ഗണിതം

XII

ഭാഗം 1

കേരളസർക്കാർ
പൊതുവിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

തയാറാക്കിയത്
സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി, കേരളം
2019

ISBN 81-7450-629-2

First Edition
November 2006 Agrahayana 1928

Reprinted
October 2007 Kartika 1929
December 2008 Pausa 1930
December 2009 Agrahayana 1931
January 2012 Magha 1933
November 2012 Kartika 1934
November 2013 Kartika 1935
November 2014 Kartika 1936
December 2015 Pausa 1937
December 2016 Pausa 1938
December 2017 Pausa 1939

PD 400T BS

© National Council of Educational Research and Training, 2006

₹

Printed on 80 GSM paper with NCERT watermark

Published at the Publication Division by the Secretary, National Council of Educational Research and Training, Sri Aurobindo Marg, New Delhi 110 016 and printed at Sam Industrial Enterprises Ltd., A 17-18, Sector – 60, Noida - 201 301 (U.P.)

ALL RIGHTS RESERVED

- No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without the prior permission of the publisher.
- This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade, be lent, re-sold, hired out or otherwise disposed of without the publisher's consent, in any form of binding or cover other than that in which it is published.
- The correct price of this publication is the price printed on this page, Any revised price indicated by a rubber stamp or by a sticker or by any other means is incorrect and should be unacceptable.

OFFICES OF THE PUBLICATION DIVISION, NCERT

NCERT Campus
Sri Aurobindo Marg
New Delhi 110 016 Phone : 011-26562708

108, 100 Feet Road
Hosdakere Halli Extension
Banashankari III Stage
Bengaluru 560 085 **Phone : 080-26725740**

Navjivan Trust Building
P.O. Navjivan
Ahmedabad 380 014 Phone : 079-27541446

CWC Campus
Opp. Dhankal Bus Stop
Panihati
Kolkata 700 114 Phone : 033-25530454

CWC Complex
Maligaon
Guwahati 781 021 Phone : 0361-2674869

Publication Team

Head, Publication Division	:	*M. Siraj Anwar*
Chief Editor	:	*Shveta Uppal*
Chief Business Manager	:	*Gautam Ganguly*
Chief Production Officer (Incharge)	:	*Arun Chitkara*
Editor	:	*Bijnan Sutar*
Production Assistant	:	*Sunil Kumar*

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram - 695 012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in, *e-mail* : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
© Department of Education, Government of Kerala

ആമുഖം

ഏതൊരു വിജ്ഞാനവും മാതൃഭാഷയിൽ പഠിക്കാനും പ്രകാശനം ചെയ്യാനും സാധിക്കും. അതിനുള്ള അവസരം പഠിതാക്കൾക്ക് ഒരുക്കേണ്ടത്, ഏതൊരു പഠന സമ്പ്രദായത്തിന്റെയും അനിവാര്യതയാണ്. അതിന്റെ തുടക്കമെന്ന നിലയ്ക്കാണ് ഹയർസെക്കന്ററി തലത്തിൽ ഭാഷേതര വിഷയങ്ങളിലെ പാഠപുസ്തകങ്ങൾ മലയാളത്തിൽ പ്രസിദ്ധീകരിക്കുന്നത്.

മാതൃഭാഷയിലൂടെയുള്ള വിദ്യാഭ്യാസം, ജ്ഞാനസമ്പാദനത്തിനുള്ള സുഗമമാർഗം എന്നതിനോടൊപ്പം സാംസ്കാരികതനിമയുടെ തിരിച്ചറിയൽ കൂടിയാണ്. അതുകൊണ്ടാണ് വികസിതരാജ്യങ്ങൾ മാതൃഭാഷയെ മുഖ്യബോധന മാധ്യമമായി സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇന്ത്യയിലാകട്ടെ, ദേശീയതലത്തിലുള്ള പ്രധാന പരീക്ഷകളെല്ലാം പ്രാദേശിക ഭാഷകളിൽക്കൂടി നടത്തുന്നതിനുള്ള സംവിധാനവും ഉണ്ടായി വരികയാണ്. ഈയൊരു സാഹചര്യത്തിൽ നമ്മുടെ കുട്ടികളും മാതൃഭാഷയുടെ ശക്തിസൗന്ദര്യങ്ങൾ തിരിച്ചറിഞ്ഞ് വിവിധ വിഷയങ്ങളിൽ ജ്ഞാനനിർമിതിയിൽ ഏർപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്. അതിന് അവരെ സജ്ജരാക്കുകയാണ് ഈ പാഠപുസ്തകങ്ങളുടെ മുഖ്യ ലക്ഷ്യം.

പരിഭാഷപ്പെടുത്തിയ പുസ്തകങ്ങളിൽ അതത് വിഷയങ്ങളിലെ സാങ്കേതിക പദങ്ങൾ പരമാവധി മലയാളത്തിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. നമ്മുടെ ഭാഷയിൽ ചിരപരിചിതമായ ഇംഗ്ലീഷ് പദങ്ങളെ അതേപടി സ്വീകരിച്ചിട്ടുമുണ്ട്. വിവർത്തനത്തിന് തീർത്തും വഴങ്ങാത്ത പദങ്ങളെ അതേരീതിയിൽ തന്നെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു. മാതൃഭാഷയിൽ പഠിക്കുന്നവർക്ക് ആശയഗ്രഹണം സുഗമമാക്കുന്ന വിധത്തിലാണ് പാഠപുസ്തകരചന നടത്തിയിരിക്കുന്നത്. അതോടൊപ്പം മലയാളഭാഷയുടെ വളർച്ചയ്ക്കും ഈ പ്രവർത്തനം സഹായകമാകുമെന്ന് കരുതുന്നു.

പാഠപുസ്തകവിവർത്തന രംഗത്ത് നമ്മുടെ രാജ്യത്ത് നടന്ന വലിയൊരു കാൽവെപ്പാണ് ഇത്. പ്രഥമ സംരംഭമെന്നനിലയിൽ ചില പരിമിതികളും പരിഭാഷയിൽ വന്നിട്ടുണ്ടാകാം. ക്ലാസ്മുറിയിൽ പ്രയോഗത്തിൽ വരുമ്പോഴാണ് അവയെല്ലാം കൂടുതൽ ബോധ്യപ്പെടുക. തുടർന്ന് വരുന്ന ഘട്ടങ്ങളിൽ അവയെയാകെ പരിഹരിക്കുന്നതിന് എല്ലാ അഭ്യുദയകാംക്ഷികളിൽ നിന്നും വിശിഷ്യ അധ്യാപകർ, വിദ്യാർത്ഥികൾ എന്നിവരിൽ നിന്നും അഭിപ്രായങ്ങളും നിർദേശങ്ങളും പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു.

ഡോ.ജെ. പ്രസാദ്

ഡയറക്ടർ,

എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി. കേരളം

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

NCERT appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P.K. Jain for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P.K. Jain, *Professor*, Department of Mathematics, University of Delhi, Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* and *Head*, DESM, NCERT, New Delhi

Members

Arun Pal Singh, *Sr. Lecturer*, Department of Mathematics, Dayal Singh College, University of Delhi, Delhi
A.K. Rajput, *Reader*, RIE, Bhopal, M.P.
B.S.P. Raju, *Professor*, RIE Mysore, Karnataka
C.R. Pradeep, *Assistant Professor*, Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, Karnataka
D.R. Sharma, *P.G.T.*, JNV-Mungeshpur, Delhi
Ram Avtar, *Professor* (Retd.) and *Consultant*, DESM, NCERT, New Delhi
R.P. Maurya, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi
S.S. Khare, *Pro-Vice-Chancellor*, NEHU, Tura Campus, Meghalaya
S.K.S. Gautam, *Professor*, DESM, NCERT, New Delhi
S.K. Kaushik, *Reader*, Department of Mathematics, Kirori Mal College, University of Delhi, Delhi
Sangeeta Arora, *P.G.T.*, Apeejay School Saket, New Delhi-110017
Shailja Tewari, *P.G.T.*, Kendriya Vidyalaya, Barkakana, Hazaribagh, Jharkhand
Vinayak Bujade, *Lecturer*, Vidarbha Buniyadi Junior College, Sakkardara Chowk, Nagpur, Maharashtra
Sunil Bajaj, *Sr. Specialist*, SCERT, Gurgaon, Haryana

Member - Coordinator

V.P. Singh, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

ശില്പശാലയിൽ പങ്കെടുത്തവർ

ശ്രീ. ജി. ഭുവനേന്ദ്രൻ നായർ
പ്രിൻസിപ്പൽ (റിട്ട.), ഹയർ സെക്കന്ററി വിദ്യാഭ്യാസം
ഡോ. എം. ജയകൃഷ്ണൻ
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (റിട്ട.)
ഹയർ സെക്കന്ററി വിദ്യാഭ്യാസം
ശ്രീ. സജീവ്. സി.എസ്
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (ഗണിതം)
ഗവ. ഗേൾസ് എച്ച്.എസ്.എസ്. മണക്കാട്, തിരുവനന്തപുരം
ശ്രീ. സത്യൻ. ഇം.എം.
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (ഗണിതം)
എ.കെ.ജി മെമ്മോറിയൽ, ഗവ. എച്ച്.എസ്.എസ്., പിണറായി, കണ്ണൂർ
ശ്രീ. ബിനുമോൻ. ബി.
എൻ.വി.ടി. (ഗണിതം)
ഗവ. വി.എച്ച്.എസ്.എസ്, പട്ടാഴി
ശ്രീ. സാബു. വി
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം)
ഗവ. മോഡൽ എച്ച്.എസ്.എസ് കുലശേഖരപുരം
ശ്രീ. ആർ. രാമാനുജം
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം)
എം.എൻ.കെ.എം., ഗവ.എച്ച്.എസ്.എസ്. പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്
ശ്രീ. അച്യുതൻ. സി.ജി.
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം), ഗവ.എച്ച്. എസ്.എസ്, കാരാകുറിശ്ശി, പാലക്കാട്
ശ്രീ. ജയദാസ്. റ്റി
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം),
റ്റി.ആർ.കെ.എച്ച്.എസ്.എസ്,
വാണിയംകുളം, പാലക്കാട്
ശ്രീ. വിനോദ് കുമാർ. എ
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം), പി.കെ.എം. എം.എച്ച്.എസ്.എസ്, എടരിക്കോട്, മലപ്പുറം
ശ്രീ. സുദീപ്. പി,
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം)
ഡോ.കെ.ബി. മേനോൻ മെമ്മോറിയൽ എച്ച്. എസ്.എസ്, തൃത്താല, പാലക്കാട്
ശ്രീ. ബിനേഷ്. ബി,
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (ഗണിതം)
ഗവ.എച്ച്.എസ്.എസ്, മീനങ്ങാടി, വയനാട്
ശ്രീ. പ്രമോദ്. എം.കെ,
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (ഗണിതം)
ഗവ. മോയൻ മോഡൽ ഗേൾസ്, എച്ച്.എസ്. എസ്., പാലക്കാട്
ശ്രീ. വിനോദ്കുമാർ. കെ,
എൻ.വി.ടി. (ഗണിതം),
ഗവ. വൊക്കേഷണൽ എച്ച്.എസ്.എസ്. കൃഷ്ണപുരം, ആലപ്പുഴ

വിദഗ്ധർ

ഡോ. റ്റി.ജി. ശരച്ചന്ദ്രൻ
ഡെപ്യൂട്ടി ഡയറക്ടർ (റിട്ട.), കോളേജ് വിദ്യാഭ്യാസ വകുപ്പ്
ഡോ. പി. സോമൻ
റിട്ട. പ്രൊഫസർ (മലയാളം), യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം
പ്രൊഫ. പി. ചന്ദ്രശേഖരൻ
യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ് (റിട്ട.), തിരുവനന്തപുരം
ശ്രീ. സി. വേണുഗോപാൽ
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫ. ഐ.എ.എസ്.ഇ, തൃശ്ശൂർ
ശ്രീ. സുമേഷ്. എസ്.എസ്
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫ. സെന്റ് ജോൺസ് കോളേജ് അഞ്ചൽ, കൊല്ലം
ശ്രീ. സുനിൽ കുമാർ. ആർ
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫ. ബി.ജെ.എം., ഗവ. കോളേജ് ചവറ

അക്കാദമിക് കോ-ഓർഡിനേറ്റർ

ഡോ. കെ. എസ്. ശിവകുമാർ
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

ഉള്ളടക്കം

ഭാഗം - I

1. ബന്ധങ്ങളും ഏകദങ്ങളും 9

- 1.1 ആമുഖം 9
- 1.2 വിവിധതരം ബന്ധങ്ങൾ 10
- 1.3 വിവിധതരം ഏകദങ്ങൾ 18
- 1.4 സമ്മിശ്ര ഏകദവും പ്രതിലോമ ഏകദവും 25
- 1.5 ദ്വയാംഗക്രിയ 37

2. പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ 59

- 2.1 ആമുഖം 59
- 2.2 അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ 60
- 2.3 പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതകൾ 71

3. മാട്രിക്സുകൾ 91

- 3.1 ആമുഖം 91
- 3.2 മാട്രിക്സ് 91
- 3.3 വിവിധതരം മാട്രിക്സുകൾ 96
- 3.4 മാട്രിക്സുകളുടെ ക്രിയകൾ 101
- 3.5 മാട്രിക്സിന്റെ ട്രാൻസ്പോസ് 121
- 3.6 സമമിത മാട്രിക്സും ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സും 124
- 3.7 മാട്രിക്സുകളുടെ മൗലിക രൂപാന്തരണം 130
- 3.8 പ്രതിലോമ മാട്രിക്സുകൾ 131

4. ഡിറ്റർമിനന്റുകൾ 145

- 4.1 ആമുഖം 145
- 4.2 ഡിറ്റർമിനന്റ് 146
- 4.3 ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ 152
- 4.4 ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 165
- 4.5 മൈനറും കോഫാക്ടറും 167
- 4.6 ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ സഹചാരിയും പ്രതിലോമവും 171
- 4.7 മാട്രിക്സുകളും ഡിറ്റർമിനന്റുകളും പ്രയോഗത്തിൽ 179

5. ഏകദങ്ങളുടെ തുടർച്ചയും അവകലനീയതയും 196

5.1 ആമുഖം 196
5.2 തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങൾ 196
5.3 അവകലനീയത 216
5.4 കൃതി ഏകദങ്ങളും ലോഗരിതമിക ഏകദങ്ങളും 224
5.5 ലോഗരിതമിക അവകലനം 230
5.6 പരാമട്രിക് രൂപത്തിലുള്ള ഏകദങ്ങളുടെ അവകലനം 235
5.7 രണ്ടാം ക്രമ അവകലജം 238
5.8 ഇടവിലസിദ്ധാന്തം 241

6. അവകലജങ്ങളുടെ പ്രയോഗം 253

6.1 ആമുഖം 253
6.2 മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് 253
6.3 ആരോഹണ ഏകദങ്ങളും അവരോഹണ ഏകദങ്ങളും 261
6.4 തൊടുവരകളും ലംബങ്ങളും 272
6.5 ഏകദേശവിലനിർണയം 281
6.6 നിമ്നോന്നതങ്ങൾ 286

അനുബന്ധം: 1 ഗണിതത്തിലെ തെളിവുകൾ 325

A.1.1 ആമുഖം 325
A.1.2 എന്താണ് തെളിവ്? 325

അനുബന്ധം: 2 ഗണിതവൽക്കരണം 335

A.2.1 ആമുഖം 335
A.2.2 എന്തുകൊണ്ട് ഗണിതവൽക്കരണം? 335
A.2.3 ഗണിതവൽകരണത്തിന്റെ തത്ത്വങ്ങൾ 336

ഉത്തരസൂചിക 347

പദാവലി 368

C3Q9D4

അധ്യായം **1**

ബന്ധങ്ങളും ഏകദങ്ങളും
(RELATIONS AND FUNCTIONS)

❖ *അനാകർഷകമായ ഗണിതത്തിന് ഈ ലോകത്ത് ശാശ്വത സ്ഥാനമില്ല. ഏതുതരം സൗന്ദര്യവും പോലെ ഗണിതത്തിന്റെ സൗന്ദര്യവും നിർവചിക്കുന്നത് ദുഷ്ക്കരമാണ്. ഒരു മനോഹര കവിത എന്തെന്ന് നാം കൃത്യമായി മനസിലാക്കുന്നില്ലെങ്കിലും അങ്ങനെയൊന്നു വായിച്ചു ആസ്വദിക്കുന്നതിൽ തടസമില്ല – ജി.എച്ച്. ഹാർഡി* ❖

1.1 ആമുഖം

പതിനൊന്നാം ക്ലാസിൽ പരിചയപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ബന്ധം, ഏകദം, മണ്ഡലം, സഹമണ്ഡലം, രംഗം എന്നിവയും വിവിധ തരത്തിലുള്ള രേഖീയമൂല്യ ഏകദങ്ങളും അവയുടെ രേഖാചിത്രങ്ങളും നിങ്ങൾക്ക് ഓർമയുണ്ടല്ലോ.

ലെഷ്യൂൺ ഡിറിഷ്‌ലെ
(1805-1859)

ബന്ധങ്ങൾ എന്ന ആശയം ഗണിതത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ളത് മലയാള ഭാഷയിലെ ബന്ധങ്ങൾ എന്ന പദം അർത്ഥമാക്കുന്ന അതേ ആശയത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതുതന്നെയാണ്. അതായത് രണ്ടു വസ്തുക്കളോ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടു അളവുകളോ തമ്മിലുള്ള പൊരുത്തം തിരിച്ചറിയത്തക്ക രീതിയിലാണ് ഇവിടെ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുള്ളത്.

ഒരു സ്കൂളിലെ പന്ത്രണ്ടാം ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ ഗണം A യും ആ സ്കൂളിലെ പതിനൊന്നാം ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ ഗണം B യും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ A യും B യും തമ്മിലുള്ള ചില ബന്ധങ്ങളുടെ ഉദാഹരണങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

(i) $\{(a, b) \in A \times B$: b യുടെ സഹോദരനാണ് $a\}$,

(ii) $\{(a, b) \in A \times B$: b യുടെ സഹോദരിയാണ് $a\}$,

(iii) $\{(a, b) \in A \times B$: a യുടെ വയസ് b യുടെ വയസിനേക്കാൾ കൂടുതലാണ്.$\}$,

(iv) $\{(a, b) \in A \times B$: വാർഷികപരീക്ഷയിൽ a യുടെ ആകെ മാർക്ക് b യുടെ ആകെ മാർക്കിനേക്കാൾ കുറവാണ്$\}$,

(v) $\{(a, b) \in A \times B$: a ജീവിക്കുന്നത് b ജീവിക്കുന്ന അതേ പ്രദേശത്താണ്$\}$.

മുകളിലെ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്ന് A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കുള്ള R എന്ന ബന്ധം $A \times B$ യുടെ ഒരു ഉപഗണം ആണ്. ക്രമജോടി $(a, b) \in R$ ആണെങ്കിൽ, "R എന്ന ബന്ധത്തിൽ a എന്നത് b യുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു" എന്നു പറയാം. ഇതിനെ $a\ R\ b$ എന്നെഴുതാം. പൊതുവായി $(a, b) \in R$ എന്നാൽ a യും b യും തിരിച്ചറിയത്തക്കവിധം ഒരു ബന്ധം ഉണ്ടോ എന്ന് നോക്കേണ്ടതില്ല.

പതിനൊന്നാം ക്ലാസിൽ പരിചയപ്പെട്ടതുപോലെ പ്രത്യേകതരം ബന്ധങ്ങളാണ് ഏകദങ്ങൾ. ഈ പാഠത്തിൽ വിവിധ തരത്തിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ ഏകദങ്ങൾ സമ്മിശ്ര ഏകദങ്ങൾ പ്രതിലോമ ഏകദങ്ങൾ ദ്വയാംഗ ക്രിയകൾ എന്നിവയെക്കുറിച്ചും പഠിക്കുന്നു.

1.2 വിവിധതരം ബന്ധങ്ങൾ

ഈ ഭാഗത്തിൽ വിവിധതരം ബന്ധങ്ങളെക്കുറിച്ചാണ് നമ്മൾ പഠിക്കുന്നത്. A എന്ന ഗണത്തിലെ ഒരു ബന്ധം എന്നത് $A \times A$ യുടെ ഒരു ഉപഗണമാണ് എന്ന് നമുക്കറിയാം.

കൂടുതൽ വ്യക്തമാക്കുന്നതിന്,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ എന്ന ഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു ബന്ധം ആണ് $R = \{(a, b): a - b = 10\}$. ഇവിടെ, (a, b) എന്ന ക്രമജോടികളിൽ ഒരെണ്ണം പോലും $a - b = 10$ എന്ന നിബന്ധന പാലിക്കുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് R എന്നത് ഒരു ശൂന്യഗണം ആയിരിക്കും.

എന്നാൽ $R' = \{(a, b) : |a - b| \geq 0\}$ എന്ന ബന്ധം പരിഗണിക്കുമ്പോൾ $A \times A$ യിലെ എല്ലാ ക്രമജോടി (a, b) യും $|a - b| \geq 0$ എന്ന നിബന്ധന പാലിക്കുന്നവയാണ്. അതുകൊണ്ട് $R' = A \times A$ ആണ്.

നിർവചനം 1: ഗണം A യിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ബന്ധം R നെ ശൂന്യബന്ധം (empty relation) എന്നു പറയണമെങ്കിൽ ഗണം A യിലെ ഒരംഗത്തിനും A യിലെ മറ്റേതൊരു അംഗത്തോടും ബന്ധം ഉണ്ടായിരിക്കരുത്. അതായത്, $R = \phi \subset A \times A$.

നിർവചനം 2: ഗണം A യിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ബന്ധം R നെ സമസ്തബന്ധം (universal relation) എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ, ഗണം A യിലെ ഓരോ അംഗത്തിനും A യിലെ എല്ലാ അംഗത്തോടും ബന്ധം ഉണ്ടായിരിക്കണം.

അതായത്, $R = A \times A$.

ശൂന്യബന്ധത്തെയും സമസ്തബന്ധത്തെയും സുവ്യക്ത ബന്ധങ്ങൾ (trivial relations) എന്നും വിളിക്കാം.

ഉദാഹരണം 1: ആൺകുട്ടികൾ മാത്രം പഠിക്കുന്ന ഒരു സ്കൂളിലെ എല്ലാ കുട്ടികളും ഉൾപ്പെടുന്ന ഗണമാണ് A എന്നിരിക്കട്ടെ. ഗണം A യിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ബന്ധം $R = \{(a, b) : a$ എന്നത് b യുടെ സഹോദരിയാണ്$\}$ ഒരു ശൂന്യബന്ധം ആണെന്നും $R' = \{(a, b) : a$ യും bയും തമ്മിലുള്ള ഉയരവ്യത്യാസം 3 മീറ്ററിൽ കുറവാണ്$\}$ ഒരു സമസ്തബന്ധം ആണെന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം: ഇത് ആൺകുട്ടികളുടെ സ്കൂൾ ആയത് കാരണം, ഈ സ്കൂളിലെ ഒരു കുട്ടിയ്ക്ക് ആ സ്കൂളിലെ മറ്റൊരു കുട്ടിയുടെ സഹോദരി ആകാൻ കഴിയില്ല. അതിനാൽ $R = \phi$, R ഒരു ശൂന്യബന്ധമാണ്. ഈ സ്കൂളിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് കുട്ടികൾ തമ്മിലുള്ള ഉയരവ്യത്യാസം എല്ലായ്പ്പോഴും 3 മീറ്ററിൽ കുറവായിരിക്കും എന്ന് വ്യക്തമാണ്. അതുകൊണ്ട് $R' = A \times A$ ഒരു സമസ്തബന്ധം ആണ്.

> **കുറിപ്പ്:** പതിനൊന്നാം ക്ലാസിൽ നാം ഒരു ബന്ധത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന രണ്ട് രീതികൾ കണ്ടിട്ടുണ്ട്. പട്ടികാരീതിയും, നിബന്ധനാരീതിയും. അതായത് $A = \{1, 2, 3, 4\}$ എന്ന ഗണത്തിലെ ഒരു ബന്ധം $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ എന്ന് നിബന്ധനാരീതിയിലും $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ എന്ന് പട്ടികാരീതിയിലും എഴുതാം.

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ സുപ്രധാന പങ്കുവഹിക്കുന്ന ഒരു ആശയമാണ് സമാനബന്ധം (equivalence relation.)

സമാനബന്ധത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുന്നതിന് ആദ്യം മറ്റ് മൂന്നുതരം ബന്ധങ്ങൾ അറിയേണ്ടതുണ്ട്. അവ പ്രതിസമം (Reflexive), സമമിതം (Symmetric), സാംക്രമികം (Transitive) എന്നിവയാണ്.

നിർവചനം 3: ഗണം A യിലെ ഒരു ബന്ധം R നെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ നിർവചിക്കാം.

(i) പ്രതിസമം (reflexive): ഗണം A യിലെ ഒരു ബന്ധം R ഒരു പ്രതിസമ ബന്ധം ആകണമെങ്കിൽ $\forall\ a \in A, (a, a) \in R$ ആകണം.

(ii) സമമിതം (symmetric): ഗണം A യിലെ ഒരു ബന്ധം R ഒരു സമമിത ബന്ധം ആകണമെങ്കിൽ $(a_1, a_2) \in R$ ആയാൽ

$(a_2, a_1) \in R$, ആയിരിക്കണം. ഇവിടെ $a_1, a_2 \in A$ ആണ്.

(iii) സാംക്രമികം (transitive): ഗണം A യിലെ ഒരു ബന്ധം R ഒരു സാംക്രമിക ബന്ധം ആകണമെങ്കിൽ എല്ലാ $(a_1, a_2) \in R$, $(a_2, a_3) \in R \Rightarrow (a_1, a_3) \in R$ ആയിരിക്കണം. ഇവിടെ $a_1, a_2, a_3 \in A$ ആണ്.

നിർവചനം 4: ഗണം A യിലെ ഒരു ബന്ധം R സമാനബന്ധം (equivalence relation) ആകണമെങ്കിൽ അത് പ്രതിസമത, സമമിതി, സാംക്രമികത എന്നിവ പാലിക്കണം.

ഉദാഹരണം : 2

T എന്നത് ഒരു തലത്തിലെ എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളുടെയും ഗണമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഈ ഗണത്തിലെ ഒരു ബന്ധം $R = \{(T_1, T_2) : T_1$ എന്നത് T_2 വിന് സർവസമം.$\}$ എന്നു തന്നിട്ടുണ്ട്. R ഒരു സമാനബന്ധം ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളും അവയോടു തന്നെ സർവസമം ആണ്. ഏതൊരു ത്രികോണം $T_1 \in T$, എടുത്താലും T_1 അതിനോടുതന്നെ സർവസമമാണ്, അതുകൊണ്ട് $(T_1, T_1) \in R$,

R ഒരു പ്രതിസമ ബന്ധം ആണ്.

$(T_1, T_2) \in R \Rightarrow T_1$ എന്നത് T_2 വിന് സർവസമം

$\Rightarrow T_2$ എന്നത് T_1 ന് സർവസമം

$\Rightarrow (T_2, T_1) \in R$

R ഒരു സമമിത ബന്ധം ആണ്.

$(T_1, T_2), (T_2, T_3) \in R$

$\Rightarrow T_1$ എന്നത് T_2 വിന് സർവ്വസമം, T_2 എന്നത് T_3 യ്ക്ക് സർവസമം

$\Rightarrow T_1$ എന്നത് T_3 യ്ക്ക് സർവ്വസമം

$\Rightarrow (T_1, T_3) \in R$.

R ഒരു സാംക്രമിക ബന്ധം ആണ്.

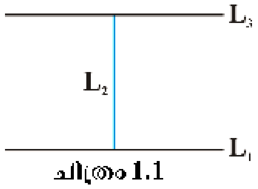
അതുകൊണ്ട് ബന്ധം R ഒരു സമാനബന്ധം ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 3

ഒരു തലത്തിലെ വരകളുടെ ഗണം L എന്നും, ആ ഗണത്തിലെ ഒരു ബന്ധം $R = \{(L_1, L_2) : L_2$ വിന് ലംബമാണ് $L_1\}$ ആണെന്നും ഇരിക്കട്ടെ. R സമമിതമാണെന്നും പ്രതിസമവും സാംക്രമികവും അല്ലെന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

(i) L_1 എന്ന വര അതിനോടുതന്നെ ലംബമായിരിക്കുകയില്ല. അതായത് $(L_1, L_1) \notin R$. അതുകൊണ്ട് ബന്ധം R പ്രതിസമം അല്ല.



ചിത്രം 1.1

(ii) $(L_1, L_2) \in R \Rightarrow L_2$ ന് ലംബമാണ് $L_1 \Rightarrow L_1$ ന് ലംബമാണ് L_2.

$\Rightarrow (L_2, L_1) \in R$, അതുകൊണ്ട് ബന്ധം R സമമിതം ആണ്.

(iii) L_2 വിനു ലംബമാണ് L_1. L_3 യ്ക്കു ലംബമാണ് L_2 എങ്കിൽ L_3 ക്ക് ലംബമാകില്ല L_1. L_3 ക്ക് സമാന്തരമായിരിക്കും L_1.

$(L_1, L_2) \in R, (L_2, L_3) \in R \Rightarrow (L_1, L_3) \notin R$.

R സാംക്രമികം അല്ല.

ഉദാഹരണം : 4

ഗണം $\{1, 2, 3\}$ ലെ ഒരു ബന്ധം $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ ആണ്. ഈ ബന്ധം പ്രതിസമം ആണെന്നും സമമിതവും സാംക്രമികവും അല്ലെന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

(1, 1), (2, 2), (3, 3) എന്നീ ക്രമജോടികൾ ബന്ധം R ൽ ഉള്ളതിനാൽ R പ്രതിസമമാണ്. ക്രമജോടി (1, 2) ∈ R ആണ്. എന്നാൽ (2, 1) ∉ R. അതുകൊണ്ട് R ഒരു സമമിത ബന്ധം അല്ല.

അതുപോലെ (1, 2) ∈ R, (2, 3) ∈ R ആണ്. എന്നാൽ (1, 3) ∉ R ആണ്. അതിനാൽ R സാംക്രമികമല്ല.

ഉദാഹരണം : 5

Z എന്ന പൂർണസംഖ്യാഗണത്തിലെ ഒരു ബന്ധം R നിർവ്വചിക്കുന്നത് $R = \{(a, b) : a - b$ യെ 2 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം$\}$ എന്നാണ്. R ഒരു സമാനബന്ധം ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$(a - a)$ യെ 2 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം. ഇത് എല്ലാ $a \in \mathbf{Z}$ നും ബാധകമാണ്. അതുകൊണ്ട് R പ്രതിസമമാണ്.

കൂടാതെ $(a, b) \in R \Rightarrow (a - b)$ യെ 2 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം.

$\Rightarrow (b - a)$ യെ 2 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം.

$\Rightarrow (b, a) \in R$, അതുകൊണ്ട് R സമമിതമാണ്.

ഇതുപോലെ $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ ആണെങ്കിൽ $(a - b)$ യെയും $(b - c)$ യെയും 2 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം. അപ്പോൾ $a - c = (a - b) + (b - c)$ എന്നതൊരു ഇരട്ടസംഖ്യ ആകും. അതായത് $(a - c)$ യെ 2 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം.

$(a, c) \in R$ ആകുന്നു. അതായത് R സാംക്രമികം ആണ്. അതുകൊണ്ട് R ഒരു സമാനബന്ധം ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 5 ൽ ബന്ധം R ൽ എല്ലാ ഇരട്ടസംഖ്യകളും പൂജ്യവുമായി ബന്ധമുള്ളതാണെന്ന കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കുക. $(0, \pm 2), (0, \pm 4) \in R$. എന്നാൽ ബന്ധം R ൽ ഒരു ഒറ്റസംഖ്യയും പൂജ്യവുമായി ബന്ധമുള്ളവയല്ല എന്നതും കാണാവുന്നതാണ്.

ഇതുപോലെ, ബന്ധം R ൽ എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളും 1 നോട് ബന്ധമുള്ളതും ഇരട്ടസംഖ്യകൾ ഒന്നും തന്നെ 1 നോട് ബന്ധമുള്ളവയല്ല എന്നതും ശ്രദ്ധിക്കുക.

പൂർണസംഖ്യകളുടെ ഗണമായ Z ന്റെ ഉപഗണങ്ങളായ ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ഗണം E യും ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗണം O യും താഴെ പറയുന്ന നിബന്ധനകൾ പാലിക്കുന്നു.

(i) E യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും പരസ്പരം ബന്ധമുള്ളവയാണ്. അതുപോലെ O യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും പരസ്പരം ബന്ധമുള്ളവയാണ്.

(ii) E യിലെ ഒരംഗത്തിനും O യിലെ ഒരംഗത്തോടും ബന്ധമില്ല, തിരിച്ചും അതുപോലെ തന്നെ.

(iii) E യും O യും വിയുക്ത ഗണങ്ങളാണ്. കൂടാതെ $\mathbf{Z} = E \cup O$ യും ആകുന്നു.

ഉപഗണം E യെ പൂജ്യം ഉൾപ്പെടുന്ന സമാനവിഭാഗം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ [0] എന്നു രേഖപ്പെടുത്താം. അതുപോലെ ഉപഗണം O യെ 1 ഉൾപ്പെടുന്ന സമാന വിഭാഗം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ [1] എന്ന് രേഖപ്പെടുത്താം. $[0] \neq [1]$, $[0] = [2r]$ അതുപോലെ $[1] = [2r + 1]$, എന്നിവ ആയിരിക്കും. ഇവിടെ $r \in \mathbf{Z}$ ആകുന്നു.

ഏതൊരു ഗണം X ലും എല്ലാ സമാനബന്ധം R നും മേൽപ്പറഞ്ഞ വസ്തുത ശരിയാണെന്നു കാണാം.

അതായത്, ഗണം X ലെ ഒരു സമാനബന്ധം R ആയാൽ ഗണം X നെ ബന്ധം R പരസ്പര വിയുക്ത ഉപഗണങ്ങൾ A_i ആയി വിഭജിക്കുന്നു.

ഇവിടെ A_i കളെ X ന്റെ ഉപവിഭാഗങ്ങൾ എന്നുവിളിക്കുന്നു.

ഇവ താഴെപ്പറയുന്നവ പാലിക്കുന്നു.

(i) A_i യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും പരസ്പരം ബന്ധമുള്ളവയാണ്. എല്ലാ i കൾക്കും ഇത് ബാധകമാണ്.

(ii) A_i യിലെ ഒരംഗവും A_j യിലെ ഒരംഗത്തോടും ബന്ധമില്ല, $i \neq j$.

(iii) $\cup A_j = X$; $A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$.

ഉപഗണങ്ങൾ A_i യെ സമാനവിഭാഗങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഈ പ്രത്യേകത മേൽപ്പറഞ്ഞതിന്റെ വിപരീതമായും വിശദീകരിക്കാം.

ഉദാഹരണത്തിന്

Z എന്ന ഗണത്തിന്റെ ഉപവിഭാഗങ്ങളായിട്ടുള്ള മൂന്നു പരസ്പര വിയുക്ത ഉപഗണങ്ങളാണ് A_1, A_2, A_3 എന്നിവ കൂടാതെ, അവയുടെ യോഗം **Z** ആണ്.

A_1 = {$x \in \mathbf{Z}$: x മൂന്നിന്റെ ഗുണിതമാണ്}

$= \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$

A_2 = {$x \in \mathbf{Z}$: $x - 1$ മൂന്നിന്റെ ഗുണിതമാണ്}

$= \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$

A_3 = {$x \in \mathbf{Z}$: $x - 2$ മൂന്നിന്റെ ഗുണിതമാണ്}

$= \{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$

Z എന്ന പൂർണസംഖ്യാഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു ബന്ധമാണ് R = {(a, b) : $a - b$ യെ 3 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം.} തുടർന്നുള്ള വാദങ്ങൾ ഉദാഹരണം 5 ൽ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയാണ്.

R ഒരു സമാനബന്ധം ആണ്. കൂടാതെ,

ഉപഗണം A_1 പൂജ്യത്തോട് ബന്ധപ്പെട്ടിട്ടുള്ള **Z** ലെ എല്ലാ സംഖ്യകളുമായും ഒരുമിക്കുന്നു. ഉപഗണം A_2, 1 നോട് ബന്ധപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഗണം **Z** ലെ എല്ലാ സംഖ്യകളുമായി ഒരുമിക്കുന്നു. ഗണം A_3, 2 നോട് ബന്ധപ്പെട്ടിട്ടുള്ള **Z** ലെ എല്ലാ സംഖ്യകളുമായി ഒരുമിക്കുന്നു.

അങ്ങനെ $A_1 = [0], A_2 = [1], A_3 = [2]$.

യഥാർഥത്തിൽ $A_1 = [3r], A_2 = [3r + 1]$ and $A_3 = [3r + 2]$, $r \in \mathbf{Z}$ ആകുന്നു. (ഇവിടെ r എന്നത് Z ലെ എല്ലാ സംഖ്യകളെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.)

ഉദാഹരണം : 6

ഗണം $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ലെ ഒരു ബന്ധമാണ് $R = \{(a, b) : a$ യും b യും ഒറ്റസംഖ്യയോ ഇരട്ടസംഖ്യയോ ആണ്$\}$. ഇതൊരു സമാനബന്ധമാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക. തുടർന്ന് $\{1, 3, 5, 7\}$ എന്ന ഉപഗണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ അന്യോന്യം ബന്ധമുള്ളതാണ് എന്നും, $\{2, 4, 6\}$ എന്ന ഉപഗണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ അന്യോന്യം ബന്ധമുള്ളതാണ് എന്നും തെളിയിക്കുക. എന്നാൽ ഇവയിൽ ഒരു ഉപഗണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ മറ്റേ ഉപഗണത്തിലെ ഒരംഗത്തോടും ബന്ധമുള്ളതല്ല എന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ഗണം A യിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരംഗമാണ് a എങ്കിൽ, a യും a യും ഒന്നുകിൽ ഇരട്ടയോ അല്ലെങ്കിൽ ഒറ്റയോ ആണ്. അതുകൊണ്ട് $(a, a) \in R$.

തുടർന്ന് $(a, b) \in R$

$\Rightarrow a$ യും b യും ഒന്നുകിൽ ഇരട്ടയോ അല്ലെങ്കിൽ ഒറ്റയോ ആകണം

$\Rightarrow b$ യും a യും ഒന്നുകിൽ ഇരട്ടയോ അല്ലെങ്കിൽ ഒറ്റയോ ആകണം.

$\Rightarrow (b, a) \in R$.

ഇതുപോലെ, $(a, b) \in R, (b, c) \in R$

$\Rightarrow a$ യും b യും c യും ഒരേ സമയം ഇരട്ടയോ അല്ലെങ്കിൽ ഒറ്റയോ ആകണം.

$\Rightarrow (a, c) \in R$.

അതുകൊണ്ട് R ഒരു സമാനബന്ധം ആണ്.

കൂടാതെ ഗണം $\{1, 3, 5, 7\}$ യിലെ അംഗങ്ങൾ ഒറ്റസംഖ്യകൾ ആയതിനാൽ ഇവ അന്യോന്യം ബന്ധമുള്ളവയാണ്. ഗണം $\{2, 4, 6\}$ യിലെ അംഗങ്ങൾ ഇരട്ടസംഖ്യകൾ ആയതിനാൽ ഇവ അന്യോന്യം ബന്ധമുള്ളവയാണ്. ഗണം $\{1, 3, 5, 7\}$ ഒറ്റസംഖ്യാഗണവും $\{2, 4, 6\}$, ഇരട്ടസംഖ്യാഗണവും ആയതിനാൽ ഇവയിലെ അംഗങ്ങൾ പരസ്പരം ബന്ധമുള്ളവയല്ല.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 1.1

1. ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന ബന്ധങ്ങൾ പ്രതിസമം, സമമിതം, സാംക്രമികം എന്നിവയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(i) $A = \{1, 2, 3, ..., 13, 14\}$ എന്ന ഗണത്തിലെ ബന്ധമാണ്

$$R = \{(x, y) : 3x - y = 0\}$$

(ii) **N** എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യാഗണത്തിലെ ബന്ധമാണ്

$$R = \{(x, y) : y = x + 5, x < 4\}$$

(iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ എന്ന ഗണത്തിലെ ബന്ധമാണ്

R = {(*x*, *y*) : *x* കൊണ്ട് *y* യെ നിശേഷം ഹരിക്കാം}

(iv) **Z** എന്ന പൂർണസംഖ്യാഗണത്തിലെ ബന്ധമാണ്

R = {(*x*, *y*) : *x*–*y* ഒരു പൂർണസംഖ്യയാണ്}.

(v) ഒരു നഗരത്തിൽ ഒരു പ്രത്യേക സമയത്തുള്ള ആളുകളുടെ ഗണം ആണ് A. ഗണം A യിലെ ഒരു ബന്ധം R ആകുന്നു

(a) R = {(*x*, *y*) : *x* ഉം *y* ഉം ഒരേ സ്ഥലത്ത് ജോലി ചെയ്യുന്നു}

(b) R = {(*x*, *y*) : *x* ഉം *y* ഉം ഒരേ പ്രദേശത്ത് താമസിക്കുന്നു}

(b) R = {(*x*, *y*) : *y* യേക്കാൾ കൃത്യം 7 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരം കൂടുതലാണ് *x* ന്}

(d) R = {(*x*, *y*) : *y* യുടെ ഭാര്യയാണ് *x*}

(e) R = {(*x*, *y*) : *y* യുടെ പിതാവാണ് *x*}

2. **R** എന്ന രേഖീയസംഖ്യാഗണത്തിലെ ഒരു ബന്ധം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത്. $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$. ബന്ധം R പ്രതിസമമോ സമമിതമോ സാംക്രമികമോ അല്ലെന്ന് തെളിയിക്കുക.

> രേഖീയസംഖ്യാ ഗണത്തിൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള പല ബന്ധങ്ങളുടേയും ചിത്രം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമല്ലോ. $y = x$ എന്ന വരയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും ഈ ചിത്രത്തിലുണ്ടെങ്കിൽ ബന്ധം പ്രതിസമമായിരിക്കും.
>
> $R = \{(a, b) : a \leq b^2,\ a, b \in R\}$ എന്ന ബന്ധത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചിത്രം വരച്ചു നോക്കൂ. ($x \leq y$^2 എന്ന input command നൽകിയാൽ മതി). $y = x$ എന്ന വരയും വരയ്ക്കുക. ഈ ബന്ധം പ്രതിസമമാണോ? ഈ ബന്ധം സമമിതമാണോ എന്ന് ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് പറയാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ?

3. ഗണം $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ലെ ബന്ധം $R = \{(a, b) : b \quad a + 1\}$ പ്രതിസമമോ സമമിതമോ സാംക്രമികമോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

4. രേഖീയസംഖ്യാഗണത്തിലെ ബന്ധം $R = \{(a, b) : a \leq b\}$, പ്രതിസമവും സമമിതവും ആണെന്നും സാംക്രമികമല്ലെന്നും തെളിയിക്കുക.

5. **R** എന്ന രേഖീയസംഖ്യാഗണത്തിലെ R = $\{(a, b) : a \leq b^3\}$ എന്ന ബന്ധം പ്രതിസമവും സമമിതവും സാംക്രമികവും ആണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.
6. ഗണം {1, 2, 3} യിലെ ബന്ധം R = {(1, 2), (2, 1)} സമമിതമാണെന്നും എന്നാൽ പ്രതിസമവും സാംക്രമികവും അല്ലെന്നും തെളിയിക്കുക.
7. ഒരു കോളേജ് ലൈബ്രറിയിലെ എല്ലാ പുസ്തകങ്ങളുടെയും ഗണമായ A യിലെ ഒരു ബന്ധമാണ് R = $\{(x, y) : x$ നും y ക്കും തുല്യ എണ്ണം പേജുകളാണ്$\}$. R ഒരു സമാനബന്ധമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.
8. A = {1, 2, 3, 4, 5} എന്ന ഗണത്തിലെ ബന്ധം R = $\{(a, b) : |a - b|$ ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്$\}$ എന്നത് സമാനബന്ധം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. ഗണം {1, 3, 5} എല്ലാ അംഗങ്ങളും പരസ്പരം ബന്ധമുള്ളവയാണ് എന്നും ഗണം {2, 4} എല്ലാ അംഗങ്ങളും പരസ്പരം ബന്ധമുള്ളവയാണ് എന്നും, പക്ഷെ {1, 3, 5} ലെയും {2, 4} ലെയും അംഗങ്ങൾ പരസ്പരം ബന്ധമുള്ളവയല്ല എന്നും തെളിയിക്കുക.
9. A = $\{x \in \mathbf{Z} : 0 \leq x \leq 12\}$, എന്ന ഗണത്തിലെ ബന്ധങ്ങൾ
   (i) R = $\{(a, b) : 4$ ന്റെ ഗുണിതമാണ് $|a - b|\}$
   (ii) R = $\{(a, b) : a = b\}$

   സമാനബന്ധങ്ങൾ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. മേൽപ്പറഞ്ഞ ഓരോ ബന്ധത്തിലും 1 നോട് ബന്ധമുള്ള അംഗങ്ങളുടെ ഗണം കണ്ടുപിടിക്കുക.
10. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബന്ധങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണം എഴുതുക.
    (i) സമമിതമാണ് എന്നാൽ പ്രതിസമവും സാംക്രമികവും അല്ല.
    (ii) സാംക്രമികമാണ് എന്നാൽ പ്രതിസമവും സമമിതവും അല്ല.
    (iii) പ്രതിസമവും സമമിതവുമാണ് എന്നാൽ സാംക്രമികം അല്ല.
    (iv) പ്രതിസമവും സാംക്രമികവുമാണ് എന്നാൽ സമമിതമല്ല.
    (v) സമമിതവും സാംക്രമികവും ആണ് എന്നാൽ പ്രതിസമം അല്ല.
11. ഒരു തലത്തിലെ (plane) ബിന്ദുക്കളുടെ ഗണമായ A യിലെ ഒരു ബന്ധമാണ് R = {(P, Q) : ആധാരബിന്ദുവിൽ (origin) നിന്ന് P യിലേക്കും Q വിലേക്കുമുള്ള അകലം തുല്യമാണ്}, ഇതൊരു സമാനബന്ധം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. ആധാരബിന്ദു അല്ലാത്ത P എന്ന ബിന്ദുവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ ഗണം കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവും P യിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും ആയ വൃത്തമാണെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.
12. A എന്ന എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളുടെയും ഗണത്തിലെ ബന്ധം R = $\{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ സദൃശത്രികോണങ്ങളാണ്$\}$, സമാനബന്ധം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. വശങ്ങൾ 3, 4, 5, ആയ ത്രികോണം T_1, വശങ്ങൾ 5, 12, 13 ആയ ത്രികോണം T_2, വശങ്ങൾ 6, 8, 10 ആയ ത്രികോണം T_3 എന്നിവ പരിഗണിച്ചാൽ T_1, T_2, T_3 എന്നിവയിൽ പരസ്പരം ബന്ധമുള്ളവ ഏതെല്ലാം?

13. ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ഗണമായ A യിലെ ബന്ധം R = {(P_1, P_2) : P_1 നും P_2 വിനും വശങ്ങളുടെ എണ്ണം തുല്യമാണ്}, ഒരു സമാനബന്ധം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. വശങ്ങൾ 3, 4, 5 ആയ മട്ടത്രികോണം T യോട് ബന്ധമുള്ള A യിലെ അംഗങ്ങളുടെ ഗണം ഏതാണ്?

14. XY തലത്തിലെ വരകളുടെ ഗണമാണ് L. ഈ ഗണത്തിലെ ബന്ധം R = {(L_1, L_2) : L_1 ന് സമാന്തരമാണ് L_2} സമാനബന്ധമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. $y = 2x + 4$ എന്ന വരയോട് ബന്ധമുള്ള വരകളുടെ ഗണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

15. ഗണം {1, 2, 3, 4} ലെ ഒരു ബന്ധമാണ് R = {(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4,4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)}. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയിൽ ശരിയായത് തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

(A) R പ്രതിസമവും സമമിതവുമാണ്; സാംക്രമികമല്ല.

(B) R പ്രതിസമവും സാംക്രമികവുമാണ്; സമമിതമല്ല.

(C) R സമമിതവും സാംക്രമികവുമാണ്; പ്രതിസമമല്ല.

(D) R സമാനബന്ധം ആണ്.

16. N എന്ന ഗണത്തിലെ ബന്ധം R = {$(a, b) : a = b - 2, b > 6$} ആണ്. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയിൽ ശരിയേത്?

(A) $(2, 4) \in R$ (B) $(3, 8) \in R$ (C) $(6, 8) \in R$ (D) $(8, 7) \in R$

1.3 വിവിധതരം ഏകദങ്ങൾ

ഏകദം എന്ന ആശയവും ചില പ്രത്യേകതരം ഏകദങ്ങളായ അനന്യ ഏകദം, സംഖ്യാ ഏകദം, ഭിന്നകഏകദം, കേവലവില ഏകദം, സിഗ്നം ഏകദം തുടങ്ങിയവയും അവയുടെ ഗ്രാഫും പതിനൊന്നാം ക്ലാസിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്.

രണ്ട് ഏകദങ്ങളുടെ സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നിവയും മുൻ ക്ലാസിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലും ഇതര വിഷയങ്ങളിലും പ്രതിപാദിക്കുന്നു എന്നതിനപ്പുറം ഏകദത്തിന്റെ ആശയം വളരെ പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്നു. മുൻ ക്ലാസിൽ പഠിച്ച അടിസ്ഥാന ഏകദങ്ങളുടെ തുടർച്ചയായി ഏകദങ്ങളെക്കുറിച്ച് കൂടുതൽ പഠിക്കുകയാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ.

ചുവടെ ചിത്രത്തിൽ നൽകിയിട്ടുള്ള f_1, f_2, f_3, f_4 എന്നീ ഏകദങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

ചിത്രം 1.2 ൽ f_1 എന്ന ഏകദത്തിൽ X_1 എന്ന ഗണത്തിലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങളുടെ പ്രതിബിംബങ്ങൾ വ്യത്യസ്തങ്ങളാണ്. എന്നാൽ f_2 എന്ന ഏകദത്തിലെ X_1 എന്ന ഗണത്തിലെ 1 ന്റെയും 2 ന്റെയും പ്രതിബിംബം b ആണ്. അതുപോലെ f_3 എന്ന ഏകദത്തിൽ X_2 എന്ന ഗണത്തിലെ e യും f ഉം X_1 എന്ന ഗണത്തിലെ ഒരംഗത്തിന്റെയും പ്രതിബിംബങ്ങൾ അല്ല. എന്നാൽ f_3 എന്ന ഏകദത്തിൽ X_3 എന്ന ഗണത്തിലെ ഓരോ അംഗവും X_1 എന്ന ഗണത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു അംഗത്തിന്റെ പ്രതിബിംബം ആണ്.

നിർവചനം 5: ഏകദം $f: X \to Y$ ഒന്നിനൊന്ന് (one-one അല്ലെങ്കിൽ injective) ആകണമെങ്കിൽ f എന്ന ഏകദത്തിനെ അടിസ്ഥാനമായി ഗണം X ലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങൾക്ക് ഗണം Y യിൽ വ്യത്യസ്ത പ്രതിബിംബങ്ങൾ ഉണ്ടാകണം.

അതായത്

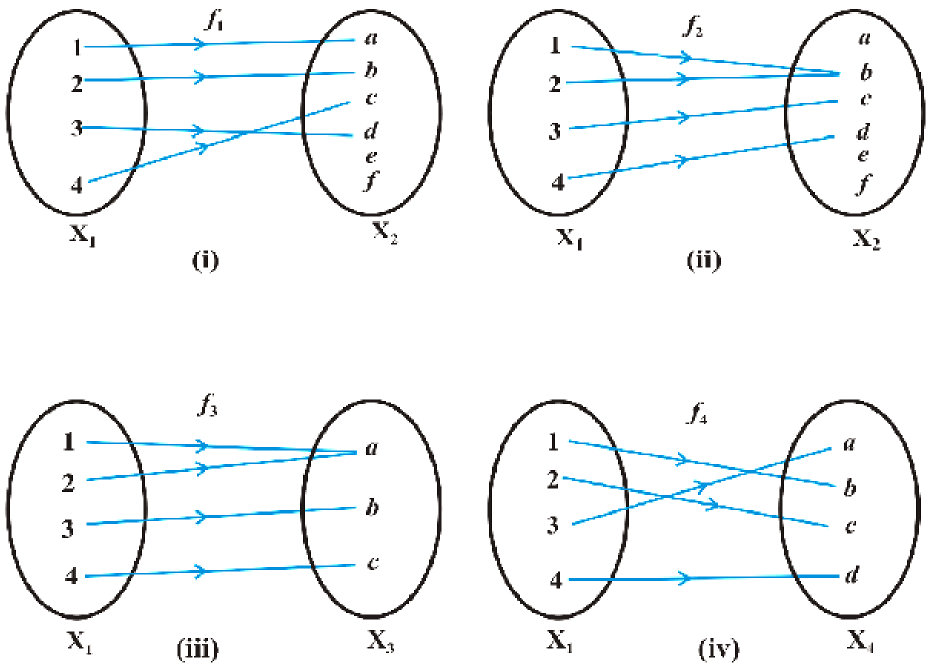
എല്ലാ $x_1, x_2 \in X$ നും $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ എന്നാകണം.

f ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദം അല്ലെങ്കിൽ അതിനെ പലതിനൊന്ന് ഏകദം (many-one) എന്നു വിളിക്കുന്നു.

ചിത്രം 1.2 ൽ ഏകദങ്ങൾ f_1, f_4 ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദവും f_2, f_3 പലതിനൊന്ന് ഏകദവുമാണ്.

നിർവചനം 6: ഏകദം $f: X \to Y$ പരിക്ഷേപം *(onto/surjective)* ആകണമെങ്കിൽ f എന്ന ഏകദത്തിനെ അടിസ്ഥാനമായി ഗണം Y ലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും ഗണം X ലെ ഏതെങ്കിലും ഒരംഗത്തിന്റെ പ്രതിബിംബം ആയിരിക്കണം. അതായത് എല്ലാ $y \in Y$ യ്ക്കും $f(x) = y$ ആകത്തക്കവിധം ഒരു $x \in X$ കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയണം.

ചിത്രം 1.2 (iii), (iv) ഏകദങ്ങൾ f_3, f_4 പരിക്ഷേപം ആണ്. എന്നാൽ f_1 എന്ന ഏകദം പരിക്ഷേപം അല്ല. കാരണം ഗണം X_2 ലെ e, f എന്നീ അംഗങ്ങൾ ഗണം X_1 ലെ ഒരംഗത്തിന്റെയും പ്രതിബിംബം അല്ല.



ചിത്രം 1.2 (i) - (iv)

കുറിപ്പ്

$f : X \rightarrow Y$ പരിക്ഷേപ ഏകദം ആണെങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം (if and only if) f ന്റെ രംഗം സഹമണ്ഡലത്തിന് തുല്യമാകും.

നിർവചനം 7: $f : X \rightarrow Y$ ഒരു ഉഭയക്ഷേപ ഏകദം (bijective function) എന്നു പറയണമെങ്കിൽ അതൊരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദവും പരിക്ഷേപ ഏകദവും ആകണം. ചിത്രം 1.2 (iv) ഏകദം f_4 ഉഭയക്ഷേപം ആണ്.

ഉദാഹരണം : 7

ഒരു സ്കൂളിലെ പത്താംക്ലാസിലെ 50 കുട്ടികളുടെ ഗണം A എന്നിരിക്കട്ടെ. ഏകദം $f : A \rightarrow \mathbf{N}$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(x) =$ x എന്ന വിദ്യാർത്ഥിയുടെ ക്രമനമ്പർ എന്നാണ്. f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദം ആണെന്നും പരിക്ഷേപ ഏകദം അല്ലെന്നും സ്ഥാപിക്കുക.

പരിഹാരം

ഒരു ക്ലാസിലെ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത കുട്ടികൾക്ക് ഒരേ ക്രമനമ്പർ ഉണ്ടാവില്ല. അതുകൊണ്ട് f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദം ആണ്. വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ക്രമനമ്പറുകൾ 1 മുതൽ 50 വരെ തുടർച്ചയായിട്ടാണെന്ന് നമുക്കു അനുമാനിക്കാം. ഇതിൽ നിന്നും 51 എന്ന നമ്പർ ആ ക്ലാസിലെ ഒരു കുട്ടിയുടെയും ക്രമനമ്പർ അല്ല എന്ന് മനസിലാക്കാം. അതുകൊണ്ട് ഏകദം f ൽ 51 എന്നത് ഗണം X ലെ ഒരു അംഗത്തിന്റെയും പ്രതിബിംബം ആകില്ല. അതിനാൽ f ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമല്ല.

ഉദാഹരണം : 8

ഏകദം $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(x) = 2x$, എന്നാണ്. ഇതൊരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമാണെന്നും പരിക്ഷേപ ഏകദമല്ല എന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$f(x) = 2x$ ആണ്. ഇവിടെ

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

അതായത്, f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമാകുന്നു. $1 \in \mathrm{N}$ ന് $f(x) = 2x = 1$. പാലിക്കുന്ന ഒരു x വിലയും N എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യാഗണത്തിൽ ഇല്ല. അതിനാൽ f ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമല്ല.

$y = f(x)$ ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമാണോ എന്ന് ഗ്രാഫിൽ നിന്ന് മനസ്സിലാക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഏതെങ്കിലും വര ഗ്രാഫിനെ ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നുണ്ടെങ്കിൽ ആ ഏകദം ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദം ആയിരിക്കില്ല.

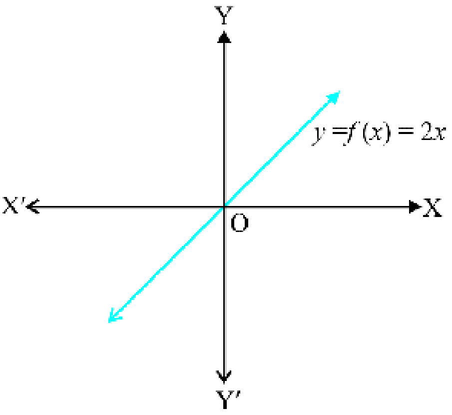
$\dfrac{2x-3}{x-1}, \dfrac{2x^2-3}{x^2-1}, \left(\dfrac{2x-3}{x-1}\right)^2, \dfrac{2x^3-3}{x-1}$ എന്നീ ഏകദങ്ങൾ ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദങ്ങളാണോ എന്ന് പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ.

ഉദാഹരണം 9: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x$ എന്ന് നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഏകദം ഒന്നിനൊന്ന് പരിക്ഷേപം ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം: $f(x) = 2x$ എന്നു തന്നിട്ടുണ്ട്. ഇവിടെ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. അതുകൊണ്ട് f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമാണ്.

കൂടാതെ,

സഹമണ്ഡലം R ലെ ഏതൊരു y ക്കും മണ്ഡലം R ൽ ഒരു വിലോമ പ്രതിബിംബം (pre image) $\frac{y}{2}$ ഉണ്ട്.



ചിത്രം 1.3

കൂടാതെ $f\left(\frac{y}{2}\right) = 2\left(\frac{y}{2}\right) = y$. അതുകൊണ്ട്, f ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമമാണ്.

ഉദാഹരണം : 10

ഏകദം $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത്, $f(1)$ $f(2) = 1$. കൂടാതെ എല്ലാ $x > 2$, $f(x)$ $x - 1$ എന്നാണ്. f ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമാണെന്നും ഒന്നിനൊന്നു ഏകദമല്ലെന്നും സ്ഥാപിക്കുക.

പരിഹാരം

$f(1) = 1, f(2) = 1$ ആണ്. അതായത് 1 ന്റെയും 2 ന്റെയും പ്രതിബിംബം 1 ആയതിനാൽ f ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമല്ല.

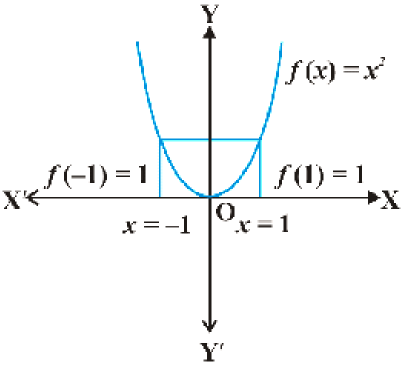
$y \neq 1$, ആയ $y \in$ N തന്നാൽ നമുക്ക് $x = y + 1$ എന്നെടുക്കാം.

അങ്ങനെ $f(y + 1) = y$ $1 - 1 = y$ എന്നു കിട്ടും.

സഹമണ്ഡലം N ലെ ഏതൊരു $y + 1$ നും മണ്ഡലം N ൽ ഒരു y ഉണ്ട്. അതോടൊപ്പം $1 \in$ N ന് $f(1) = 1$ ആണ്. അതുകൊണ്ട് f ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമാണ്.

ഉദാഹരണം : 11

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, എന്ന ഏകദം നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(x) = x^2$, എന്നാണ്. f ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമോ ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമോ അല്ലെന്ന് തെളിയിക്കുക.



ചിത്രം 1.4

പരിഹാരം

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ൽ $f(x) = x^2$ ആണ്.

അതുകൊണ്ട് $f(-1) = (-1)^2 = 1$, $f(1) = 1^2 = 1$

$f(-1) = 1 = f(1)$ ആയതുകൊണ്ട് f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമല്ല. സഹമണ്ഡലം R ലെ ന്യൂന സംഖ്യകൾക്ക് ഒന്നും തന്നെ വിലോമ പ്രതിബിംബം ഇല്ല. അതുകൊണ്ട് f ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമല്ല.

ഉദാഹരണം 12 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, എന്ന ഏകദം,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \text{ ഒറ്റസംഖ്യയാണെങ്കിൽ} \\ x-1, & x \text{ ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ} \end{cases}$$

ആയാൽ f ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദവും പരിക്ഷേപ ഏകദവും ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം: $f(x_1) = f(x_2)$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. x_1 ഒറ്റ സംഖ്യയാണെന്നും, x_2 ഇരട്ട സംഖ്യയാണെന്നും വിചാരിക്കുക. അപ്പോൾ $x_1 + 1 = x_2 - 1$ എന്നെഴുതാം. അതായത് $x_2 - x_1 = 2$. ഇത് അസാധ്യമാണ്, കാരണം ഇരട്ടസംഖ്യയുടെയും ഒറ്റസംഖ്യയുടെയും വ്യത്യാസം ഇരട്ടസംഖ്യ ആവില്ല. അതുപോലെ x_2 ഒറ്റസംഖ്യയും x_1 ഇരട്ട സംഖ്യയും ആയാലും ഇത് അസാധ്യമാണ്. അതുകൊണ്ട് x_1, x_2 എന്നിവ ഒന്നുകിൽ ഇരട്ടയോ അല്ലെങ്കിൽ ഒറ്റയോ ആയിരിക്കും.

x_1, x_2 എന്നിവ ഒറ്റസംഖ്യകൾ ആയാൽ

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ ആയിരിക്കും.

ഇതുപോലെ x_1, x_2 എന്നിവ ഇരട്ടസംഖ്യകൾ ആയാൽ

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ ആയിരിക്കും. ഇപ്രകാരം f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമായിരിക്കും.

കൂടാതെ

സഹമണ്ഡലം N ലെ $2r + 1$ എന്ന ഒറ്റസംഖ്യ, മണ്ഡലം **N** ലെ $2r + 2$ എന്ന ഇരട്ടസംഖ്യയുടെ പ്രതിബിംബം ആണ്.

സഹമണ്ഡലം **N** ലെ $2r$ എന്ന ഇരട്ടസംഖ്യ, മണ്ഡലം **N** ലെ $2r - 1$ എന്ന ഒറ്റസംഖ്യയുടെ പ്രതിബിംബം ആണ്.

ഇപ്രകാരം f ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമാണ്.

ഉദാഹരണം : 13

$f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ എന്ന ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദം എല്ലായ്പ്പോഴും ഒന്നിനൊന്ന് ആയിരിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമല്ല എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക. അപ്പോൾ മണ്ഡലത്തിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു അംഗങ്ങൾക്ക് (1 നും 2 നും എന്നിരിക്കട്ടെ) സഹമണ്ഡല ത്തിൽ ഒരു പ്രതിബിംബവും അതുപോലെ ഏകദം fന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ 3 എന്ന അംഗത്തിന് മറ്റൊരു പ്രതിബിംബവും ഉണ്ടാവും. അതുകൊണ്ട് രംഗത്തിൽ രണ്ട് അംഗങ്ങളേ പരമാവധി ഉണ്ടാവൂ. അപ്പോൾ രംഗം ≠ സഹമണ്ഡലം എന്നാകും. ഇത് കാണിക്കുന്നത് f ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദം അല്ല എന്നാണ്. ഇതൊരു വൈരുധ്യം ആണ്. അതുകൊണ്ട് നമ്മുടെ സങ്കൽപ്പം തെറ്റാണ്.

അതുകൊണ്ട് f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 14

$f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ എന്ന ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദം തീർച്ചയായും. ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമായിരിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

f ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമായതിനാൽ മണ്ഡലത്തിലെ മൂന്ന് അംഗങ്ങൾക്കും മൂന്ന് വ്യത്യസ്ത പ്രതിബിംബങ്ങൾ സഹമണ്ഡലത്തിൽ ഉണ്ടാവണം. അതായത്, രംഗം = സഹമണ്ഡലം ആയിരിക്കും. അതിനാൽ f ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമായിരിക്കും.

കുറിപ്പ്:

ഉദാഹരണം 13 , 14 ൽ പരാമർശിച്ച ആശയങ്ങൾ എല്ലാ പരിമിതഗണം X നും ശരിയാണ്. അതായത് X ഒരു പരിമിതഗണം ആയാൽ $f: X \rightarrow X$ എന്ന ഒന്നിനൊന്ന് ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമായിരിക്കും. അതുപോലെ ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദം $f: X \rightarrow X$ ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദവുമായിരിക്കും.

ഇതിനു വിപരീതമായി, ഉദാഹരണങ്ങൾ 8, 10 എന്നിവ വ്യക്തമാക്കുന്നത് മേൽപ്പറഞ്ഞ ആശയം അനന്തഗണത്തിന് ശരിയാകണമെന്നില്ല എന്നതാണ്. ഇതാണ് പരിമിതഗണവും അനന്തഗണവും തമ്മിലുള്ള സവിശേഷമായ ഒരു വ്യത്യാസം.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 1.2

1. ഏകദം $f: \mathbf{R}_* \rightarrow \mathbf{R}_*$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(x) = \frac{1}{x}$ എന്നാണ്. ഇതൊരു ഒന്നിനൊന്ന് പരിക്ഷേപ (ഉഭയക്ഷേപ) ഏകദമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. ($\mathbf{R}_* = \mathbf{R} - \{0\}$). f എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം $\mathbf{R}_*$ നു പകരം $\mathbf{N}$ എന്നും സഹമണ്ഡലം $\mathbf{R}_*$ എന്നും പരിഗണിച്ചാൽ ഈ ഫലം ശരിയാകുമോ?

2. ചുവടെ തന്നിട്ടുള്ള ഏകദങ്ങൾ ഒന്നിനൊന്നാണോ, പരിക്ഷേപമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(i) $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = x^2$

(ii) $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = x^2$

(iii) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$

(iv) $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = x^3$

(v) $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = x^3$

3. വൻപൂർണസംഖ്യാഏകദം $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = [x]$ ഒന്നിനൊന്നോ പരിക്ഷേപമോ അല്ല എന്നു തെളിയിക്കുക. $[x]$ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് x അല്ലെങ്കിൽ x ന്റെ തൊട്ടു താഴെയുള്ള പൂർണസംഖ്യയെ ആണ്.

4. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, എന്ന കേവലവില ഏകദം (Modulus function) ഒന്നിനൊന്നോ പരിക്ഷേപമോ അല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

5. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ എന്ന സിഗ്നം ഏകദം ഒന്നിനൊന്നോ പരിക്ഷേപമോ അല്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.

6. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ആയാൽ $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമാണെന്നു സമർഥിക്കുക.

7. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങൾ ഒന്നിനൊന്ന്, പരിക്ഷേപ, ഉഭയക്ഷേപ ഏകദങ്ങളാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം സാധൂകരിക്കുക.

(i) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(x) = 3 - 4x$

(ii) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(x) = 1 + x^2$

8. A, B എന്നിവ ഗണങ്ങളായാൽ $f: A \times B \to B \times A$, $f(a, b) = (b, a)$ ഒരു ഉഭയക്ഷേപ ഏകദം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

9. $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ ഒറ്റസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, } n \in \mathbf{N} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, } n \in \mathbf{N} \end{cases}$

എന്നാണ്. f ഉഭയക്ഷേപ ഏകദമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം സാധൂകരിക്കുക.

10. $A = \mathbf{R} - \{3\}, B = \mathbf{R} - \{1\}$ ആയാൽ $f : A \to B$ എന്ന ഏകദം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$. f ഒന്നിനൊന്ന് ആണോ; പരിക്ഷേപം ആണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം സാധൂകരിക്കുക.

11. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4$ എന്ന ഏകദത്തെ സംബന്ധിച്ച് ശരിയായത് ഏത്?
    (A) f ഒന്നിനൊന്ന് പരിക്ഷേപം (B) f പലതിനൊന്ന്, പരിക്ഷേപം
    (C) f ഒന്നിനൊന്ന് ആണ് എന്നാൽ പരിക്ഷേപം അല്ല
    (D) f ഒന്നിനൊന്നല്ല; പരിക്ഷേപം അല്ല.

12. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x$ എന്ന ഏകദത്തിന് ശരിയായത് ഏത്?
    (A) f ഒന്നിനൊന്ന് പരിക്ഷേപം (B) f പലതിനൊന്ന് പരിക്ഷേപം
    (C) f ഒന്നിനൊന്ന് ആണ് എന്നാൽ പരിക്ഷേപം അല്ല
    (D) f ഒന്നിനൊന്നല്ല; പരിക്ഷേപമല്ല

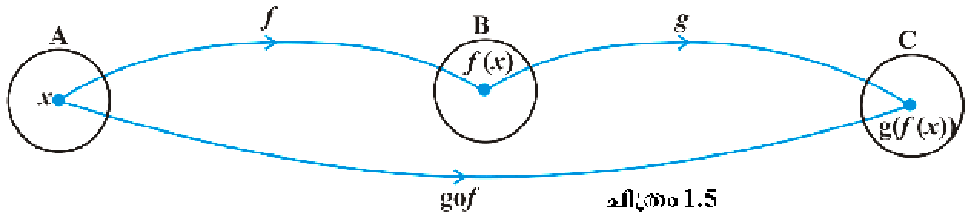
1.4 സമ്മിശ്ര ഏകദവും പ്രതിലോമ ഏകദവും

ഈ ഭാഗത്ത് സമ്മിശ്ര ഏകദത്തെക്കുറിച്ചും (composite function) ഉഭയക്ഷേപ ഏകദത്തിന്റെ പ്രതിലോമത്തെയും (inverse) കുറിച്ചുമാണ് പഠിക്കുന്നത്.

