ತಿರುಗಿಸಿದರೆ, ಒಳಗೊಂದು ಗೋಳವೂ, ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಆಕೃತಿಯೂ ಸಿಗುವುದು;

ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಹೊರಗಿರುವ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಎರಡು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳ ಪೀಠಗಳಾಗಿಯೂ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭವಾಗಿಯೂ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು:



### ಸಣ್ಣದೂ ದೊಡ್ಡದೂ

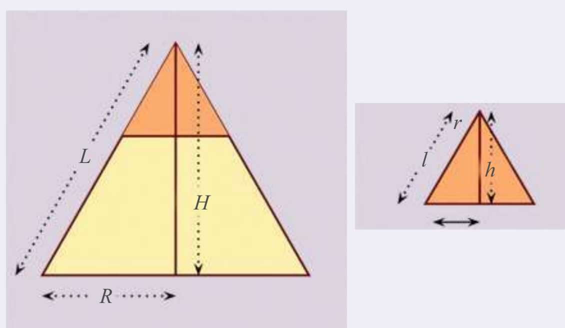
ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ, ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ ಸಿಗುವುದು.



ಸಣ್ಣ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಅಳತೆಗಳೊಳಗೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ?

ಪಾದದತ್ರಿಜ್ಯ, ಉನ್ನತಿ, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಎಂಬಿವುಗಳಿಗೆ ದೊಡ್ಡ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿ $R$, $H$, $L$ ಎಂದೂ ಸಣ್ಣದರಲ್ಲಿ $r$, $h$, $l$ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಚಿತ್ರದಿಂದ

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \frac{l}{L}$$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

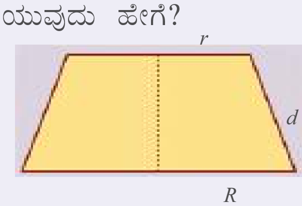


ಬಹುಭುಜದ ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ಹೊರಗಿನ ಆಕೃತಿಯು ಗೋಳಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ನಿಕಟವಾಗುವುದು:

## ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪೀಠ

ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗದಿಂದ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದರೆ ಕೆಳಗೆ ಉಳಿದ ಭಾಗಕ್ಕೆ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪೀಠ (frustum of a cone) ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪೀಠದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಮತ್ತು ಕೆಳಭಾಗದ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ (ಓರೆ ಎತ್ತರ) ತಿಳಿದಿರುವುದಾದರೆ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ?



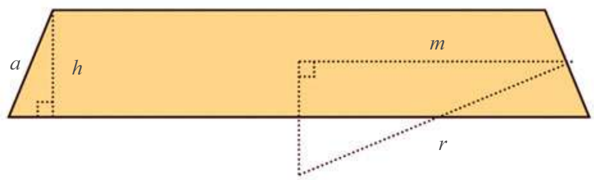

ದೊಡ್ಡ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹಾಗೂ ಸಣ್ಣ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಗಳನ್ನು $L$, $l$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $d = L - l$. ಆಗ ಪೀಠದ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

$$\begin{aligned}\pi RL - \pi rl &= \pi(RL - rl)\\ &= \pi\big(R(l+d) - rl\big)\\ &= \pi(Rl + Rd - rl)\end{aligned}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಈ ಮೊದಲೇ ನೋಡಿದಂತೆ, $\frac{r}{R} = \frac{l}{L}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $Rl = rL$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\begin{aligned}\pi(rL + Rd - rl) &= \pi\big(r(L-l) + Rd\big)\\ &= \pi(rd + Rd)\\ &= \pi(r+R)d\end{aligned}$$

ಈ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ನೋಡೋಣ. ಇದರ ಮಧ್ಯದ ಮೂಲಕವಿರುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $m$ ಎಂದೂ, ಉನ್ನತಿ $h$ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸುವ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r$ ಎಂದೂ ಅದನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವ ಭುಜದ ಅಂಚು $a$ ಎಂದೂ ತೆಗೆದರೆ, ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಚಿತ್ರ ಸಿಗುವುದು.




ಇದರ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಸದೃಶವಾಗಿಸಿದರೆ

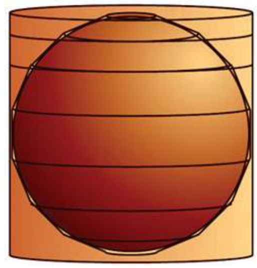
$$\frac{m}{r} = \frac{h}{a}$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಅಂದರೆ,

$$am = rh$$

ಇದು ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಪೀಠದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $2\pi ma$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು **ಪೀಠವೂ ಸ್ತಂಭವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು (ಕೊನೆಯ ಪುಟ). ಮೇಲಿನ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಪ್ರಕಾರ, ಇದು $2\pi rh$ ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಇದುವೇ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r$ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ $h$ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ.

ಆಗ ಸಿಕ್ಕಿದುದೇನು? ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಗೋಳದ ಸರಿಸುಮಾರು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಂಬುದು ಅಷ್ಟೇ ಉನ್ನತಿಯೂ, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟೆ ತ್ರಿಜ್ಯವೂ ಇರುವ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ.



ಆದುದರಿಂದ ಈ ಸರಿಸುಮಾರು ಆಕೃತಿಯ ಒಟ್ಟು ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ಈ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭಗಳ ಒಟ್ಟು ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ. ಈ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವುದೇನು? ದೊಡ್ಡದೊಂದು ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭ:

ವೃತ್ತವನ್ನು ಆವರಿಸುವ ಬಹುಭುಜದ ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಅದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ನಿಕಟವಾಗುವುದು; ಗೋಳವನ್ನು ಆವರಿಸುವ ಆಕೃತಿಯು, ಗೋಳಕ್ಕೆ ನಿಕಟವಾಗುವುದು. ಈಗ ಕಂಡಂತೆ, ಎಷ್ಟೆ ಅಂಚುಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೂ ಈ ಆಕೃತಿಯ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ಆಗ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದನ್ನು ಆವರಿಸುವ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇ ಆಗಿದೆ. ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ $r$ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ $2r$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

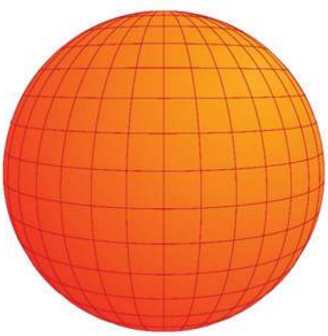
$$2\pi \times r \times 2r = 4\pi r^2$$

ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ಇದುವೇ ಆಗಿದೆ.

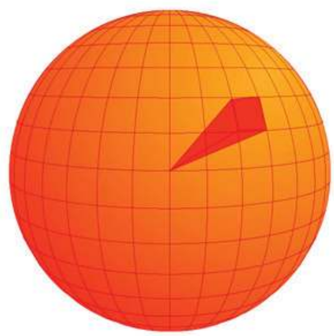
FBHGTF

## ಗೋಳದ ಘನಫಲ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



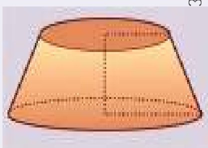
ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಅಡ್ಡಕ್ಕೂ ರಚಿಸಿದ ವೃತ್ತಗಳಿಂದ ಗೋಳವನ್ನು ಹಲವಾರು ಕೋಣೆಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಂತಹ ಒಂದು ಕೋಣೆಯ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಂತಿರುವ ಒಂದು ಆಕೃತಿ ಸಿಗುವುದು:



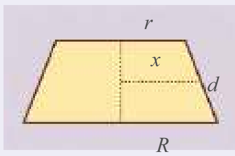
ಇಂತಹ ಆಕೃತಿಗಳು ಸೇರಿರುವುದೇ ಗೋಳ; ಆದುದರಿಂದ ಗೋಳದ ಘನಫಲವೆಂಬುದು ಈ ಆಕೃತಿಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ. ಇನ್ನು ಗೋಳದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋಣೆಗಳನ್ನು, ಗೋಳವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ, ಗೋಳವನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವ ಒಂದು ಆಕೃತಿ ಸಿಗುವುದು; ಅದು ನಿಖರವಾದ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ. ಈ ಎಲ್ಲಾ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಉನ್ನತಿ, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವೇ ಆಗಿದೆ. ಇದನ್ನು $r$ ಎಂದೂ, ಒಂದು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $a$ ಎಂದೂ, ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಅದರ ಘನಫಲ $\frac{1}{3}ar$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಗೋಳವನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವ

### ಪೀಠವೂ ಸ್ತಂಭವೂ

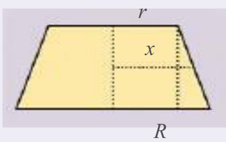
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪೀಠದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\pi(r+R)d$ ಎಂದು ತಿಳಿದೆವಲ್ಲವೇ.



ಇದರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $x$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಹೀಗೊಂದು ಚಿತ್ರ ಸಿಗುವುದು:




ಹೀಗೆ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ?




ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಂದ,

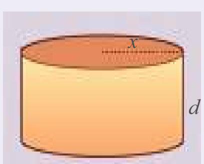
$$\frac{x-r}{R-r}=\frac{1}{2}$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದರೆ,

$$x=\frac{1}{2}(R+r)$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ, ಪೀಠದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $2\pi xd$

ಇದು, ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ $x$ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ $d$ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಲ್ಲವೇ?




ಆಕೃತಿಯ ಘನಫಲವು ಈ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಎಲ್ಲಾ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಪಾದಗಳು ಸೇರಿದರೆ, ಈ ಆಕೃತಿಯ ಹೊರಮೈ ಆಗುವುದು. ಆಗ ಈ ಎಲ್ಲಾ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಪಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ, ಈ ಆಕೃತಿಯ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು $s$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಆಕೃತಿಯ ಘನಫಲವು $\frac{1}{3}sr$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಗೋಳದ ಕೋಣೆಗಳು ಸಣ್ಣದಾಗಿ ಅವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಗೋಳವನ್ನು ಆವರಿಸುವ ಆಕೃತಿಯು ಗೋಳಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ನಿಕಟವಾಗುವುದು; $s$ ಎಂಬುದು, ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದೊಂದಿಗೆ ನಿಕಟವಾಗುವುದು. ಅದು $4\pi r^2$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಗೋಳವನ್ನು ಆವರಿಸುವ ಆಕೃತಿಯ ಘನಫಲ

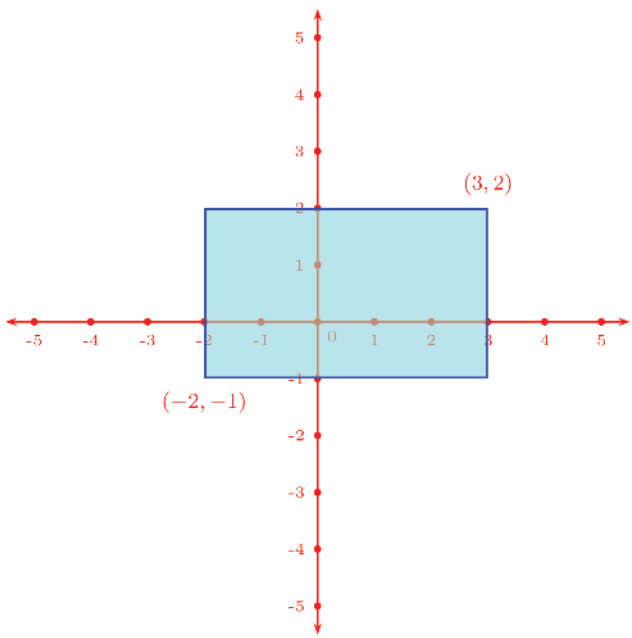
$$\frac{1}{3}\times 4\pi r^2\times r=\frac{4}{3}\pi r^3$$

ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು. ಇದುವೇ ಗೋಳದ ಘನಫಲವಾಗಿದೆ.

# 9 ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ

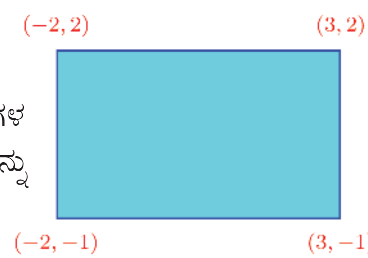
## ತ್ರಿಕೋನ ಲೆಕ್ಕಗಳು

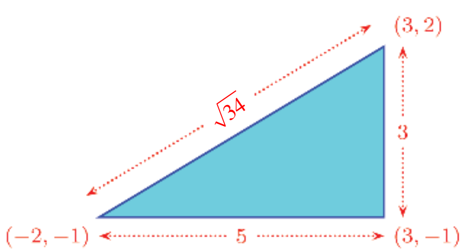
ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ಯಾವುದಾದರೂ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಗಳಾಗುವಂತೆಯೂ, ಭುಜಗಳು ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗುವಂತೆಯೂ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿದೆವಲ್ಲವೆ:




> A ಎಂಬ ಹೆಸರಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Input Bar ನಲ್ಲಿ (x(A) + 3, y(A) + 2) ಎಂದು ನೀಡಿ ನೋಡಿರಿ. ಹೀಗೆ ಲಭಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆ ಏನು? A ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಲಾದ ನಿರ್ದೇಶನದ ಅರ್ಥವೇನು?

ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ನೋಡದೆ, ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಆಯತದ ಇತರ ಎರಡು ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂದೂ ತಿಳಿದೆವು:




ಇಂತಹ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೀಗೆ ಇರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಅವುಗಳೊಳಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವುದು. ನಿಜವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಲ್ಲಿ ಆಯತವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಿಲ್ಲ. ಅದರ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವುದು.

### ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಬೀಜಗಣಿತ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಯಲ್ಲವೇ. ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಈ ರೀತಿಯ ಕೆಲವು ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ವಿಶದಪಡಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನೂ ನೋಡಿರುವೆವು.

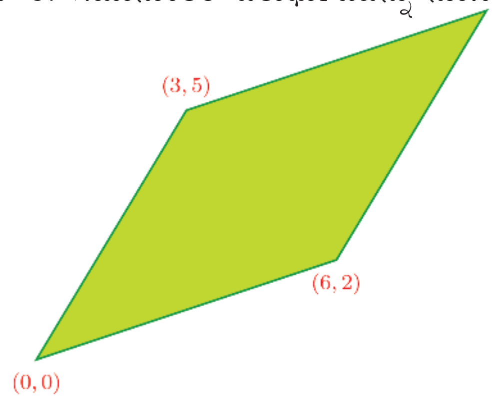
ಒಂದು ತಲದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನೂ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನೂ ಬಿಜಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಒಂದು ಮೂಲೆ $(0, 0)$ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮೀಪದ ಎರಡು ಮೂಲೆಗಳು $(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $(x_2, y_2)$ ಆಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕನೇ ಮೂಲೆಯು $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ಆಗಿರುವುದೆಂಬ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸ್ವಭಾವಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದರ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿದೆ.

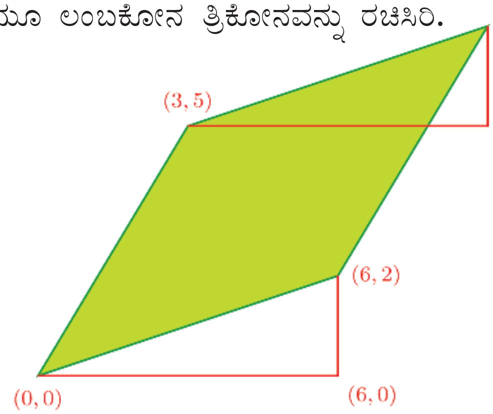
A (0, 0) ಎಂಬ ಬಿಂದು ಮತ್ತು B, C ಎಂಬೀ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಗುರುತಿಸಿರಿ. Input Bar ನಲ್ಲಿ (x(B) + x (C), y(B) + y (C)) ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ D ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದು ಲಭಿಸುವುದು. ABCD ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇದು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಲ್ಲವೇ? ಕಾರಣವೇನು? B, C ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಮೂಲೆಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Move ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು 3 ಯೂನಿಟ್ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಚಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಮೂಲೆಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು? ಹೀಗೆ ಲಭಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಮೇಲ್ಭಾಗಕ್ಕೆ 2 ಯೂನಿಟ್ ಅಂತರಕ್ಕೆ ಚಲಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಿರಿ. ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು? ಮೊದಲು ಲಭಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನದ ಮತ್ತು ನಂತರ ಲಭಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂಲೆಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು? ತ್ರಿಕೋನದ ಬದಲು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಇದನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

ಹೀಗೆ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಮಾಡುವ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಹಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಆಧಾರಬಿಂದು ಮತ್ತು ಇತರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಶಿರಗಳಾಗಿ ರಚಿಸಿರುವ ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

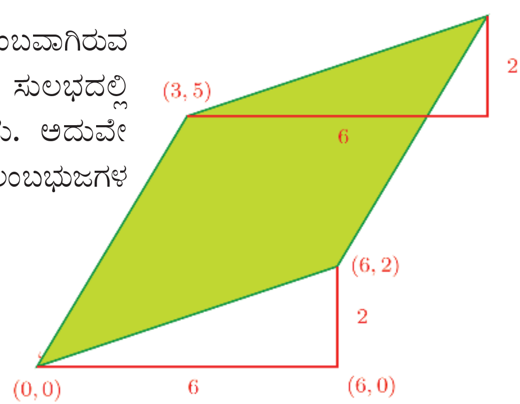



ಇದರ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಅದಕ್ಕೆ, ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಗಳು ಕರ್ಣಗಳಾಗುವಂತೆಯೂ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಭುಜಗಳು ಲಂಬಭುಜಗಳಾಗುವಂತೆಯೂ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

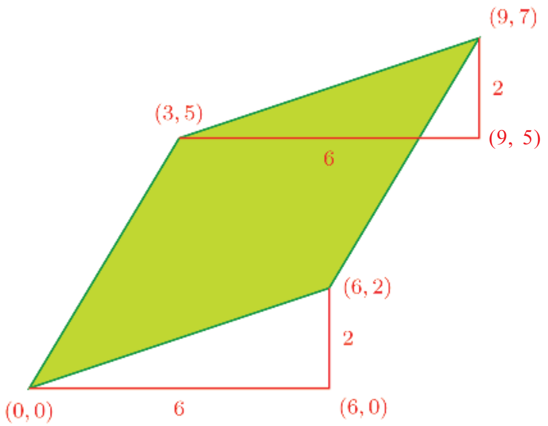



ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ (ಕಾರಣ?). ಆದುದರಿಂದ ಅದರ ಲಂಬ ಭುಜಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅದುವೇ ಮೇಲಿನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಭುಜಗಳ ಉದ್ದ.