2006 ലെ പത്താംക്ലാസ് പൊതു പരീക്ഷ എഴുതിയ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ ഗണത്തെ A എന്നെടുക്കാം. ഒരോ വിദ്യാർത്ഥിയും പരീക്ഷാ ബോർഡ് നിർദ്ദേശിച്ചിട്ടുള്ള ക്രമ നമ്പർ ഉത്തരകടലാസിൽ എഴുതുന്നു. പരീക്ഷയുടെ രഹസ്യസ്വഭാവം സൂക്ഷിക്കുന്നതിനായി പരീക്ഷാബോർഡ് യഥാർത്ഥ നമ്പറുകൾ മറച്ചുവച്ച് അപര ക്രമനമ്പർ നൽകുന്നു. ഇവിടെ $B \subset \mathbf{N}$ യഥാർഥ ക്രമനമ്പറുകളുടെ ഗണവും $C \subset \mathbf{N}$ എന്നത് അപരക്രമനമ്പറുകളുടെ ഗണവും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. $f : A \to B$ എന്നും $g : B \to C$ എന്നും നിർവചിക്കാം. അതായത് $f(a)$ എന്നത് a എന്ന കുട്ടിയുടെ യഥാർത്ഥ ക്രമ നമ്പർ ആകുന്നു. ഇവിടെ $f(a) = b$ ആയാൽ $g(b)$ എന്നത് b എന്ന യഥാർത്ഥ ക്രമനമ്പറിന്റെ അപരക്രമനമ്പർ എന്നും നിർവചിക്കുന്നു. പരീക്ഷ എഴുതുന്ന വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് യഥാർത്ഥ ക്രമനമ്പർ നൽകുന്ന പ്രക്രിയ ഏകദം f ഉം യഥാർഥ ക്രമനമ്പറിന്റെ അപരക്രമനമ്പർ നൽകുന്ന പ്രക്രിയ, ഏകദം g ഉം ആണ്. ഈ രണ്ടു പ്രക്രിയകളുടെ സംയോജനത്തിലൂടെ ഓരോ വിദ്യാർത്ഥിക്കും ഒരു അപരക്രമനമ്പർ നൽകുന്നു എന്ന പ്രക്രിയ രൂപപ്പെടുന്നു.

നിർവചനം 8: $f : A \to B$ യും $g : B \to C$ യും രണ്ട് ഏകദങ്ങളായാൽ f ന്റെയും g യുടെയും സമ്മിശ്ര ഏകദം gof എന്നത് നിർവചിക്കുന്നത് $gof : A \to C$ എന്നാണ്. ഇവിടെ എല്ലാ $x \in A$ ക്കും $gof(x) = g(f(x))$ ആണ്.

> f, g എന്നിവ രണ്ടു ഏകദങ്ങളായാൽ fog എന്ന ഏകദം ലഭിക്കാൻ $f(g(x))$ എന്ന command നൽകിയാൽ മതി.
>
> f നും g ക്കും വ്യത്യസ്ത ഉദാഹരണങ്ങൾ സ്വീകരിച്ച് fog, gof എന്നിവ നിർമിച്ചു നോക്കൂ. fog യും gof ഉം തുല്യമാണോ?

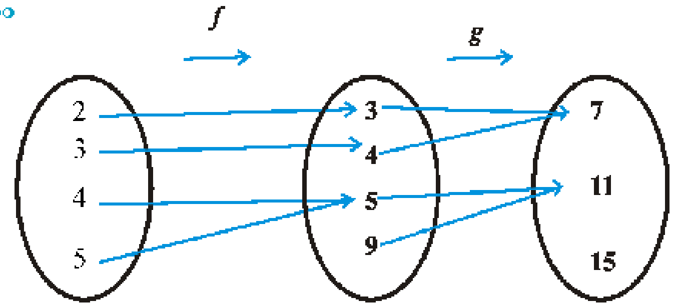


ചിത്രം 1.5

ഉദാഹരണം : 15

$f: \{2, 3, 4, 5\} \to \{3, 4, 5, 9\}$, $g: \{3, 4, 5, 9\} \to \{7, 11, 15\}$ എന്നീ ഏകദങ്ങൾ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = f(5) = 5, g(3) = g(4) = 7, g(5) = g(9) = 11$ എന്നിങ്ങനെയാണ്. gof കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം



ചിത്രം 1.6

$gof(2) = g(f(2)) = g(3) = 7$
$gof(3) = g(f(3)) = g(4) = 7,$
$gof(4) = g(f(4)) = g(5) = 11$
$gof(5) = g(f(5)) = g(5) = 11$

ഉദാഹരണം : 16

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ എന്നീ ഏകദങ്ങൾ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(x) = \cos x$, $g(x) = 3x^2$ എന്നിങ്ങനെയാണ്. gof ഉം fog ഉം കണ്ടുപിടിക്കുക. $gof \neq fog$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

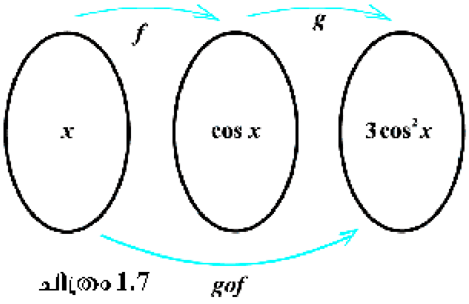
$f(x) = \cos x$, $g(x) = 3x^2$ ആണ്.

$gof(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = 3 (\cos x)^2$
$= 3 \cos^2 x.$

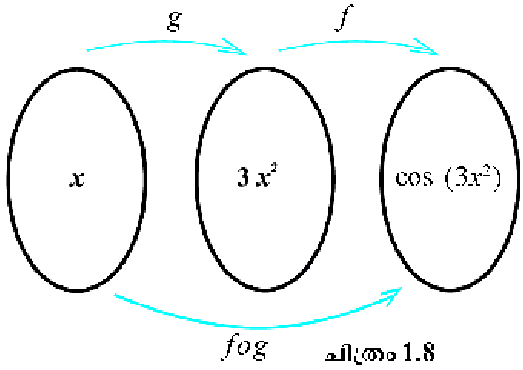
$fog(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = \cos (3x^2).$

$3\cos^2 x \neq \cos 3x^2,$

അതുകൊണ്ട് $gof \neq fog.$



ചിത്രം 1.7



ചിത്രം 1.8

ഉദാഹരണം : 17

ഏകദങ്ങൾ $f:\mathbf{R}-\left\{\frac{7}{5}\right\}\to\mathbf{R}-\left\{\frac{3}{5}\right\}$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(x)=\frac{3x+4}{5x-7}$ എന്നും $g:\mathbf{R}-\left\{\frac{3}{5}\right\}\to\mathbf{R}-\left\{\frac{7}{5}\right\}$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $g(x)=\frac{7x+4}{5x-3}$, എന്നുമാണ്. $fog = I_A$ എന്നും $gof = I_B$ എന്നും തെളിയിക്കുക; ഇവിടെ $A=\mathbf{R}-\left\{\frac{3}{5}\right\}, B=\mathbf{R}-\left\{\frac{7}{5}\right\}$ ആണ്; $I_A(x)=x,\ \forall x\in A, I_B(x)=x,\ \forall x\in B$ എന്നിവ യഥാക്രമം A യിലെയും B യിലെയും അനന്യ ഏകദങ്ങൾ ആണ്.

പരിഹാരം

$$gof(x)=g\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right)=\frac{7\left(\frac{(3x+4)}{(5x-7)}\right)+4}{5\left(\frac{(3x+4)}{(5x-7)}\right)-3}$$

$$=\frac{21x+28+20x-28}{15x+20-15x+21}=\frac{41x}{41}=x$$

അതുപോലെ,

$$fog(x)=f\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right)=\frac{3\left(\frac{(7x+4)}{(5x-3)}\right)+4}{5\left(\frac{(7x+4)}{(5x-3)}\right)-7}$$

$f(x)=\frac{3x+4}{5x-7}$, $g(x)=\frac{7x+4}{5x-3}$ എന്നീ ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. $f(g(x))$ എന്ന command നൽകിനോക്കൂ. എന്താണ് ലഭിക്കുന്നത്? $g(f(x))$ എന്ന് നൽകിയാലോ? a, b, c, d എന്നീ പേരുകളിൽ സ്ലൈഡറുകൾ നിർമിച്ച് $f(x)=\frac{ax+b}{cx-d}$, $g(x)=\frac{dx+b}{cx-a}$ എന്നീ ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ വരയ്ക്കുക. $f(g(x))$, $g(f(x))$ എന്നിവ കണ്ടുനോക്കൂ.

$$= \frac{21x+12+20x-12}{35x+20-35x+21} = \frac{41x}{41} = x$$

അങ്ങനെ, $gof(x) = x,\ \forall x \in B$ യും $fog(x) = x,\ \forall x \in A$ യും ആണെന്നു കിട്ടി. അതുകൊണ്ട് $gof = I_B$ യും $fog = I_A$ യും ആണ്.

ഉദാഹരണം : 18

ഏകദങ്ങൾ $f : A \to B$; $g : B \to C$ എന്നിവ ഒന്നിനൊന്ന് ആണെങ്കിൽ $gof : A \to C$ ഒന്നിനൊന്ന് ആയിരിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$gof(x_1) = gof(x_2)$ ആണെന്നു കരുതുക.

$\Rightarrow\ g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\Rightarrow\ f(x_1) = f(x_2)$, [$g$ ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദം.]

$\Rightarrow\ x_1 = x_2$, [f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദം]

അതുകൊണ്ട് gof ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദം ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 19

$f : A \to B$; $g : B \to C$ എന്നിവ പരിക്ഷേപ ഏകദങ്ങളായാൽ $gof : A \to C$ പരിക്ഷേപ ഏകദമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

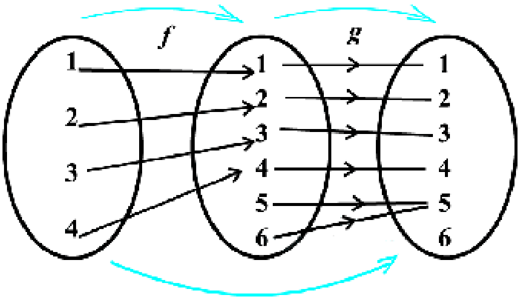
പരിഹാരം

ഗണം C യിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു അംഗം $z \in C$ ആണെന്നു കരുതാം. g ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമായതുകൊണ്ട് z ന്റെ വിലോമപ്രതിബിംബം $y \in B$ ഉണ്ടായിരിക്കും. അതായത് $g(y)$ z. ഇതുപോലെ f ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമായതുകൊണ്ട് ഏതൊരു $y \in B$ ക്കും ഒരു വിലോമപ്രതിബിംബം $x \in A$ ഉണ്ടായിരിക്കും.

അതായത് $f(x)$ y, $gof(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, അതിനാൽ gof ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമാണ്.

ഉദാഹരണം : 20

f, g രണ്ട് ഏകദങ്ങളും ഇവയുടെ സമ്മിശ്ര ഏകദമായ gof ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദവും ആയാൽ f, g നിർബന്ധമായും ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദങ്ങൾ ആകണമെന്നുണ്ടോ?



ചിത്രം 1.9 gof

പരിഹാരം

$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ എന്ന ഏകദം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = x,\ \forall x$ എന്നാണ്. കൂടാതെ $g : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ എന്ന ഏകദം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $x = 1, 2, 3, 4$ ന് $g(x)$ x എന്നും $g(5) = g(6) = 5$ എന്നും ആണെങ്കിൽ $gof(x) = x$ $\forall x$, ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമാണ്. എന്നാൽ g ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമല്ല. (ചിത്രം 1.9 ശ്രദ്ധിക്കുക)

ഉദാഹരണം : 21

gof ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമാണെങ്കിൽ f, g പരിക്ഷേപ ഏകദങ്ങളാകേണ്ടത് അനിവാര്യമാണോ?

പരിഹാരം

$f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, $g: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ എന്നീ ഏകദങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. ഇവ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത്; $f(1) = 1, f(2) = 2,\ f(3) = f(4) = 3, g(1) = 1, g(2) = 2,$ $g(3) = g(4) = 3$ എന്നുമാണെങ്കിൽ

ഇതിൽ നിന്നും, gof പരിക്ഷേപ ഏകദമാണെന്നും f പരിക്ഷേപ ഏകദമല്ലെന്നും വ്യക്തമാണ്.

> **കുറിപ്പ് :**
> gof ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമായാൽ f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമാണെന്നും gof ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമായാൽ g ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദമാണെന്നും ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിശോധിച്ച് ഉറപ്പാക്കാവുന്നതാണ്.

ഈ പാഠഭാഗത്ത് ആദ്യം സൂചിപ്പിച്ച പത്താംതരം പൊതുപരീക്ഷ പരാമർശിച്ചതിലെ f, g എന്ന ഏകദങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുന്നത് നോക്കാം. f എന്ന ഏകദം പത്താംതരം പൊതുപരീക്ഷ എഴുതുന്ന വിദ്യാർഥികൾക്ക് നൽകുന്ന യഥാർത്ഥ ക്രമനമ്പർ ആണ്. g എന്ന ഏകദം യഥാർഥ ക്രമനമ്പറുകൾക്ക് നൽകുന്ന അപര ക്രമനമ്പർ എന്നതുമാണ്. മൂല്യനിർണയം നടത്തിയശേഷം പരിശോധകൻ വിദ്യാർഥികളുടെ മാർക്കുകൾ അവരുടെ അപരക്രമനമ്പരിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു. പരീക്ഷ ബോർഡ് g യുടെ വിപരീത ദിശയിൽ മാർക്ക് യഥാർഥ ക്രമനമ്പറിലേക്ക് മാറ്റുന്നു. തുടർന്ന് f ന്റെ വിപരീതമായി യഥാർഥ ക്രമനമ്പരിൽ നിന്നും വിദ്യാർഥിയിലേക്ക് മാറ്റുന്നു.

ഇവിടെ gof ലഭിക്കാൻ ആദ്യം പ്രക്രിയ f ഉം പിന്നെ പ്രക്രിയ g യും ചെയ്യണം. അതേസമയം gof ന്റെ വിപരീത പ്രക്രിയയിൽ ആദ്യം g യുടെ വിപരീത പ്രക്രിയയും പിന്നെ f ന്റെ വിപരീത പ്രക്രിയയും ചെയ്യണം.

ഉദാഹരണം : 22

ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദവും പരിക്ഷേപ ഏകദവും ആയ $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(1) = a, f(2) = b$, $f(3) = c$ എന്നിങ്ങനെ ആണ്. $gof = I_X$ ഉം $fog = I_Y$ യും ആയ ഒരു ഏകദം $g: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ ഉണ്ടായിരിക്കും എന്നു തെളിയിക്കുക. ഇവിടെ $X = \{1, 2, 3\}$ യും $Y = \{a, b, c\}$ യും ആണ്.

പരിഹാരം

$f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ എന്ന ഏകദത്തിൽ $f(1) = a, f(2) = b,\ f(3) = c$ എന്നത് ഒരു ഒന്നിനൊന്നും പരിക്ഷേപ ഏകദവും ആയതുകൊണ്ട്

$g: \{a, b, c,\} \rightarrow \{1, 2,3\}$ ഇങ്ങനെ നിർവചിക്കാം.

$g(a) = 1,\ g(b) = 2,\ g(c) = 3$

അതുകൊണ്ട്

$$gof(1) = g\left(f(1)\right) = g(a) = 1$$

$$gof(2) = g\left(f(2)\right) = g(b) = 2$$

$$gof(3) = g\left(f(3)\right) = g(c) = 3$$

$\therefore gof = I_X$ ആയിരിക്കും

കൂടാതെ

$fog(a) = f\left(g(a)\right) = f(1) = a$, $fog(b) = b$, $(fog)(c) = c$

$\therefore fog = I_Y$ ആയിരിക്കും.

I_X, I_Y എന്നിവ X ന്റെയും Y യുടെയും അനന്യ ഏകദങ്ങളാണ്

കുറിപ്പ്

മേൽപ്പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിന്റെ ഉത്തരം $f : X \to Y$. ഏതൊരു ഒന്നിനൊന്ന് പരിക്ഷേപ ഏകദത്തിനും ശരിയാണ്. കൂടാതെ തിരിച്ചും ഇതു ശരിയാണ്. അതായത് $f : X \to Y$ ഒരു ഏകദം ആയാൽ ഒരു $g : Y \to X$ ഉണ്ടാവുകയും $gof = I_X$, $fog = I_Y$, ആകുകയും ചെയ്താൽ f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് പരിക്ഷേപ ഏകദമായിരിക്കും.

ഈ പരാമർശം അടുത്ത നിർവചനത്തിലേക്കു നയിക്കുന്നു.

നിർവചനം 9: $f : X \to Y$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദമാകണം $g : Y \to X$ എങ്കിൽ $gof = I_X$, $fog = I_Y$ യും ആയിരിക്കണം. ഇതിൽ g യെ f ന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദം എന്നു വിളിക്കുന്നു, f^{-1} എന്ന് രേഖപ്പെടുത്തുന്നു.

f പ്രതിലോമ്യം (invertible) ആകണമെങ്കിൽ f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദവും, പരിക്ഷേപ ഏകദവും ആകണം. മറിച്ച് f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദവും പരിക്ഷേപവും ആകണമെങ്കിൽ f പ്രതിലോമ്യം ആകണം.

f എന്ന ഏകദം പ്രതിലോമ്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കാൻ ഈ രണ്ട് പ്രത്യേകതകൾ പരിശോധിച്ചാൽ മതി.

ഒരു ഏകദത്തെ $y = x$ എന്ന വരയിൽ reflect ചെയ്ത് ആ ഏകദത്തിന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് നിർമിക്കാം. ഇതിനായി Reflect about line എന്ന ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം.

ഏതാനും ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് അവയുടെ പ്രതിലോമ ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് നിർമിച്ചു നോക്കു.

ഉദാഹരണം : 23

$f : \mathbf{N} \to Y$ എന്ന ഏകദം നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(x) = 4x + 3$, എന്നാണ്. ഇവിടെ, $Y = \{y \in \mathbf{N} : y = 4x + 3,\ x$ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയാണ്$\}$. f പ്രതിലോമ്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. f ന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

ഗണം Y യിലെ ഒരു അംഗം y പരിഗണിക്കുക. $y = 4x + 3$ ആണ്. ഇതിൽ നിന്നും $4x = y - 3$,

$x = \frac{(y-3)}{4}$ എന്നെഴുതാം.

$g : Y \to N$ എന്ന ഏകദം $g(y) = \frac{(y-3)}{4}$ എന്നു നിർവചിക്കാം. അതുകൊണ്ട്

$$gof(x) = g(f(x)) = g(4x+3) = \frac{(4x+3-3)}{4} = x$$

$fog(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{(y-3)}{4}\right) = \frac{4(y-3)}{4} + 3 = y - 3 + 3 = y$. അതുകൊണ്ട് $gof = I_N$,

$fog = I_Y$. അതായത് g എന്നത് f ന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദമാണ്.

ഉദാഹരണം : 24

ഏകദം $f : N \to Y$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(n) = n^2$ എന്നാകുന്നു. ഇവിടെ $Y = \{n^2 : n \in N\} \subset N$ ആയാൽ f പ്രതിലോമ്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. f ന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

ഗണം Y യിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു അംഗമാണ് y എന്നിരിക്കട്ടെ.

ആയതിനാൽ $y = n^2, n \in N$.

$n^2 = y$

$n = \sqrt{y}$.

ഇതിൽ നിന്നും $g : Y \to N$, എന്ന ഏകദം $g(y) = \sqrt{y}$ എന്ന് നിർവചിക്കാം.

അപ്പോൾ $gof(n) = g(n^2) = \sqrt{n^2} = n$

$$fog(y) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y,$$

അതുകൊണ്ട് $gof = I_N$; $fog = I_Y$. അതിനാൽ f പ്രതിലോമ്യമാണ്.

$f^{-1} = g$.

ഉദാഹരണം : 25

ഏകദം $f : N \to R$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(x) = 4x^2 + 12x + 15$. എന്നാണ്. f ന്റെ രംഗമാണ് S, ഏകദം $f : N \to S$, പ്രതിലോമ്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക, f ന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം:

ഏകദം f ന്റെ രംഗത്തിലെ ഒരു അംഗമാണ് y എന്നു കരുതുക. അപ്പോൾ N ലെ ചില x ന് $y = 4x^2 + 12x + 15$ ആകും.

$y = (2x+3)^2 + 6.$

$$\Rightarrow (2x+3)^2 = y-6$$

$$\Rightarrow 2x+3 = \sqrt{y-6}$$

$$\Rightarrow 2x = \sqrt{y-6} - 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{y-6}-3}{2}, \; y \geq 6$$

അടുത്തതായി $g : S \to \mathbf{N}$ എന്ന ഏകദം $g(y) = \frac{\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}$ എന്നു നിർവചിക്കാം.

$$gof(x) = g(f(x)) = g(4x^2 + 12x + 15) = g((2x+3)^2 + 6)$$

$$= \frac{\left(\left(\sqrt{(2x+3)^2+6-6}\right)-3\right)}{2} = \frac{(2x+3-3)}{2} = x$$

അതുപോലെ, $fog\ (y) = f\left(\frac{\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}\right) = \left(\frac{2\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}+3\right)^2 + 6$

$$= \left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3+3\right)^2 + 6 = \left(\sqrt{y-6}\right)^2 + 6 = y - 6 + 6 = y.$$

ഇതിൽ നിന്ന് $gof = I_N$ എന്നും $fog = I_S$ എന്നും കാണാം.
അതുകൊണ്ട് f പ്രതിലോമ്യമാണ്. $f^{-1} = g$.

ഉദാഹരണം : 26

$f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $h : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ എന്നീ ഏകദങ്ങൾ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $f(x) = 2x$, $g(y) = 3y + 4$, $h(z) = \sin z$, എന്നും x, y, z എന്നിവ N എന്ന ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളും ആണെങ്കിൽ. $ho(gof) = (hog)\ of$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$f(x) = 2x$, $g(y) = 3y + 4$, $h(z) = \sin z\ \forall\ x,y,z$ ആണ്.

$$ho(gof)\ (x) = h(gof\ (x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x))$$
$$= h(3(2x)+4) = h(6x+4) = \sin\ (6x+4),\ \forall\ x \in \mathbf{N}.$$

കൂടാതെ, $((hog)of)\ (x) = (hog)\ (f(x))$

$$= (hog)\ (2x) = h(g(2x))$$
$$= h(3(2x)+4) = h(6x+4)$$
$$= \sin\ (6x+4),\ \forall x \in \mathrm{N}.$$

അതുകൊണ്ട്

$$ho(gof) = (hog)of$$

ഇത് എല്ലാ സാഹചര്യത്തിലും ശരിയാണ്.

സിദ്ധാന്തം 1: $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to S$ എന്നിവ ഏകദങ്ങളാണെങ്കിൽ $ho(gof) = (hog)of$.

തെളിവ്:

$$ho(gof)(x) = h(gof(x))$$
$$= h(g(f(x))),\ \forall x \in X$$

കൂടാതെ $(hog)of(x) = hog(f(x))$

$$= h(g(f(x))),\ \forall x \in X.$$

അതുകൊണ്ട് $ho(gof) = (hog)of$.

ഉദാഹരണം 27: $f: \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$, $g: \{a, b, c\} \to$ {apple, ball, cat} എന്നീ ഏകദങ്ങൾ നിർവചിക്കുന്നത് $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $g(a)$ = apple, $g(b)$ = ball $g(c)$ = cat എന്നുമാണ്. f, g, gof എന്നിവ പ്രതിലോമ്യമാണെന്ന് കാണിക്കുക. കൂടാതെ f^{-1}, g^{-1}, $(gof)^{-1}$ എന്നിവ കണ്ടെത്തുക, $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

$y = \frac{1}{x}$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ പ്രതിലോമം അത് തന്നെയാണല്ലോ. ഇതേ പ്രത്യേകതയുള്ള മറ്റ് ഏകദങ്ങൾ നിർമിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. $y = \frac{1}{x}$ എന്ന ഗ്രാഫിനെ $y = x$ എന്ന വരയിലൂടെ മുന്നോട്ടോ പിന്നോട്ടോ നീക്കി നോക്കൂ. ഇതിനായി $y = x$ എന്ന വര വരച്ച് അതിൽ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Translate by vector എന്ന tool ഉപയോഗിച്ച് ഗ്രാഫിലും ബിന്ദുക്കളിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. പുതിയ ഒരു ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ലഭിക്കുന്നത് കാണാം. ഈ ഏകദത്തിന്റെ നിർവചനം Algebra view ൽ നിന്ന് ലഭിക്കും. ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം വ്യത്യാസപ്പെടുത്തി നോക്കൂ. f എന്ന ഏകദത്തിന്റെ പ്രതിലോമം അതുതന്നെയാണെങ്കിൽ $f(x-a)$ a എന്ന ഏകദവും ഇതേ പ്രത്യേകതയുള്ള ഏകദമായിരിക്കും. $(a \in R)$ 'a' എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് $\frac{1}{x-a}+a$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ചു നോക്കുക. a മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ഗ്രാഫിന് എന്തുമാറ്റമാണ് വരുന്നത്? പ്രതിലോമ ഏകദം അതുതന്നെയായി വരുന്ന മറ്റ് ഏകദങ്ങൾക്കും ഇത് പരീക്ഷിച്ചു നോക്കൂ.

പരിഹാരം: നിർവചനപ്രകാരം f, g എന്നിവ ഉഭയക്ഷേപ ഏകദങ്ങളാണ്. അതുകൊണ്ട്

$f^{-1}: \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$

g^{-1}: {apple, ball, cat} $\to \{a, b, c\}$ എന്നീ ഏകദങ്ങൾ ഇങ്ങനെ നിർവചിക്കാം.

$f^{-1}(a) = 1$, $f^{-1}(b) = 2$, $f^{-1}(c) = 3$, g^{-1}(apple) $= a$, g^{-1}(ball) $= b$; g^{-1}(cat) $= c$.

$$f^{-1}of(1) = f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(a) = 1$$

$$f^{-1}of(2) = f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(b) = 2$$

$$f^{-1}of(3) = f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(c) = 3$$

അതുകൊണ്ട് $f^{-1}of = I_{\{1,2,3\}}$

$$fof^{-1}(a) = f\left(f^{-1}(a)\right) = f(1) = a$$

$$fof^{-1}(b) = f\left(f^{-1}(b)\right) = f(1) = b$$

$$fof^{-1}(c) = f\left(f^{-1}(c)\right) = f(1) = c$$

ആയതിനാൽ $fof^{-1} = I_{\{a,b,c\}}$

ഇതുപോലെ, $g^{-1}og = I_{\{a,b,c\}}$ യും $gog^{-1} = I_{\{apple,ball,cat\}}$ യും ആണ്.

ഇവിടെ $gof : \{1,2,3\} \to \{apple, ball, cat\}$ ആണ്.

$gof(1) = apple,\ gof(2) = ball,\ gof(3) = cat$ എന്നാണ്.

gof ഒരു ഉഭയക്ഷേപ ഏകകദമായാൽ $(gof)^{-1} : \{apple, ball, cat\} \to \{1,2,3\}$ എന്ന് നിർവചിക്കാം.

$$(gof)^{-1}(apple) = 1, (gof)^{-1}(ball) = 2, (gof)^{-1}(cat) = 3$$

ഇതിൽ നിന്നും $(gof)^{-1}o(gof) = I_{\{1,2,3\}}$

$(gof)o(gof)^{-1} = I_{\{apple,ball,cat\}}$ ആകുന്നു.

മുകളിൽ പറഞ്ഞവയിൽ നിന്നും f, g, gof എന്നിവ പ്രതിലോമ്യമാണ് എന്നു കാണാം.

ഇനി $f^{-1}og^{-1}$ (apple) $= f^{-1}(g^{-1}(\text{apple})) = f^{-1}(a) = 1 = (gof)^{-1}$ (apple)

$f^{-1}og^{-1}$ (ball)$= f^{-1}(g^{-1}(\text{ball})) = f^{-1}(b) = 2 = (gof)^{-1}$ (ball)

$f^{-1}og^{-1}$ (cat)$= f^{-1}(g^{-1}(\text{cat})) = f^{-1}(c) = 3 = (gof)^{-1}$ (cat).

ഇതിൽ നിന്നും $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ ആണെന്നു കാണാം. ഇത് എല്ലാ സാഹചര്യത്തിലും ശരിയായിരിക്കും.

സിദ്ധാന്തം 2: $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ എന്നിവ രണ്ട് പ്രതിലോമ്യ ഏകകദങ്ങളാണെങ്കിൽ, gof പ്രതിലോമ്യവും $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ ഉം ആണ്.

തെളിവ്: gof പ്രതിലോമ്യമാണെന്നും $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$, എന്നും തെളിയിക്കാൻ $(f^{-1}og^{-1})o(gof) = I_X$ എന്നും $(gof)o(f^{-1}og^{-1}) = I_Z$ എന്നും തെളിയിച്ചാൽ മതിയാകും

ആയതിനാൽ, $(f^{-1}og^{-1})o(gof)$ $= ((f^{-1}og^{-1})\ og)\ of$, സിദ്ധാന്തം 1 പ്രകാരം

$= (f^{-1}o(g^{-1}og))\ of$, സിദ്ധാന്തം 1 പ്രകാരം

$= (f^{-1}oI_Y)\ of$, g^{-1} ന്റെ നിർവചനമനുസരിച്ച്

$= I_X$

ഇതുപോലെ $(gof)o(f^{-1}og^{-1}) = I_Z$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 28

$S = \{1, 2, 3\}$ എന്ന ഗണം പരിഗണിക്കുക. $f : S \rightarrow S$ എന്ന ഏകദത്തിന് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നിർവചനങ്ങളിൽ പ്രതിലോമ്യ ഏകദങ്ങൾ ഉണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. പ്രതിലോമ്യമായവയിൽ f^{-1} കണ്ടുപിടിക്കുക.

(a) $f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

(b) $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$

(c) $f = \{(1, 3), (3, 2), (2, 1)\}$

പരിഹാരം

(a) $f = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

ഇവിടെ ഏകദം f ഒരു ഉഭയക്ഷേപ ഏകദമാണ്. ആയതുകൊണ്ട് f ഒരു പ്രതിലോമ ഏകദമാണ്. f ന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദം $f^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} = f$.

(b) $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$

$f(2) = f(3) = 1$,

അതുകൊണ്ട് f ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമല്ല. അതിനാൽ f ഒരു പ്രതിലോമ ഏകദമല്ല.

(c) $f = \{(1, 3), (3, 2), (2, 1)\}$

f ഒന്നിനൊന്ന് പരിക്ഷേപ ഏകദമാണെന്നു കാണാം.

അതുകൊണ്ട് f പ്രതിലോമ്യമാണ്.

$f^{-1} = \{(3, 1), (2, 3), (1, 2)\}$.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 13

1. $f : \{1, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 5\}$ എന്ന ഏകദം $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ എന്നും $g : \{1, 2, 5\} \rightarrow \{1, 3\}$ എന്ന ഏകദം $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$ എന്നും നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ gof എഴുതുക.

2. f, g, h എന്നിവ **R** ൽനിന്നും **R** ലേക്കുള്ള ഏകദങ്ങളാണെങ്കിൽ

$$(f + g)oh = foh + goh$$

$$(f \cdot g)oh = (foh) \cdot (goh)$$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ fog, gof കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (i) $f(x) = |x|$; $g(x) = |5x - 2|$
   (ii) $f(x) = 8x^3$; $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

4. $f(x) = \dfrac{(4x+3)}{(6x-4)}$, $x \neq \dfrac{2}{3}$ ആയാൽ എല്ലാ x വിലകൾക്കും $fof(x) = x$, ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. fന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദം ഏത്?

5. താഴെ പറയുന്ന ഏകദങ്ങൾക്ക് പ്രതിലോമം ഉണ്ടോ എന്ന് കാരണസഹിതം വിശദീകരിക്കുക.
   (i) $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{10\}$;
   $f = \{(1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10)\}$
   (ii) $g : \{5, 6, 7, 8\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$;
   $g = \{(5, 4), (6, 3), (7, 4), (8, 2)\}$
   (iii) $h : \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{7, 9, 11, 13\}$;
   $h = \{(2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$

6. $f : [-1, 1] \rightarrow \mathrm{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)}$ ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. $f : [-1, 1] \rightarrow f$ന്റെ രംഗം, എന്ന ഏകദത്തിന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദം കണ്ടെത്തുക.

   (സൂചന: fന്റെ രംഗത്തിലെ ഓരോ y യും, $y = f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, $x \in [-1, 1]$ അതായത്, $x = \dfrac{2y}{(1-y)}$.

7. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 4x + 3$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. f പ്രതിലോമ്യം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. fന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow [4, \infty)$; $f(x) = x^2 + 4$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. $f^{-1}(y) = \sqrt{y-4}$ എന്ന ഏകദം fന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. [$\mathbf{R}_+$ = ന്യൂനം അല്ലാത്ത രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണം)

9. $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow [-5, \infty)$, $f(x) = 9x^2 + 6x - 5$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. f പ്രതിലോമ്യമാണെന്നും fന്റെ പ്രതിലോമം $f^{-1}(y) = \left(\dfrac{(\sqrt{y+6}) - 1}{3}\right)$ എന്ന ഏകദമാണെന്നും തെളിയിക്കുക.

10. $f : X \to Y$ എന്ന ഏകദം പ്രതിലോമ്യമാണ്. എന്നാൽ f ന് ഒരൊറ്റ പ്രതിലോമ ഏകദം മാത്രമേ ഉള്ളൂ എന്നു തെളിയിക്കുക.
(സൂചന: g_1, g_2 എന്നിവ fന്റെ രണ്ട് പ്രതിലോമ ഏകദങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നാൽ എല്ലാ $y \in Y$ ക്കും $fog_1(y) = 1_Y(y) = fog_2(y)$ ആയിരിക്കും. fന്റെ ഒന്നിനൊന്ന് സവിശേഷത ഉപയോഗിക്കുക.)

11. $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$, $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. f^{-1} കണ്ടുപിടിക്കുകയും $(f^{-1})^{-1} = f$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുകയും ചെയ്യുക.

12. $f: X \to Y$ എന്ന ഏകദം പ്രതിലോമ്യമെങ്കിൽ f^{-1} ന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദമാണ് f, അഥവാ $(f^{-1})^{-1} = f$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

13. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$ ആണെങ്കിൽ $fof(x) =$ .... ആകുന്നു.

(A) $x^{\frac{1}{3}}$ (B) x^3 (C) x (D) $(3 - x^3)$

14. ഏകദം $f: \mathbf{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \to \mathbf{R}$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(x) = \frac{4x}{3x+4}$ എന്നാണ്, എങ്കിൽ fന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദം g: രംഗം$f \to \mathbf{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ഏത്?

(A) $g(y) = \frac{3y}{3-4y}$ (B) $g(y) = \frac{4y}{4-3y}$

(C) $g(y) = \frac{4y}{3-4y}$ (D) $g(y) = \frac{3y}{4-3y}$

1.5 ദ്വയാംശക്രിയ (Binary Operation)

സ്കൂൾതലം മുതൽ നാം പഠിച്ചിട്ടുള്ള നാല് അടിസ്ഥാന ക്രിയകളാണ് സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നിവ. ഈ ക്രിയകളുടെ സവിശേഷത ഏതെങ്കിലും രണ്ടു സംഖ്യകൾ a,b ഇവയെ $a + b$, $a - b$, ab , $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ എന്ന മറ്റൊരു സംഖ്യയുമായി ബന്ധിപ്പിക്കാം എന്നുള്ളതാണ്. ഇവിടെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ മാത്രമേ ഒരേ സമയം കൂട്ടുകയോ ഗുണിക്കുകയോ ചെയ്യാൻ കഴിയൂ. മൂന്നു സംഖ്യകൾ കൂട്ടേണ്ടി വരുമ്പോൾ ആദ്യം രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക

കണ്ട് മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ അതിനോട് കൂട്ടുകയാണ് വേണ്ടത്. സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നിവ ദ്വയാംഗക്രിയയ്ക്ക് ഉദാഹരണമാണ്. X എന്ന ഒരു ഗണത്തിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് അംഗങ്ങൾ തമ്മിൽ ദ്വയാംഗക്രിയ വഴി ലഭിക്കുന്ന അംഗം X എന്ന ഗണത്തിൽ തന്നെ ഉള്ളതായിരിക്കും.

നിർവചനം 10: A എന്ന ഗണത്തിലെ * എന്ന ദ്വയാംഗക്രിയ (binary operation) $A \times A$ യിൽ നിന്നും A യിലേക്കുള്ള ഒരു ഏകദമാണ്. അതായത്, $* : A \times A \to A$. നമുക്ക് ഇതിനെ $*(a, b)$ അഥവാ $a * b$ എന്നെഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 29

സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം എന്നിവ രേഖീയ സംഖ്യാഗണത്തിലെ ദ്വയാംഗക്രിയകളാണെന്നും ഹരണം ദ്വയാംഗക്രിയ അല്ലെന്നും തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ ഹരണം പൂജ്യം അല്ലാത്ത രേഖീയസംഖ്യാ (non zero real numbers) ഗണത്തിൽ ദ്വയാംഗക്രിയയാണെന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

a,b എന്നിവ ഗണം R ലെ അംഗങ്ങളാണെങ്കിൽ

$+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ എന്നത് $(a, b) \to a + b$

$- : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ എന്നത് $(a, b) \to a - b$

$\times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ എന്നത് $(a, b) \to ab$ ആയിരിക്കും.

ഇവിടെ $a + b$, $a - b$, ab എന്നീ സംഖ്യകൾ ഗണം R ലെ സംഖ്യകൾ തന്നെയാണ്. '+', '−', '×' എന്നീ ക്രിയകൾ എല്ലാം ഏകദങ്ങൾ ആണെന്നു കാണാം, പ്രതിബിംബങ്ങൾ എല്ലാം **R** എന്ന ഗണത്തിലെ സംഖ്യകൾ തന്നെ ആയതുകൊണ്ട് ഇവ ദ്വയാംഗക്രിയകൾ ആയിരിക്കും.

പക്ഷേ, $\div : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, എന്ന ക്രിയ $(a, b) \to \frac{a}{b}$, ആയതിനാൽ $b=0$ ആകുമ്പോൾ

പ്രതിബിംബം $\frac{a}{b}$ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. അതുകൊണ്ട് ÷ ഒരു ഏകദമല്ല

അതിനാൽ ÷ ഒരു ദ്വയാംഗക്രിയ അല്ല.

എന്നാൽ $\div : \mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$ എന്ന ക്രിയയിൽ $(a, b) \to \frac{a}{b}$ ആകുമ്പോൾ

$b \neq 0$ ആയതുകൊണ്ട് ÷ ഒരു ഏകദവും കൂടാതെ ദ്വയാംഗക്രിയയും ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 30

N എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യാഗണത്തിൽ വ്യവകലനവും ഹരണവും ദ്വയാംഗക്രിയകളല്ലെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$- : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, എന്നത് $(a, b) \to a - b$, ആണ്. (3, 5) എന്ന $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ലെ അംഗം, പരിഗണിച്ചാൽ

$(3, 5) \to 3 - 5$, $3 - 5 = -2 \notin \mathbf{N}$.
അതുകൊണ്ട് വ്യവകലനം ഇവിടെ ദ്വയാംഗക്രിയ അല്ല.
$\div : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, എന്നത് $(a, b) \to a \div b$ ആണ്. (3, 5) പരിഗണിച്ചാൽ, പ്രതിബിംബം

$(3, 5) \to \frac{3}{5}$. ഇവിടെ $\frac{3}{5} \notin \mathbf{N}$.

അതുകൊണ്ട് ഹരണവും ഇവിടെ ദ്വയാംഗക്രിയ അല്ല.

ഉദാഹരണം : 31

$* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $(a, b) \to a + 4b^2$ എന്നാണ്. ഇത് ഒരു ദ്വയാംഗക്രിയയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ എന്ന ബന്ധത്തിൽ ഏതൊരു (a, b) ക്രമജോടിക്കും $a + 4b^2$ എന്ന ഒരു പ്രതിബിംബം $\mathbf{R}$ ൽ ഉണ്ടായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് * ഒരു ദ്വയാംഗക്രിയ ആണ്.

ഉദാ : $(3, 5) \to 3 + 4 \times 5^2 = 103 \in \mathrm{R}$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 32

ഗണം X ന്റെ എല്ലാ ഉപഗണങ്ങളുടെയും ഗണം P ആണ്. കൂടാതെ $\cup : \mathrm{P} \times \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ എന്നും, $\cap : \mathrm{P} \times \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ എന്നത് $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ എന്നുമായാൽ, ഇവ ദ്വയാംഗക്രിയകളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$\mathrm{P} \times \mathrm{P}$ യിൽ നിന്നും P യിലേക്കുള്ള ബന്ധത്തിൽ (A, B) എന്ന ക്രമജോടിക്ക് യോഗക്രിയയിൽ (union operation) ഒരേ ഒരു പ്രതിബിംബമേ ഉണ്ടാകൂ.
$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. കൂടാതെ P യിലെ ഒരംഗമാണ് $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. അതുകൊണ്ട് യോഗം എന്ന ക്രിയ ഒരു ദ്വയാംഗക്രിയയായിരിക്കും.
ഇതുപോലെ $\cap : \mathrm{P} \times \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ യിൽ $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ എന്നതും ഒരു ദ്വയാംഗക്രിയയാണ്.

ഉദാഹരണം : 33

$\vee : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(a, b) \to \max\{a, b\}$ എന്നും $\wedge : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(a, b) \to \min\{a, b\}$ എന്നതുമാണ്. ഇവ ദ്വയാംഗക്രിയകളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$\vee : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ എന്ന ക്രിയയിൽ $(a, b) \to \max\{a, b\}$ ആണ്. അതായത് ഏതൊരു (a, b) ക്രമജോടിക്കും ഒരു ഏകമാത്ര (unique) പ്രതിബിംബം ഉണ്ടാകും. അത് a, b എന്നിവയിലെ ഏറ്റവും വലിയ വില ആയിരിക്കും. അതുപോലെ
$\wedge : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ൽ $(a, b) \to \min\{a, b\}$ ആയതുകൊണ്ട് $\wedge$ എന്ന ക്രിയക്ക് a, b എന്നിവയിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ വിലയായിരിക്കും ഏകമാത്രാ പ്രതിബിംബം. അതിനാൽ $\vee$, $\wedge$ എന്നിവ ദ്വയാംഗക്രിയകളാണ്.

> കുറിപ്പ്:
>
> $\vee(4, 7) = 7$, $\vee(4, -7) = 4$, $\wedge(4, 7) = 4$, $\wedge(4, -7) = -7$.
>
> A എന്ന ഗണത്തിൽ ഏതാനും അംഗങ്ങൾ മാത്രമേ ഉള്ളൂ എങ്കിൽ A എന്ന ഗണത്തിലെ ദ്വയാംഗക്രിയയെ ഒരു പട്ടികയിൽ ക്രമീകരിക്കാം. ഇതിനെ ക്രിയാപട്ടിക (operation table) എന്നു വിളിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, A= {1, 2, 3} പരിഗണിക്കുക. ഉദാഹരണം 33 ലെ ക്രിയ. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക വഴി സൂചിപ്പിക്കാം.

V	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

പട്ടിക 1.1

മുകളിലെ ക്രിയാപട്ടികയിൽ മൂന്നു വരിയും മൂന്നു നിരയും ഉണ്ട്. വരിയിലും നിരയിലും ഉള്ള ഗണം A യിലെ അംഗങ്ങളിൽ (i യുടെയും j യുടെയും) വലുത് ഏതാണോ അതാണ് നിരയും വരിയും സംഗമിക്കുന്ന ഭാഗത്ത് എഴുതുന്നത്.

$\vee(1, 3) = 3$, $\vee(2, 3) = 3$, $\vee(1, 2) = 2$.

പൊതുവായി ഗണം $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ പരിഗണിച്ചാൽ $* : A \times A \to A$ എന്ന ക്രിയാപട്ടികയിൽ n വരിയും n നിരയും ഉണ്ടാകും. i വരിയുടെയും j നിരയുടെയും സംഗമഭാഗത്ത് $a_i * a_j$ രേഖപ്പെടുത്തും. $* : A \times A \to A$ യിൽ $a_i * a_j = i$ വരിയുടെയും j നിരയുടെയും സംഗമഭാഗത്ത് രേഖപ്പെടുത്തുന്നത് $a_i * a_j \in A$ ആയിരിക്കും.

> കുറിപ്പ്:
>
> ദ്വയാംഗക്രിയയിൽ സങ്കലനത്തിനും ഗുണനത്തിനും ക്രമത്തിന് പ്രാധാന്യം ഇല്ല.
>
> $+(3, 4) = 3 + 4 = 7$, $+(4, 3) = 4 + 3 = 7$
>
> $+(3, 4) = +(4, 3)$
>
> $\times(3, 4) = 3 \times 4 = 12$, $\times : (4, 3) = 4 \times 3 = 12$
>
> $\times(3, 4) = \times(4, 3)$
>
> എന്നാൽ
>
> ദ്വയാംഗക്രിയയിൽ വ്യവകലനത്തിനും ഹരണത്തിനും ക്രമം പ്രധാനമാണ്.
>
> $-(4, 3) = 4 - 3 = 1$, $-(3, 4) = 3 - 4 = -1$
>
> $-(4, 3) \neq -(3, 4)$
>
> അതുപോലെ $\div(4, 3) \neq \div(3, 4)$

നിർവചനം 11: ഗണം X ലെ എല്ലാ a, b അംഗങ്ങൾക്കും X ലെ * എന്ന ദ്വയാംഗ ക്രിയയിൽ $a * b = b * a$ ആയാൽ, * ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നുവെന്ന് പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം : 34

ദ്വയാംഗക്രിയകളായ $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ എന്നിവ ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നു എന്നും $- : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\div : \mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}$ എന്നിവ ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നില്ല എന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$a + b = b + a \ \ \forall a, b \in \mathbf{R}$, $a \times b = b \times a, \ \forall a, b \in \mathbf{R}$ ആയതുകൊണ്ട് '+' '×' എന്നിവ ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നു.

'–', '÷' എന്നീ ദ്വയാംഗക്രിയകൾ ക്രമനിയമം പാലിക്കാത്തതിന് ഉദാഹരണം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

$$-(3, 4) = 3 - 4 = -1$$

$$-(4, 3) = 4 - 3 = 1$$

$$\therefore -(3, 4) \neq -(4, 3)$$

അതുപോലെ $\div(3, 4) \neq \div(4, 3)$

ആയതിനാൽ '–', '÷' എന്നീ ദ്വയാംഗക്രിയകൾ ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നില്ല.

ഉദാഹരണം : 35

$* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന $a * b = a + 2b$ എന്ന ദ്വയാംഗക്രിയ ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നില്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം:

(4, 3), (3, 4) എന്നീ ക്രമജോടികളുടെ ക്രിയ പരിഗണിക്കാം.

$3 \times 4 = 3 + 2 \times 4 = 11$

$4 \times 3 = 4 + 2 \times 3 = 10$

അതുകൊണ്ട് $3 \times 4 \neq 4 \times 3$

* ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നില്ല.

X എന്ന ഗണത്തിലെ ഒരു ദ്വയാംഗക്രിയയിലൂടെ ആ ഗണത്തിലെ മൂന്ന് അംഗങ്ങളെ തമ്മിൽ ബന്ധിപ്പിക്കുന്നതിന് ഒരു പൊതുപ്രശ്നം നമുക്കു പരിശോധിക്കാം.

$a * b * c$ എന്നത് രണ്ടു വ്യത്യസ്ത രീതിയിൽ $(a * b) * c$, $a * (b * c)$ എന്നിങ്ങനെ എഴുതാം. ഇവിടെ $(a * b) * c$, $a * (b * c)$എന്നിവ എല്ലാ ക്രിയകളിലും തുല്യമാകണമെന്നില്ല.

ഉദാഹരണത്തിന്

$$(8-5)-2 = 3-2=1$$
$$8-(5-2) = 8-3=5$$
$$(8-5)-2 \neq 8-(5-2)$$

8, 5, 2 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ വ്യവകലന ദ്വയാംഗക്രിയകൾ ബ്രാക്കറ്റ് ഉപയോഗിക്കാതെ ചെയ്യുന്നത് അർത്ഥശൂന്യമാണ്.

സങ്കലനക്രിയ നോക്കിയാൽ $8+5+2$, $(8+5)+2$, $8+(5+2)$ എന്നീ മൂന്നു സംഖ്യകളുടെ ബന്ധങ്ങൾ, ബ്രാക്കറ്റോട് കൂടിയും ബ്രാക്കറ്റ് ഇല്ലാതെയും ഒരേ ഉത്തരം ലഭിക്കുന്നു. മൂന്നിൽ കൂടുതൽ സംഖ്യകളുടെ സങ്കലന ക്രിയകളുടെ കാര്യത്തിലും ഇത് ശരിയാണ്.

നിർവചനം 12: $* : A \times A \rightarrow A$ എന്ന ദ്വയാംഗക്രിയയിൽ $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in A$ ആയാൽ $*$ സംയോജന നിയമം പാലിക്കുന്നുവെന്ന് പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം : 36

R എന്ന ഗണത്തിൽ സങ്കലനവും ഗുണനവും സംയോജന ദ്വയാംഗക്രിയകളാണെന്നും, വ്യവകലനം, ഹരണം എന്നിവ സംയോജന ദ്വയാംഗക്രിയകൾ അല്ലെന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

a, b, c എന്നിവ R ലെ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് അംഗങ്ങളായാൽ

$(a+b)+c = a+(b+c)$ ആണ്.

അതുപോലെ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ യും ആണ്.

അതുകൊണ്ട് സങ്കലനവും ഗുണനവും സംയോജന ദ്വയാംഗക്രിയകളാണ്.

എന്നാൽ $(8-5)-3 = 3-3 = 0$, $8-(5-3) = 8-2 = 6$ ആകയാൽ

$$(8-5)-3 \neq 8-(5-3).$$

അതായത് R ൽ വ്യവകലനം, സംയോജന ദ്വയാംഗക്രിയ അല്ല.

അതുപോലെ $8 \div (5 \div 3) \neq (8 \div 5) \div 3$

അതുകൊണ്ട് R ൽ ഹരണം, സംയോജന ദ്വയാംഗക്രിയ അല്ല.

ഉദാഹരണം : 37

ദ്വയാംഗക്രിയ $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ എന്നത് $a * b \rightarrow a + 2b$ സംയോജനക്രിയ അല്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

8, 5, 3 എന്നീ രേഖീയസംഖ്യകൾ പരിഗണിച്ചാൽ

$$(8 * 5) * 3 = (8+10) * 3 = (8+10)+6 = 24,$$
$$8 * (5 * 3) = 8 * (5+6) = 8 * 11 = 8+22 = 30 \text{ ആകുന്നു.}$$

അതായത് $(8*5)*3 \neq 8*(5*3)$

> **കുറിപ്പ്:**
> ദ്വയാംഗക്രിയകളുടെ സംയോജന നിയമത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ എന്ന് എഴുതുന്നതിൽ തെറ്റില്ല. പക്ഷേ, സംയോജന നിയമം പാലിക്കാത്ത പക്ഷം, $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ എന്നത് അവ്യക്തമാണ്. മുൻ ക്ലാസുകളിൽ കുറയ്ക്കുക, ഹരിക്കുക അല്ലെങ്കിൽ ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ക്രിയകൾ നടത്തുമ്പോൾ ബ്രാക്കറ്റ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത് ഓർമിക്കുമല്ലോ.

R എന്ന ഗണത്തിലെ '+' ദ്വയാംഗക്രിയയിൽ പൂജ്യത്തിന്റെ സവിശേഷത എന്തെന്നാൽ, $\forall\ a \in R$,

$a + 0 = a = 0 + a$. അതായത് ഏതൊരു സംഖ്യയോടും പൂജ്യം കൂട്ടിയാൽ ആ സംഖ്യ തന്നെ ലഭിക്കും.

ഗുണന ദ്വയാംഗക്രിയയിൽ 1 എന്ന സംഖ്യയുടെ പ്രത്യേകത

$\forall\ a \in R,\ a \times 1 = a = 1 \times a$ യിരിക്കും.

നിർവചനം 13: $* : A \times A \to A$, എന്ന ദ്വയാംഗക്രിയയിൽ $e \in A$, എന്ന ഒരു അംഗം ഉണ്ടാകുകയും $a * e = a = e * a,\ \forall\ a \in A$ ആകുകയും ചെയ്താൽ, e എന്ന അംഗത്തെ * എന്ന ദ്വയാംഗക്രിയയുടെ അനന്യദം (identity) എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം : 38

$+ : R \times R \to R$ എന്ന സങ്കലന ദ്വയാംഗക്രിയയുടെ അനന്യദം ആണ് 0 എന്നും $\times : R \times R \to R$ എന്ന ഗുണന ദ്വയാംഗക്രിയയുടെ അനന്യദം ആണ് 1 എന്നും തെളിയിക്കുക. എന്നാൽ $- : R \times R \to R$ നും $\div : R_0 \times R_0 \to R_0$ നും അനന്യദം ഇല്ലെന്നും സമർത്ഥിക്കുക. $[R_0 = R - \{0\}]$

പരിഹാരം

ഏതൊരു $a \in \mathbf{R}$, പരിഗണിച്ചാലും $a + 0 = 0 + a = a$ യും $a \times 1 = a = 1 \times a$, ആയതിനാൽ 0, 1 എന്നിവ യഥാക്രമം സങ്കലനത്തിന്റെയും ഗുണനത്തിന്റെയും അനന്യദം ആണ്.

ഉദാ: $2 + 0 = 2 = 0 + 2,\ 5 \times 1 = 5 = 1 \times 5$

വ്യവകലനം പരിഗണിച്ചാൽ $a - e = e - a, \forall a$ എന്നു ലഭിക്കുന്ന 'e' എന്ന അംഗം R ൽ ഇല്ല.

അതുപോലെ $\forall a,\ a \div e = a = e \div a$, എന്ന് ലഭിക്കുന്ന '$e$' എന്ന ഒരു അംഗം R ൽ ഇല്ല.

അതുകൊണ്ട് വ്യവകലനത്തിനും ഹരണത്തിനും അനന്യദം ഇല്ല.

> **കുറിപ്പ്**
> **R** എന്ന ഗണത്തിലെ സങ്കലനക്രിയയുടെ അനന്യദം ആണ് 0. $0 \notin \mathbf{N}$ ആയതുകൊണ്ട് **N** എന്ന ഗണത്തിലെ സങ്കലനക്രിയക്ക് അനന്യദം ഇല്ല.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ട മറ്റൊരു കാര്യം $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ എന്ന സങ്കലനക്രിയയിൽ ഏതെങ്കിലും $a \in \mathbf{R}$ പരിഗണിച്ചാൽ, $-a \in \mathbf{R}$ ആയിരിക്കും. അത് $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ എന്ന സവിശേഷത പാലിക്കും.

ഇതുപോലെ $\times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ എന്ന ഗുണനക്രിയയിൽ ഏതെങ്കിലും $a \in \mathbf{R}$ പരിഗണിച്ചാൽ, $\frac{1}{a} \in \mathbf{R}$ ആയിരിക്കും.

അത് $a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$ എന്ന സവിശേഷത പാലിക്കും.

നിർവചനം 14: $* : A \times A \to A$ എന്ന ദ്വയാംഗക്രിയയിൽ $e \in A$ അനന്യദമാകുകയും $a \in A$ ക്ക് $a * b = e = b * a$ ആകത്തക്കവിധം $b \in A$ ഉണ്ടാകുകയും ചെയ്താൽ * ആധാരമാക്കി a പ്രതിലോമ്യമാണെന്നും b യെ a യുടെ പ്രതിലോമമെന്നും പറയുന്നു. ഇതിനെ a^{-1} എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 39

$+ : R \times R \to R$ എന്ന ദ്വയാംഗക്രിയയിൽ $a \in \mathrm{R}$ ന്റെ പ്രതിലോമം $-a$ എന്നും $\times : R \times R \to R$ എന്ന ദ്വയാംഗക്രിയയിൽ $a \in \mathrm{R}, a \neq 0$ ത്തിന്റെ പ്രതിലോമം $\frac{1}{a}$ ആണെന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\forall \ a \in \mathrm{R} \ a + (-a) = a - a = 0$$
$$(-a) + a = -a + a = 0$$
$$a + (-a) = 0 = (-a) \quad a;$$

ആയതിനാൽ a യുടെ സങ്കലന പ്രതിലോമം (additive inverse) $-a$ ആണ്.

ഇതുപോലെ

$$a \in \mathrm{R}, a \neq 0 \text{ ആയാൽ}$$
$$a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a \text{ ആയിരിക്കും.}$$

അതായത് a യുടെ ഗുണനപ്രതിലോമം (multiplicative inverse) $\frac{1}{a}$ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 40

$+ : N \times N \to N$ എന്ന സങ്കലനക്രിയയിൽ $-a$ എന്നത് $a \in \mathbf{N}$ ന്റെ സങ്കലനപ്രതിലോമം അല്ലെന്നും $\times : N \times N \to N$ എന്ന ഗുണനക്രിയയിൽ $\frac{1}{a}$ എന്നത് $a \in N$, $a \neq 1$ ന്റെ ഗുണനപ്രതിലോമം അല്ലെന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

രേഖീയസംഖ്യാഗണത്തിൽ a യുടെ സങ്കലന പ്രതിലോമം $-a$ ആണ്. എന്നാൽ $-a \notin$ **N**, (എണ്ണൽസംഖ്യാഗണത്തിൽ ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഇല്ല). ആയതിനാൽ **N** എന്ന ഗണത്തിൽ a യുടെ പ്രതിലോമം അല്ല $-a$.

ഉദാഹരണത്തിന്, $3 \in N \Rightarrow -3 \notin N$ ഇതുപോലെ N എന്ന ഗണത്തിലെ a 1 ന് ഒഴികെ മറ്റൊരു സംഖ്യക്കും $\frac{1}{a} \notin$ **N**, ആയിരിക്കും.

അതിനാൽ $a \in N$ ന് ഗുണനപ്രതിലോമം $\frac{1}{a} \in N$ ഇല്ല.

$$2 \in N \Rightarrow \frac{1}{2} \notin N$$

$$3 \in N \Rightarrow \frac{1}{3} \notin N$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 1.4

1. ചുവടെ തന്നിട്ടുള്ള * എന്ന ക്രിയാ നിർവചനങ്ങളിൽ ഓരോന്നിലും * ഒരു ദ്വയാംഗക്രിയ ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. അല്ലെങ്കിൽ വിശദീകരിക്കുക.
   (i) ഗണം **Z** ൽ * നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $a * b = a - b$
   (ii) ഗണം **Z** ൽ * നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $a * b = ab$
   (iii) ഗണം **R** ൽ * നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $a * b = ab^2$
   (iv) ഗണം $\mathbf{Z}^+$ ൽ * നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $a * b = |a - b|$
   (v) ഗണം $\mathbf{Z}^+$ ൽ * നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $a * b = a$
2. ചുവടെ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള * ദ്വയാംഗക്രിയകൾ ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.
   (i) ഗണം **Z** ൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $a * b = a - b$
   (ii) ഗണം **Q** ൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $a * b = ab + 1$
   (iii) ഗണം **Q** ൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $a * b = \frac{ab}{2}$
   (iv) ഗണം $\mathbf{Z}^+$ ൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $a * b = 2^{ab}$
   (v) ഗണം $\mathbf{Z}^+$ ൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $a * b = a^b$
   (vi) ഗണം $\mathbf{R} - \{-1\}$ ൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $a * b = \frac{a}{b+1}$.

3. ഗണം {1, 2, 3, 4, 5} ലെ ദ്വിയാംഗക്രിയ $\wedge$ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $a \wedge b = \min\{a, b\}$ എന്നാണ്. ദ്വിയാംഗക്രിയ $\wedge$ ന്റെ ക്രിയാപട്ടിക തയാറാക്കുക.

4. ഗണം {1, 2, 3, 4, 5} ലെ ദ്വിയാംഗക്രിയ * ചുവടെ ക്രിയാപട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

*	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5

പട്ടിക 1.2

(i) 2 * (3 * 4), (2 * 3) * 4 എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

(ii) * ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നുണ്ടോ എന്ന് നോക്കുക.

(iii) (2 * 3) * (4 * 5) കണക്കാക്കുക. (സൂചന: ക്രിയാപട്ടിക ഉപയോഗിച്ച്)

5. ഗണം {1, 2, 3, 4, 5} ലെ *′ എന്ന ദ്വിയാംഗക്രിയ നിർവചിക്കുന്നത് $a *' b = a$ യുടെയും b യുടെയും വലിയ പൊതുഘടകം എന്നാണ്. *′ എന്ന ക്രിയ പരിശീലനപ്രശ്നം 4 ലെ * എന്ന ക്രിയക്ക് സമാനമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

6. N എന്ന ഗണത്തിലെ * എന്ന ദ്വിയാംഗക്രിയ തന്നിട്ടുള്ളത് $a * b = a$ യുടെയും b യുടെയും ചെറുപൊതുഗുണിതം എന്നാണ്. താഴെ പറയുന്നവ കണ്ടെത്തുക.

(i) 5 * 7, 20 * 16

(ii) * ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നുണ്ടോ?

(iii) * സംയോജകനിയമം പാലിക്കുന്നുണ്ടോ?

(iv) N എന്ന ഗണത്തിലെ * ന്റെ അനന്യദം കണ്ടുപിടിക്കുക?

(v) * എന്ന ക്രിയയിൽ N ലെ ഏതൊക്കെ അംഗങ്ങൾ പ്രതിലോമ്യമുള്ളവയാണ്?

7. ഗണം {1, 2, 3, 4, 5} ൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള * എന്ന ക്രിയ $a * b = a$ യുടെയും b യുടെയും ചെറുപൊതുഗുണിതം എന്നാണ്. ഇത് ഒരു ദ്വിയാംഗക്രിയയാണോ?

8. N എന്ന ഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള * എന്ന ക്രിയ $a * b = a$ യുടെയും bയുടെയും വലിയപൊതുഘടകം എന്നാണ്.
* ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നുണ്ടോ?

$*$ സംയോജകനിയമം പാലിക്കുന്നുണ്ടോ?

$*$ എന്ന ദ്വയാംഗക്രിയയ്ക്ക് അനന്യദം ഉണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

9. **Q** എന്ന ഭിന്നകസംഖ്യാഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള $*$ ദ്വയാംഗക്രിയകൾ ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

(i) $a * b = a - b$ (ii) $a * b = a^2 + b^2$

(iii) $a * b = a + ab$ (iv) $a * b = (a - b)^2$

(v) $a * b = \frac{ab}{4}$ (vi) $a * b = ab^2$

ഇവയിൽ ക്രമനിയമവും സംയോജകനിയമവും പാലിക്കുന്ന ദ്വയാംഗക്രിയകൾ കണ്ടെത്തുക.

10. പ്രശ്നം 9 ലെ ഏതൊക്കെ ദ്വയാംഗക്രിയകൾക്കാണ് അനന്യദം ഉള്ളത് എന്നു കണ്ടെത്തുക.

11. $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ എന്ന ഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള $*$ ദ്വയാംഗക്രിയയാണ്

$$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$$

$*$ ക്രമനിയമവും സംയോജകനിയമവും പാലിക്കുന്നുണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. ഈ ദ്വയാംഗക്രിയയുടെ അനന്യദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

12. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പ്രസ്താവനകൾ ശരിയോ തെറ്റോ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക. കാരണം വ്യക്തമാക്കുക.

(i) **N** എന്ന ഗണത്തിലെ ഒരു ദ്വയാംഗക്രിയ $*$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $a * a = a, \forall a \in \mathbf{A}$ എന്നാണ്.

(ii) **N** എന്ന ഗണത്തിലെ ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്ന ഒരു ദ്വയാംഗക്രിയയാണ് $*$ എങ്കിൽ $a * (b * c) = (c * b) * a$ ആയിരിക്കും.

13. **N** എന്ന ഗണത്തിലെ ദ്വയാംഗക്രിയ $*$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $a * b = a^3 + b^3$ എന്നാണ്. എങ്കിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ശരിയുത്തരം തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

(A) $*$ ക്രമനിയമവും സംയോജകനിയമവും പാലിക്കുന്നു.

(B) $*$ ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നു. എന്നാൽ സംയോജകനിയമം പാലിക്കുന്നില്ല.

(C) $*$ സംയോജകനിയമം പാലിക്കുന്നു. എന്നാൽ ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നില്ല.

(D) $*$ ക്രമനിയമവും സംയോജകനിയമവും പാലിക്കുന്നില്ല.

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 41

R_1, R_2 എന്നിവ A എന്ന ഗണത്തിലെ സമാനബന്ധങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ $R_1 \cap R_2$ സമാനബന്ധം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

R_1, R_2 എന്നിവ സമാനബന്ധങ്ങൾ ആയതിനാൽ $\forall a \in A, (a, a) \in R_1$, $(a, a) \in R_2$ ആണ്.

അതുകൊണ്ട് എല്ലാ $a \in A$, $(a, a) \in R_1 \cap R_2$
അതായത് $R_1 \cap R_2$ പ്രതിസമബന്ധം ആണ്
അടുത്തതായി

$$(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, b) \in R_1 \,;\, (a, b) \in R_2$$
$$\Rightarrow (b, a) \in R_1 \,;\, (b, a) \in R_2$$
$$\Rightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2.$$

അതുകൊണ്ട് $R_1 \cap R_2$ സമമിതബന്ധം ആണ്
ഇതുപോലെ,

$$(a, b) \in R_1 \cap R_2 \,;\, (b, c) \in R_1 \cap R_2 \text{ ആയാൽ}$$
$$\Rightarrow (a, c) \in R_1 \,,\; (a, c) \in R_2$$
$$\Rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2.$$

അതുകൊണ്ട് $R_1 \cap R_2$ ഒരു സാംക്രമികബന്ധം ആകുന്നു.
അതിനാൽ $R_1 \cap R_2$ ഒരു സമാനബന്ധമാണ്.

ഉദാഹരണം 42: പൂർണഅധിസംഖ്യകളുടെ ക്രമജോടികളുടെ ഗണം A യിലെ ബന്ധം R നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $(x, y)\, R\, (u, v) \Leftrightarrow xv = yu$ എന്നാണ്. ഇവിടെ R ഒരു സമാനബന്ധം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം:

$xy \;\; yx$ ആയതുകൊണ്ട് $\forall (x, y) \in A$, $(x, y)\, R\, (x, y)$ ആകുന്നു.
അതുകൊണ്ട് R ഒരു പ്രതിസമബന്ധം ആകുന്നു.
അടുത്തതായി,

$$(x, y)\, R\, (u, v) \Rightarrow xv = yu$$
$$\Rightarrow vx = uy$$
$$\Rightarrow uy \quad vx$$
$$\Rightarrow (u, v)\, R\, (x, y).$$

അതുകൊണ്ട് R ഒരു സമമിതബന്ധം ആണ്.
ഇതുപോലെ,

$$(x, y)\, R\, (u, v);\ (u, v)\, R\, (a, b) \text{ ആയാൽ}$$
$$\Rightarrow xv = yu \,;\, ub = va$$
$$\Rightarrow \frac{v}{u} = \frac{y}{x};\ \frac{v}{u} = \frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow xb = ya$$

R ഒരു സാംക്രമിക ബന്ധം ആണ്. ഇതിനാൽ R ഒരു സമാനബന്ധം ആണ്.

ഉദാഹരണം : 43

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ എന്ന ഗണത്തിലെ രണ്ടു ബന്ധങ്ങൾ $R_1 = \{(x, y) : x - y$ യെ 3 കൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം.$\}$;
$R_2 = \{(x, y): \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}\}$ അല്ലെങ്കിൽ $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ അല്ലെങ്കിൽ $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\}\}$ എന്നുമാണ്. $R_1 = R_2$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ഗണം $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\{3, 6, 9\}$ എന്നിവ പരിശോധിച്ചാൽ, ഓരോ ഗണത്തിലെയും രണ്ട് അംഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം മൂന്നിന്റെ ഗുണിതമാണ്.

$(x, y) \in R_1 \Rightarrow x - y$ മൂന്നിന്റെ ഗുണിതമാണ്

$\Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ അല്ലെങ്കിൽ $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$

അല്ലെങ്കിൽ $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\}$

$\Rightarrow (x, y) \in R_2$.

$\Rightarrow \{x, y\} \subset R_2$

അതായത് $R_1 \subset R_2$

ഇതുപോലെ $(x, y) \in R_2 \Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ അല്ലെങ്കിൽ $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ അല്ലെങ്കിൽ $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\}$

$\Rightarrow x - y$ യെ മൂന്നുകൊണ്ട് നിശേഷം ഹരിക്കാം.

$\Rightarrow \{x, y\} \subset R_1$.

അതായത് $R_2 \subset R_1$.

അതുകൊണ്ട് $R_1 = R_2$ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 44

$f : X \to Y$ ഒരു ഏകദം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഗണം X ൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ബന്ധം $R = \{(a, b): f(a) = f(b)\}$ ഒരു സമാനബന്ധം ആണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

$f(a) = f(a)$ ആയതുകൊണ്ട്

എല്ലാ $a \in X$ കൾക്കും $(a, a) \in R$ ആയിരിക്കും. ഇതിനാൽ R ഒരു പ്രതിസമബന്ധം ആണ്.

ഇതുപോലെ $(a, b) \in R \Rightarrow f(a) = f(b)$

$\Rightarrow f(b) = f(a)$

$\Rightarrow (b, a) \in R$.

അതുകൊണ്ട് ബന്ധം R ഒരു സമമിതബന്ധം ആണ്.

അടുത്തതായി

$(a, b) \in R$; $(b, c) \in R$ ആയാൽ

$\Rightarrow f(a) = f(b)$; $f(b) = f(c)$ ആണ്.

$\Rightarrow f(a) = f(c)$

$\Rightarrow (a, c) \in R$,

അതുകൊണ്ട് R സാംക്രമികബന്ധം ആകുന്നു.

അതിനാൽ R ഒരു സമാനബന്ധം ആണ്.

ഉദാഹരണം : 45

N എന്ന ഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ദ്വിയാംഗക്രിയകളിൽ ഏതെല്ലാം ക്രമനിയമവും സംയോജകനിയമവും പാലിക്കുന്നു എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(a) $a * b = 1$; $\forall\ a, b \in R$ (b) $a * b = \dfrac{(a+b)}{2}$; $\forall\ a, b \in R$

പരിഹാരം:

(a) ബന്ധം R പ്രകാരം

$\forall a, b \in N$, $a * b = 1$; $b * a = 1$ ആണ്.

അതായത് $a * b = 1 = b * a$

അതുപോലെ $\forall a, b, c \in N$

$(a * b) * c \quad 1 * c = 1$

$a * (b * c) = a * 1 = 1$ ആണ്.

അതുകൊണ്ട് * ക്രമനിയമവും സംയോജകനിയമവും പാലിക്കുന്നു എന്നു മനസിലാക്കാം.

b) ബന്ധം R പ്രകാരം $\forall a, b \in N$

$$a * b = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = b * a \text{ ആണ്.}$$

അതുകൊണ്ട് * ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നു.

$$(a * b) * c = \left(\frac{a+b}{2}\right) * c$$

$$= \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right) + c}{2} = \frac{a+b+2c}{4}.$$

$$a * (b * c) = a * \left(\frac{b+c}{2}\right)$$

$$= \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4}$$

അതായത് $a * (b * c) \neq (a * b) * c$

അതുകൊണ്ട് * സംയോജകനിയമം പാലിക്കുന്നില്ല.

ഉദാഹരണം : 46

A = {1, 2, 3} എന്ന ഗണത്തിൽ നിന്നും അതിലേക്കു തന്നെ ഉണ്ടാക്കാവുന്ന ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണം കണ്ടെത്തുക.

(സൂചന : f: {1,2,3} → {1,2,3} ആയാൽ എത്ര ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദങ്ങൾ നിർവചിക്കാം?)

പരിഹാരം

$f : A \rightarrow A$ അതായത് f: {1,2,3} → {1,2,3} ആയതുകൊണ്ട്, ആകെ ഉണ്ടാക്കാവുന്ന ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണാൻ A യിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ ക്രമീകരണം കണ്ടാൽ മതി. അതായത് 3! = 6.

ഉദാഹരണം : 47

ഗണം A = {1, 2, 3} ആയാൽ ക്രമജോടി (1, 2) ഉം (2, 3) ഉം ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രതിസമവും സാംക്രമികവും ആവുന്നതും സമമിതം അല്ലാത്തതുമായ മൂന്നു ബന്ധങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയും എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

(1, 2), (2, 3) ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രതിസമവും സാംക്രമികവും ആയ ഏറ്റവും ചെറിയ ബന്ധം. R_1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)} ആണ്.

ബന്ധം R_1 ൽ ക്രമജോടി (2,1) കൂടി ചേർത്താൽ

R_2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (1,3)} പ്രതിസമവും സാംക്രമികവും എന്നാൽ സമമിതം അല്ലാത്തതുമായ ബന്ധം ആണ്.

ബന്ധം R_1ൽ ക്രമജോടി (3, 2) കൂടി ചേർത്താൽ

R_3 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2,3), (3, 2), (1,3)} പ്രതിസമവും സാംക്രമികവും ആയതും എന്നാൽ സമമിതം അല്ലാത്തതുമായ ബന്ധം ആണ്.

R_1നോട് കൂടി (2,1), (3,2) എന്നിവ ഒരേ സമയമോ (3,1) ഒറ്റക്കോ ചേർത്താൽ ആ ബന്ധത്തെ സാംക്രമികം ആക്കുന്നതിന് മറ്റ് ക്രമജോടികൾ കൂടി ചേർക്കേണ്ടി വരും. കൂടാതെ ആ ബന്ധം സമമിതം ആവുകയും ചെയ്യും. ആയതിനാൽ ഇത് ചെയ്യാൻ സാധിക്കില്ല.

ആയതുകൊണ്ട് R_1, R_2, R_3 എന്നിവയാണ് നിബന്ധനപ്രകാരം പ്രതിസമവും സാംക്രമികവും ആയതും എന്നാൽ സമമിതം അല്ലാത്തതുമായ മൂന്നു ബന്ധങ്ങൾ.

ഉദാഹരണം : 48

ഗണം {1, 2, 3} നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ക്രമജോടി (1, 2) ഉം (2, 1) ഉം ഉൾക്കൊള്ളുന്ന സമാനബന്ധങ്ങളുടെ എണ്ണം രണ്ട് ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

നിബന്ധനപ്രകാരമുള്ള ഏറ്റവും ചെറിയ ബന്ധം

R_1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)} ആണ്.

ഇതിൽ ഉൾപ്പെടാത്ത നാലു ക്രമജോടികൾ

$(2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1)$ എന്നിവയാണ്.

ബന്ധം സമമിതം ആവാൻ $(2, 3)$ കൂടി ചേർത്താൽ $(3, 2)$ ഉം ചേർക്കണം. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2,3), (3, 2)\}$. ഇത് സാംക്രമികം അല്ല. അതിന് $(1, 3), (3,1)$ കൂടി ചേർക്കണം. അപ്പോൾ

$R_2 = \{(1, 1), (2,2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1,3), (3,1)\}$

സമാനബന്ധങ്ങൾ R_1, R_2 എന്നിവയാണ്.

ഉദാഹരണം : 49

ഗണം $\{1, 2\}$ ൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ദ്വയാംഗക്രിയയിൽ, അനന്യദം 1; 2 ന്റെ പ്രതിലോമം 2 ആയിട്ടുള്ള ഒരു ദ്വയാംഗക്രിയ മാത്രമേ ഉള്ളൂ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ഗണം $\{1, 2\}$ വിലെ * ദ്വയാംഗക്രിയ $\{1, 2\} \times \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$ ലേക്കുള്ള ഒരു ഏകദമാണ്. അതായത്

$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \rightarrow \{1, 2\}$.

1 അനന്യദമായതുകൊണ്ട്

$*(1, 1) = 1, *(1, 2) = 2, *(2, 1) = 2$ എന്നിങ്ങനെ ആയിരിക്കും.

2 എന്നത് 2 ന്റെ പ്രതിലോമം ആയതുകൊണ്ട്

$*(2, 2) = 1$ ആയിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് * തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനപ്രകാരമുള്ള ഏക ദ്വയാംഗക്രിയയാകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 50

$I_N : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ എന്ന അനന്യ ഏകദം നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $I_N(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{N}$ ആണ്. എങ്കിൽ I_N ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. എന്നാൽ $I_N + I_N : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $(I_N + I_N)(x) = I_N(x) + I_N(x) = x + x = 2x$ എന്ന് നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഏകദം പരിക്ഷേപ ഏകദം അല്ലെന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$\forall x \in N, I_N(x) = x$ എന്ന അനന്യ ഏകദം പരിശോധിച്ചാൽ സഹമണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങൾക്കും മണ്ഡലത്തിൽ ഒരു വിലോമപ്രതിബിംബം ഉണ്ടായിരിക്കും. ആയതിനാൽ I_N ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദം ആണ്.

$(I_N + I_N)(x) = 2x$ പരിഗണിച്ചാൽ

സഹമണ്ഡലത്തിലെ 3 എന്ന സംഖ്യയുടെ വിലോമ പ്രതിബിംബം നോക്കിയാൽ

$2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ എന്നാകും

$$x = \frac{3}{2} \notin N$$

എന്നാൽ $x \in$ **N** എന്നായതുകൊണ്ട്, മുകളിലെ 3 എന്ന സംഖ്യയ്ക്ക് മണ്ഡലം **N** ൽ വിലോമപ്രതിബിംബം ഇല്ല. ആയതിനാൽ $I_N \mid I_N$ ഒരു പരിക്ഷേപ ഏകദം അല്ല.

ഉദാഹരണം 51: $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$;

$g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \cos x$ എന്നീ ഏകദങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. f ഉം g യും ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദങ്ങളാണെന്നും $f + g$ ഒന്നിനൊന്നു ഏകദമല്ലെന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം: $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x_1 \neq x_2$ ആയാൽ

$\sin x_1 \neq \sin x_2$, $\cos x_1 \neq \cos x_2$ ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് f, g ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദങ്ങൾ ആണ്.

എന്നാൽ $(f + g)(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$ പരിഗണിച്ചാൽ

$$\sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$$

$$\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$$

$0 \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow (f + g)(0) = (f + g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ആവുന്നു.

അതിനാൽ $f–g$ ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമല്ല.

കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. ഏകദം f : **R** → **R** നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $f(x) = 10x + 7$ എന്നാണ്. $fog = gof = I_R$ ആയ g : **R** → **R** എന്ന ഏകദം കണ്ടുപിടിക്കുക.
2. ഏകദം f : W → W നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത്, n ഒരു ഒറ്റസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, $f(n) = n - 1$; n ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ $f(n) = n + 1$. f പ്രതിലോമ്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. f ന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദം കണ്ടുപിടിക്കുക. [W = അഖണ്ഡസംഖ്യാഗണം]
3. f : **R** → **R**, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ആണെങ്കിൽ $f(f(x))$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

4. $f:\mathbf{R}\rightarrow\{x\in\mathbf{R}:-1<x<1\}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$, $x\in\mathbf{R}$ ഒരു ഒന്നിനൊന്ന്, പരിക്ഷേപ ഏകദമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

5. $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$, $f(x)=x^3$ എന്നത് ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

6. $f:\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{Z}$, $g:\mathbf{Z}\rightarrow\mathbf{Z}$ ആയതും $g\circ f$ ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദവും f, g പരിക്ഷേപ ഏകദമല്ലാത്തതുമായ രണ്ട് ഏകദങ്ങൾ f, g എഴുതുക.

(സൂചന : $f(x)=x$, $g(x)$ $|x$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക.)

7. $f:\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$; $g:\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$

$g\circ f$ പരിക്ഷേപ ഏകദവും എന്നാൽ f പരിക്ഷേപ ഏകദമല്ലാത്തതുമായ രണ്ട് ഏകദങ്ങൾ f, g എഴുതുക.

(സൂചന : $f(x)=x+1$; $g(x)=\begin{cases}x-1, & x>1\\ 1, & x=1\end{cases}$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക)

8. X എന്ന ശൂന്യമല്ലാത്ത ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങളുടെ ഗണമാണ് P(X). P(X) ലെ ഒരു ബന്ധം R നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് എങ്ങനെയെന്ന് ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. A, B ∈ P(X), ARB ആണെങ്കിൽ മാത്രം $A\subset B$. P(X) ലെ ബന്ധം R ഒരു സമാനബന്ധം ആണോ? വ്യക്തമാക്കുക.

9. X എന്ന ശൂന്യമല്ലാത്ത ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങളുടെ ഗണമാണ് P(X). ദ്വയാംഗക്രിയ $*:P(X)\times P(X)\rightarrow P(X)$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $\forall A,B\in P(X)$, $A*B=A\cap B$ എന്നാണ്. എങ്കിൽ ദ്വയാംഗക്രിയ * ന്റെ അനന്യദം X ആണെന്നും P(X) ലെ പ്രതിലോമമുള്ള ഏക അംഗം X ആണെന്നും തെളിയിക്കുക.

10. ഗണം $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ന് അതിനോട് തന്നെ ഉണ്ടാക്കാവുന്ന പരിക്ഷേപ ഏകദങ്ങളുടെ എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

11. $S=\{a, b, c\}$, $T=\{1, 2, 3\}$ ആയാൽ ചുവടെ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഏകദങ്ങൾ. $F:S\rightarrow T$ യുടെ പ്രതിലോമ ഏകദങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ F^{-1} കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (i) $F=\{(a,3), (b,2), (c,1)\}$ (ii) $F=\{(a,2), (b,1), (c,1)\}$

12. $*:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$, $a*b=|a-b|$, $\forall\, a, b\in\mathbf{R}$.

$\circ:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$, $a\circ b=a$, $\forall\, a, b\in\mathbf{R}$.

എന്നിവ തന്നിട്ടുണ്ട്. * ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നുവെന്നും സംയോജക നിയമം പാലിക്കുന്നില്ല എന്നും തെളിയിക്കുക. എന്നാൽ o സംയോജക നിയമം പാലി

ക്കുന്നുവെന്നും ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നില്ലെന്നും തെളിയിക്കുക. തുടർന്ന് $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$, $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. ഈ പ്രത്യേകത സാധ്യമായാൽ * ന് o ത്തിൽ വിതരണനിയമം പാലിക്കുന്നു എന്നു പറയാം. വിതരണനിയമം $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$ സാധ്യമോ? വിശദമാക്കുക.

13. X എന്ന ശൂന്യമല്ലാത്ത ഗണത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങളുടെ ഗണമാണ് P(X). ദ്വയാംഗക്രിയ $*P(X) \times P(X) \to P(X)$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത്

$\forall A, B \in P(X)$, $A * B = (A - B) \cup (B - A)$ എങ്കിൽ * ന്റെ അനന്യദം ϕ (ശൂന്യഗണം) ആണെന്നും ഏതൊരു $A \in P(X)$ ന്റെയും പ്രതിലോമവും $A^{-1} = A$. എന്നും തെളിയിക്കുക.

14. ഗണം {0, 1, 2, 3, 4, 5} ൽ ഒരു ദ്വയാംഗക്രിയ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത്.

$$\forall a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$a * b = \begin{cases} a + b, & a + b < 6 \text{ ആണെങ്കിൽ} \\ a + b - 6, & a + b \geq 6 \text{ ആണെങ്കിൽ} \end{cases}$$

എന്നാണ്. ദ്വയാംഗക്രിയയുടെ അനന്യദം 0 ആണെന്നും $a = 0$ അല്ലാത്ത മറ്റ് അംഗങ്ങളുടെയെല്ലാം പ്രതിലോമം $6 - a$ ആണെന്നും തെളിയിക്കുക.

15. $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-4, -2, 0, 2\}$ ആയാൽ $f, g : A \to B$,

$f(x) = x^2 - x$, $x \in A$; $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1$, $x \in A$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

എങ്കിൽ f, g തുല്യമാണോ? ഉത്തരം വ്യക്തമാക്കുക.

($f : A \to B$, $\forall a \in A$, $f(a) = g(a)$ ആയാൽ അവ തുല്യ ഏകദങ്ങൾ എന്നു പറയാം).

16. A = {1, 2, 3} ആയാൽ ക്രമജോടി (1, 2) ; (1, 3) എന്നിവ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന പ്രതിസമവും സമമിതവും ആയിട്ടുള്ളതും സംക്രമികം അല്ലാത്തതുമായ A യിലെ ബന്ധങ്ങളുടെ എണ്ണം .... ആകുന്നു.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

17. A = {1, 2, 3} ആയാൽ ക്രമജോടി (1, 2) ഉൾക്കൊള്ളുന്ന A യിലെ സമാനബന്ധങ്ങളുടെ എണ്ണം .... ആകുന്നു.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

18. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ എന്ന സിഗ്നം ഏകദം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത്

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$g : R \to R$ എന്ന വൻപൂർണസംഖ്യാഏകദം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $g(x) = [x]$, എന്നുമായാൽ *fog* യും *gof* ഉം (0, 1] ൽ ഒരുമിക്കുമോ?

19. ഗണം $\{a, b\}$ ലെ ദ്വയാംഗക്രിയകളുടെ എണ്ണം ...... ആകുന്നു.

(A) 10 (B) 16 (C) 20 (D) 8

സംഗ്രഹം

ഈ പാഠത്തിൽ വിവിധതരം ബന്ധങ്ങൾ സമാനബന്ധം, സമ്മിശ്ര ഏകദം, പ്രതിലോമ ഏകദം, ദ്വയാംഗക്രിയ എന്നിവയെ കുറിച്ച് പഠിച്ചു. ഈ പാഠഭാഗത്തിലെ പ്രധാന ആശയങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

- ശൂന്യബന്ധം *(empty relation)* : ഗണം X ലെ ബന്ധം $R = \phi \subset X \times X$ ശൂന്യബന്ധം ആകുന്നു.
- സമസ്ത ബന്ധം (*universal relation)* : ഗണം X ലെ ബന്ധം $R = X \times X$ സമസ്തബന്ധം ആകുന്നു.
- പ്രതിസമ ബന്ധം *(reflexive relation)* : ഗണം X ലെ ഒരു ബന്ധം R പ്രതിസമ ബന്ധം ആവണമെങ്കിൽ $\forall a \in X, (a, a) \in R$ ആകണം.
- സമമിത ബന്ധം *(symmetric relation)* : ഗണം X ലെ ഒരു ബന്ധം R സമമിത ബന്ധം ആവണമെങ്കിൽ $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ ആകണം
- സാംക്രമിക ബന്ധം *(transitive relation)* : ഗണം X ലെ ഒരു ബന്ധം R സാംക്രമിക ബന്ധം ആവണമെങ്കിൽ $(a, b) \in R$ ഉം $(b, c) \in R$ ഉം ആയാൽ $(a, c) \in R$ ആകണം
- സമാനബന്ധം *(equivalence relation)* : ഗണം X ലെ പ്രതിസമവും സമമിതവും സാംക്രമികവും ആയ ബന്ധം R നെ സമാനബന്ധം എന്നു പറയുന്നു.
- സമാനവിഭാഗം *(equivalence class)* : X എന്ന ഗണത്തിലെ സമാനബന്ധം R ൽ ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുള്ള സമാനവിഭാഗം $[a]$ എന്നത് $a \in X$ മായി ബന്ധപ്പെട്ട എല്ലാ b കളും ഉൾപ്പെട്ട X ന്റെ ഉപഗണം ആണ്.
- ഏകദം $f : X \to Y$ ഒന്നിനൊന്ന് (one-one അല്ലെങ്കിൽ injective) ആകണമെങ്കിൽ $\forall x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ആയിരിക്കണം.
- ഏകദം $f : X \to Y$ പരിക്ഷേപ ഏകദം (surjective അല്ലെങ്കിൽ onto) ആകണമെങ്കിൽ, ഏതൊരു $y \in Y$ ക്കും മണ്ഡലം X ൽ $f(x) = y$ ആയ ഒരു x ഉണ്ടാകണം $(x \in X)$

- $f: X \to Y$ ഉഭയക്ഷേപ (bijective) ഏകദമാകണമെങ്കിൽ f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് പരിക്ഷേപ ഏകദം ആവണം.
- $f: A \to B$, $g: B \to C$ എന്നീ ഏകദങ്ങളുടെ സമ്മിശ്ര ഏകദം $gof: A \to C$ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത് $\forall\ x \in A$, $gof(x) = g(f(x))$ എന്നാണ്.
- ഏകദം $f: X \to Y$ പ്രതിലോമ്യമാകണമെങ്കിൽ മറ്റൊരു ഏകദം $g: Y \to X$ $gof = I_X$, $fog = I_Y$ ആകുംവിധം ഉണ്ടാകണം.
- ഏകദം $f: X \to Y$ പ്രതിലോമ്യമാവണമെങ്കിൽ (invertible) എങ്കിൽമാത്രം (if and only if) f ഒന്നിനൊന്ന് പരിക്ഷേപ ഏകദമാകണം.
- X ഒരു പരിമിത ഗണം (finite set) ആയാൽ $f: X \to X$ ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദം ആണെങ്കിൽ അതൊരു പരിക്ഷേപ ഏകദവും ആകും. അതുപോലെ തിരിച്ചും പറയാം. ഇത് പരിമിതഗണത്തിന്റെ ഒരു സവിശേഷതയാണ്. അനന്തഗണത്തിന് ഇത് ശരിയായിരിക്കില്ല.
- A എന്ന ഗണത്തിലെ * ദ്വയാംഗക്രിയ $A \times A$ യിൽ നിന്നും A യിലേക്കുള്ള ഒരു ഏകദമാണ്.
- $* : X \times X \to X$ എന്ന ദ്വയാംഗക്രിയയുടെ അനന്യദം ആണ് $e \in X$ എങ്കിൽ $\forall\, a \in X$, $a * e = a = e * a$ ആയിരിക്കും.
- $* : X \times X \to X$, എന്ന ദ്വയാംഗക്രിയയിൽ $a \in X$ എന്ന അംഗം പ്രതിലോമ്യം ആകണമെങ്കിൽ $b \in X$ എന്ന അംഗം ഉണ്ടാകുകയും $a * b = e = b * a$ പാലിക്കുകയും വേണം (e എന്നത് * ന്റെ അനന്യദം ആണ്).

  ഇവിടെ b യെ a യുടെ പ്രതിലോമം എന്നു വിളിക്കുകയും a^{-1} എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുകയും ചെയ്യാം.
- X എന്ന ഗണത്തിൽ * ക്രമനിയമം പാലിക്കണമെങ്കിൽ $\forall\, a, b \in X$, $a * b = b * a$ ആവകണം
- X എന്ന ഗണത്തിൽ * സംയോജകനിയമം പാലിക്കണമെങ്കിൽ $\forall\, a, b, c \in X$, $(a * b) * c = a * (b * c)$ ആയിരിക്കണം.

ചരിത്രകുറിപ്പ്

ഏകദം എന്ന ആശയം വളരെ വർഷങ്ങൾ കൊണ്ട് രൂപപ്പെട്ട ഒന്നാണ്. പ്രശസ്ത ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ ദെക്കാർത്തെ (Descartes) (1596-1650). 1637 ൽ Geometric എന്ന തന്റെ കൈയെഴുത്തുകൃതിയിലാണ് function എന്ന പദം ആദ്യമായി ഉപയോഗിച്ചത്. ജ്യാമിതീയ വക്രങ്ങളായ സമവക്രം, ന്യൂനവക്രം, അധിവക്രം എന്നിവയെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിനിടയിൽ x എന്ന ചരത്തിന്റെ പൂർണസംഖ്യാകൃതിയായ x^n നെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ് ഈ ആശയം ഉപയോഗിച്ചത്, ജെയിംസ് ഗ്രിഗറി (1636-1675) തന്റെ Vera Calculi et Hyperbolae Quadratura എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിൽ (1667) മറ്റു അളവുകളിൽ നിന്നും തുടർച്ചയായ ബീജീയ ക്രിയകൾ വഴിയോ മറ്റു ക്രിയകൾ വഴിയോ ലഭിക്കുന്ന അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ് function എന്ന പദം ഉപയോഗിച്ചത്. തുടർന്ന് GW ലൈബ്നിറ്റ്സ് Methodus tangentium inversa, seu de functionibus എന്ന തന്റെ കൃതിയിൽ 1673 ൽ function എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വക്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ പോലെ, ഒരു വക്രത്തിന്റെ ചരിവുപോലെ, ഒരു വക്രത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലെ തൊടുവര, ലംബം എന്നിവ പോലെ ഒരു വക്രത്തിൽ ബിന്ദുവിൽനിന്നും ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള മാറ്റത്തിനു വിധേയമാകുന്ന വസ്തുവിനെ സൂചിപ്പിക്കാനായിരുന്നു ഇത്. എന്നാൽ 1714 ലെ Historia എന്ന കൃതിയിൽ ഒരു ചരത്തെ ആശ്രയിക്കുന്ന അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ് അദ്ദേഹം function ഉപയോഗിച്ചത്. 'Function of x' എന്ന് ആദ്യം പ്രയോഗിച്ചതും അദ്ദേഹമാണ്. x ന്റെ ഏകദത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ϕx എന്ന സൂചകം ആദ്യം ഉപയോഗിച്ചത് ജോൺ ബെർണൂളി (1667-1748) ആണ്. "*Analysis Infinitorium*" എന്ന തന്റെ കൃതിയുടെ ആദ്യ ഭാഗത്ത് ലെയോൺഹാർട്ട് ഒയ്ലറാണ് (1707-1783) 1734 ൽ f, F, ϕ തുടങ്ങിയ അടയാളങ്ങളുപയോഗിച്ച് ഏകദങ്ങളെ പൊതുവായി സൂചിപ്പിച്ചത്. പിന്നീട് യോസഫ് ലൂയി ലഗ്രാഞ്ച്ഷെ (1736-1813). Theorie des fouctiones analytiques എന്ന 1793 ലെ തന്റെ കൃതിയിൽ അനലിറ്റിക ഏകദങ്ങളെപ്പറ്റി വിസ്തരിക്കവെ $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള സൂചകങ്ങൾ കൊണ്ട് തന്റെ വിവിധ ഏകദങ്ങളെക്കുറിച്ചു. തുടർന്ന് ലെഷ്യൂൺ ഡിറിഷ്‌ലെ (1805-1859) നൽകിയ ഏകദ നിർവചനമാണ് ഗണങ്ങൾ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള, ഇന്ന് ഉപയോഗിക്കുന്ന നിർവചനം ഗണങ്ങളുടെ പഠനത്തിലൂടെ ജോർജ് കാന്റർ (1845-1918) നൽകിയതുവരെ ഉപയോഗത്തിലിരുന്നത്. ഡിറിഷ്‌ലെ നൽകിയ നിർവചനത്തിന്റെ ഒരു അമൂർത്ത രൂപം മാത്രമാണ് ഗണങ്ങൾ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള ഇന്നത്തെ ഏകദ നിർവചനം എന്നു കാണാവുന്നതാണ്.

I5P2E4

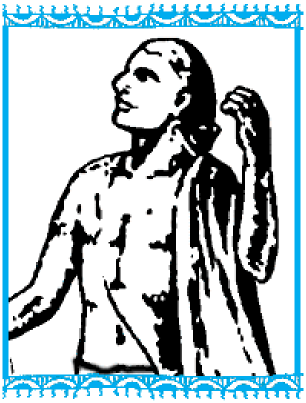
അധ്യായം **2**

പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ
(INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

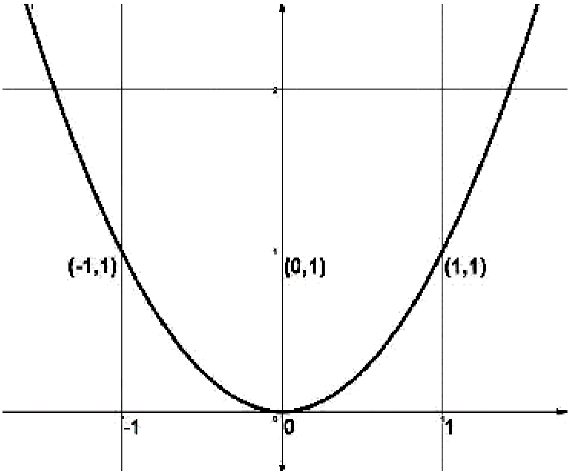
❖ *ഗണിതം അടിസ്ഥാനപരമായി സ്വയം വ്യക്തമാക്കപ്പെട്ട വസ്തുതകളുടെ ശാസ്ത്രമാണ് – ഫെലിക്സ് ക്ലൈൻ* ❖

2.1 ആമുഖം

ഏകദങ്ങൾ എന്നാലെന്താണെന്നും വിവിധ തരത്തിലുള്ള ഏകദങ്ങളെക്കുറിച്ചും നാം മുൻ അധ്യായത്തിൽ വിശദമായി പഠിച്ചത് ഓർക്കുമല്ലോ. f എന്ന ഏകദത്തിന് പ്രതിലോമ ഏകദം ഉണ്ടാവണമെങ്കിൽ f ഒന്നിനൊന്നും പരിക്ഷേപവും ആയിരിക്കണമെന്ന് നാം മനസിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. മുൻ അധ്യായത്തിൽ പഠിച്ച ചില ഏകദങ്ങൾ ഇവിടെ ഓർമിക്കുന്നത് നന്നായിരിക്കും. ഉദാഹരണത്തിന് $f:\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x)$ x^2 ന്റെ ഗ്രാഫ് ഒരു പരാബൊളയാണെന്നറിയാമല്ലോ.



ആര്യഭട്ട
(476-550 A. D.)



ചിത്രം 2.1

ഇവിടെ f ഒന്നിനൊന്ന് എന്ന പ്രത്യേകത അനുസരിക്കുന്നില്ല. കൂടാതെ ഇത് പരിക്ഷേപവും അല്ല. അതുകൊണ്ട് f ന് പ്രതിലോമ ഏകദം ഇല്ല എന്നു മനസിലാക്കാം. 11-ാം ക്ലാസിൽ പഠിച്ച ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ അവയുടെ സ്വാഭാവിക മണ്ഡലത്തിലും സഹമണ്ഡലത്തിലും ഒന്നിനൊന്നും അല്ല, പരിക്ഷേപവും അല്ല.

ഇത്തരം ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ മണ്ഡലം നിജപ്പെടുത്തി അവയുടെ പ്രതിലോമ ഏകദങ്ങളെ നിർവചിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നും അവയുടെ പ്രത്യേകതകളുമാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.

കലനത്തിൽ പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ പ്രധാനപങ്ക് വഹിക്കുന്നുണ്ട്. 11-ാം ക്ലാസിൽ പഠിച്ച ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ മണ്ഡലം, രംഗം എന്നിവ ഓർമിച്ചുകൊണ്ട് ഈ അധ്യായത്തിന്റെ ചർച്ച തുടങ്ങാം.

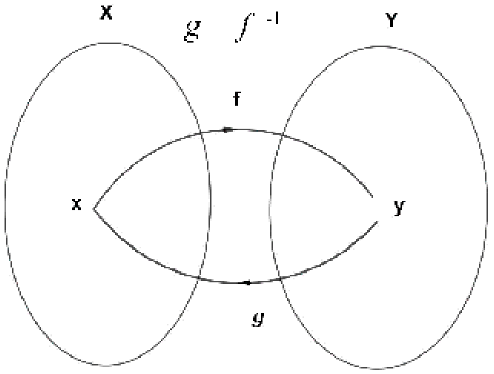
ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ	മണ്ഡലം	രംഗം
sine	$\mathbf{R}$	$[-1, 1]$
cosine	$\mathbf{R}$	$[-1, 1]$
tangent	$\mathbf{R} - \{x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$
cotangent	$\mathbf{R} - \{x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$
secant	$\mathbf{R} - \{x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$
cosecant	$\mathbf{R} - \{x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$

2.2 അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ

$y = f(x)$ എന്നു നിർവചിക്കപ്പെട്ട $f : X \to Y$ എന്ന ഏകദം ഉഭയക്ഷേപം ആകണമെങ്കിൽ $x = g(y)$ ആകുന്ന വിധത്തിൽ $g : Y \to X$ എന്ന മറ്റൊരു ഏകദം കണ്ടെത്താൻ കഴിയണം. കൂടാതെ g യുടെ മണ്ഡലം f ന്റെ രംഗവും, g യുടെ രംഗം f ന്റെ മണ്ഡലവും ആകണം. ഇവിടെ g എന്ന ഏകദത്തെ f ന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദം എന്നു പറയുന്നു. ഇത് $g = f^{-1}$ എന്നെഴുതാം. f^{-1} നെ $\frac{1}{f}$ എന്ന അർഥത്തിലല്ല എഴുതിയിരിക്കുന്നത് എന്നു പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കുമല്ലോ. കൂടാതെ g യും ഒരു ഉഭയക്ഷേപ ഏകദമായിരിക്കും.

$$(f^{-1} \text{ o } f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$
$$(f \text{ o } f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \quad \text{---------(1)}$$

$f(x) = y$ ആയാൽ $f^{-1}(y) = x$ എന്നും മനസിലാക്കാമല്ലോ.



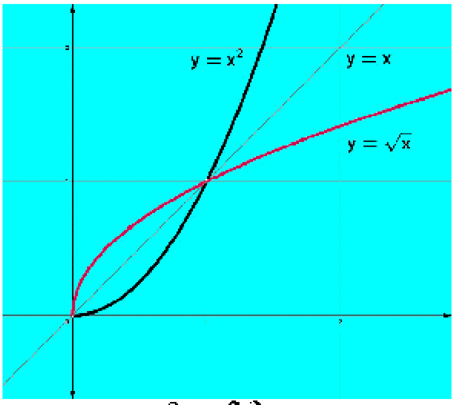
ചിത്രം 2.2

2.2.1 പ്രതിലോമ ഏകദങ്ങളുടെ ജ്യാമിതി

ആമുഖത്തിൽ പരാമർശിച്ചതുപോലെ $f: R \to R$, $f(x) = x^2$ എന്ന ഏകദത്തിന് പ്രതിലോമ ഏകദമില്ല. എന്നാൽ f ന്റെ മണ്ഡലവും രംഗവും നിജപ്പെടുത്തി $(0, \infty)$ ആയി മാറ്റിയാൽ $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ അല്ലെങ്കിൽ $f : R^+ \to R^+$ ഒരു ഉഭയക്ഷേപ ഏകദമാണ്. അതുകൊണ്ട് ഇതിന്റെ പ്രതിലോമം എഴുതാൻ കഴിയുമല്ലോ.

$f(x) = x^2$ ആയാൽ $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ആയിരിക്കും. ഇവയുടെ ഗ്രാഫുകൾ ഒരേ അക്ഷങ്ങളെ ആസ്പദമാക്കി വരച്ചു നോക്കാം.

ഈ ചിത്രം നിരീക്ഷിച്ചാൽ $f(x) = x^2$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫുകൾ $y = x$ എന്ന വരയ്ക്ക് പരസ്പരം പ്രതിബിംബങ്ങളാണെന്ന് കാണാമല്ലോ. ഈ ആശയം ഏതൊരു ഏകദത്തിനും അതിന്റെ പ്രതിലോമത്തിനും പൊതുവായി ശരിയാണെന്ന് കാണാം. ഈ പ്രത്യേകത ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ പ്രതിലോമങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ മനസിലാക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു. ഇനി നമുക്ക് പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളെ ഓരോന്നായി പരിചയപ്പെടാം.



ചിത്രം 2.3

2.2.2: sine ഏകദത്തിന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദവും അതിന്റെ ഗ്രാഫും

sine ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം R, രംഗം $[-1, 1]$ എന്ന് നമുക്കറിയാം. ഇവിടെ sine ഒരു ഒന്നിനൊന്നു ഏകദമല്ല. ഇതിന്റെ മണ്ഡലത്തെ $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right], \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ .... എന്നിങ്ങനെ ഉപഭാഗങ്ങളാക്കിയാൽ ഓരോ ഭാഗത്തും sine ഏകദം $[-1, 1]$ രംഗമായ ഒരു ഉഭയക്ഷേപ ഏകദം ആണ്. അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഈ ഓരോ ഉപഭാഗത്തിനും sine ന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദം നിർവചിക്കാം. sine ന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദത്തെ $\sin^{-1}$ എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ടാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

> $f(x) = \sin x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് $y = x$ എന്ന വരയിൽ 'Reflect' ചെയ്യുക. കിട്ടുന്ന ഗ്രാഫ് ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ആണോ? എന്തുകൊണ്ട്? ഇതുപോലെ മറ്റ് ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങളുടെയും ഗ്രാഫ് വരച്ച് $y \quad x$ എന്ന വരയിലുള്ള പ്രതിബിംബം എടുത്തുനോക്കൂ.

$\sin^{-1}x \neq \frac{1}{\sin x}$ എന്നത് പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കുമല്ലോ. മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച ഉപഭാഗങ്ങളിൽ $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ നെ $\sin^{-1}$ ന്റെ മുഖ്യവിലഭാഗം (principal value branch) എന്നു പറയുന്നു. അതുകൊണ്ട് $\sin^{-1}$ എന്ന ഏകദത്തെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാം.

$$\sin^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ഇവിടെ, സർവസമവാക്യം (1) ഉപയോഗിച്ച്

$$\sin(\sin^{-1} x) = x, \ -1 \leq x \leq 1$$

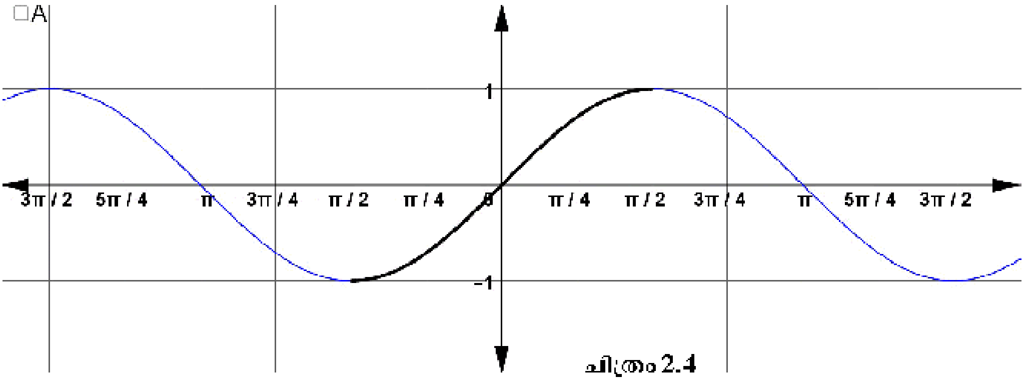
$$\sin^{-1}(\sin x) = x, \ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

> $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ മണ്ഡലമായി എടുത്തുകൊണ്ട് $\sin x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ചു നോക്കൂ. ഇതിനായി $\left[-\frac{pi}{2} \leq x \leq \frac{pi}{2}, \sin(x)\right]$ എന്ന input command നൽകിയാൽ മതി. ഈ ഗ്രാഫിന്റെ $y = x$ ലുള്ള പ്രതിബിംബം ഒരു ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫാണോ? എന്തുകൊണ്ട്? $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ മണ്ഡലമായി എടുത്തുകൊണ്ട് cosx നിർവചിച്ചാൽ അതൊരു പ്രതിലോമ്യ ഏകദമാണോ? ഈ രീതിയിൽ പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ.

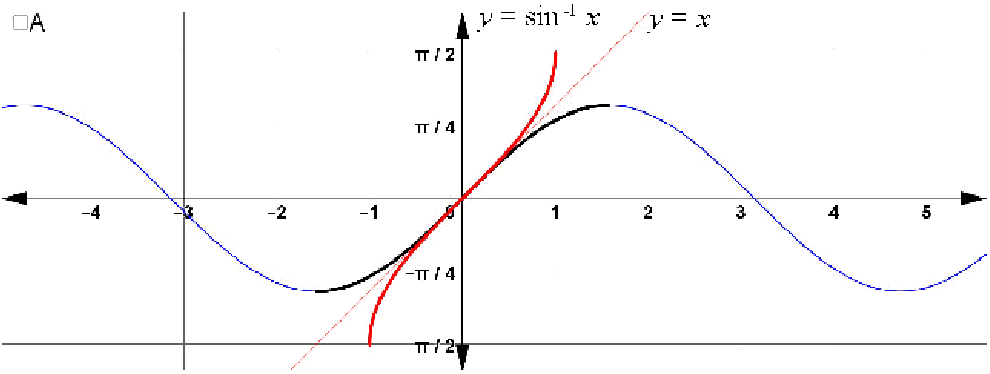
അതായത് $y = \sin^{-1} x$ ആയാൽ $x = \sin y$ എന്നെഴുതാം.

മുൻപ് വിശദീകരിച്ചതുപോലെ ഒരു ഏകദവും അതിന്റെ പ്രതിലോമവും $y = x$ എന്ന വരക്ക് പരസ്പരം പ്രതിബിംബമായിരിക്കും. അങ്ങനെയെങ്കിൽ $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദം $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y = x$ എന്ന വരക്ക് പ്രതിബിംബമായിരിക്കും. ഈ ആശയം ഉപയോഗിച്ച് $\sin^{-1}$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരക്കാം.

$y = \sin x$, $y = \sin^{-1} x$ എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫുകൾ ഒരേ അക്ഷങ്ങളെ ആസ്പദമാക്കി വരച്ചിരിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.



ചിത്രം 2.4



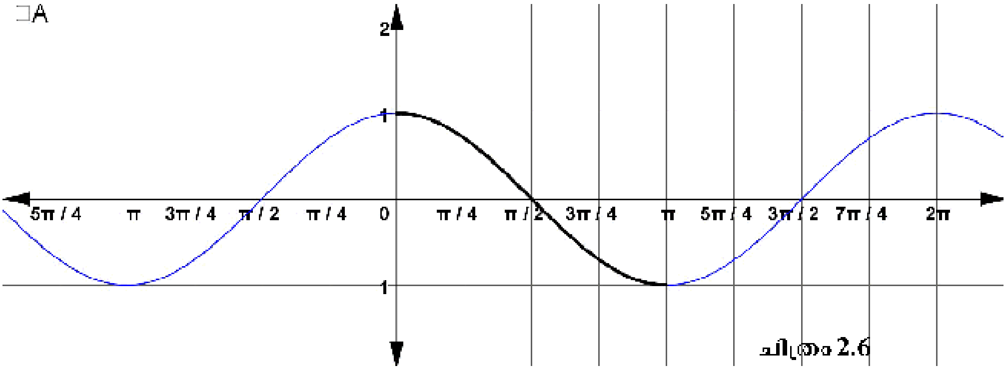
ചിത്രം 2.5

2.2.3 cosine ഏകദത്തിന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദവും അതിന്റെ ഗ്രാഫും

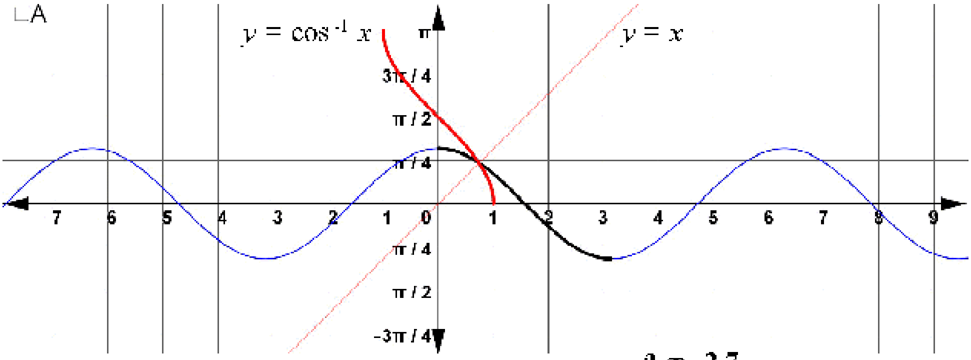
$\cos : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$ എന്നത് ഒരു ഉഭയക്ഷേപ ഏകദം അല്ല എന്ന് നാം മനസിലാക്കിയല്ലോ. എന്നാൽ മണ്ഡലത്തെ $[-2\pi, -\pi]$, $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ ..... എന്നിങ്ങനെ ഉപഭാഗങ്ങളാക്കി മാറ്റിയാൽ ഓരോ ഭാഗത്തും cosine ഏകദം $[-1, 1]$ രംഗമായിട്ടുള്ള ഒരു ഉഭയക്ഷേപ ഏകദമായി മാറും. ഇവിടെ $[0, \pi]$ എന്ന ഭാഗം മുഖ്യവിലഭാഗമായി എടുത്താൽ $\cos^{-1}$ എന്ന ഏകദത്തെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാം.

$\cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

$y \quad \cos x, y \quad \cos^{-1} x$ എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫുകൾ ഒരേ അക്ഷങ്ങളെ ആസ്പദമാക്കി വരച്ചിരിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.



ചിത്രം 2.6



ചിത്രം 2.7

സർവസമവാക്യം (1) ഉപയോഗിച്ച്

$$\cos(\cos^{-1}x) \quad x, \; -1 \le x \le 1$$

$$\cos^{-1}(\cos x) = x, \; 0 \le x \le \pi$$

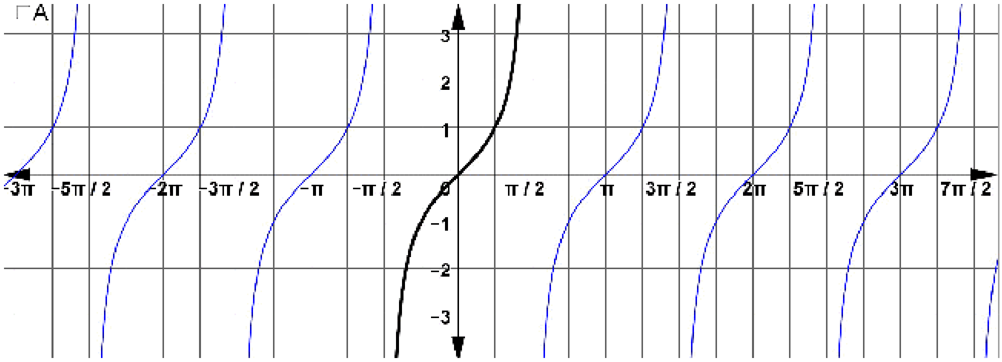
$y = \cos^{-1} x$ ആയാൽ $x = \cos y$ ആയിരിക്കും

2.2.4 tangent ഏകദത്തിന്റെ പ്രതിലോമവും അതിന്റെ ഗ്രാഫും

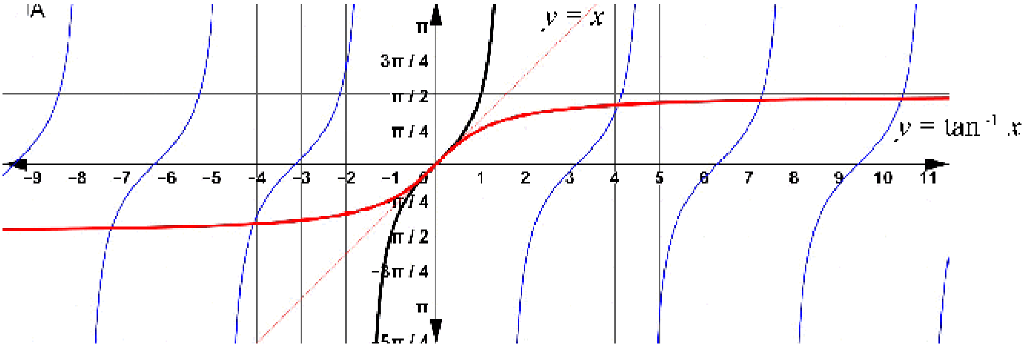
tangent ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം $\{x : x \in \mathbf{R}, x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ എന്നും രംഗം **R** എന്നും നാം പഠിച്ചതു ഓർമിക്കുമല്ലോ. tan ഏകദം $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗുണിതങ്ങൾക്ക് നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല എന്നും നാം കണ്ടു. tan ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തെ നിജപ്പെടുത്തി $\left(\frac{-3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ .... എന്നിങ്ങനെ ഉപഭാഗങ്ങളാക്കി മാറ്റിയാൽ ഓരോ ഭാഗത്തും tan ഏകദം R രംഗമായ ഒരു ഉഭയക്ഷേപ ഏകദമായിരിക്കുമെന്ന് കാണാം. ഇവിടെ $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ എന്ന ഭാഗം മുഖ്യവിലഭാഗമായി എടുത്താൽ tan ന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദമായ $\tan^{-1}$ നെ ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\tan^{-1} : \mathbf{R} \to \left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$y = \tan x$, $y = \tan^{-1}x$ എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫുകൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതു ശ്രദ്ധിക്കുക.



ചിത്രം 2.8



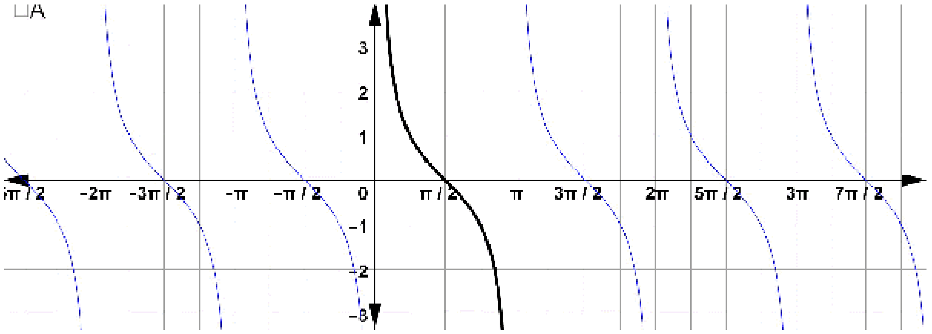
ചിത്രം 2.9

2.2.5 cotangent ഏകദത്തിന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദവും അതിന്റെ ഗ്രാഫും

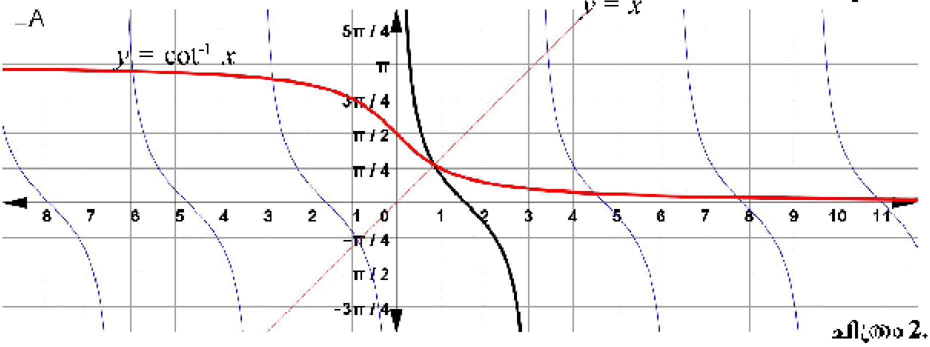
cotangent ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം $\{x : x \in \mathbf{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ എന്നും രംഗം R എന്നും പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതായത് cot ഏകദം π യുടെ പൂർണസംഖ്യകളുടെ ഗുണിതങ്ങൾക്ക് നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. cot ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തെ നിജപ്പെടുത്തി $(-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi)$............ എന്നിങ്ങനെ ഭാഗിച്ചാൽ ഈ ഓരോ ഭാഗത്തും cot ഏകദം ഒരു ഉഭയക്ഷേപ ഏകദമായിരിക്കും. ഇതിൽ $(0, \pi)$ എന്ന ഭാഗത്തെ മുഖ്യ h re ˆ nKanb n F Sp¯ nÂ $\cot^{-1}$ നെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാം.

$$\cot^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow (0, \pi)$$

$y = \cot x$, $y = \cot^{-1}x$ എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫുകൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.



ചിത്രം 2.10



ചിത്രം 2.11

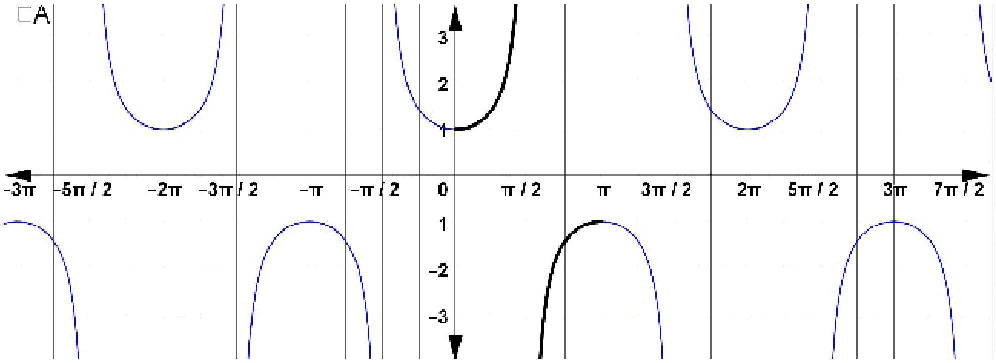
2.2.6 secant ഏകദത്തിന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദവും അതിന്റെ ഗ്രാഫും

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ ആയതുകൊണ്ട് $y = \sec x$ ന്റെ മണ്ഡലം $\{x : x \in \mathbf{R}, x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ എന്നും രംഗം $\mathbf{R} - (-1, 1)$ എന്നും നാം പഠിച്ചു. sec ഏകദം

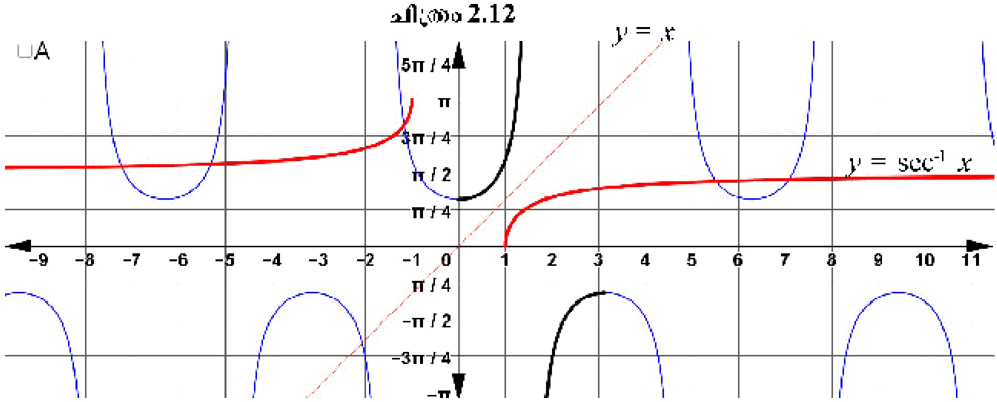
$\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗുണിതങ്ങളിൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. മണ്ഡലത്തെ നിജപ്പെടുത്തി $[-\pi, 0] - \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$, $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $[\pi, 2\pi] - \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$......... എന്നിങ്ങനെ ഭാഗിച്ചാൽ ഓരോ ഭാഗത്തും sec ഏകദം $\mathbf{R} - (-1, 1)$ രംഗമായി വരുന്ന ഒരു ഉഭയക്ഷേപ ഏകദമായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ എന്ന ഭാഗം മുഖ്യവിലഭാഗമായി എടുത്താൽ $\sec^{-1}$ നെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാം.

$$\sec^{-1} : \mathbf{R} - (-1,1) \rightarrow [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$y = \sec x$, $y = \sec^{-1} x$ എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫുകൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതു ശ്രദ്ധിക്കുക.



ചിത്രം 2.12



ചിത്രം 2.13

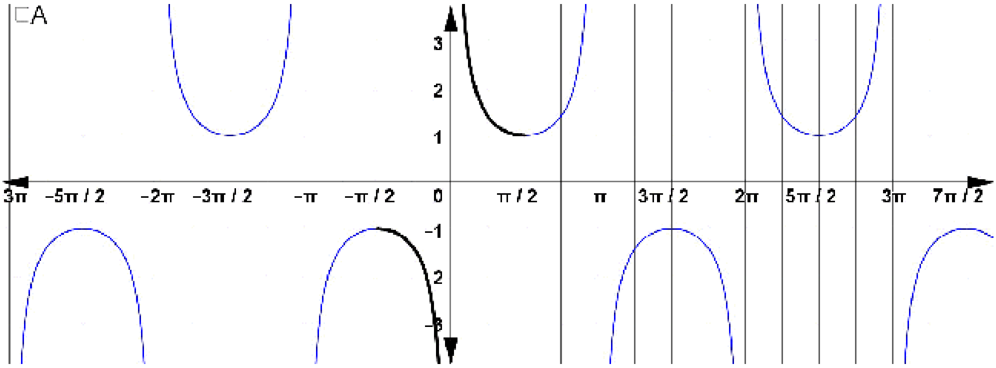
> $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ ഇവയുടെ ഗ്രാഫുകൾ ലഭിക്കാൻ യഥാക്രമം $a\sin(x)$, $a\cos(x)$, $a\tan\,(x)$ എന്നീ input command നൽകിയാൽ മതി. $\text{cosec}^{-1}x$, $\sec^{-1}x$ എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫുകൾ ലഭിക്കാൻ യഥാക്രമം $a\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $a\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ എന്നിങ്ങനെ നൽകാം. $\cot^{-1}(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാൻ $\frac{\pi}{2} - a\tan(x)$ എന്നും നൽകാം.

2.2.7 cosec ഏകദത്തിന്റെ പ്രതിലോമ ഏകദവും അതിന്റെ ഗ്രാഫും

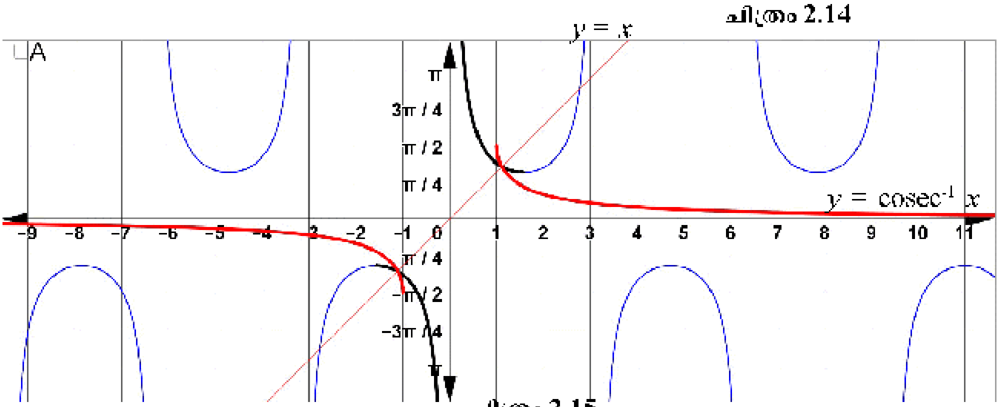
$\text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}$ ആയതുകൊണ്ട് cosec ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം $\{x : x \in \mathbf{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ എന്നും രംഗം $\mathbf{R} - (-1, 1)$ എന്നും നാം 11-ാം ക്ലാസിൽ പഠിച്ചതു ഓർമ്മയുണ്ടാകുമല്ലോ. $y = \text{cosec}\ x$ ആയാൽ $y \in \mathbf{R} - (-1, 1)$ കൂടാതെ π യുടെ പൂർണ്ണ സംഖ്യാഗുണിതങ്ങളിൽ cosec x നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. ഇതിന്റെ മണ്ഡലത്തെ $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ .... എന്നിങ്ങനെ ഉപഭാഗങ്ങളാക്കിയാൽ cosec എന്ന ഏകദം R– (–1, 1) രംഗമായ ഒരു ഉഭയക്ഷേപ ഏകദമായിരിക്കും. ഇവിടെ $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ നെ മുഖ്യവിലഭാഗമായി എടുത്താൽ cosec^{-1} എന്ന ഏകദത്തെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതു പോലെ എഴുതാം. $\text{cosec}^{-1} : \mathrm{R} - (-1, 1) \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$.

> ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ, പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ എന്നിവ വരക്കുമ്പോൾ പലപ്പോഴും അക്ഷങ്ങളിൽ $\pi/2$, π...... എന്ന രീതിയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത് സൗകര്യപ്രദമായിരിക്കും. X അക്ഷത്തിൽ ഈ രീതിയിൽ അടയാളപ്പെടുത്താൻ Graphic view ൽ Right click ചെയ്ത് Graphic → x axis → distance → $\pi/2$ എന്ന് select ചെയ്യുക

$y = \text{cosec}\ x$, $y = \text{cosec}^{-1}\ x$ എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫുകൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതു ശ്രദ്ധിക്കുക.



ചിത്രം 2.14



ചിത്രം 2.15

പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ		മണ്ഡലം		രംഗം (മുഖ്യവിലഭാഗം)
$\sin^{-1}$	:	$[-1, 1]$	$\rightarrow$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}$	:	$[-1, 1]$	$\rightarrow$	$[0, \pi]$
cosec^{-1}	:	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\rightarrow$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$\sec^{-1}$	:	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\rightarrow$	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$\tan^{-1}$	:	$\mathbf{R}$	$\rightarrow$	$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1}$	:	$\mathbf{R}$	$\rightarrow$	$(0, \pi)$

കുറിപ്പ്

$\sin^{-1}x$ നെ $(\sin\ x)^{-1}$ എന്ന അർത്ഥത്തിലല്ല ഇവിടെ എഴുതിയിരിക്കുന്നത്. $\sin^{-1}x \neq \frac{1}{\sin x}$ എന്നാൽ $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$. ഇതുപോലെയാണ് മറ്റ് പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളും. ഒരു പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദത്തിന്റെ ഭാഗം പ്രത്യേകം എടുത്തു പറഞ്ഞിട്ടില്ലെങ്കിൽ അത് മുഖ്യവിലഭാഗമായി സ്വീകരിക്കണം. ഒരു പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദത്തിന്റെ മുഖ്യവിലഭാഗത്തുള്ള വിലയെ അതിന്റെ മുഖ്യവില (*principal value*) എന്നു പറയുന്നു.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം.

ഉദാഹരണം : 1

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ന്റെ മുഖ്യവില കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = y$ എന്നിരിക്കട്ടെ. അതുകൊണ്ട് $\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

കൂടാതെ $\frac{\pi}{4} \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ അതുകൊണ്ട് $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ന്റെ മുഖ്യവില $\frac{\pi}{4}$ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 2

$\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ യുടെ മുഖ്യവില കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = y$ എന്നെടുത്താൽ

$$\cot y = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

കൂടാതെ $\frac{2\pi}{3} \in (0, \pi)$

$\therefore \cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ന്റെ മുല്യവില $\frac{2\pi}{3}$ ആണെന്നു മനസിലാക്കാമല്ലോ.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 2.1

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ മുഖ്യവില കണ്ടെത്തുക.

1. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 2. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 3. $\text{cosec}^{-1}(2)$

4. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ 5. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 6. $\tan^{-1}(-1)$

7. $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 8. $\cot^{-1}(\sqrt{3})$ 9. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

10. $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ വില കണ്ടെത്തുക.

11. $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 12. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

13. $\sin^{-1}x = y$ ആയാൽ

(A) $0 \le y \le \pi$ (B) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < y < \pi$ (D) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

14. $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ ന് തുല്യമായത്

(A) π (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

2.3 പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതകൾ

പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ പ്രധാനപ്പെട്ട ചില പ്രത്യേകതകൾ ഈ ഭാഗത്ത് തെളിയിക്കുകയാണ്. പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ മണ്ഡലം പ്രത്യേകിച്ച് തന്നിട്ടില്ലെങ്കിൽ അവ മുഖ്യവിലഭാഗമായിരിക്കും എന്ന് ഓർക്കേണ്ടതുണ്ട്. മണ്ഡലത്തിന്റെ എല്ലാ വിലകൾക്കും പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ ചില പ്രത്യേകതകൾ ശരിയായിക്കൊള്ളണമെന്നില്ല. പ്രതിലോമ ത്രികോ

ണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന മണ്ഡലത്തിലെ 'x' ന്റെ ഏതാനും വിലകൾക്കു മാത്രമാണ് ഈ പ്രത്യേകതകൾ ശരിയാവുന്നത് എന്നു കാണാം. എന്നാൽ ഇതിന്റെ വിശദമായ പഠനം ഉയർന്ന ക്ലാസുകളിൽ നടക്കുന്നതാണ്.

$y = \sin^{-1}x$ എങ്കിൽ $x = \sin y$ എന്നും

$x = \sin y$ എങ്കിൽ $y = \sin^{-1}x$ എന്നും

നാം മനസ്സിലാക്കി.

അതുകൊണ്ട്

$\sin(\sin^{-1}x) = x,\ x \in [-1, 1]$

$\sin^{-1}(\sin x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ആണ്.

$\sin^{-1}(\sin(x))$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ചു നോക്കൂ (asin(sin (x) എന്ന input command നൽകിയാൽ മതി). $\sin^{-1}(\sin(x)) = x$ ആകുന്നത് ഏത് ഇടവേളയിലാണ്? മറ്റ് ഇടവേളകളിൽ ഈ ഏകദത്തിന്റെ നിർവചനം എങ്ങിനെയാണ്? ഇതുപോലെ $\cos^{-1}(\cos(x))$ നെ എങ്ങനെ നിർവചിക്കാം എന്നു നോക്കൂ $\sin(\sin^{-1}(x))$, $\cos(\cos^{-1}(x))$ ഇവയുടെ ഗ്രാഫും നോക്കുക.

ഈ പ്രത്യേകത മറ്റുള്ള പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾക്കും ശരിയാണ്. പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ പ്രധാനപ്പെട്ട ചില പ്രത്യേകതകൾ ഓരോന്നായി ഇവിടെ തെളിയിക്കുകയാണ്.

1. (i) $\sin^{-1}\frac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1}x,\ x \geq 1$ **അല്ലെങ്കിൽ** $x \leq -1$

(ii) $\cos^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1}x,\ x \geq 1$ **അല്ലെങ്കിൽ** $x \leq -1$

(iii) $\tan^{-1}\frac{1}{x} = \cot^{-1}x,\ x > 0$

ഇവയിൽ ഒന്നാമത്തേത് തെളിയിക്കുന്നതിന് $\operatorname{cosec}^{-1}x = y$ എന്നെടുക്കാം.

അപ്പോൾ $x = \operatorname{cosec} y$ എന്നും

$\frac{1}{x} = \frac{1}{\operatorname{cosec} y} = \sin y$ എന്നും കിട്ടുമല്ലോ.

$\therefore y = \sin^{-1}\frac{1}{x}$

a tan$\left(\frac{1}{x}\right)$ എന്ന input command നൽകിനോക്കൂ. $\cot^{-1}(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫാണോ ലഭിയ്ക്കുന്നത്? എന്തുകൊണ്ട്?

അതായത് $\sin^{-1}\dfrac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} x$

ഇതേ രീതിയിൽ മറ്റു രണ്ടു പ്രത്യേകതകളും തെളിയിക്കാമല്ലോ.

$f = a\sin(x)$, $g = a\sin(-x)$ എന്നീ input commands നൽകി ഗ്രാഫുകൾ വരച്ച് താരതമ്യം ചെയ്യുക. $f+g$ യുടെ ഗ്രാഫ് വരച്ചുനോക്കൂ. ($f+g$ എന്ന *input* നൽകിയാൽ മതി.)

2. **(i)** $\mathbf{\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x, x \in [-1, 1]}$

(ii) $\mathbf{\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x, x \in R}$

(iii) $\mathbf{\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x, |x| \geq 1}$

ഇവിടെ $\sin^{-1}(-x) = y$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$\therefore -x = \sin y$

$x = -\sin y = \sin(-y)$

$\Rightarrow \sin^{-1} x = -y$

$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

ഇതേ മാർഗത്തിൽ മറ്റു രണ്ടു പ്രത്യേകതകൾ തെളിയിക്കുക.

$f = a\cos(x)$, $g = a\cos(-x)$ എന്നീ commands നൽകി ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. $f+g$ യുടെ ഗ്രാഫും വരച്ച് നോക്കൂ.

3. **(i)** $\mathbf{\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x, x \in [-1, 1]}$

(ii) $\mathbf{\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x, |x| \geq 1}$

(iii) $\mathbf{\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x, x \in R}$

$\cos^{-1}(-x) = y$ എന്നെടുത്താൽ

$-x = \cos y$

$\Rightarrow x = -\cos y$

$\Rightarrow x = \cos(\pi - y)$

$\therefore \cos^{-1} x = \pi - y$

$y = \pi - \cos^{-1} x$

അതായത് $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

ഇതേ മാർഗത്തിൽ മറ്റ് രണ്ടു പ്രത്യേകതകൾ തെളിയിക്കുക.

4. **(i)** $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$

(ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}, x \in \mathbf{R}$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}, |x| \geq 1$

$\sin^{-1} x = y$ ആയാൽ

$x = \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

$\Rightarrow \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - y$

$\Rightarrow y + \cos^{-1} x \ \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

ഇതേ മാർഗത്തിൽ മറ്റു രണ്ടു പ്രത്യേകതകൾ തെളിയിക്കുക.

5. **(i)** $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x + y}{1 - xy}, xy < 1$

(ii) $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x - y}{1 + xy}, xy > -1$

$\tan^{-1} x = \theta$, $\tan^{-1} y = \phi$ എന്നിരിക്കട്ടെ .

$\therefore x = \tan \theta, y = \tan \phi$ എന്നു കിട്ടുമല്ലോ.

$\tan(\theta + \phi) = \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta \tan\phi}$ എന്നു പഠിച്ചത് ഓർക്കുന്നുണ്ടല്ലോ.

$\tan(\theta + \phi) = \frac{x + y}{1 - xy}$

$\therefore (\theta + \phi) = \tan^{-1} \frac{x + y}{1 - xy}$

അതുകൊണ്ട് $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x + y}{1 - xy}$

രണ്ടാമത്തെ പ്രത്യേകത തെളിയിക്കുന്നതിന് y മാറ്റി പകരം $(-y)$ കൊടുത്താൽ മതിയാകും.

6. (i) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2}, |x| \le 1$

(ii) $2\tan^{-1} x = \cos^{-1} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}, x \ge 0$

(iii) $2\tan^{-1} x = \tan^{-1} \dfrac{2x}{1-x^2}, -1 < x < 1$

$\tan^{-1} x = y$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$\therefore x = \tan y$

$$\Rightarrow \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = \sin^{-1} \frac{2\tan y}{1+\tan^2 y}$$
$$= \sin^{-1}(\sin 2y)$$
$$= 2y$$
$$= 2\tan^{-1} x$$

അതുപോലെ $\cos^{-1} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \cos^{-1} \dfrac{1-\tan^2 y}{1+\tan^2 y}$

$$= \cos^{-1}(\cos 2y)$$
$$= 2y$$
$$= 2\tan^{-1} x$$

ഈ രീതിയിൽ (iii) തെളിയിക്കാമല്ലോ.

ഇനി ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടി നോക്കാം.

ഉദാഹരണം : 3

തെളിയിക്കുക.

(i) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1} x, -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$

പരിഹാരം

(i) $x = \sin \theta$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$\therefore \sin^{-1} x = \theta$,

$$\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \sin^{-1}\left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$
$$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$$
$$= 2\sin^{-1}x$$

(ii) $x = \cos\theta$ എന്നു സ്വീകരിച്ചാൽ

$$\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \sin^{-1}\left(2\cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}\right)$$
$$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta)$$
$$= \sin^{-1}(\sin 2\theta)$$
$$= 2\theta$$
$$= 2\cos^{-1}x$$

> $\sin^{-1} 2x\sqrt{1-x^2}$, എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരക്കുക. $\left(a\sin\left(2x * sqrt(1-x\,\hat{}\,2)\right)\right)$ ഈ ഏകദം $2\sin^{-1}x$ എന്ന ഏകദത്തിനോട് തുല്യമാകുന്നത് ഏത് ഇടവേളയിലാണെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക. $2\cos^{-1}x$ എന്ന ഏകദത്തിനോടോ? $\left[-1, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ ഇതിനോട് തുല്യമായ ഏകദമേതാണ്?

ഉദാഹരണം : 4

$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{2}{11} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$ എന്നു തെളിയിക്കുക

പരിഹാരം

(i) $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

എന്ന പ്രത്യേകത ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{2}{11} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{11}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}} = \tan^{-1}\frac{15}{20} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

ഉദാഹരണം : 5

$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)$, $\frac{-3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ നെ ലഘുരൂപത്തിലെഴുതുക

പരിഹാരം

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

മറ്റൊരു രീതിയിലും ഈ ഉദാഹരണത്തിന് പരിഹാരം കാണാം.