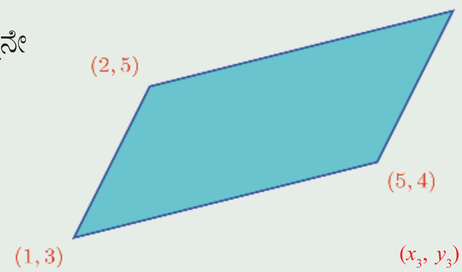
ಇನ್ನು ಮೇಲಿನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ಬಲಭಾಗದ ಶಿರ (9, 5) ಎಂದೂ, ಅನಂತರ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಶಿರ (9, 7) ಎಂದೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೆ. (ಹೇಗೆ?)




ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಒಂದು ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಅಗತ್ಯಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಚಲಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಲು Translate by Vector ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದನ್ನು ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ 3 ಯೂನಿಟ್ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗಕ್ಕೆ 2 ಯೂನಿಟ್‌ನಷ್ಟು ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸಬೇಕು ಎಂದಿರಲಿ. ಇದಕ್ಕೆ (0, 0), (3, 2) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Translate by Vector ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮೊದಲು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ಆಮೇಲೆ (0, 0), (3, 2) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲೂ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿರಿ. ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಮೂಲೆಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳೇನು? (3, 2) ರ ಬದಲು ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಪರಿಗಣಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

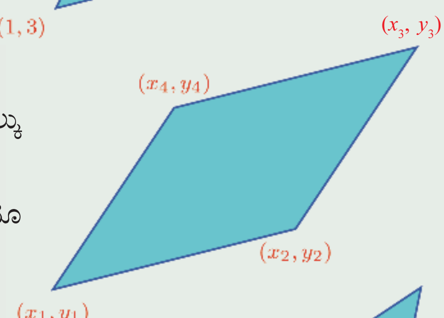
A, B, C ಎಂಬೀ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. (x(B) + x(C) - x(A), y(B) + y(C) - y(A)) ಎಂದು Input Bar ನಲ್ಲಿ ನೀಡಿದರೆ D ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದು ಸಿಗುವುದು. ABCD ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆಯೇ? ಕಾರಣವೇನು?

(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

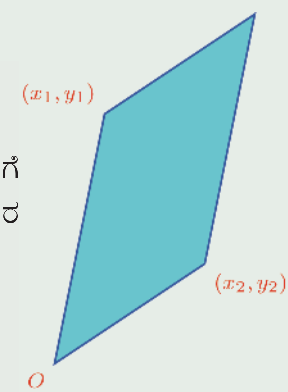



(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ.

$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ ಎಂದೂ $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$ ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.



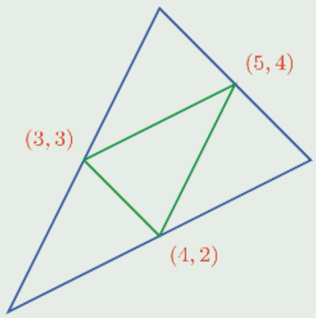

(3) $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆಧಾರ ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳು ಸಮೀಪ ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?



(4) ಯಾವುದೇ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಕರ್ಣಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಅದರೊಳಗಿರುವ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ:

ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

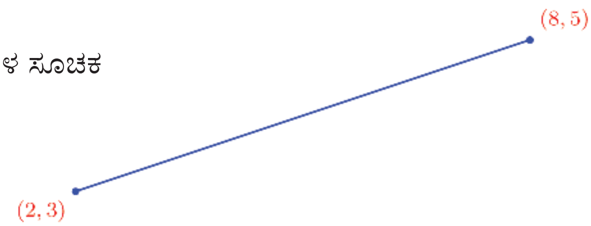



## ಮಧ್ಯಬಿಂದು

ಒಂದು ಆಯತದ ಬದಿಗಳು ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದಾದರೆ ಅವುಗಳ ಒಂದು ಜತೆ ವಿರುದ್ಧ ಮೂಲೆಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಜತೆ ವಿರುದ್ಧ ಮೂಲೆಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೆಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲೇ ನೋಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ (ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ). ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮೂರು ಮೂಲೆಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ತಿಳಿದರೆ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಮೂಲೆಯ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೆಂದೂ ಈಗ ನೋಡಿದೆವು.

ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ, ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಂದಿಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಇತರ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

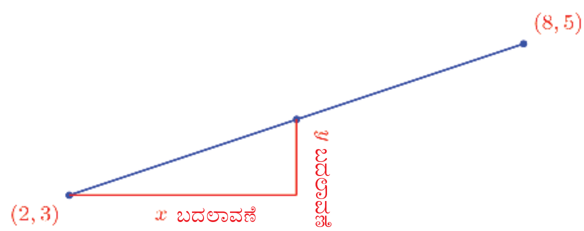
ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



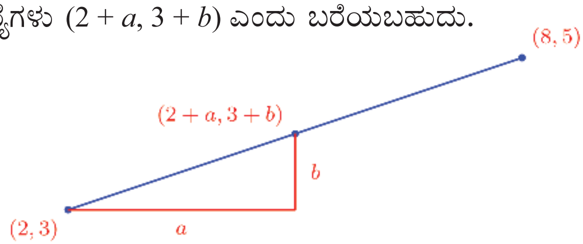

ಈ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ. (2, 3) ನಿಂದ (8, 5) ಗಿರುವ ದೂರದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

(2, 3) ನಿಂದ ಈ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವಾಗ $x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ $y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ, ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಯಿತು.

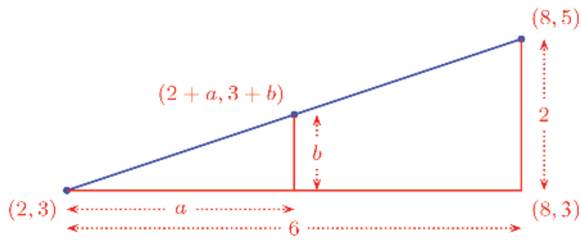
A, B ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಲಭಿಸಲು (A + B)/2 ಎಂದು Input Bar ನಲ್ಲಿ ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕು.



ಈ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು $a, b$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(2 + a, 3 + b)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.



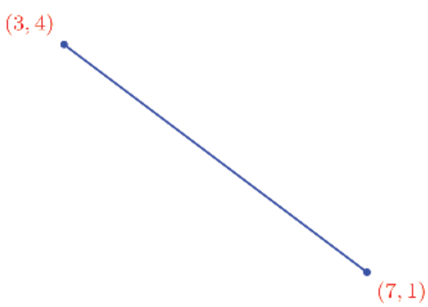

(2, 3) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (8, 5) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವಾಗ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ.




ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ದೊಡ್ಡ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೂ ಅದರೊಳಗಿನ ಸಣ್ಣ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೂ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. (ಹೇಗೆ?) ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಬದಲಾಗುವುದೂ ಸಮಾನ ದರದಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣವು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಅರ್ಧ, ಆಗ ಲಂಬಭುಜಗಳೂ ಅರ್ಧವೇ ಆಗಬೇಕು. ಅಂದರೆ $a$ ಮತ್ತು $b$ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 3 ಮತ್ತು 1 ಆಗಿವೆ. ಮಧ್ಯಬಿಂದು (5, 4).

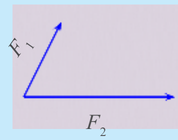
ಇನ್ನು ಗೆರೆ ಹೀಗಾದರೋ?



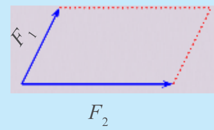

(3, 4) ರಿಂದ (7, 1) ಕ್ಕೆ ತಲುಪುವಾಗ $x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು ಮತ್ತು $y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. ಆಗ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪಲು $x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 2

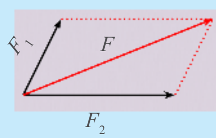
**ಬಲ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ**

ಒಂದೇ ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಬಲಗಳು, ಎರಡು ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವಷ್ಟೇ ಬದಲಾವಣೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಲವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ತರಲು ಸಾಧ್ಯ. ಈ ಬಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಮೂಲಕ ತಿಳಿಯಲಾದ ಒಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮೊದಲ ಎರಡು ಬಲಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವ ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು (ಒಂದು ನ್ಯೂಟನ್ ಬಲಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೊ, ಹೇಗಾದರೂ) ಅವುಗಳು ಪ್ರಯೋಗಿಸುವ ದಿಕ್ಕಿಗನುಸರಿಸಿ ರಚಿಸಿರಿ.



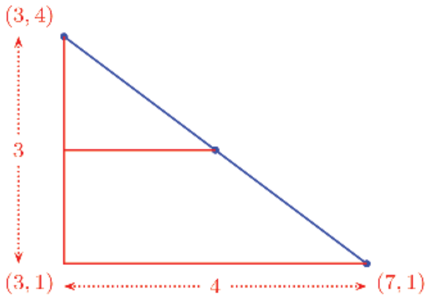

ಇನ್ನು ಇವುಗಳು ಸಮೀಪ ಭುಜಗಳಾಗಿರುವಂತೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಈ ಎರಡೂ ಬಲಗಳಿಗೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಏಕಬಲ; ಅದರ ಅಳತೆ, ಮೊದಲು ಪರಿಗಣಿಸಿರುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವಾಗಿರುವುದು.

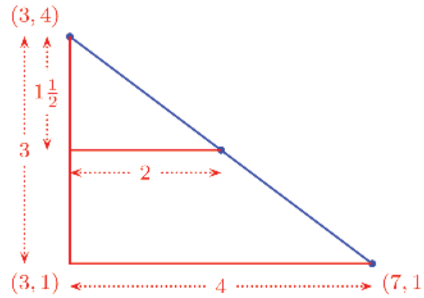



ಇದನ್ನು ಬಲಗಳ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ತತ್ವ (Parallelogram Law of Forces) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

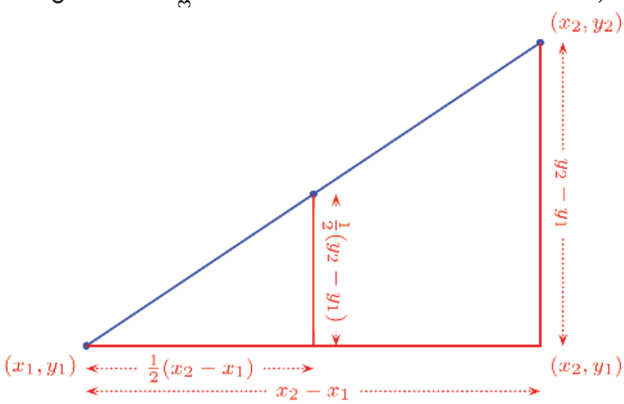
ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು. $y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ $1\frac{1}{2}$ ಕಡಿಮೆ ಆಗುವುದು.




ಅಂದರೆ, ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\left(5, 2\frac{1}{2}\right)$

ಚಿತ್ರವನ್ನೇ ರಚಿಸದೆ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $(x_2, y_2)$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ ನೋಡುವ. ಇವುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಬಹುದು. ಮೊದಲು ಹೀಗೆ ಪರಿಗಣಿಸುವ,




ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ $x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ

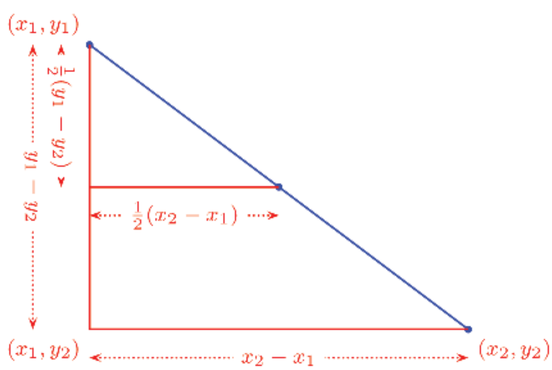
$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

ಎಂದೂ $y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ

$$y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

ಎಂದೂ ಸಿಕ್ಕಿತಲ್ಲವೇ?

ಬಿಂದುಗಳು ಹೀಗಾದರೇ?



ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ $x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ

$$y_1 - \frac{1}{2}(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಏನು ಸಿಗುವುದು?

**$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ. ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು $\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(y_1+y_2)\right)$ ಆಗಿದೆ.**

(1) (2, 3), (6, 5) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಯಿತು. ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

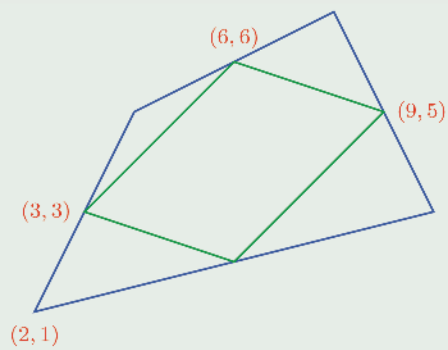
(2) ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಜತೆ ವಿರುದ್ಧ ಮೂಲೆಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (4, 5) ಮತ್ತು (1, 3) ಆಗಿವೆ. ಆದರ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಖಂಡಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (2, 1), (5, 3), (8, 7), (4, 9) ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿವೆ.

i) ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ii) ಈ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಚತುರ್ಭುಜವು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಆದರೊಳಗಿರುವ ಸಣ್ಣ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ:




i) ಸಣ್ಣ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

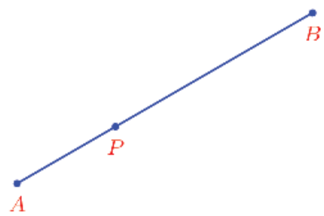
ii) ದೊಡ್ಡ ಚತುರ್ಭುಜದ ಇತರ ಮೂರು ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

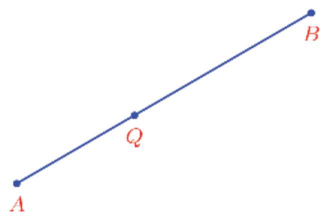
(5) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳು (3, 5), (9, 13), (10, 6) ಎಂಬಿವುಗಳಾಗಿವೆ. ಇದೊಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಆದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು (1, 2) ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ಬಿಂದು (3, 2) ಆಗಿವೆ. ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸದ ಇನ್ನೊಂದು ಅಗ್ರಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## ನಿಷ್ಪತ್ತಿ

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎರಡು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿಸುವುದು. ಗೆರೆಯ ಬೇರೆಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಅದು ಗೆರೆಯನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಭಾಗಗಳಾಗಿಸುವುದು. ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಇಂತಹ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



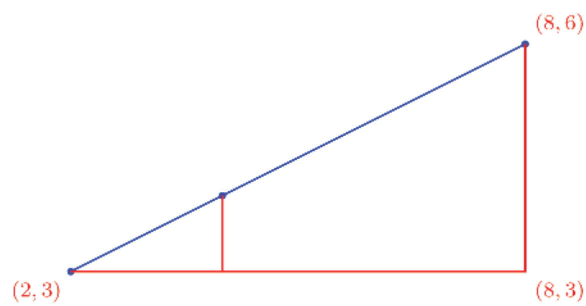




ಮೊದಲ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $AP$ ಯ ಉದ್ದ $AB$ ಯ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗ ಮತ್ತು $PB$ ಯ ಉದ್ದ $AB$ ಯ (ಬಾಕಿಯಿರುವ) $\frac{2}{3}$ ಭಾಗ ಆಗಿದೆ. $P$ ಎಂಬ ಬಿಂದು $A, B$ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು $1:2$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

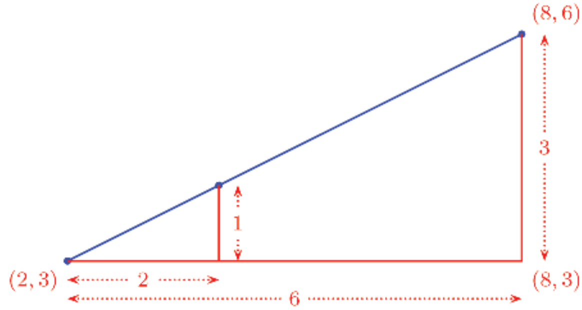
ಎರಡನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $Q$ ಎಂಬ ಬಿಂದು $A, B$ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು $2:3$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು. ಅಂದರೆ, $AQ$ ವಿನ ಉದ್ದ $AB$ ಯ ಉದ್ದದ $\frac{2}{5}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ($QB$ ಯ ಉದ್ದ $AB$ ಯ ಉದ್ದದ $\frac{3}{5}$ ಭಾಗ ಆಗಿದೆ).