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\cot\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\right] = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi-2x}{4}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

ഉദാഹരണം : 6

$\cot^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right),\ x > 1$ നെ ലഘുരൂപത്തിലെഴുതുക.

പരിഹാരം

$x = \sec\theta$ എന്നിരിക്കട്ടെ

അതുകൊണ്ട് $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \tan\theta$

$$\begin{aligned}\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} &= \cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}\\ &= \cot^{-1}(\cot\theta)\\ &= \theta\\ &= \sec^{-1}x\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം : 7

$\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2} = \tan^{-1}\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right),\ |x| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$x = \tan\theta$ എങ്കിൽ $\theta = \tan^{-1}x$

$$\begin{aligned}\text{വലതുഭാഗം} = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right)\\ &= \tan^{-1}(\tan 3\theta) = 3\theta = 3\tan^{-1}x = \tan^{-1}x + 2\tan^{-1}x\\ &= \tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \text{ഇടതുഭാഗം}\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം : 8

$\cos(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x),\ |x| \geq 1$ ന്റെ വില കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$$\cos(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 2.2

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ തെളിയിക്കുക:

1. $3\sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3),\ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

2. $3\cos^{-1} x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x),\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

3. $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \tan^{-1}\frac{7}{24} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

4. $2\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{31}{17}$

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ ലഘുരൂപത്തിലെഴുതുക:

5. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x},\ x \neq 0$

6. $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ |x| > 1$

7. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right),\ 0 < x < \pi$

8. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right),\ 0 < x < \pi$

9. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ |x| < a$

10. $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right),\ a > 0;\ \frac{-a}{\sqrt{3}} < x < \frac{a}{\sqrt{3}}$

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ വില കണ്ടെത്തുക:

11. $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

12. $\cot(\tan^{-1}a + \cot^{-1}a)$

13. $\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right],\ |x| < 1,\ y > 0,\ xy < 1$

14. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = 1$, ആയാൽ x ന്റെ വില കണക്കാക്കുക.

15. $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$, ആയാൽ x ന്റെ വിലയെന്ത്?

16 മുതൽ 18 വരെയുള്ളവയുടെ വില കണ്ടെത്തുക:

16. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ **17.** $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

18. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

19. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right) =$

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

20. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1

21. $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}(-\sqrt{3}) =$

(A) π (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) 0 (D) $2\sqrt{3}$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 9

$\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right)$ ന്റെ വില കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$\sin^{-1}(\sin x)=x$ എന്ന് നാം പഠിച്ചല്ലോ.

അതുകൊണ്ട് $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{3\pi}{5}$ എന്ന് എഴുതാൻ കഴിയുമോ?

$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന മുഖ്യവില ഭാഗത്തുള്ള വിലയല്ല $\frac{3\pi}{5}$,

അതായത് $\frac{3\pi}{5}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

എന്നാൽ; $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \sin\frac{2\pi}{5}$ എന്നു എഴുതിയാൽ $\frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\therefore\ \sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$$

ഉദാഹരണം : 10

$\sin^{1}\frac{3}{5} - \sin^{1}\frac{8}{17} = \cos^{1}\frac{84}{85}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$\sin^{-1}\frac{3}{5} = x$ എന്നും $\sin^{-1}\frac{8}{17} = y$ എന്നും എടുത്താൽ

$\sin x = \frac{3}{5}$, കൂടാതെ $\sin y = \frac{8}{17}$ എന്നും കിട്ടുമല്ലോ

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ എന്നതു ഓർമിച്ചാൽ

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-\frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$$

$$\cos(x-y) = \frac{4}{5}\times\frac{15}{17} + \frac{3}{5}\times\frac{8}{17} = \frac{84}{85}$$

$\therefore\ x - y = \cos^{-1}\left(\frac{84}{85}\right)$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതായത് $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$

ഉദാഹരണം : 11

$\sin^{-1}\frac{12}{13} + \cos^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

പരിഹാരം

$\sin^{-1}\dfrac{12}{13} = x,\quad \cos^{-1}\dfrac{4}{5} = y, \tan^{-1}\dfrac{63}{16} = z$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\sin x = \frac{12}{13},\quad \cos y = \frac{4}{5},\quad \tan z = \frac{63}{16}$$

അതുകൊണ്ട്

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

$$\tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

അതുകൊണ്ട്

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x + \tan y} = \frac{\frac{12}{5}+\frac{3}{4}}{1-\frac{12}{5}\times\frac{3}{4}} = -\frac{63}{16} = -\tan z$$

$= \tan(-z)$ അല്ലെങ്കിൽ $\tan(\pi - z)$ എഴുതാം.

$\therefore\ x + y + z = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $x + y + z = \pi$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. എന്നാൽ x, y, z ഇവ അധിസംഖ്യകൾ ആയതിനാൽ $x - y + z = 0$ എന്നത് സ്വീകാര്യമല്ല. അതുകൊണ്ട് $x + y + z = \pi$

$$\therefore\ \sin^{-1}\frac{12}{13}+\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi$$

ഉദാഹരണം : 12

ലഘൂകരിക്കുക: $\tan^{-1}\left[\dfrac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right],\quad \dfrac{a}{b}\tan x > -1$

പരിഹാരം

$$\tan^{-1}\left[\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x}}{\frac{b\cos x + a\sin x}{b\cos x}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{a}{b} - \tan x}{1 + \frac{a}{b}\tan x}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{a}{b} - \tan^{-1}(\tan x)$$

$$= \tan^{-1}\frac{a}{b} - x$$

ഉദാഹരണം: 13

$\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$ ആയാൽ x ന്റെ വില കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$$\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{2x + 3x}{1 - 2x \times 3x}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{5x}{1 - 6x^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{5x}{1 - 6x^2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

അതായത് $6x^2 + 5x - 1 = 0 \Rightarrow (6x - 1)(x + 1) = 0$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം കണ്ടാൽ $x = \frac{1}{6}$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -1$ എന്നു കിട്ടും

എന്നാൽ $x = -1$ എന്ന വില സ്വീകാര്യമല്ല (എന്തുകൊണ്ട്?) അതുകൊണ്ട്, $x = \frac{1}{6}$

ഉദാഹരണം : 14

$\cos^{-1} a + \cos^{-1} b + \cos^{-1} c = \pi$ ആയാൽ $a^2 \quad b^2 + c^2 + 2abc = 1$ എന്നു തെളിയിക്കുക

പരിഹാരം

$\cos^{-1} a = x$, $\cos^{-1} b = y$, $\cos^{-1} c = z$ എന്നെടുക്കുക.

$\therefore \cos x \quad a, \cos y \quad b, \cos z \quad c$

$\therefore x + y \quad z = \pi$

$\Rightarrow \quad x \quad y = \pi - z$

$\Rightarrow \quad \cos(x + y) = \cos(\pi - z)$

$\Rightarrow \quad \cos x \cos y - \sin x \sin y = -\cos z$

$$\Rightarrow \quad \left(ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\right) = -c$$

$$\Rightarrow \quad (ab + c) = \sqrt{1-a^2}, \sqrt{1-b^2}$$

$$\Rightarrow \quad (ab+c)^2 = \left(\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\right)^2 \text{ (വർഗം എടുത്താൽ)}$$

$\Rightarrow \quad a^2 b^2 + 2abc + c^2 = (1 - a^2)(1 - b^2)$

$\Rightarrow \quad a^2 b^2 + 2\, abc + c^2 = 1 - b^2 - a^2 + a^2 b^2$

അതുകൊണ്ട് $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$

ഉദാഹരണം : 15

$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ ആയാൽ

$xy \quad yz \quad zx = 1$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} z$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \cot^{-1} z$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)$$

അതുകൊണ്ട് $\frac{x+y}{1-xy} = \frac{1}{z}$

അതായത്, $(x-y)z = 1 - xy$

$xz - yz = 1 - xy$

$\therefore xy + yz - zx = 1$

ഉദാഹരണം : 16

$$2\tan^{-1}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2} = \cos^{-1}\left(\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}\right)$$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ഇടതുഭാഗം = $2\tan^{-1}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\theta/2 = x$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\therefore \frac{x}{2} = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

അതുകൊണ്ട്

$$\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}$$ എന്നെഴുതാം

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$ ആയതിനാൽ

$$\cos x = \frac{1-\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{(a+b)-(a-b)\tan^2\frac{\theta}{2}}{(a+b)+(a-b)\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{a+b-a\tan^2\frac{\theta}{2}+b\tan^2\frac{\theta}{2}}{a+b+a\tan^2\frac{\theta}{2}-b\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{a\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)+b\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{a\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)+b\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

അംശവും ഛേദവും $1+\tan^2\frac{\theta}{2}$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ

$$\cos x = \frac{a\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)+b}{a+b\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{a\cos\theta+b}{a+b\cos\theta}$$

$$x = \cos^{-1}\left(\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}\right) = \text{വലതുഭാഗം}$$

കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ വില കണക്കാക്കുക:

1. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$

2. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)$

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ തെളിയിക്കുക:

3. $2\sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{24}{7}$

4. $\sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{77}{36}$

5. $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{65}$

6. $\cos^{-1}\frac{12}{13} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \sin^{-1}\frac{56}{65}$

7. $\tan^{-1}\frac{63}{16} = \sin^{-1}\frac{5}{13}+\cos^{-1}\frac{3}{5}$

8. $\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

9. $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right),\ x \in [0, 1]$

10. $\cot^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)=\dfrac{x}{2},\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$

11. $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\cos^{-1}x,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le x\le 1$ [സൂചന : $x = \cos 2\theta$]

12. $\dfrac{9\pi}{8}-\dfrac{9}{4}\sin^{-1}\dfrac{1}{3}=\dfrac{9}{4}\sin^{-1}\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കുക:

13. $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\,\text{cosec}\,x)$

14. $\tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{1}{2}\tan^{-1}x,\ (x>0)$

(15-17) ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉചിതമായവ തെരഞ്ഞെടുക്കുക:

15. $\sin(\tan^{-1}x),\ |x|<1=$

(A) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (D) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

16. $\sin^{-1}(1-x)-2\sin^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$ ആയാൽ $x=$

(A) $0,\ \dfrac{1}{2}$ (B) $1,\ \dfrac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\dfrac{1}{2}$

17. $\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)-\tan^{-1}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)=$

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{-3\pi}{4}$

സംഗ്രഹം

പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ മണ്ഡലം, രംഗം (മുഖ്യവിലഭാഗം) എന്നിവ പട്ടികയായി കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

പ്രതിലോമ ഏകദങ്ങൾ	മണ്ഡലം	രംഗം (മുഖ്യവിലഭാഗം)
$y = \sin^{-1} x$	$[-1, 1]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \tan^{-1} x$	$\mathbf{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \cot^{-1} x$	$\mathbf{R}$	$(0, \pi)$
$y = \sec^{-1} x$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$
$y = \text{cosec}^{-1} x$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

- $\sin^{-1}x$, $(\sin x)^{-1}$ ഇവ ഒരേ ഏകദമല്ല. $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ എന്നാൽ $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$ ഇതിനു സമാനമായ പ്രത്യേകത എല്ലാ പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾക്കും ശരിയാണ്.
- പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ മുഖ്യവിലഭാഗത്തുള്ള വിലയെ അതിന്റെ മുഖ്യവില എന്നു പറയുന്നു.

മണ്ഡലത്തിലെ അനുയോജ്യമായ വിലകൾക്ക് ചുവടെ കാണുന്ന പ്രത്യേകതകൾ ശ്രദ്ധിക്കുക.

- $y = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y$
- $x \quad \sin y \Rightarrow y \quad \sin^{-1} x$
- $\sin(\sin^{-1} x) = x$
- $\sin^{-1}(\sin x) = x$
- $\sin^{-1}\frac{1}{x} = \text{cosec}^{-1} x$
- $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$
- $\cos^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1} x$
- $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$

- $\tan^{-1}\frac{1}{x} = \cot^{-1} x$
- $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$
- $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$
- $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$
- $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x$
- $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$
- $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$
- $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$
- $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

ചരിത്രക്കുറിപ്പ് (Historical Note)

ത്രികോണമിതിയെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനം ആദ്യം തുടങ്ങിയത് ഇന്ത്യയിൽ ആണ്. ആര്യഭടൻ (476A.D.), ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ (598 A.D.) ഭാസ്കര I (600 A.D.) ഭാസ്കര II (1114 A.D.) തുടങ്ങിയ പ്രാചീന ഇന്ത്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻമാർ ത്രികോണമിതിയിലെ പല സുപ്രധാന ഫലങ്ങളും കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്. ഇവർ കണ്ടെത്തിയ ഈ അറിവുകൾ ആദ്യം അറേബ്യയിലേക്കും പിന്നീട് അത് യൂറോപ്പിലേക്കും കൈമാറ്റം ചെയ്യപ്പെട്ടു. ഗ്രീക്കുകാരും ത്രികോണമിതി പഠനം തുടങ്ങിയെങ്കിലും അവരുടെ രീതി വിലക്ഷണമായതിനാൽ ഇന്ത്യൻ ശാസ്ത്രജ്ഞരുടെ സമീപനം വളരെപ്പെട്ടെന്നു തന്നെ ലോകം മുഴുവനും അംഗീകരിക്കപ്പെടുകയായിരുന്നു. ഒരു കോണിന്റെ sine മൂല്യവും sine ഏകദവും ഭാരതീയ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞരുടെ ‘ സിദ്ധാന്ത’ ങ്ങളിലെ (സംസ്കൃതത്തിലുള്ള ജ്യോതിശാസ്ത്ര ഗ്രന്ഥങ്ങൾ) ഒരു പ്രധാന കണ്ടെത്തലാണ്.

90° ൽ കൂടുതലുള്ള കോണുകളുടെ sine ഏകദത്തിന്റെ വിലകാണാനുള്ള മാർഗം ഭാസ്കര I (ഏകദേശം 600AD) രൂപീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. sin (A + B) യുടെ വിപുലനത്തിന്റെ തെളിവ് 16-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ എഴുതപ്പെട്ട ‘യുക്തിഭാഷ’ എന്ന മലയാള ഗണിത പുസ്തകത്തിൽ പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്. sine അല്ലെങ്കിൽ cosine ഏകദത്തിന്റെ 18°, 36°, 54°, 72° തുടങ്ങിയ വിലകൾ ഭാസ്കര II കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്.

ജ്യോതിശാസ്ത്രജ്ഞാനിയായിരുന്ന സർ ജോൺ ഹെർസിഹേൽ (1813) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$,എന്നിവയെ arc sine, arc cosine എന്നിങ്ങനെ മാറ്റി എഴുതണമെന്ന് നിർദ്ദേശിച്ചു. ഥേൽസ് (ഏകദേശം ബി.സി. 600) നിയതമായി ത്രികോണമിതിയിലെ ദൂരവും ഉന്നതിയും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ കൈകാര്യം ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ഈജിപ്ടിലെ ഭീമൻ പിരമിഡിന്റെ ഉയരം അതിന്റെ നിഴലിന്റെയും, നീളം അറിയാവുന്ന ഒരു വടിയുടെ നിഴലിന്റെ നീളവും അളന്നുകൊണ്ട് അദ്ദേഹം കണ്ടുപിടിച്ചത് എക്കാലത്തും അംഗീകരിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുകയാണ്:

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{ (സൂര്യന്റെ ഉന്നതി കോൺ)}$$

കടലിൽ നങ്കൂരമിട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു കപ്പൽ കരയിൽ നിന്നും എത്ര അകലെയാണെന്ന് സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ അനുപാതം എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ചു ഥേൽസ് കണ്ടെത്തിയിരുന്നു. ദൂരവും ഉന്നതിയും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതകൾ ഉപയോഗിച്ച് പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ പ്രാചീന ഭാരതീയ ഗണിതജ്ഞർ പ്രയത്നിച്ചിരുന്നു എന്ന് കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്.

P2F6G6

അധ്യായം 3

മാട്രിക്സുകൾ (Matrices)

❖ *ഗണിതത്തിന്റെ സത്ത അതിന്റെ സ്വാതന്ത്ര്യത്തിലാണ് – കാന്റർ* ❖

3.1 ആമുഖം

2015 ദേശീയ ഗെയിംസിൽ ആദ്യത്തെ അഞ്ചു സ്ഥാനങ്ങൾ നേടിയവരുടെ വിവരം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

	സ്വർണം	വെള്ളി	വെങ്കലം	ആകെ
സർവീസസ്	91	33	35	159
കേരളം	54	48	60	162
ഹരിയാന	40	40	27	107
മഹാരാഷ്ട്ര	30	43	50	123
പഞ്ചാബ്	27	34	32	93

മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടിക ശ്രദ്ധാപൂർവം വായിച്ച് ഇതിൽനിന്നും നിങ്ങൾക്കു കിട്ടുന്ന അനുമാനങ്ങൾ രേഖപ്പെടുത്തുക. ഈ അനുമാനങ്ങൾ കൂട്ടുകാരുമായി ചർച്ച ചെയ്യൂ.

ഈ പട്ടികയിൽനിന്നും 91 സ്വർണം നേടിയ സർവീസസാണ് ഒന്നാംസ്ഥാനത്തെന്നും 54 സ്വർണം നേടിയ കേരളം രണ്ടാംസ്ഥാനത്തെന്നും 40 സ്വർണം നേടിയ ഹരിയാന മൂന്നാംസ്ഥാനത്തെന്നും കാണാം. അതുപോലെ വെങ്കലം നേടിയതിൽ ഒന്നാം സ്ഥാനം കേരളവും രണ്ടാംസ്ഥാനം മഹാരാഷ്ട്രയും മൂന്നാംസ്ഥാനം സർവീസസും ആണെന്നു കാണാം.

ഈ പട്ടികയിൽ നിന്നും നമുക്ക് നിരവധി നിഗമനങ്ങളിൽ എത്തിച്ചേരാം. ഇങ്ങനെ വിവരങ്ങൾ വരികളായും നിരകളായും സൂചിപ്പിക്കുന്ന ക്രമീകരണങ്ങളെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് കൂടുതലായി ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യാം.

3.2 മാട്രിക്സ് (Matrix)

രാധ, ഫൗസിയ, സിമ്രാൻ എന്നീ മൂന്നുപേരും കൂട്ടുകാരാണ്. ഇവരുടെ കൈയിലുള്ള ഒരു പെട്ടിയിൽ 12 ആപ്പിളും 11 ഓറഞ്ചും ഉണ്ട്. ഇവർ ആപ്പിളും ഓറഞ്ചും വീതിച്ചെടുക്കുന്നു. രാധയ്ക്ക് 4 ആപ്പിൾ, 5 ഓറഞ്ച്, ഫൗസിയയ്ക്ക് 3 ആപ്പിൾ, 4

ഓറഞ്ച്, സിമ്രാന് 5 ആപ്പിൾ, 2 ഓറഞ്ച് എന്നിങ്ങനെ വീതിക്കുന്നു. ഇതിനെ നിങ്ങൾക്ക് പട്ടികാരൂപത്തിൽ എഴുതാൻ സാധിക്കുമോ?

രീതി : 1

	ആപ്പിൾ	**ഓറഞ്ച്**
രാധ	4	5
ഫൗസിയ	3	4
സിമ്രാൻ	5	2

രീതി : 2

	രാധ	**ഫൗസിയ**	**സിമ്രാൻ**
ആപ്പിൾ	4	3	5
ഓറഞ്ച്	5	4	2

ഇങ്ങനെ രണ്ടു രീതിയിൽ മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നവ പട്ടികയുടെ രൂപത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കാം. ഒന്നാമത്തെ പട്ടികയിൽ മൂന്നു വരിയും രണ്ടു നിരയുമാണുള്ളത്. രണ്ടാമത്തെ പട്ടികയിൽ രണ്ടു വരിയും മൂന്നു നിരയുമാണ് ഉള്ളത്. ഇങ്ങനെ സംഖ്യകളെയോ ഏകദങ്ങളെയോ വരിയും നിരയുമായി സൂചിപ്പിക്കുന്ന രീതിയെ മാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു.

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{ ഒന്നാം വരി} \\ \rightarrow \text{ രണ്ടാം വരി} \\ \rightarrow \text{ മൂന്നാം വരി} \end{matrix}$$

↑ ഒന്നാം നിര ↑ രണ്ടാം നിര

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{ ഒന്നാം വരി} \\ \rightarrow \text{ രണ്ടാം വരി} \end{matrix}$$

↑ ഒന്നാം നിര ↑ രണ്ടാം നിര ↑ മൂന്നാം നിര

നിർവചനം 1

സംഖ്യകളോ ഏകദങ്ങളോ ഉള്ള ഒരു ചതുരക്രമത്തിനെ മാട്രിക്സ് എന്നുപറയുന്നു. ഈ സംഖ്യകളെ അല്ലെങ്കിൽ ഏകദങ്ങളെ മാട്രിക്സിലെ അംഗങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. മാട്രിക്സുകളെ A, B, C തുടങ്ങിയ വലിയ ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കാം.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -\frac{1}{2} \\ 3.5 & -1 & 2 \\ \sqrt{3} & 5 & \frac{5}{7} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1+x & x^3 & 3 \\ \cos x & \sin x + 2 & \tan x \end{bmatrix}$$

മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽ തിരശ്ചീന വരകളിലുള്ള അംഗങ്ങൾ ആണ് വരി നിശ്ചയിക്കുന്നത്. കുത്തനെയുള്ള വരകളിലെ അംഗങ്ങൾ ആണ് നിര നിശ്ചയിക്കുന്നത്. അതായത് A എന്ന മാട്രിക്സിന് 3 വരിയും 2 നിരയും B എന്ന മാട്രിക്സിന് 3 വരിയും 3 നിരയും C എന്ന മാട്രിക്സിന് 2 വരിയും 3 നിരയും ആണ് ഉള്ളത്.

3.2.1 മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം (Order of a matrix)

ഒരു മാട്രിക്സിന് m വരികളും n നിരകളും ഉണ്ടെങ്കിൽ അത് ഒരു $m \times n$ ക്രമമുള്ള മാട്രിക്സാണെന്ന് പറയുന്നു. മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽ A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം 3×2, B എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം 3×3, C എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം 2×3 എന്നും ആണ്.

പൊതുവായി ക്രമം $m \times n$ ആയ ഒരു മാട്രിക്സിനെ ചുവടെ കാണുന്ന രീതിയിൽ സൂചിപ്പിക്കാം.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$A = [a_{ij}]_{m \times n},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \quad i, j \in N$$

അതായത് i വരിയിലെ അംഗങ്ങൾ $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in}$, j നിരയിലെ അംഗങ്ങൾ $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \ldots, a_{mj}$ എന്നിവ ആണ്.

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ i വരിയിലെയും j നിരയിലേയും അംഗമാണ് a_{ij}.

ക്രമം $m \times n$ ആയ ഒരു മാട്രിക്സിൽ mn അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

കുറിപ്പ്

1. മാട്രിക്സിലെ അംഗങ്ങൾ ഒന്നുകിൽ സംഖ്യകൾ അല്ലെങ്കിൽ ഏകദങ്ങളായിരിക്കും.
2. $m \times n$ ക്രമമുള്ള ഒരു മാട്രിക്സിനെ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഒരു തലത്തിലെ ഏതൊരു ബിന്ദു (x, y) യെയും $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ അല്ലെങ്കിൽ $[x \ \ y]$ എന്ന് മാട്രിക്സ് രൂപത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കാം. ഉദാഹരണമായി $P(0, 1)$ എന്ന ബിന്ദുവിനെ ഒരു മാട്രിക്സായി $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ അല്ലെങ്കിൽ $P = [0 \ \ 1]$ എന്ന് എഴുതാം.

ഇതുപോലെ ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകൾ A (1, 0), B (3, 2), C (1, 3), D (–1, 2) ആയാൽ ആ ചതുർഭുജത്തെ ഒരു മാട്രിക്സായി ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ എഴുതാൻ കഴിയും.

$$X = \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \atop \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$ അല്ലെങ്കിൽ $$Y = \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

ഇത്തരത്തിൽ ഏതു ബഹുഭുജത്തിന്റെ മൂലകളെയും മാട്രിക്സായി സൂചിപ്പിക്കുവാൻ കഴിയും. മറ്റു ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിശോധിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 1

A, B, C എന്നീ മൂന്നു ഫാക്ടറികളിൽ ജോലി ചെയ്യുന്ന പുരുഷന്മാരുടേയും സ്ത്രീകളുടേയും എണ്ണം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

	പുരുഷന്മാർ	സ്ത്രീകൾ
A	30	25
B	25	31
C	27	26

മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങളെ ഒരു 3 × 2 മാട്രിക്സായി എഴുതുക. ഇതിൽ 3- ാമത്തെ വരിയിലും 2- ാമത്തെ നിരയിലുമുള്ള അംഗം ഏതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു?

പരിഹാരം

ഈ വിവരങ്ങളെ ഒരു 3 × 2 മാട്രിക്സായി ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ സൂചിപ്പിക്കാം.

$$X = \begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 25 & 31 \\ 27 & 26 \end{bmatrix}$$

> ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് ഒരു മാട്രിക്സ് നിർമിക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്ന് നോക്കാം.
>
> ഉദാഹരണത്തിന്, $A = \begin{bmatrix} 2, & 3, & 5 \\ 1, & -1, & 6 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സ് നിർമിക്കാൻ spread sheet ൽ അടുത്തടുത്ത കള്ളികളിലായി മാട്രിക്സിൽ എഴുതുന്നതുപോലെ 2, 3, 5, 1, -1, 6 എന്നീ സംഖ്യകൾ എഴുതുക. ഈ കള്ളികൾ select ചെയ്ത് right click ചെയ്യുക. തുടർന്നു വരുന്ന ജാലകത്തിൽ നിന്ന് creat → matrix എന്ന രീതിയിൽ മാട്രിക്സ് നിർമിക്കാം.
>
> Matrix 1 എന്ന പേരിൽ Algebra view ൽ ഈ മാട്രിക്സ് ലഭിക്കും. ഇതിൽ right click ചെയ്ത് ആവശ്യാനുസരണം പേരു മാറ്റി നൽകാവുന്നതാണ്.
>
> spread sheet ൽ സംഖ്യകൾ മാറ്റി മാറ്റിക്കൊടുക്കുന്നതിനനുസരിച്ച് മാട്രിക്സിലും സംഖ്യകൾ മാറി വരുന്നതായി കാണാം.
>
> A = [{2, 3, 5} , {1, -1, 6}] എന്ന input command ഉപയോഗിച്ചും ഈ മാട്രിക്സ് നിർമിക്കാം.

ഇതിൽ 3-ാം വരിയിലുള്ളതും 2-ാം നിരയിലുള്ളതുമായ അംഗം C ഫാക്ടറിയിൽ ജോലി ചെയ്യുന്ന സ്ത്രീകളുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 2

ഒരു മാട്രിക്സിൽ 8 അംഗങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഈ മാട്രിക്സിന് സാധ്യമായ ക്രമങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

പരിഹാരം

ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം $m \times n$ ആണെങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സിൽ mn അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് 8 അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം ഗുണനഫലം 8 വരുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകളാണ്.

അതായത് (1, 8), (8, 1), (4, 2), (2, 4)

മാട്രിക്സിന്റെ സാധ്യമായ ക്രമങ്ങൾ 1×8, 8×1, 4×2, 2×4 ആണ്.

ഉദാഹരണം : 3

ക്രമം 3×2 ആയ ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ a_{ij} എന്ന അംഗം $a_{ij} = \frac{1}{2}|i-3j|$ എന്നാണ്. എങ്കിൽ മാട്രിക്സ് എഴുതുക.

പരിഹാരം

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2}|i-3j|,\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2.$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}|1-3\times1| = 1; \qquad a_{12} = \frac{1}{2}|1-3\times2| = \frac{5}{2}$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}|2-3\times1| = \frac{1}{2}; \qquad a_{22} = \frac{1}{2}|2-3\times2| = 2$$

$$a_{31} = \frac{1}{2}|3-3\times1| = 0; \qquad a_{32} = \frac{1}{2}|3-3\times2| = \frac{3}{2}$$

$$\text{അതുകൊണ്ട് } A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

3.3 വിവിധതരം മാട്രിക്സുകൾ

(i) വരി മാട്രിക്സ് (Row matrix)

ഒരു വരി മാത്രമുള്ള മാട്രിക്സിനെ വരി മാട്രിക്സ് എന്നുപറയുന്നു.

ഉദാഹരണം : $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{5} & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 4}$ ഒരു വരി മാട്രിക്സാണ്. ഇതിന്റെ ക്രമം 1×4 ആണ്.

s] nX þ nb η $B = [b_{ij}]_{1\times n}$, $1 \times n$ ക്രമമുള്ള ഒരു വരി മാട്രിക്സാണ്.

(ii) നിര മാട്രിക്സ് (Column matrix)

ഒരു മാട്രിക്സിന് ഒരു നിര മാത്രമേ ഉള്ളു എങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സിനെ നിര മാട്രിക്സ് എന്നുപറയുന്നു.

ഉദാഹരണം : $A = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ ഒരു നിര മാട്രിക്സ് ആണ്. ഇതിന്റെ ക്രമം 4×1 ആണ്.

പൊതുവായി, $A = [a_{ij}]_{m\times 1}$ എന്നത് ക്രമം $m \times 1$ ആയ ഒരു നിര മാട്രിക്സാണ്.

(iii) സമചതുര മാട്രിക്സ് (Square matrix)

ഒരു മാട്രിക്സിലെ വരികളുടെ എണ്ണവും നിരകളുടെ എണ്ണവും തുല്യമായാൽ ആ മാട്രിക്സിനെ സമചതുര മാട്രിക്സ് എന്നുപറയുന്നു. ക്രമം $m \times n$ ആയ ഒരു മാട്രിക്സിനെ സമചതുര മാട്രിക്സ് എന്നു പറയണമെങ്കിൽ $m = n$ ആയിരിക്കണം. ഇതിനെ ക്രമം 'n' ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാ: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3\sqrt{2} & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ എന്നത് ക്രമം 3 ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സാണ്.

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ എന്നത് ക്രമം m ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സാണ്.

> **കുറിപ്പ്**
>
> $A = [a_{ij}]$ എന്നത് ക്രമം n ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സാണ്. എങ്കിൽ $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ എന്നി അംഗങ്ങൾ ഈ മാട്രിക്സിന്റെ വികർണത്തിലെ അംഗങ്ങളാണെന്നു പറയാം. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. ഇവിടെ 1, 4, 6 എന്നിവ വികർണത്തിലെ അംഗങ്ങളാണ്.

(iv) വികർണ മാട്രിക്സ് (Diagonal matrix)

ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിലെ വികർണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ ഒഴികെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും പൂജ്യം ആണെങ്കിൽ ആ സമചതുര മാട്രിക്സിനെ വികർണ മാട്രിക്സ് എന്നുപറയുന്നു. അതായത് $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ ഒരു വികർണ മാട്രിക്സാകണമെങ്കിൽ $b_{ij} = 0$, $i \neq j$ ആയിരിക്കണം.

ഉദാഹരണം : $A = [4]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, എന്നിവ വികർണ മാട്രിക്സുകളാണ്. A യുടെ ക്രമം 1, B യുടെ ക്രമം 2, C യുടെ ക്രമം 3 ആണ്.

(v) അദിശ മാട്രിക്സ് (Scalar matrix)

ഒരു വികർണ മാട്രിക്സിനെ, അദിശ മാട്രിക്സ് എന്നു പറയണമെങ്കിൽ വികർണത്തിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും തുല്യമായിരിക്കണം. അതായത് ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ ഒരു അദിശ മാട്രിക്സാകണമെങ്കിൽ

$$b_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

$$b_{ij} = k, \quad i = j,$$ k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയാണ്.

ഉദാഹരണം :

$A = [3]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ എന്നിവ യഥാക്രമം 1, 2, 3 ക്രമം ആയ അദിശ മാട്രിക്സുകളാണ്.

(vi) അനന്യ മാട്രിക്സ് (Identity matrix)

ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിലെ വികർണത്തിലെ അംഗങ്ങൾ എല്ലാം 1 ഉം ബാക്കിയുള്ള അംഗങ്ങൾ 0 ഉം ആയാൽ ആ മാട്രിക്സിനെ അനന്യ മാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു. ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ഒരു അനന്യ മാട്രിക്സാകണമെങ്കിൽ $a_{ij} = \begin{cases} 1, & ; \quad i = j \\ 0, & ; \quad i \neq j \end{cases}$ ആയിരിക്കണം.

ക്രമം n ആയ ഒരു അനന്യ മാട്രിക്സിനെ I_n എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം. ലളിതമായി I എന്നും സൂചിപ്പിക്കാം.

ഉദാഹരണം : $[1]$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ എന്നിവ യഥാക്രമം 1, 2, 3 ക്രമം ആയ അനന്യ മാട്രിക്സുകളാണ്.

ഒരു അദിശ മാട്രിക്സ് അനന്യ മാട്രിക്സ് ആകണമെങ്കിൽ $k = 1$ ആയിരിക്കണം. എല്ലാ അനന്യ മാട്രിക്സുകളും അദിശ മാട്രിക്സായിരിക്കും.

(vii) പൂജ്യം മാട്രിക്സ് (Zero matrix)

ഒരു മാട്രിക്സിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും 0 ആണെങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സിനെ പൂജ്യം മാട്രിക്സ് എന്നുപറയുന്നു.

ഉദാ: $[0]$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $[0, 0]$ എന്നിവ പൂജ്യം മാട്രിക്സുകളാണ്. പൂജ്യം മാട്രിക്സിനെ O എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം.

3.3.1 മാട്രിക്സുകളുടെ തുല്യത (Equality of matrices)

നിർവചനം 2

രണ്ടു മാട്രിക്സുകൾ $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ എന്നിവ തുല്യം എന്നു പറയണമെങ്കിൽ

(i) രണ്ടു മാട്രിക്സുകളുടേയും ക്രമം തുല്യമാകണം.

(ii) A യിലെ ഓരോ അംഗവും B യിലെ സമസ്ഥാനീയമായ അംഗത്തോട് തുല്യമായിരിക്കണം. അതായത് $a_{ij} = b_{ij}$ ആയിരിക്കണം.

ഉദാഹരണമായി $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ എന്നിവ തുല്യ മാട്രിക്സുകളാണ്.

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ഇവ തുല്യ മാട്രിക്സുകളല്ല.

A, B എന്നിവ തുല്യ മാട്രിക്സുകളായാൽ A = B എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം..

$\begin{bmatrix} x & y \\ z & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 2 & \sqrt{6} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $x = -1.5, y = 0, z = 2, a = \sqrt{6}, b = 3, c = 2$ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 4

$$\begin{bmatrix} x+3 & z+4 & 2y-7 \\ -6 & a-1 & 0 \\ b-3 & -21 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3y-2 \\ -6 & -3 & 2c+2 \\ 2b+4 & -21 & 0 \end{bmatrix}$$ ആണെങ്കിൽ a, b, c, x, y, z

എന്നിവയുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

മാട്രിക്സുകൾ തുല്യമായതിനാൽ സമസ്ഥാനീയ അംഗങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട്

$$x + 3 = 0, \qquad z + 4 = 6, \qquad 2y - 7 = 3y - 2$$

$$a - 1 = -3, \qquad 0 = 2c + 2 \qquad b - 3 = 2b + 4,$$

ഇതിൽനിന്നും $a = -2, b = -7, c = -1, x = -3, y = -5, z = 2$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം : 5

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും a, b, c, d എന്നിവയുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

$$\begin{bmatrix} 2a+b & a-2b \\ 5c-d & 4c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$$

പരിഹാരം

രണ്ടു മാട്രിക്സുകളും തുല്യമായതിനാൽ,

$$2a + b = 4 \qquad 5c - d = 11$$

$$a - 2b = -3 \qquad 4c + 3d = 24$$

ഇതിൽനിന്നും $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 3.1

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$, എന്ന മാട്രിക്സിൽ നിന്നും ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം (ii) അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം

(iii) a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}, a_{23} എന്നിവ എഴുതുക.

2. ഒരു മാട്രിക്സിൽ 24 അംഗങ്ങൾ ഉണ്ട്. മാട്രിക്സിന് സാധ്യമായ ക്രമങ്ങൾ എഴുതുക. മാട്രിക്സിൽ 13 അംഗങ്ങളാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ സാധ്യമായ ക്രമങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

3. ഒരു മാട്രിക്സിൽ 18 അംഗങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഇതിന് സാധ്യമായ ക്രമങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്? മാട്രിക്സിൽ 5 അംഗങ്ങളാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ സാധ്യമായ ക്രമങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

4. $A = [a_{ij}]$ എന്ന ഒരു 2×2 മാട്രിക്സ് എഴുതുക. a_{ij} ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

(i) $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$ (ii) $a_{ij} = \frac{i}{j}$ (iii) $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$

5. ക്രമം 3×4 ആയ ഒരു മാട്രിക്സിലെ a_{ij} ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. മാട്രിക്സ് എഴുതുക

(i) $a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i + j|$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$

6. ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ സമവാക്യത്തിലും x, y, z കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

7. ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും a, b, c, d കണ്ടുപിടിക്കുക.

$$\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

8. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സായാൽ

(A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = n$ (D) ഇവയൊന്നുമല്ല

9. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ x, y എന്നിവയ്ക്ക് ഏതു വില നൽകിയാൽ തന്നിരിക്കുന്ന മാട്രിക്സുകൾ തുല്യമാകും.

$$\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

(A) $x = \frac{-1}{3}$, $y = 7$ (B) കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധ്യമല്ല

(C) $y = 7$, $x = \frac{-2}{3}$ (D) $x = \frac{-1}{3}$, $y = \frac{-2}{3}$

10. 0 അല്ലെങ്കിൽ 1 അംഗമായി വരുന്ന 3×3 ക്രമമുള്ള എത്ര മാട്രിക്സുകൾ ഉണ്ട്?

(A) 27 (B) 18 (C) 81 (D) 512

3.4 മാട്രിക്സുകളുടെ ക്രിയകൾ (Operations on matrices)

3.4.1 മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനം

A, B എന്നീ രണ്ടു സ്ഥലങ്ങളിൽ ഫാത്തിമയ്ക്ക് ഓരോ ഫാക്ടറികൾ ഉണ്ട്. ഓരോന്നിലും ആൺകുട്ടികൾക്കും പെൺകുട്ടികൾക്കും സ്പോർട്സ് ഷൂ നിർമിക്കുന്നു. മൂന്ന് തരത്തിലുള്ള വിലകളാണ് ഇവയ്ക്ക് നിശ്ചയിച്ചിട്ടുള്ളത്. ഇവ 1, 2, 3 എന്നിങ്ങനെ തരംതിരിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ഫാക്ടറികൾ ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കുന്ന ഷൂസുകളുടെ എണ്ണം ചുവടെ മാട്രിക്സുകളായി കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

	ഫാക്ടറി A		ഫാക്ടറി B	
	ആൺകുട്ടികൾ	പെൺകുട്ടികൾ	ആൺകുട്ടികൾ	പെൺകുട്ടികൾ
1	80	60	90	50
2	75	65	70	55
3	90	85	75	75

ഫാത്തിമയ്ക്ക് ഓരോ വിഭാഗം വിലകളുള്ള സ്പോർട്സ് ഷൂസിന്റെ ആകെ ഉൽപാദനം കണ്ടുപിടിക്കണം.

1-ാം വിഭാഗം : ആൺകുട്ടികൾ (80 + 90), പെൺകുട്ടികൾ (60 + 50)

2-ാം വിഭാഗം : ആൺകുട്ടികൾ (75 + 70), പെൺകുട്ടികൾ (65 + 55)

3-ാം വിഭാഗം : ആൺകുട്ടികൾ (90 + 75), പെൺകുട്ടികൾ (85 + 75)

ഇതിനെ മാട്രിക്സായി എഴുതിയാൽ, $\begin{bmatrix} 80+90 & 60+50 \\ 75+70 & 65+55 \\ 90+75 & 85+75 \end{bmatrix}$

ഈ പുതിയ മാട്രിക്സ് മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന രണ്ടു മാട്രിക്സുകളുടേയും തുകയാണ്. ഇതിൽനിന്നും മനസ്സിലാകുന്നത് രണ്ടു മാട്രിക്സുകൾ തമ്മിൽ കൂട്ടുന്നതിന് രണ്ടു മാട്രിക്സുകളിലേയും സമസ്ഥാനീയ അംഗങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ മതി. കൂടാതെ ഈ രണ്ടു മാട്രിക്സുകളുടേയും ക്രമം തുല്യമായിരിക്കണം.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$ ഒരു 2×3 മാട്രിക്സും $$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

എന്നത് മറ്റൊരു 2×3 മാട്രിക്സും ആണ്. ഇവയുടെ തുക

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$ എന്ന് നിർവചിക്കാം.

> ഒരേ ക്രമമുള്ള A, B എന്നീ രണ്ടു മാട്രിക്സുകൾ നിർമിച്ച് A+B എന്ന് input command നൽകി നോക്കൂ. A യും B യും വ്യത്യസ്ത ക്രമത്തിലുള്ള മാട്രിക്സുകൾ ആണെങ്കിൽ എന്തു സംഭവിക്കും?

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ എന്നിവ ക്രമം $m \times n$ ആയ രണ്ടു മാട്രിക്സുകൾ ആയാൽ A, B ഇവയുടെ തുക ക്രമം $m \times n$ ആയ മറ്റൊരു മാട്രിക്സ് C ആയിരിക്കും. $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, ഇവിടെ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 6

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} & 1 \\ -2 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$ എങ്കിൽ $A+B$ കാണുക.

പരിഹാരം

A, B എന്നിവയുടെ ക്രമം 2×3 ആയതുകൊണ്ട് A+B കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധ്യമാണ്.

$$A+B = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 1-1 \\ 2-2 & 3+3 & 0+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 6 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

☛ കുറിപ്പ്

1. A, B എന്നീ മാട്രിക്സുകൾക്ക് തുല്യ ക്രമമല്ലെങ്കിൽ A + B നിർവചിക്കാൻ സാധ്യമല്ല. ഉദാഹരണത്തിന് $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ആയാൽ

   A + B നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കില്ല.

2. ഒരേ ക്രമമുള്ള മാട്രിക്സുകളുടെ ഗണത്തിൽ മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനം ഒരു ദ്വയാംഗക്രിയ (Binary Operation) ആണ്.

3.4.2 ഒരു മാട്രിക്സിനെ ഒരു അദിശം കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം

മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ ഫാത്തിമ A എന്ന ഫാക്ടറിയിലെ എല്ലാ വിഭാഗങ്ങളിലെയും ഉൽപാദനം ഇരട്ടിയാക്കുന്നു എന്നു വിചാരിക്കുക. ഫാക്ടറിയിലെ ഉൽപാദനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന മാട്രിക്സ്

	ആൺകുട്ടികൾ	പെൺകുട്ടികൾ
1	80	60
2	75	65
3	90	85

$$A = \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 75 & 65 \\ 90 & 85 \end{bmatrix}$$ ആണ്

ഉൽപ്പാദനം ഇരട്ടിയാക്കുമ്പോൾ,

	ആൺകുട്ടികൾ	പെൺകുട്ടികൾ
1	2×80	2×60
2	2×75	2×65
3	2×90	2×85

ഇതിനെ $\begin{bmatrix} 160 & 120 \\ 150 & 130 \\ 180 & 170 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സായി സൂചിപ്പിക്കാം. ഇതിൽ നിന്നും മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയുന്നത് ഈ പുതിയ മാട്രിക്സ് കിട്ടിയത് മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച മാട്രിക്സിലെ ഓരോ അംഗത്തെയും 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചപ്പോഴാണ്.

പൊതുവായി ഒരു മാട്രിക്സിനെ ഒരു അദിശം കൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നത് ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ നിർവചിക്കാം.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ഒരു മാട്രിക്സും k ഒരു അദിശവുമായാൽ kA മറ്റൊരു മാട്രിക്സ് ആയിരിക്കും. അതിലെ അംഗങ്ങൾ A യിലെ ഓരോ അംഗത്തെയും k കൊണ്ട് ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്നതായിരിക്കും.

ഉദാഹരണമായി $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, ആയാൽ

$$3A = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4.5 \\ 3\sqrt{5} & 21 & -9 \\ 6 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

മാട്രിക്സിന്റെ ന്യൂനം : A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ന്യൂനം $-A$ എന്നത് $-A = (-1)A$ എന്ന് നിർവചിക്കാം.

ഉദാഹരണം : $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix}$, ആയാൽ

$$-A = (-1)A = (-1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -x \end{bmatrix}$$

മാട്രിക്സുകളുടെ വ്യത്യാസം

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ എന്നിവ ക്രമം $m \times n$ ആയ രണ്ടു മാട്രിക്സുകളായാൽ ഇവയുടെ വ്യത്യാസം $A - B$ എന്നത് മറ്റൊരു മാട്രിക്സ് $D = [d_{ij}]_{m \times n}$ ആയിരിക്കും. ഇവിടെ $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 7 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $2A - B$ കാണുക.

പരിഹാരം $$2A - B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 4+1 & 6-3 \\ 4+1 & 6+0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4.3 മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ:

(i) **ക്രമനിയമം:** $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ എന്നിവ ക്രമം തുല്യമായ മാട്രിക്സുകൾ ആയാൽ, $A + B = B + A$ ആയിരിക്കും.

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}]$$ (സംഖ്യകളുടെ ക്രമനിയമം)

$$= B + A$$

(ii) **സംയോജനനിയമം:** ഒരേ ക്രമം $m \times n$ ഉള്ള മൂന്നു മാട്രിക്സുകൾ പരിഗണിച്ചാൽ $(A + B) + C = A + (B + C)$ ആയിരിക്കും.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, $C = [c_{ij}]_{m \times n}$,

$$(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$$
$$= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}]$$
$$= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$$
$$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$$ (എന്തുകൊണ്ട്?)
$$= [a_{ij}] + [(b_{ij} + c_{ij})] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}])$$
$$= A + (B + C)$$

(iii) **സങ്കലനത്തിന്റെ അനന്യദം:** $A = [a_{ij}]$ എന്നത് ഒരു $m \times n$ മാട്രിക്സും, O എന്നത് ക്രമം $m \times n$ ആയ ഒരു പൂജ്യം മാട്രിക്സുമായാൽ, $A + O = O + A = A$ ആയിരിക്കും. ഇവിടെ O എന്ന മാട്രിക്സിനെ സങ്കലനത്തിന്റെ അനന്യദം എന്നുപറയുന്നു.

(iv) **സങ്കലനത്തിന്റെ വിപരീതം:** $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ എന്നത് $m \times n$ ക്രമമുള്ള ഒരു മാട്രിക്സാണ്. $A + (-A) = (-A) + A = O$ ആയിരിക്കും. ഇവിടെ $-A$ എന്നത് $-[a_{ij}]_{m \times n} = [-a_{ij}]_{m \times n}$ ആയിരിക്കും. $-A$ യെ A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ സങ്കലന വിപരീതം എന്നുപറയുന്നു.

3.4.4 ഒരു മാട്രിക്സിനെ അദിശം കൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോഴുള്ള പ്രത്യേകതകൾ

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ എന്നിവ ക്രമം $m \times n$ ആയ രണ്ടു മാട്രിക്സുകളാണ്. കൂടാതെ k, l ഇവ രണ്ടു അദിശങ്ങളാണ്. എങ്കിൽ

(i) $k(A+B) = kA + kB$, (ii) $(k + l)A = kA + lA$

പരിഹാരം

(i) $k\,(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = k\,([a_{ij}]+[b_{ij}])$

$= k\,[a_{ij}+b_{ij}] = [k\,(a_{ij}+b_{ij})] = [(k\,a_{ij})+(k\,b_{ij})]$

$= [k\,a_{ij}]+[k\,b_{ij}] = k\,[a_{ij}]+k\,[b_{ij}] = k\mathrm{A}+k\mathrm{B}$

(ii) $(k+l)\,\mathrm{A} = (k+l)\,[a_{ij}]$

$= [(k+l)\,a_{ij}] = [k\,a_{ij}]+[l\,a_{ij}] = k\,[a_{ij}]+l\,[a_{ij}] = k\,\mathrm{A}+l\,\mathrm{A}$

ഉദാഹരണം : 8

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$, എങ്കിൽ $2\mathrm{A}+3\mathrm{X}=5\mathrm{B}$ ആകത്തക്കവിധം X എന്ന മാട്രിക്സ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$2\mathrm{A}+3\mathrm{X}=5\mathrm{B}$

$2\mathrm{A}+3\mathrm{X}-2\mathrm{A}=5\mathrm{B}-2\mathrm{A}$

$2\mathrm{A}-2\mathrm{A}+3\mathrm{X}=5\mathrm{B}-2\mathrm{A}$ (സങ്കലനത്തിലെ ക്രമനിയമം)

$\mathrm{O}+3\mathrm{X}=5\mathrm{B}-2\mathrm{A}$ (– 2A എന്നത് 2A യുടെ സങ്കലനവിപരീതം)

$3\mathrm{X}=5\mathrm{B}-2\mathrm{A}$ (O സങ്കലനത്തിന്റെ അനന്യദം)

$\mathrm{X}=\frac{1}{3}\,(5\mathrm{B}-2\mathrm{A})$

$$\mathrm{X}=\frac{1}{3}\left(5\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right)=\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 20 & 10 \\ -25 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -16 & 0 \\ -8 & 4 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10-16 & -10+0 \\ 20-8 & 10+4 \\ -25-6 & 5-12 \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 12 & 14 \\ -31 & -7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & \frac{-10}{3} \\ 4 & \frac{14}{3} \\ \frac{-31}{3} & \frac{-7}{3} \end{bmatrix}$$

ഉദാഹരണം : 9

$X+Y=\begin{bmatrix}5 & 2\\0 & 9\end{bmatrix}$, $X-Y=\begin{bmatrix}3 & 6\\0 & -1\end{bmatrix}$ ആയാൽ X, Y എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$(X+Y)+(X-Y)=\begin{bmatrix}5 & 2\\0 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 6\\0 & -1\end{bmatrix},$$

$$(X+X)+(Y-Y)=\begin{bmatrix}8 & 8\\0 & 8\end{bmatrix}, \quad 2X=\begin{bmatrix}8 & 8\\0 & 8\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}4 & 4\\0 & 4\end{bmatrix}$$

$$(X+Y)-(X-Y)=\begin{bmatrix}5 & 2\\0 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 6\\0 & -1\end{bmatrix}$$

$$(X-X)+(Y+Y)=\begin{bmatrix}5-3 & 2-6\\0 & 9+1\end{bmatrix}$$

$$2Y=\begin{bmatrix}2 & -4\\0 & 10\end{bmatrix} \therefore Y=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -4\\0 & 10\end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 5\end{bmatrix}$$

ഉദാഹരണം : 10

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും x, y എന്നിവയുടെ വില കണക്കാക്കുക.

$$2\begin{bmatrix}x & 5\\7 & y-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -4\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\15 & 14\end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix}x & 5\\7 & y-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -4\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\15 & 14\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}2x & 10\\14 & 2y-6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -4\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\15 & 14\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2x+3 & 10-4\\14+1 & 2y-6+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\15 & 14\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}2x+3 & 6\\15 & 2y-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\15 & 14\end{bmatrix}$$

$$2x + 3 = 7 \qquad\qquad 2y - 4 = 14$$
$$2x = 7 - 3 \qquad\qquad 2y = 18$$
$$x = \frac{4}{2} \qquad\qquad y = \frac{18}{2}$$
$$x = 2 \qquad\qquad y = 9.$$

ഉദാഹരണം : 11

രാംകിഷൻ, ഗുരുചരൺസിംഗ് എന്നീ രണ്ടു കൃഷിക്കാർ മൂന്ന് ഇനത്തിലുള്ള നെൽവിത്തുകൾ കൃഷി ചെയ്യുന്നു. അവ ബസുമതി, പെർമാൾ, നൗറ എന്നീ ഇനങ്ങളാണ്. സെപ്റ്റംബർ, ഒക്ടോബർ എന്നീ മാസങ്ങളിലെ ഈ കൃഷിയിൽ നിന്നുമുള്ള വരുമാനം (രൂപയിൽ) ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രണ്ടു മാട്രിക്സുകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

സെപ്റ്റംബറിലെ വരുമാനം (രൂപയിൽ)

$$A = \begin{array}{c} \text{ബസുമതി} \quad \text{പെർമാൾ} \quad \text{നൗറ} \\ \begin{bmatrix} 10,000 & 20,000 & 30,000 \\ 50,000 & 30,000 & 10,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{രാംകിഷൻ} \\ \text{ഗുരുചരൺസിംഗ്} \end{array}$$

ഒക്ടോബറിലെ വരുമാനം (രൂപയിൽ)

$$B = \begin{array}{c} \text{ബസുമതി} \quad \text{പെർമാൾ} \quad \text{നൗറ} \\ \begin{bmatrix} 5,000 & 10,000 & 6,000 \\ 20,000 & 10,000 & 10,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{രാംകിഷൻ} \\ \text{ഗുരുചരൺസിംഗ്} \end{array}$$

(i) സെപ്റ്റംബറിലും ഒക്ടോബറിലും ഓരോ കൃഷിക്കാരന്റെയും ഓരോ ഇനത്തിലുമുള്ള ആകെ വരുമാനം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(ii) സെപ്റ്റംബറിൽ നിന്നും ഒക്ടോബറിലേക്കുള്ള വില്പനയിലുണ്ടായ കുറവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(iii) ഒക്ടോബർ മാസത്തിൽ അവർക്കു രണ്ടുപേർക്കും കൂടി 2% ലാഭം ലഭിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഓരോ കർഷകനും ഓരോ ഇനത്തിലും ലഭിച്ച ലാഭം കാണുക.

പരിഹാരം

(i) ആകെയുള്ള വില്പന കാണുന്നതിന് A+B കണക്കാക്കുക.

$$A + B = \begin{array}{c} \text{ബസുമതി} \quad \text{പെർമാൾ} \quad \text{നൗറ} \\ \begin{bmatrix} 15,000 & 30,000 & 36,000 \\ 70,000 & 40,000 & 20,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{രാംകിഷൻ} \\ \text{ഗുരുചരൺസിംഗ്} \end{array}$$

(ii) വില്പനയിലെ കുറവ് കാണുന്നതിന് A–B കാണുക.

	ബസുമതി	പെർമാൾ	നൗറ	
A – B =	5,000	10,000	24,000	രാംകിഷൻ
	30,000	20,000	0	ഗുരുചരൺസിംഗ്

$$A - B = \begin{bmatrix} 5,000 & 10,000 & 24,000 \\ 30,000 & 20,000 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) $2\% \text{ of } B = \frac{2}{100} \times B = 0.02 \times B$

(ബസുമതി, പെർമാൾ, നൗറ ; രാംകിഷൻ, ഗുരുചരൺസിംഗ്)

$$= 0.02 \begin{bmatrix} 5,000 & 10,000 & 6,000 \\ 20,000 & 10,000 & 10,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 200 & 120 \\ 400 & 200 & 200 \end{bmatrix}$$

ഒക്ടോബർ മാസത്തിൽ രാംകിഷന് ₹100, ₹200, ₹120 എന്നിങ്ങനെ ഓരോ ഇനത്തിൽ നിന്നും ലാഭം കിട്ടുന്നു. അതുപോലെ ഗുരുചരൺസിംഗിന് ₹400, ₹200, ₹200 എന്നിങ്ങനെ ഓരോ ഇനത്തിൽ നിന്നും ലാഭം കിട്ടുന്നു.

3.4.5 മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം

മീര, നാദീം എന്നിവർ കൂട്ടുകാരാണ്. മീര 2 പേനയും 5 കഥാപുസ്തകവും വാങ്ങാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. നദീം 8 പേനയും 10 കഥാപുസ്തകവും. രണ്ടുപേരും ഒരു കടയിൽ പോയി വിലകൾ തിരക്കുന്നു. ഈ വിലകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

1 പേന – 5 രൂപ, 1 കഥാപുസ്തകം – 50 രൂപ

എങ്കിൽ ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര രൂപാ ചെലവാകും? മീരയ്ക്ക് $(5 \times 2 + 50 \times 5)$, അതായത് 260 രൂപ ചെലവാകും. നദീമിന് $(8 \times 5 + 50 \times 10)$, അതായത് 540 രൂപ ചെലവാകും.

> A, B എന്നീ രണ്ട് മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് A * B എന്ന input command നൽകിയാൽ മതി.

മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന വസ്തുതകളെ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന രീതിയിലുള്ള മാട്രിക്സ് രൂപത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയും.

ആവശ്യം	ഒന്നിന്റെ വില (രൂപയിൽ)	ആവശ്യമുള്ള തുക (രൂപയിൽ)
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 50 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \times 5 + 5 \times 50 \\ 8 \times 5 + 10 \times 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 540 \end{bmatrix}$

ഇവർ മറ്റൊരു കടയിൽ വില അന്വേഷിച്ചു എന്നിരിക്കട്ടെ. ആ കടയിൽനിന്നും ലഭിച്ച വിവരങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

1 പേന – 4 രൂപ, 1 കഥാപുസ്തകം – 40 രൂപ

ഈ വിലയ്ക്ക് മുകളിൽ പറഞ്ഞ പേനയും കഥാപുസ്തകവും വാങ്ങാൻ ഓരോരുത്തരും നൽകേണ്ട തുക $(4 \times 2 + 40 \times 5) = 208$ രൂപ, $(8 \times 4 + 10 \times 40) = 432$ രൂപ എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഇതിനെ മാട്രിക്സ് രൂപത്തിലെഴുതിയാൽ

ആവശ്യം	ഒന്നിന്റെ വില (രൂപയിൽ)	ആവശ്യമുള്ള തുക
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2\times 4+5\times 40 \\ 8\times 4+10\times 40 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 208 \\ 432 \end{bmatrix}$

മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന രണ്ടു ഉദാഹരണങ്ങളും ഒരുമിച്ചു മാട്രിക്സ് രൂപത്തിൽ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

ആവശ്യം	ഒന്നിന്റെ വില (രൂപയിൽ)	ആവശ്യമുള്ള തുക
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 50 & 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2\times 5+5\times 50 & 2\times 4+5\times 40 \\ 8\times 5+10\times 50 & 8\times 4+10\times 40 \end{bmatrix}$
		$=\begin{bmatrix} 260 & 208 \\ 540 & 432 \end{bmatrix}$

ഇത് മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനത്തിന് ഒരു ഉദാഹരണമാണ്. ഇതിൽനിന്നും മനസ്സിലാക്കാവുന്നത് ഒന്നാമത്തെ മാട്രിക്സിന്റെ നിരകളുടെ എണ്ണവും രണ്ടാമത്തെ മാട്രിക്സിന്റെ വരികളുടെ എണ്ണവും തുല്യമായാൽ മാത്രമേ രണ്ടു മാട്രിക്സുകൾ ഗുണിക്കാൻ സാധിക്കുകയുള്ളു എന്നതാണ്.

അതായത് രണ്ടു മാട്രിക്സുകൾ A, B ഇവ ഗുണിക്കണമെങ്കിൽ A എന്ന മാട്രിക്സിലെ നിരകളുടെ എണ്ണവും B എന്ന മാട്രിക്സിലെ വരികളുടെ എണ്ണവും തുല്യമായിരിക്കണം. A = $[a_{ij}]$ എന്നത് ഒരു $m \times n$ മാട്രിക്സും B = $[b_{jk}]$ എന്നത് $n \times p$ മാട്രിക്സും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. A, B എന്നീ മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനഫലം ക്രമം $m \times p$ ആയ C എന്ന ഒരു മാട്രിക്സ് ആയിരിക്കും. C = $[c_{ik}]$. ഇവിടെ c_{ik} കിട്ടുന്നതിനായി, A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ i വരിയിലെ അംഗങ്ങളെ B എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ k നിരയിലെ സമസ്ഥാനീയ അംഗങ്ങൾ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതിനുശേഷം ഇവയുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുക. ഈ തുകയാണ് c_{ik}. അതായത് A = $[a_{ij}]_{m\times n}$, B = $[b_{jk}]_{n\times p}$. A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ i വരി $[a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in}]$ ആണ്. B എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ k എന്ന നിര

$$\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$ ആണ്.

അപ്പോൾ $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$.

$\therefore$ C = $[c_{ik}]_{m \times p}$ എന്നത് A, B എന്നീ മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനഫലമാണ്.

ഉദാഹരണത്തിന്, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$. ഇവിടെ CD നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കും. $CD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$.

ഒന്നാമത്തെ വരിയിലെ ഒന്നാമത്തെ നിരയിലെ അംഗം

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(2) + (-1)(-1) + (2)(5) & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

ഒന്നാമത്തെ വരിയിലെ രണ്ടാമത്തെ നിരയിലെ അംഗം

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & (1)(7) - (-1)(1) + 2(-4) \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ ഒന്നാമത്തെ നിരയിലെ അംഗം

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 0(2) + 3(-1) + 4(5) & ? \end{bmatrix}$$

രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ രണ്ടാമത്തെ നിരയിലെ അംഗം

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & 0(7) + 3(1) + 4(-4) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ CD = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & -13 \end{bmatrix}$$

ഉദാഹരണം : 12

$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$. AB കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

A യിലെ നിരകളുടെ എണ്ണം = B യിലെ വരികളുടെ എണ്ണം. അതുകൊണ്ട് AB നിർവചിക്കാൻ കഴിയും.

$$AB = \begin{bmatrix} 6(2)+9(7) & 6(6)+9(9) & 6(0)+9(8) \\ 2(2)+3(7) & 2(6)+3(9) & 2(0)+3(8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12+63 & 36+81 & 0+72 \\ 4+21 & 12+27 & 0+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 117 & 72 \\ 25 & 39 & 24 \end{bmatrix}$$

കുറിപ്പ്

AB നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കുമെങ്കിലും BA നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കണമെന്നില്ല. മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ AB നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കും. പക്ഷെ BA നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കുകയില്ല. എന്തെന്നാൽ B എന്ന മാട്രിക്സിന് മൂന്നു നിരകളും A എന്ന മാട്രിക്സിന് രണ്ടും വരികളും. A, B ഇവ യഥാക്രമം $m \times n$, $k \times l$ എന്നീ ക്രമങ്ങളുള്ള രണ്ട് മാട്രിക്സുകളായാൽ AB, BA ഇവ രണ്ടും നിർവചിക്കണമെങ്കിൽ $n = k$ and $l = m$ ആയിരിക്കണം നേരെ മറിച്ചും. A, B ഇവ ഒരേ ക്രമത്തിലുള്ള രണ്ടു സമചതുര മാട്രിക്സുകളായാൽ AB യും BA യും നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കും.

മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം എല്ലായ്പ്പോഴും ക്രമനിയമം പാലിക്കുമോ?

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്നും AB, BA എന്നിവ നിർവചിക്കുവാൻ കഴിയുമെങ്കിലും AB = BA ആയിരിക്കണമെന്നില്ല എന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം : 13

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, ആയാൽ AB, BA കാണുക. $AB \neq BA$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

A ഒരു 2×3 മാട്രിക്സും B ഒരു 3×2 മാട്രിക്സും ആയതുകൊണ്ട് AB, BA ഇവ നിർവചിക്കുവാൻ സാധിക്കും.

AB യുടെ ക്രമം 2×2, BA യുടെ ക്രമം 3×3 എന്നിവ ആയിരിക്കും.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-8+6 & 3-10+3 \\ -8+8+10 & -12+10+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-12 & -4+6 & 6+15 \\ 4-20 & -8+10 & 12+25 \\ 2-4 & -4+2 & 6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 21 \\ -16 & 2 & 37 \\ -2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

AB, BA എന്നിവയ്ക്ക് ഒരേ ക്രമം ആയാൽ AB = BA എന്ന് ചിന്തിക്കാനിടയുണ്ട്. പക്ഷേ അങ്ങനെയാകണമെന്നില്ല. ഒരു ഉദാഹരണം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 14 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. ഇവിടെ $AB \neq BA$.

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നില്ല.

☛ കുറിപ്പ്

AB, BA എന്നീ ഗുണനഫലങ്ങൾ നിർവചിക്കാൻ കഴിയുന്ന ഏതു രണ്ടു മാട്രിക്സുകൾ A യ്ക്കും B യ്ക്കും $AB \neq BA$ എന്നത് ശരിയാകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, AB = BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

ഒരേ ക്രമത്തിലുള്ള വികർണ്ണ മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം ക്രമനിയമം പാലിക്കും.

ഉദാഹരണം : 15

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ആയാൽ AB കാണുക.

പരിഹാരം

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ഇവിടെ A, B ഇവ പൂജ്യമല്ലാത്ത രണ്ടു മാട്രിക്സുകളാണ്. ഇവയുടെ ഗുണനഫലം AB ഒരു പൂജ്യം മാട്രിക്സാണ്.

☛ കുറിപ്പ്

രണ്ടു രേഖീയ സംഖ്യകൾ a, b ഇവയിൽ ab=0 ആയാൽ a യോ b യോ a യും b യും കൂടിയോ പൂജ്യമായിരിക്കും. എന്നാൽ മാട്രിക്സുകളുടെ കാര്യത്തിൽ ഇത് ശരിയാകണമെന്നില്ല.

3.4.6 മാട്രിക്സ് ഗുണനത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ

1. **സംയോജനനിയമം** : A, B, C എന്നിവ മൂന്നു മാട്രിക്സുകളായാൽ

   (AB) C = A (BC), ആയിരിക്കും.

2. **വിതരണനിയമം** : A, B, C എന്നിവ മൂന്നു മാട്രിക്സുകളായാൽ

   (i) A (B+C) = AB + AC

   (ii) (A+B) C = AC + BC

3. **ഗുണനത്തിന്റെ അനന്യദം:** A ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് ആയാൽ A യുടെ അതേ ക്രമത്തിലുള്ള ഒരു അനന്യമാട്രിക്സ് I കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയും. കൂടാതെ AI = IA = A ആയിരിക്കും.

> spread sheet ഉപയോഗിച്ച്, ഗുണനത്തിന് അനുയോജ്യമായ ക്രമത്തോട് കൂടിയ രണ്ടു മാട്രിക്സുകൾ A, B നിർമിച്ച് AB കണ്ടുപിടിക്കുക. A യുടെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വരിയിലെ സംഖ്യകൾ മാറ്റിനോക്കൂ. AB എന്ന മാട്രിക്സിന് എന്ത് മാറ്റമാണ് സംഭവിക്കുന്നത്? B എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ നിരയാണ് മാറ്റുന്നതെങ്കിലോ? A യുടെ രണ്ട് വരികൾ തമ്മിൽ മാറ്റിയെഴുതിയാൽ AB ക്ക് എന്ത് വ്യത്യാസമാണ് സംഭവിക്കുന്നത്? B യുടെ രണ്ടു നിരകൾ തമ്മിലാണ് മാറ്റുന്നതെങ്കിലോ?

ഉദാഹരണം : 16

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$ ആയാൽ (AB)C, A(BC)

എന്നിവ കണക്കാക്കുക. കൂടാതെ (AB)C = A(BC) എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം : $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 & 3+2-4 \\ 2+0-3 & 6+0+12 \\ 3+0-2 & 9-2+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$$

$$(AB)(C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & 4+0 & 6-2 & -8+1 \\ -1+36 & -2+0 & -3-36 & 4+18 \\ 1+30 & 2+0 & 3-30 & -4+15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+0 & 3-6 & -4+3 \\ 0+4 & 0+0 & 0-4 & 0+2 \\ -1+8 & -2+0 & -3-8 & 4+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7+4-7 & 2+0+2 & -3-4+11 & -1+2-8 \\ 14+0+21 & 4+0-6 & -6+0-33 & -2+0+24 \\ 21-4+14 & 6+0-4 & -9+4-22 & -3-2+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$$ അതുകൊണ്ട്, $(AB)\,C = A\,(BC)$

ഉദാഹരണം : 17

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

AC, BC, $(A+B)C$ എന്നിവ കണക്കാക്കുക. കൂടാതെ $(A+B)C = AC + BC$ ആണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം : $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

$$(A+B)\,C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-14+24 \\ -10+0+30 \\ 16+12+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-12+21 \\ -12+0+24 \\ 14+16+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2+3 \\ 2+0+6 \\ 2-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$AC + BC = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A+B)\,C = AC + BC$$

ഉദാഹരണം : 18

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $A^3 - 23A - 40\,I = O$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix}$

$$A^3 = A\,A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - 23A - 40I = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} - 23 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 40 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -23 & -46 & -69 \\ -69 & 46 & -23 \\ -92 & -46 & -23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63-23-40 & 46-46+0 & 69-69+0 \\ 69-69+0 & -6+46-40 & 23-23+0 \\ 92-92+0 & 46-46+0 & 63-23-40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

ഉദാഹരണം : 19

ഒരു അസംബ്ലി ഇലക്ഷനിൽ ഒരു പ്രത്യേക രാഷ്ട്രീയ പാർട്ടി തങ്ങളുടെ സ്ഥാനാർഥിയുടെ പ്രചരണത്തിനുവേണ്ടി ഒരു പബ്ലിക് റിലേഷൻസ് സംരംഭത്തെ വാടകയ്ക്കെടുക്കുന്നു. മൂന്നു രീതിയിലാണ് ഇത് ചെയ്യുന്നത്. അതായത് ഫോൺ സംഭാഷണം, ഗൃഹ സന്ദർശനം, എഴുത്ത് ഇങ്ങനെയാണ്. ഓരോ ഇനത്തിലും ആവശ്യമായ തുക (പൈസയിൽ) ഒരു മാട്രിക്സായി ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

$$A = \begin{bmatrix} \overset{\text{പൈസ}}{40} \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ഫോൺ സംഭാഷണം} \\ \text{ഗൃഹസന്ദർശനം} \\ \text{എഴുത്ത്} \end{matrix}$$

X, Y എന്നീ രണ്ടു പട്ടണങ്ങളിൽ ഓരോ വിഭാഗത്തിന്റെയും എണ്ണം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

$$B = \begin{matrix} \text{ഫോൺ സംഭാഷണം} & \text{ഗൃഹസന്ദർശനം} & \text{എഴുത്ത്} \\ \end{matrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 5000 \\ 3000 & 1000 & 10000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$

എങ്കിൽ രണ്ടു പട്ടണങ്ങളിലുമായി ചെലവഴിച്ച ആകെ തുക കാണുക.

പരിഹാരം

$$BA = \begin{bmatrix} 40{,}000 + 50{,}000 + 250{,}000 \\ 120{,}000 + 100{,}000 + 500{,}000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 340{,}000 \\ 720{,}000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$

A എന്ന പട്ടണത്തിൽ ചെലവഴിക്കുന്ന തുക 340,000 പൈസ, B എന്ന പട്ടണത്തിൽ ചെലവഴിക്കുന്ന തുക 720,000 പൈസ. അതായത് രൂപ യഥാക്രമം 3400, 7200 എന്നിവയാണ്.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 3.2

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണക്കാക്കുക.

(i) A + B (ii) A – B (iii) 3A – C

(iv) AB (v) BA

2. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണക്കാക്കുക.

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{bmatrix}$

3. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, ആയാൽ (A+B), (B – C) എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക. കൂടാതെ A + (B – C) = (A + B) – C ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

5. $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$, ആയാൽ $3A - 5B$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

6. $\cos\theta \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ നെ ലഘൂകരിക്കുക.

7. (i) $X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(ii) $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ ആയാൽ X, Y എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; $2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ആയാൽ X കണ്ടുപിടിക്കുക.

9. $2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ ആയാൽ x , y എന്നിവയുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

10. $2\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ ആയാൽ x, y, z, t എന്നിവയുടെ വില കണക്കാക്കുക.

11. $x\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$, ആയാൽ x , y എന്നിവയുടെ വില കണക്കാക്കുക.

12. $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$, ആയാൽ x , y, z, w എന്നിവയുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

13. $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $F(x)\,F(y) = F(x+y)$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

14. (i) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

15. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $A^2 - 5A + 6I$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

17. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ആകുന്നു. $A^2 = kA - 2I$ ആണെങ്കിൽ k യുടെ വില കാണുക.

18. $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $I + A = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

19. ഒരു ട്രസ്റ്റ് 30,000 രൂപ രണ്ടുതരം ബോണ്ടുകളിലായി നിക്ഷേപിക്കുന്നു. ആദ്യത്തെ ബോണ്ടിൽ 5% പലിശയും രണ്ടാമത്തെ ബോണ്ടിൽ 7% പലി

ശയും വാർഷികമായി ലഭിക്കും. 30,000/- രൂപയെ രണ്ടു ബോണ്ടുകളിലായി എങ്ങനെ നിക്ഷേപിക്കണമെന്ന് മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം ഉപയോഗിച്ചു കണക്കാക്കുക.

ട്രസ്റ്റിനു വാർഷികമായി ലഭിക്കേണ്ട പലിശ

(a) 1800 രൂപ (b) 2000 രൂപ

20. ഒരു സ്കൂളിലെ സ്റ്റോറിൽ 10 ഡസൻ കെമസ്ട്രി പുസ്തകങ്ങളും 8 ഡസൻ ഫിസിക്സ് പുസ്തകങ്ങളും, 10 ഡസൻ എക്കണോമിക്സ് പുസ്തകങ്ങളും ഉണ്ട്. അവയുടെ വിൽപനവില യഥാക്രമം 80, 60, 40 രൂപ വീതമാണെങ്കിൽ പുസ്തകവിൽപനയിൽ സ്റ്റോറിന് ലഭിക്കുന്ന ആകെ തുക മാട്രിക്സ് ഗുണനം ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കുക.

X, Y, Z, W, P എന്നിവ യഥാക്രമം ക്രമം $2 \times n$, $3 \times k$, $2 \times p$, $n \times 3$, $p \times k$ ആയ മാട്രിക്സുകളാണ്, എങ്കിൽ ചോദ്യം 21, 22 ന് ശരിയായ ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക

21. PY + WY നിർവചിക്കുവാൻ സാധിക്കണമെങ്കിൽ, n, k, p എന്നിവയുടെ നിയന്ത്രിതവിലകൾ

(A) $k = 3$, $p = n$ (B) k ഏതൊരു സംഖ്യ, $p = 2$

(C) p ഏതൊരു സംഖ്യ, $k = 3$ (D) $k = 2$, $p = 3$

22. $n = p$, ആയാൽ $7X - 5Z$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം

(A) $p \times 2$ (B) $2 \times n$ (C) $n \times 3$ (D) $p \times n$

3.5. മാട്രിക്സിന്റെ ട്രാൻസ്പോസ് (Transpose of a matrix)

A, B, C എന്നീ മൂന്നു സ്ഥലങ്ങളിൽ നിർമിച്ച ഉൽപന്നങ്ങൾ P, Q, R എന്നീ വിതരണ കേന്ദ്രങ്ങളിൽ എത്തിക്കുന്നു. ഇവയുടെ വിശദാംശമാണ് ചുവടെ പട്ടികകളിൽ നൽകിയിരിക്കുന്നത്.

		വിതരണസ്ഥലം		
		P	Q	R
ഉൽപാദന കേന്ദ്രം	A	4	5	7
	B	8	9	10
	C	6	4	3

		ഉൽപാദന കേന്ദ്രം		
		A	B	C
വിതരണസ്ഥലം	P	4	8	6
	Q	5	9	4
	R	7	10	3

മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ടു പട്ടികകളും പരിശോധിച്ച് അവയുടെ പ്രത്യേകത കണ്ടെത്തു.

ഈ രണ്ടു പട്ടികയിൽ നിന്നും മനസിലാകുന്നത് രണ്ടു പട്ടികയും സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ഒരേ ആശയം തന്നെയാണ്. പക്ഷേ ഒന്നാമത്തെ പട്ടികയുടെ വരികൾ രണ്ടാമത്തെ പട്ടികയുടെ നിരകളായി. അതുപോലെ ഒന്നാമത്തെ പട്ടികയുടെ നിരകൾ രണ്ടാമത്തെ പട്ടികയുടെ വരികളായി. ഇവിടെ ഒന്നാമത്തെ പട്ടികയുടെ ട്രാൻസ്പോസാണ് രണ്ടാമത്തെ പട്ടിക എന്നു പറയാം.

ഈ പാഠഭാഗത്ത് ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ ട്രാൻസ്പോസിനെക്കുറിച്ചും ചില പ്രത്യേക തരം മാട്രിക്സുകളെക്കുറിച്ചും - സമമിത, ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സുകളെക്കുറിച്ചും പ്രതിപാദിക്കുന്നു.

നിർവചനം 3 : A = $[a_{ij}]$ ഒരു $m \times n$ മാട്രിക്സാണ്. A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ വരികളും നിരകളും പരസ്പരം മാറ്റി എഴുതുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന മാട്രിക്സിനെ A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ട്രാൻസ്പോസ് എന്നുപറയുന്നു. ഇതിനെ A′ (അല്ലെങ്കിൽ A^T) എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതായത് $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ ആയാൽ $A' = [a_{ji}]_{n \times m}$ ആയിരിക്കും.

> A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ട്രാൻസ്പോസ് ലഭിക്കാൻ (Transpose [A]) എന്ന input command ഉപയോഗിക്കാം. A^1 = Transpose [A] എന്ന് നൽകിയാൽ ഈ മാട്രിക്സ് A^1 എന്ന പേരിൽത്തന്നെ ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad \text{ആയാൽ} \quad A' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 5 & 1 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

3.5.1 മാട്രിക്സുകളുടെ ട്രാൻസ്പോസിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ

മാട്രിക്സുകളുടെ ട്രാൻസ്പോസിന്റെ പ്രത്യേകതകളാണ് ചുവടെ ചേർക്കുന്നത് (തെളിവില്ലാതെ). അനുയോജ്യമായ ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിഗണിച്ച് ഇവ ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കാവുന്നതാണ്.

അനുയോജ്യമായ ക്രമത്തിലുള്ള രണ്ടു മാട്രിക്സുകളാണ് A യും B യും എങ്കിൽ

(i) $(A')' = A$, (ii) $(kA)' = kA'$ (k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ)

(iii) $(A + B)' = A' + B'$ (iv) $(A B)' = B' A'$

ഉദാഹരണം 20

$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ തെളിയിക്കുക.

(i) $(A')' = A$, (ii) $(A + B)' = A' + B'$,

(iii) $(kB)' = kB'$, (k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ)

പരിഹാരം

(i) $$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A')' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

അതുകൊണ്ട്, $(A')' = A$

(ii) $$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3}-1 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A' + B' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

അതുകൊണ്ട്, $(A + B)' = A' + B'$

(iii) $$kB = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 2k \\ k & 2k & 4k \end{bmatrix}$$

$$(kB)' = \begin{bmatrix} 2k & k \\ -k & 2k \\ 2k & 4k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = kB'$$ അതുകൊണ്ട്, $(kB)' = kB'$

ഉദാഹരണം: 21

If $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $(AB)' = B'A'$ ആണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix} = (AB)'$$

അതുകൊണ്ട്, $(AB)' = B'A'$

3.6 സമമിത മാട്രിക്സ് (Symmetric Matrix), ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സ് (Skew Symmetric Matrix)

നിർവചനം 4: ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് $A = [a_{ij}]$, ഒരു സമമിത മാട്രിക്സ് എന്നു പറയണമെങ്കിൽ $A' = A$ ആയിരിക്കണം.

$a_{ij} = a_{ji}$; i, j എന്നിവയുടെ എല്ലാ വിലകൾക്കും.

ഉദാഹരണമായി $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 & 3 \\ 2 & -1.5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ഒരു സമമിത മാട്രിക്സ് ആണ്;

കാരണം $A' = A$ ആണ്

നിർവചനം 5: ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് $A = [a_{ij}]$, ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സ് എന്നു പറയണമെങ്കിൽ $A' = -A$ ആയിരിക്കണം. അതായത് $a_{ji} = -a_{ij}$, i, j എന്നിവയുടെ എല്ലാ വിലകൾക്കും.

$i = j$ ആയാൽ, $a_{ii} = -a_{ii}$; $2a_{ii} = 0$, $a_{ii} = 0$ എല്ലാ വിലകൾക്കും.

ഇതിൽ നിന്നും ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സിന്റെ വികർണത്തിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും '0' ആയിരിക്കും എന്നു മനസിലാക്കാം.

> ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് A നിർമിച്ച് $A+A^t$, $A-A^t$ ഇവ കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇവയുടെ പ്രത്യേകതകൾ എന്താണ്?

ഉദാഹരണമായി $B = \begin{bmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{bmatrix}$ ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സാണ്, കാരണം

$B' = -B$

ഇനി സമമിത മാട്രിക്സുകളെയും ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സുകളെയും കുറിച്ചുള്ള ഏതാനും സിദ്ധാന്തങ്ങളാണ് പ്രതിപാദിക്കുന്നത്.

സിദ്ധാന്തം: 1

രേഖീയ സംഖ്യകൾ അംഗങ്ങളായിട്ടുള്ള ഏതൊരു മാട്രിക്സ് A പരിഗണിച്ചാലും $A + A'$ ഒരു സമമിത മാട്രിക്സും $A - A'$ ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സും ആയിരിക്കും.

തെളിവ്

$B = A + A'$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\begin{aligned} B' &= (A + A')' \\ &= A' + (A')' \quad ((A+B)' = A' + B') \\ &= A' + A \quad ((A')' = A \text{ ആയതുകൊണ്ട്}) \\ &= A + A' \quad (A + B = B + A \text{ ആയതുകൊണ്ട്}) \\ &= B \end{aligned}$$

അതുകൊണ്ട് $B = A + A'$ ഒരു സമമിത മാട്രിക്സ് ആണ്.

ഇനി $C = A - A'$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\begin{aligned} C' &= (A - A')' = A' - (A')' \quad (\text{എന്തുകൊണ്ട്?}) \\ &= A' - A \quad (\text{എന്തുകൊണ്ട്?}) \\ &= -(A - A') = -C \end{aligned}$$

അതുകൊണ്ട് $C = A - A'$ ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സാണ്.

സിദ്ധാന്തം 2 ഏതൊരു സമചതുര മാട്രിക്സിനേയും ഒരു സമമിത മാട്രിക്സിന്റേയും ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സിന്റേയും തുകയായി എഴുതാം.

തെളിവ് : A ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A') \text{ എന്നെഴുതാം.}$$

ഒന്നാം സിദ്ധാന്തത്തിൽ നിന്നും $A + A'$ ഒരു സമമിത മാട്രിക്സാണെന്നും $A - A'$ ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സാണെന്നും നമുക്കറിയാം. അതുകൊണ്ട് $\frac{1}{2}(A + A')$ ഒരു സമമിത മാട്രിക്സും $\frac{1}{2}(A - A')$ ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സും ആണ്. അതിനാൽ ഏതൊരു സമചതുര മാട്രിക്സിനേയും ഒരു സമമിത മാട്രിക്സിന്റേയും ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സിന്റേയും തുകയായി എഴുതാം.

ഉദാഹരണം : 22

$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സിനെ ഒരു സമമിത മാട്രിക്സിന്റേയും ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സിന്റേയും തുകയായി എഴുതുക.

പരിഹാരം

$$\text{ഇവിടെ } B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$P = \frac{1}{2}(B + B')$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$P = \frac{1}{2}(B + B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{അപ്പോൾ,} \quad P' = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} = P$$

അതുകൊണ്ട് $P = \frac{1}{2}(B + B')$ ഒരു സമമിതമാട്രിക്സ് ആണ്.

$Q = \frac{1}{2}(B - B')$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$Q = \frac{1}{2}(B - B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{അപ്പോൾ,} \; Q' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -3 \\ \frac{-5}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

$\therefore Q = \frac{1}{2}(B - B')$ ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സ് ആണ്.

$$P + Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = B$$

അതുകൊണ്ട് B യെ ഒരു സമമിത മാട്രിക്സിന്റേയും ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സിന്റേയും തുകയായി എഴുതാം.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 3.3

1. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന മാട്രിക്സുകളുടെ ട്രാൻസ്പോസ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കു ന്നവ ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(i) $(A+B)' = A' + B'$, (ii) $(A-B)' = A' - B'$

3. $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(i) $(A+B)' = A' + B'$ (ii) $(A-B)' = A' - B'$

4. $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $(A+2B)'$ കണക്കാക്കുക.

5. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന A, B എന്നീ മാട്രിക്സുകളിൽ $(AB)' = B'A'$, ആണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

6. (i) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ആയാൽ $A'A = I$ ആണോ എന്ന് പരിശോധി ക്കുക.

(ii) $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ ആയാൽ $A'A = I$ ആണോ എന്ന് പരിശോ ധിക്കുക.

7. (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ഒരു സമമിത മാട്രിക്സ് ആണെന്നും,

(ii) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സ് ആണെന്നും

തെളിയിക്കുക.

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ആയാൽ

(i) $(A + A')$ ഒരു സമമിത മാട്രിക്സാണോ എന്നും,
(ii) $(A - A')$ ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സാണോ എന്നും പരിശോധിക്കുക.

9. $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $\frac{1}{2}(A + A')$, $\frac{1}{2}(A - A')$, എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

10. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന മാട്രിക്സുകളെ ഒരു സമമിത മാട്രിക്സിന്റേയും ന്യൂന സമമിത മാട്രിക്സിന്റേയും തുകയായി എഴുതുക.

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ചോദ്യം 11, 12 എന്നിവയ്ക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

11. ഒരേ ക്രമമുള്ള രണ്ടു സമമിത മാട്രിക്സുകളാണ് A, B എന്നിവ എങ്കിൽ $AB - BA$ എന്നത്

(A) ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സ് (B) സമമിത മാട്രിക്സ്
(C) പൂജ്യം മാട്രിക്സ് (D) അനന്യ മാട്രിക്സ്

12. $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ആയാൽ $A + A' = I$, ആകണമെങ്കിൽ α യുടെ വില

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) π (D) $\frac{3\pi}{2}$

3.7 മാട്രിക്സുകളുടെ മൗലിക രൂപാന്തരണം (Elementary Transformation)

ഒരു മാട്രിക്സിൽ 6 രൂപാന്തരണങ്ങൾ (transformations) ആണുള്ളത്. 3 എണ്ണം വരിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ടും 3 എണ്ണം നിരയുമായി ബന്ധപ്പെട്ടതും ആണ്. ഇവയെ മാട്രിക്സുകളുടെ മൗലികരൂപാന്തരണം എന്നു പറയുന്നു.

(i) ***രണ്ടു വരികൾ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടു നിരകൾ പരസ്പരം മാറ്റൽ***
i എന്ന വരിയും j എന്ന വരിയും പരസ്പരം മാറ്റുമ്പോൾ ആ മാറ്റത്തെ $R_i \leftrightarrow R_j$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. ഇതുപോലെ നിരകളാണ് മാറുന്നതെങ്കിൽ $C_i \leftrightarrow C_j$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

ഉദാഹരണം : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ എന്നതിൽ $R_1 \leftrightarrow R_2$ ആയാൽ $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

എന്ന് കിട്ടുന്നു.

(ii) ***പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സംഖ്യ കൊണ്ടു ഒരു വരിയിലെ അംഗങ്ങളെ അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലെ അംഗങ്ങളെ ഗുണിക്കുന്നു.*** i എന്ന വരിയെ k $(k \neq 0)$ എന്ന സ്ഥിരസംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നതിനെ $R_i \rightarrow kR_i$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. ഇത് നിരയ്ക്കാണെങ്കിൽ $C_i \rightarrow kC_i$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

ഉദാഹരണം : $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $C_3 \rightarrow \frac{1}{7}C_3$, ആണെങ്കിൽ

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{7} \\ -1 & \sqrt{3} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ എന്ന് ലഭിക്കും.

(iii) ***ഒരു വരിയിലെ അംഗങ്ങളുടെയോ നിരയിലെ അംഗങ്ങളുടേയോ ഗുണിതങ്ങൾ മറ്റൊരു വരിയോടോ നിരയോടോ കൂട്ടുന്നു.*** i എന്ന വരിയിലെ അംഗങ്ങളോട് j എന്ന വരിയിലെ അംഗങ്ങളെ k കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് കൂട്ടുകയാണെ

കിൽ അതിനെ $R_i \to R_i + kR_j$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. യഥാക്രമം നിരയാണെ കിൽ $C_i \to C_i + kC_j$ എന്നും സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം : $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $R_2 \to R_2 - 2R_1$, ആയാൽ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ എന്ന് ലഭിക്കും

3.8 പ്രതിലോമ മാട്രിക്സുകൾ (Inverse matrices)

നിർവചനം 6: ക്രമം m ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സാണ് A. അതേ ക്രമമുള്ള മറ്റൊരു സമചതുര മാട്രിക്സാണ് B. കൂടാതെ $AB = BA = I$ ആയാൽ B എന്ന മാട്രിക്സിനെ A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ പ്രതിലോമം (inverse) എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ A^{-1} എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അപ്പോൾ A പ്രതിലോമ്യമാണ് (Invertible) എന്നു പറയുന്നു.

A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ പ്രതിലോമ മാട്രിക്സ് ലഭിക്കുന്നതിന് 'invert[A]' എന്ന input command ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ആയാൽ

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ഇതുപോലെ $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$. അതുകൊണ്ട് B എന്നത് A യുടെ പ്രതിലോമം ആണ്.

അതായത്, $B = A^{-1}$. അല്ലെങ്കിൽ A എന്നത് B യുടെ പ്രതിലോമം. അതായത് $A = B^{-1}$

കുറിപ്പ്

1. സമചതുര മാട്രിക്സുകൾ അല്ലാത്തവയ്ക്ക് പ്രതിലോമം സാധ്യമല്ല. കാരണം AB, BA എന്നീ ഗുണനഫലങ്ങൾ നിർവചിക്കാനും AB = BA ആകാനും A യും B യും ഒരേ ക്രമത്തിലുള്ള സമചതുര മാട്രിക്സുകൾ ആയിരിക്കണം.
2. B എന്നത് A യുടെ പ്രതിലോമം ആയാൽ A എന്നത് B യുടെ പ്രതിലോമം ആയിരിക്കും.

സിദ്ധാന്തം 3:

ഒരു മാട്രിക്സിന് പ്രതിലോമം സാധ്യമെങ്കിൽ അത് ഏകമാത്രമായിരിക്കും (unique).

തെളിവ് :

$A = [a_{ij}]$ എന്നത് ക്രമം m ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. സാധിക്കുമെങ്കിൽ A യ്ക്ക് B, C എന്നീ രണ്ടു പ്രതിലോമങ്ങൾ ഉണ്ടെന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\therefore AB = BA = I, \quad AC = CA = I$$

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

സിദ്ധാന്തം 4

A, B എന്നിവ ഒരേ ക്രമമുള്ള രണ്ടു പ്രതിലോമ്യ മാട്രിക്സുകൾ ആയാൽ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ ആയിരിക്കും.

തെളിവ് : മാട്രിക്സുകളുടെ പ്രതിലോമത്തിന്റെ നിർവചനമനുസരിച്ച്,

$$(AB)(AB)^{-1} = I$$

$$A^{-1}(AB)(AB)^{-1} = A^{-1}I$$ (രണ്ടു വശത്തും ഇടത്തേ അറ്റത്ത് A^{-1} കൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നു)

$$(A^{-1}A)B(AB)^{-1} = A^{-1}$$ ($A^{-1}I = A^{-1}$ ആയതുകൊണ്ട്)

$$IB(AB)^{-1} = A^{-1}$$

$$B(AB)^{-1} = A^{-1}$$

$$B^{-1}B(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$I(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

> spread sheet ന്റെ സഹായത്താൽ A, B എന്നീ രണ്ടു മാട്രിക്സുകൾ നിർമിക്കുക. A^{-1}, B^{-1}, AB, $(AB)^{-1}$, $B^{-1}.A^{-1}$ ഇവ കണ്ടുപിടിക്കുക. $(AB)^{-1}$, $B^{-1}.A^{-1}$ ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

3.8.1 മൗലിക ക്രിയകൾ (elementary operations) ഉപയോഗിച്ച് ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ പ്രതിലോമം കണ്ടെത്തൽ

X = AB ആകത്തക്കവിധത്തിലുള്ള മൂന്നു മാട്രിക്സുകളാണ് X, A, B.

X = AB എന്ന മാട്രിക്സ് സമവാക്യത്തിൽ വരികളുടെ മൗലികക്രിയകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതിനായി, ഇടതുവശത്തുള്ള മാട്രിക്സായ X നും വലതുവശത്തുള്ള AB യിലെ ആദ്യത്തെ മാട്രിക്സ് A യ്ക്കും ഒരുപോലെ വരികളുടെ മൗലിക ക്രിയകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇതേപോലെ X = AB എന്ന മാട്രിക്സ് സമവാക്യത്തിൽ നിരകളുടെ മൗലികക്രിയകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതിനായി, ഇടതുവശത്തുള്ള മാട്രിക്സായ X നും വലതുവശത്തുള്ള AB യിലെ രണ്ടാമത്തെ മാട്രിക്സ് ആയ B യ്ക്കും ഒരുപോലെ നിരകളുടെ മൗലികക്രിയകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

അതായത് A എന്ന ഒരു മാട്രിക്സിന് A^{-1} ഉണ്ടെങ്കിൽ വരികളുടെ മൗലിക ക്രിയകൾ ഉപയോഗിച്ച് A^{-1} കാണുന്നതിനായി, A = IA എന്നെഴുതിയതിനുശേഷം, വരിയുടെ മൗലിക ക്രിയകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഈ സമവാക്യത്തെ I = BA എന്ന രൂപത്തിലാക്കുന്നു. ഇവിടെ B എന്ന മാട്രിക്സ് A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ പ്രതിലോമമായിരിക്കും. ഇതേപോലെ നിരകളുടെ മൗലിക ക്രിയകൾ ഉപയോഗിച്ച് A^{-1} കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ, A = AI എന്നെഴുതിയതിനുശേഷം നിരകളുടെ മൗലിക ക്രിയകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഈ സമവാക്യത്തെ I = AB എന്ന രൂപത്തിലാക്കുന്നു.

☛ കുറിപ്പ്

വരികളുടെ (നിരകളുടെ) മൗലിക ക്രിയകൾ ഉപയോഗിച്ച് $A = IA$ ($A = AI$) രൂപത്തിലെഴുതി മൗലിക ക്രിയകൾ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ A എന്ന മാട്രിക്സിൽ ഒന്നോ ഒന്നിൽ കൂടുതലോ വരികളിൽ എല്ലാ അംഗങ്ങളും '0' ആണെങ്കിൽ A^{-1} കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധ്യമല്ല.

ഉദാഹരണം : 23

മൗലിക ക്രിയകൾ ഉപയോഗിച്ച് $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ പ്രതിലോമം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

വരികളുടെ മൗലിക ക്രിയകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതിനായി

$A = IA$ എന്നെഴുതാം.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A \quad (R_2 \to R_2 - 2R_1 \text{ ഉപയോഗിച്ച്})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} A \quad (R_2 \to -\frac{1}{5} R_2 \text{ ഉപയോഗിച്ച്})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} A \quad (R_1 \to R_1 - 2R_2 \text{ ഉപയോഗിച്ച്})$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

മറ്റൊരു രീതിയിൽ : നിരകളുടെ മൗലിക ക്രിയകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതിന് $A = AI$ എന്നെഴുതാം

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1$, ഉപയോഗിച്ച്

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \rightarrow -\frac{1}{5}C_2$, ഉപയോഗിച്ച്

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

$C_1 \rightarrow C_1 - 2C_2$ ഉപയോഗിച്ച്

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

അതുകൊണ്ട്, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$

ഉദാഹരണം : 24

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ആയാൽ, മൗലിക ക്രിയകൾ ഉപയോഗിച്ച് A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ പ്രതിലോമം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$A = I\,A$, എന്നെഴുതാം.

അതായത് $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}A \quad (R_1 \leftrightarrow R_2 \text{ ഉപയോഗിച്ച്})$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & -5 & -8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & -3 & 1\end{bmatrix}A \text{ } (R_3 \to R_3 - 3R_1 \text{ ഉപയോഗിച്ച്})$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & -5 & -8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & -3 & 1\end{bmatrix}A \text{ } (R_1 \to R_1 - 2R_2 \text{ ഉപയോഗിച്ച്})$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\5 & -3 & 1\end{bmatrix}A \text{ } (R_3 \to R_3 + 5R_2 \text{ ഉപയോഗിച്ച്})$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\\frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}A \text{ } (R_3 \to \frac{1}{2} R_3 \text{ ഉപയോഗിച്ച്})$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\1 & 0 & 0\\\frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}A \text{ } (R_1 \to R_1 + R_3 \text{ ഉപയോഗിച്ച്})$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\-4 & 3 & -1\\\frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}A \text{ } (R_2 \to R_2 - 2R_3 \text{ ഉപയോഗിച്ച്})$$

അതുകൊണ്ട് $A^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\-4 & 3 & -1\\\frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

മറ്റൊരു രീതിയിൽ $A = AI$, എന്നെഴുതാം

അതായത് $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (C_1 \leftrightarrow C_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (C_3 \to C_3 - 2C_1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (C_3 \to C_3 + C_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (C_3 \to \frac{1}{2} C_3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 - 2C_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -4 & 0 & -1 \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 + 5C_3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} (C_2 \to C_2 - 3C_3)$$

അതുകൊണ്ട് $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ഉദാഹരണം: 25

$P = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സിന് P^{-1} ഉണ്ടെങ്കിൽ കണ്ടുപിടിക്കുക

പരിഹാരം

$$P = IP,$$

അതായത്, $$\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P \quad (R_1 \to \frac{1}{10} R_1 \text{ ഉപയോഗിച്ച്})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} P \quad (R_2 \to R_2 + 5R_1 \text{ ഉപയോഗിച്ച്})$$

ഇവിടെ ഇടതുവശത്തെ മാട്രിക്സിൽ രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം '0' ആണ്. അതിനാൽ P^{-1} കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധ്യമല്ല

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 3.4

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന മാട്രിക്സുകളുടെ പ്രതിലോമങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ മൗലിക ക്രിയകൾ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. **15.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

18. A, B എന്നിവ പരസ്പരം പ്രതിലോമ മാട്രിക്സുകൾ ആകുന്നതിന്

(A) AB = BA ആകണം (B) AB = BA = 0 ആകണം

(C) AB = 0, BA = I ആകണം (D) AB = BA = I ആകണം

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 26

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ആയാൽ $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}, n \in \mathbf{N}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ഗണിതാഗമനരീതി (Mathematical Induction) ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്.

$$P(n): \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{ ആയാൽ, } \quad A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}, n \in \mathbf{N}$$

ആദ്യമായി $n = 1$ ന് P(n) ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കണം.

$$P(1):\ A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},\ \text{അതായത്}\ A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$\therefore\ n = 1$ ന് ശരിയാണ്

ഇത് $n = k$, യ്ക്ക് ശരിയാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക

$$\text{അതായത്}\ P(k):\ A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},\ \text{ആയാൽ}\ A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

എന്നിരിക്കട്ടെ.

$n = k+1$ ന് ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കണം.

$$\text{ie., } P(k+1):A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\ \text{ആയാൽ}$$

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}\ \text{എന്ന് തെളിയിക്കണം}$$

$$\text{എന്നാൽ, } A^{k+1} = A\cdot A^k = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos k\theta - \sin\theta\sin k\theta & \cos\theta\sin k\theta + \sin\theta\cos k\theta \\ -\sin\theta\cos k\theta - \cos\theta\sin k\theta & -\sin\theta\sin k\theta + \cos\theta\cos k\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta + k\theta) & \sin(\theta + k\theta) \\ -\sin(\theta + k\theta) & \cos(\theta + k\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

$n = k + 1$ ആയാൽ ഇത് ശരിയാണ്. അതുകൊണ്ട്

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}\ \text{എന്നത് എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കും ശരിയാണ്.}$$

ഉദാഹരണം : 27

A യും B യും ഒരേ ക്രമത്തിലുള്ള രണ്ടു സമമിത മാട്രിക്സുകൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. AB = BA ആയാൽ AB സമമിത മാട്രിക്സ് ആകുമെന്നും മറിച്ച് AB സമമിത മാട്രിക്സ് ആയാൽ AB = BA ആകുമെന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

A യും B യും സമമിത മാട്രിക്സുകൾ ആയതുകൊണ്ട്, $A' = A$, $B' = B$.

AB = BA, എന്നിരിക്കട്ടെ

$$(AB)' = B'A'$$
$$= B\,A \text{ (A യും B യും സമമിത മാട്രിക്സുകൾ)}$$
$$= AB \; [\therefore BA = AB]$$

$\therefore$ AB ഒരു സമമിത മാട്രിക്സ് ആണ്.

AB സമമിത മാട്രിക്സായതുകൊണ്ട് $(AB)' = AB$

$(AB)' = B'A' = BA$ അതുകൊണ്ട് $AB = BA$

ഉദാഹരണം : 28

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $CD - AB = O$ ആകത്തക്കവിധം D എന്ന മാട്രിക്സ് കാണുക.

പരിഹാരം

A, B, C എന്നിവ ക്രമം രണ്ട് ആയ സമചതുര മാട്രിക്സുകൾ ആയതുകൊണ്ട് CD – AB എന്നത് വ്യക്തമായി നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നതിനാൽ D ക്രമം 2 ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് ആയിരിക്കും.

$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ആയാൽ;}$$

$CD - AB = O$ എന്നതുപ്രകാരം

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = O$$

$$\begin{bmatrix} 2a+5c & 2b+5d \\ 3a+8c & 3b+8d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 43 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a+5c-3 & 2b+5d \\ 3a+8c-43 & 3b+8d-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

മാട്രിക്സുകളുടെ തുല്യതയനുസരിച്ച്

$$2a + 5c - 3 = 0 \quad \ldots (1)$$
$$3a + 8c - 43 = 0 \quad \ldots (2)$$
$$2b + 5d = 0 \quad \ldots (3)$$
$$3b + 8d - 22 = 0 \quad \ldots (4)$$

(1), (2), എന്നിവയിൽ നിന്ന് $a = -191$, $c = 77$.

(3) , (4) എന്നിവയിൽ നിന്ന് $b = -110$, $d = 44$.

അതുകൊണ്ട് $$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -191 & -110 \\ 77 & 44 \end{bmatrix}$$

കൂടുതൽ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $(aI + bA)^n = a^n I + na^{n-1} bA$, എന്നു തെളിയിക്കുക, $n \in \mathbf{N}$, I രണ്ടാം ക്രമത്തിലുള്ള അനന്യ മാട്രിക്സ് ആണ്.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, ആയാൽ $A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$, $n \in \mathbf{N}$. എന്നു തെളിയിക്കുക.

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, ആ യാൽ $A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$, $n \in \mathbf{N}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

4. A യും B യും സമമിത മാട്രിക്സുകൾ ആയാൽ AB – BA ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സ് ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

5. A എന്ന മാട്രിക്സ് സമമിത മാട്രിക്സോ ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സോ ആയാൽ B′AB യും സമമിത മാട്രിക്സോ ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സോ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

6. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ ആണ്. $A'A = I$ ആയാൽ x, y, z എന്നിവയുടെ വിലകൾ കണക്കാക്കുക.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$ ആയാൽ x ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $A^2 - 5A + 7I = O$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

9. $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = O$ ആയാൽ x ന്റെ വില കണക്കാക്കുക.

10. ഒരാൾ ഉല്പാദിപ്പിക്കുന്ന x, y, z എന്നീ മൂന്നു ഉൽപന്നങ്ങൾ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത മാർക്കറ്റുകളിൽ വിൽക്കുന്നു.

മാർക്കറ്റ്	**ഉൽപന്നങ്ങൾ**		
I	10,000	2,000	18,000
II	6,000	20,000	8,000

a. ഉൽപ്പന്നം x, y, z എന്നിവയിൽ ഒരെണ്ണത്തിന്റെ വിൽപ്പനവില യഥാക്രമം 2.50 രൂപ, 1.50 രൂപ, 1.00 രൂപ ആയാൽ അയാൾക്ക് കിട്ടുന്ന ആകെ വരുമാനം മാട്രിക്സ് രീതി ഉപയോഗിച്ചു കണക്കാക്കുക.

b. ഉൽപ്പന്നം x, y, z എന്നിവയിൽ ഒരെണ്ണത്തിന്റെ ഉൽപ്പാദനച്ചിലവ് യഥാക്രമം 2.00 രൂപ, 1.00 രൂപ, 50 പൈസ ആയാൽ അയാളുടെ ആകെ ലാഭം കണക്കാക്കുക.

11. $X\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ ആയാൽ X എന്ന മാട്രിക്സ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

12. A, B എന്നീ സമചതുര മാട്രിക്സുകൾ ഒരേ ക്രമത്തിലുള്ളതും $AB = BA$ യും ആയാൽ ഗണിതാഗമന തത്വം ഉപയോഗിച്ച് $AB^n = B^nA$ എന്നു തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ $(AB)^n = A^nB^n$, $n \in N$ എന്നും തെളിയിക്കുക.

13. $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$. കൂടാതെ $A^2 = I$. ആയാൽ

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

14. A എന്ന മാട്രിക്സ് സമമിതവും ന്യൂനസമമിതവുമായാൽ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ശരിയായത് ഏത്?

(A) A ഒരു വികർണ മാട്രിക്സ് (B) A ഒരു പൂജ്യം മാട്രിക്സ്

(C) A ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് (D) ഇതൊന്നുമല്ല

15. A ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സാണ്. കൂടാതെ $A^2 = A$ യുമാണ് എങ്കിൽ $(I + A)^3 - 7A$ എന്നതിനു തുല്യമായത്:

(A) A (B) I – A (C) I (D) 3A

സംഗ്രഹം

- സംഖ്യകളോ ഏകദങ്ങളോ ഉള്ള ഒരു ചതുരക്രമത്തിനെ മാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു.
- m വരികളും n നിരകളും ഉള്ള ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം $m \times n$.
- $[a_{ij}]_{m \times 1}$ ഒരു നിര മാട്രിക്സാണ്.
- $[a_{ij}]_{1 \times n}$ ഒരു വരി മാട്രിക്സാണ്.
- ക്രമം $m \times n$ ഉള്ള മാട്രിക്സ് ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് ആകണമെങ്കിൽ $m = n$ ആയിരിക്കണം.
- $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ ഒരു വികർണ്ണ മാട്രിക്സ് ആകണമെങ്കിൽ $a_{ij} = 0,\ i \neq j$
- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ഒരു അദിശ മാട്രിക്സ് ആകണമെങ്കിൽ $a_{ij} = 0,\ i \neq j$,
  $a_{ij} = k$ (k ഒരു അദിശം)
- ഒരു മാട്രിക്സിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും '0' ആയാൽ ആ മാട്രിക്സിനെ പൂജ്യം മാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു.
- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ഒരു അനന്യ മാട്രിക്സാകണമെങ്കിൽ $a_{ij} = 1;\ i = j,\ a_{ij} = 0,\ i \neq j$
- $A = [a_{ij}] = [b_{ij}] = B$ ആകണമെങ്കിൽ (i) A, B എന്നിവയുടെ ക്രമങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കണം. (ii) $a_{ij} = b_{ij}$; i, j യുടെ എല്ലാ സാധ്യമായ വിലകൾക്കും.
- $kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [k(a_{ij})]_{m \times n}$
- $-A = (-1)A$
- $A - B = A + (-1)B$
- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$, A, B, C എന്നിവ ഒരേ ക്രമമുള്ള മാട്രിക്സുകളായിരിക്കണം.
- $k(A + B) = kA + kB$, A , B ഇവ ഒരേ ക്രമമുള്ള മാട്രിക്സുകളാണ്, k എന്നത് ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയാണ്.
- $(k + l)A = kA + lA$; k , l എന്നിവ സ്ഥിരസംഖ്യകളാണ്.
- $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$, ആയാൽ $AB = C = [c_{ik}]_{m \times p}$, ഇവിടെ
  $$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$
- (i) $A(BC) = (AB)C$, (ii) $A(B + C) = AB + AC$, (iii) $(A + B)C = AC + BC$
- $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, ആയാൽ A' or $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$
- (i) $(A')' = A$, (ii) $(kA)' = kA'$, (iii) $(A + B)' = A' + B'$, (iv) $(AB)' = B'A'$

- A ഒരു സമമിത മാട്രിക്സാകണമെങ്കിൽ $A' = A$ ആയിരിക്കണം.
- A ഒരു ന്യൂനസമമിത മാട്രിക്സാകണമെങ്കിൽ $A' = -A$. ആയിരിക്കും.
- ഏതൊരു സമചതുര മാട്രിക്സിനേയും ഒരു സമമിത മാട്രിക്സിന്റേയും ന്യൂന സമമിത മാട്രിക്സിന്റേയും തുകയായി എഴുതാം.
- മാട്രിക്സിലെ മൗലികക്രിയകൾ :

  (i) $R_i \leftrightarrow R_j$ അല്ലെങ്കിൽ $C_i \leftrightarrow C_j$

  (ii) $R_i \rightarrow kR_i$ അല്ലെങ്കിൽ $C_i \rightarrow kC_i$

  (iii) $R_i \rightarrow R_i + kR_j$ അല്ലെങ്കിൽ $C_i \rightarrow C_i + kC_j$
- A, B എന്നിവ രണ്ടു സമചതുര മാട്രിക്സുകളാണ്. $AB = BA = I$ ആയാൽ B എന്ന മാട്രിക്സിനെ A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ പ്രതിലോമം എന്നുപറയുന്നു. ഇതിനെ A^{-1} എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.
- ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിനു പ്രതിലോമം ഉണ്ടെങ്കിൽ അത് ഏകമാത്രമായിരിക്കും.

L4U9K3

അധ്യായം **4**

ഡിറ്റർമിനന്റുകൾ (DETERMINANTS)

❖ *എല്ലാ ഗണിതസത്യങ്ങളും ആപേക്ഷികവും സോപാധികവുമാണ്*
– സി.പി. സ്റ്റെയ്ൻമാറ്റ്സ് ❖

4.1 ആമുഖം

പി.എസ്. ലാപ്ലാസ്
(1749-1827)

മാട്രിക്സിനെക്കുറിച്ചും മാട്രിക്സുകളുടെ ബീജഗണിതത്തെക്കുറിച്ചും കഴിഞ്ഞ അധ്യായത്തിൽ നാം പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. കൂടാതെ ഒരുകൂട്ടം ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളെ (system of algebraic equations) മാട്രിക്സ് സമവാക്യമായി എഴുതാമെന്നും നാം പഠിച്ചു. അതായത്

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$ എന്ന ഒരു ജോടി രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളെ $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ എന്ന് എഴുതാം. ഇവിടെ $a_1 b_2 - a_2 b_1$ എന്ന സംഖ്യയാണ് ഈ സമവാക്യങ്ങൾക്ക് ഏകമാത്രാ മൂല്യം (unique solution) ഉണ്ടോ അഥവാ ഇല്ലയോ എന്ന് തീരുമാനിക്കുന്നത്.

(അതായത് $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ അല്ലെങ്കിൽ, $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, ആയാൽ ഈ രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിന് ഒരേ ഒരു മൂല്യം മാത്രം ഉണ്ടായിരിക്കും എന്നത് ഓർമിക്കുക).

$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സുമായി ബന്ധപ്പെട്ടതും പരിഹാരങ്ങളുടെ ഏകമാത്രത (uniqueness of solution) തീരുമാനിക്കുന്നതുമായ $a_1 b_2 - a_2 b_1$ എന്ന സംഖ്യയെ A യുടെ ഡിറ്റർമിനന്റ് $|A|$ അല്ലെങ്കിൽ det (A) എന്ന് പറയുന്നു. എഞ്ചിനീയറിംഗ്, അടിസ്ഥാനശാസ്ത്രങ്ങൾ, സാമ്പത്തിക, സാമൂഹ്യശാസ്ത്രങ്ങൾ എന്നീ മേഖലകളിൽ ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ പ്രയോഗം വലുതാണ്.

ക്രമം മൂന്നുവരെയുള്ളതും രേഖീയ സംഖ്യകളടങ്ങിയതുമായ മാട്രിക്സുകളുടെ ഡിറ്റർമിനന്റുകളെക്കുറിച്ചാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ പഠിക്കാൻ പോകുന്നത്. കൂടാതെ

ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ വിവിധ പ്രത്യേകതകൾ, മൈനർ, കോഫാക്ടർ, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിൽ ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ ആവശ്യകത, സമചതുര മാട്രിക്സ്, സഹചാരി മാട്രിക്സ്, പ്രതിലോമ മാട്രിക്സ് എന്നിവ കാണുക, ഒരുകൂട്ടം രേഖീയ സമവാക്യങ്ങൾ സംഗതമാണോ (consistent) സംഗതമല്ലയോ (inconsistent) എന്ന് നിശ്ചയിക്കുക, രണ്ടോ മൂന്നോ ചരങ്ങൾ ഉള്ള രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം പ്രതിലോമ മാട്രിക്സ് ഉപയോഗിച്ച് കാണുക മുതലായവയാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.

4.2 ഡിറ്റർമിനന്റ്

ക്രമം n ആയിട്ടുള്ള ഏതൊരു സമചതുര മാട്രിക്സ് $A = [a_{ij}]$ യുടെയും ഡിറ്റർമിനന്റ് എന്നു വിളിക്കാവുന്ന ഒരു സംഖ്യ (രേഖീയം അല്ലെങ്കിൽ സമ്മിശ്രം) ഉണ്ട്. അത് ഒരു ഏക മാത്രാസംഖ്യയായിരിക്കും. ഇവിടെ a_{ij} എന്നത് A യുടെ i വരിയിലും j നിരയിലും വരുന്ന സംഖ്യയാണ്.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ആണെങ്കിൽ A യുടെ ഡിറ്റർമിനന്റിനെ $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(A)$ എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ്.

> **കുറിപ്പ്**
>
> (i) ഏതൊരു സമചതുരമാട്രിക്സ് A യ്ക്കും |A| സൂചിപ്പിക്കുന്നത് A യുടെ ഡിറ്റർമിനന്റിനെയാണ്. അല്ലാതെ A യുടെ കേവലവില അല്ല.
>
> (ii) സമചതുര മാട്രിക്സുകൾക്കുമാത്രമേ ഡിറ്റർമിനന്റ് ഉണ്ടായിരിക്കുകയുള്ളൂ.

4.2.1 ക്രമം 1 ആയ മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ്

ക്രമം 1 ആയ മാട്രിക്സ് ആണ് $A = [a]$ എന്ന് കരുതുക. എങ്കിൽ A യുടെ ഡിറ്റർമിനന്റ് a എന്നാണ് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത്.

4.2.2 ക്രമം 2 ആയ മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ്

ക്രമം 2 ആയ മാട്രിക്സാണ് $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ എന്ന് കരുതുക. എങ്കിൽ

$\det(A) = |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ എന്നാണ് A യുടെ ഡിറ്റർമിനന്റിനെ നിർവ്വചിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണം : 1

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(-1) = 4 + 4 = 8$$

ഉദാഹരണം : 2

$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = x\,(x) - (x+1)\,(x-1) = x^2 - (x^2 - 1)$$

$$x^2 - x^2 + 1 = 1$$

4.2.3 ക്രമം 3 ആയ മാട്രിക്സുകളുടെ ഡിറ്റർമിനന്റ്

ക്രമം 2 ആയ ഡിറ്റർമിനന്റുകളാക്കി എഴുതിയാണ് ക്രമം 3 ആയ മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്. ഇതിനെയാണ് ഒരു വരിയിലൂടെയോ (row) അല്ലെങ്കിൽ ഒരു നിരയിലൂടെയോ (column) ഉള്ള ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വിപുലീകരണം എന്ന് പറയുന്നത്. ക്രമം 3 ആയ ഡിറ്റർമിനന്റിനെ വിപുലീകരിക്കുന്നത് 3 വരിയും (R_1, R_2, R_3) മൂന്നു നിരയും (C_1, C_2, C_3) ഉപയോഗിച്ച് ആറുതരത്തിൽ ചെയ്യാം. അവയെല്ലാം ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ഒരേ സംഖ്യതന്നെയായിരിക്കും.

$A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ എന്ന സമചതുര മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് പരിഗണിക്കുക.

അതായത് $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

ഒന്നാമത്തെ വരി (R_1) ഉപയോഗിച്ചുള്ള വിപുലീകരണം

ഘട്ടം 1 : R_1 ലെ ഒന്നാമത്തെ അംഗമായ a_{11} നെ $(-1)^{(1+1)}$ [$(-1)^{a_{11}}$ ലെ അടിക്കുറികളുടെ തുക] കൊണ്ടും a_{11} ഉൾപ്പെടുന്ന ഒന്നാമത്തെ വരിയും (R_1) നിരയും (C_1) ഒഴിവാക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ക്രമം 2 ആയ ഡിറ്റർമിനന്റുകൊണ്ടും ഗുണിക്കുക.

അതായത് $(-1)^{1+1}\, a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

ഘട്ടം 2 : R_1 ലെ രണ്ടാമത്തെ അംഗമായ a_{12} നെ $(-1)^{1+2}$ [$(-1)^{a_{12}}$ ലെ അടിക്കുറികളുടെ തുക] കൊണ്ടും a_{12} ഉൾപ്പെടുന്ന ഒന്നാമത്തെ വരിയും (R_1) രണ്ടാമത്തെ നിരയും (C_2) ഒഴിവാക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ക്രമം 2 ആയ ഡിറ്റർമിനന്റുകൊണ്ടും ഗുണിക്കുക.

അതായത് $(-1)^{1+2}\, a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

ഘട്ടം 3 : R_1 ലെ മൂന്നാമത്തെ അംഗമായ a_{13} യെ $(-1)^{1+3}$ [$(-1)^{a_{13}}$ ലെ അടിക്കുറികളുടെ തുക] കൊണ്ടും a_{13} ഉൾപ്പെടുന്ന ഒന്നാമത്തെ വരിയും (R_1) മൂന്നാമത്തെ നിരയും (C_3) ഒഴിവാക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ക്രമം 2 ആയ ഡിറ്റർമിനന്റുകൊണ്ടും ഗുണിക്കുക.

അതായത്
$$(-1)^{1-3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ഘട്ടം 4 : ഇപ്പോൾ A യുടെ ഡിറ്റർമിനന്റ് കാണുന്നതിനായി ഘട്ടം 1 ലും 2 ലും 3 ലും കിട്ടിയ പദങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടുക. അതായത്

$$\det A = |A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

അല്ലെങ്കിൽ
$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \quad \ldots (1)$$

> **കുറിപ്പ്** നാല് ഘട്ടങ്ങളും ഒരുമിച്ച് ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

രണ്ടാമത്തെ വരി (R_2) ഉപയോഗിച്ചുള്ള വിപുലീകരണം

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

R_2 ഉപയോഗിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ,

$$|A| = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$$
$$|A| = -a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{31}a_{12}$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{31}\,a_{22} \quad \ldots (2)$$

ഒന്നാമത്തെ നിര (C_1) ഉപയോഗിച്ചുള്ള വിപുലീകരണം.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

C_1 ഉപയോഗിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ

$$|A| = a_{11}\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\,(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31}\,(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{21}\,(a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32}) + a_{31}\,(a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22})$$

$$|A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} + a_{21}\,a_{13}\,a_{32} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} - a_{31}\,a_{13}\,a_{22}$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{31}\,a_{22} \quad \ldots (3)$$

$|A|$ യുടെ വില (1) ലും (2) ലും (3) ലും തുല്യമാണെന്ന് കാണാം. ഇതുപോലെ R_3, C_2 അല്ലെങ്കിൽ C_3 ഉപയോഗിച്ച് $|A|$ കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ (1), (2), (3) ലെ വില തന്നെ കിട്ടുമെന്നു കാണാം.

അതുകൊണ്ട്, ഏതൊരു വരിയും അല്ലെങ്കിൽ നിരയും ഉപയോഗിച്ച് ഡിറ്റർമിനന്റ് വിപുലീകരിക്കുമ്പോഴും ഒരേ സംഖ്യതന്നെ കിട്ടുന്നു.

കുറിപ്പ്

(i) ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വില എളുപ്പത്തിൽ കണക്കാക്കുന്നതിന് ഏത് വരിയിലോ അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലോ ആണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ പൂജ്യം ഉള്ളത്, അത് ഉപയോഗിച്ച് വിപുലീകരിച്ചാൽ മതിയാകും.

(ii) ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വിപുലീകരണത്തിൽ $(-1)^{i+j}$, കൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നതിനുപകരം നമുക്ക് $(i+j)$ ഒറ്റയോ ഇരട്ടയോ എന്നത് അനുസരിച്ച് -1 അല്ലെങ്കിൽ $+1$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ മതിയാകും.

കൂടാതെ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ എന്നും $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ എന്നും കരുതുക. $A = 2B$ ആണെന്ന് എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം. $|A| = 0 - 8 = -8$, $|B| = 0 - 2 = -2$ എന്നിവ ആണ്.

അതായത് $|A| = 4(-2) = 2^2|B|$ അല്ലെങ്കിൽ $|A| = 2^n|B|$. ഇവിടെ സമചതുര മാട്രിക്സുകളായ A യുടെയും B യുടെയും ക്രമമാണ് $n - 2$.

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ, ക്രമം n ആയ സമചതുര മാട്രിക്സുകളായ A യിലും B യിലും $A = kB$ ആണെങ്കിൽ $|A| = k^n|B|$ ആയിരിക്കും. ഇവിടെ $n = 1, 2, 3$

ഉദാഹരണം : 3

$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ എന്ന ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

മൂന്നാമത്തെ നിരയിലെ രണ്ട് അംഗങ്ങൾ പൂജ്യമാണെന്ന് കാണാം. അതിനാൽ മൂന്നാമത്തെ നിര (C_3) ഉപയോഗിച്ച് വിപുലീകരിച്ചാൽ,

$$A = 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1 - 12) - 0 + 0 = -52$$

> A എന്ന സമചതുര മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് കാണാൻ Determinant [A] എന്ന് നൽകിയാൽ മതി.

ഉദാഹരണം : 4

$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$ യുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

R_1 അനുസരിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} 0 & \sin\beta \\ -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} - \sin\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} - \cos\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\beta \end{vmatrix}$$

$$= 0 - \sin\alpha\,(0 - \sin\beta\cos\alpha) - \cos\alpha\,(\sin\alpha\sin\beta - 0)$$

$$= \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta = 0$$

ഉദാഹരണം : 5

$\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ ആണെങ്കിൽ x ന്റെ വിലകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

അതായത് $3 - x^2 = 3 - 8$

$x^2 = 8$

$x = \pm 2\sqrt{2}$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 4.1

ചുവടെ 1, 2 ആയി തന്നിട്ടുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ വില കണക്കാക്കുക.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ $|2A| = 4|A|$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ $|3A| = 27|A|$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ വില കണക്കാക്കുക.

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ $|A|$ കണക്കാക്കുക.

7. x ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ എങ്കിൽ x ന്റെ വില

(A) 6 (B) ± 6 (C) – 6 (D) 0

4.3 ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ (Properties of Determinants)

ഡിറ്റർമിനന്റുകൾ എങ്ങനെ വിപുലീകരിക്കാമെന്ന് നാം പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് കൂടുതൽ ലഘൂകരിക്കുന്നതിനായി ഏതെങ്കിലും ഒരു വരിയിലോ നിരയിലോ പരമാവധി പൂജ്യം ലഭിക്കുന്നതിനായുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ ചില പ്രത്യേകതകളാണ് (properties) പഠിക്കാൻ പോകുന്നത്. ഈ പ്രത്യേകതകൾ ഏതു ക്രമത്തിലുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റിലും ഉപയോഗിക്കാം. എന്നിരുന്നാലും ഇവിടെ ക്രമം 3 ആയ ഡിറ്റർമിനന്റുവരെ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു.

പ്രത്യേകത 1 : ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വരിയും നിരയും പരസ്പരം മാറ്റിയാലും അതിന്റെ വിലയിൽ മാറ്റമുണ്ടാകില്ല.

> ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സും അതിന്റെ ട്രാൻസ്പോസും നിർമിക്കുക. ഇവയുടെ രണ്ടിന്റേയും ഡിറ്റർമിനന്റ് കണ്ടുപിടിച്ച് താരതമ്യം ചെയ്യുക.

പരിശോധന : $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ പരിഗണിക്കുക.

ഒന്നാമത്തെ വരി അനുസരിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

വരിയും നിരയും പരസ്പരം മാറ്റിയാൽ നമുക്കുകിട്ടുന്ന ഡിറ്റർമിനന്റ്,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ഒന്നാമത്തെ നിര ഉപയോഗിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ

$$\Delta_1 = a_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

അതായത് $\Delta = \Delta_1$

> **കുറിപ്പ് 1:** മുകളിൽ പറഞ്ഞ സവിശേഷതയിൽ നിന്നും A ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സും A' അതിന്റെ ട്രാൻസ്പോസും (transpose) മാണെങ്കിൽ det(A) = det (A'), ആയിരിക്കും.

> **കുറിപ്പ് 2:** R_i എന്നത് i യുടെ സ്ഥാനത്തുള്ള വരിയും C_i എന്നത് i യുടെ സ്ഥാനത്തുള്ള നിരയുമാണെങ്കിൽ വരിയും നിരയും പരസ്പരം മാറ്റുന്നത് പ്രതീകാത്മകമായി $C_i \leftrightarrow R_i$ എന്ന് എഴുതാം.

ഈ സവിശേഷത ഒരു ഉദാഹരണസഹിതം തെളിയിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 6

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ ൽ പ്രത്യേകത 1 ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

ഒന്നാമത്തെ വരി അനുസരിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$= 2\,(0 - 20) + 3\,(-42 - 4) + 5\,(30 - 0)$

$= -40 - 138 + 150 = -28$

വരിയും നിരയും പരസ്പരം മാറ്റുമ്പോൾ,

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഒന്നാമത്തെ നിര അനുസരിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta_1 = 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$= 2\,(0 - 20) + 3\,(-42 - 4) + 5\,(30 - 0)$

$= -40 - 138 + 150 = -28$

$\Delta = \Delta_1$ എന്ന് വ്യക്തമാണ്.

ഇങ്ങനെ പ്രത്യേകത I ശരിയാണെന്നു കാണാം.

പ്രത്യേകത 2: ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വരികളോ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ട് നിര കളോ പരസ്പരം മാറ്റുകയാണെങ്കിൽ ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ ചിഹ്നം മാറുന്നു.

പരിശോധന : $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ എന്ന് കരുതുക.

ഒന്നാമത്തെ വരി അനുസരിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - a_2\,(b_1\,c_3 - b_3\,c_1) + a_3\,(b_1\,c_2 - b_2\,c_1)$$

ഒന്നാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും വരികൾ പരസ്പരം മാറ്റുമ്പോൾ.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

മൂന്നാമത്തെ വരി അനുസരിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta_1 = a_1 (c_2 b_3 - b_2 c_3) - a_2 (c_1 b_3 - c_3 b_1) + a_3 (b_2 c_1 - b_1 c_2)$$

$$= - [a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)]$$

$\Delta_1 = - \Delta$ എന്ന് വ്യക്തമാകുന്നു.

ഇതുപോലെ രണ്ട് നിരകൾ പരസ്പരം മാറ്റിയാലും ചിഹ്നം മാറുന്നു എന്നു തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്.

> **കുറിപ്പ്** വരികൾ പരസ്പരം മാറ്റുന്നതിനെ $R_i \leftrightarrow R_j$ എന്നും നിരകൾ പരസ്പരം മാറ്റുന്നതിനെ $C_i \leftrightarrow C_j$ എന്നും സൂചിപ്പിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 7

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$ ൽ പ്രത്യേകത 2 ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക

പരിഹാരം

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -28$$ (ഉദാഹരണം 6 ൽ നിന്ന്)

വരികൾ R_2, R_3 എന്നിവ പരസ്പരം മാറ്റുമ്പോൾ, അതായത് $R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & -7 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

ഒന്നാമത്തെ വരി അനുസരിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta_1 = 2\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 (20 - 0) + 3 (4 + 42) + 5 (0 - 30)$$

$$= 40 + 138 - 150 = 28$$

$\Delta_1 = - \Delta$ എന്ന് വ്യക്തമാകുന്നു.

പ്രത്യേകത 3 : ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വരികളോ (അല്ലെങ്കിൽ നിരകളോ) ഒരേ പോലെയായാൽ (identical) (എല്ലാ സമസ്ഥാനീയ അംഗങ്ങളും തുല്യം) ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വില പൂജ്യമായിരിക്കും.

തെളിവ് : ഒരുപോലെയുള്ള വരികളോ (അല്ലെങ്കിൽ നിരകളോ) പരസ്പരം മാറ്റിയാലും ഡിറ്റർമിനന്റ് Δ യുടെ വിലയിൽ വ്യത്യാസം വരുന്നില്ല. പക്ഷേ പ്രത്യേകത 2 പ്രകാരം Δ യുടെ ചിഹ്നത്തിൽ വ്യത്യാസം വരുന്നു.

ആയതുകൊണ്ട് $\Delta = -\Delta$

അല്ലെങ്കിൽ $\Delta = 0$

മുകളിൽ പറഞ്ഞ പ്രത്യേകത ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ വ്യക്തമാക്കാം.

ഉദാഹരണം : 8

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$ യുടെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

ഒന്നാമത്തെ വരി അനുസരിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = 3\,(6-6) - 2\,(6-9) + 3\,(4-6)$$
$$= 0 - 2\,(-3) + 3\,(-2) = 6 - 6 = 0$$

ഇവിടെ R_1, R_3 എന്നിവ ഒരേപോലെയാണ്

പ്രത്യേകത 4 : ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു വരിയിലേയോ നിരയിലേയോ എല്ലാ അംഗങ്ങളേയും k എന്ന സ്ഥിരസംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ, ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വില k മടങ്ങാകും.

പരിശോധന : $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ എന്ന് കരുതുക. ഒന്നാമത്തെ വരിയിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളെയും k കൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഡിറ്റർമിനന്റാണ് Δ_1 എന്നും കരുതുക. എങ്കിൽ,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} k\,a_1 & k\,b_1 & k\,c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ഒന്നാമത്തെ വരി അനുസരിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta_1 = k\,a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - k\,b_1\,(a_2\,c_3 - c_2\,a_3) + k\,c_1\,(a_2\,b_3 - b_2\,a_3)$$
$$= k\,[a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - b_1\,(a_2\,c_3 - c_2\,a_3) + c_1\,(a_2\,b_3 - b_2\,a_3)]$$
$$= k\,\Delta$$

ആയതുകൊണ്ട് $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

കുറിപ്പ് :

(i) ഈ സവിശേഷത പ്രകാരം ഏതെങ്കിലും വരിയിലോ അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലോ ഉള്ള പൊതുഘടകം പുറത്തെടുത്ത് ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വില കാണാവുന്നതാണ്.

(ii) ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വരിയിലേയോ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടു നിരയിലേയോ അംഗങ്ങൾ പരസ്പരം ആനുപാതികമാണെങ്കിൽ, ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വില പൂജ്യമായിരിക്കും. അതായത്

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \end{vmatrix} = 0$$ (R_1, R_3 ഇവ ആനുപാതികമാണ്)

ഉദാഹരണം: 9

വില കണക്കാക്കുക : $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

പരിഹാരം

$$\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6\times 17 & 6\times 3 & 6\times 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 17 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

(പ്രത്യേകതകൾ 3, 4 എന്നിവ ഉപയോഗിക്കുന്നു)

പ്രത്യേകത 5 : ഡിറ്റർമിനന്റിലെ ഒരു വരിയിലെയോ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു നിരയിലെയോ ഏതാനും അല്ലെങ്കിൽ എല്ലാ അംഗങ്ങളും രണ്ടോ അതിലധികമോ പദങ്ങളുടെ തുകയാണെങ്കിൽ ആ ഡിറ്റർമിനന്റിനെ രണ്ടോ അതിലധികമോ ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ തുകയായി എഴുതാൻ കഴിയും.

ഉദാഹരണത്തിന്, $\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

പരിശോധന : ഇടതുഭാഗം = $\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ

ഒന്നാമത്തെ വരി അനുസരിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ,

$$\begin{aligned} \Delta &= (a_1+\lambda_1)(b_2c_3-c_2b_3)-(a_2+\lambda_2)(b_1c_3-b_3c_1) \\ &\quad +(a_3+\lambda_3)(b_1c_2-b_2c_1) \\ &= a_1(b_2c_3-c_2b_3)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1) \\ &\quad +\lambda_1(b_2c_3-c_2b_3)-\lambda_2(b_1c_3-b_3c_1)+\lambda_3(b_1c_2-b_2c_1) \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{വലതുഭാഗം}$$

ഇതുപോലെ പ്രത്യേകത 5, മറ്റു വരികൾക്കും നിരകൾക്കും തെളിയിക്കാൻ കഴിയും.

ഉദാഹരണം : 10

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

(പ്രത്യേകത 5 ഉപയോഗിച്ച്)

$= 0 + 0 = 0$ (പ്രത്യേകതകൾ 3, 4 എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച്)

പ്രത്യേകത 6 : ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിലെ ഒരു വരിയിലെയോ (അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലെയോ) എല്ലാ അംഗങ്ങളെയും ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് മറ്റൊരു വരിയിലെയോ (നിരയിലെയോ) അതാതു സ്ഥാനത്തുള്ള അംഗങ്ങളോട് കൂട്ടിയാൽ ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വിലയിൽ വ്യത്യാസം വരുന്നില്ല. അതായത്, $R_i \to R_i + kR_j$ അല്ലെങ്കിൽ $C_i \to C_i + kC_j$ എന്നീ ക്രിയകൾ ചെയ്താലും ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വിലയിൽ മാറ്റമുണ്ടാകില്ല.

പരിശോധന :

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1+kc_1 & a_2+kc_2 & a_3+kc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ എന്നിവ പരിഗണിക്കുക.

R1 = {3, 2, 5} എന്ന input command നൽകുക. R2 = {2, 1, 2}, R3 = {4, 2, 1} എന്ന input കമാന്റുകളും നൽകുക.

M = {R1, R2, R3} എന്ന കമാന്റ് നൽകിയാൽ $M = \begin{bmatrix} 3, & 2, & 5 \\ 2, & 1, & 2 \\ 4, & 2, & 1 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സ് ലഭിക്കും.

a, b എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് സ്ലൈഡുകൾ നിർമിക്കുക.
N = {a * R1, R2, R3} എന്ന കമാന്റ് നൽകി N എന്ന മാട്രിക്സ് നിർമിക്കുക. ഇതുപോലെ P = {R1, a * R2, R3}, q = {R1, R2, a * R1 – b * R2} എന്നീ മാട്രിക്സുകളും നിർമിക്കുക. M എന്ന മാട്രിക്സും N, P, Q എന്നീ മാട്രിക്സുകളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്? ഈ മാട്രിക്സുകളുടെയെല്ലാം ഡിറ്റർമിനന്റ് കണക്കാക്കുക. അവയുടെ പ്രത്യേകതകൾ എന്തെല്ലാം? സ്ലൈഡറുകളുടെ വില മാറ്റി നോക്കുക.
R = a * m എന്ന കമാന്റ് നൽകി മാട്രിക്സ് നിർമിക്കുക. $|M|, |R|$ ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്?
S = {R2, R1, R3}, T = {R2, R3, R1} എന്നീ മാട്രിക്സുകൾ നിർമിച്ച് ഡിറ്റർമിനന്റ് കണ്ടെത്തുക. M ന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റുമായി ഇവയ്ക്ക് എന്താണ് ബന്ധം?

ഇവിടെ Δ യിൽ $R_1 \to R_1 + kR_3$ എന്ന ക്രിയ ചെയ്യുമ്പോഴാണ് Δ_1 ലഭിക്കുന്നത്. അതായത്, മൂന്നാമത്തെ വരിയിലെ (R_3) എല്ലാ അംഗങ്ങളേയും k എന്ന സ്ഥിരസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് അവയെ ഒന്നാമത്തെ വരി (R_1) യിലെ അതാതുസ്ഥാനങ്ങളിലുള്ള അംഗങ്ങളോട് കൂട്ടുക.

പ്രതീകാത്മകമായി $R_1 \to R_1 + k\,R_3$ എന്ന് എഴുതാം.

അതായത്,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & kc_2 & kc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(പ്രത്യേകത 5 ഉപയോഗിക്കുക)}$$

$$= \Delta + 0 \quad (R_1, R_3 \text{ ആനുപാതികമാണ്})$$

അതുകൊണ്ട് $\Delta = \Delta_1$

കുറിപ്പ് :

(i) ഡിറ്റർമിനന്റ് Δ യിൽ $R_i \to kR_i$ അല്ലെങ്കിൽ $C_i \to kC_i$ എന്ന ക്രിയചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഡിറ്റർമിനന്റാണ് Δ_1 എങ്കിൽ $\Delta_1 = k\Delta$ ആയിരിക്കും.

(ii) $R_i \to R_i + kR_j$ പോലെയുള്ള ക്രിയകൾ ഒന്നോ അതിലധികമോ വരികളിൽ ഒരേ ഘട്ടത്തിൽ തന്നെ ചെയ്യേണ്ടിവരുമ്പോൾ, ഒരു ക്രിയ ചെയ്യുന്ന വരി മറ്റൊരു ക്രിയയ്ക്ക് ഉപയോഗിക്കുന്നില്ല എന്ന് നാം ഉറപ്പുവരുത്തേണ്ടതാണ്. ഇത് നിരകളിലെ ക്രിയകൾക്കും ബാധകമാണ്.

ഉദാഹരണം : 11

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന ഡിറ്റർമിനന്റിൽ $R_2 \to R_2 - 2R_1$, $R_3 \to R_3 - 3R_1$ എന്നീ ക്രിയകൾ ചെയ്താൽ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

വീണ്ടും $R_3 \to R_3 - 3R_2$, എന്ന ക്രിയ ചെയ്യുന്നു.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

C_1 ഉപയോഗിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = a\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 0 & a \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= a\,(a^2 - 0) = a\,(a^2) = a^3$$

ഉദാഹരണം : 12

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ എന്ന് വിപുലീകരിക്കാതെ തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$R_1 \to R_1 + R_2$ എന്ന ക്രിയ ചെയ്താൽ

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

R_1 ലെയും R_3 യിലെയും അംഗങ്ങൾ ആനുപാതികമായതിനാൽ, $\Delta = 0$.

ഉദാഹരണം : 13

വില കണക്കാക്കുക.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

പരിഹാരം

$R_2 \rightarrow R_2 - R_1$, $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$ എന്നീ ക്രിയകൾ ചെയ്താൽ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c\,(a-b) \\ 0 & c-a & b\,(a-c) \end{vmatrix} \text{ ആകും}$$

R_2 ലെയും R_3 ലെയും പൊതുഘടകങ്ങളായ $(b - a)$, $(c - a)$ എന്നിവ പുറത്തെടുക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix}$$

$= (b - a)\,(c - a)\,[(-b + c)]$ (ഒന്നാമത്തെ നിര ഉപയോഗിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ)

$= (a - b)\,(b - c)\,(c - a)$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 14

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$ എന്ന് കരുതുക.

$R_1 \rightarrow R_1 - R_2 - R_3$ എന്ന ക്രിയ Δ യിൽ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

R_1 ഉപയോഗിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - (-2c)\begin{vmatrix} b & b \\ c & a+b \end{vmatrix} + (-2b)\begin{vmatrix} b & c+a \\ c & c \end{vmatrix}$$

$$= 2\,c\,(a\,b + b^2 - bc) - 2\,b\,(b\,c - c^2 - ac)$$

$$= 2\,a\,b\,c + 2\,cb^2 - 2\,bc^2 - 2\,b^2c \quad 2\,bc^2 + 2\,abc$$

$$= 4\,abc$$

ഉദാഹരണം : 15

If x, y, z എന്നിവ വ്യത്യസ്തവും $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ ആയാൽ $1 + xyz = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$ (പ്രത്യേകത 5 ഉപയോഗിക്കുന്നു)

$$= (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + xyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$ ($C_3 \leftrightarrow C_2$, $C_1 \leftrightarrow C_2$ എന്നിവ ഉപയോഗിക്കുന്നു)

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}(1+xyz)$$

$$= (1+xyz)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$ ($R_2 \to R_2 - R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$ ഉപയോഗിക്കുന്നു)

$(y-x)$ എന്ന പൊതുഘടകം R_2 ൽ നിന്നും, $(z-x)$ എന്ന പൊതുഘടകം R_3 യിൽ നിന്നും പുറത്തെടുക്കുമ്പോൾ

$$\Delta = (1+xyz)(y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 1 & z+x \end{vmatrix}$$

$$= (1+xyz)(y-x)(z-x)(z-y)$$ (C_1 ഉപയോഗിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ)

x, y, z എന്നിവ വ്യത്യസ്തവും $\Delta = 0$ വും ആണ്.

അതായത് $x-y \neq 0, y-z \neq 0, \ z-x \neq 0$, എങ്കിൽ $1+xyz = 0$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 16

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = abc+bc+ca+ab$$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

R_1, R_2, R_3 എന്നീ വരികളിൽ നിന്ന് യഥാക്രമം a,b,c എന്നിവ പുറത്തെടുക്കുന്നു.

$$\text{ഇടതുഭാഗം} = abc\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$R_1 \rightarrow R_1 + R_2 + R_3$, എന്ന ക്രിയ പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

വീണ്ടും $C_2 \to C_2 - C_1$, $C_3 \to C_3 - C_1$, എന്നീ ക്രിയകൾ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left[1(1-0)\right]$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = abc + bc + ca + ab = \text{വലതുഭാഗം}$$

കുറിപ്പ് $C_1 \to C_1 - C_2$, $C_3 \to C_3 - C_2$, എന്നിങ്ങനെ മാറിമാറി ശ്രമിക്കുകയും അതിനുശേഷം $C_1 \to C_1 - a\,C_3$ എന്ന് പ്രയോഗിക്കുകയും ചെയ്യുക.