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವಿಧಾನವನ್ನೇ ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡಿ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ, $(2, 3)$ ಮತ್ತು $(8, 6)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು $1:2$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ, ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆಯೇ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಆರಂಭಿಸುವ,



ಇದರಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಸಣ್ಣ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ. ಆದುದರಿಂದ ಲಂಬಭುಜಗಳೂ ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಆಗ ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳನು ಹೀಗೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.




ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಗಳು (4, 4) ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಈ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ?

(2, 3) ರಿಂದ (8, 6) ಕ್ಕೆ ತಲಪಲು $x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 6 ಮತ್ತು $y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 3 ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗದಷ್ಟು ದೂರ ತಲಪಲು ಈ ಉದ್ದಗಳ $\frac{1}{3}$ ದಷ್ಟು ಭಾಗ ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ (1, 6), (11, 2) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ 3 : 5 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು?

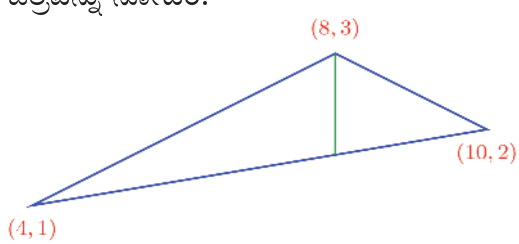
(1, 6) ರಿಂದ (11, 2) ಕ್ಕೆ ತಲಪಲು $x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 10 ಕೂಡಿಸಬೇಕು; $y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 4 ಕಳೆಯಬೇಕು. ನಮಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಬಿಂದು, (1, 6) ರಿಂದ ಗೆರೆಯ $\frac{3}{8}$ ಭಾಗದಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದು. ಯಾವುದೇ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸದೆ ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ?

$$x \text{ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ} = 1 + 10 \times \frac{3}{8} = 4\frac{3}{4}$$

$$y \text{ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ} = 6 - 4 \times \frac{3}{8} = 4\frac{1}{2}$$

A, B ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು 3 : 5 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದು ಸಿಗಲು A + (3/8) (B-A) ಎಂದು Input Bar ನಲ್ಲಿ ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕು.

ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದೊಳಗಿನ ಗೆರೆ, ಮೇಲಿನ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವಾಗಿದೆ. ಅದು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು.

ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವು ವಿರುದ್ಧ ಭುಜವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದು, ಕೋನವು ಒಳಗೊಂಡ ಭುಜಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? (ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ **ವಿಸ್ತೀರ್ಣ** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದ **ತ್ರಿಕೋನ ಭಾಗ**)

ಮೇಲಿನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ, ಎಡಭಾಗದ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ $2\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಆಗ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದುದು $(4, 1), (10, 2)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು $2 : 1$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಾಗಿದೆ. ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿರುವಂತೆಯೇ.

$$x \text{ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ} = 4 + (10 - 4) \times \frac{2}{3} = 8$$

$$y \text{ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ} = 1 + (2 - 1) \times \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

?

(1) *A, B* ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (3, 2), (8, 7) ಆಗಿವೆ. *A B* ಎಂಬ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ

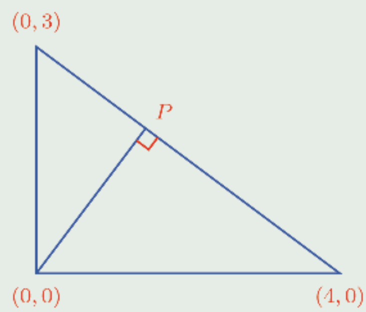
i) $AP : PB = 2 : 3$ ಆಗಿರುವ *P* ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ii) $AQ : QB = 3 : 2$ ಆಗಿರುವ *Q* ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) (1, 6) ಮತ್ತು (5, 2) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮೂರು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂಲೆಗಳು (–1, 5), (3, 7) ಮತ್ತು (1, 1) ಎಂಬಿವುಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಮ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

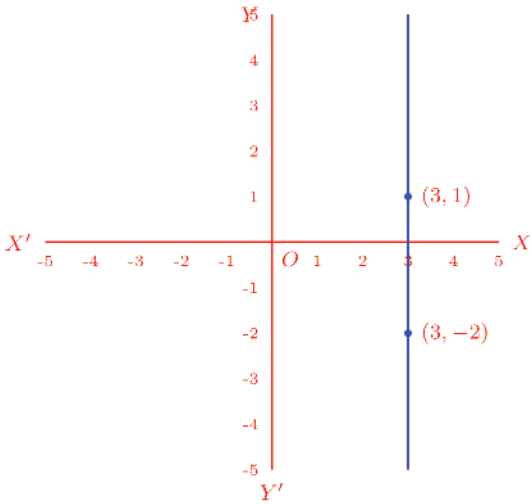
(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ *P* ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

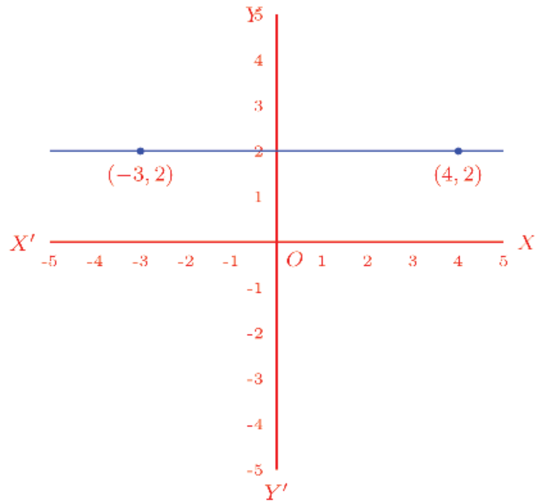



ಮೂಲೆಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ ಮತ್ತು ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಮ ಕೇಂದ್ರದ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುದು?

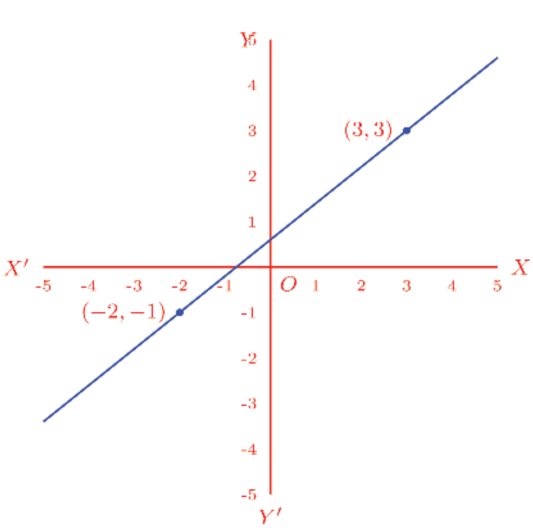
## ಗೆರೆ ಲೆಕ್ಕ

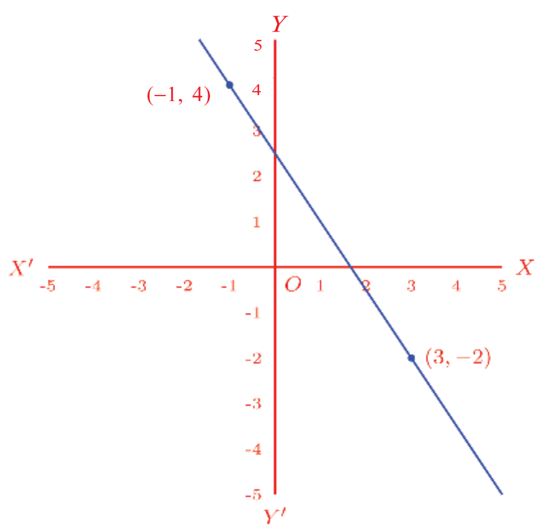
ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಗೆರೆ (ಒಂದು ಗೆರೆ ಮಾತ್ರ) ಯನ್ನು ಎಳೆಯುವ. ಅದನ್ನು ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೂ ಎಷ್ಟು ಬೇಕಾದರೂ ವೃದ್ಧಿಸಬಹುದು. ಬಿಂದುಗಳ $x$-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ, ಗೆರೆಯು $y$-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದು; $y$-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವಾದರೆ, ಗೆರೆಯು $x$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದು;



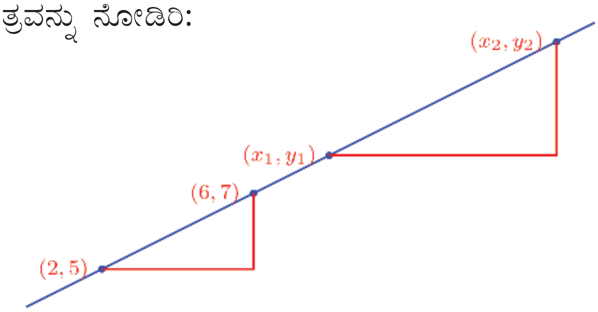




$x$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ $y$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾದರೆ, ಗೆರೆಯು ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಕ್ಕೂ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗದೇ ಬಾಗಿಕೊಂಡಿರುವುದು:

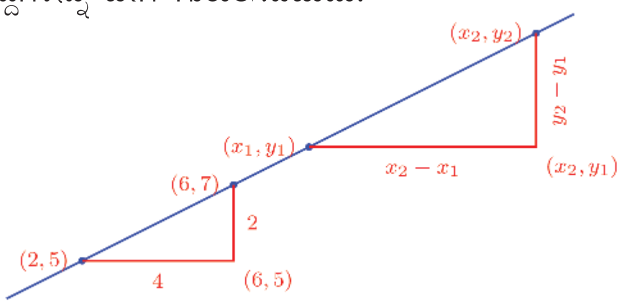


ಇಂತಹ ಬಾಗಿದ ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವಾಗ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ $x$-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯೂ, $y$-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಬದಲಾಗುವುದು. ಈ ಬದಲಾವಣೆಗೂ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವಿದೆ. ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:




(2, 5), (6, 7) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಇತರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ ಆಗಿವೆ. ಗೆರೆಯ ಎರಡು ಭಾಗಗಳು ಕರ್ಣಗಳಾಗುವಂತೆ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಲಂಬಭುಜಗಳಿರುವ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಲಂಬ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.




ಕೆಳಗಿನ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಭುಜಗಳು 4 ಮತ್ತು 2 ಆಗಿವೆ. ಅಂದರೆ ನೆಟ್ಟಗಿರುವ ಭುಜ ಬಾಗಿರುವ ಭುಜದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ. ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಹಾಗೆಯೇ ಇರುವುದು. (ಕಾರಣವೇನು?)

ಅಂದರೆ,

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

ಇದರಲ್ಲಿ $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ ಗೆರೆಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಬಹುದು.

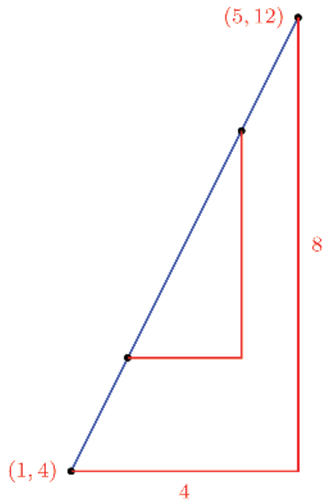
> (2, 5), (6, 7) ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೂ ಅವುಗಳ $y$ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು $x$ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಹೇಳಬಹುದು. ಈ ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವಾಗ, $x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ, $y$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಬದಲಾಗುವುದು: ಈ ಬದಲಾವಣೆಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವು ಇದಾಗಿದೆ.

> (2, 5), (6, 7) ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವಾಗ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲಿಯೂ $y$ ಯಲ್ಲಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯು, $x$ ನ ಬದಲಾವಣೆಯ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದು.

(2, 5), (6, 7) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೋ?

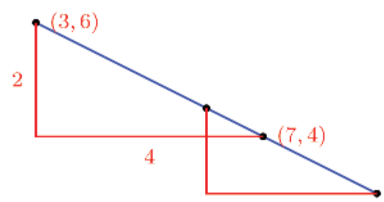
ಉದಾಹರಣೆಗೆ, (1, 4), (5, 12) ಎಂದು ತೆಗೆದು ನೋಡುವ. ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ (1, 4)ರಿಂದ (5, 12)ಕ್ಕೆ ತಲುಪುವಾಗ, $x$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 4 ಹೆಚ್ಚಾಯಿತು; $y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ಹೆಚ್ಚಾಯಿತು. ಅಂದರೆ, $x$ ನ ಬದಲಾವಣೆಯು ಎರಡು ಮಡಿ $y$ ಯು ಬದಲಾವಣೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಗೆರೆಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಹೀಗೆಯೇ ಸಂಭವಿಸುವುದು:




> (1, 4), (5, 12) ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ ಸಂಚರಿಸಿದಾಗ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲೂ $y$ ಯ ಬದಲಾವಣೆಯು, $x$ ನ ಬದಲಾವಣೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು.

ಈ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳಲ್ಲೂ $x$ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ $y$ ಯೂ ಹೆಚ್ಚುವುದು. ವಿಲೋಮ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೂ ನಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, (3, 6), (7, 4) ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, $x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ಹೆಚ್ಚುವಾಗ $y$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 2 ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. ಆಗ




> (3, 6), (7, 4) ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವಾಗ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲೂ $y$ ಯ ಬದಲಾವಣೆಯು, $x$ ನ ಬದಲಾವಣೆಯ ಅರ್ಧದ ಋಣವಾಗಿರುವುದು.

ಇವುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕಾಣುವುದೇನು?

**ಅಕ್ಷಗಳೊಂದಕ್ಕೂ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿಯೂ $y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆಯು, $x$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವುದಾಗಿದೆ.**

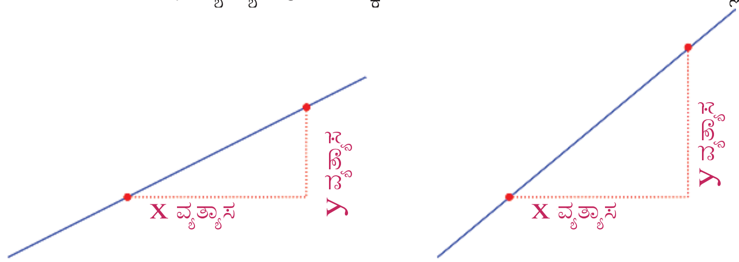
ಹೀಗೆ ಇರುವ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಒಂದು ಹೆಸರಿದೆಯಲ್ಲವೆ.

**ಅಕ್ಷಗಳೊಂದಕ್ಕೂ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿಯೂ $y$ ಯ ಬದಲಾವಣೆಯೂ $x$ ನ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ.**

$x$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ, $y$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ; ಆದುದರಿಂದ ಇಂತಹ ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ $y$ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 0 ಆಗಿದೆ. ಇದು $x$ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು 0 ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ. ಆಗ ಇಲ್ಲಿಯೂ $y$ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು, $x$ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವುದಾಗಿದೆ. ಆದರೆ $x, y$ ಬದಲಾವಣೆಗಳು ಅನುಪಾತಿಕವಲ್ಲ.

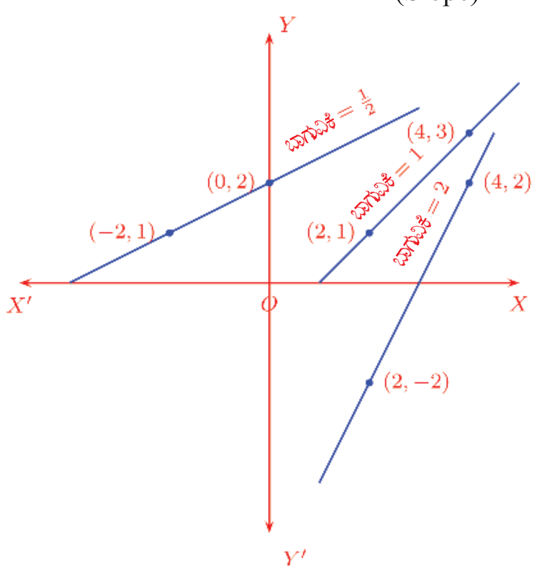
a ಎಂಬ ಹೆಸರಿನ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. A ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. (x(A) + a, y(A) + 2a) ಎಂದು Input Bar ನಲ್ಲಿ ನೀಡಿದರೆ ಹೊಸತಾದ ಒಂದು ಬಿಂದು ಲಭಿಸುವುದು. ಸ್ಲೈಡರಿಗೆ Animation ನೀಡಿ ಬಿಂದುವಿನ ಸಂಚಾರ ಪಥವನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ Trace ನೀಡಿ ನೋಡಬಹುದು. A ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

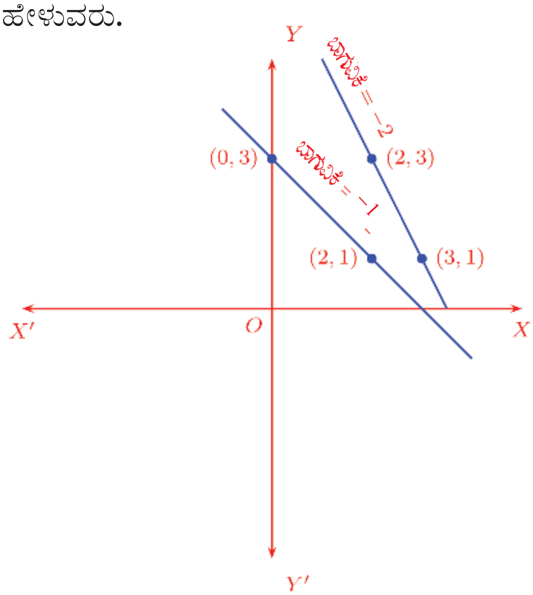
ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ನೋಡಿದರೆ, $x$ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೆನ್ನುವುದು ಅಡ್ಡಕ್ಕಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯೂ $y$ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ನೀಟಕ್ಕಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯೂ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ.