പരിശീലനം പ്രശ്നങ്ങൾ 4.2

വിപുലീകരിക്കാതെ ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ പ്രത്യേകത ഉപയോഗിച്ച് 1 മുതൽ 7 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾ തെളിയിക്കുക.

1. $$\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix} = 0$$

2. $$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$

3. $$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = 0$$

4. $$\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$$

5. $$\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$$

6. $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$

7. $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

8 മുതൽ 14 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾ, ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

8. (i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

9. $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)\,(y-z)\,(z-x)\,(xy+yz+zx)$

10. (i) $\begin{vmatrix} x\quad 4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x\quad 4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

(ii) $\begin{vmatrix} y\quad k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y\quad k \end{vmatrix} = k^2(3y+k)$

11. (i) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

(ii) $\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$

12. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$

13. $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$

14. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$

15 നും 16 നും ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

15. A ക്രമം 3 ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് ആണെങ്കിൽ $|kA|$ ....

(A) $k|A|$ (B) $k^2|A|$ (C) $k^3|A|$ (D) $3k|A|$

16. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ശരിയായ പ്രസ്താവന ഏത്?

(A) ഡിറ്റർമിനന്റ് ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് ആണ്.

(B) ഡിറ്റർമിനന്റ് ഒരു മാട്രിക്സുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ്.

(C) ഡിറ്റർമിനന്റ് ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ്.

(D) ഇവയൊന്നും ശരിയല്ല.

4.4 ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)]$ ആണെന്ന് നാം മുൻക്ലാസുകളിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇതിനെ ഡിറ്റർമിനന്റ് രൂപത്തിലെഴുതുമ്പോൾ,

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \ldots (1)$$

കുറിപ്പ് :

(i) പരപ്പളവ് ഒരു അധിസംഖ്യ ആയതിനാൽ നമ്മൾ എല്ലായ്പ്പോഴും ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ കേവലമൂല്യം എടുക്കുന്നു.

(ii) പരപ്പളവ് തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ, കണക്കുകൂട്ടലിന് ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ അധിസംഖ്യാവിലയും ന്യൂനസംഖ്യാവിലയും ഉപയോഗിക്കണം.

(iii) ഒരേ രേഖയിലെ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ (collinear points) ഉപയോഗിച്ച് നിർമിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് പൂജ്യമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 17

(3, 8), (– 4, 2), (5, 1) എന്നിവ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[3(2-1)-8(-4-5)+1(-4-10)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ (3+72-14) = \frac{61}{2}$$

അതുകൊണ്ട് ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $-\ \frac{61}{2}$ ച.യൂണിറ്റ്

ഉദാഹരണം: 18

ഡിറ്റർമിനന്റ് ഉപയോഗിച്ച് A(1, 3), B (0, 0) എന്നിവ യോജിപ്പിച്ചുവരക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക. ത്രികോണം ABD യുടെ പരപ്പളവ് 3 ചതുരശ്ര യൂണിറ്റും D(k, 0) യും ആണെങ്കിൽ k യുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

AB യിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് P (x, y) എന്ന് കരുതുക. എങ്കിൽ ΔABP യുടെ പരപ്പളവ് പൂജ്യം ആയിരിക്കും (എങ്ങനെ?)

ആയതിനാൽ $$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

അതായത് $$\frac{1}{2}(y\quad 3x) = 0$$ അല്ലെങ്കിൽ $y = 3x$.

ഇതാണ് AB യുടെ സമവാക്യം.

കൂടാതെ, ΔABD യുടെ പരപ്പളവ് 3 ചതുരശ്ര യൂണിറ്റ് ആയതിനാൽ,

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 3$$

അതായത് $\frac{-3k}{2} = \pm 3$, അതായത്, $k = \mp 2$.

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 4.3

1. ത്രികോണങ്ങളുടെ മൂലകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. അവയുടെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക
   (i) (1, 0), (6, 0), (4, 3) (ii) (2, 7), (1, 1), (10, 8)
   (iii) (–2, –3), (3, 2), (–1, –8)
2. A $(a, b - c)$, B $(b, c + a)$, C $(c, a - b)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക
3. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന മൂലകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് 4 ചതുരശ്ര യൂണിറ്റ് ആണെങ്കിൽ k യുടെ വില കണക്കാക്കുക.
   (i) $(k, 0)$, (4, 0), (0, 2) (ii) (–2, 0), (0, 4), $(0, k)$
4. (i) (1, 2), (3, 6) എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (ii) (3, 1), (9, 3) എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.
5. (2, – 6), (5, 4), $(k, 4)$ എന്നിവ മൂലകളായ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 35 ചതുരശ്ര യൂണിറ്റ് ആണെങ്കിൽ k യുടെ വില
   (A) 12 (B) –2 (C) –12, –2 (D) 12, –2

4.5 മൈനറും കോഫാക്ടറും

ഈ ഭാഗത്ത് മൈനറുകളും കോഫാക്ടറുകളും ഉപയോഗിച്ചുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റ് വിപുലീകരണത്തിന്റെ സംക്ഷിപ്തരൂപം (compact form) ആണ് ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.

നിർവ്വചനം 1 : ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിലെ a_{ij} എന്ന അംഗം ഉൾപ്പെടുന്ന i വരിയും j നിരയും ഒഴിവാക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഡിറ്റർമിനന്റാണ് a_{ij} യുടെ മൈനർ M_{ij}.

> **കുറിപ്പ് :** ക്രമം $n(n \geq 2)$ ആയ ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിലെ ഒരു അംഗത്തിന്റെ മൈനർ, ക്രമം $n - 1$ ആയ ഡിറ്റർമിനന്റായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 19

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ ൽ 6 എന്ന അംഗത്തിന്റെ മൈനർ കാണുക.

പരിഹാരം

6 ഉൾപ്പെടുന്നത് രണ്ടാമത്തെ വരിയിലും മൂന്നാമത്തെ നിരയിലുമാണ്. ആയതിനാൽ അതിന്റെ മൈനർ M_{23} യാണ്.

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6$ (A യിൽ R_2, C_3 എന്നിവയും ഒഴിവാക്കിയത് ശ്രദ്ധിക്കുക).

നിർവ്വചനം 2 : a_{ij} എന്ന അംഗത്തിന്റെ കോഫാക്ടർ എന്നത്,

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, ഇവിടെ M_{ij} എന്നാൽ a_{ij} യുടെ മൈനർ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 20

$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ ലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളുടേയും മൈനറും കോഫാക്ടറും കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

a_{ij} യുടെ മൈനർ M_{ij} യാണ്.

ഇവിടെ $a_{11} = 1$. എങ്കിൽ $M_{11} = a_{11}$ ന്റെ മൈനർ $= 3$

$M_{12} = a_{12}$ ന്റെ മൈനർ $= 4$

$M_{21} = a_{21}$ ന്റെ മൈനർ $= -2$

$M_{22} = a_{22}$ ന്റെ മൈനർ $= 1$

a_{ij} യുടെ കോഫാക്ടർ A_{ij} യാണ്. ആയതിനാൽ,

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (3) = 3$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 (4) = -4$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 (-2) = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 (1) = 1$

ഉദാഹരണം 21 : $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ യിൽ a_{11}, a_{21} എന്നിവയുടെ മൈനറും കോഫാക്ടറും കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം : നിർവ്വചന പ്രകാരം,

a_{11} ന്റെ മൈനർ $= M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}$

a_{11} ന്റെ കോഫാക്ടർ $= A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}$

a_{21} ന്റെ മൈനർ $= M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\, a_{33} - a_{13}\, a_{32}$

a_{21} ന്റെ കോഫാക്ടർ $= A_{21} = (-1)^{2+1}\ M_{21} = (-1)\,(a_{12}\, a_{33} - a_{13}\, a_{32}) = -\,a_{12}\, a_{33} + a_{13}\, a_{32}$

കുറിപ്പ് : ഡിറ്റർമിനന്റ് Δ, (ഉദാ: 21) R_1 ഉപയോഗിച്ച് വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$, ഇവിടെ A_{ij} എന്നത് a_{ij} യുടെ കോഫാക്ടർ ആണ്.

$= R_1$ ലെ അംഗങ്ങളുടേയും അവയുടെ കോഫാക്ടറുകളുടേയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ തുക.

ഇതുപോലെ R_2, R_3, C_1, C_2, C_3 എന്നിവ ഉപയോഗിച്ചും മറ്റ് 5 തരത്തിൽ Δ കണ്ടുപിടിക്കാം.

അതുകൊണ്ട്, Δ = ഏതൊരു വരിയിലെ (നിരയിലെ) അംഗങ്ങളുടെയും അവയുടെ കോഫാക്ടറുകളുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ തുകയായിരിക്കും.

കുറിപ്പ് : ഒരു വരിയിലെ (അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലെ) അംഗങ്ങളും മറ്റൊരു വരിയിലെയോ (അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലെയോ) അംഗങ്ങളുടെ കോഫാക്ടറുകളും തമ്മിലുള്ള ഗുനഫലത്തിന്റെ തുക പൂജ്യം ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണത്തിന്

$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23}$

$$= a_{11}\ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\ (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\ (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$ (R_1, R_2 ഒരേപോലെയാണ്)

ഈ പ്രത്യേകത മറ്റു വരികളിലും നിരകളിലും കാണാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം : 22

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ ലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളുടെയും മൈനറും കോഫാക്ടറും കണ്ടുപിടിക്കുക.

കൂടാതെ $a_{11}\,A_{31} + a_{12}\,A_{32} + a_{13}\,A_{33} = 0$ എന്നത് ശരിയാണോയെന്നു പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20; \qquad A_{11} = (-1)^{1\,1}(-20) = -20$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -42 - 4 = -46; \qquad A_{12} = (-1)^{1-2}(-46) = 46$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 0 = 30; \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}(30) = 30$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 25 = -4; \qquad A_{21} = (-1)^{2-1}(-4) = 4$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 5 = -19; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}(-19) = -19$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13; \qquad A_{23} = (-1)^{2-3}(13) = -13$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 0 = -12; \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}(-12) = -12$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 30 = -22; \qquad A_{32} = (-1)^{3-2}(-22) = 22$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 18 = 18; \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}(18) = 18$$

കൂടാതെ $a_{11} = 2,\ a_{12} = -3,\ a_{13} = 5;\ A_{31} = -12,\ A_{32} = 22,\ A_{33} = 18$

അതുകൊണ്ട് $a_{11}\,A_{31} + a_{12}\,A_{32} + a_{13}\,A_{33}$

$$= 2(-12) + (-3)(22) + 5(18) = -24 - 66 + 90 = 0$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 4.4

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ മൈനറുകളും കോഫാക്ടറുകളും എഴുതുക.

1. (i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ കോഫാക്ടറുകൾ ഉപയോഗിച്ച് $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ യുടെ വില കണക്കാക്കുക.

4. മൂന്നാമത്തെ നിരയിലെ കോഫാക്ടറുകൾ ഉപയോഗിച്ച് $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ യുടെ വില കണക്കാക്കുക.

5. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ യും A_{ij} എന്നത് a_{ij} യുടെ കോഫാക്ടറും ആണെങ്കിൽ Δ യുടെ വില ....

(A) $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$ (B) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$

(C) $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$ (D) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

4.6 ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ സഹചാരിയും പ്രതിലോമവും (Adjoint and Inverse of a Matrix)

മാട്രിക്സുകൾ എന്ന അധ്യായത്തിൽ മാട്രിക്സിന്റെ പ്രതിലോമത്തെക്കുറിച്ച് പഠിച്ചതാണ്. ഈ ഭാഗത്ത് മാട്രിക്സിന് പ്രതിലോമം ഉണ്ടാവുന്നതിനുള്ള വ്യവസ്ഥകളെപ്പറ്റിയാണ് പറയുന്നത്. A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ പ്രതിലോമം A^{-1} കാണുന്നതിന് ആദ്യം A യുടെ സഹചാരി (adjoint) എന്താണെന്നു നിർവചിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

4.6.1 മാട്രിക്സിന്റെ സഹചാരി (Adjoint of a matrix)

നിർവചനം 3 : സമചതുര മാട്രിക്സ് $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ പരിഗണിക്കുക. a_{ij} യുടെ കോഫാക്ടർ A_{ij} ആയാൽ, മാട്രിക്സ് $[A_{ij}]_{n \times n}$ യുടെ ട്രാൻസ്പോസ് മാട്രിക്സിനെ A യുടെ സഹചാരി മാട്രിക്സ് (adjoint of A) എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ *adj* A എന്നു എഴുതാം.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ആയാൽ}$$

$$adj\,A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \text{ന്റെ ട്രാൻസ്പോസ്} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

ഉദാഹരണം: 23

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ആയാൽ *adj* A കണ്ടുപിടിക്കുക.

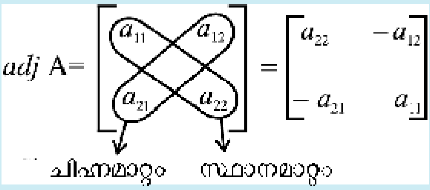
പരിഹാരം

മാട്രിക്സ് A യിലെ അംഗങ്ങളുടെ കോഫാക്ടറുകൾ:

$A_{11} = 4, A_{12} = -1, A_{21} = -3, A_{22} = 2$

$$adj\,A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

☛ കുറിപ്പ് : ക്രമം 2 ആയ സമചതുര മാട്രിക്സാണ് $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ A യുടെ മാട്രിക്സിന്റെ സഹചാരി മാട്രിക്സ് (*adj* A) കാണുന്നതിനായി a_{11}, a_{22} എന്നിവ പരസ്പരം സ്ഥാനം മാറ്റുകയും, a_{12} ന്റെയും a_{21} ന്റെയും ചിഹ്നങ്ങൾ മാറ്റുകയും ചെയ്താൽ മതി.



സിദ്ധാന്തം 1 : ക്രമം n ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് ആണ് A എങ്കിൽ, $A(adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|I$; ഇവിടെ I ഒരു അനന്യ മാട്രിക്സ് ആണ്.

പരിശോധന:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ \text{ആയാൽ}\ adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}\ \text{ആയിരിക്കും.}$$

ഒരു നിരയിലെയോ വരിയിലെയോ അംഗങ്ങളും യഥാക്രമം അവയുടെ കോഫാക്ടറുകളും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചതിന്റെ തുക $|A|$ ക്ക് തുല്യമായിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ തുക പൂജ്യമായിരിക്കും.

$$A\ (adj\ A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\ I$$

ഇതുപോലെ $(adj\ A)\ A = |A|\ I$ എന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

$$A\ (adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|\ I$$

നിർവചനം 4 : $|A| = 0$ ആയ സമചതുര മാട്രിക്സ് A യെ സിംഗുലർ മാട്രിക്സ് (singular matrix) എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ഉദാ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 8 - 8 = 0$

അതുകൊണ്ട് A സിംഗുലർ മാട്രിക്സ് ആണ്.

നിർവചനം 5: ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് A, സിംഗുലർ അല്ലാത്ത മാട്രിക്സ് (non-singular matrix) ആകണമെങ്കിൽ $|A| \neq 0$ ആയിരിക്കണം

ഉദാ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0.$

അതുകൊണ്ട് A ഒരു സിംഗുലർ അല്ലാത്ത മാട്രിക്സ് ആണ്.

സിദ്ധാന്തം 2: A യും B യും ക്രമം തുല്യമായ സിംഗുലർ അല്ലാത്ത മാട്രിക്സുകളായാൽ AB യും BA യും അതേ ക്രമത്തിലുള്ള സിംഗുലർ അല്ലാത്ത മാട്രിക്സുകൾ ആയിരിക്കും.

സിദ്ധാന്തം 3 : A യും B യും ക്രമം തുല്യമായ രണ്ട് സമചതുര മാട്രിക്സുകൾ ആയാൽ മാട്രിക്സ് A യുടെയും B യുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ്, ഡിറ്റർമിനന്റ് A യുടെയും ഡിറ്റർമിനന്റ് B യുടെയും ഗുണനഫലത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും. അതായത്, $|AB| = |A|\ |B|$.

A, B എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് സമചതുര മാട്രിക്സുകൾ നിർമിച്ച് $|A|$, $|B|$, $|A + B|$, $|AB|$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇവ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

കുറിപ്പ് :

$$(adj\ A)\ A = |A|\ I = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$ എന്നു നമുക്കറിയാം.

ഇരുവശങ്ങളിലെയും മാട്രിക്സുകളുടെ ഡിറ്റർമിനന്റുകൾ കണ്ടാൽ

$$|(adj\ A)A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix}$$

$$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3\ (1)$$

$$|(adj\ A)| = |A|^2$$

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ ക്രമം n ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് ആണ് A എങ്കിൽ $|adj(A)| = |A|^{n-1}$ ആയിരിക്കും.

സിദ്ധാന്തം 4: A എന്ന സമചതുര മാട്രിക്സ് പ്രതിലോമ്യമാണെങ്കിൽ (invertible) എങ്കിൽ മാത്രം A സിംഗുലർ അല്ലാത്ത മാട്രിക്സ് ആയിരിക്കും.

തെളിവ്: A എന്നത് ക്രമം n ആയ ഒരു പ്രതിലോമ്യ മാട്രിക്സ് ആണെന്നും I, ക്രമം n ആയ അനന്യ മാട്രിക്സ് ആണെന്നും കരുതുക. AB = BA = I എന്ന നിബന്ധന പാലിക്കുന്ന ക്രമം n ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് B ഉണ്ടായിരിക്കും.

അപ്പോൾ $AB = I \Rightarrow |AB| = |I| = 1$ അതായത് $|A|\ |B| = 1$ ആയിരിക്കും. അതായത് $|A| \neq 0$. A സിംഗുലർ അല്ലാത്ത മാട്രിക്സ് ആണ്.

ഇനി A ഒരു സിംഗുലർ അല്ലാത്ത മാട്രിക്സ് ആയാൽ, $|A| \neq 0$

$$A\ (adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|\ I \qquad \text{(സിദ്ധാന്തം 1 പ്രകാരം)}$$

$|A|$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ

$$A\left(\frac{1}{|A|} adj\ A\right) = \left(\frac{1}{|A|} adj\ A\right) A = I$$

$AB = BA = I$, ഇവിടെ $B = \frac{1}{|A|} adj\ A$ ആണ്

അതായത് A പ്രതിലോമ്യമാണ്; $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A$

ഉദാഹരണം : 24

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ആണെങ്കിൽ $A\, adj\, A = |A|\, I$ ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഇതുപ യോഗിച്ച് A^{-1} കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ആയാൽ

$$|A| = 1(16-9) - 3(4-3) + 3(3-4) = 1 \neq 0$$

കോഫാക്ടറുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നു.

$A_{11} = 7,\ A_{12} = -1,\ A_{13} = -1,\ A_{21} = -3,\ \ A_{22} = 1, A_{23} = 0,\ A_{31} = -3,\ A_{32} = 0,$
$A_{33} = 1$

അതുകൊണ്ട് $adj\ A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A\,(adj\ A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-3-3 & -3+3+0 & -3+0+3 \\ 7-4-3 & -3+4+0 & -3+0+3 \\ 7-3-4 & -3+3+0 & -3+0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\,.\,I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ഉദാഹരണം : 25

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -14 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = -11 \neq 0,$$

അതുകൊണ്ട് മാട്രിക്സ് AB യുടെ പ്രതിലോമ മാട്രിക്സ് $(AB)^{-1}$ കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്.

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} adj(AB) = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

അടുത്തത്, $|A| = -11 \neq 0$, $|B| = 1 \neq 0$. ആയതിനാൽ A^{-1}, B^{-1} ഇവ സാധ്യമാണ്.

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

അതുകൊണ്ട്, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ഉദാഹരണം : 26

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $A^2 - 4A + I = O$, എന്നു തെളിയിക്കുക, ഇവിടെ I ഒരു 2 × 2 അനന്യ മാട്രിക്സും **O** ഒരു 2 × 2 പൂജ്യം മാട്രിക്സും ആണ്. ഇതുപയോഗിച്ച് A^{-1} കാണുക.

പരിഹാരം

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

അതായത്, $A^2 - 4A + I = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$

$$A^2 - 4A + I = \mathbf{O}$$

$$A A - 4A = -I$$

വലത് വശങ്ങളിൽ A^{-1} കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ $A\ A(A^{-1}) - 4\ A\ A^{-1} = -I\ A^{-1}$

$$A\ (A\ A^{-1}) - 4I = -A^{-1}$$

$$AI - 4I = -A^{-1}$$

$$A^{-1} = 4I - A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 4.5

ചോദ്യം 1, 2: ഇവയുടെ സഹചാരി മാട്രിക്സ് (adjoint) കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3, 4 ചോദ്യങ്ങളിൽ $A\ (adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|\ I$ ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

3. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5 മുതൽ 11 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിലെ മാട്രിക്സുകൾക്ക് പ്രതിലോമ മാട്രിക്സ് ഉണ്ടെങ്കിൽ അവ കണ്ടെത്തുക.

5. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ ആയാൽ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

13. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ആണെങ്കിൽ $A^2 - 5A + 7I = O$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ച് A^{-1} കാണുക.

14. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സ് പാലിക്കുന്ന സമവാക്യം ആണ് $A^2 + aA + bI = O$ എങ്കിൽ a യും b യും കണ്ടുപിടിക്കുക.

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സ് $A^3 - 6A^2 + 5A + 11\,I = O$ എന്ന സമവാക്യം പാലിക്കുന്നു എന്നു തെളിയിക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ച് A^{-1} കാണുക.

16. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ആണെങ്കിൽ $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = O$ ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഈ സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് A^{-1} കാണുക.

17. ക്രമം 3 ആയ സിംഗുലർ അല്ലാത്ത മാട്രിക്സ് ആണ് A എങ്കിൽ $|adj\ A|$ = ...

(A) $|A|$ (B) $|A|^2$ (C) $|A|^3$ (D) $3|A|$

18. ക്രമം 2 ആയ സിംഗുലർ അല്ലാത്ത മാട്രിക്സ് ആണ് A എങ്കിൽ, $\det(A^{-1})$ = ...

(A) det (A) (B) $\dfrac{1}{\det(A)}$ (C) 1 (D) 0

4.7 മാട്രിക്സുകളും ഡിറ്റർമിനന്റുകളും പ്രയോഗത്തിൽ (Applications of Determinants and Matrices)

രണ്ടോ മൂന്നോ ചരങ്ങൾ ഉള്ള ഒരു കൂട്ടം രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളെ മാട്രിക്സിന്റെയും ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെയും പ്രത്യേകതകൾ ഉപയോഗിച്ച് പരിഹരിക്കുന്നത് സംബന്ധിച്ചും സംഗത (consistent) സമവാക്യങ്ങൾ, അസംഗത (inconsistent) സമവാക്യങ്ങൾ എന്നിങ്ങനെ വേർതിരിച്ചറിയാനുമാണ് ഇവിടെ ശ്രമിക്കുന്നത്.

സംഗതസമവാക്യങ്ങൾ (Consistent system) ഒരു സമവാക്യകൂട്ടത്തിന് ഒന്നോ അതിലധികമോ പരിഹാരങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ സംഗതസമവാക്യങ്ങളുടെ കൂട്ടം (consistent system) എന്നുപറയുന്നു.

അസംഗതസമവാക്യങ്ങൾ (Inconsistent system) ഒരു സമവാക്യ കൂട്ടത്തിന് പരിഹാരങ്ങൾ ഇല്ലെങ്കിൽ അതിനെ സംഗതമല്ലാത്ത സമവാക്യങ്ങൾ അഥവാ അസംഗതസമവാക്യങ്ങളുടെ കൂട്ടം (inconsistent system) എന്നുപറയുന്നു.

കുറിപ്പ് ഈ അധ്യായത്തിൽ ഒരു പരിഹാരം മാത്രമുള്ള രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളെ കുറിച്ച് മാത്രം പറയുന്നു.

4.7.1 മാട്രിക്സിന്റെ പ്രതിലോമം ഉപയോഗിച്ചുകൊണ്ട് രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം

രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തെ മാട്രിക്സ് സമവാക്യമാക്കിമാറ്റി, അതിലെ ഗുണക മാട്രിക്സിന്റെ (coefficient matrix) പ്രതിലോമം ഉപയോഗിച്ച് സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കാണുന്ന രീതി.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളുടെ കൂട്ടം (system of equations) പരിഗണിച്ചാൽ

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

സമവാക്യകൂട്ടത്തെ AX = B രൂപത്തിൽ എഴുതിയാൽ $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

അവസ്ഥ 1: സിംഗുലർ അല്ലാത്ത മാട്രിക്സ് ആണ് A എങ്കിൽ A യ്ക്ക് പ്രതിലോമം ഉണ്ടായിരിക്കും. അങ്ങനെയായാൽ

AX = B എന്ന സമവാക്യത്തിൽ

ഇരുവശങ്ങളുടേയും ഇടതുഭാഗത്ത് A^{-1} കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക.

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \qquad \text{(സംയോജന നിയമം)}$$

$$\Rightarrow I\,X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

മാട്രിക്സുകളുടെ പ്രതിലോമം ഏകമാത്രമായതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യകൂട്ടത്തിന് ഏകമാത്രാ പരിഹാരമേ (unique solution) ഉള്ളൂ.

അവസ്ഥ 2: A ഒരു സിംഗുലർ മാട്രിക്സ് ആണെങ്കിൽ $|A| = 0$ ആയിരിക്കും.

ഇവിടെ $(adj\ A)\ B$ കാണണം.

അതിൽ $(adj\ A)\ B \neq O$ (O ഒരു പൂജ്യം മാട്രിക്സ്) ആണെങ്കിൽ, അതിന് പരിഹാരം ഉണ്ടാകില്ല. ഇത്തരം സമവാക്യകൂട്ടത്തെ അസംഗതം എന്നു പറയുന്നു.

ഇനി $(adj\ A)\ B = O$ (O ഒരു പൂജ്യം മാട്രിക്സാണ്) ആണെങ്കിൽ ഈ സമവാക്യ കൂട്ടത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളുടെ എണ്ണം അനന്തമോ അല്ലെങ്കിൽ പരിഹാരമില്ലാത്തതോ എന്ന തിനനുസരിച്ച് യഥാക്രമം സംഗതം, അസംഗതം എന്നിങ്ങനെ തരംതിരിക്കാം.

ഉദാഹരണം: 27

സമവാക്യകൂട്ടത്തിന്റെ പരിഹാരം കാണുക:

$$2x + 5y = 1$$
$$3x + 2y = 7$$

പരിഹാരം

ഈ സമവാക്യകൂട്ടത്തെ AX = B എന്ന മാട്രിക്സ് സമവാക്യരൂപത്തിൽ എഴുതിയാൽ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ഇവിടെ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 15 = -11 \neq 0$

അതുകൊണ്ട് A ഒരു സിംഗുലാർ അല്ലാത്ത മാട്രിക്സ് ആണ്. ആയതിനാൽ ഏകമാത്രപ രിഹാരം ഉണ്ടായിരിക്കും.

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x = 3,\ y = -1$$

ഉദാഹരണം: 28

ചുവടെ തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യകൂട്ടത്തെ മാട്രിക്സ് രീതി ഉപയോഗിച്ച് പരിഹാരം കാണുക.

$$3x - 2y + 3z = 8$$
$$2x + y - z = 1$$
$$4x - 3y + 2z = 4$$

പരിഹാരം

ഈ സമവാക്യ കൂട്ടത്തെ AX = B എന്ന മാട്രിക്സ് സമവാക്യരൂപത്തിൽ എഴുതിയാൽ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3(2-3) + 2(4+4) + 3(-6-4) = -17 \neq 0$$

അതുകൊണ്ട് A ക്ക് പ്രതിലോമ്യം ഉണ്ട്.

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = -8, \quad A_{13} = -10$$
$$A_{21} = -5, \quad A_{22} = -6, \quad A_{23} = 1$$
$$A_{31} = -1, \quad A_{32} = 9, \quad A_{33} = 7$$

A യുടെ പ്രതിലോമ്യം $A^{-1} = -\dfrac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x = 1, y = 2, z = 3$$

ഉദാഹരണം : 29

മൂന്നു സംഖ്യകളുടെ തുക 6 ആണ്. അതിൽ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യയെ മൂന്നുകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയോട് കൂട്ടിയാൽ 11 കിട്ടും. ഒന്നാമത്തേയും മൂന്നാമത്തേയും സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയുടെ ഇരട്ടിയും ലഭിക്കും. ഈ സന്ദർഭത്തെ ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തി, മാട്രിക്സ് രീതിയിൽ ഈ സംഖ്യകൾ കാണുക.

പരിഹാരം

സംഖ്യകൾ x, y, z എന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ $x + y - z = 6$

$y + 3z = 11$

$x + z = 2y$ അല്ലെങ്കിൽ $x - 2y + z = 0$

ഈ രേഖീയസമവാക്യ കൂട്ടത്തെ A X = B എന്നെഴുതിയാൽ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1(1+6) - (0-3) + (0-1) = 9 \neq 0.$$

adj A കാണുന്നതിന്

$$A_{11} = 1\,(1+6) = 7, \quad A_{12} = -(0-3) = 3, \quad A_{13} = -1$$

$$A_{21} = -(1+2) = -3, \quad A_{22} = 0, \quad A_{23} = -(-2-1) = 3$$

$$A_{31} = (3-1) = 2, \quad A_{32} = -(3-0) = -3, \quad A_{33} = (1-0) = 1$$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ (A) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 42-33+0 \\ 18+0+0 \\ -6+33+0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x = 1, y = 2, z = 3$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 4.6

1 മുതൽ 6 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിലെ രേഖീയസമവാക്യ കൂട്ടത്തിൽ നിന്ന് സംഗതമായവ (consistent) കണ്ടെത്തുക.

1. $x + 2y = 2$
$2x + 3y = 3$

2. $2x - y = 5$
$x + y = 4$

3. $x + 3y = 5$
$2x + 6y = 8$

4. $x + y + z = 1$
$2x + 3y + 2z = 2$
$ax + ay + 2az = 4$

5. $3x - y - 2z = 2$
$2y - z = -1$
$3x - 5y = 3$

6. $5x - y + 4z = 5$
$2x + 3y + 5z = 2$
$5x - 2y + 6z = -1$

7 മുതൽ 14 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിലെ രേഖീയസമവാക്യ കൂട്ടത്തിന്റെ പരിഹാരം മാട്രിക്സ് രീതിയിൽ കണക്കാക്കുക.

7. $5x + 2y = 4$
$7x + 3y = 5$

8. $2x - y = -2$
$3x + 4y = 3$

9. $4x - 3y = 3$
$3x - 5y = 7$

10. $5x + 2y = 3$
$3x + 2y = 5$

11. $2x + y + z = 1$
$x - 2y - z = \frac{3}{2}$
$3y - 5z = 9$

12. $x - y + z = 4$
$2x + y - 3z = 0$
$x + y + z = 2$

13. $2x + 3y + 3z = 5$
$x - 2y + z = -4$
$3x - y - 2z = 3$

14. $x - y + 2z = 7$
$3x + 4y - 5z = -5$
$2x - y + 3z = 12$

15. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ആയാൽ A^{-1} കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ച് ചുവടെ തന്നിട്ടുള്ള രേഖീയസമവാക്യകൂട്ടത്തിന്റെ പരിഹാരം കണക്കാക്കുക.

$$2x - 3y + 5z = 11$$
$$3x + 2y - 4z = -5$$
$$x + y - 2z = -3$$

16. 4 കി.ഗ്രാം ഉള്ളിക്കും 3 കി.ഗ്രാം ഗോതമ്പിനും 2 കി.ഗ്രാം അരിക്കും കൂടി 60 രൂപയാണ് വില; 2 കി.ഗ്രാം ഉള്ളിക്കും 4 കി.ഗ്രാം ഗോതമ്പിനും 6 കി.ഗ്രാം അരിക്കും കൂടി 90 രൂപയാണ്. 6 കി.ഗ്രാം ഉള്ളിക്കും 2 കി.ഗ്രാം ഗോതമ്പിനും 3 കി.ഗ്രാം അരിക്കും കൂടി 70 രൂപയും ആണ്. മാട്രിക്സ് രീതി ഉപയോഗിച്ച് ഓരോ ഇനത്തിന്റെയും ഒരു കിലോയുടെ വില കണ്ടെത്തുക.

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം: 30

a, b, c എന്നിവ അധിസംഖ്യകളും വ്യത്യസ്തവും ആയാൽ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$ എന്ന ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വില ന്യൂനസംഖ്യ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിട്ടുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റിൽ $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ എന്ന ക്രിയ ഉപയോഗിച്ചാൽ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$ എന്നീ ക്രിയകൾ ഉപയോഗിച്ചാൽ,

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

$$= (a - b - c)\,[(c - b)(b - c) - (a - c)(a - b)]$$ (C_1 ആസ്പദമാക്കി വിപുലീകരിക്കുന്നു.)

$$= (a + b + c)(-a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a + b - c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$

$$= \frac{-1}{2}(a \quad b + c)\,[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

ഇവിടെ $a+b+c>0$ യും $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$ യും ആയതിനാൽ ഡിറ്റർമിനന്റ് ന്യൂനസംഖ്യ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 31

a, b, c എന്നിവ സമാന്തരശ്രേണി (A.P) യിലാണെങ്കിൽ

$$\begin{vmatrix} 2y+4 & 5y+7 & 8y+a \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix}$$ യുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിട്ടുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റിൽ $R_1 \to R_1 + R_3 - 2R_2$ എന്ന ക്രിയ ചെയ്താൽ

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix} = 0 \quad (2b = a + c \text{ എന്നതു കാരണം})$$

ഉദാഹരണം : 32

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz\,(x+y+z)^3$$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിട്ടുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റിനെ $\frac{1}{xyz}$ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയും Δ യിൽ $R_1 \to xR_1$, $R_2 \to yR_2$, $R_3 \to zR_3$ എന്നീ ക്രിയകൾ ഉപയോഗിക്കുകയും ചെയ്താൽ,

$$\Delta = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x(y+z)^2 & x^2y & x^2z \\ xy^2 & y(x+z)^2 & y^2z \\ xz^2 & yz^2 & z(x+y)^2 \end{vmatrix}$$

C_1, C_2, C_3 എന്നീ നിരകളിൽ നിന്ന് യഥാക്രമം പൊതുഘടകങ്ങളായ x, y, z എന്നിവ പുറത്തെടുക്കുക.

$$\Delta = \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (x+z)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - C_1$, $C_3 \to C_3 - C_1$ എന്നീ ക്രിയകൾ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 \\ y^2 & (x+z)^2-y^2 & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)^2-z^2 \end{vmatrix}$$

C_2, C_3 എന്നിവയിൽ നിന്ന് പൊതുഘടകമായ $x + y + z$ പുറത്തെടുക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x\ (y+z) & x\ (y+z) \\ y^2 & (x+z)-y & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)\ \ z \end{vmatrix}$$

$R_1 \rightarrow R_1 - (R_2 + R_3)$ എന്ന ക്രിയ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ

$$\Delta = (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} 2yz & -2z & -2y \\ y^2 & x-y+z & 0 \\ z^2 & 0 & x+y-z \end{vmatrix}$$

$C_2 \rightarrow (C_2 + \frac{1}{y}\ C_1)$, $C_3 \rightarrow \left(C_3 + \frac{1}{z} C_1\right)$ എന്നീ ക്രിയകൾ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} 2yz & 0 & 0 \\ y^2 & x+z & \frac{y^2}{z} \\ z^2 & \frac{z^2}{y} & x+y \end{vmatrix}$$

R_1 നെ ആസ്പദമാക്കി വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = (x+y+z)^2\ (2yz)\ [(x+z)\ (x+y) - yz] = (x+y+z)^2\ (2yz)\ (x^2 + xy + xz)$$

$$= (x+y+z)^3\ (2xyz)$$

ഉദാഹരണം : 33

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ എന്ന ഗുണനഫലമുപയോഗിച്ച് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യകൂട്ടത്തിന്റെ പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക.

$$x - y + 2z = 1$$
$$2y - 3z = 1$$
$$3x - 2y + 4z = 2$$

പരിഹാരം

ഗുണനഫലം പരിഗണിക്കുമ്പോൾ, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2-\ 9+12 & 0-2+2 & 1+3-4 \\ 0+18-18 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -6-18+24 & 0-4+4 & 3+6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

അതുകൊണ്ട്, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യ കൂട്ടത്തെ മാട്രിക്സ് രൂപത്തിലെഴുതുമ്പോൾ

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2+0+2 \\ 9+2-6 \\ 6+1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = 0, y = 5, z = 3$$

ഉദാഹരണം : 34

$$A = \begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

Δ യിൽ $R_1 \to R_1 - x R_2$ എന്ന ക്രിയ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(1-x^2) & c(1-x^2) & p(1-x^2) \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - x R_1$, എന്ന ക്രിയ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ,

$$\Delta = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. $\begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$ എന്ന ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വിലയിൽ 0 ഉൾപ്പെടുന്നില്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.

2. ഡിറ്റർമിനന്റ് വിപുലീകരിക്കാതെ $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

3. വില കണക്കാക്കുക. $\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

4. a, b, c എന്നിവ രേഖീയസംഖ്യകളും

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0$$ യും ആയാൽ

$a + b + c = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $a = b = c$ എന്നും തെളിയിക്കുക.

5. $\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0$, $a \neq 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക.

6. $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

7. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, ആയാൽ $(AB)^{-1}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ആയാൽ

(i) $[adj\ A]^{-1} = adj\ (A^{-1})$ (ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

എന്നിവ ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

9. വില കണ്ടുപിടിക്കുക : $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

10. വില കണ്ടുപിടിക്കുക : $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$

ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ ഉപയോഗിച്ച് 11 മുതൽ 15 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾ തെളിയിക്കുക.

11. $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma)$

12. $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix} = (1+pxyz)(x-y)(y-z)(z-x)$, ഇവിടെ p ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയാണ്

13. $\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 4+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 10+6p+3q \end{vmatrix} = 1$

15. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$

16. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$

$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$

$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$ എന്ന സമവാക്യകൂട്ടത്തിന്റെ പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക.

17 മുതൽ 19 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക

17. a, b, c എന്നിവ സമാന്തരശ്രേണി (A.P) യിലാണെങ്കിൽ, ഡിറ്റർമിനന്റ്

$\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$ ന്റെ വില

(A) 0 (B) 1 (C) x (D) $2x$

18. പൂജ്യമല്ലാത്ത രേഖീയസംഖ്യകളാണ് x, y, z എങ്കിൽ

$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ പ്രതിലോമ മാട്രിക്സ് ആണ്

(A) $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$ (B) $xyz\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ ആയാൽ

(A) $\text{Det}(A) = 0$ (B) $\text{Det}(A) \in (2, \infty)$

(C) $\text{Det}(A) \in (2, 4)$ (D) $\text{Det}(A) \in [2, 4]$

സംഗ്രഹം (Summary)

- $A = [a_{11}]_{1\times 1}$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് $|a_{11}| = a_{11}$ എന്നാണ്.

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത്

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$ എന്നാണ്.

- $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് (R_1നെ ആസ്പദമാക്കി വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

ഏതൊരു സമചതുര മാട്രിക്സ് A യ്ക്കും, |A| ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രത്യേകതകൾ പാലിക്കുന്നു.

- $|A'| = |A|$, ഇവിടെ $A' = A$ യുടെ ട്രാൻസ്പോസ്
- ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വരികളോ (അല്ലെങ്കിൽ നിരകളോ) പരസ്പരം മാറ്റുകയാണെങ്കിൽ, ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ ചിഹ്നം മാറുന്നു.
- ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വരികളോ അല്ലെങ്കിൽ നിരകളോ ഒരേ പോലെയാണെങ്കിൽ (എല്ലാ അംഗങ്ങളും തുല്യമായാൽ), ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വില പൂജ്യമായിരിക്കും.
- ഡിറ്റർമിനന്റിലെ ഏതെങ്കിലുമൊരു വരിയിലേയോ നിരയിലേയോ എല്ലാ അംഗങ്ങളേയും k എന്ന സറിരസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വില k മടങ്ങാകും.
- ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിനെ k കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക എന്നതുകൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത് അതിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വരിയിലേയോ അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലേയോ അംഗങ്ങളെ മാത്രം k കൊണ്ട് ഗുണിക്കുക എന്നാണ്.
- $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, എങ്കിൽ $|k.A| = k^3|A|$
- ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വരിയിലേയോ അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലേയോ കുറെ അല്ലെങ്കിൽ മുഴുവൻ അംഗങ്ങളും രണ്ടോ അതിലധികമോ പദങ്ങളുടെ തുകയാണെങ്കിൽ ആ ഡിറ്റർമിനന്റിനെ രണ്ടോ അതിലധികമോ ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ തുകയായി എഴുതാൻ കഴിയും.
- ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വരിയിലെ (നിരയിലെ) എല്ലാ അംഗങ്ങളെയും ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയും മറ്റൊരു വരിയിലെ (നിരയിലെ) അതാതുസ്ഥാനത്തുള്ള അംഗങ്ങളുമായി കൂട്ടുകയും ചെയ്താൽ ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വിലയിൽ വ്യത്യാസം വരുന്നില്ല.
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ പരപ്പളവ്,

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- ഒരു മാട്രിക്സിലെ a_{ij} എന്ന അംഗം ഉൾപ്പെടുന്ന i വരിയും j നിരയും ഒഴിവാക്കി കിട്ടുന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റിനെ a_{ij} യുടെ മൈനർ എന്നുവിളിക്കുന്നു. ഇതിനെ M_{ij} എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.
- a_{ij} യുടെ കോഫാക്ടർ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത്, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ എന്നാണ്.
- മാട്രിക്സ് A യുടെ ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വില ലഭിക്കുന്നതിന് അതിലെ ഏതെങ്കിലും

ഒരു വരിയിലെ (അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലെ) അംഗങ്ങളുടേയും അവയുടെ കോഫാക്ടറുകളുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ തുക കണക്കാക്കിയാൽ മതി.

ഉദാഹരണത്തിന്, $|A| = a_{11}\, A_{11} + a_{12}\, A_{12} + a_{13}\, A_{13}$.

- ഒരു വരിയിലെ (അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലെ) അംഗങ്ങളും മറ്റൊരു വരിയിലെ (അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലെ) അംഗങ്ങളുടെ കോഫാക്ടറുകളും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലത്തിന്റെ തുക പൂജ്യമായിരിക്കും.
  ഉദാഹരണത്തിന്, $a_{11}\, A_{21} + a_{12}\, A_{22} + a_{13}\, A_{23} = 0$

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

  ഇവിടെ a_{ij} യുടെ കോഫാക്ടർ ആണ് A_{ij}

- ക്രമം n ആയ ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് ആണ് A എങ്കിൽ,
  $A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\ I$ ആയിരിക്കും.

- ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് A, സിംഗുലർ മാട്രിക്സ് അല്ലെങ്കിൽ സിംഗുലർ അല്ലാത്ത മാട്രിക്സ് എന്നു പറയണമെങ്കിൽ യഥാക്രമം $|A| = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $|A| \neq 0$ ആയിരിക്കണം.

- B ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സും $AB = BA = I$ യും ആണെങ്കിൽ A യുടെ പ്രതിലോമമായിരിക്കും B.

  കൂടാതെ, $A^{-1} = B$ അല്ലെങ്കിൽ $B^{-1} = A$ ആണ്. അതുകൊണ്ട് $(A^{-1})^{-1} = A$.

- ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് A പ്രതിലോമ്യമാകണമെങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം A സിംഗുലർ അല്ലാത്ത മാട്രിക്സ് ആയിരിക്കണം.

- $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(adj\ A)$

- $$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
  $$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
  $$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3,$$

  എന്നീ സമവാക്യങ്ങളെ A X = B എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം.

  ഇവിടെ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$ ആണ്.

- $AX = B$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ ഏകമാത്രാ പരിഹാരം

  $X = A^{-1}B$ ആണ്. ഇവിടെ $|A| \neq 0$ ആയിരിക്കണം.
- ഒരു സമവാക്യ കൂട്ടത്തിന് പരിഹാരം ഉണ്ടോ ഇല്ലയോ എന്നതിനനുസരിച്ച് അതൊരു സംഗത (consistent) സമവാക്യകൂട്ടമോ അസംഗത (inconsistent) സമവാക്യകൂട്ടമോ ആകുന്നു.
- $AX = B$ എന്ന മാട്രിക്സ് സമവാക്യത്തിൽ A ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് ആയാൽ
  (i) $|A| \neq 0$, ആകുമ്പോൾ മാട്രിക്സ് സമവാക്യം $AX = B$ ക്ക് ഏകമാത്രാ പരിഹാരം ഉണ്ടാകും.
  (ii) $|A| = 0$ യും $(adj\ A)\ B \neq 0$, ആകുമ്പോൾ മാട്രിക്സ് സമവാക്യം $AX = B$ ക്ക് പരിഹാരം ഇല്ല.
  (iii) $|A| = 0$ യും $(adj\ A)\ B = 0$ യും ആകുമ്പോൾ ഇതൊരു സംഗത സമവാക്യ കൂട്ടം ആകുകയോ ആകാതിരിക്കുകയോ ചെയ്യാം.

ചരിത്രക്കുറിപ്പ് (Historical Note)

ഒരു കണക്കുകൂട്ടൽ ബോർഡിൽ (calculating board) വടികൾ (rods) ഉപയോഗിച്ച് പല രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടേയും ചരങ്ങളുടെ (unknown) ഗുണകങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ചൈനീസ് രീതി സ്വാഭാവികമായും ഉന്മൂലനം (elimination) എന്ന ലളിതമായ രീതി കണ്ടുപിടിക്കാൻ കാരണമായി. കണക്കുകൂട്ടൽ ബോർഡിലെ വടികളുടെ ക്രമീകരണം കൃത്യമായും ഡിറ്റർമിനന്റിൽ സംഖ്യകളെ (അംഗങ്ങളെ) നിശ്ചയിച്ചിരിക്കുന്നപോലെയാണ്. അതുകൊണ്ട് വളരെക്കാലം മുൻപ് തന്നെ ഡിറ്റർമിനന്റ് (determinant) കളുടെ ലഘൂകരണത്തിലെ നിരകളുടെയും വരികളുടെയും വ്യവകലനം എന്ന ആശയം ചൈനയിൽ വികസിപ്പിച്ചിരുന്നു എന്ന് നമുക്ക് പറയാം. (*Mikami, China, pp* 30, 93).

17-ാം നൂറ്റാണ്ടിലെ മഹാനായ ജപ്പാൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ Seki Kowa, 1683 ൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ച അദ്ദേഹത്തിന്റെ '*Kai Fukudai no Ho*' എന്ന പുസ്തകത്തിൽ ഡിറ്റർമിനന്റുകളും അവയുടെ വിപുലീകരണവും എന്ന ആശയം അവതരിപ്പിച്ചിരുന്നു. എന്നാൽ ഇദ്ദേഹം ഈ മാർഗം കേവലം രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളിലെ ഒരു വസ്തുവിനെ ഒഴിവാക്കാൻ ചെയ്യാൻ മാത്രമേ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുള്ളൂ. അല്ലാതെ ഏകകാല സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കാണാൻ ഉപയോഗിച്ചിട്ടില്ല. T. Hayashi, "*The Fakudoi and Determinants in Japanese Mathematics*," in the proc. of the Tokyo Math. Soc., V.

Vandermonde ആണ് ആദ്യമായി ഡിറ്റർമിനന്റ് എന്നത് ഒരു സ്വതന്ത്ര ഏകദം (independent function) ആണെന്ന് തിരിച്ചറിഞ്ഞത്. അതുകൊണ്ട് അദ്ദേഹത്തെ അംഗീകൃത ഉപജ്ഞാതാവ് ആയി കാണുന്നു. 1772 ൽ Laplace ആണ്. ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ മൈനർ ഉപയോഗിച്ചുകൊണ്ടുള്ള വിപുലീകരണം എന്ന പൊതു രീതി സംഭാവന ചെയ്തത്.

1773 ൽ Lagrange സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കാണുന്നതിനുവേണ്ടിയല്ലാതെയും ക്രമം 2, ക്രമം 3 ആയിട്ടുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റുകൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. 1801 ൽ ഗൗസ് (Gauss) അദ്ദേഹത്തിന്റെ സംഖ്യാസിദ്ധാന്തത്തിൽ (Theory of numbers) ഡിറ്റർമിനന്റ് ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്.

മഹത്തായ സംഭാവന നൽകിയ മറ്റൊരു വ്യക്തിയാണ് Jacques - Philippe - Marie Binet, (1812), അദ്ദേഹമാണ് m-വരിയും n-വരിയും നിരയുമുള്ള രണ്ട് മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട സിദ്ധാന്തം വിവരിച്ചിട്ടുള്ളത്, ഇവിടെ $m = n$ എന്ന സവിശേഷ സ്വഭാവം ഗുണന സിദ്ധാന്തത്തിലേക്ക് എത്തിക്കുന്നു.

1812 ൽ Cauchy ഇതേ വിഷയത്തിലുള്ള സിദ്ധാന്തം അവതരിപ്പിച്ചു. അദ്ദേഹമാണ് ഇന്ന് പ്രയോഗിക്കുന്ന അർത്ഥത്തിൽ ഡിറ്റർമിനന്റ് എന്ന പദം ഉപയോഗിച്ചത്.

കൂടാതെ ഗുണനസിദ്ധാന്തത്തിന് (multiplication theorem) Binet അവതരിപ്പിച്ചതിനേക്കാൾ തൃപ്തികരമായ രീതിയിൽ തെളിവ് നൽകുകയും ചെയ്തു.

Carl Gustav Jacob Jacobi മാട്രിക്സ് പഠനത്തിന് മഹത്തായ സംഭാവന നൽകിയ വ്യക്തിയാണ്. ഡിറ്റർമിനന്റ് എന്ന പദം പരിപൂർണ്ണമായി അംഗീകരിക്കപ്പെട്ടതും അതിന് ശേഷമാണ്.

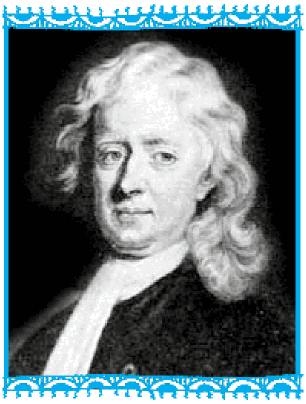
അധ്യായം 5

ഏകദങ്ങളുടെ തുടർച്ചയും അവകലനീയതയും (CONTINUITY AND DIFFERENTIABILITY)

❖ *ശാസ്ത്രമൊന്നാകെ ദൈനംദിന ചിന്തയുടെ ശുദ്ധീകരണമല്ലാതെ മറ്റൊന്നല്ല – ആൽബർട്ട് ഐൻസ്റ്റൈൻ* ❖

5.1 ആമുഖം

സഞ്ചരിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ വേഗം സമയത്തിനനുസരിച്ച് വ്യത്യാസപ്പെടുന്നത്, ഉയരം കൂടുന്നതിനനനുസരിച്ച് മർദം കുറയുന്നത്, തുടങ്ങി പല സന്ദർഭങ്ങളിലും അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള പരസ്പര ബന്ധം നാം കണ്ടിട്ടുള്ളതാണല്ലോ. ഇത്തരം ബന്ധങ്ങളെക്കുറിച്ചും ഈ അളവുകളിൽ ഒന്ന് മാറുമ്പോൾ മറ്റേ അളവിൽ വരുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെക്കുറിച്ചുമൊക്കെ മനസ്സിലാക്കേണ്ടി വന്നപ്പോൾ അതുവരെയുള്ള ബീജഗണിതരീതികൾ പോരാതെ വരികയും ഏകദങ്ങളുടെ അവകലനം (Differentiation), സമാകലനം (Integration) തുടങ്ങിയ ചില പുതിയ ആശയങ്ങൾ ഗണിതത്തിൽ രൂപപ്പെട്ടു വരികയും ചെയ്തു. ഇത്തരം മാർഗങ്ങളെ നാം പൊതുവായി കലനം (Calculus) എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. 11- ാം ക്ലാസിൽ ചർച്ച ചെയ്ത അവകലനത്തെക്കുറിച്ച് കൂടുതലായി ചില കാര്യങ്ങളും പുതിയ ചില അവകലനരീതികളും ഈ അധ്യായത്തിൽ മനസിലാക്കും. മാത്രമല്ല ഏകദങ്ങളിലെ ഒരു പ്രധാനപ്പെട്ട വിഭാഗമായ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങൾ (continuous functions) എന്ന ആശയവും ഇത്തരം ഏകദങ്ങൾക്ക് അവകലനവുമായുള്ള ബന്ധവും ഈ അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യുന്നുണ്ട്.



സർ ഐസക് ന്യൂട്ടൻ (1642-1727)

5.2 തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങൾ (Continuous functions)

പരിചിതങ്ങളായ ചില ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ നമുക്കൊന്ന് നിരീക്ഷിക്കാം.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ 2, & x>0\end{cases}$$

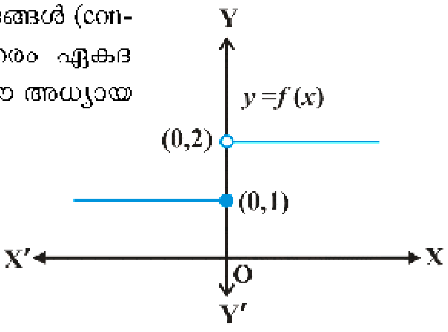


Fig 5.1

ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം (domain) R ആണല്ലോ. ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് തുടർച്ചയുള്ളതാണോ? ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിൽ f ന്റെ തുടർച്ച നഷ്ടപ്പെടുന്നുണ്ടോ? പൂജ്യത്തിൽ ($x = 0$ ആകുമ്പോൾ) f ന്റെ തുടർച്ച നഷ്ടപ്പെടുന്നത് ഗ്രാഫിൽ നിന്ന് വ്യക്തമാണല്ലോ. കഴിഞ്ഞ വർഷം നാം പരിചയപ്പെട്ട ഏകദത്തിന്റെ സീമ (Limit of a function) എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച് ഈ കാര്യം ഒന്ന് പരിശോധിച്ചു നോക്കാം. മുകളിലെ ഗ്രാഫിൽ സൂചിപ്പിച്ച f എന്ന ഏകദത്തിന് $x = 3$ ൽ സീമ എന്താണ്? 2 ആയിരിക്കുമല്ലോ?

$x = -2$ ആകുമ്പോൾ f ന്റെ സീമ 1 ആയിരിക്കും. എന്നാൽ പൂജ്യത്തിൽ f ന് സീമയുണ്ടോ? f ന്റെ ഇടതുസീമ 1, വലതുസീമ 2 എന്നിങ്ങനെയാണ്. അതായത് f എന്ന ഏകദത്തിന് പൂജ്യത്തിൽ സീമയില്ല എന്ന് അർഥം.

f ന് തുടർച്ച നഷ്ടപ്പെടുന്നതും $x = 0$ എന്ന ബിന്ദുവിലാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കണം.

ഇവ രണ്ടും തമ്മിൽ ബന്ധമുണ്ടോ?

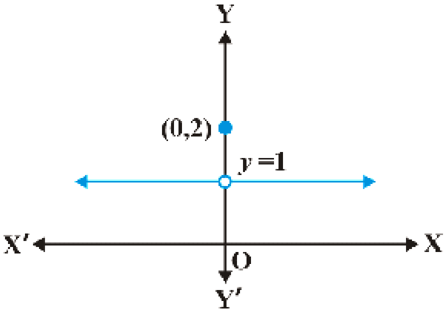
പൂജ്യത്തിൽ f ന് സീമയില്ലാത്തതുകൊണ്ടായിരിക്കുമോ അവിടെ അതിന് തുടർച്ച നഷ്ടമായത്?

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

ഇവിടെയും ഏകദം f ന് പൂജ്യത്തിലെത്തുമ്പോൾ തുടർച്ച നഷ്ടമാകുന്നില്ലേ?

നേരത്തെ നാം ചർച്ച ചെയ്ത ഉദാഹരണത്തിൽനിന്നും വ്യത്യസ്തമായി ഏകദം f പൂജ്യത്തിന് ഇടതുവശം എപ്രകാരമാണോ അതുപോലെ തന്നെ പൂജ്യത്തിന് വലതുവശത്തും തുടരുന്നുണ്ട്. എങ്കിലും പൂജ്യത്തിൽ f ന് തുടർച്ച നഷ്ടപ്പെടുന്നു. ഇവിടെ പൂജ്യത്തിൽ f നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട് എന്നതും നാം ശ്രദ്ധിക്കണം. $f(0) = 2$ ആണല്ലോ.



ചിത്രം 5.2

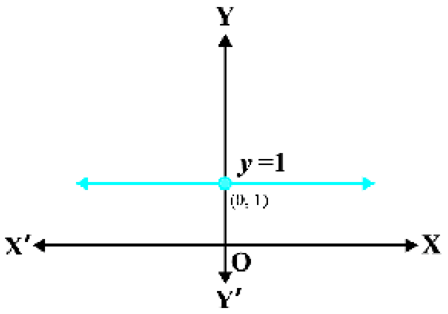
ഇവിടെ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ ആണല്ലോ? അതായത് f ന് പൂജ്യത്തിൽ സീമയുണ്ട്. എന്നിട്ടും അതിന് തുടർച്ച നഷ്ടമായി. $f(0) = 2$ ആയതാണ് കാരണം.

$f(0) = 1$ ആയിരുന്നെങ്കിലോ? ചിത്രം 5.3 ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഇപ്പോൾ f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമായി മാറി b t Ã n? C h ß S $f(0)$ ന്റെ വില 1 അല്ലാതെ വേറെ ഏതെങ്കിലും വിലയായിരുന്നെങ്കിൽ f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാകുമോ?

ഇവിടെ 1 എന്ന വിലയുടെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ ആണ്.



ചിത്രം 5.3.

അപ്പോൾ ഒരു ഏകദത്തെ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമായി പരിഗണിക്കുന്നത് എപ്പോൾ എന്ന് നമുക്ക് ഇങ്ങനെ പറയാം:

നിർവചനം: 1

രേഖീയസംഖ്യയുടെ ഉപഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള f എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് c. c എന്ന ബിന്ദുവിൽ f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമായാൽ.

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c)$ ആയിരിക്കും.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ ആയിരിക്കും.

എപ്പോഴാണ് f എന്ന ഏകദം c എന്ന ബിന്ദുവിൽ തുടർച്ചയില്ലാത്ത ഏകദമാവുക?

ഇവ മൂന്ന് തരത്തിലാകാം.

(i) $f(c)$ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ലെങ്കിൽ

(ii) $f(c)$ നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ടെങ്കിലും

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x) \neq f(c)$ ആകുമ്പോൾ.

(iii) c എന്ന ബിന്ദുവിൽ f ന് സീമ നിലനിൽക്കുന്നില്ലെങ്കിൽ.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടി നോക്കാം.

ഉദാഹരണം: 1

$f(x) = 2x + 3$ എന്ന ഏകദത്തിന് $x = 1$ ൽ തുടർച്ചയുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

f എന്ന ഏകദം x 1 ൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. കൂടാതെ $f(1) = 5$ ആണ്

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x+3) = 2(1)+3 = 5$$

അതായത് $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ ആണ്.

ആയതുകൊണ്ട് $x = 1$ ൽ f തുടർച്ചയുണ്ട്.

ഉദാഹരണം: 2

$f(x) = x^2$, $x = 0$ ത്തിൽ f തുടർച്ചയുള്ളതാണോ?

പരിഹാരം

$x = 0$ ൽ f നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. $f(0) = 0$ ആണ്.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0^2 = 0$$

അതായത്, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. അതുകൊണ്ട് f ന് പൂജ്യത്തിൽ തുടർച്ചയുണ്ട്.

ഉദാഹരണം : 3

$f(x) = |x|$ എന്ന ഏകദത്തിന് $x = 0$ ത്തിൽ തുടർച്ച പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

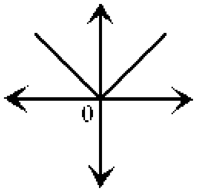
$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

ഇവിടെ f എന്ന ഏകദത്തിന് രണ്ട് നിർവചനങ്ങൾ ഉണ്ട് പൂജ്യത്തേക്കാൾ ചെറിയ സംഖ്യകൾക്ക് $f(x) = -x$ എന്നും പൂജ്യത്തേക്കാൾ വലിയ സംഖ്യകൾക്ക് $f(x) = x$ എന്നും. അതുകൊണ്ട് പൂജ്യത്തിന്റെ ഇടതുസീമയും വലതുസീമയും നോക്കേണ്ടതുണ്ട്.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} (x) = 0$ എന്ന് കാണാമല്ലോ.

അതിനാൽ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ആയിരിക്കും.

$f(0) = 0$ ആണല്ലോ.



ചിത്രം 5.4.

അതുകൊണ്ട് f ന് പൂജ്യത്തിൽ തുടർച്ചയുണ്ടെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

കുറിപ്പ് :
മേൽപ്പറഞ്ഞ ഏകദങ്ങളുടെയെല്ലാം ഗ്രാഫ് സങ്കൽപിച്ചു നോക്കുക. ഗ്രാഫിൽ നിന്നും പ്രസ്തുത ഏകദങ്ങളെല്ലാം അതാത് ബിന്ദുക്കളിൽ തുടർച്ചയുള്ളതാണെന്ന് എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം: 4

$$f(x) = \begin{cases} x^3+3, & \text{if } x \neq 0 \\ 1, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

f ന് പൂജ്യത്തിൽ തുടർച്ചയുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

$x = 0$ ൽ ഏകദം നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്. $x = 0$ ൽ ഏകദത്തിന്റെ വില 1 ആണ്.

$x \neq 0$ ആകുമ്പോൾ ഏകദം ഒരു ബഹുപദമാണ്.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (x^3+3) = 0^3+3 = 3$$

എന്നാൽ $f(0) = 1$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു. അതിനാൽ $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

അതുകൊണ്ട് f ന് പൂജ്യത്തിൽ തുടർച്ചയില്ല. ഈ ഏകദത്തിന് തുടർച്ചയില്ലാത്ത ഏകബിന്ദു $x = 0$ ആണെന്നതും ശ്രദ്ധേയമാണ്.

ഉദാഹരണം: 5

$f(x) = k$, എന്ന സംഖ്യാഏകദത്തിന് തുടർച്ചയുള്ള ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ, എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യകളിലും ഏകദം നിർവചിക്കാം. ഏതൊരു രേഖീയ സംഖ്യയിലും അതിന്റെ വില k ആണ്. c ഒരു രേഖീയസംഖ്യയെങ്കിൽ,

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k.$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = k = f(c)$$ അതുകൊണ്ട്

f അതിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിലും തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്.

ഉദാഹരണം: 6

$f(x) = x$ എന്ന അനന്യ ഏകദം ഏതൊരു രേഖീയസംഖ്യയിലും തുടർച്ചയുള്ളതാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

f എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യയിലും നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്. കൂടാതെ $f(c) = c$ ആണ്. മാത്രമല്ല $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$ ആണ്. അതുകൊണ്ട് f ന് എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യകളിലും തുടർച്ചയുണ്ട്.

നിർവചനം: 2

ഇങ്ങനെ f എന്ന ഒരു ഏകദം അതിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ മുഴുവൻ ബിന്ദുക്കളിലും തുടർച്ചയുള്ളതാവുന്ന സാഹചര്യമുണ്ടാവും. അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ പൊതുവായി f തുടർച്ചയുള്ള ഒരു ഏകദമാണെന്ന് (f is a continuous function) പറയുന്നു.

f എന്ന ഏകദത്തിന് $[a, b]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ (Interval) തുടർച്ചയുണ്ടാകണമെങ്കിൽ, $[a, b]$ യിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും (a യും b യും ഉൾപ്പെടെ) തുടർച്ചയുള്ളതാവണമല്ലോ.
ഇവിടെ എന്താണ് a എന്ന ബിന്ദുവിലെ തുടർച്ച? a യുടെ ഇടതുഭാഗത്ത് (a യേക്കാൾ ചെറിയ വിലകളിൽ) f നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. അതുപോലെ b യുടെ വലതുഭാഗത്തും. അതുകൊണ്ടുതന്നെ a യുടെ ഇടതുവശത്തും b യുടെ വലതുവശത്തുമുള്ള f ന്റെ സീമകൾ പരിഗണിക്കുന്നതിൽ അർഥമില്ല. അതിനാൽ $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ എങ്കിൽ a യിൽ f തുടർച്ചയുള്ളതാണെന്നും $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ എങ്കിൽ b യിൽ തുടർച്ചയുള്ളതാണ് f എന്നും നിർവചിക്കാം. ഇതിന്റെ ഫലമായി, f എന്ന ഏകദം ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ f അവിടെ തുടർച്ചയുള്ളതായിരിക്കും. അതായത് f ന്റെ മണ്ഡലം ഒരു ഏകാംഗഗണമായാൽ, f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമായിരിക്കും.

വീണ്ടും ചില ഉദാഹരണങ്ങൾകൂടി നോക്കാം.

ഉദാഹരണം: 7

$f(x) = |x|$ എന്ന ഏകദം തുടർച്ചയുള്ളതാണോ?

പരിഹാരം

$f(x) = |x|$ നെ നമുക്ക് $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ എന്ന് മാറ്റിയെഴുതാം. ഉദാഹരണം 3 ൽ നിന്നും f ന് $x = 0$ ത്തിൽ തുടർച്ചയുണ്ടെന്ന് നാം കണ്ടു.

c ഒരു രേഖീയസംഖ്യയാണെന്നും $c < 0$ എന്നും കരുതുക, മാത്രമല്ല $f(c) = -c$.

അപ്പോൾ $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (-x) = -c$

$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ ആയതുകൊണ്ട് ന്യൂനരേഖീയസംഖ്യകൾക്ക് f ഒരു തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്.

ഇനി $c > 0$ ആകുമ്പോൾ $f(c) = c$, $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$ ലഭിക്കുന്നു.

$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ ആയതുകൊണ്ട് അധിരേഖീയസംഖ്യകൾക്ക് f ഒരു തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്.

അതായത് c യുടെ എല്ലാ രേഖീയവിലകൾക്കും f തുടർച്ചയുള്ള ഒരു ഏകദമാണ്.

ഉദാഹരണം: 8

$f(x) = x^3 + x^2 - 1$ എന്ന ഏകദം തുടർച്ചയുള്ളതാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

ഏതൊരു രേഖീയസംഖ്യ c യിലും f നിർവചിക്കാം.

$f(c) = c^3 + c^2 - 1$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x^3 + x^2 - 1) = c^3 + c^2 - 1$$

അതായത് $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

അതുകൊണ്ട് f എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യകളിലും തുടർച്ചയുള്ളതാണ്. അങ്ങനെ എങ്കിൽ f തുടർച്ചയുള്ള ഒരു ഏകദമാണ്.

ഉദാഹരണം: 9

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ എന്ന ഏകദം തുടർച്ചയുള്ളതാണോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

c പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലും ഒരു രേഖീയസംഖ്യയാണെന്ന് കരുതുക.

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$$

മാത്രമല്ല, $c \neq 0$ ആവുമ്പോൾ $f(c) = \frac{1}{c}$ ആയതിനാൽ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

അതുകൊണ്ട് മണ്ഡലത്തിലെ ഓരോ ബിന്ദുവിലും f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്. അങ്ങനെയെങ്കിൽ f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്.

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ എന്ന ഏകദത്തെക്കുറിച്ച് ഈ അവസരത്തിൽ കുറച്ച് കാര്യങ്ങൾ കൂടി മനസ്സിലാക്കാം.

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ ന് $x=0$ ത്തിന്റെ സമീപത്തുള്ള സ്വഭാവം മനസ്സിലാക്കാനായി ചുവടെയുള്ള പട്ടിക ശ്രദ്ധിക്കുക.

പട്ടിക 5.1

x	1	0.3	0.2	$0.1 = 10^{-1}$	$0.01 = 10^{-2}$	$0.001 = 10^{-3}$	10^{-n}
$f(x)$	1	3.333...	5	10	$100 = 10^2$	$1000 = 10^3$	10^n

ഇവിടെ x വിലകൾ ശ്രദ്ധിക്കൂ. അവ പൂജ്യത്തേക്കാൾ വലിയ വിലകളിലൂടെ പൂജ്യത്തിന് അടുത്തേക്ക് വരികയാണല്ലോ. അതേ സമയം $f(x)$ ന്റെ വിലകൾ വളരെ വലുതാകുന്നതായും കാണാം.

അതായത് x ന്റെ വില പൂജ്യത്തിന് വലതുഭാഗത്തു നിന്നും പൂജ്യത്തോട് ആവശ്യാനുസരണം അടുപ്പിച്ചാൽ $f(x)$ ന്റെ വില എത്ര വേണമെങ്കിലും വലുതാക്കാനാകും.

ഇത് ഇങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാം.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

(∞ എന്ന ചിഹ്നം അനന്തത എന്ന ആശയത്തെയാണ് ഇവിടെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. ∞ എന്നത് ഒരു രേഖീയ സംഖ്യയല്ല എന്ന് പ്രത്യേകം ഓർമിക്കുക.) ഇവിടെ പൂജ്യത്തിൽ f ന് വലതുസീമ ഒരു രേഖീയസംഖ്യ എന്ന അർത്ഥത്തിൽ നിലനിൽക്കുന്നില്ല എന്നാണ് ഇതിൽ നിന്നും നാം മനസ്സിലാക്കേണ്ടത്.

ഇതുപോലെ താഴെയുള്ള പട്ടികയിൽനിന്നും,

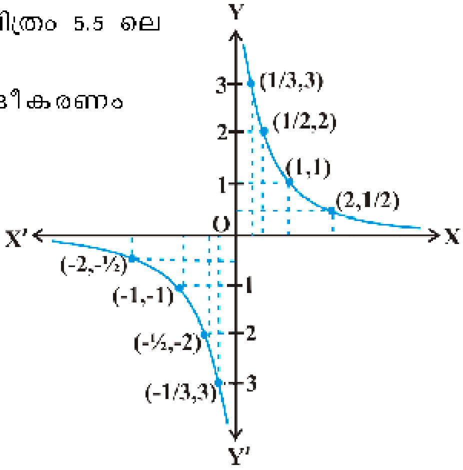
പട്ടിക 5.2

x	-1	-0.3	-0.2	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-n}
$f(x)$	-1	$-3.333...$	-5	-10	-10^2	-10^3	-10^n

ന്യൂനസംഖ്യകളിലൂടെ പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുന്നതനുസരിച്ച് x ന്റെ വില വളരെ കുറയുന്നു. അതായത് $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ എന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

നേരത്തെ സൂചിപ്പിച്ചതുപോലെ f ന് പൂജ്യത്തിൽ ഇടതുസീമയും ഒരു രേഖീയസംഖ്യ

എന്ന അർത്ഥത്തിൽ നിലനിൽക്കുന്നില്ല. ചിത്രം 5.5 ലെ $f(x) = \frac{1}{x}$ ന്റെ ഗ്രാഫിൽ നിന്നും വിശദീകരണം ലഭിക്കുന്നു.



ചിത്രം 5.5

ഉദാഹരണം: 10

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ if } x \le 1 \\ x-2, \text{ if } x > 1 \end{cases}$$

എന്നത് തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

എല്ലാ രേഖീയ സംഖ്യകൾക്കും f നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

$c \in R$ എന്ന് കരുതുക.

അവസ്ഥ 1

$c > 1$ ആണെങ്കിൽ, $f(c) = c - 2$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x-2) = c - 2 = f(c)$$

അതുകൊണ്ട് $c > 1$ ആയാൽ f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്.

അവസ്ഥ 2

$c < 1$ ആണെങ്കിൽ, $f(c) = c + 2$.

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c}(x+2) = c+2 = f(c)$$

അതുകൊണ്ട് $c < 1$ ആകുമ്പോഴും f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമായിരിക്കും.

അവസ്ഥ 3

$c = 1$ ആയാൽ, f ന്റെ $x = 1$ ലെ ഇടതുസീമ

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+2) = 1+2 = 3$$

f ന്റെ $x = 1$ ലെ വലതുസീമ

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x-2) = 1-2 = -1$$

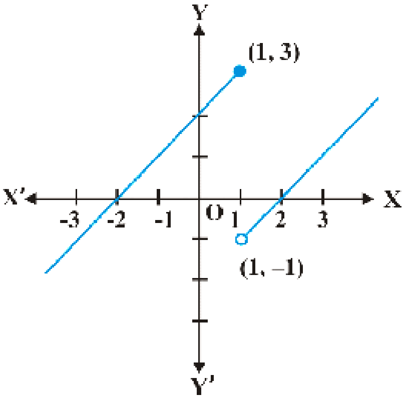
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

ഇടതു-വലതുസീമകൾ തുല്യമല്ല.

അതിനാൽ $\lim_{x \to 1} f(x)$ നിലനിൽക്കുന്നില്ല.

അതുകൊണ്ട് f ന് 1 എന്ന ബിന്ദുവിൽ തുടർച്ച യില്ല. f ന്റെ ഗ്രാഫ് കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് നോക്കുക.

f ന് തുടർച്ചയില്ലാത്ത ഏകബിന്ദു $x = 1$ ആണ്.



ചിത്രം 5.6

ഉദാഹരണം: 11

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x-2, & x > 1 \end{cases}$$ ആണെങ്കിൽ f ന് തുടർച്ചയില്ലാത്തത് ഏതെല്ലാം ബിന്ദുക്കളിലാണെന്ന് കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

കഴിഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിലേതുപോലെ $x = 1$ അല്ലാത്ത എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും f ന് തുടർച്ച യുണ്ടെന്ന് നമുക്ക് കണ്ടെത്താൻ സാധിക്കും.

f ന്റെ $x = 1$ ലെ ഇടതുസീമ

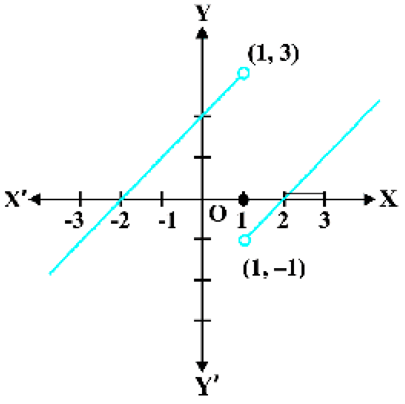
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+2) = 1+2 = 3$$

f ന്റെ $x = 1$ ലെ വലതുസീമ

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x-2) = 1-2 = -1$$

$x = 1$ ലെ ഇടതു-വലതുസീമകൾ വ്യത്യസ്തങ്ങളാണ്.

അതിനാൽ $\lim_{x \to 1} f(x)$ നിലനിൽക്കുന്നില്ല.



ചിത്രം 5.7

അതുകൊണ്ട് f ന്റെ തുടർച്ച $x = 1$ ൽ നഷ്ടമാകുന്നു.

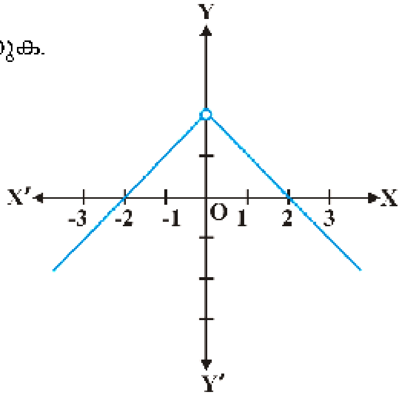
1 ൽ മാത്രമാണ് f തുടർച്ചയില്ലാതാകുന്നത്. ചിത്രം 5.7 കാണുക.

ഉദാഹരണം: 12

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x<0 \\ -x+2, & x>0 \end{cases}$$

ആണെങ്കിൽ f ന് തുടർച്ചയുണ്ടോ പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം



ചിത്രം 5.8

പൂജ്യത്തിലൊഴികെ എല്ലാ രേഖീയ സംഖ്യകൾക്കും f നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം $D_1 \cup D_2$ ആണ്.

$D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$, $D_2 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$.

അവസ്ഥ 1

$c \in D_1$, എങ്കിൽ

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} (x+2)$$
$$= c+2 = f(c)$$

അതിനാൽ D_1 ൽ f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്.

അവസ്ഥ: 2

$c \in D_2$ എങ്കിൽ

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} (\;\; x+2)$$
$$= -c+2 = f(c)$$

അതിനാൽ D_2 ൽ f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്. അതുകൊണ്ട് f അതിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്. അതായത്, f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്. ചിത്രം 5.8 കാണുക. ഈ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാൻ ഒരു ബിന്ദുവിലെത്തുമ്പോൾ പേപ്പറിൽനിന്നും പേന ഉയർത്തണമെന്നുണ്ടെങ്കിലും ആ ബിന്ദു മണ്ഡലത്തിലെ ബിന്ദു അല്ലാത്തതിനാൽ f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്.

ഉദാഹരണം: 13

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

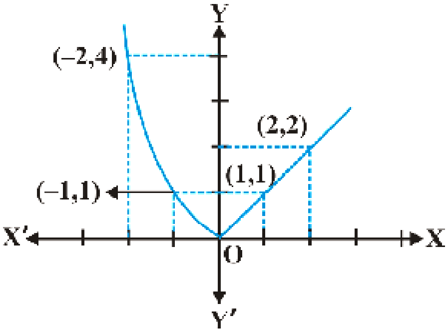
ആണെങ്കിൽ f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യകൾക്കും f നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് (ചിത്രം 5.9) കാണുക. f ന്റെ മണ്ഡലം സംഖ്യാരേഖയിലെ മൂന്നു വിയുക്തഗണങ്ങളായി തിരിക്കാം.

$D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$, $D_2 = \{0\}$,

$D_3 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം 5.9

അവസ്ഥ: 1

D_1 ലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിലും $f(x) = x^2$. ഇത് ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദമായതിനാൽ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്.

അവസ്ഥ: 2

D_3 ലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിലും $f(x) = x$ ആണ്. അതിനാൽ f തുടർച്ചയുള്ളതാണ്.

അവസ്ഥ: 3

$x = 0$ പരിഗണിക്കാം. $x = 0$ ത്തിൽ ഏകദത്തിന്റെ വില, $f(0) = 0$.

f ന്റെ $x = 0$ ത്തിലെ ഇടതുസീമ, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^2 = 0$

f ന്റെ $x = 0$ ത്തിലെ വലതുസീമ, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

അതുകൊണ്ട്, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

അതായത് $x = 0$ ൽ f ന് തുടർച്ചയുണ്ട്. ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ f ന്റെ മണ്ഡലത്തിൽ മുഴുവനായി തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമായിരിക്കും. അതിനാൽ f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്.

ഉദാഹരണം: 14

എല്ലാ ബഹുപദഏകദങ്ങളും (Polynominal functions) തുടർച്ചയുള്ളവയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

p എന്ന ഏകദം, $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $n \in N$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbf{R}$. എന്ന രീതിയിൽ നിർവചിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ p എന്നത് ഒരു ബഹുപദഏകദമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം.

c ഏതെങ്കിലും ഒരു രേഖീയസംഖ്യയാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

അതായത് c എന്ന രേഖീയസംഖ്യയിൽ $p(x)$ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്.

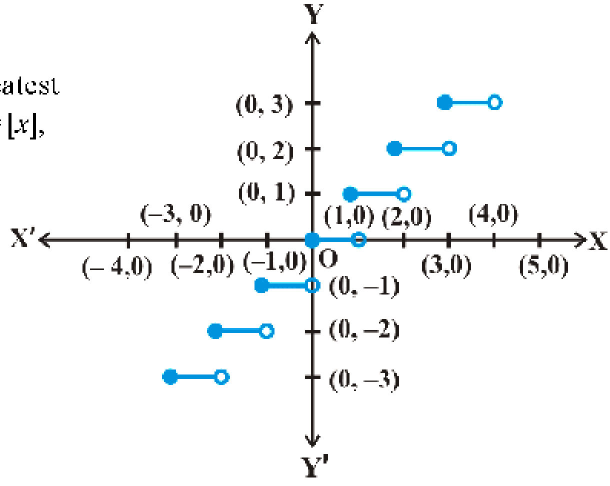
c എന്നത് ഏത് രേഖീയസംഖ്യയും ആകാമെന്നതിനാൽ f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണെന്ന് നമുക്ക് പറയാം.

ഉദാഹരണം: 15

വൻപൂർണസംഖ്യാഏകദം (greatest integer function) അതായത്, $f(x) = [x]$, $[x]$ എന്നത് x നേക്കാൾ വലുതല്ലാത്ത ഏറ്റവും വലിയ പൂർണസംഖ്യ. ഏതെല്ലാം ബിന്ദുക്കളിൽ f ന് തുടർച്ച നഷ്ടപ്പെടുന്നു എന്ന് കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

വൻപൂർണസംഖ്യാഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. അതിൽ നിന്ന് തന്നെ എല്ലാ പൂർണസംഖ്യകളിലും fന്റെ തുടർച്ച നഷ്ടപ്പെടുന്നു എന്ന് എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാമല്ലൊ.



ചിത്രം 5.10

അവസ്ഥ 1

പൂർണസംഖ്യയല്ലാത്ത ഒരു രേഖീയസംഖ്യയാണ് c എന്നിരിക്കട്ടെ. c യോട് അടുത്തുള്ള എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യകൾക്കും ഏകദത്തിന്റെ വില $[c]$ യാണ്. അതായത്,

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} [x] = [c]$ കൂടാതെ, $f(c) = [c]$ അതുകൊണ്ട് പൂർണസംഖ്യയല്ലാത്ത എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യകളിലും f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്.

അവസ്ഥ 2

c ഒരു പൂർണസംഖ്യയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ചെറിയ ഒരു രേഖീയസംഖ്യ $r > 0$ ആയാൽ $[c - r] = c - 1$, $[c + r] = c$ ആണെന്ന് കണ്ടെത്താം. ഇപ്രകാരം

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = c - 1, \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = c$$

ഒരു c യ്ക്കും ഈ സീമകൾ തുല്യമല്ലാത്തതിനാൽ ഏകദം f ന് ഒരു പൂർണസംഖ്യയിലും തുടർച്ചയില്ല.

5.2.1 തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങളുടെ ബീജഗണിതം

11- ാം ക്ലാസിൽ ഏകദങ്ങളുടെ സീമയുടെ ബീജഗണിതം നാം ചർച്ച ചെയ്തതു പോലെ ഇവിടെ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങളുടെ ബീജഗണിതവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ചില നിയമങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാം. ഒരു ബിന്ദുവിലെ ഏകദത്തിന്റെ സീമ ആ ബിന്ദു വിലെ ഏകദത്തിന്റെ തുടർച്ചയെ പൂർണമായും നിർണയിക്കുന്നതിനാൽ സീമ സംബ ന്ധിച്ച നിയമങ്ങൾക്ക് അനുസൃതമായ നിയമങ്ങൾ ഇവിടെയും പാലിക്കപ്പെടുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 1

f, g എന്നിവ c എന്ന ബിന്ദുവിൽ തുടർച്ചയുള്ള രണ്ടു രേഖീയ ഏകദങ്ങളാണ് എങ്കിൽ (1) $f+g$ (2) $f-g$ (3) $f.g$ (4) $\left(\frac{f}{g}\right)$ $(g(c)\neq 0)$ എന്നീ ഏകദങ്ങളും c എന്ന ബിന്ദുവിൽ തുടർച്ചയുള്ളവയായിരിക്കും.

തെളിവ്

$$\lim_{x\to c}(f+g)(x) = \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] \quad (f+g \text{ യുടെ നിർവചനം})$$

$$= \lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x) \quad (\text{സീമ സംബന്ധിച്ച സിദ്ധാന്തം})$$

$$= f(c) + g(c) \quad (f,\ g \text{ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങൾ})$$

$$= (f+g)(c)$$

അതായത്, $\lim_{x\to c}(f+g)(x) = (f+g)(c)$ ($f+g$ യുടെ നിർവചനം)

അതുകൊണ്ട് $f+g$ യും c യിൽ തുടർച്ചയുള്ളതായിരിക്കും. ഇതുപോലെ മറ്റുള്ള വയും തെളിയിക്കാമല്ലോ.

> **☛ കുറിപ്പ് :**
>
> (i) f ഒരു സംഖ്യാഏകദമാണ്, അതായത്, $f(x) = \lambda$, ഇവിടെ λ ഒരു രേഖീയ സംഖ്യ. കൂടാതെ g എന്നത് തുടർച്ചയുള്ള ഒരു ഏകദമാണെന്നും സങ്കല്പി ക്കുക എങ്കിൽ സിദ്ധാന്തം 1 ലെ പ്രത്യേകത (3) ഉപയോഗിച്ച് $\lambda . g$ എന്ന ഏകദം $[(\lambda . g)(x) = \lambda . g(x)]$ തുടർച്ചയുള്ളതാണെന്നു കാണാം. വിശേഷി ച്ച്, $\lambda = -1$ എങ്കിൽ f ന്റെ തുടർച്ച $-f$ ന്റെ തുടർച്ചയിലേക്കു നയിക്കുന്നു.

(ii) f ഒരു സംഖ്യാഏകദം $f(x) = \lambda$, എങ്കിൽ സിദ്ധാന്തം 1 ലെ 4-ാമത്തെ പ്രത്യേകത ഉപയോഗിച്ച് $\frac{\lambda}{g}(x) = \frac{\lambda}{g(x)}$, എന്നു നിർവചിക്കപ്പെട്ട $\frac{\lambda}{g}$ എന്ന ഏകദം $g(x) \neq 0$ ത്തിൽ തുടർച്ചയുള്ളതാണ്. പ്രത്യേകിച്ച്, g യുടെ തുടർച്ച അതിന്റെ വ്യുൽക്രമം $\frac{1}{g}$ യുടെ തുടർച്ചയിലേക്കു നയിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം: 16

എല്ലാ ഭിന്നകഏകദങ്ങളും (Rational functions) തുടർച്ചയുള്ളതായിരിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ഒരു ഭിന്നകഏകദം f ഇപ്രകാരം നിർവചിക്കാം:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},\quad q(x) \neq 0$$

ഇവിടെ p, q എന്നിവ ബഹുപദഏകദങ്ങളാണ്. f ന്റെ മണ്ഡലം $q(x) = 0$ ആകുന്ന x ഒഴികെയുള്ള രേഖീയസംഖ്യകളാണ്.

ഉദാഹരണം 14 ൽ കണ്ടതുപോലെ $p(x)$, $q(x)$ ബഹുപദങ്ങളായതിനാൽ അവ രണ്ടും തുടർച്ചയുള്ളവയാണ്. സിദ്ധാന്തം 1 (4) പ്രകാരം $\frac{p(x)}{q(x)}$ എന്ന ഭിന്നക ഏകദവും തുടർച്ചയുള്ളതായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 17

$f(x) = \sin x$ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണോ? വിശദമാക്കുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ നാം $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ എന്ന വസ്തുത (തെളിവില്ലാതെ) ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഗ്രാഫിൽനിന്നും ഇത് അനുമാനിക്കാം.

$f(x) = \sin x$ ന്റെ മണ്ഡലം R ആണല്ലോ. $c \in \mathbf{R}$ എന്ന് കരുതുക. $x = c + h$ എന്നെടുക്കുക.

$x \to c$ എങ്കിൽ $h \to 0$ ആയതിനാൽ

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \sin x$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin(c + h)$$

$$= \lim_{h \to 0} [\sin c \cos h + \cos c \sin h]$$

$$= \lim_{h \to 0} [\sin c \cos h] + \lim_{h \to 0} [\cos c \sin h]$$

$$= \sin c + 0 = \sin c = f(c)$$

അതായത് $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

അതായത് $f(x) = \sin x$ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്.

കുറിപ്പ് :

ഇതേ രീതിയിൽ $f(x) = \cos x$ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണെന്ന് തെളിയിക്കാം.

ഉദാഹരണം: 18

$f(x) = \tan x$ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\ ; \ \cos x \neq 0\ , \text{ അതായത് } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

ഇവിടെ $\sin x$, $\cos x$ എന്നിവ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങളായതിനാൽ അവ ഉപയോഗിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന ഭിന്നകഏകദമായ $\tan x$ നിർവചിക്കപ്പെടുന്നിടത്ത് തുടർച്ചയുള്ളതായിരിക്കും. (സിദ്ധാന്തം 1(4))

തുടർച്ചയുള്ള രണ്ട് ഏകദങ്ങളുടെ സമ്മിശ്ര ഏകദത്തിന്റെ തുടർച്ച പരിശോധിക്കാം. f, g എന്നിവ രണ്ടു രേഖീയ ഏകദങ്ങളാണെങ്കിൽ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ എപ്പോഴൊക്കെ g യുടെ രംഗം f ന്റെ മണ്ഡലത്തിന്റെ ഉപഗണമാകുന്നുവോ അപ്പോഴെല്ലാം നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. സമ്മിശ്ര ഏകദങ്ങളുടെ തുടർച്ച താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സിദ്ധാന്തത്തിൽ വ്യക്തമാക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം: 2

f, g എന്നിവ രണ്ട് രേഖീയ ഏകദങ്ങളാണെന്നും c എന്ന ബിന്ദുവിൽ $f \circ g$ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടെന്നും കരുതുക. g എന്നത് c യിലും f എന്നത് $g(c)$ യിലും തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങളാണെങ്കിൽ $f \circ g$ എന്ന ഏകദം c യിൽ തുടർച്ചയുള്ളതായിരിക്കും.

(ഇതിന്റെ തെളിവ് നാം ചർച്ച ചെയ്യുന്നില്ല.) ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ ഇത് വിശദമാക്കാം.

ഉദാഹരണം: 19

$f(x) = \sin(x^2)$ എന്ന ഏകദം തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$g(x) = \sin x$, $h(x) = x^2$ ആണെന്ന് കരുതുക. g, h എന്നിവ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങളാണെന്ന് നമുക്ക് അറിയാമല്ലൊ.

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x^2) = \sin(x^2) = f(x)$

അതായത് $g \circ h = f$

അതിനാൽ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങളുടെ സമ്മിശ്ര ഏകദമെന്ന നിലയിൽ f ഒരു തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്.

ഉദാഹരണം: 20

$f(x) = |1 - x + |x||$, $x \in \mathbf{R}$ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$g(x) = 1 - x + |x|$ · $h(x) = |x|$ എന്ന് കരുതുക. അപ്പോൾ

$$(h \circ g)(x) = h(g(x))$$
$$= h(1 - x + |x|)$$
$$= |1 - x + |x|| = f(x)$$

$h = |x|$ എന്നത് തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം. $g(x) = 1 - x + |x|$ എന്നത് $1 - x$, $|x|$ എന്നീ രണ്ട് തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങളുടെ തുക ആയതിനാൽ സിദ്ധാന്തം 1 പ്രകാരം തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമായിരിക്കും.

അതിനാൽ g യുടെയും h ന്റെയും സമ്മിശ്ര ഏകദമായ $f(x) = |1 - x + |x||$ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.1

1. $f(x) = 5x - 3$ എന്ന ഏകദം $x = 0$, $x = -3$, $x = 5$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തുടർച്ചയുള്ളതാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
2. $f(x) = 2x^2 - 1$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ തുടർച്ച $x = 3$ ൽ പരിശോധിക്കുക.

3. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങൾ തുടർച്ചയുള്ളതാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

(a) $f(x) = x - 5$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-5},\ x \neq 5$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x+5},\ x \neq -5$ (d) $f(x) = |x - 5|$

4. n ഒരു പൂർണഅധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, $f(x) = x^n$ എന്ന ഏകദം $x = n$ ൽ തുടർച്ചയുള്ളതാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 5, & x > 1 \end{cases}$ ആയാൽ, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ $f(x)$ എന്ന ഏകദം തുടർച്ചയുള്ളത് ആണോ?

ചുവടെ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഏകദങ്ങളിൽ തുടർച്ച നഷ്ടമാകുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

6. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 2 \\ 2x - 3, & x > 2 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} |x| + 3, & x \leq -3 \\ -2x, & -3 < x < 3 \\ 6x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

6 മുതൽ 12 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിലെ ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ വരച്ചു നോക്കൂ. ഇതിനായി *If* എന്ന ഇൻപുട്ട് കമാന്റ് ഉപയോഗിക്കാം. ഏഴാമത്തെ ചോദ്യത്തിലെ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ലഭിക്കാൻ
if[x≤3, *abs*(x)−3, 4 [-3<x<3, -2x, 6x−2]]
എന്ന് നൽകിയാൽ മതി. എട്ടാമത്തെ ചോദ്യത്തിൽ
if [x ≠ 0. *abs*(x)/x. 0] എന്നും പന്ത്രണ്ടാമത്തെ ചോദ്യത്തിൽ
If [x ≤ 1, x^10 - 1. x^2] എന്നും നൽകാം.

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ x^2 + 1, & x < 1 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3, & x \leq 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} x^{10} - 1, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} x + 5, & x \leq 1 \\ x - 5, & x > 1 \end{cases}$ എന്ന ഏകദം തുടർച്ചയുള്ള ഒരു ഏകദമാണോ?

ചുവടെ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള f എന്ന ഏകദത്തിന്റെ തുടർച്ച നിർണയിക്കുക.

14. $f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \le x \le 1 \\ 4, & 1 < x < 3 \\ 5, & 3 \le x \le 10 \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 0, & 0 \le x \le 1 \\ 4x, & x > 1 \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} -2, & x \le -1 \\ 2x, & -1 < x \le 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$

17. ചുവടെ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള f എന്ന ഏകദം $x = 3$ യിൽ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമായാൽ

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \le 3 \\ bx + 3, & x > 3 \end{cases}$$

a യും b യും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

18. $f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2 - 2x), & x \le 0 \\ 4x + 1, & x > 0 \end{cases}$ എന്ന ഏകദത്തിൽ λ യുടെ ഏതു വിലയ്ക്കാണ് $x = 0$ യിൽ ഏകദം തുടർച്ചയുള്ളതാകുക? $x = 1$ ആയാലോ?

19. $g(x) = x - [x]$ എന്ന ഏകദം എല്ലാ പൂർണസംഖ്യാബിന്ദുക്കളിലും തുടർച്ചയില്ലാത്ത ഏകദമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. ഇവിടെ $[x]$ എന്നത് x നേക്കാൾ ചെറുതോ x നോട് തുല്യമോ ആയ പൂർണസംഖ്യ ആണ്.

20. $f(x) = x^2 - \sin x + 5$ എന്ന ഏകദം $x = \pi$ യിൽ തുടർച്ചയുള്ളതാണോ?

21. ചുവടെ നല്കിയിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ തുടർച്ച പരിശോധിക്കുക.

(a) $f(x) = \sin x + \cos x$ (b) $f(x) = \sin x - \cos x$

(c) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

22. cosine, cosecant, secant, cotangent എന്നീ ഏകദങ്ങളുടെ തുടർച്ച പരിശോധിക്കുക.

23. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ x + 1, & x \ge 0 \end{cases}$

എന്ന ഏകദത്തിന്റെ തുടർച്ച നഷ്ടമാകുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

$\sin\dfrac{1}{x}$, $x\sin\dfrac{1}{x}$, $x^2\sin\dfrac{1}{x}$

എന്നീ ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ വരച്ച് നോക്കൂ. $x \to 0$ ആകുമ്പോൾ ഇവയുടെ സീമ എന്താണ്?

24. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ എന്ന ഏകദം തുടർച്ചയുള്ളതാണോ? വ്യക്തമാക്കുക.

25. $f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ തുടർച്ച നിർണയിക്കുക.

26 മുതൽ 29 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ, തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കളിൽ ഏകദം തുടർച്ചയുള്ളതാകും വിധം k യുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

26. $f(x) = \begin{cases} \frac{k \cos x}{\pi - 2x}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 3, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$, $x = \frac{\pi}{2}$ വിൽ

27. $f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \leq 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases}$, $x = 2$ ൽ

28. $f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \leq \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$, $x = \pi$ ൽ

29. $f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \leq 5 \\ 3x - 5, & x > 5 \end{cases}$, $x = 5$ ൽ

k എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് 26 മുതൽ 29 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിലെ ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ വരച്ചു നോക്കുക. 26-ാം ചോദ്യത്തിലെ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ലഭിക്കാൻ

if [$x \neq$ pi/2, k * cos(x) / (pi - 2x), 3] എന്ന് നൽകിയാൽ മതി. $\frac{\pi}{2}$ ൽ ഉള്ള പ്രതിബിംബം (3) കാണാൻ കഴിയുന്നില്ല എങ്കിൽ (pi/2, 3) എന്ന് ഇൻപുട്ട് നൽകുക. k യുടെ വില മാറ്റി നോക്കുക. k യുടെ ഏത് വിലയ്ക്കാണ് ഏകദങ്ങൾ തുടർച്ചയുള്ളതാകുന്നതെന്ന് കണ്ടെത്തുക.

30. $f(x) = \begin{cases} 5, & x \leq 2 \\ ax + b, & 2 < x < 10 \\ 21, & x \geq 10 \end{cases}$ എന്ന ഏകദം തുടർച്ചയുള്ളതായാൽ a യുടെയും b യുടെയും വില കണ്ടുപിടിക്കുക.

31. $f(x) = \cos(x^2)$ എന്ന ഏകദം തുടർച്ചയുള്ളതാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

32. $f(x) = |\cos x|$ എന്ന ഏകദം തുടർച്ചയുള്ളതാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

33. $\sin |x|$ എന്നത് ഒരു തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

34. $f(x) = |x| - |x + 1|$ എന്ന ഏകദത്തിന് തുടർച്ച നഷ്ടപ്പെടുന്ന എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും കണ്ടുപിടിക്കുക.

$\sin(x^2)$, $\cos(x^2)$, $\sin|x|$, $\cos|x|$, $|\sin x|$, $|\cos x|$

എന്നീ ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ വരച്ചുനോക്കുക.

5.3 അവകലനീയത (Differentiability)

രേഖീയ ഏകദങ്ങളുടെ അവകലനങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് മുൻ ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ച ചില വസ്തുതകൾ നമുക്ക് ഓർമിക്കാം.

f ഒരു രേഖീയഏകദമാണെന്നും, f ന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് c എന്നും കരുതുക. c യിൽ f ന്റെ അവകലജം $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ ആണെന്നും ഇതിനെ $f'(c)$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{d}{dx}(f(x))$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാമെന്നും നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്.

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ എന്ന ഏകദത്തെ $f(x)$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം (derivative) എന്നാണ് പറയുന്നത്. f ന്റെ അവകലജത്തെ $f'(x)$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{d}{dx}(f(x))$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം, $y=f(x)$ ആയാൽ $\frac{dy}{dx}$ അല്ലെങ്കിൽ y' എന്നു സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.

ഒരു ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന പ്രക്രിയയെ അവകലനം (differentiation) എന്നു പറയുന്നു. f എന്ന ഏകദത്തെ അവകലനം ചെയ്യാമെങ്കിൽ, അതിനെ അവകലനീയ ഏകദം (differentiable function) എന്നു പറയുന്നു. ചുവടെ പറയുന്ന നിയമങ്ങൾ അവകലനത്തിന്റെ ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ച് പറയാവുന്നവയാണ്.

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(2) $(uv)' = u'v + uv'$ (ലെബ്നിറ്റ്സിന്റെ നിയമം അഥവാ ഗുണനനിയമം)

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$ (ഹരണനിയമം).

ചുവടെ പട്ടികയിൽ ചില പ്രധാന ഏകദങ്ങളും അവയുടെ അവകലജവും കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

പട്ടിക 5.3

$f(x)$	x^n	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$f'(x)$	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$\sec^2 x$

മേൽപറഞ്ഞ നിർവചനപ്രകാരം അവകലജം ഒരു സീമയാണ്. സീമ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരുന്നാൽ മാത്രമാണ് അവകലജം നിർവചിക്കപ്പെടുക. വ്യക്തമായിപ്പറഞ്ഞാൽ $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$, $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ എന്നിവ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുകയും പരസ്പരം തുല്യമാകുകയും ചെയ്താൽ മാത്രമാണ് $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ എന്ന സീമ, c എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിർവചിക്കപ്പെടുന്നത്. ഒരു ഏകദം $[a, b]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ അവകലനീയം (differentiable) ആകണമെങ്കിൽ $[a, b]$ യിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും ഏകദം അവകലനീയം ആകണം. അതുപോലെ ഒരു ഏകദം (a, b) യിൽ അവകലനീയമാകണമെങ്കിൽ അത് a യും b യും ഒഴികെ മറ്റെല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും അവകലനീയമായാൽ മതി.

സിദ്ധാന്തം: 3

f എന്ന ഏകദം c എന്ന ബിന്ദുയിൽ അവകലനീയമാണെങ്കിൽ c യിൽ f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദം ആയിരിക്കും.

തെളിവ്

ബിന്ദു c യിൽ f എന്ന ഏകദം അവകലനീയം ആയതിനാൽ

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)\ ,\ (x \neq c)$$

$f(x) - f(c)$ പരിഗണിച്ചാൽ

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot(x-c)$$

അതുകൊണ്ട്

$$\lim_{x\to c}[f(x)-f(c)] = \lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot(x-c)\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to c}[f(x)] - \lim_{x\to c}[f(c)] = \lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right]\cdot\lim_{x\to c}[(x-c)]$$

$$= f'(c)\ .\ 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

അതുകൊണ്ട് $x = c$ യിൽ f തുടർച്ചയുള്ള ഏകദം ആകുന്നു.

ഉപസിദ്ധാന്തം

എല്ലാ അവകലനീയ ഏകദങ്ങളും തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങൾ ആയിരിക്കും.

മേൽ പ്രസ്താവനയുടെ വിപരീതം ശരിയാകണമെന്നില്ല. അതായത് തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങളെല്ലാം അവകലനീയമാകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണത്തിന് $f(x) = |x|$ എന്ന തുടർച്ചയുള്ള ഏകദം പരിഗണിക്കുക. $f(x)$ ന്റെ ഇടതുസീമ $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$ എന്നും വലതുസീമ $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$ എന്നും കാണാം. അതായത് ഇടതു-വലതു സീമകൾ $x = 0$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ തുല്യമല്ല. അതിനാൽ $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ എന്ന സീമ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല എന്ന് സാരം. അതിനർഥം f ഒരു അവകലനീയ ഏകദമല്ല എന്നാണ്.

5.3.1 സമ്മിശ്ര ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജങ്ങൾ (Derivatives of composite functions)

$f(x) = (2x+1)^3$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. ഈ ഏകദത്തിന്റെ എങ്ങനെ അവകലനം എങ്ങനെ കാണണം.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left[(2x+1)^3\right]$$
$$= \frac{d}{dx}(8x^3+12x^2+6x+1)$$
$$= 24x^2 + 24x + 6$$
$$= 6\,(2x+1)^2$$

$g(x) = 2x + 1$ എന്നും $h(x) = x^3$ എന്നും പരിഗണിച്ചാൽ $f(x) = (hog)(x)$ ആണല്ലോ. അതായത് $f(x)$ എന്നത് $2x + 1$ ന്റെയും x^3 ന്റെയും ഒരു സമ്മിശ്ര ഏകദമാണ്.

$t = 2x + 1$ എന്നെടുത്താൽ

$$\frac{df}{dx} = 6\,(2x+1)^2 = 3(2x+1)^2 \,.\, 2 = 3t^2 \,.\, 2 = \frac{dh}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}.$$

ഈ നിയമത്തെ നമുക്ക് ചുവടെ പറയുന്ന രീതിയിൽ അവതരിപ്പിക്കാം.

സിദ്ധാന്തം 4: (ശൃംഖലാസിദ്ധാന്തം)

f എന്നത് u , v എന്നീ രണ്ട് ഏകദങ്ങളുടെ സമ്മിശ്രമായി വരുന്ന ഒരു രേഖീയഏകദമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. അതായത് $f = vou$, $t = u(x)$ ആണെന്നും $\frac{dt}{dx}$, $\frac{dv}{dt}$ ഇവ നിർവ

ചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട് എന്നും കരുതുക. അങ്ങിനെയെങ്കിൽ $\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ ആയിരിക്കും.

☛ കുറിപ്പ് :

f എന്നത് u, v, w എന്നീ മൂന്നു രേഖീയഏകദങ്ങളുടെ സമ്മിശ്ര ഏകദമായാൽ അതായത് $f = (w \circ u) \circ v$, $t = v(x)$, $s = u(t)$,

$\frac{df}{dx} = \frac{d(w \circ u)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 21

$f(x) = \sin(x^2)$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ x ആധാരമാക്കിയുള്ള അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$t = u(x) = x^2$, $v(t) = \sin t$ എന്നീ രണ്ടു ഏകദങ്ങളുടെ സമ്മിശ്ര ഏകദമാണല്ലോ $f(x)$.

($\frac{dv}{dt} = \cos t$, $\frac{dt}{dx} = 2x$ എന്നിവ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.)

$$f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(x^2) = \sin x^2$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot 2x$$

$$\frac{df}{dx} = \cos t \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

☛ കുറിപ്പ് :

ഈ പ്രശ്നത്തെ ചുവടെപറയും വിധം നേരിട്ട് പരിഹരിക്കാം.

$$y = \sin(x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x^2)$$

$$= \cos x^2 \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \cos x^2$$

ഉദാഹരണം : 22

$\tan(2x + 3)$ ന്റെ x ആധാരമാക്കിയുള്ള അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

മുകളിലെ കുറിപ്പിൽ വിശദീകരിച്ചതുപോലെ നമുക്ക് ഇതിന്റെ അവകലജം കാണാം.

$$y = \tan(2x + 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,[\tan(2x+3)]$$

$$= \sec^2(2x+3)\,.\,\frac{d}{dx}(2x+3)$$

$$= 2\sec^2(2x+3)$$

ഉദാഹരണം : 23

$\sin(\cos(x^2))$ നെ x ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുക.

പരിഹാരം

$$y = \sin(\cos(x^2))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(\cos x^2) = \cos(\cos x^2)\,\frac{d}{dx}(\cos x^2)$$

$$= \cos(\cos x^2)(-\sin x^2)\,\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= -\sin x^2 \cos(\cos x^2)(2x)$$

$$= -2x \sin x^2 \cos(\cos x^2)$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.2

1 മുതൽ 8 വരെയുള്ള ഏകദങ്ങളെ x ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുക.

1. $\sin(x^2+5)$ **2.** $\cos(\sin x)$ **3.** $\sin(ax+b)$

4. $\sec(\tan(\sqrt{x}))$ **5.** $\dfrac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$ **6.** $\cos x^3 \,.\, \sin^2(x^5)$

7. $2\sqrt{\cot(x^2)}$ **8.** $\cos(\sqrt{x})$

9. $f(x) = |x-1|,\ x \in \mathbf{R}$ എന്ന ഏകദം $x = 1$ ൽ അവകലനീയം അല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.

10. $f(x) = [x],\ 0 < x < 3$ എന്ന വൻപൂർണസംഖ്യാഏകദം $x = 1$ ലും $x = 2$ ലും അവകലനീയം അല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5.3.2 സൂചക ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജം (Derivative of Implicit functions)

$y = f(x)$ എന്ന വിധത്തിൽ എഴുതാവുന്ന ഏകദങ്ങളെയാണ് നാം ഇതുവരെ അവകലനം ചെയ്തത്. x, y എന്നിവ ഇടകലർന്നു വരുന്ന ഏകദങ്ങളുടെയും അവകലനം സാധ്യമാണ്.

ഉദാഹരണത്തിന്, $x - y - \pi = 0$ പോലെയുള്ള ഏകദങ്ങൾ. ഇവിടെ പദാനുപദം x ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dx} - \frac{d\pi}{dx} = 0$$ എന്ന് കിട്ടും.

അതായത് $1 - \frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = 1$ എന്ന് എഴുതാം.

ഇത്തരം ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടി പരിശോധിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 24

$y + \sin y = \cos x$ ആയാൽ $\frac{dy}{dx}$ കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} + \cos y \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{1 + \cos y}, \quad y \neq (2n+1)\pi$$

കുറിപ്പ് :

നാം ഈ പ്രശ്നങ്ങളിൽ പരിഗണിച്ച തരത്തിലുള്ള x, y എന്നിവ ഇടകലർന്നു വരുന്ന ഏകദങ്ങളെ സൂചക ഏകദങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു. (Implicit functions)

5.3.3 പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജങ്ങൾ (Derivatives of inverse trigonometric functions)

പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങളാണ്. ആയതിനാൽ അവയുടെ അവകലജം കണ്ടെത്താൻ നമുക്ക് ശ്രമിക്കാം.

ഉദാഹരണം: 25

$f(x) = \sin^{-1} x$ യുടെ അവകലജം അത് നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട് എന്ന് സങ്കല്പിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$y = \sin^{-1} x$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ആയാൽ $x = \sin y$.

x ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{dx}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}$$

ഇത് $\cos y \neq 0$ ആണെങ്കിലേ നിർവചിക്കപ്പെടൂ.

അതായത് $\sin^{-1} x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$,

അതായത് $x \neq -1, 1$,

അതായത് $x \in (-1, 1)$.

അതിനാൽ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$

ഉദാഹരണം: 26

$f(x) = \tan^{-1} x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം അത് നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ടെന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ച് കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$y = \tan^{-1} x$, $x = \tan y$

x ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്താൽ

$$1 = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെയും അവയുടെ അവകലജങ്ങളുടെയും ഒരു പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

പട്ടിക 5.4

$f(x)$	$\cos^{-1}x$	$\cot^{-1}x$	$\sec^{-1}x$	$\operatorname{cosec}^{-1}x$
$f'(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$
f' മണ്ഡലം	$(-1, 1)$	**R**	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.3

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രശ്നങ്ങളിൽ $\frac{dy}{dx}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $2x - 3y = \sin x$
2. $2x - 3y = \sin y$
3. $ax + by^2 = \cos y$
4. $xy + y^2 = \tan x + y$
5. $x^2 + xy + y^2 = 100$
6. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$

7. $\sin^2 y + \cos xy = \kappa$ 8. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$ 9. $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

10. $y = \tan^{-1}\left(\frac{3x - x^3}{1-3x^2}\right), \ -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

11. $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

12. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

13. $y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), -1 < x < 1$

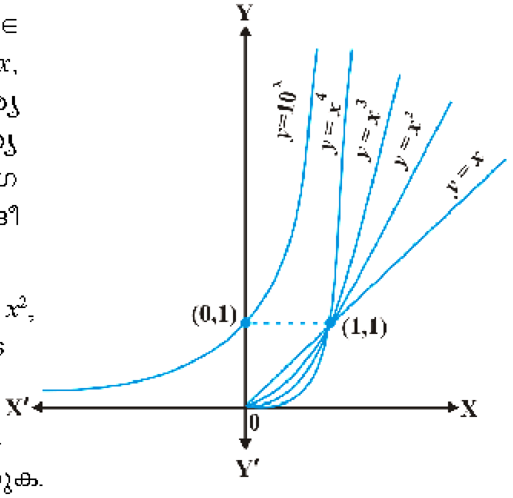
14. $y = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

15. $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

5.4 കൃതി ഏകദങ്ങളും ലോഗരിതമിക ഏകദങ്ങളും (Exponential and Logarithmic Functions)

11-ാം ക്ലാസ്സിൽ കൃതി ഏകദം $f(x) = e^x, x \in R$, ലോഗരിത ഏകദം $f(x) = \log x, x \in R, x < 0$ എന്നിവയെക്കുറിച്ച് ചില കാര്യങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ഇവിടെ വ്യത്യസ്തങ്ങളായ കൃതി ഏകദങ്ങളെയും ലോഗരിതമിക ഏകദങ്ങളെയും കുറിച്ചും വിശദീകരിക്കുന്നു.

ചിത്രം 5.11 ൽ $y = f_1(x) = x$, $y = f_2(x) = x^2$, $y = f_3(x) = x^3$, $y = f_4(x) = x^4$ എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫ് കാണാം.



ചിത്രം 5.11

x ന്റെ കൃതി വില കൂടുന്തോറും വക്രങ്ങളുടെ ചരിവിൽ വരുന്ന മാറ്റം ശ്രദ്ധിക്കുക. അതായത്, കൃതി കൂടുന്തോറും വക്രത്തിന്റെ

വർധനവിന്റെ നിരക്ക് വലിയ തോതിൽ വർധിക്കുന്നു. $y = f_n(x) = x^n$ ന്റെ ഗ്രാഫ് n ന്റെ വില കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് y അക്ഷത്തിലേക്ക് അടുത്തുവരുന്നതായി കാണാം. $f_{10}(x) = x^{10}$, $f_{15}(x) = x^{15}$ എന്നിവ പരിഗണിക്കുക. ഇവയിൽ x, 1 ൽ നിന്ന് 2 ലേക്ക് വർധിച്ചാൽ എന്ത് സംഭവിക്കും?

$f_{10}(x)$, 1 ൽ നിന്ന് 2^{10} ലേക്കും $f_{15}(x)$, 1 ൽ നിന്ന് 2^{15} ലേക്കുമാണ് വർധിക്കുക എന്നത് വ്യക്തമല്ലേ.

അതായത്,

x ൽ വരുന്ന ഒരു നിശ്ചിത വർധനവ് f_{10} ൽ വരുത്തുന്ന വർധനവിനേക്കാൾ വളരെ വലിയതായിരിക്കും f_{15} ൽ വരുത്തുന്നതെന്നർഥം.

അതായത് x ന്റെ കൃതി ഉയരുംതോറും വളർച്ചയുടെ നിരക്ക് വർധിച്ചുവരും.

ഇനി ചിത്രത്തിൽ തന്നെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന $y = f(x) = 10^x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ശ്രദ്ധിക്കുക.

$f(x)$ ന്റെ വളർച്ച നേരത്തെ നാം കണ്ട x, x^2, x^2, x^4 തുടങ്ങിയ ഏതൊരു ഏകദത്തിന്റെ വളർച്ചയേക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കും.

നിർവചനം: 3

$b > 1$ എന്ന് കരുതുക.

$y = f(x) = b^x$ എന്ന ഏകദത്തെ കൃതി ഏകദം എന്ന് പറയുന്നു.

ചിത്രം 5.11 ൽ കാണുന്ന $y = 10^x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് ശ്രദ്ധിച്ചുവല്ലോ. ഇതുപോലെ 2^x, 3^x, 4^x എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫ് സ്വയം വരച്ച് നിരീക്ഷിക്കുക. ചില പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം.

> min = 1, max = 5 വരത്തക്കവിധം സ്ലൈഡർ 'a' നിർമിക്കുക. a^x എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. (input a ^ x) ഇതിന്റെ അവകലജത്തിന്റെ ഗ്രാഫും വരയ്ക്കുക (Input ൽ f' എന്നോ Derivative [f] എന്നോ നൽകിയാൽ മതി) a യുടെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. രണ്ടു ഗ്രാഫുകളും ഒന്നിനു മുകളിൽ മറ്റൊന്നായി വരുന്നത് എപ്പോഴാണ്?

(1) എല്ലാ കൃതി ഏകദങ്ങളുടേയും മണ്ഡലം **R** ആണ്.

(2) അവയുടെയെല്ലാം രംഗം അധിസംഖ്യകളായ രേഖീയ സംഖ്യാഗണമാണ്.

(3) എല്ലാ കൃതി ഏകദങ്ങളുടേയും ഗ്രാഫുകൾ (1, 0) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു. ($b^0 = 1$ എന്നത് എല്ലാ b കൾക്കും ശരിയാണല്ലോ, $b > 1$).

(4) കൃതിഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ എല്ലായ്പ്പോഴും ആരോഹണത്തിലായിരിക്കും. അതായത് ഇടതുവശത്തു നിന്നും വലത്തോട്ട് മാറുമ്പോൾ ഗ്രാഫ് ഉയർന്നു വന്നുകൊണ്ടിരിക്കും.

(5) x അക്ഷത്തിലൂടെ ചെറിയ വിലകളിലേക്ക് മാറുമ്പോൾ കൃതി ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് x അക്ഷത്തിലേക്ക് അടുത്തടുത്ത് വരുന്നു. പക്ഷെ ഒരിക്കലും അത് x അക്ഷത്തെ തൊടുന്നില്ല.

10 ആധാരമായ കൃതി ഏകദത്തെ സാധാരണ കൃതി ഏകദം (common exponential function) എന്ന് നാം വിളിക്കുന്നു. 11- ാം ക്ലാസിലെ പാഠപുസ്തകത്തിലെ അനുബന്ധത്തിൽ $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\ldots+\ldots\ldots$ എന്ന അനന്തശ്രേണിയുടെ തുക 2 നും 3 നും ഇടയിലുള്ള ഒരു സംഖ്യയായിരിക്കുമെന്ന് കണ്ടിരുന്നു. ഈ സംഖ്യയെ നാം e എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചു.

> min = 0 ആകത്തക്ക വിധം n എന്ന പേരിൽ ഒരു integer slider നിർമിക്കുക. input ൽ sum(1/i!, i, 0, n) എന്ന് നൽകിയാൽ $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{n!}$ എന്ന ശ്രേണി നിർമിക്കാം. ഇതിന്റെ വില Algebra view ൽ കാണാം. n കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് ഈ സംഖ്യ 'e' യോട് അടുക്കുന്നു. കൂടുതൽ ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ കാണുന്നതിനായി Options → Rounding → 15 decimal places എന്ന രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം.

$y = e^x$ എന്ന കൃതി ഏകദത്തെ നൈസർഗിക കൃതി ഏകദമെന്ന് (natural exponential function) നാം വിളിക്കുന്നു.

> min = 0 ആകത്തക്കവിധം n എന്ന പേരിൽ ഒരു integer slider നിർമിക്കുക. Input-ൽ sum(x^i/i!, i, 0, n) എന്ന് നൽകി $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\ldots\frac{x^n}{n!}$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. $g(x) = e^x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫും വരയ്ക്കുക. സ്ലൈഡറിന്റെ വില കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് f ന്റെ ഗ്രാഫിന് എന്തുസംഭവിക്കുന്നു എന്ന് നിരീക്ഷിക്കുക.

നിർവചനം 4

$b \in R$, $b > 1$ എന്ന് വിചാരിക്കുക.

$b^x = a$ എന്നിരിക്കട്ടെ. അങ്ങനെയെങ്കിൽ b ആധാരമായ a യുടെ ലോഗരിതമാണ് x എന്ന് നാം പറയുന്നു.

ഇതിനെ ചിഹ്നമുപയോഗിച്ച്

$\log_b a = x$ എന്നെഴുതും.

ഉദാഹരണമായി

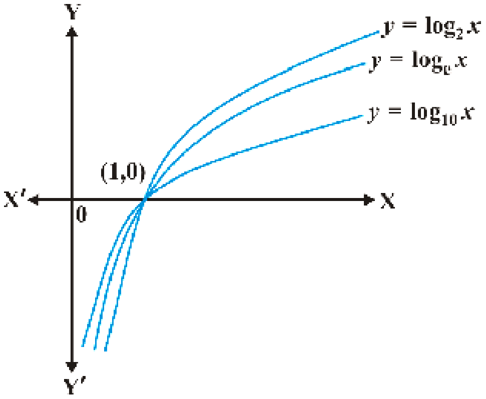
$2^3 = 8$ എന്നതിന്റെ ലോഗരിതരൂപം $\log_2 8 = 3$ എന്നാണ്.

$$10^2 = 100 \to \log_{10} 100 = 2$$

ഇതിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ലോഗരിതമിക ഏകദത്തെ ചുവടെ കാണുന്ന രീതിയിൽ നിർവചിക്കുന്നു.

$\log_b : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $b^y = x$ എങ്കിൽ $\log_b x = y$

ഇവിടെ $b = 10$ എങ്കിൽ ഇത് സാധാരണ ലോഗരിതം എന്നും $b = e$ എങ്കിൽ ഇത് നൈസർഗിക ലോഗരിതം എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു. നൈസർഗിക ലോഗരിതമിക ഏകദത്തെ *ln* എന്നാണ് പൊതുവെ എഴുതുന്നത്.



ചിത്രം 5.12

എങ്കിലും ഈ അധ്യായത്തിൽ $\log n$ എന്നത് e ആധാരമായ ഏകദത്തെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ചിത്രം 5.12 ൽ 2, e, 10 എന്നിവ ആധാരമായുള്ള ലോഗരിതമിക ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ കാണാം.

ലോഗരിതമിക ഏകദങ്ങളുടെ ചില പ്രത്യേകതകൾ നോക്കുക. ($b > 1$ ആയ ഏത് ആധരത്തിനും ഇത് ബാധകമാണ്.)

(1) ഇവയുടെ മണ്ഡലം അധിസംഖ്യയായ രേഖീയസംഖ്യകളുടെ ഗണം, ആയിരിക്കും. (അധിസംഖ്യകളല്ലാത്ത സംഖ്യകൾക്ക് ലോഗരിതം നിർവചിക്കുന്നതിൽ അർഥമില്ല.)

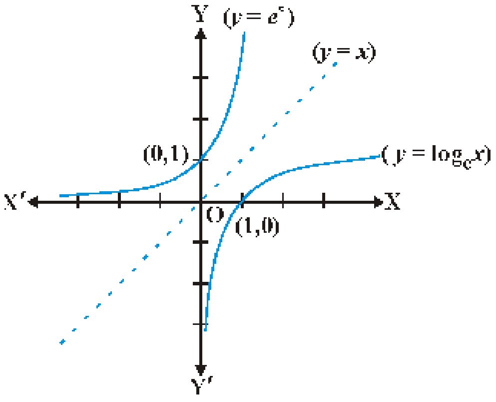
(2) ഇവയുടെ രംഗം രേഖീയസംഖ്യാഗണമായിരിക്കും.

(3) ഇവയുടെ ഗ്രാഫെല്ലാം (1, 0) ത്തിലൂടെ കടന്നുപോവും.

(4) ഇവയുടെ ഗ്രാഫ് എല്ലായ്പ്പോഴും ആരോഹണത്തിലാണ്.

(5) x ന്റെ വില പൂജ്യത്തിലേക്ക് കുറയുന്തോറും ഏകദത്തിന്റെ വില കുറഞ്ഞ് കുറഞ്ഞ് വരുന്നു. ഇത് എത്രവേണമെങ്കിലും ചെറുതാക്കാവുന്നതാണ്. അതായത് ഗ്രാഫ് y അക്ഷത്തിലേക്ക് അടുത്ത് വരുന്നു. പക്ഷെ ഒരിക്കലും ഗ്രാഫ് y അക്ഷത്തെ തൊടില്ല.

(6) ചിത്രം 5.13 ശ്രദ്ധിക്കുക. $y = e^x$ ന്റേയും $y = log_e x$ യുടേയും ഗ്രാഫ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവയിലോരോന്നിന്റേയും ഗ്രാഫ് മറ്റേതിന്റെ $y = x$ എന്ന വരയിലുള്ള പ്രതിബിംബമാണ്.



ചിത്രം 5.13

ലോഗരിതമിക ഏകദത്തിന്റെ മറ്റ് ചില സവിശേഷതകൾ കൂടി ചുവടെ വിശദമാക്കുന്നു.

(1) ആധാരത്തിൽ വ്യത്യാസം വരുത്താവുന്ന തരത്തിലുള്ള ഒരു നിയമം ഈ ഏകദത്തിനുണ്ട്.

$\log_a p = \alpha$, $\log_b p = \beta$, $\log_b a = \gamma$ എന്ന് കരുതുക.

അതായത്

$a^\alpha = p$, $b^\beta = p$, $b^\gamma = a$ ആയിരിക്കുമല്ലോ.

$b^\gamma = a$ എന്നത് ആദ്യ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളിൽ കൊടുത്താൽ

$(b^\gamma)^\alpha = b^{\gamma\alpha} = p$

$b^\beta = p = b^{\gamma\alpha}$

അതായത് $\alpha\gamma = \beta$, അല്ലെങ്കിൽ $\alpha = \dfrac{\beta}{\gamma}$

അതിനാൽ $\mathbf{\log_a p = \dfrac{\log_b p}{\log_b a}}$

(2) ഇനി ഗുണനത്തെ സംബന്ധിക്കുന്ന ഒരു പ്രത്യേകത നോക്കാം.

$\log_b pq = \alpha$ എന്ന് കരുതുക.

അതായത് $b^\alpha = pq$ ആയിരിക്കുമല്ലോ.

$\log_b p = \beta$, $\log_b q = \gamma$ എന്നും കരുതിയാൽ

$b^\beta = p$, $b^\gamma = q$

അപ്പോൾ $b^\alpha = pq = b^\beta b^\gamma = b^{\beta+\gamma}$

അതായത്,

$b^\alpha = b^{\beta+\gamma}$

അതായത് $\alpha = \beta + \gamma$

അതിനാൽ $\mathbf{\log_b pq = \log_b p + \log_b q}$

ഇതിൽനിന്നും

$\mathbf{\log_b p^2 = \log_b p + \log_b p = 2 \log p}$ എന്നും എഴുതാം.

ഇതിനെ സാമാന്യവൽക്കരിച്ചാൽ $\mathbf{\log_b p^n = n \log p}$ എന്നു കാണാം. (n എന്നത് ഒരു പൂർണ അധിസംഖ്യ)

(ഇത് എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യകൾക്കും ശരിയാണ്. എന്നാൽ ഇവിടെ അത് തെളിയിക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്നില്ല.)

$\mathbf{\log_b\left(\dfrac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q}$ എന്നും നമുക്ക് കാണാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം : 28

$x = e^{\log x}$ എല്ലാ x രേഖീയസംഖ്യകൾക്കും ശരിയാണോ?

പരിഹാരം

ലോഗരിതമിക ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം അധിസംഖ്യകളായ രേഖീയസംഖ്യാഗണമാണെന്ന് ഓർക്കുക.

$y = e^{\log x}$

$y > 0$ എങ്കിൽ, $\log y = \log (e^{\log x}) = \log x \,.\, \log e = \log x$

അതായത് $\log y = \log x$

അതുകൊണ്ട് $y = x$

അതിനാൽ $x = e^{\log x}$, x ന്റെ എല്ലാ അധിസംഖ്യാവിലകൾക്കും ശരിയാണ്.

സിദ്ധാന്തം 5

(1) e^x ന്റെ അവകലജം e^x തന്നെയാണ്. (x ആധാരമാക്കി)

അതായത്, $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(2) $\log x$ ന്റെ അവകലജം $\dfrac{1}{x}$ ആണ്. (x ആധാരമാക്കി)

അതായത്, $\dfrac{d}{dx}(\log x) = \dfrac{1}{x}$

ഉദാഹരണം : 29

x നെ ആധാരമാക്കി താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയെ അവകലനം ചെയ്യുക.

(i) e^{-x} (ii) $\sin (\log x), x > 0$ (iii) $\cos^{-1} (e^x)$ (iv) $e^{\cos x}$

പരിഹാരം

(1) $y = e^{-x}$ എന്നിരിക്കട്ടെ ശൃംഖലാനിയമം ഉപയോഗിച്ചാൽ,

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = -e^{-x}$$

(2) $y = \sin (\log x)$

$$\frac{dy}{dx} = \cos (\log x) \cdot \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{\cos (\log x)}{x}$$

(3) $y = \cos^{-1}(e^x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

(iv) $y = e^{\cos x}$.

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -(\sin x)\, e^{\cos x}$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 5.4

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളെ x ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുക.

1. $\dfrac{e^x}{\sin x}$
2. $e^{\sin^{-1} x}$
3. e^{x^3}
4. $\sin(\tan^{-1} e^{-x})$
5. $\log(\cos e^x)$
6. $e^x + e^{x^2} + \ldots + e^{x^5}$
7. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}, \; x > 0$
8. $\log(\log x), \; x > 1$
9. $\dfrac{\cos x}{\log x}, \; x > 0$
10. $\cos(\log x + e^x), \; x > 0$

5.5 ലോഗരിതമിക അവകലനം (Logarithmic Differentiation)

ചില ഏകദങ്ങൾ നോക്കൂ,

$(x+3)^x, \; (\sin x)^x, \; x^x \ldots\ldots$

ഇവയുടെ പ്രത്യേകത ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഇവിടെ ആധാരവും കൃതിയും x ഉൾപ്പെടുന്ന ഏകദങ്ങളാണ്.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ

$y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ -------- (1)

ഇത്തരം ചില സവിശേഷ ഏകദങ്ങളുടെ അവകലനത്തിനായി നമ്മൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതിയാണ് ലോഗരിതമിക അവകലനം.

e ആധാരമായി (1) ൽ കാണുന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ ലോഗരിതം എടുത്താൽ

$\log y = v(x) \log[u(x)]$ എന്ന് കിട്ടുമല്ലോ. ശൃംഖലാനിയമം ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log[u(x)]$$

അതായത്,

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{v(x)}{u(x)}\cdot u'(x) + v'(x)\cdot \log\left[u(x)\right]\right]$$

ഇവിടെ $f(x)$, $u(x)$ എന്നിവ പൂജ്യത്തേക്കാൾ വലുതായിരിക്കണം എന്ന് ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതാണ്.

ഉദാഹരണം : 30

$y \quad \sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}$ ആയാൽ x നെ ആധാരമാക്കി y ന്റെ അവകലജം കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$$y = \sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{(3x^2+4x+5)}}$$

രണ്ടു വശത്തും ലോഗരിതം എടുക്കുക.

$$\log y = \frac{1}{2}\left[\log(x-3) + \log(x^2+4) - \log(3x^2+4x+5)\right]$$

x ആധാരമായി അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

ഉദാഹരണം : 31

a^x എന്ന ഏകദത്തെ $(a > 0)$ x ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുക.

പരിഹാരം

$y = a^x$

$\log y = x \log a$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log a$$

$$\frac{dy}{dx} = \quad y \log a \quad a^x \log a$$

മറ്റൊരു രീതി

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\log a}) = e^{x\log a}\frac{d}{dx}(x\log a)$$

$$= e^{x\log a} \,.\, \log a = a^x \log a.$$

ഉദാഹരണം : 32

$x^{\sin x}$, $x > 0$, എന്ന ഏകദത്തെ x ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുക.

പരിഹാരം

$y = x^{\sin x}$

$\log y = \sin x \log x$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \sin x \left(\frac{1}{x}\right) + \log x \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$

ഉദാഹരണം : 33

$y^x + x^y + x^x = a^b$ ആയാൽ $\dfrac{dy}{dx}$ കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$y^x + x^y + x^x = a^b$.

$y^x = u, x^y = v,\ x^x = w$ എന്നിങ്ങനെ പരിഗണിച്ചാൽ $u + v + w = a^b$ എന്നെഴുതാമല്ലോ.

അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}=0$$ എന്ന് കിട്ടും ... (1)

$$u = y^x \Rightarrow \log u = x \log y$$

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} = x\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}+\log y$$

$$\frac{du}{dx} = u\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\log y\right) = y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\log y\right] \quad \dots (2)$$

$$v = x^y \Rightarrow \log v = y \log x$$

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} = y\frac{d}{dx}(\log x)+\log x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}\right]$$

$$= x^y\left[\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}\right] \quad \dots (3)$$

$$w = x^x \Rightarrow \log w = x \log x$$

$$\frac{1}{w}\cdot\frac{dw}{dx} = x\cdot\frac{1}{x}+\log x$$

$$\frac{dw}{dx} = w\,(1+\log x)$$

$$= x^x\,(1+\log x) \quad \dots (4)$$

(1), (2), (3), (4), എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$y^x\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\log y\right)+x^y\left(\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}\right)+x^x\,(1+\log x)=0$$

അതായത്,

$$(x\,.\,y^{x-1}+x^y\,.\,\log x)\,\frac{dy}{dx} = -\,x^x\,(1+\log x)-y\,.\,x^{y-1}-y^x\log y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\lfloor y^x\log y+y\,.\,x^{y-1}+x^x(1+\log x)\rfloor}{x\,.\,y^{x-1}+x^y\log x}$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.5

1 മുതൽ 11 വരെയുള്ള ഏകദങ്ങളെ x ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുക.

1. $\cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 3x$
2. $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$
3. $(\log x)^{\cos x}$
4. $x^x - 2^{\sin x}$
5. $(x + 3)^2 \,.\, (x + 4)^3 \,.\, (x + 5)^4$
6. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$
7. $(\log x)^x + x^{\log x}$
8. $(\sin x)^x + \sin^{-1} \sqrt{x}$
9. $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$
10. $x^{x \cos x} + \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
11. $(x \cos x)^x + (x \sin x)^{\frac{1}{x}}$

12 മുതൽ 15 വരെയുള്ള ഏകദങ്ങളിൽ $\dfrac{dy}{dx}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

12. $x^y + y^x = 1$
13. $y^x = x^y$
14. $(\cos x)^y = (\cos y)^x$
15. $xy = e^{(x - y)}$
16. $f(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക, തുടർന്ന് $f'(1)$ കണക്കാക്കുക.
17. x ആധാരമാക്കി $y = (x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$ എന്ന ഏകദത്തെ താഴെപ്പറയുന്ന 3 വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ അവകലനം ചെയ്യുക.
    (i) ഗുണനനിയമം ഉപയോഗിച്ച്
    (ii) വിപുലീകരിച്ച് ഒരു പോളിനോമിയൽ ആക്കിയശേഷം
    (iii) ലോഗരിതം ഉപയോഗിച്ച്

    ഓരോന്നിലും ഒരേ ഉത്തരമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.
18. u, v, w ഇവ x, ഉൾപ്പെടുന്ന ഏകദങ്ങളായാൽ

$$\frac{d}{dx}(u.\ v.\ w) = \frac{du}{dx}\ v.\ w + u\ .\ \frac{dv}{dx}\ .\ w + u\ .\ v\ \frac{dw}{dx}$$

ആണെന്ന് രണ്ടു വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ തെളിയിക്കുക.

(i) ഗുണനനിയമം ആവർത്തിച്ചുപയോഗിച്ച്

(ii) ലോഗരിതമിക അവകലനം ഉപയോഗിച്ച്

5.6 പരാമെട്രിക് രൂപത്തിലുള്ള ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജങ്ങൾ (Derivatives of functions in parametric form)

രണ്ട് ചരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എല്ലായ്പ്പോഴും നേരിട്ടോ അല്ലെങ്കിൽ സൂചക സ്വഭാവത്തോടു കൂടിയോ ആകണമെന്നില്ല. മൂന്നാമതൊരളവിന്റെ സഹായത്തോടുകൂടിയായിരിക്കും ഇത് ചിലപ്പോൾ തരിക. ഉദാഹരണമായി y, x എന്നീ വിലകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം നേരിട്ട് നല്കാതെ. $x = f(t)$, $y = g(t)$ എന്നാണെങ്കിൽ ഇവിടെ x നേയും y നേയും t എന്ന മൂന്നാമതൊരു ചരവുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തിയാണ് പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. ഇത്തരം ഏകദങ്ങൾ ആണ് പരാമെട്രിക് ഏകദങ്ങൾ. ഇവിടെ t ആണ് പരാമീറ്റർ.

ശൃംഖലാനിയമം ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

അതായത്, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \left(\frac{dx}{dt} \neq 0\right)$$

അതുകൊണ്ട് $$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad (f'(t) \neq 0)$$

ഉദാഹരണം : 34

$x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$ ആയാൽ $\frac{dy}{dx}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$x = a \cos \theta, \; y = a \sin \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta, \; \frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

$$= \frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\cot\theta$$

ഉദാഹരണം : 35

$x = at^2, y = 2at$, $\frac{dy}{dx}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$x = at^2, y = 2at$

$$\frac{dx}{dt} = 2at \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 2a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

ഉദാഹരണം : 36

$x = a\,(\theta + \sin\theta), y = a\,(1 - \cos\theta)$. $\frac{dy}{dx}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = a\,(\sin\theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a\,(1+\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)}$$

$$= \tan\frac{\theta}{2}$$

ഉദാഹരണം : 37

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ആണെങ്കിൽ $\frac{dy}{dx}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക.

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (a\cos^3\theta)^{\frac{2}{3}} + (a\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^{\frac{2}{3}}$$

അതായത്

$x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ എന്നത് $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ന്റെ പ്രാചലികരൂപമാണ്.

$$\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta$$

$$= -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.6

1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ x, y എന്നിവ പരാമെട്രിക് രൂപത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. ഓരോന്നിലും പരാമെട്രിക്കിനെ ഒഴിവാക്കാതെ $\frac{dy}{dx}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $x = 2at^2,\ y = at^4$
2. $x = a\cos\theta,\ y = b\cos\theta$
3. $x = \sin t,\ y = \cos 2t$
4. $x = 4t,\ y = \frac{4}{t}$
5. $x = \cos\theta - \cos 2\theta,\ y = \sin\theta - \sin 2\theta$
6. $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 + \cos\theta)$
7. $x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$
8. $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)\ y = a\sin t$
9. $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$
10. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta),\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$
11. If $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}},\ y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$ ആയാൽ $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5.7 രണ്ടാംക്രമ അവകലജം (Second order derivative)

$$y = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$f'(x)$ ഇനിയും അവകലനത്തിന് സാധ്യതയുള്ള ഏകദമാണെങ്കിൽ അതിനെ ഒന്നു കൂടി അവകലനം ചെയ്യാം. $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ നെ y യുടെ രണ്ടാംക്രമ അവകലജം എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഇതിനെ $\frac{d^2y}{dx^2}$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം. ചില സമയങ്ങളിൽ ഇതിനെ $f''(x)$ എന്നും എഴുതാറുണ്ട്. മാത്രമല്ല D^2y, y'', y_2 എന്നിവയും രണ്ടാംക്രമ അവകലജത്തെ സൂചിപ്പിക്കാനായി ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്.

ഉദാഹരണം : 38

$y = x^3 + \tan x$ എങ്കിൽ $\frac{d^2y}{dx^2}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$y = x^3 + \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \sec^2 x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(3x^2 + \sec^2 x\right)$$

$$= 6x + 2\sec x \,.\, \sec x \tan x = 6x + 2\sec^2 x \tan x$$

ഉദാഹരണം : 39

$y = A\sin x + B\cos x$ എങ്കിൽ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$y = A\sin x + B\cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = A\cos x - B\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\text{A} \cos x - \text{B} \sin x)$$

$$= -\text{A} \sin x - \text{B} \cos x = -y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y$$

അതുകൊണ്ട് $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

ഉദാഹരണം : 40

$y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ എങ്കിൽ $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{2x} \times 2 + 2e^{3x} \times 3$$

$$= 6e^{2x} + 6e^{3x} = 6(e^{2x} + e^{3x})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(e^{2x} \times 2 + e^{3x} \times 3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 6(2e^{2x} + 3e^{3x}) - 5 \times 6(e^{2x} + e^{3x}) + 6(3e^{2x} + 2e^{3x})$$

$$= 12e^{2x} + 18e^{3x} - 30e^{2x} - 30e^{3x} + 18e^{2x} + 12e^{3x}$$

$$= 0$$

ഉദാഹരണം : 41

$y = \sin^{-1} x$ എങ്കിൽ $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$y = \sin^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\sqrt{(1-x^2)}\,\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(1-x^2)}\,.\,\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\;\frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)}}\times-2x=0$$

$$\sqrt{1-x^2}\;\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

അതായത് $$(1-x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2}-x.\frac{dy}{dx}=0$$

മറ്റൊരു രീതി

$$y=\sin^{-1}x$$

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

അതായത് $$\sqrt{1-x^2}\;\;y_1=1$$

$$(1-x^2)\,y_1^2=1$$

ഇതിനെ വീണ്ടും അവകലനം ചെയ്താൽ

$$(1-x^2)\,.\,2y_1y_2+y_1^2(0-2x)=0$$
$$(1-x^2)\,y_2-xy_1=0$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.7

1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിലെ ഏകദങ്ങളുടെ രണ്ടാംക്രമ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. x^2+3x+2 **2.** x^{20} **3.** $x\,.\,\cos x$

4. $\log x$ **5.** $x^3\log x$ **6.** $e^x\sin 5x$

7. $e^{6x}\cos 3x$ **8.** $\tan^{-1}x$ **9.** $\log(\log x)$

10. $\sin(\log x)$

11. $y = 5\cos x - 3\sin x$ ആയാൽ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

12. $y = \cos^{-1} x$ ആയാൽ y മാത്രം ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വിധത്തിൽ $\frac{d^2y}{dx^2}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

13. $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ ആയാൽ $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

14. $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ ആയാൽ $\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

15. $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ ആയാൽ $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

16. $e^y(x+1) = 1$ ആയാൽ $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

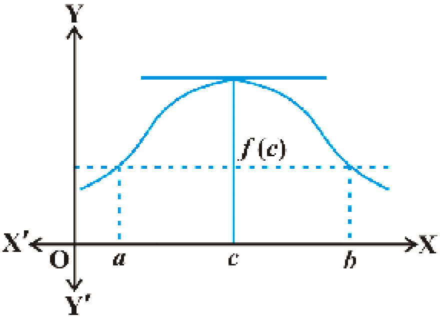
17. $y = (\tan^{-1} x)^2$, ആയാൽ $(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1)y_1 = 2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5.8 ഇടവിലസിദ്ധാന്തം (Mean Value Theorem)

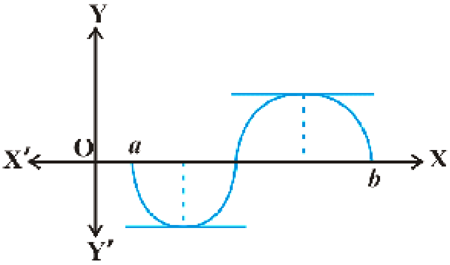
കലനത്തിലെ രണ്ട് പ്രധാന സിദ്ധാന്തങ്ങളാണ് ഇവിടെ നാം ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. ഇവയുടെ തെളിവുകൾ ഇവിടെ പരാമർശിക്കുന്നില്ലെങ്കിലും ഈ ഫലങ്ങൾ പൊതുവായി നമുക്ക് ചർച്ച ചെയ്യാം.