ಆಗ $y$ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು $x$ ವ್ಯತ್ಯಾಸದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವುದು, ಅಡ್ಡಕ್ಕಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಗನುಸರಿಸಿ, ನೀಟಕ್ಕಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವಾಗಿದೆ:

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ಅನುಪಾತ ಸ್ಥಿರಾಂಕವು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯ ಒಂದು ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗೆರೆಯ **ಬಾಗುವಿಕೆ** (Slope) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.



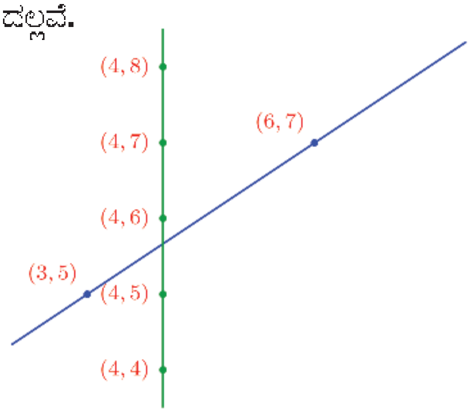

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಉಳಿದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಆಶಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(3, 5), (6, 7)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ನೋಡುವ. ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ $x$ ಬದಲಾವಣೆ 3 ಮತ್ತು $y$ ಬದಲಾವಣೆ 2 ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೆ. ಆಗ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲೆಲ್ಲಿಯೂ $x$ ಬದಲಾವಣೆ 3 ಆಗುವಾಗ $y$ ಬದಲಾವಣೆ 2 ಆಗುವುದು.

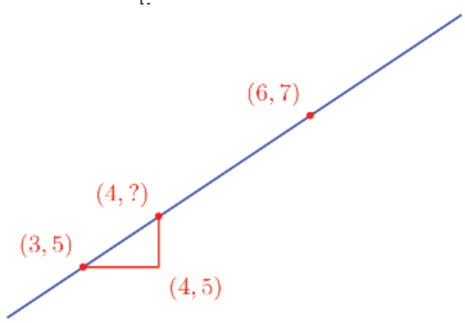
ಅಂದರೆ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯೂ $x$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 1 ಬದಲಾವಣೆಯಾದಾಗ, $y$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $\frac{2}{3}$ ಬದಲಾಗುವುದು. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಗೆರೆಯ ಚಾಗುವಿಕೆ $\frac{2}{3}$ ಆಗಿದೆ.

FC6CV3

ಇನ್ನು (3, 5) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ $x$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 1 ಹೆಚ್ಚಿಸಿ 4 ಮಾಡಿದರೆ? (4, 5) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ $y$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯು ಮೊದಲಿನ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವುದಲ್ಲವೆ.




ಈ ಬಿಂದುವಿನ $y$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?




ಅದರ $x$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 3 ರೊಂದಿಗೆ 1 ಕೂಡಿಸಿದ್ದಾಗಿದೆ.

ಆಗ $y$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗಲು 5 ರೊಂದಿಗೆ $\frac{2}{3}$ ನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ, $\left(4,\ 5\frac{2}{3}\right)$ ಈ ರೇಖೆಯ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ $x$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಈ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $x$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 9 ಆಗಿರುವ ಬಿಂದು ಯಾವುದು?

3 ರೊಂದಿಗೆ 6 ಕೂಡಿಸಿರುವುದೇ 9; ಆಗ $y$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗಲು 5 ರೊಂದಿಗೆ $6 \times \frac{2}{3} = 4$ ನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ (9, 9) ರೇಖೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಚಾಗುವಿಕೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು slope ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಸಾಕು.

(3, 5), (6, 7), (9, 9) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿದೆವಲ್ಲವೆ. ಇವುಗಳ $x$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 3, 6, 9 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ? $y$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 5, 7, 9 ರೊಳಗೊ? ಹೀಗೆ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆ?

**ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಮಿತಿ**

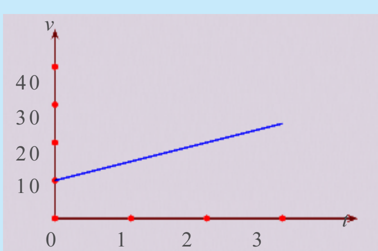
ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಸಂಚರಿಸುವ ದೂರ, ಮೊದಲ ಸೆಕುಂಡಿನಲ್ಲಿ 10 ಮೀಟರ್, ನಂತರದ ಸೆಕುಂಡಿನಲ್ಲಿ 15 ಮೀಟರ್, ನಂತರದ ಸೆಕುಂಡಿನಲ್ಲಿ 20 ಮೀಟರ್ ಎಂಬೀ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸುವ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕುಂಡಿನಲ್ಲಿಯೂ ಅದರ ವೇಗವು ಬದಲಾಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಆದುದರಿಂದ ಮೊದಲ ಸೆಕುಂಡಿನಲ್ಲಿ ವೇಗ 10 ಮೀಟರ್ / ಸೆಕುಂಡ್, ಎರಡನೇ ಸೆಕುಂಡಿನಲ್ಲಿ ವೇಗ 15 ಮೀಟರ್/ ಸೆಕುಂಡ್ ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನಷ್ಟು ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ವೇಗವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕುಂಡಿನಲ್ಲಿಯೂ 5 ಮೀಟರ್ / ಸೆಕುಂಡ್ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ (acceleration) 10 ಮೀಟರ್ / ಸೆಕುಂಡ್, ಈ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗ v ಯನ್ನು t ಸೆಕುಂಡಿನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು

$$v = 10 + 5t$$

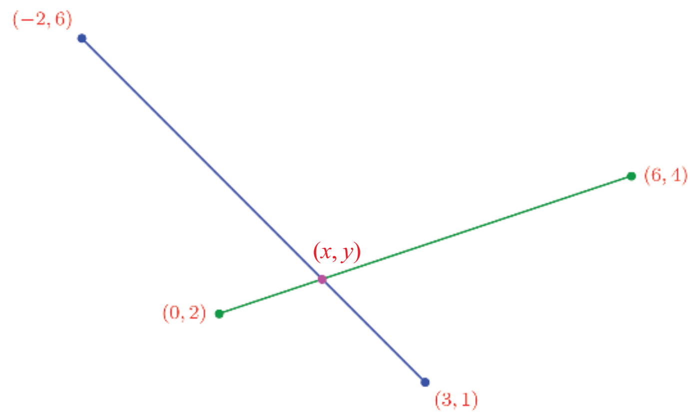
ಎಂಬ ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿ $t$ ಮತ್ತು $v$ ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಈ ವೇಗ ಹಾಗೂ ಸಮಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೋ?




ಈ ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ 5 ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಬಾಗುವಿಕೆ ಎಂಬುದು $t$ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $v$ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದರ ದರವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ.

ಎರಡು ಗೆರೆಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಆಶಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ (0, 2), (6, 4) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯೂ, (3, 1), (−2, 6) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯೂ ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದು $(x, y)$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವ.




ಆಗ $(x, y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಎರಡೂ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವುದು.

ಬಲಕ್ಕೆ ಬಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ, $x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ, 0 ಯಿಂದ 6 ಆಗುವಾಗ, $y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 2ರಿಂದ 4 ಆಗುವುದು. ಅಂದರೆ, $x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 6 ಹೆಚ್ಚುವಾಗ $y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಹೆಚ್ಚುವುದು. ಆಗ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯೇ ಆದರೂ $x$ ಬದಲಾವಣೆಯ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು $y$ ಬದಲಾವಣೆ.

$(x, y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, ಈಗ ಹೇಳಿರುವುದರಿಂದ,

$$y - 2 = \frac{1}{3}x$$

ಇನ್ನು ಎಡಕ್ಕೆ ಬಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿಯೋ?

$x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ಹೆಚ್ಚುವಾಗ, $y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. ಆಗ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯೇ ಆದರೂ $x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಹೆಚ್ಚುವಾಗ, $y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ, $x$ ಬದಲಾವಣೆಯ ಋಣವಾಗಿರುವುದು $y$ ಯ ಬದಲಾವಣೆ.

$(x, y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, ಇದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ

$$y - 1 = 3 - x$$

ಇನ್ನು ಎರಡೂ ಗೆರೆಗಳಿಂದ ಸಿಕ್ಕಿದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು

$$\begin{aligned} x - 3y &= -6 \\ x + y &= 4 \end{aligned}$$

ಎಂದು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆದರೆ, ಒಂಭತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ ಸಮವಾಕ್ಯ ಜೋಡಿಗಳು ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವಂತೆ $x, y$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಆಗ

$$x = 1\frac{1}{2} \qquad y = 2\frac{1}{2}$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಅಂದರೆ, ಗೆರೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಬಿಂದು $\left(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$

?

(1) $(1, 3), (2, 5), (3, 7)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(2) $(-1, 4), (1, 2)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಇತರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ಮತ್ತು $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳಾಗಿವೆ. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯ ಜೊತೆಗಳು ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದಾದರೆ $(3x_1 + 2y_1, 3x_1 - 2y_1)$, $(3x_2 + 2y_2, 3x_2 - 2y_2)$, $(3x_3 + 2y_3, 3x_3 - 2y_3)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. 3, 2 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದೇ?

## ರೂಪಗಳು ಮತ್ತು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು

$(2, 4), (5, 6)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ $x$ ಬದಲಾವಣೆ ಮತ್ತು $y$ ಬದಲಾವಣೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?

ಈ ಎರಡೂ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ $x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ಹೆಚ್ಚುವಾಗ $y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಹೆಚ್ಚುವುದು..

ಅಂದರೆ, $x$ ಬದಲಾವಣೆಯ $\frac{2}{3}$ ಭಾಗವು $y$ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗಿದೆ.

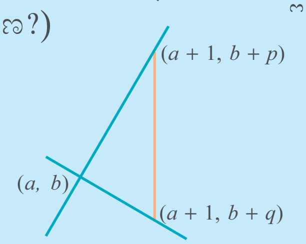
ಗೆರೆಯ ಯಾವುದೇ ಜತೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಆಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ.

(1, 3), (5, 6) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲೂ (2, 4), (6, 7) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲೂ $y$ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು $x$ ವ್ಯತ್ಯಾಸದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $\frac{3}{4}$ ಎಂಬುದೇ ಸಿಗುವುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜತೆಯನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ. ಈ ಗೆರೆಗಳೊಳಗಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವೇನು?

### ಬಾಗುವಿಕೆ ಮತ್ತು ಲಂಬ

**ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳ ಬಾಗುವಿಕೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಕಾಣಲು ಕಷ್ಟವಿಲ್ಲ. ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳ ಬಾಗುವಿಕೆಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು?**

ಬಾಗುವಿಕೆಗಳು $p, q$ ಆಗಿರುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದು $(a, b)$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಆಗ $(a+1, b+p)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಮೊದಲಿನ ಗೆರೆಯಲ್ಲೂ; $(a+1, b+q)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಎರಡನೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲೂ ಆಗಿವೆ. (ಕಾರಣ?)




ಗೆರೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$(a, b), (a+1, b+p), (a+1, b+q)$$

ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳಾಗಿವೆ. ಎರಡನೆಯ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ಗೆರೆ ಕರ್ಣವಾಗಿದೆ. ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳ ವರ್ಗ $p^2+1, q^2+1$ ಎಂಬಿವುಗಳೂ, ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು $|p-q|$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$(p^2+1) + (q^2+1) = (p-q)^2$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಲಘೂಕರಿಸಿ

$$2 = -2pq$$

ಅಥವಾ

$$pq = -1$$

ಅಂದರೆ,

ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಗೆರೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯು ಇನ್ನೊಂದು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದ ಋಣವಾಗಿದೆ.

ಆಗ, ಗೆರೆಯ ಯಾವುದೇ ಒಂದು $(x, y)$ ಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ $(2, 4)$ ರಿಂದಿರುವ $x$ ಬದಲಾವಣೆ ಮತ್ತು $y$ ಬದಲಾವಣೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ ಹೀಗಿರುವುದು.

$$y - 4 = \frac{2}{3}\ (x - 2)$$

ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಹೀಗೆಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$3(y - 4) = 2(x - 2)$$

ಇನ್ನೂ ಲಘೂಕರಿಸಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$2x - 3y + 8 = 0$$

ಇದರರ್ಥವೇನು?

ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ ಅದರ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದು. ಅಂದರೆ $(p, q)$ ಎಂಬ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಬಿಂದು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದಾದರೆ $2p - 3q + 8 = 0$ ಆಗಿರುವುದು.

ಬದಲಾಗಿ, ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನನುಸರಿಸುವ ಒಂದು ಜತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳು ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬಿಂದು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದೇ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x = 11, y = 10$ ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ,

$$2x - 3y + 8 = 22 - 30 + 8 = 0$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ $(11, 10)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದೇ?

ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿದಂತೆಯೇ $(11, 4)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ $y$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆ, ಈ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವುದಲ್ಲವೇ. ಈ ಬಿಂದುವಿನ $x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ 11 ಎಂಬುದೇ ಆಗಿದೆ; $y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ $y$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವ;

ಗೆರೆಯ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ, $x$ ನ ಬದಲಾವಣೆಯ $\frac{2}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು $y$ ಯ ಬದಲಾವಣೆ ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ.

$(5, 6)$ ಮತ್ತು $(11, y)$ ಎಂಬಿವುಗಳು ಈ ಗೆರೆಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ,

$$y - 6 = \frac{2}{3}\ (11 - 5) = 4$$

ಎಂದೂ ಆ ಮೇಲೆ $y = 10$ ಎಂದೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಆಗ $(11, 10)$ ಎಂಬುದು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವೇ ಆಗಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $2x - 3y + 8 = 0$ ಅನುಸರಿಸುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $x, y$ ಎಂದು ತೆಗೆದರೂ $(x, y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು $(2, 4), (5, 6)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಅಂದರೆ $2p - 3q + 8 = 0$ ಆಗುವಂತೆ $p, q$ ಎಂಬ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಜತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಕ್ಕಿತೆಂದು ಊಹಿಸಿರಿ. $(p, 4)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ $y$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆ $(2, 4)$ ಮತ್ತು $(5, 6)$ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು $(p, y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ, ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೇ,

$$y - 4 = \frac{2}{3}(p - 2)$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ

$$y = \frac{2}{3}(p - 2) + 4$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಾಗಿಸಬಹುದು. ಇನ್ನು $2p - 3q + 8 = 0$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದಿಂದ,

$$q = \frac{2}{3}(p - 2) + 4$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆಗ $y = q$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ $(p, q)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಇದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಆಗ ನಾವು ನೋಡಿದುದೇನು?

> $(2, 4)$ ಮತ್ತು $(5, 6)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಬಿಂದಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳ ಗುಂಪು, $2x - 3y + 8 = 0$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯ ಅನುಸರಿಸುವ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳ ಗುಂಪೂ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ

**(2, 4), (5, 6) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು $2x - 3y + 8 = 0$ ಆಗಿದೆ.**

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ, ಅದರ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $(0, 0), (1, 1)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ $x$ ಬದಲಾವಣೆಯೂ $y$ ಬದಲಾವಣೆಯೂ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಿಯೇ ಆದರೂ ಹಾಗೆಯೇ ಆಗಿರುವುದು. ಆಗ ಈ ಗೆರೆಯ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವನ್ನು $(x, y)$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ $(0, 0)$ ಯಿಂದಿರುವ $x$ ಬದಲಾವಣೆ ಮತ್ತು $y$ ಬದಲಾವಣೆ ಸಮಾನ. ಅಂದರೆ $y = x$ ಇದು ಈ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿದೆ, (ಇದನ್ನು $x - y = 0$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು)

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದ Input Bar ನಲ್ಲಿ 2x – 3y + 8 = 0 ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಗೆರೆ ಸಿಗುವುದು. a, b, c ಎಂಬೀ ಮೂರು ಸ್ಲೆಡರುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ ax + by + c = 0 ಎಂದು Input Bar ನಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಸ್ಲೈಡರುಗಳನ್ನು ಚಲಿಸುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಗೆರೆಗೆ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

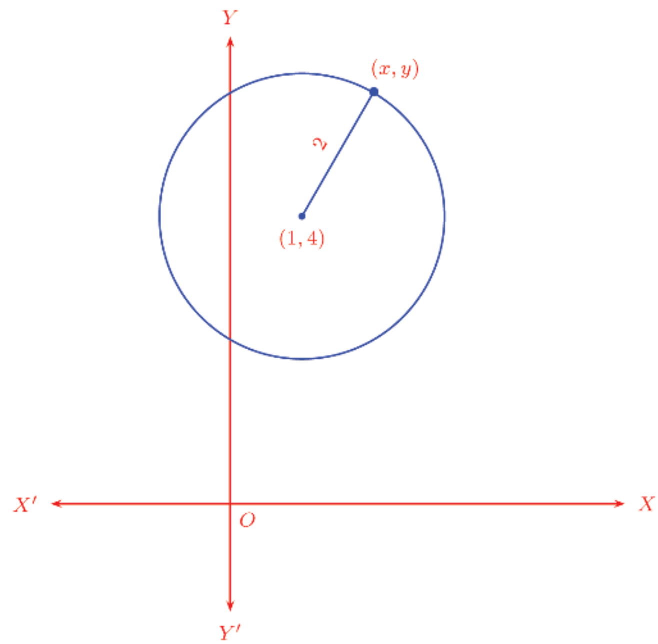
FCF8WQ

(3, 5), (6, 7) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಈ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು Algebra view ನಲ್ಲಿ ನೋಡಬಹುದು.

ಇದರಿಂದ ಈ ಗೆರೆಯ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ $x$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು $y$ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

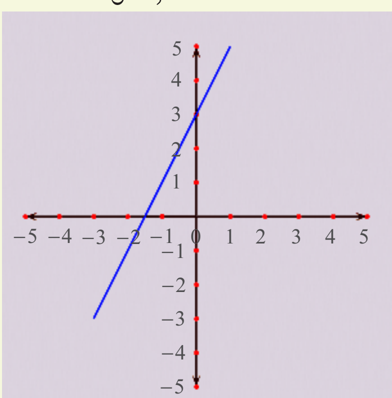
Circle with Centre and Radius ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಕೇಂದ್ರ $(1, 4)$ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 2 ಆಗಿರುವ ಇಂತಹ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇದರ ಸಮವಾಕ್ಯ Algebra View ವಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

ಗೆರೆಗಳು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಇತರ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರೂಪಗಳಿಗೂ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ: ಕೇಂದ್ರ $(1, 4)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 2 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ನೋಡುವ. ಈ ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿಗೂ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ದೂರವು 2 ಆಗಿದೆ.




**ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಚಿತ್ರ**

ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ $y = 2x + 3$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ಹೀಗೆ ಸಿಗುವುದು;




ಬೇರೆ ಕೆಲವು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಎಲ್ಲವೂ ಗೆರೆಯೇ ಆಗಿರುವುದೇ?

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಲು Input Bar ನಲ್ಲಿ y = 2x + 3 ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕು.

ಈ ದೂರದ ವರ್ಗವು $(x-1)^2+(y-4)^2$ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿದಿರುವಿರಲ್ಲವೆ. ಇದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$$

ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಈ ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವುವು; ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಈ ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಯಾವುದೇ ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ, ಅವುಗಳು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಆಗಿರುವುವು.

ಹಾಗೆ ಇದು ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿದೆ. ಬೇಕಾದರೆ ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$$

ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಆಗ, ಕೇಂದ್ರವು ಆಧಾರ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 1 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯ ಯಾವುದು?

FCP4YD

ಈ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $(x, y)$ ಎಂದಾದರೆ, ಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ದೂರದ ವರ್ಗ $x^2 + y^2$; ಇದು ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$x^2 + y^2 = 1$$

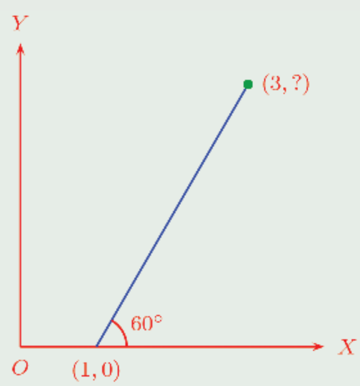
ಇದು ಈ ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿದೆ.

(1) $(1, 2), (2, 4)$ ಎಂಬವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದರಲ್ಲಿ $x$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $3, 4, 5, \ldots$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ $y$-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿ ಯಾವುದು?

(2) $(-1, 3), (2, 5)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $(x, y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದಾದರೆ, $(x + 3, \ y + 2)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವೂ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(3) $x$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $(x, 2x + 3)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $(-1, 1), (2, 7)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಾಗಿದ ಗೆರೆಯ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ $x$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 3 ಆಗಿದೆ.




i) ಅದರ $y$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ii) ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ ಎಷ್ಟು?

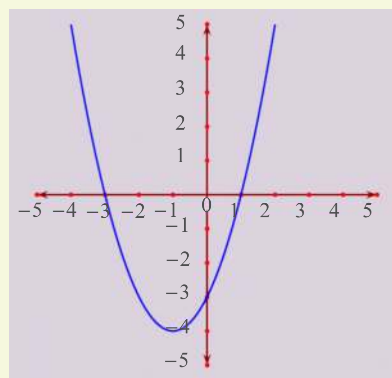
iii) ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

**ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಚಿತ್ರ**

ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ರಚಿಸಿರುವ,

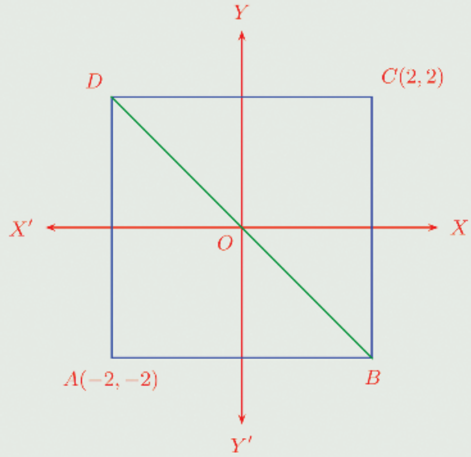
$$y = x^2 + 2x - 3$$

ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

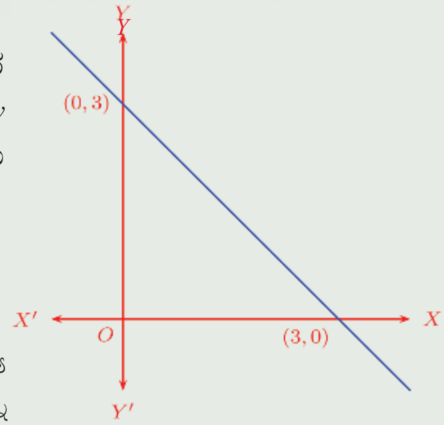



ಇದೇ ರೀತಿಯು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಇಂತಹ ಒಂದು ಚಿತ್ರ ರಚಿಸಲ Input Bar ನಲ್ಲಿ y = x^2 + 2x – 3 ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕು.

(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $ABCD$ ಒಂದು ಚೌಕವಾಗಿದೆ. $BD$ ಎಂಬ ಕರ್ಣದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ $x, y$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



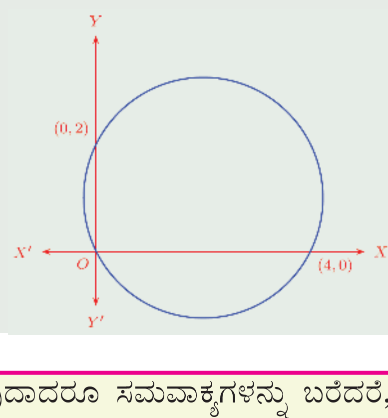

(6) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $x, y$ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ದಾಟಿ ಹೋಗುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $x, y$ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 3 ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.




(7) ಆಧಾರ ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ವೃತ್ತದ ಯಾವುದಾದರೂ ಎಂಟು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

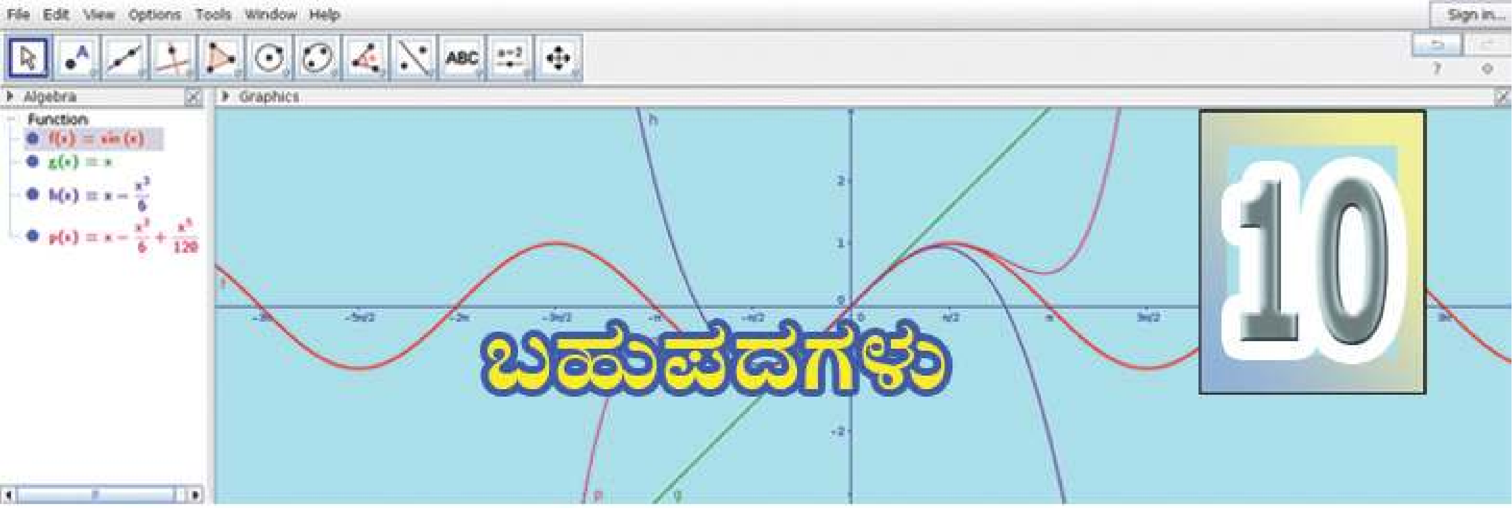
(8) $(0, 1)$, $(2, 3)$ ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆ ವ್ಯಾಸವಾದ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದು $(x, y)$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಈ ವೃತ್ತವು $x$ ಅಕ್ಷವನ್ನು ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(9) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯ ಯಾವುದು?




ಜಿಯೋಜಿಬ್ರಾದ Input Bar ನಲ್ಲಿ $x, y$ ಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಬರೆದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಸರಿಹೊಂದುವ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳು ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ ಬಿಂದುಗಳು ಸೇರಿರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಈ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟು ನೋಡಿರಿ:

- $2x\text{^}2 + 2y\text{^}2 = 4$
- $2x\text{^}2 + 3y\text{^}2 = 4$
- $2x\text{^}2 - 3y\text{^}2 = 4$
- $2x\text{^}2 + 3y = 4$




## ಅಪವರ್ತನಗಳು ಮತ್ತು ಮೌಲ್ಯಗಳು

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು 8ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿರುವಿರಲ್ಲವೆ.

ಬೀಜಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ,

$x, y$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

ಇದರಲ್ಲಿ $y$ ಆಗಿ ಹಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನೋಡೋಣ.

$x$ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

$$x^2 - 2 = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$

$$x^2 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$x^2 - 1,\ x^2 - 2,\ x^2 - \frac{1}{4}$ ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ 2ನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳಾಗಿವೆ.

$x - 1,\ x + 1,\ x - \sqrt{2}.\ x + \sqrt{2}.\ x - \frac{1}{2}\ x + \frac{1}{2}$ ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳಾಗಿವೆ.

ಆಗ ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ, ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಒಂದು ಬಹುಪದವನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆದರೆ, ಗುಣಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳು ಎಂದು ಹೇಳುವುದಿಲ್ಲವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $12 = 2 \times 6$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, 2,6 ಮತ್ತು 12 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿವೆ. ಇದರಂತೆ $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $x - 1, x + 1$ ಇವುಗಳು $x^2 - 1$ ರ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿವೆ.

NT-919-11-MATHS-10-K-VOL.2

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ನೋಡುವ.

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

ಎಂದು ಗುಣಿಸಿ ಬರೆಯಲು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವೆವು. ಇದನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ಬರೆದರೆ

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

ಅಂದರೆ, ಈಗ ಹೇಳಿರುವಂತೆ $x + 2$, $x + 3$ ಎಂಬೀ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳು, $x^2 + 5x + 6$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿವೆ.

ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆ ನೋಡಿರಿ.

$$(x^2 + 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 + x + 2$$

ಆಗ, $x^2 + 1$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ, $x + 2$ ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ ಇವು ಎರಡೂ $x^3 + 2x^2 + x + 2$ ಎಂಬ ಮೂರನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

**$p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವು $q(x)$ ಮತ್ತು $r(x)$ ಎಂಬೀ ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾದರೆ $q(x)$, $r(x)$ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಎನ್ನುವರು.**

ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$(x - 1)(x - 2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$$

ಅಂದರೆ,

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದರಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರವಿದೆ.

$p(x) = x^2 - 3x + 2$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ, $p(1)$ ಎಷ್ಟು?

$$p(1) = 1 - 3 + 2 = 0$$

ಇದನ್ನು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$p(x) = (x - 1)(x - 2)$ ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ.

ಇದರಿಂದ

$$p(1) = (1 - 1) \times (1 - 2) = 0 \times (-1) = 0$$

ಇದರಂತೆ $p(2) = 0$ ಎಂದೂ ಸಿಗಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$x$ ಆಗಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $p(x) = 0$ ಸಿಗುವುದೇ?

$(x-1)(x-2) = 0$ ಆಗ ಬೇಕಾದರೆ $x-1, x-2$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಬೇಕಲ್ಲವೆ.

ಅಂದರೆ, $p(x) = 0$ ಆಗಲು, $x$ ಆಗಿ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 1 ಮತ್ತು 2 ಆಗಿದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, $p(x) = 0$, ($\text{ಅಂದರೆ, } x^2 - 3x + 2 = 0$) ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಮೌಲ್ಯಗಳು 1, 2 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ;

$$(x-1)(x-2)(x-3) = (x^2 - 3x + 2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

ಎಂದು ಗುಣಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ಎಂಬ ಮೂರನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಕ್ಕೆ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳು $x-1, x-2, x-3$ ಎಂಬಿವುಗಳಾಗಿವೆ.

ಇಲ್ಲಿಯೂ

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

ಎಂದು ಬರೆದರೆ, ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಂತೆ,

$$p(1) = 0, p(2) = 0, p(3) = 0$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಹಾಗಾದರೆ ಇದರಲ್ಲಿಯೂ $p(x) = 0$ ಅಂದರೆ,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಮೌಲ್ಯಗಳು 1, 2, 3 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಸಿಗುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವು ಯಾವುದು?

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಾತ್ರವಲ್ಲ ಬೀಜಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೂ ಕಂಪ್ಯೂಟರಿನ ಸಹಾಯದಿಂದ ಮಾಡಬಹುದು. ಅದಕ್ಕಿರುವ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ Computer Algebra System (CAS) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲೂ CAS ಇದೆ.

**$x - a$ ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವು, $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ, $p(a) = 0$ ಆಗಿರುವುದು ಅಥವಾ $a$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ $p(x) = 0$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಮೌಲ್ಯವಾಗಿರುವುದು.**

ಇನ್ನೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

**$p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ**

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

**ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, $a_1, a_2, \dots, a_n$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $p(x) = 0$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಮೌಲ್ಯಗಳಾಗಿವೆ.**

ಆಗ ಒಂದು ಬಹುಪದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದಕ್ಕಿರುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವು ಆ ಬಹುಪದವನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿ ಬರೆಯುವುದಾಗಿದೆ.

ಕೆಲವು ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$x^2 - 5x + 6$ ನ್ನು ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ. (ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಘಾತ ಸೂಚಿ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆಗುವುದಿಲ್ಲವೇ?) ಆಗ,

$$x^2 - 5x + 6 = (x - a)(x - b)$$

ಎಂದು ಬರೆದು ನೋಡೋಣ. ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆದರೆ,

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - (a + b)x + ab$$

ಸಮವಾಕ್ಯದ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯಾಗುಣಕಗಳು ಸಮಾನವಾಗಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ,

$$a + b = 5$$
$$ab = 6$$

ಎಂದು ಲಭಿಸಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, ಮೊತ್ತ 5 ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ 6 ಆಗಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಸ್ವಲ್ಪ ಆಲೋಚಿಸಿದರೆ,

$$a = 2 \qquad b = 3$$

ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಆಗ $x^2 - 5x + 6$ನ್ನು ಹೀಗೆ ಬಿಡಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು;

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

ಇದರಿಂದ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಮೌಲ್ಯಗಳು 2 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಸಮವಾಕ್ಯಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನೋಡುವ:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಂತೆ

$$x^2 + 2x - 15 = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

ಎಂದು ಬರೆದರೆ, ಇದರಲ್ಲಿ

$$a + b = -2$$

$$ab = -15$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

3 ಮತ್ತು 5, ಇವುಗಳು 15ರ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿವೆ. ಗುಣಲಬ್ಧವು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದುದರಿಂದ ಒಂದನ್ನು ಋಣವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. -3 ಮತ್ತು 5 ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಮೊತ್ತ ಸರಿಯಾಗಲಾರದು. ಆದರೆ 3 ಮತ್ತು -5ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸರಿಯಾಗುವುದು.

$a=3,\ b=-5$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$x^2+2x-15 = (x-3)(x+5)$$

ಆಗ $x^2+2x-15=0$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಮೌಲ್ಯಗಳು 3 ಮತ್ತು -5 ಆಗಿವೆ.

?

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ $p(x)=0$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $p(x)=x^2-7x+12$ ii) $p(x)=x^2+7x+12$

iii) $p(x)=x^2-8x+12$ iv) $p(x)=x^2+13x+12$

v) $p(x)=x^2+12x-13$ vi) $p(x)=x^2-12x-13$

### ಅಪವರ್ತನ ಸಿದ್ಧಾಂತ

$x-1$ ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವು $x^2-1$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ, $x-1$ ರ ಬದಲು $x-2$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $x^2-4$ ರ ಅಪವರ್ತನವೆಂದೂ, $x-\frac{1}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $x^2-\frac{1}{4}$ ರ ಅಪವರ್ತನವೆಂದೂ ನೋಡಿದೆವು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ $a$ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ $x-a$ ಎಂಬುದು $x^2-a^2$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗುವುದು.

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು.

$p(x)=x^2$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ $x$ ಆಗಿ $a$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $p(a)=a^2$ ಅಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ, $p(x)-p(a)=x^2-a^2$. ಅಂದರೆ, $p(x)=x^2$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ, $x$ ಆಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ $a$ ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $x-a$ ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ $p(x)-p(a)$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$x^2$ ಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಇದು ಸರಿಯಾದೀತೇ? ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ,

$$p(x) = 3x^2+2x-1$$

**ಘಾತ ವ್ಯತ್ಯಾಸ**

$x,\ y$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $x^2-y^2$ ನ್ನು ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

ಇದೇ ರೀತಿ $x^3-y^3$ ನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

(ಗುಣಿಸಿ ನೋಡಿರಿ) ನಾಲ್ಕನೇ ಘಾತಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾದರೋ?

$$x^4-y^4=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರಿದರೆ, $n$ ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಾದರೂ $x^n-y^n$ ರ $x-y$ ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$a = 4$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ನೋಡಿರಿ. ಆಗ

$$p(a) = p(4) = (3 \times 4^2) + (2 \times 4) - 1$$

ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸದೇ $p(x) - p(a)$ ಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ ನೋಡುವ.

$$p(x) - p(a) = (3x^2 + 2x - 1) - \big((3 \times 4^2) + (2 \times 4) - 1\big)$$

ಇಲ್ಲಿ $x^2$, $4^2$ ಎಂಬ ಜೋಡಿಗಳು $x$, 4 ಎಂಬ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$p(x) - p(a) = 3(x^2 - 4^2) + 2(x - 4)$$

$x^2 - 4^2$ ನ್ನು $(x - 4)(x + 4)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ

$$p(x) - p(4) = 3(x - 4)(x + 4) + 2(x - 4)$$

ಈ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಬಲಭಾಗದ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಬಹುಪದಗಳಲ್ಲಿ $x - 4$ ಇದೆಯಲ್ಲವೇ. ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೋ?

$$p(x) - p(4) = (x - 4)\big(3(x + 4) + 2\big)$$

ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಸರಳಗೊಳಿಸಿ ಬರೆಯುವ.

$$p(x) - p(4) = (x - 4)(3x + 14)$$

ಇದರಿಂದ $p(x) - p(4)$ ರ ಅಪವರ್ತನ $x - 4$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ನೋಡೋಣ. $p(x) = 2x^2 + x - 4$ ಎಂದು $a = -2$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಮೊದಲು ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕದಂತೆ

$$p(-2) = 2 \times (-2)^2 + (-2) - 4$$

ಇದನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಸರಳಗೊಳಿಸದೆ,

$$p(-2) = (2 \times 4) - 2 - 4$$

ಎಂದು ಬರೆದು, $p(x)$ ನಿಂದ ಕಳೆದು ನೋಡೋಣ.

$$p(x) - p(-2) = (2x^2 + x - 4) - ((2 \times 4) - 2 - 4)$$

ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಗಳಾಗಿ ಸೇರಿಸಿ ಬರೆದಂತೆ

$$.p(x) - p(-2) = 2(x^2 - 4) + (x + 2)$$

ಇಲ್ಲಿ $x^2 - 4$ ನ್ನು $(x + 2)(x - 2)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ

$$p(x) - p(-2) = 2(x + 2)(x - 2) + (x + 2)$$

ಬಲಭಾಗದ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿ $x + 2$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$p(x) - p(-2) = (x + 2)\big(2(x - 2) + 1\big) = (x + 2)(2x - 3)$$

ಅಂದರೆ, $p(x) - p(-2)$ ನ ಅಪವರ್ತನ $x + 2 = x - (-2)$ ಆಗಿದೆ.

**ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳು**

$x, y$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

ಇದರಲ್ಲಿ $y$ ಆಗಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $x^3 - 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನ $x - 1$ ಎಂದೂ, $x^3 - 8$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನ $x - 2$ ಎಂದೂ, $x^3 - \frac{1}{8}$ ಎಂಬ ಬಹುದದ ಅಪವರ್ತನ $x - \frac{1}{2}$ ಎಂದೂ, $x^3 + 27$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನ $x + 3$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

ಅಂದರೆ, $a$ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ $x^3 - a^3$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನ $x - a$ ಆಗಿರುವುದು.

ಮೂರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತವಾದರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದು. **ಘಾತ ವ್ಯತ್ಯಾಸ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇತರ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ,

$a$ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ $x^n - a^n$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನ $x - a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಬಹುಪದಗಳಿಗೂ ಸರಿಯಾಗುವಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು. $p(x)$ ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದವಾದರೂ $a$ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ $x - a$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವು $p(x) - p(a)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಇನ್ನೂ ಒಂದು ತತ್ವ ಸಿಗುವುದು.

$p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ $x$ ಆಗಿ $a$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾಗ, $p(a) = 0$ ಆದರೆ, $x - a$ ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನ ವಾಗುವುದು.

$p(x)$ ಯಾವುದೇ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವಾದರೂ, $a$ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $p(x) - p(a)$ ಯ ಅಪವರ್ತನ $x - a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಇನ್ನೂ ಸಂಶಯ ನಿವಾರಣೆಯಾಗದಿದ್ದರೆ, ಈ ರೀತಿ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆದು ನೋಡುವ

$$p(x) = lx^2 + mx + n$$

ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ $x$ ಆಗಿ $a$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$\begin{aligned} p(x) - p(a) &= (lx^2 + mx + n) - (la^2 + ma + n) \\ &= l(x^2 - a^2) + m(x - a) \\ &= l(x - a)\,(x + a) + m(x - a) \\ &= (x - a)\,\big(l\,(x + a) + m\big) \\ &= (x - a)\,\big(lx + (la + m)\big) \end{aligned}$$

ಅಂದರೆ,

> $p(x)$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ ಹಾಗೂ $a$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $x - a$ ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವು $p(x) - p(a)$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, $p(x) = x^2 - 5x + 6$ ಎಂದೂ, $x = 3$ ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ? $p(3) = 9 - 15 + 6 = 0$ ಅಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ $p(x) - p(3) = p(x)$ ಆಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ತತ್ವವನ್ನನುಸರಿಸಿ $x - 3$ ಎಂಬುದು $p(x) = x^2 - 5x + 6$ ಅಪವರ್ತನವೆಂದು ತಿಳಿಯುವುದು.

ಇದನ್ನೇ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದಲ್ಲವೇ.: $p(x)$ ಯಾವುದೇ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವಾದರೂ, $a$ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ $p(x) - p(a)$ ಯ ಅಪವರ್ತನ $x - a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ $p(a)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ $p(x) - p(a) = p(x)$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನ ಸ್ವತಃ $x - a$ ಯೇ ಆಗಿರುವುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ

> **$p(x)$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ $x$ ಆಗಿ $a$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವಾಗ $p(a) = 0$ ಆದರೆ $x - a$ ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗುವುದು.**

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $p(x) = 3x^2 - 5x - 2$ ಎಂದೂ $a = 2$ ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$p(a) = p(2) = 12 - 10 - 2 = 0$$

ಆಗ $3x^2 - 5x - 2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನ $x - 2$ ಆಗುವುದು.

### ಬಹುಪದ ಭಾಗಾಕಾರ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ವಿಲೋಮವು ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿದೆ ಯಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $2 \times 5 = 10$ ಎಂಬುದನ್ನು $10 \div 2 = 5$ ಎಂದೋ $10 \div 5 = 2$ ಎಂದೋ ಬರೆಯಬಹುದು. $\frac{10}{2} = 5$ ಎಂದೂ $\frac{10}{5} = 2$ ಎಂದೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ

$$(x - 1)\,(x + 1) = x^2 - 1$$

ಎಂಬ ಬಹುಪದವನ್ನು

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

ಎಂದೂ

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$$

ಎಂದೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. $x^2 - 1 = (x - 1)\,(x + 1)$ ಎಂಬುದು $x$ ಆಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಸರಿಯಾಗುವುದು.

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

ಅಂದರೆ $x$ ಆಗಿ $1$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ? (ಯಾಕೆ?)

1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಬಹುಪದದಿಂದ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಎರಡನೇ ಬಹುಪದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವ ಬಹುಪದ ಸಿಗುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x^2 - 3x + 5, x - 4$

(ii) $x^2 - 3x + 5, x + 4$

(iii) $x^2 + 5x - 7, x - 1$

(iv) $x^2 - 4x - 3, x - 1$

2) $x^2 + kx + 6$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ $k$ ಆಗಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $x - 1$ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವ ಬಹುಪದ ಲಭಿಸುವುದು? ಹೀಗೆ ಲಭಿಸುವ ಬಹುಪದದ ಎರಡನೇ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3) $kx^2 + 2x - 5$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ $k$ ಆಗಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $x - 1$ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವ ಬಹುಪದ ಲಭಿಸುವುದು?

### ಭಾಗಲಬ್ಧವೂ ಶೇಷವೂ

$p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದ ಹಾಗೂ $a$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $p(x) - p(a)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನ $x - a$ ಆಗುವುದು ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. (**ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ).

ಆಗ, $p(x) - p(a)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವನ್ನು $x - a$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಮತ್ತು $q(x)$ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಬಹುಪದದ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$p(x) - p(a) = (x - a)\, q(x)$$

ಇದನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ $p(x)$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದ ಮತ್ತು $a$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $p(x)$ ನ್ನು $x - a$ ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯ ಮತ್ತು $p(a)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$18 = (7 \times 2) + 4$$

ಎಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿ ಬರೆದ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ವಿಚಾರ.

ಆದುದರಿಂದ $p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$ ಎಂದು ಬರೆದರೂ $p(x)$ ನ್ನು $x - a$ ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ $q(x)$, ಶೇಷ $p(a)$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

### ಮೌಲ್ಯಗಳೂ ಅಪವರ್ತನಗಳೂ

ಕೆಲವು ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಅಪವರ್ತನ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದೆಂದು ಒಂದನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ. ಅದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅಪವರ್ತನ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನೂ ಮಾಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$p(x) = x^2 - 30x + 221$$

ಎಂಬ ಬಹುಪದವನ್ನು ನೋಡುವ, ಇದನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಒಂದನೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ ಮೊತ್ತ 30 ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ 221 ಆಗುವಂತೆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. $x - a$ ಎಂಬ ಬಹುಪದ $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ $p(a) = 0$ ಆಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಅಂದರೆ, $a^2 - 30a + 221 = 0$ ಆಗಬೇಕು. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ,

$$x^2 - 30x + 221 = 0$$

ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಮೌಲ್ಯ $a$. ಆಗಬೇಕು. ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ:

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 884}}{2} = \frac{1}{2}\,(30 \pm 4) = 17 \text{ ಅಥವಾ } 13$$

ಅಂದರೆ $p(17) = 0$ ಮತ್ತು $p(13) = 0$ ಆದೀತು.

ಇದರಿಂದ $x-17$, $x-13$ ಇವು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಸಿಗುವುವು.

$$x^2-30x+221=(x-17)(x-13)$$

ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ. $x^2-2x-1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ $x^2-2x-1=0$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ನಿರ್ಧಾರಣಾ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕು. ಅದನ್ನು ಹೀಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{1}{2}(2\pm2\sqrt{2})=1\pm\sqrt{2}$$

ಆಗ $1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$ ಎಂಬಿವುಗಳು $x^2-2x-1=0$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಮೌಲ್ಯಗಳು. ಆದುದರಿಂದ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ತತ್ವಕ್ಕೆ ಅನುಸರಿಸಿ $x-(1+\sqrt{2}), x-(1-\sqrt{2})$ ಇವುಗಳು $x^2-2x-1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿವೆ.

$$x^2-2x-1=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$$

ಎಂದೂ ಕಾಣಬಹುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ : $2x^2-7x+6$ ನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು?

**ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿನ ಆಲ್ಜಿಬ್ರಾ**

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರಾದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರೂಪಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಮಾತ್ರವಲ್ಲ ಬೀಜಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೂ ಮಾಡಬಹುದು. (Geometry ಮತ್ತು Algebra ಸೇರಿರುವುದೇ GeoGebra). ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಜೀಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ CAS ನ್ನು ತೆರೆಯಬೇಕು. (View → CAS). ನಂತರ ಇದರಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

(x – a)*(x^2+a*x+a^2)

ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ $-a^3+x^3$ ಎಂದು ಲಭಿಸುವುದು.

solve (x^2-x-1=0)

ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ

$$\left\{x=\frac{-\sqrt{5}+1}{2},\ x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

$p(x)=2x^2-7x+6$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆದರ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $p(x)=0$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕು. $2x^2-7x+6=0$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಮೌಲ್ಯಗಳು

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{4}=\frac{1}{4}(7\pm1)=2 \text{ ಅಥವಾ } \frac{3}{2}$$

ಆಗ $x-2,\ x-\frac{3}{2}$ ಇವುಗಳು $2x^2-7x+6$ ರ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ $2x^2-7x+6$ ಸಿಗುವುದೇ?

$$(x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)=x^2-\frac{7}{2}x+3$$

$x^2-\frac{7}{2}x+3$ ನ್ನು $2x^2-7x+6$ ಎಂದು ಮಾಡಲು ಏನು ಮಾಡಬೇಕು?

ಆಗ

$$2x^2-7x+6=2\left(x^2-\frac{7}{2}x+3\right)=2(x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

ಇದನ್ನು ಬೇಕಾದರೆ ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಆಕರ್ಷಕಗೊಳಿಸುವ.

$$2x^2 - 7x + 6 = (x - 2)(2x - 3)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಎಲ್ಲಾ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳನ್ನೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $x^2 + 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವನ್ನು ನೋಡಿರಿ. $x^2 + 1 = 0$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ನಿರ್ಧರಣಾ ಮೌಲ್ಯವಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ. (ಯಾಕಾಗಿ?) ಆದುದರಿಂದ $x^2 + 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದಕ್ಕೆ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಲ್ಲ.

?

1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $x^2 - 20x + 91$

(ii) $x^2 - 20x + 51$

(iii) $x^2 + 5x - 84$

(iv) $4x^2 - 16x + 15$

(v) $x^2 - x - 1$

2) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(i) $x^2 + x + 1$

(ii) $x^2 - x + 1$

(iii) $x^2 + 2x + 2$

(iv) $x^2 + 4x + 5$

3) $p(x) = x^2 + 4x + k$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ $k$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $p(x)$ ನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ?

# 11

# ಸ್ಟ್ಯಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್

## ಸರಿಯಲ್ಲದ ಸರಾಸರಿ

ಒಂದು ಗ್ರಾಮದಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುವ 10 ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವು ಈ ರೀತಿಯಿದೆ.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16500 | 21700 | 18600 | 21050 | 19500 |
| 17000 | 21000 | 18000 | 22000 | 17500 |

ಈ ಗುಂಪಿನ ಮಧ್ಯಮಾನ ಆದಾಯ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ?

ಆದಾವೆಲ್ಲವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಮಧ್ಯಮಾನ 19285 ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇನ್ನು ಈ ಹತ್ತು ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯದ ವಿವರಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ, ಮಧ್ಯಮಾನ ಮೊತ್ತ ಮಾತ್ರ ಸಿಕ್ಕಿದರೂ ಇವರ ಆರ್ಥಿಕ ಸ್ಥಿತಿಗತಿಗಳ ಕುರಿತು ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು;

- ಈ ಎಲ್ಲಾ ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವು ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆ 19285 ರೂಪಾಯಿಯ ಹತ್ತಿರದ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ.
- ಯಾವುದೇ ಕುಟುಂಬದ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವು ರೂಪಾಯಿ 19285ಕ್ಕಿಂತ ತುಂಬಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ತೀರಾ ಕಡಿಮೆ ಅಲ್ಲ.
- 19285 ರೂಪಾಯಿಗಿಂತ ಅಧಿಕ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವಿರುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಈ ಮೊತ್ತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವಿರುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುಕಡಿಮೆ ಸಮಾನ.

ಇವರ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿಯೇ 175000 ರೂಪಾಯಿ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವಿರುವ ಒಂದು ಕುಟುಂಬ ಕೂಡಾ ಇದೆ ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ 11 ಕುಟುಂಬಗಳ ಮಧ್ಯಮಾನ ಆದಾಯ ಎಷ್ಟಾಯಿತು?

$$\frac{(19285 \times 10) + 175000}{11} \approx 33441 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

ಇನ್ನು ಈ ಮಾಹಿತಿಗಳೊಂದನ್ನೂ ಹೇಳದೆ, ಈಗ ಸಿಕ್ಕಿದ ಮಧ್ಯಮಾನವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೇಳಿದರೆ, ಈ 11 ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯ ಸುಮಾರು 30000 ರೂಪಾಯಿಯೆಂಬ

ತಪ್ಪಾದ ತಿಳುವಳಿಕೆ ಉಂಟಾಗುವುದಲ್ಲವೇ? ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹತ್ತೂ ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯದ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯ ಹತ್ತಿರವಿದೆ.

ಮಧ್ಯಮಾನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರ ಉದ್ದೇಶ ಒಂದು ವಿಚಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಅನೇಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕುರಿತು ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತಹ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವುದು ಎಂಬುದಲ್ಲವೇ. ಆದರೆ ಗುಂಪಿನ ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿಂತ ತೀರಾ ಸಣ್ಣದೋ ತುಂಬಾ ದೊಡ್ಡದೋ ಆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (ಎಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಿದ್ದರೂ) ಮಧ್ಯಮಾನದಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಪ್ರಭಾವವನ್ನು ಬೀರುವುವು.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ ಹತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿಂತ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ, ಇದು ಮಧ್ಯಮಾನದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನೇ ಬದಲಾಯಿಸಿತು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತುಂಬಾ ದೊಡ್ಡದಾದ ಅಥವಾ ತೀರಾ ಸಣ್ಣದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಧ್ಯಮಾನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ತಪ್ಪಾಗಿಸುವ ಇತರ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಹೇಳಬಹುದೇ?

## ಇನ್ನೊಂದು ಸರಾಸರಿ

ನಾವು ನೋಡಿದ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ 11 ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯದ ಕುರಿತಾದ ಸರಿಯಾದ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಆದಾಯಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಾತ್ರಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದು, ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, 5 ಕುಟುಂಬಗಳ ಆದಾಯ ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆಯೂ ಉಳಿದ 5 ಕುಟುಂಬಗಳ ಆದಾಯವು ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವೂ ಆಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ.

ಮೊದಲು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆಯುವ.

16500, 17000, 17500, 18000, 18600, 19500, 21000, 21050, 21700, 22000, 175000

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 19500. ಇದನ್ನು ಈ ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯಮ (median) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಅಂದರೆ, ಈ 11 ಕುಟುಂಬಗಳ ಮಧ್ಯಮ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವು 19500 ರೂಪಾಯಿಯಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು, ಒಟ್ಟು ಇರುವ 11 ಕುಟುಂಬಗಳಲ್ಲಿ 5 ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವು 19500ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು 5 ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವು 19500ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ಆಗಿವೆ, ಅಂದರೆ ಮಧ್ಯಮ ಆದಾಯಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಆದಾಯವಿರುವ ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ಆದಾಯವಿರುವ ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

ಇನ್ನು ಮೊದಲ 10 ಕುಟುಂಬಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೇ? ಅವರ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದರೆ, ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಬದಲು, 18600, 19500 ಎಂಬೀ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬರುವುದು.

ಇಲ್ಲಿಯೂ ಮಧ್ಯಮವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದು, ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎಣಿಕೆಯು ಸಮಾನವಾಗುವ ವಿಧದಲ್ಲಾಗಿದೆ. 18600 ಮತ್ತು 19500ಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದು. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಮಧ್ಯಮವಾಗಿ

ಪರಿಗಣಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಮೊದಲ 10 ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯದ ಮಧ್ಯಮವು $\frac{1}{2}$ (18600 + 19500) = 19050 ರೂಪಾಯಿ.

ಮಧ್ಯಮವಾದ 19050 ರೂಪಾಯಿ ಎಂಬುದು, ಮಧ್ಯಮಾನವಾದ 19285 ರೂಪಾಯಿಯಂತೆಯೇ ಮೊದಲ ಹತ್ತು ಕುಟುಂಬಗಳ ಆರ್ಥಿಕ ಸ್ಥಿತಿಯ ಕುರಿತಾದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡವುದಲ್ಲವೇ. (ಮಧ್ಯಮಾನ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮಗಳೊಳಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೂ ಇಲ್ಲ).

ಹನ್ನೊಂದನೆಯ ಕುಟುಂಬದ ಅಧಿಕ ಆದಾಯವು ಮಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಇಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಪ್ರಾಧಾನ್ಯವಿದೆ. ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಕೆಲವು ಕುಟುಂಬಗಳ ಆದಾಯದ ಮಧ್ಯಮವು 19050 ರೂಪಾಯಿ, ಅದರಲ್ಲೊಂದು ಕುಟುಂಬದ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯ 21000 ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ಮಾತ್ರ ಹೇಳಿದರೆ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ಕುಟುಂಬಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆದಾಯವು ಈಗ ಹೇಳಿದ ಕುಟುಂಬಕ್ಕೆ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

?

(1) ಲಾಂಗ್‌ಜಂಪ್ ತರಬೇತಿಯಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರು ಜಿಗಿದ ದೂರಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

6.10, 6.20, 6.18, 6.20, 6.25, 6.21, 6.15, 6.10

ದೂರಗಳೆಲ್ಲವೂ ಮೀಟರಿನಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯಮ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮಾನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವುಗಳೊಳಗೆ ದೊಡ್ಡ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿಲ್ಲದಿರಲು ಕಾರಣವೇನು?

(2) ಕೇರಳದ ವಿವಿಧ ಜಿಲ್ಲೆಗಳಲ್ಲಿ 2015 ರ ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಸುರಿದ ಮಳೆಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸೆಂಟಿಮೀಟರುಗಳಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ಜಿಲ್ಲೆ | ಮಳೆಯ ಪ್ರಮಾಣ (ಮಿ.ಮೀ) |
|---|---|
| ಕಾಸರಗೋಡು | 66.7 |
| ಕಣ್ಣೂರು | 56.9 |
| ಕೋಝಿಕ್ಕೋಡ್ | 33.5 |
| ವಯನಾಡ್ | 20.5 |
| ಮಲಪ್ಪುರಂ | 13.5 |
| ಪಾಲಕ್ಕಾಡ್ | 56.9 |
| ತ್ರಿಶ್ಯೂರು | 53.4 |
| ಎರ್ನಾಕುಲಂ | 70.6 |
| ಕೋಟ್ಟಯಂ | 50.3 |
| ಇಡುಕ್ಕಿ | 30.5 |
| ಪತ್ತನಂತಿಟ್ಟ | 56.4 |
| ಆಲಪ್ಪುಳ | 45.5 |
| ಕೊಲ್ಲಂ | 56.3 |
| ತಿರುವನಂತಪುರ | 89.0 |

ಈ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಕೇರಳದಲ್ಲಿ ಸುರಿದ ಮಳೆಯ ಮಧ್ಯಮಾನವನ್ನು ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮಧ್ಯಮಾನಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮಧ್ಯಮವು ಕಡಿಮೆಯಾಗಲು ಕಾರಣವೇನು?

(3) ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯಮವೂ ಮಧ್ಯಮಾನವೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

## ಆವೃತ್ತಿ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮ

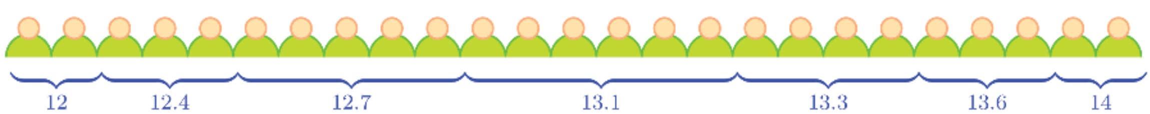
ರಕ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಒಂದು ಡೆಸಿ ಲೀಟರಿನಲ್ಲಿ(ಅಂದರೆ 100 ಮಿಲ್ಲಿಲೀಟರ್) ಎಷ್ಟು ಗ್ರಾಂ ಎಂಬ ಮಾನದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವರು. 25 ಮಕ್ಕಳ ರಕ್ತ ತಪಾಸಣೆಯನ್ನು ನಡೆಸಿ, ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನನುಸರಿಸಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣ (ಗ್ರಾಂ/ ಡೆಲೀ) | ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 12.0 | 2 |
| 12.4 | 3 |
| 12.7 | 5 |
| 13.1 | 6 |
| 13.3 | 4 |
| 13.6 | 3 |
| 14.0 | 2 |

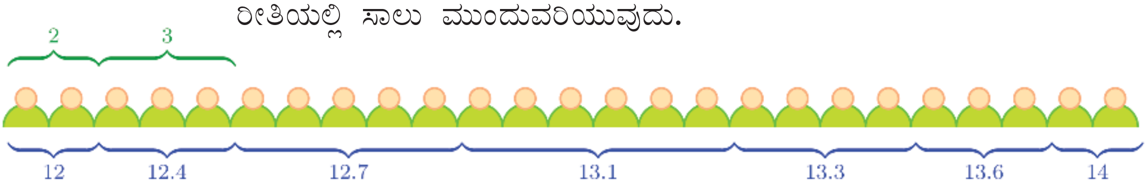
ಇದರಿಂದ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣದ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು?

ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವುದು ಮಧ್ಯಮ; ಅಂದರೆ, ಈ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ 25 ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ 12 ಮಕ್ಕಳ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್ನಿನ ಪ್ರಮಾಣ ಮಧ್ಯಮಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರಬೇಕು; 12 ಮಕ್ಕಳದ್ದು ಹೆಚ್ಚೂ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು, ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿ ಹದಿಮೂರನೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿಲ್ಲಿಸುವುದೆಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ.

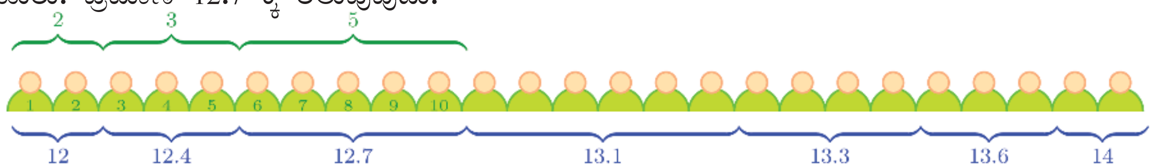



ಮೊದಲ 2 ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್ 12, ನಂತರ 3 ಮಕ್ಕಳಿಗೆ 12.4 ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಲು ಮುಂದುವರಿಯುವುದು.

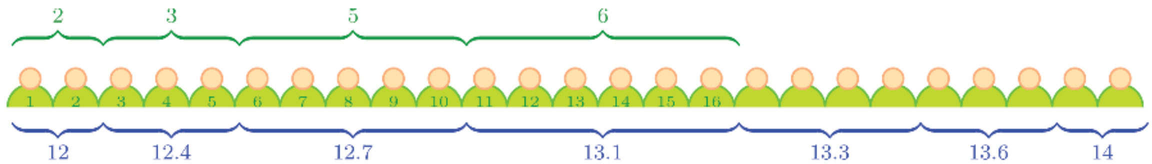


ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವುದು 13ನೆಯ ಮಗುವಿನ ಅಳತೆಯಲ್ಲವೇ; ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುತ್ತಾ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್ನಿನ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಅವನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಮೊದಲ ಎರಡು ಗುಂಪಿನ 2 + 3 = 5 ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ, ಅಳತೆ 12.4 ವರೆಗೆ ಆಯಿತು. ಅಂದರೆ, 5ನೇ ಮಗುವಿನ ರಕ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್ನಿನ ಪ್ರಮಾಣ 12.4.

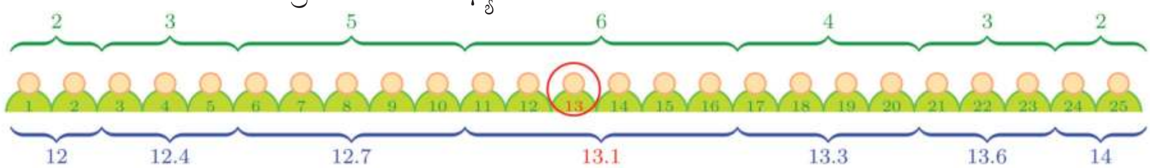
ಪುನ: ಮುಂದಿನ ಗುಂಪಿನ 5 ಮಕ್ಕಳನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿದರೆ 5 + 5 = 10 ಮಕ್ಕಳವರೆಗೆ ಆಯಿತು. ಪ್ರಮಾಣ 12.7 ಕ್ಕೆ ತಲುಪುವುದು.




ಅಂದರೆ 10ನೇ ಮಗುವಿನ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್ನಿನ ಪ್ರಮಾಣ 12.7 ಇನ್ನು ಮುಂದಿನ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ 6 ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಕೂಡಾ ಕೂಡಿಸಿದರೆ 10 + 6 = 16 ಆಯಿತು.




ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವುದು 13 ನೆಯ ಮಗುವಿನ ಪ್ರಮಾಣವಾಗಿದೆ. ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 11 ರಿಂದ 16 ವರೆಗಿರುವ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಮಕ್ಕಳ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್ನಿನ ಪ್ರಮಾಣ 13.1 ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ, ಆಗ 13ನೆಯ ಮಗುವಿನ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನಿನ ಪ್ರಮಾಣವೂ 13.1 ಎಂಬುದೇ ಆಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇದುವೇ ಈ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಮಧ್ಯಮವಾಗಿದೆ.




ಚಿತ್ರದ ಬದಲಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ.

| ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್ನಿನ ಪ್ರಮಾಣ (ಗ್ರಾಂ/ಡೆಲೀ) | ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 12.0 ವರೆಗೆ | 2 |
| 12.4 ವರೆಗೆ | 5 |
| 12.7 ವರೆಗೆ | 10 |
| 13.1 ವರೆಗೆ | 16 |
| 13.3 ವರೆಗೆ | 20 |
| 13.6 ವರೆಗೆ | 23 |
| 14.0 ವರೆಗೆ | 25 |

ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ 11 ರಿಂದ 16ವರೆಗಿನ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಮಕ್ಕಳ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್‌ನ

ಅಳತೆ 13.1 ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಒಟ್ಟು ಮಕ್ಕಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ 13 ನೆಯವನೂ ಈ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ಕಾರಣ, ಮಧ್ಯಮ 13.1 ಎಂದು ಗಣನೆ ಮಾಡಬಹುದು.

(1) ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ 35 ಕುಟುಂಬಗಳನ್ನು ತಿಂಗಳ ಆದಾಯದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿರುವುದನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ:

| ತಿಂಗಳ ಆದಾಯ (ರೂಪಾಯಿ) | ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 4000 | 3 |
| 5000 | 7 |
| 6000 | 8 |
| 7000 | 5 |
| 8000 | 5 |
| 9000 | 4 |
| 10000 | 3 |

ಮಧ್ಯಮ ಆದಾಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಒಂದು ಕಾರ್ಮಿಕ ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಹಲವು ವಿಧದ ಕೆಲಸಗಳನ್ನು ಮಾಡುವವರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಿನಗೂಲಿಯ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ದಿನಗೂಲಿ (ರೂಪಾಯಿ) | ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 400 | 2 |
| 500 | 4 |
| 600 | 5 |
| 700 | 7 |
| 800 | 5 |
| 900 | 4 |
| 1000 | 3 |

ದಿನಗೂಲಿಯ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ಹುಟ್ಟಿದ ಶಿಶುಗಳನ್ನು ಭಾರಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲಾದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ಶಿಶುಗಳ ಭಾರ (ಕಿ.ಗ್ರಾಂ) | ಶಿಶುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 2.500 | 4 |
| 2.600 | 6 |
| 2.750 | 8 |
| 2.800 | 10 |
| 3.000 | 12 |
| 3.150 | 10 |
| 3.250 | 8 |
| 3.300 | 7 |
| 3.500 | 5 |

ಭಾರದ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

### ಕ್ಲಾಸು ಅಂತರ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮ

ಒಂದು ಉದ್ಯೋಗ ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲಸಗಾರರನ್ನು ದಿನಗೂಲಿಯ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿರುವುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ದಿನಗೂಲಿ (ರೂ.) | ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 400-500 | 6 |
| 500-600 | 7 |
| 600-700 | 10 |
| 700-800 | 9 |
| 800-900 | 5 |
| 900-1000 | 4 |
| **ಒಟ್ಟು** | **41** |

ಈ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಮಧ್ಯಮ ದಿನಗೂಲಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

ಅತಿಕಡಿಮೆ ಕೂಲಿ ಲಭಿಸುವವರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಅತಿಹೆಚ್ಚು ಕೂಲಿ ಲಭಿಸುವ ಕೆಲಸಗಾರರ ವರೆಗೆ ಕ್ರಮೀಕರಿಸಿದರೆ, ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಕೆಲಸಗಾರರ ಕೂಲಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದುದು. ಒಟ್ಟು 41 ಕೆಲಸಗಾರರಿದ್ದಾರೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವುದು, ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಾದರೆ 21ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿ.

ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ದಿನಗೂಲಿಯನ್ನು ಹಲವು ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದಾಗ ಯಾವ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ 21ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯಿರುವನು ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ. ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕದಂತೆ

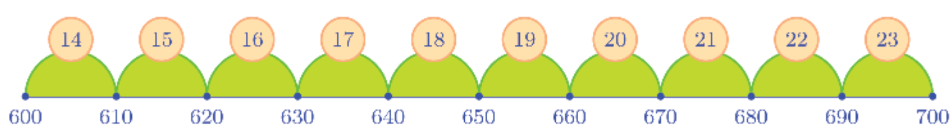
ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಭಾಗ (ಕ್ಲಾಸ್)ದಲ್ಲಿಯೂ ಕೆಲಸಗಾರರನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಜನರಾಗುವರೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವ.

| ದಿನಗೂಲಿ (ರೂ.) | ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 500 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 6 |
| 600 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 13 |
| 700 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 23 |
| 800 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 32 |
| 900 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 37 |
| 1000 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 41 |

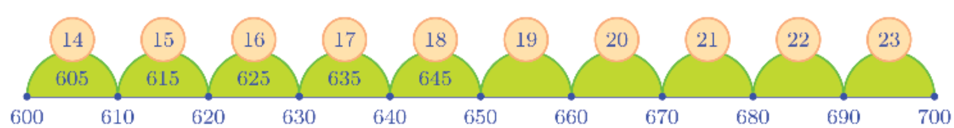
ಪಟ್ಟಿಗನುಸಾರವಾಗಿ 600 ರೂ.ಗಳಿಂದ ಕಡಿಮೆ ಕೂಲಿ ಲಭಿಸುವವರನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, 13ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವರೆಗೆ ತಲುಪಿದೆವು. 700 ರೂ. ಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಕೂಲಿ ಲಭಿಸುವವರನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 23 ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಾದರು. ಈ ಎರಡು ವಿಧದ ಕೆಲಸಗಾರರ ನಡುವೆ ಇರುವ ವ್ಯಕ್ತಿ ಅಂದರೆ 21ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವುದು. ಆತನ ಕೂಲಿ 600 ಮತ್ತು 700 ರೂ.ಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ತಿಳಿಯಿತು.

ಕೂಲಿಯನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ನಿಖರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಏನು ಮಾಡಬಹುದು?

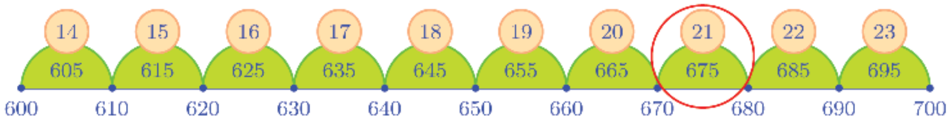
14ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯಿಂದ ಮೊದಲ್ಗೊಂಡು 21ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವರೆಗಿನ 10 ಕೆಲಸಗಾರರ ದಿನಗೂಲಿ 600 ರೂ. ಮತ್ತು 700 ರೂ.ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದಲ್ಲವೇ. ಇವರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ದಿನಗೂಲಿ ಎಷ್ಟೆಂದು ತಿಳಿಯಲಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಕೆಲವು ಊಹನೆಗಳು ಬೇಕಾಗಿಬರಬಹುದು (ವಿಭಾಗ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಮಧ್ಯಮಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲೂ ಕೆಲವು ಊಹನೆಗಳು ಬೇಕಾಗಿ ಬಂದಿದೆಯಲ್ಲವೇ) 600 ರಿಂದ 700ರ ವರೆಗಿನ 100 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು 10 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವನ್ನೂ ಒಬ್ಬೊಬ್ಬರೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ




ಇದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪವಿಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಕೆಲಸಗಾರರ ಕೂಲಿ ಈ ಉಪವಿಭಾಗದ ಮಧ್ಯಬೆಲೆಯೇ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಊಹಿಸುವ.




ಈ ಊಹನೆಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ 21ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಕೂಲಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.




ಅಂದರೆ, ದಿನಗೂಲಿಯ ಮಧ್ಯಮ 675 ರೂಪಾಯಿ.

ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸದೇ ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ದಿನಗೂಲಿಯ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸಗಾರರನ್ನು ಕ್ರಮೀಕರಿಸುವ ನಮ್ಮ ಊಹನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಧ್ಯಮ ಕೂಲಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು?

- 14ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಕೂಲಿ 605 ರೂ.
- ನಂತರ 23ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವರೆಗೆ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಕೂಲಿ 10 ರೂಪಾಯಿಯಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು.
- 14ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯಿಂದ ಮೊದಲ್ಗೊಂಡು, ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ 21ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವರೆಗೆ ಅಂದರೆ 7 ಕೆಲಸಗಾರರನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

ಆಗ ಇದೊಂದು ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯಾಗಲಿಲ್ಲವೇ?
605 ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ 10ರಂತೆ 7 ಸಲ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು?

ಇದರ ಉತ್ತರ

$$605 + (7 \times 10) = 675$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಇಂತಹ ಅನೇಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು **ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಕಂಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ.

ಚಿತ್ರವೇನನ್ನೂ ರಚಿಸದೆ, ಇದೇ ರೀತಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ನೋಡುವ. ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲಸಮಾಡುವವರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪ್ರಾಯಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ಪ್ರಾಯ | ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 25 – 30 | 4 |
| 30 – 35 | 7 |
| 35 – 40 | 8 |
| 40 – 45 | 10 |
| 45 – 50 | 9 |
| 50 – 55 | 8 |
| **ಒಟ್ಟು** | 46 |

ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಾಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ 46 ಎಂಬ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಯಾದುದರಿಂದ ಕೆಲಸಗಾರರ ಪ್ರಾಯಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಕ್ರಮೀಕರಿಸಿದರೆ 23 ಮತ್ತು 24ನೇ

ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಪ್ರಾಯದ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಮೊದಲು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವ.

| ಪ್ರಾಯ | ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 4 |
| 35 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 11 |
| 40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 19 |
| 45 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 29 |
| 50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 38 |
| 55 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 46 |

ಇದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ, ಪ್ರಾಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ 20 ರಿಂದ 29ರ ವರೆಗಿನ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ 10 ಮಂದಿ, 40 ಮತ್ತು 45ರ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಾಯದವರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ನಮಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ 23ನೇ ಹಾಗೂ 24ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು ಈ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾರಲ್ಲವೇ.

ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆ 40 ರಿಂದ 45ರ ವರೆಗಿನ 5 ವರ್ಷಗಳನ್ನು 10 ಸಮಭಾಗ ಮಾಡಿ ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಉಪವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬೊಬ್ಬ ವಕ್ತಿ ಇರುವನೆಂದೂ ಅಂತಹ ಓರ್ವ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಪ್ರಾಯವು ಈ ಉಪವಿಭಾಗದ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸುವ, ಆಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪವಿಭಾಗದ ಅಂತರವು $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ವರ್ಷವಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ 20ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಪ್ರಾಯವು 40 ವರ್ಷ ಹಾಗೂ $40\frac{1}{2}$ ವರ್ಷಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $40\frac{1}{4}$ ವರ್ಷ. ನಂತರ 29ನೇ ಸ್ಥಾನದ ವರೆಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಪ್ರಾಯವೂ $\frac{1}{2}$ ವರ್ಷದಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸುವ. ಆಗ 23ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಪ್ರಾಯವು.

$$40 + \frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} = 41\frac{3}{4} = 40\frac{1}{4} + \left(3\times\frac{1}{2}\right) = 41\frac{3}{4} \text{ ವರ್ಷ}$$

24ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಪ್ರಾಯವು

$$41\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 42\frac{1}{4} \text{ ವರ್ಷ}$$

ಇನ್ನು ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಾಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಈ ಪ್ರಾಯಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕು.

$$\frac{1}{2}\left(41\frac{3}{4}+42\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\times 84=42$$

ಹೀಗೆ ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಾಯ 42 ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ 23 ಮತ್ತು 24ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವವರು 40–45 ಎಂಬ ಒಂದೇ ಪ್ರಾಯವಿಭಾಗದಲ್ಲಿರುವವರು. ಹೀಗಲ್ಲದೆ ಇತರ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವಾಗಿ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆ ಬರೆದ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಲಭಿಸಿದ ಮಾರ್ಕಿನ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

| ಮಾರ್ಕು | ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 0 – 10 | 4 |
| 10 – 20 | 7 |
| 20 – 30 | 9 |
| 30 – 40 | 12 |
| 40 – 50 | 8 |
| ಒಟ್ಟು | 40 |

ಮಧ್ಯಮ ಮಾರ್ಕನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೊದಲು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯುವ.

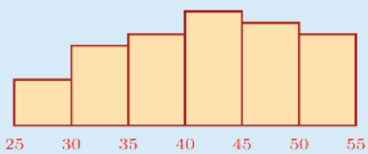
| ಮಾರ್ಕು | ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 4 |
| 20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 11 |
| 30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 20 |
| 40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 32 |
| 50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ | 40 |

ಇಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಮಾರ್ಕಿನ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ (ಅತಿಕಡಿಮೆಯಿಂದ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ವರೆಗೆ) ಕ್ರಮೀಕರಿಸಿದಾಗ 30ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮಾರ್ಕು ಲಭಿಸಿದವರು 20 ; ಅಂದರೆ ಒಟ್ಟು ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ 40ರ ಅರ್ಧ.

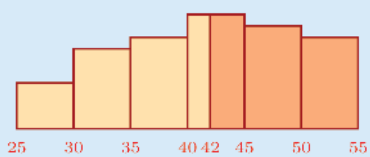
ಅಂದರೆ ಮಾರ್ಕಿನ ಮಧ್ಯಮವಾಗಿ 30ನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಒಟ್ಟು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಮಕ್ಕಳ ಮಾರ್ಕು 30ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ, ಬಾಕಿಯಿರುವ ಮಕ್ಕಳ ಮಾರ್ಕು 30ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಎಂಬುದೇ ಇದರ ಉತ್ತರ.

### ಮಧ್ಯಮ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿಯ ಆಯತ ಚಿತ್ರ ರಚಿಸುವುದು ನೆನಪಿಲ್ಲವೇ. ಪ್ರಾಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಆಯತ ಚಿತ್ರ ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ.




ಇದರಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಮವಾದ 42ರ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಒಂದು ಗೆರೆ ಎಳೆದರೆ ಚಿತ್ರ ಎರಡು ಭಾಗವಾಗುವುದು.




ಈ ಎರಡು ಭಾಗಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಲು ಕಷ್ಟವಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ. (ಮಾಡಿ ನೋಡಿ) ಎಲ್ಲಾ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಮಧ್ಯಮಕ್ಕೆ ಈ ಗುಣವಿದೆಯೇ?

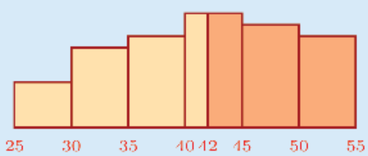
(1) ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಕೆಲವು ಮನೆಗಳ ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಕೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಕ್ರಮೀಕರಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಕೆ (ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ) | ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 80 – 90 | 3 |
| 90 – 100 | 6 |
| 100 – 110 | 7 |
| 110 – 120 | 10 |
| 120 – 130 | 9 |
| 130 – 140 | 4 |

ವಿದ್ಯುತ್ತಿನ ಬಳಕೆಯ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಮಧ್ಯಮ ಸಾಧ್ಯತೆ**

ಮಧ್ಯಮದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಲಂಬ, ಆಯತ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ.




ಹಾಗಾದರೆ, ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚುಕ್ಕಿ ಹಾಕಿದರೆ, ಅದು ಚಿತ್ರದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ಅಥವಾ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{1}{2}$).

ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಓರ್ವ ಕೆಲಸಗಾರನನ್ನು (ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಪರಿಗಣನೆಯಿಲ್ಲದೆ) ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದರೆ ಆತನ ಪ್ರಾಯವು 42ಕ್ಕಿಂದ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಮತ್ತು 42ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(2) ಒಂದು ತರಗತಿಯ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಲಭಿಸಿದ ಮಾರ್ಕಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮೀಕರಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

| ಮಾರ್ಕು | ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 0 – 10 | 4 |
| 10 – 20 | 8 |
| 20 – 30 | 10 |
| 30 – 40 | 9 |
| 40 – 50 | 5 |

ತರಗತಿಯ ಮಧ್ಯಮ ಮಾರ್ಕನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯ ಉದ್ಯೋಗಿಗಳು ಒಂದು ವರ್ಷ ನೀಡಿದ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

| ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ (ರೂ) | ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ |
|---|---|
| 1000 – 2000 | 8 |
| 2000 – 3000 | 10 |
| 3000 – 4000 | 15 |
| 4000 – 5000 | 20 |
| 5000 – 6000 | 22 |
| 6000 – 7000 | 8 |
| 7000 – 8000 | 6 |
| 8000 – 9000 | 3 |

ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

## ಸೈಬರ್ ಸುರಕ್ಷತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಯಿರಿ...

ಇಂಟರ್‌ನೆಟ್ ಮತ್ತು ಇತರ ಸಾಮಾಜಿಕ ಜಾಲತಾಣಗಳ ಉಪಯೋಗದ ಕುರಿತು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಶಯ ವಿನಿಮಯ, ವಿನೋದ, ಜ್ಞಾನ ಸಂಪಾದನೆ ಇತ್ಯಾದಿಗಳಲ್ಲಿ ಇವುಗಳ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯವನ್ನು ನಾವು ಅನುಭವಿಸಿ ತಿಳಿದಿರುವೆವಲ್ಲವೇ. ಆದರೆ ಕೆಲವು ಕಾಲಗಳಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಹದಿಹರೆಯದವರಲ್ಲಿ ಕೆಲವರಾದರೂ ಸಾಮಾಜಿಕ ಜಾಲತಾಣದಿಂದ ಶೋಷಣೆಗೊಳಗಾಗುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಬಲಿಪಶುಗಳಾಗುವುದರಿಂದ ಸ್ವತಃ ರಕ್ಷಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಹಾಗೂ ಸಂರಕ್ಷಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಆನ್‌ಲೈನ್ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ತೊಡಗುವಾಗ ಕೆಲವು ಸುರಕ್ಷಾ ಮಾರ್ಗಗಳನ್ನು ನಾವು ಸ್ವೀಕರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

**ಸಾಮಾಜಿಕ ಜಾಲತಾಣಗಳು ಅಪಾಯಕಾರಿಗಳಾಗುವುದು ಯಾವಾಗ**

- ಒಬ್ಬರ ವೈಯಕ್ತಿಕ ವಿಷಯಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಪೋಸ್ಟ್ ಅಥವಾ ಶೇರ್ ಮಾಡಿದಾಗ; ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಫೋನ್ ನಂಬರ್, ವಿಳಾಸ, ಸ್ಥಳ, ಫೋಟೋ ಮೊದಲಾದವುಗಳು.
- ಒಬ್ಬರ ಪ್ರೊಫೈಲ್ ನೋಡಿ ಅವರನ್ನು ವಿಶ್ವಾಸಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ; ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರೊಫೈಲ್ ಅಸತ್ಯವಾಗಿರುವುದು.
- ಚಾಟಿಂಗ್‌ನ ಸ್ನಾಪ್‌ಶೋಟ್‌ಗಳು, ಫೋಟೋಗಳು, ವೀಡಿಯೋಗಳು ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಸೇವ್ ಮಾಡುವುದೂ ಮುಂದೆ ಅದನ್ನು ಬ್ಲ್ಯಾಕ್ ಮೈಲ್ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೂ ಬೆದರಿಸುವುದಕ್ಕೂ ಉಪಯೋಗಿಸುವಾಗ.
- ಒಬ್ಬರ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವಕ್ಕೆ ಕಳಂಕವನ್ನುಂಟುಮಾಡುವ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ತಪ್ಪಾದ ವಿವರಗಳು, ಕಮೆಂಟುಗಳು, ಪೋಸ್ಟುಗಳು, ಫೋಟೋಗಳು ಎಂಬಿವುಗಳ ಮೂಲಕ ಸೈಬರ್ ಬೆದರಿಕೆಯನ್ನುಂಟುಮಾಡಿದಾಗ.
- ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಬಲೆಗೆ ಬೀಳಿಸಿ ಶೋಷಣೆಗೊಳಪಡಿಸಲು ಹಿರಿಯರೂ,ವಕ್ರದೃಷ್ಟಿ ಇರುವ ಅದೆಷ್ಟೋ ಮಂದಿಯೂ ಸಮಾಜದಲ್ಲಿದ್ದಾರೆ.

**ಸುರಕ್ಷಿತವಾದ ಸಾಮಾಜಿಕ ಜಾಲತಾಣಕ್ಕಿರುವ ನಿರ್ದೇಶಗಳು**

- ನಿಮ್ಮ ವೈಯಕ್ತಿಕವಾದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿಯೇ ಇರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ.
- ನಿಮ್ಮ Private Settings Customise ಮಾಡಿರಿ. ಇತರರಿಗೆ ನಿಮ್ಮ Basic Info ಮಾತ್ರ ನೋಡಲು ಅವಕಾಶವನ್ನು ನೀಡಿರಿ.
- ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯರನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸಿರಿ. ಆನ್‌ಲೈನ್ ಗೆಳೆಯರನ್ನು ವಿಶ್ವಾಸಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಾರದು. ಸಂದರ್ಶನಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸಿರಿ.
- ನಿಮಗೆ ಇಷ್ಟವಿಲ್ಲದ ಪೋಸ್ಟುಗಳನ್ನು ಕಂಡಾಗ ಅಂತಹ ಪೋಸ್ಟುಗಳು ಸಿಗುವಾಗ ಇರುವ ಅತೃಪ್ತಿಯನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯನಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರಿ.
- ನಿಮ್ಮನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ವೈಯಕ್ತಿಕ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಪೋಸ್ಟ್ ಮಾಡದಿರಿ.
- ಕಠಿಣವಾದ ಪಾಸ್‌ವರ್ಡ್‌ಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ. ಅದನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯನೊಂದಿಗೆ ಶೇರ್ ಮಾಡದಿರಿ.
- ನಿಮ್ಮ ಚಿತ್ರಗಳು, ಇ-ಮೈಲ್ ವಿವರಗಳು ಮೊದಲಾದವುಗಳನ್ನು ಶೇರ್ ಮಾಡದಿರಿ.
- ನಿಮ್ಮ ವೈಯಕ್ತಿಕ ಸಂದೇಶಗಳನ್ನು ವೈಯಕ್ತಿಕವಾಗಿರಿಸಿರಿ. ಒಮ್ಮೆ ಪೋಸ್ಟ್ ಮಾಡಿದರೆ ಅದು ಪ್ರಕಟಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

**ಸೈಬರ್ ಸುರಕ್ಷತೆಗಿರುವ ಕೆಲವು ಪ್ರಧಾನ ಫೋನ್ ನಂಬರುಗಳು**

ಕ್ರೈಂ ಸ್ಟೋಪರ್ : 1090
ಸೈಬರ್ ಸೆಲ್ : 9497975998
ಚೈಲ್ಡ್ ಹೆಲ್ಪ್‌ಲೈನ್ : 1098/1517
ಕಂಟ್ರೋಲ್ ರೂಂ : 100