സിദ്ധാന്തം 6: റോൾ സിദ്ധാന്തം (Rolle's Theorem)

$f : [a, b] \to \mathbf{R}$ എന്നത് $[a, b]$ യിൽ തുടർച്ചയുള്ളതും, (a, b) യിൽ അവകലനീയവുമായ ഒരു ഏകദമാണ്. മാത്രമല്ല $f(a) = f(b)$; $a, b \in \mathbf{R}$. എങ്കിൽ (a, b) എന്ന തുറന്ന ഇടവേളയിൽ $f'(c) = 0$ ആകുന്ന വിധത്തിൽ c എന്ന ഒരു ബിന്ദുവെങ്കിലും ഉണ്ടായിരിക്കും.



ചിത്രം 5.14



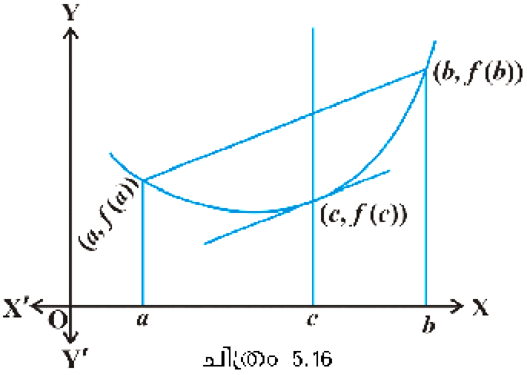
ചിത്രം 5.15

$f(a) = f(b)$ ആയതിനാൽ f ആരോഹണം ചെയ്തതിന് ശേഷം അവരോഹണം ചെയ്യുകയും അതല്ലെങ്കിൽ അവരോഹണം ചെയ്തതിന് ശേഷം ആരോഹണം ചെയ്യുകയും വേണമല്ലൊ. ഇങ്ങനെ ആരോഹണത്തിൽ നിന്നും അവരോഹണത്തിലേക്കും തിരിച്ചും മാറുന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ വക്രത്തിന് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരയുടെ ചരിവ് പൂജ്യമായിരിക്കണമല്ലൊ. ഒരു ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് ആണല്ലൊ ആ ബിന്ദുവിലെ അവകലജം.

സിദ്ധാന്തം: 7: ഇടവിലസിദ്ധാന്തം (Mean Value Theorem)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, $[a, b]$ യിൽ തുടർച്ചയുള്ളതും (a, b) യിൽ അവകലനീയവുമായ ഒരു ഏകദമാണ്. എങ്കിൽ (a, b) എന്ന തുറന്ന ഇടവേളയിൽ $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ആകത്തക്കവിധത്തിൽ c എന്ന ഒരു ബിന്ദുവെങ്കിലും ഉണ്ടായിരിക്കും.

ഇടവിലസിദ്ധാന്തം റോൾ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ഒരു സാമാന്യവത്ക്കരണമാണ്. ഇടവിലസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ഒരു ചിത്രീകരണം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 5.16

$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ എന്നത് ചിത്രത്തിൽ $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിൽ യോജിപ്പിച്ചുവരയ്ക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവ് ആണല്ലോ. ഇതേ ചരിവുള്ള ഒരു തൊടുവരയുള്ള $(c, f(c))$ എന്ന ബിന്ദുവും ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നു. ഇത്തരത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു c എങ്കിലും (a, b) യിൽ ഉണ്ടായിരിക്കുമെന്നാണ് ഇടവില സിദ്ധാന്തം പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണം: 42

$y = x^2 + 2$, $a = -2$, $b = 2$ ഈ ഏകദത്തിന് റോൾ സിദ്ധാന്തം ശരിയാകുന്നുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

$y = x^2 + 2$, $[-2, 2]$ ൽ തുടർച്ചയുള്ളതും $(-2, 2)$ ൽ അവകലനീയവുമായ ഏകദമാണ്. മാത്രമല്ല $f(-2) = 6$, $f(2) = 6$.

$f'(x) = 2x$

അപ്പോൾ $f'(c) = 2c = 0$

$$\Rightarrow c = 0$$

$c = 0$ എന്ന ബിന്ദു $(-2, 2)$ ലെ ഒരു ബിന്ദു ആണല്ലോ. അതിനാൽ ഇത് റോൾ സിദ്ധാന്തം പാലിക്കുന്നുണ്ട്.

ഉദാഹരണം : 43

$f(x) = x^2$ എന്ന ഏകദത്തിന് $[2, 4]$ ൽ ഇടവിലസിദ്ധാന്തം ശരിയാകുന്നുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

$f(x) = x^2$, $[2, 4]$ ൽ തുടർച്ചയുള്ളതും $(-2, 4)$ ൽ അവകലനീയവും ആണ്.

$f'(x) = 2x$, $f'(c) = 2c$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{16-4}{4-2} = 6$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow 2c = 6$$

$$\Rightarrow c = 3 \in (2, 4)$$

അതുകൊണ്ട് ഈ ഏകദം ഇടവിലസിദ്ധാന്തം പാലിക്കുന്നു.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.8

1. $f(x) = x^2 + 2x - 8$, $x \in [-4, 2]$ എന്ന ഏകദത്തിന് റോൾ സിദ്ധാന്തം ശരിയാകുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.
2. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളിൽ റോൾ സിദ്ധാന്തം ശരിയാകുന്നുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഈ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്ന് റോൾ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതത്തെ (converse) കുറിച്ച് എന്തെങ്കിലും പറയാനാകുമോ?

   (i) $f(x) = [x]$, $x \in [5, 9]$ (ii) $f(x) = [x]$, $x \in [-2, 2]$

   (iii) $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [1, 2]$

3. $f : [-5, 5] \to \mathbf{R}$ ഒരു അവകലനീയ ഏകദമാകുകയും, $f'(x)$ ന്റെ വില പൂജ്യ മാകുകയും ചെയ്താൽ $f(-5) \neq f(5)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. $f(x) = x^2 - 4x - 3$ എന്ന ഏകദത്തിന് $[a, b]$ ഇടവേളയിൽ $a = 1$, $b = 4$ ആകു മ്പോൾ ഇടവിലസിദ്ധാന്തം ശരിയാകുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ എന്ന ഏകദത്തിന് $[a, b]$ ഇടവേളയിൽ $a = 1$, $b = 3$ ആകു മ്പോൾ ഇടവിലസിദ്ധാന്തം ശരിയാകും എന്ന് തെളിയിക്കുക. $f'(c) = 0$ ആകു ന്നവിധം $c \in (1, 3)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

6. ചോദ്യം 2 ൽ നൽകിയിരിക്കുന്ന എല്ലാ ഏകദങ്ങൾക്കും ഇടവില സിദ്ധാന്തം ശരിയാകുമോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 44

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളെ x ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുക.

(i) $\sqrt{3x+2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}}$ (ii) $e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x$ (iii) $\log_7 (\log x)$

പരിഹാരം

$$y = \sqrt{3x+2} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+4}} = (3x+2)^{\frac{1}{2}} + (2x^2+4)^{-\frac{1}{2}}$$

ഈ ഏകദം $x > -\dfrac{2}{3}$ ആയ വിലകൾക്കെല്ലാം നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x+2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(3x+2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x^2+4)$$

$$= \frac{1}{2}(3x+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3) - \left(\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4x$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} - \frac{2x}{(2x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$$

ഇത് $x > -\dfrac{2}{3}$ ആയ വിലകൾക്കെല്ലാം നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

(ii) $y = e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x$

ഈ ഏകദം $[-1, 1]$ ലെ വിലകൾക്കെല്ലാം നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sec^2 x} \cdot \frac{d}{dx}(\sec^2 x) + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= e^{\sec^2 x} \cdot \left(2\sec x \frac{d}{dx}(\sec x)\right) + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= 2\sec x\,(\sec x \tan x)\, e^{\sec^2 x} + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= 2\sec^2 x \tan x\, e^{\sec^2 x} + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

(iii) $y = \log_7(\log x) = \dfrac{\log(\log x)}{\log 7}$ (ആധാരമാറ്റനിയമം). $x > 1$ ആയ വിലകൾക്കെല്ലാം ഇത് നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log 7}\frac{d}{dx}(\log(\log x))$$

$$= \frac{1}{\log 7}\frac{1}{\log x}\cdot\frac{d}{dx}(\log x)$$

$$= \frac{1}{x \log 7 \log x}$$

ഉദാഹരണം : 45

(i) $\cos^{-1}(\sin x)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ (iii) $\sin^{-1}\left(\dfrac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$

പരിഹാരം

(i) $f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$

എല്ലാ രേഖീയവിലകൾക്കും f നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

$f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$

$$= \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - x$$

$f'(x) = -1.$

(ii) $f(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$

$\cos x \neq -1$ അല്ലാത്ത എല്ലാ x വിലയ്ക്കും ഈ ഏകദം നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

$$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{x}{2}$$

അതായത് $f'(x) = \dfrac{1}{2}$.

(iii) $f(x) = \sin^{-1}\left(\dfrac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$ ഇതിന്റെ മണ്ഡലം കാണാൻ $-1 \leq \dfrac{2^{x+1}}{1+4^x} \leq 1$ ആയ x വിലകൾ കാണണമല്ലോ.

ഇതിൽ $\dfrac{2^{x-1}}{1+4^x}$ എപ്പോഴും ഒരു അധിസംഖ്യ ആയതുകൊണ്ട്

$\dfrac{2^{x-1}}{1+4^x} \leq 1$ ആയ x കൾ കണ്ടെത്തിയാൽ മതി.

അതായത് $2^{x+1} \leq 1 + 4^x$.

$2 \leq \dfrac{1}{2^x} + 2^x$ (2^x കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ)

ഇത് എല്ലാ x കൾക്കും ശരിയാണല്ലോ. അതിനാൽ f എന്നത് എല്ലാ രേഖീയ സംഖ്യകൾക്കും നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്.

$$f(x) = \sin^{-1}\left[\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2^x \cdot 2}{1+\left(2^x\right)^2}\right]$$

$2^x = \tan\theta$ എന്ന് നൽകിയാൽ

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right]$$

$$= \sin^{-1}[\sin 2\theta]$$

$$= 2\theta = 2\tan^{-1}(2^x)$$

അപ്പോൾ $$f'(x) = 2\cdot\frac{1}{1+(2^x)^2}\cdot\frac{d}{dx}(2^x)$$

$$= \frac{2}{1+4^x}\cdot(2^x)\log 2$$

$$= \frac{2^{x+1}\log 2}{1+4^x}$$

ഉദാഹരണം: 46

$f(x) = (\sin x)^{\sin x}$, $0 < x < \pi$, $f'(x)$ കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$y = (\sin x)^{\sin x}$ അധിസംഖ്യകളായ എല്ലാ രേഖീയസംഖ്യകൾക്കും നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ.

$$y = (\sin x)^{\sin x}$$

$$\log y = \sin x \log(\sin x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x \cdot \frac{1}{\sin x}\cos x + \log \sin x \cdot \cos x$$

$$= \cos x + \log(\sin x)\cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\,[\cos x + \log(\sin x)\cos x]$$

$$= (\sin x)^{\sin x}[\cos x + \log(\sin x)\cos x]$$

ഉദാഹരണം : 47

a ഒരു സ്ഥിരഅധിസംഖ്യയും $y = a^{t+\frac{1}{t}}$, $x = \left(t+\frac{1}{t}\right)^a$ യും ആയാൽ $\frac{dy}{dx}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$t \neq 0$ ആയ എല്ലാ വിലകൾക്കും x, y നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a^{t+\frac{1}{t}}\right) = a^{t+\frac{1}{t}} \log a \frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$= a^{t-\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a$$

അതുപോലെ,

$$\frac{dx}{dt} = a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1} \cdot \frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$= a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1} \cdot \left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

$t \neq \pm 1$ ആണെങ്കിൽമാത്രം $\frac{dx}{dt} \neq 0$ ആകും. അതുകൊണ്ട് $t \neq \pm 1$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a^{t-\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a}{a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1} \cdot \left(1-\frac{1}{t^2}\right)}$$

$$= \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\log a}{a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}}$$

ഉദാഹരണം : 48

$\sin^2 x$ എന്ന ഏകദത്തെ $e^{\cos x}$ ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുക.

പരിഹാരം

$u(x) = \sin^2 x$ എന്നും $v(x) = e^{\cos x}$ എന്നും കരുതുക.

$\frac{du}{dv}$ കണ്ടുപിടിക്കണം.

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 2\sin x\cos x,\ \frac{dv}{dx} = e^{\cos x}(-\sin x) = (-\sin x)e^{\cos x}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{2\sin x\cos x}{-\sin x\ e^{\cos x}} = -\frac{2\cos x}{e^{\cos x}}$$

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1 മുതൽ 11 വരെയുള്ള ഏകദങ്ങളെ x ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുക.

1. $(3x^2 - 9x + 5)^9$
2. $\sin^3 x + \cos^6 x$
3. $(5x)^{3\cos 2x}$
4. $\sin^{-1}(x\sqrt{x}),\ 0 \le x \le 1$
5. $\dfrac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}},\ -2 < x < 2$
6. $\cot^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right],\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$
7. $(\log x)^{\log x},\ x > 1$
8. $\cos(a\cos x + b\sin x)$, a, b എന്നിവ സ്ഥിരസംഖ്യയാണ്.
9. $(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)},\ \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$
10. $x^x + x^a + a^x + a^a$, a ഒരു അധിസംഖ്യയാണ്, $x > 0$.
11. $x^{x^2-3} + (x-3)^{x^2},\ x > 3$
12. $y = 12(1-\cos t),\ x = 10(t - \sin t),\ -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ ആണെങ്കിൽ $\dfrac{dy}{dx}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.
13. $y = \sin^{-1}x + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2},\ 0 < x < 1$ എങ്കിൽ $\dfrac{dy}{dx}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.
14. $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0,\ -1 < x < 1$, എങ്കിൽ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
15. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$, ആയാൽ അധിസംഖ്യകളായ ചില c കൾക്ക്

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$ എന്നത്

a , b എന്നിവ ഉൾപ്പെടാത്ത ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ ആയിരിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

16. $\cos y = x \cos (a + y)$, $\cos a \neq \pm 1$, എങ്കിൽ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

17. $x = a (\cos t + t \sin t)$, $y = a (\sin t - t \cos t)$, എങ്കിൽ $\frac{d^2y}{dx^2}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

18. $f(x) = | x |^3$ എങ്കിൽ $f''(x)$, x ന്റെ എല്ലാ രേഖീയവിലകൾക്കും നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടെന്ന് കണ്ടെത്തുക. $f''(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

19. ഗണിത ആഗമന തത്വം (Principle of Mathematical Induction) ഉപയോഗിച്ച് $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക. $n \in Z$.

20. $\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ എന്ന വസ്തുതയും അവകലനവും ഉപയോഗിച്ച് $\cos (A + B)$ കണ്ടെത്തുക.

21. രണ്ടുബിന്ദുക്കളിൽ മാത്രം അവകലനീയമല്ലാത്തതും എന്നാൽ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും തുടർച്ചയുള്ളതുമായ ഒരു ഏകദമുണ്ടോ? ഉത്തരം സാധൂകരിക്കുക?

22. $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$ ആയാൽ, $\frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

23. $y = e^{a \cos^{-1} x}, -1 \leq x \leq 1$, എങ്കിൽ $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2 y = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

സംഗ്രഹം

- ഒരു രേഖീയമൂല്യഏകദം അതിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ തുടർച്ച യുള്ളതാവണമെങ്കിൽ ആ ബിന്ദുവിലെ ഏകദത്തിന്റെ സീമ അതേ ബിന്ദു വിലെ ഏകദത്തിന്റെ വിലയ്ക്കു തുല്യമായിരിക്കണം. മണ്ഡലത്തിൽ മുഴു വനും തുടർച്ചയുള്ളതാണെങ്കിൽ ആ ഏകദത്തെ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദ മെന്നു പറയുന്നു.
- തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങളുടെ തുക, വ്യത്യാസം, ഗുണനഫലം, ഹരണ ഫലം എന്നിവ തുടർച്ചയുള്ളതായിരിക്കും. അതായത്, f, g എന്നിവ തുടർച്ച യുള്ള ഏകദങ്ങളാണെങ്കിൽ,
  $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ തുടർച്ചയുള്ളതാണ്;
  $(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$ തുടർച്ചയുള്ളതാണ്;
  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$ ആയിരിക്കും) തുടർച്ചയുള്ളതാണ്.
- എല്ലാ അവകലനീയ ഏകദങ്ങളും തുടർച്ചയുള്ളതാണ്, എന്നാൽ ഇതിന്റെ വിപരീതം ശരിയല്ല.
- സമ്മിശ്ര ഏകദങ്ങളുടെ അവകലനത്തിന് ശൃംഖലാ നിയമം ഉപയോഗി ക്കുന്നു. $f = v \text{ o } u$, $t = u(x)$ ആകുകയും $\frac{dt}{dx}, \frac{dv}{dt}$ നിലനിൽക്കുകയും ചെയ്താൽ

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

- (ഉചിതമായ മണ്ഡലങ്ങളിലെ) ചില പ്രധാന അവകലജങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x \qquad\qquad \frac{d}{dx}\left(\log x\right) = \frac{1}{x}$$

- $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ എന്ന തരത്തിലുള്ള ഏകദങ്ങളെ അവകലനം ചെയ്യുവാൻ ലോഗരിതമിക അവകലനം ഒരു ശക്തമായ സങ്കേതമാണ്. ഇതിന് അർഥമുണ്ടാവണമെങ്കിൽ $f(x)$, $u(x)$ അധിസംഖ്യയായിരിക്കണം.
- **റോൾ സിദ്ധാന്തം:** $[a, b]$ യിൽ $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ തുടർച്ചയുള്ളതും (a, b) യിൽ f അവകലനീയമായിരിക്കുകയും, $f(a) = f(b)$ പാലിക്കുകയും ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ $f'(c) = 0$ ആകത്തക്കവിധം (a, b) യിൽ c എന്ന ഒരു ബിന്ദുവെങ്കിലും ഉണ്ടായിരിക്കും.
- **ഇടവില സിദ്ധാന്തം:** $[a, b]$ യിൽ $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ തുടർച്ചയുള്ളതും (a, b) യിൽ അവകലനീയവുമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ആകത്തക്കവിധം (a, b) യിൽ c എന്ന ഒരു ബിന്ദുവെങ്കിലും ഉണ്ടായിരിക്കും.

Z7W2T6

അധ്യായം 6

അവകലജങ്ങളുടെ പ്രയോഗം
(APPLICATION OF DERIVATIVES)

❖ *കലനം ഒരു താക്കോൽ ആയി ഉപയോഗിച്ച് പ്രകൃതി പ്രതിഭാസങ്ങളെ വിശദീകരിക്കാൻ ഗണിതം സമർത്ഥമായി ഉപയോഗിക്കാം – വൈറ്റ് ഹെഡ്* ❖

6.1 ആമുഖം

അഞ്ചാം അധ്യായത്തിൽ വിവിധ തരത്തിലുള്ള ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജം (derivative) കാണാൻ പഠിച്ചു. ഈ അധ്യായത്തിൽ അവകലജം എന്ന ആശയം പ്രയോഗിക്കാവുന്ന വിവിധ സന്ദർഭങ്ങളെക്കുറിച്ച് ചർച്ചചെയ്യാം. ഉദാഹരണമായി (i) അളവുകളുടെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കാണുന്നതിന് (ii) ഒരു വക്രത്തിന്റെ ഒരു ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെയും ലംബവരയുടെയും സമവാക്യം കാണുന്നതിന് (iii) ഒരു ഗ്രാഫിലെ വ്യതിയാന ബിന്ദുക്കൾ കാണുന്നതിന് തുടങ്ങി ചില അളവുകളുടെ ഏകദേശ വിലകൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനും അവകലനം എങ്ങനെ പ്രയോഗിക്കാം എന്ന് ഇവിടെ ചർച്ചചെയ്യുന്നു.

6.2 മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് (Rate of Change)

നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ നിന്നും താഴേക്കു വീഴുന്ന ഒരു വസ്തു t സെക്കന്റുകൾ കൊണ്ട് സഞ്ചരിച്ച ദൂരം s മീറ്ററാണെങ്കിൽ s, t എന്നിവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം $s = 4.9t^2$ എന്നാണല്ലോ. ഈ വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗം (velocity), അതായത് സമയം മാറുന്നതനുസരിച്ച് സഞ്ചരിച്ച ദൂരത്തിന് വരുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെയാണ് $\frac{ds}{dt}$ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. പ്രവേഗത്തെ v എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചാൽ

$$v = \frac{ds}{dt} = 9.8t$$

അതായത്, ഒന്നാമത്തെ സെക്കന്റിൽ ഈ വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗം 9.8 മീ./സെക്കന്റ്

ഇതിനെ $\left.\frac{ds}{dt}\right]_{t=1} = 9.8$ മീ/സെക്കന്റ് എന്നെഴുതാം.

ഇതുപോലെ രണ്ടാമത്തെ സെക്കന്റിൽ പ്രവേഗം

$\left.\frac{ds}{dt}\right]_{t=2} = 19.6$ മീ/സെക്കന്റ് എന്നുമെഴുതാം.

സമയത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തിനനുസരിച്ച് പ്രവേഗത്തിൽ വരുന്ന മാറ്റമാണ് ത്വരണം (acceleration). ഇതിനെ a എന്നു സൂചിപ്പിച്ചാൽ

$$a = \frac{dv}{dt} = 9.8 \text{ മീ/(സെക്കന്റ്)}^2$$

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ

x എന്ന അളവ് മാറുമ്പോൾ y എന്ന അളവിനു വരുന്ന മാറ്റം $y = f(x)$ എന്ന ബന്ധമനുസരിച്ചാണെങ്കിൽ ഈ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണ് $\frac{dy}{dx}$ (അഥവാ $f'(x)$) എന്നതുകൊണ്ട് അർഥമാക്കുന്നത്.

മുകളിൽ പരിഗണിച്ച ഉദാഹരണത്തിൽ, താഴേക്കു വീഴുന്ന വസ്തുവിന്റെ പ്രവേഗം മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതായി കാണാം.

$\frac{ds}{dt} = 9.8t$ എന്നത് ഓരോ സമയത്തുമുള്ള പ്രവേഗം എന്താണെന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $t = t_0$ ആകുമ്പോഴുള്ള പ്രവേഗത്തെ $\left.\frac{ds}{dt}\right]_{t=t_0}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ, $x = x_0$ ആകുന്ന സന്ദർഭത്തിൽ y എന്ന അളവിനു വരുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ എന്നെഴുതാം.

ഏതാനും ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിശോധിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 1

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആരം മാറുന്നതനുസരിച്ച് പരപ്പളവിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കണക്കാക്കുക. ആരം 5 യൂണിറ്റാകുമ്പോൾ ഈ നിരക്ക് എത്രയാണ്?

പരിഹാരം:

ആരം r ആയ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$A = \pi r^2$$

ആരം മാറുന്നതനുസരിച്ച് പരപ്പളവിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക്

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

ആരം 5 ആകുമ്പോൾ

$$\left.\frac{dA}{dr}\right]_{r=5} = 10\pi \text{ ച.സെ.മീ/സെ.മീ.}$$

ഉദാഹരണം : 2

ഒരു സമചതുരക്കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം സെക്കന്റിൽ 9 ഘന സെന്റിമീറ്റർ എന്ന നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുന്നു. ആരം 10 സെന്റിമീറ്ററാകുമ്പോൾ ഉപരിതലപരപ്പളവിലുണ്ടാകുന്ന വർദ്ധനവിന്റെ നിരക്കെത്ര?

പരിഹാരം:

സമചതുരക്കട്ടയുടെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x എന്നും വ്യാപ്തം V എന്നും ഉപരിതലപരപ്പളവ് S എന്നുമെടുത്താൽ

$$V = x^3,\ S = 6x^2$$

$\frac{dV}{dt} = 9$ ഘന സെ.മീ./സെക്കന്റ് എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് $\frac{dS}{dt}$ ആണല്ലോ?

$$V = x^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

ഇതിൽ നിന്നും $$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{3x^2} = \frac{9}{3x^2}$$

$$S = 6x^2$$

$$\frac{dS}{dt} = 12x.\frac{dx}{dt}$$

$$= 12x.\frac{9}{3x^2} = \frac{36}{x}$$

വശത്തിന്റെ നീളം 10 സെന്റിമീറ്റർ ആകുമ്പോൾ

$$\left.\frac{dS}{dt}\right]_{x=10} = \frac{36}{10}$$

$= 3.6$ ച.സെ.മീ/സെക്കന്റ്

ഉദാഹരണം : 3

നിശ്ചലമായ തടാകത്തിൽ ഒരു കല്ല് വീണപ്പോൾ അതിലെ ഓളങ്ങൾ വൃത്താകൃതിയിൽ സെക്കന്റിന് 4 സെ.മീ. എന്ന നിരക്കിൽ വർദ്ധിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നു. ഒരു സന്ദർഭത്തിൽ ആരം 10 സെ.മീ. ആയ വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഓളത്തിനുണ്ടാകുന്ന പരപ്പളവിന്റെ വർദ്ധനവിന്റെ നിരക്ക് കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം:

വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഓളത്തിന്റെ ആരം 'r', പരപ്പളവ് A എന്നിവ ആയാൽ : $A=\pi r^2$.

ആയതിനാൽ 't' എന്ന സമയത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി പരപ്പളവ് A യിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക്

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \frac{d}{dr}(\pi r^2)\cdot\frac{dr}{dt} = 2\pi\, r\,\frac{dr}{dt}$$

$\frac{dr}{dt} = 4$ സെ.മീ. /സെക്കന്റ് എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

$r = 10$ സെ.മീ. ആയാൽ

$\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(4) = 80\pi$ ച.സെമീ/സെക്കന്റ് ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട് ആരം 10 സെ.മീ. ആയാൽ പരപ്പളവിലുണ്ടാകുന്ന വർദ്ധനവിന്റെ നിരക്ക് 80π ച.സെ.മീ./സെക്കന്റ് ആയിരിക്കും.

> **കുറിപ്പ്** x വർദ്ധിക്കുന്തോറും y വർദ്ധിക്കുകയാണെങ്കിൽ $\frac{dy}{dx}$ അധിസംഖ്യയും x വർദ്ധിക്കുന്തോറും y കുറയുകയാണെങ്കിൽ $\frac{dy}{dx}$ ന്യൂനസംഖ്യയും ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 4

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം x മിനിട്ടിൽ 3 സെ.മീ. നിരക്കിൽ കുറയുകയും വീതി y, മിനിട്ടിൽ 2 സെ.മീ. നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. $x=10$ സെ.മീ. $y=6$ സെ.മീ., ആയാൽ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ മാറ്റങ്ങളുടെ നിരക്കുകൾ കണക്കാക്കുക.

(a) ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്

(b) ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

പരിഹാരം:

സമയം t അടിസ്ഥാനമാക്കി നീളം x കുറയുകയും വീതി y വർദ്ധിക്കുകയും ചെയ്യുന്നതിനാൽ,

$$\frac{dx}{dt} = -3 \text{ സെ.മീ./മിനിട്ട്}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 \text{ സെ.മീ./മിനിട്ട്}$$ എന്നിവ ആയിരിക്കും.

(a) ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $P = 2(x+y)$

അതിനാൽ $\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) = 2(-3+2) = -2$ സെ.മീ/ മിനിട്ട് ആണ്.

(b) ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $A = x.y$

അതുകൊണ്ട് $\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt}.y + x.\frac{dy}{dt}$

$$= -3(6) + 10(2)$$

$= 2$ ച.സെ.മീ./മിനിട്ട് ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 5

x യൂണിറ്റ് ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ നിർമിക്കുവാൻ വേണ്ട ആകെ ചെലവ് (Total Cost) C(x) രൂപയിൽ,

$$C(x) = 0.005x^3 - 0.02x^2 + 30x + 5000$$

ആണെങ്കിൽ 3 യൂണിറ്റ് ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന മാർജിനൽ ചെലവ് (Marginal Cost) കണക്കാക്കുക.

(മാർജിനൽ ചെലവ് എന്നാൽ എത്ര ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ നിർമിച്ചാലും ആകെ ചെലവിന്റെ ക്ഷണനേരത്തിലുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണ്)

പരിഹാരം:

ആകെ ചെലവിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണല്ലോ മാർജിനൽ ചെലവ്.

മാർജിനൽ ചെലവ് $(MC) = \frac{dC}{dx}$

$$= 0.005(3x^2) - 0.02(2x) + 30$$

$x = 3$ ആയാൽ $MC = 0.015(3)^2 - 0.04(3) + 30$

$$= 0.135 - 0.12 + 30$$

$$= 30.015$$

ആയതിനാൽ മാർജിനൽ ചെലവ് = 30.02 രൂപ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 6

'x' യൂണിറ്റ് ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ വിൽക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ആകെ വരുമാനം രൂപയിൽ (Total Revenue) $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ എങ്കിൽ x 5 ആകുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന മാർജിനൽ വരുമാനം (Marginal Revenue) കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

ആകെ വരുമാനത്തിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണല്ലോ മാർജിനൽ വരുമാനം.

ആയതിനാൽ മാർജിനൽ വരുമാനം $MR = \frac{dR}{dx} = 6x + 36$

$x = 5$ ആയാൽ $MR = 6(5) + 36 = 66$

അതുകൊണ്ട് മാർജിനൽ വരുമാനം ₹ 66 ആയിരിക്കും.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 6.1

1. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക്, ആരം r അടിസ്ഥാനമാക്കി കണക്കാക്കുക.
   (a) ആരം $r = 3$ സെ.മീ.
   (b) ആരം $r = 4$ സെ.മീ.

2. ഒരു സമചതുര പെട്ടിയുടെ ഉള്ളളവ് സെക്കന്റിൽ 8 ഘന.സെ.മീ. നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുന്നു. ഒരു വക്കിന്റെ നീളം 12 സെ.മീ. ആകുമ്പോൾ അതിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് വർദ്ധിക്കുന്ന നിരക്ക് കണക്കാക്കുക.

3. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആരം സെക്കന്റിൽ 3 സെ.മീ. നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അതിന്റെ ആരം 10 സെ.മീ. ആകുമ്പോൾ പരപ്പളവിലുള്ള വർദ്ധനവിന്റെ നിരക്ക് കണക്കാക്കുക.

4. ഒരു സമചതുരപ്പെട്ടിയുടെ വക്കിന്റെ നീളം സെക്കന്റിൽ 3 സെ.മീ. നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുന്നു. എന്നാൽ അതിന്റെ വക്കിന്റെ നീളം 10 സെ.മീ. ആകുമ്പോൾ പെട്ടിയുടെ ഉള്ളളവിലുള്ള വർദ്ധനവിന്റെ നിരക്ക് കണക്കാക്കുക.

5. നിശ്ചലമായ തടാകത്തിൽ ഒരു കല്ല് പതിച്ചപ്പോൾ അതിലെ ഓളങ്ങൾ വൃത്താകൃതിയിൽ സെക്കന്റിൽ 5 സെ.മീ. നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുന്നു. വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു ഓളത്തിന്റെ ആരം 8 സെ.മീ. ആകുമ്പോൾ ഓളത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ വർദ്ധനവിന്റെ നിരക്ക് കണക്കാക്കുക.

6. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആരം സെക്കന്റിൽ 0.7 സെ.മീ. നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അതിന്റെ വൃത്തപരിധിയിലുള്ള വർദ്ധനവിന്റെ നിരക്ക് എത്ര?

7. ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം x മിനിട്ടിൽ 5 സെ.മീ. നിരക്കിൽ കുറയുകയും, വീതി y മിനിട്ടിൽ 4 സെ.മീ. നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. $x=8$ സെ.മീ., $y=6$ സെ.മീ എന്നിവ ആകുമ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, പരപ്പളവ് എന്നിവയിലുള്ള മാറ്റങ്ങളുടെ നിരക്കുകൾ കണക്കാക്കുക.

8. വികസിക്കുന്തോറും ഗോളാകൃതിയിൽ തന്നെ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു ബലൂണിലേക്ക് സെക്കന്റിൽ 900 ഘന സെ.മീ. നിരക്കിൽ വായു നിറയ്ക്കുന്നു. എന്നാൽ ബലൂണിന്റെ ആരത്തിലുള്ള വർദ്ധനവിന്റെ നിരക്ക് ആരം 15 സെ.മീ. ആകുമ്പോൾ കണക്കാക്കുക.

9. എല്ലായ്പ്പോഴും ഗോളാകൃതിയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു ബലൂണിന്റെ ആരത്തിന് മാറ്റം വന്നുകൊണ്ടിരിക്കുന്നു. ആരം മാറുന്നതിനുസരിച്ച് ബലൂണിന്റെ ഉള്ളളവ് വർദ്ധിക്കുന്നതിന്റെ നിരക്ക് ആരം 10 സെ.മീ. ആകുമ്പോൾ കണക്കാക്കുക.

10. 5 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ഏണി ഭിത്തിയിൽ ചാരി വച്ചിരിക്കുന്നു. ഏണിയുടെ ചുവടുഭാഗം തറനിരപ്പിൽ ചുവരിന്റെ എതിർദിശയിൽ സെക്കന്റിൽ 2 സെ.മീ. എന്ന നിരക്കിൽ വലിക്കുന്നു. എന്നാൽ തറ നിരപ്പിൽ നിന്നും ഏണിയുടെ ഉയരത്തിൽ വരുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക്, ഏണിയുടെ ചുവടുഭാഗം ഭിത്തിയിൽ നിന്നും 4 മീറ്റർ അകലെയാകുമ്പോൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

11. ഒരു വസ്തു $6y = x^3 + 2$ എന്ന വക്രത്തിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്നു. x സൂചകസംഖ്യ മാറുന്നതനുസരിച്ച് y സൂചകസംഖ്യ 8 മടങ്ങ് വേഗത്തിൽ മാറുന്ന തരത്തിലുള്ള വക്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ കണക്കാക്കുക.

12. ഒരു കുമിള (bubble) യുടെ ആരം സെക്കന്റിൽ $\frac{1}{2}$ സെ.മീ. എന്ന നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുന്നു. എന്നാൽ അതിന്റെ ഉള്ളളവിലുള്ള വർദ്ധനവിന്റെ നിരക്ക്, ആരം 1 സെ.മീ. ആകുമ്പോൾ കണക്കാക്കുക.

13. എല്ലായ്പ്പോഴും ഗോളാകൃതിയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു ബലൂണിന്റെ വ്യാസത്തിന് മാറ്റം വന്നുകൊണ്ടിരിക്കുന്നു. അതിന്റെ വ്യാസം $\frac{3}{2}(2x-1)$ ആയാൽ ബലൂണിന്റെ ഉള്ളളവിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് x അടിസ്ഥാനമാക്കി കണക്കാക്കുക.

14. സെക്കന്റിൽ 12 ഘന.സെ.മീ. എന്ന നിരക്കിൽ ഒരു പെപ്പിൽ നിന്നും വീഴുന്ന മണൽ, തറ നിരപ്പിൽ വൃത്തസ്തൂപികാകൃതിയിലാണ് രൂപം കൊള്ളുന്നത്. ഈ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉയരം എപ്പോഴും പാദ ആരത്തിന്റെ $\frac{1}{6}$ ആയാൽ ഈ മണൽ സ്തൂപികയുടെ ഉയരത്തിൽ വരുന്ന വർദ്ധനവിന്റെ നിരക്ക് സ്തൂപികയുടെ ഉയരം 4 സെ.മീ. ആകുമ്പോൾ കണക്കാക്കുക.

15. x യൂണിറ്റ് ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ നിർമിക്കുവാൻ വേണ്ട ആകെ ചെലവ് $C(x)$ ആകുന്നു.

$$C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$$

ആയാൽ 17 യൂണിറ്റ് ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ നിർമിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന മാർജിനൽ ചെലവ് കണക്കാക്കുക.

16. x യൂണിറ്റ് ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ വിൽക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ആകെ വരുമാനം $R(x)$ (രൂപയിൽ) ആകുന്നു. $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ ആയാൽ 7 യൂണിറ്റ് ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ വിൽക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന മാർജിനൽ വരുമാനം കണക്കാക്കുക.

17, 18 എന്നീ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ബ്രാക്കറ്റിൽ നിന്നും ശരിയുത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക

17. ആരം r അടിസ്ഥാനമാക്കി ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് ആരം r 6 സെ.മീ. ആകുമ്പോൾ

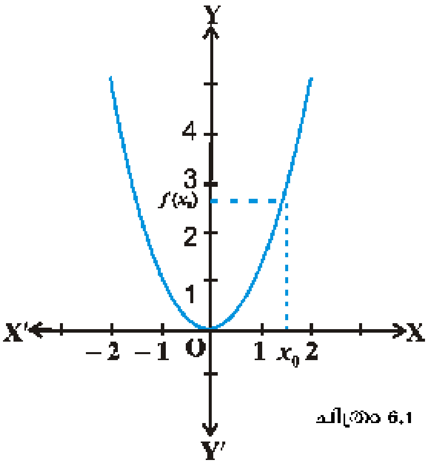
a) 10π b) 12π c) 8π d) 11π

18. x യൂണിറ്റ് ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ വിൽക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ആകെ വരുമാനം $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ ആയാൽ $x = 15$ ആയാലുള്ള മാർജിനൽ വരുമാനം .... ആകുന്നു.

a) 116 b) 96 c) 90 d) 126

6.3 ആരോഹണ ഏകദങ്ങളും അവരോഹണ ഏകദങ്ങളും (Increasing and Decreasing Functions)

$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbf{R}$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക



ചിത്രം 6.1

$f(x) = x^2$ എന്ന ഏകദം ജിയോ ജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക. 'a' എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിക്കുക. (Min = -3, max = 3) (a, 0) എന്ന് input നൽകി x അക്ഷത്തിൽ A എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇതേപോലെ $(a, f(a))$ എന്ന് input നൽകി ഗ്രാഫിൽ ഒരു ബിന്ദു B യും $(0, f(a))$ എന്ന് നൽകി y അക്ഷത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു C യും അടയാളപ്പെടുത്തുക. AB, BC ഇവ യോജിപ്പിക്കാം. സ്ലൈഡറിന്റെ വില -3 ൽ നിന്ന് കൂടുന്നതനുസരിച്ച് A എന്ന ബിന്ദു x അക്ഷത്തിലൂടെ ഇടത്തു നിന്നും വലത്തേക്ക് നീങ്ങുന്നതു കാണാം. ഇതനുസരിച്ച് B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ എങ്ങിനെയാണ് നീങ്ങുന്നതെന്ന് നോക്കൂ.

ആധാരബിന്ദുവിന്റെ വലതു ഭാഗത്തുള്ള ഗ്രാഫിന്റെ ഭാഗം പരിഗണിക്കുക. ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും വലത്തേക്ക് ഗ്രാഫിലൂടെ സഞ്ചരിച്ചാൽ ഗ്രാഫ് ഉയരുന്നതായി കാണാം. അതിനാൽ $x > 0$ ആകുമ്പോൾ ഈ ഏകദം ആരോഹണത്തിലാണ്. ഇടതുഭാഗത്ത് നിന്നും ആധാരബിന്ദുവിലേക്ക് ഗ്രാഫിലൂടെ സഞ്ചരിച്ചാൽ ഗ്രാഫ് താഴുന്നതായി കാണാം. അതിനാൽ $x < 0$ ആകുമ്പോൾ ഈ ഏകദം അവരോഹണത്തിലാണ്. ഒരു ഇടവേളയിൽ ഒരു ഏകദം ആരോഹണത്തിലാണോ അവരോഹണത്തിലാണോ എന്നതിനെ നിർവചിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

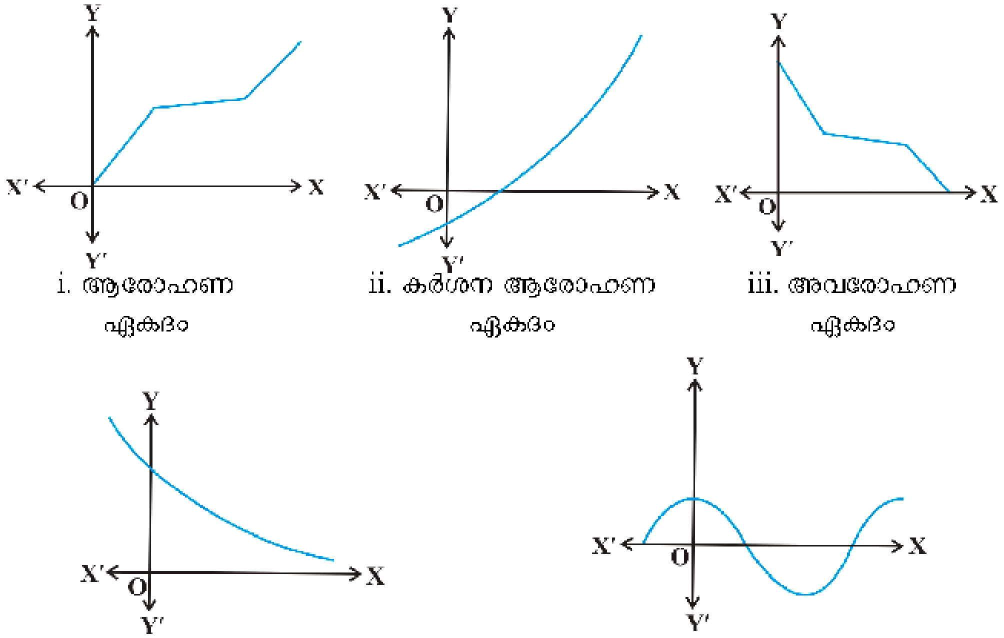
നിർവ്വചനം 1 : f എന്ന രേഖീയ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തിലുള്ള ഒരു ഇടവേളയാണ് I എന്നിരിക്കട്ടെ.

i) $x_1 < x_2$ ആകുമ്പോഴൊക്കെ $f(x_1) \le f(x_2)$ ആകുന്നു എങ്കിൽ I എന്ന ഇടവേളയിൽ f ആരോഹണത്തിലാണ്.

ii) $x_1 < x_2$ ആകുമ്പോഴൊക്കെ $f(x_1) < f(x_2)$ ആകുന്നു എങ്കിൽ I എന്ന ഇടവേളയിൽ f കർശന ആരോഹണത്തിലാണ്.

iii) $x_1 < x_2$ ആകുമ്പോഴൊക്കെ $f(x_1) \ge f(x_2)$ ആകുന്നു എങ്കിൽ I എന്ന ഇടവേളയിൽ f അവരോഹണത്തിലാണ്.

iv) $x_1 < x_2$ ആകുമ്പോഴൊക്കെ $f(x_1) > f(x_2)$ ആകുന്നു എങ്കിൽ I എന്ന ഇടവേളയിൽ f കർശന അവരോഹണത്തിലാണ്. ഇത്തരം ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ ചിത്രം 6.2 ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.



i. ആരോഹണ ഏകദം

ii. കർശന ആരോഹണ ഏകദം

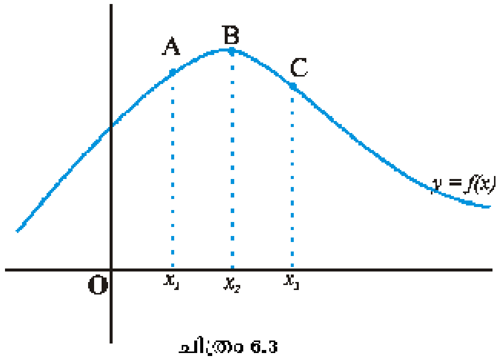
iii. അവരോഹണ ഏകദം

iv. കർശന അവരോഹണ ഏകദം

v. ആരോഹണമോ അവരോഹണമോ അല്ലാത്ത ഏകദം

ചിത്രം 6.2

ഒരു ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് നോക്കൂ.



ചിത്രം 6.3

ഗ്രാഫിലൂടെ ഇടത്തുനിന്നും വലത്തേക്ക് പോയാൽ A യിലൂടെ കടന്നുപോകുമ്പോൾ ആരോഹണത്തിലായിരിക്കും എന്ന് കാണാമല്ലോ. അതിനാൽ ഈ ഏകദം x_1 എന്ന ബിന്ദുവിൽ ആരോഹണത്തിലാണെന്ന് പറയാം. അതുപോലെ x_3 യിൽ അവരോഹണത്തിലുമാണ്. x_2 ൽ ഈ ഏകദത്തെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം? ഒരു ഏകദം ഒരു ബിന്ദുവിൽ ആരോഹണത്തിലാണോ അവരോഹണത്തിലാണോ എന്ന് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ നിർവചിക്കാം.

നിർവചനം 2 : f എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് x_0 എന്നിരിക്കട്ടെ. x_0 ഉൾപ്പെടുന്ന ഏതെങ്കിലുമൊരു തുറന്ന ഇടവേള I യിൽ f അവരോഹണത്തിലാണെങ്കിൽ ഈ ഏകദം x_0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ ആരോഹണത്തിലാണെന്ന് പറയാം.

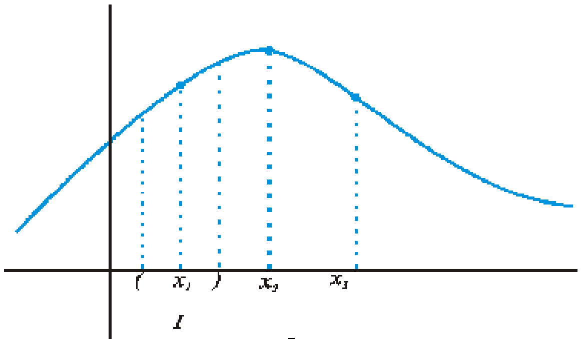
മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ

$$I = (x_0 - h, x_0 + h), h > 0$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\ x_1, x_2 \in I$$

ആകത്തക്ക വിധത്തിൽ ഒരു ഇടവേള I ഉണ്ടെങ്കിൽ f എന്ന ഏകദം x_0 ൽ ആരോഹണത്തിലാണെന്ന് പറയാം.

ഇതുപോലെ ഒരു ബിന്ദുവിലെ കർശന ആരോഹണം, അവരോഹണം, കർശന അവരോഹണം എന്നിവയും നിർവചിക്കാം.

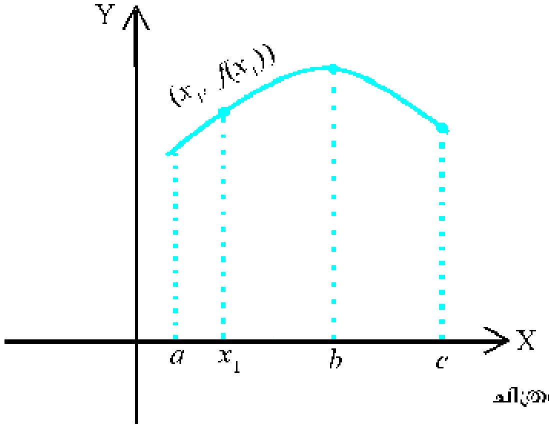


ചിത്രം 6.4

I എന്ന തുറന്ന ഇടവേളയിൽ ഏകദം ആരോഹണത്തിലായതിനാൽ x_1 എന്ന ബിന്ദുവിൽ ആരോഹണത്തിലാണ്. (ഈ ഇടവേളയിലെ ഒരോ ബിന്ദുവിലും ഏകദം ആരോഹണത്തിലാണല്ലോ. ഇതുപോലെ x_3 യിൽ ഏകദം അവരോഹണത്തിലാണെന്നും കാണാം. x_2 ഉൾപ്പെടുന്ന ഏത് തുറന്ന ഇടവേളയിലും x_2 വിന്റെ ഇടതുവശത്ത് ഏകദം ആരോഹണത്തിലും വലതുവശത്ത് അവരോഹണത്തിലുമാണ്. അതിനാൽ x_2 എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഏകദം ആരോഹണത്തിലോ അവരോഹണത്തിലോ അല്ല.

ഒരു ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം ഉപയോഗിച്ച് ഏകദം ആരോഹണത്തിലോ അവരോഹണത്തിലോ എന്ന് കണ്ടെത്തുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് പരിശോധിക്കാം.

ഒരു ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് നോക്കൂ.



ചിത്രം 6.5

(a, b) എന്ന ഇടവേളയിൽ ഏകദം ആരോഹണത്തിലാണല്ലോ. ഈ ഇടവേളയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് x_1. $(x_1, f(x_1))$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരയുടെ ചരിവ് ഒരു അധിസംഖ്യയാണല്ലോ. ഈ ഇടവേളയിൽ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും വരക്കുന്ന തൊടുവരയുടെ ചരിവ് അധിസംഖ്യയായിരിക്കുമെന്ന് കാണാം.

അതുപോലെ (b, c) എന്ന ഇടവേളയിൽ ഏകദം അവരോഹണത്തിലാണ്. ഈ ഇടവേളയിൽ ഏത് ബിന്ദുവിലും വക്രത്തിനു വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരയുടെ ചരിവ് ന്യൂനസംഖ്യയായിരിക്കും.

ഒരു വക്രത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരയുടെ ചരിവ് ഏകദത്തിന് ആ ബിന്ദുവിലുള്ള അവകലജത്തിന് തുല്യമാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരു ഇടവേളയിൽ ഏകദം ആരോഹണത്തിൽ ആണെങ്കിൽ ആ ഇടവേളയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം അധിസംഖ്യയായിരിക്കും. അവരോഹണത്തിലാണെങ്കിൽ ന്യൂനസംഖ്യയും. ഇതു തിരിച്ചും ശരിയാകുമോ എന്ന് പരിശോധിക്കാം.

അതായത്, ഒരു ഇടവേളയിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും ഒരു ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം അധിസംഖ്യ ആയാൽ ആ ഇടവേളയിൽ ഏകദം ആരോഹണത്തിലായിരിക്കുമോ എന്നും ന്യൂനസംഖ്യ ആയാൽ അവരോഹണത്തിലായിരിക്കുമോ എന്നും പരിശോധിക്കാം.

സിദ്ധാന്തം 1 $[a, b]$ യിൽ തുടർച്ചയുള്ളതും (a, b) യിൽ അവകലനീയവുമായ ഒരു ഏകദമാണ് f എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ

a) (a, b) യിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും f ന്റെ അവകലജം അധിസംഖ്യ ആയാൽ (a, b) യിൽ f കർശന ആരോഹണത്തിലായിരിക്കും (strictly increasing)

b) (a, b) യിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും f ന്റെ അവകലജം ന്യൂനസംഖ്യ ആയാൽ (a,b) യിൽ f കർശന അവരോഹണത്തിലായിരിക്കും (strictly increasing)

c) (a, b) യിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും f ന്റെ അവകലജം പൂജ്യമായാൽ (a, b) യിൽ f ഒരു സംഖ്യാ ഏകദം ആയിരിക്കും.

തെളിവ് : $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$ എന്നെടുത്താൽ (x_1, x_2) എന്ന ഇടവേളയിൽ ഏകദം f ഇടവില സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ (Mean value theorem) നിബന്ധനകൾ അനുസരിക്കുന്നുണ്ടെന്ന് കാണാം. അതിനാൽ

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f^1(c)$$

ആകത്തക്ക വിധം c എന്ന ഒരു സംഖ്യ (a, b) യിലുണ്ടാകും.

ഇതിൽ നിന്നും, $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1)$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$ $\quad$ ($(x_2 - x_1)$, $f^1(c)$) എന്നിവ അധിസംഖ്യകൾ ആയതിനാൽ)

$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

അതായത്, $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \ \forall x_1, x_2 \in [a,b]$

അതിനാൽ $[a,b]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ f എന്ന ഏകദം കർശന ആരോഹണത്തിലാണ് (b), (c) ഇവ ഇതേ രീതിയിൽ തെളിയിക്കാം. ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ.

കുറിപ്പ്

i) (a, b) യിൽ ഏകദം f ന്റെ അവകലജം അധിസംഖ്യയായാൽ ഈ ഇടവേളയിൽ f കർശന ആരോഹണത്തിലായിരിക്കും; ന്യൂനസംഖ്യയായാൽ f കർശന അവരോഹണത്തിലുമായിരിക്കും.

ii) I എന്ന ഒരു ഇടവേളയിൽ ഒരു ഏകദം കർശന ആരോഹണത്തിലോ കർശന അവരോഹണത്തിലോ ആയാൽ അത് തീർച്ചയായും ആരോഹണത്തിലോ അവരോഹണത്തിലോ ആയിരിക്കും. എന്നാൽ ഇതിന്റെ വിപരീത പ്രസ്താവന ശരിയാകണമെന്നില്ല.

ഉദാഹരണം : 7

$f(x) = 7x - 3$ എന്ന ഏകദം, രേഖീയ സംഖ്യകളിൽ കർശന ആരോഹണ ഏകദമാണ് എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

x_1, x_2 എന്നിവ രണ്ട് രേഖീയ സംഖ്യകളാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 7x_1 < 7x_2 \Rightarrow 7x_1 - 3 < 7x_2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ആയതിനാൽ $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$

അപ്പോൾ f ഒരു കർശന ആരോഹണ ഏകദമാണെന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം 8 : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x,\ x \in \mathbf{R}$ എന്ന ഏകദം $\mathbf{R}$ എന്ന രേഖീയ സംഖ്യാഗണത്തിൽ കർശന ആരോഹണ ഏകദമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

> $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. ഈ ഏകദം കർശന ആരോഹണത്തിലാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 6x + 4 \\
&= 3(x^2 - 2x + 1) + 1 \\
&= 3(x - 1)^2 + 1 > 0
\end{aligned}
$$

അതായത് ഏതൊരു $x \in \mathbf{R}$ നും $f'(x) > 0$ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് f ഒരു കർശന ആരോഹണ ഏകദമാണെന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം 9 : $f(x) = \cos x$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക.

(a) $(0, \pi)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ കർശന അവരോഹണ ഏകദമാണെന്നും

(b) $(\pi, 2\pi)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ കർശന ആരോഹണ ഏകദമാണെന്നും

(c) $(0, 2\pi)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ ആരോഹണ ഏകദമോ അവരോഹണ ഏകദമോ ആകുന്നില്ല, എന്നും തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $f'(x) = -\sin x$

(a) $x \in (0, \pi)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ $\sin x > 0$ ആയിരിക്കും.

$\therefore f'(x) = -\sin x < 0,\ x \in (0, \pi)$

അതായത് f കർശന അവരോഹണ ഏകദമാകുന്നു.

(b) $x \in (\pi, 2\pi)$ ആകുമ്പോൾ $\sin x < 0$ ആയിരിക്കും.

$\therefore f'(x) > 0$

അതായത് f ഒരു കർശന ആരോഹണ ഏകദമാകുന്നു.

(c) $(0, \pi)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ f കർശന അവരോഹണ ഏകദവും $(\pi, 2\pi)$ യിൽ f കർശന ആരോഹണ ഏകദവും ആയതിനാൽ $(0, 2\pi)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ ആരോഹണ ഏകദമോ അവരോഹണ ഏകദമോ ആകുന്നില്ല എന്ന് കാണാം.

ഉദാഹരണം : 10

ഏതെല്ലാം ഇടവേളകളിലാണ് $f(x) = x^2 - 4x + 6$ എന്ന ഏകദം (a) കർശന ആരോഹണ ഏകദവും (b) കർശന അവരോഹണ ഏകദവുമാകുന്നത്?

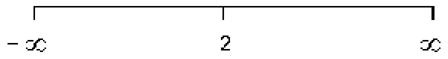
പരിഹാരം

ഇവിടെ $f(x) = x^2 - 4x + 6$

അതുകൊണ്ട് $f'(x) = 2x - 4$

$f'(x) = 0$ ആയാൽ $2x - 4 = 0$, $x = 2$ ആകുന്നു.

$x = 2$ എന്നത് സംഖ്യാരേഖയെ $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$ എന്നീ രണ്ട് വിയുക്ത ഇടവേളകളായി ഭാഗിക്കുന്നു. ചിത്രം 6.6 കാണുക.



(ചിത്രം 6.6)

$(-\infty, 2)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ $f'(x) = 2x - 4 < 0$ ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് $(-\infty, 2)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ f ഒരു കർശന അവരോഹണ ഏകദമാകുന്നു.

ഇതുപോലെ $(2, \infty)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ $f'(x) > 0$ ആകുന്നു. അതിനാൽ $(2, \infty)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ f ഒരു കർശന ആരോഹണ ഏകദമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 11

ഏതെല്ലാം ഇടവേളകളിലാണ് $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ എന്ന ഏകദം (a) കർശന ആരോഹണ ഏകദം (b) കർശന അവരോഹണ ഏകദം എന്നിവ ആകുന്നത്.

പരിഹാരം

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$$
$$f'(x) = 12x^2 - 12x - 72$$
$$= 12(x^2 - x - 6)$$
$$= 12(x - 3)(x + 2)$$

അതിനാൽ $f'(x) = 0$ ആയാൽ $x = -2, 3$ ആകുന്നു. $x = -2$, $x = 3$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സംഖ്യാരേഖയെ $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ $(3, \infty)$ എന്നിങ്ങനെ മൂന്നു വിയുക്ത ഇടവേളകളായി ഭാഗിക്കുന്നു. ചിത്രം 6.7 കാണുക.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ വരച്ച് അവ കർശന ആരോഹണത്തിലും കർശന അവരോഹണത്തിലുമായ ഇടവേളകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 6$
2. $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$
3. $f(x) = \sin^3 x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
4. $f(x) = \sin x + \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$

ഓരോ ഏകദത്തിന്റെയും അവകലജം x അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. അവകലജങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് x അക്ഷത്തിന് മുകളിൽ വരുന്ന ഇടവേളകളും താഴെ വരുന്ന ഇടവേളകളും കണ്ടുപിടിക്കുക.

$(-\infty, -2)$, $(3, \infty)$ എന്നീ ഇടവേളകളിൽ $f'(x) > 0$, $(-2, 3)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ $f'(x) < 0$ എന്നിവ ആകുന്നു. അതായത് $(-\infty, -2)$, $(3, \infty)$ എന്നീ ഇടവേളകളിൽ f കർശന ആരോഹണ ഏകദവും $(-2, 3)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ f കർശന അവരോഹണ ഏകദവും മാകുന്നു.

R എന്ന രേഖീയ സംഖ്യാഗണത്തിൽ f ആരോഹണ ഏകദമോ, അവരോഹണ ഏകദമോ അല്ല എന്ന് കാണാം.

ഇടവേള	$f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം	ഏകദത്തിന്റെ പ്രത്യേകത
$(-\infty, -2)$	$(-)\,(-) > 0$	f കർശന ആരോഹണ ഏകദം
$(-2, 3)$	$(-)\,(+) < 0$	f കർശന അവരോഹണ ഏകദം
$(3, \infty)$	$(+)\,(+) > 0$	f കർശന ആരോഹണ ഏകദം

ഉദാഹരണം : 12

ഏതെല്ലാം ഇടവേളകളിലാണ് $f(x) = \sin 3x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന ഏകദം (a) ആരോഹണ ഏകദം (b) അവരോഹണ ഏകദം, എന്നിവ ആകുന്നത്?

പരിഹാരം

$$f(x) = \sin 3x \text{ ആയതിനാൽ}$$
$$f'(x) = 3\cos 3x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \text{ (എന്തുകൊണ്ട്?)}$$

ആകയാൽ $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ ആകുന്നു.

$x = \frac{\pi}{6}$ എന്ന ബിന്ദു $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന ഇടവേളയെ

$\left[0, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ എന്നി രണ്ടു വിയുക്ത ഇടവേളകളായി വിഭജിക്കുന്നു.

$x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ ആയാൽ $0 \le x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 \le 3x < \frac{\pi}{2}$ അതിനാൽ $f'(x) > 0$ ആകുന്നു.

$x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ ആയാൽ $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 3x < \frac{3\pi}{2}$ അതിനാൽ $f'(x) < 0$ ആകുന്നു.

അതിനാൽ $\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ f ഒരു കർശന ആരോഹണ ഏകദവും, $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ f ഒരു കർശന അവരോഹണ ഏകദവും ആകുന്നു. കുടാതെ $x = 0,\ x = \frac{\pi}{6}$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ f ഒരു തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമായതിനാൽ, സിദ്ധാന്തം 1 പ്രകാരം, $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ f ഒരു ആരോഹണ ഏകദവും $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ f ഒരു അവരോഹണ ഏകദവും ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 13

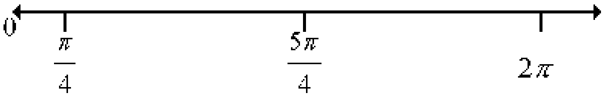
ഏതെല്ലാം ഇടവേളകളിലാണ് $f(x) = \sin x + \cos x, 0 \le x \le 2\pi$ എന്ന ഏകദം കർശന ആരോഹണമോ, കർശന അവരോഹണമോ ആകുന്നത്?

പരിഹാരം

ഇവിടെ
$$f(x) = \sin x + \cos x$$
$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

$f'(x) = 0$ ആയാൽ $\sin x = \cos x$ അതായത് $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ ആകുന്നു.

അടുത്തതായി $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ $[0, 2\pi]$ എന്ന ഇടവേളയെ $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ എന്നിങ്ങനെ മൂന്നു വിയുക്ത ഇടവേളകളാക്കി വിഭജിക്കുന്നു. (ചിത്രം 6.8 കാണുക)



ചിത്രം 6.7

ഇവിടെ $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ ആകുമ്പോൾ $f'(x) > 0$ ആണ്, അതിനാൽ ഈ ഇടവേളകളിൽ f ഒരു കർശന ആരോഹണ ഏകദമായിരിക്കും.

കൂടാതെ $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ $f'(x) < 0$ ആകുന്നു.

അതിനാൽ $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ f കർശന അവരോഹണ ഏകദമായിരിക്കും. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഇടവേള	$f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം	ഏകദത്തിന്റെ പ്രത്യേകത
$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$	> 0	f ഒരു കർശന ആരോഹണ ഏകദം
$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	< 0	f ഒരു കർശന അവരോഹണ ഏകദം
$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$	> 0	f ഒരു കർശന ആരോഹണ ഏകദം

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 6.2

1. $f(x) = 3x + 17$ എന്ന ഏകദം രേഖീയ സംഖ്യാഗണം **R** ൽ കർശന ആരോഹണ ഏകദമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
2. $f(x) = e^{2x}$ എന്ന ഏകദം രേഖീയ സംഖ്യാഗണം **R** ൽ കർശന ആരോഹണ ഏകദമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
3. $f(x) = \sin x$ എന്ന ഏകദം

   (a) ഇടവേള $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ൽ കർശന ആരോഹണ ഏകദമാണെന്നും

   (b) ഇടവേള $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ൽ കർശന അവരോഹണ ഏകദമാണെന്നും

   (c) ഇടവേള $(0, \pi)$ ൽ ആരോഹണമോ അവരോഹണമോ അല്ല എന്നും തെളിയിക്കുക.
4. ഏതെല്ലാം ഇടവേളകളിലാണ് $f(x) = 2x^2 - 3x$ എന്ന ഏകദം (a) കർശന ആരോഹണവും (b) കർശന അവരോഹണവുമാകുന്നത്?

5. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ എന്ന ഏകദം ഏതെല്ലാം ഇടവേളകളിലാണ്

a) കർശന ആരോഹണവും

b) കർശന അവരോഹണവും ആകുന്നത്?

6. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങൾ ഏതെല്ലാം ഇടവേളകളിലാണ് കർശന ആരോഹണവും കർശന അവരോഹണവും ആകുന്നത് എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.

(a) $x^2 + 2x - 5$ (b) $10 - 6x - 2x^2$

(c) $-2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ (d) $6 - 9x - x^2$

(e) $(x + 1)^3 (x - 3)^3$

7. $y = \log(1+x) - \dfrac{2x}{2+x}$, $x > -1$ എന്ന ഏകദം അതിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിലും ഒരു ആരോഹണ ഏകദമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

8. $y = [x(x - 2)]^2$ ഒരു ആരോഹണ ഏകദമായാൽ x ന്റെ വിലകൾ കണക്കാക്കുക.

9. $y = \dfrac{4\sin\theta}{(2+\cos\theta)} - \theta$ എന്ന ഏകദം $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ഇടവേളയിൽ ഒരു ആരോഹണ ഏകദമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

10. ലോഗരിതമിക ഏകദം (logarithmic function) $(0, \infty)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ ഒരു കർശന ആരോഹണ ഏകദമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

11. $f(x) = x^2 - x + 1$ എന്ന ഏകദം $(-1, 1)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ കർശന ആരോഹണമോ കർശന അവരോഹണമോ ആകുന്നില്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.

12. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ എന്ന ഇടവേളയിലെ കർശന അവരോഹണ ഏകദം ഏത്?

a) $\cos x$ b) $\cos 2x$ c) $\cos 3x$ d) $\tan x$

13. $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ എന്ന ഏകദം കർശന അവരോഹണമാകുന്ന ഇടവേള ഏതെന്ന് എഴുതുക.

a) $(0, 1)$ b) $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ c) $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ d) ഇവയൊന്നുമല്ല

14. $f(x) = x^2 + ax + 1$ എന്ന ഏകദം ഇടവേള $[1, 2]$ ൽ കർശന ആരോഹണ ഏകദമായാൽ a യുടെ ഏറ്റവും ചെറിയ വില കണക്കാക്കുക.

15. I എന്നത് $[-1, 1]$ ൽ നിന്നും വിയുക്തമായ ഒരു ഇടവേള ആയാൽ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ എന്ന ഏകദം I യിൽ ഒരു കർശന ആരോഹണ ഏകദമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

16. $f(x) = \log \sin x$ എന്ന ഏകദം ഇടവേള $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ൽ കർശന ആരോഹണ ഏകദമാണെന്നും, ഇടവേള $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ൽ കർശന അവരോഹണ ഏകദമാണെന്നും തെളിയിക്കുക.

17. $f(x) = \log \cos x$ എന്ന ഏകദം ഇടവേള $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ൽ കർശന അവരോഹണ ഏകദമാണെന്നും, ഇടവേള $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ ൽ കർശന ആരോഹണ ഏകദമാണെന്നും തെളിയിക്കുക.

18. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ എന്ന ഏകദം രേഖീയ സംഖ്യാഗണം **R** ൽ ഒരു ആരോഹണ ഏകദമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

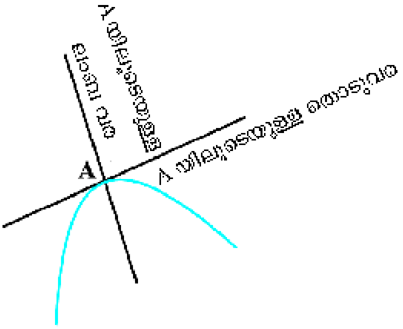
19. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏത് ഇടവേളയിലാണ് $y = x^2 e^{-x}$ എന്ന ഏകദം ഒരു ആരോഹണ ഏകദമാകുന്നത്?

    a) $(-\infty, \infty)$ b) $(-2, 0)$ c) $(2, \infty)$ d) $(0, 2)$

6.4 തൊടുവരകളും ലംബങ്ങളും (Tangents and Normals)

ഒരു വക്രത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരയുടെയും ലംബത്തിന്റെയും സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് അവകലനം എങ്ങനെ പ്രയോഗിക്കാം എന്നാണ് ഇവിടെ ചർച്ചചെയ്യുന്നത്.

(x_0, y_0) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വരയുടെ ചരിവ് m ആയാൽ അതിന്റെ സമവാക്യം $y - y_0 = m(x - x_0)$ ആണ്.



ചിത്രം 6.8

$y = f(x)$ എന്ന വക്രത്തിലെ (x_0, y_0) ബിന്ദുവിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരയുടെ ചരിവ്

$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)} = f'(x_0)$ ആണല്ലോ.

ഈ തൊടുവരയുടെ സമവാക്യം

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

ഒരു വക്രത്തിലെ (x_0, y_0) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും, ആ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയ്ക്ക് ലംബവുമായ വരയുടെ ചരിവ് $\frac{-1}{f'(x_0)}$ ആയിരിക്കുമല്ലോ,

$f'(x_0) \neq 0$.

[$f'(x_0) = 0$ ആയാൽ ലംബത്തിന്റെ ചരിവ് നിർവചിക്കാൻ കഴിയില്ല.]

അതിനാൽ ലംബത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ ആണ്.}$$

അതായത്; $(y - y_0)f'(x_0) + (x - x_0) = 0$

കുറിപ്പ്

$y = f(x)$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ തൊടുവര x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി (positive direction) ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ θ ആണെങ്കിൽ $\frac{dy}{dx} = \tan\theta$ ആയിരിക്കും.

പ്രത്യേക സാഹചര്യങ്ങൾ

(i) ഒരു തൊടുവരയുടെ ചരിവ് 0 ആയാൽ, $\tan\theta = 0$ ആകും, $\theta = 0$ ആണ്. അതായത് തൊടുവര x- അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായിരിക്കും. കൂടാതെ, (x_0, y_0) എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ സമവാക്യം $y = y_0$ ആണ്.

(ii) $\theta \to \frac{\pi}{2}$, ആയാൽ $\tan\theta \to \infty$, ആകും, ഇവിടെ തൊടുവര x-അക്ഷത്തിന് ലംബമായിരിക്കും, അതായത് y-അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകും. ഇവിടെ (x_0, y_0) എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ സമാക്യം $x = x_0$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 14

$y = x^3 - x$ എന്ന വക്രത്തിൽ $x = 2$ ലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$x = 2$ എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് $= \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 3x^2 - 1\Big]_{x=2} = 11.$

ഉദാഹരണം : 15

$y = \sqrt{4x-3} - 1$ എന്ന വക്രത്തിലെ ഏത് ബിന്ദുവിലാണ് തൊടുവരയുടെ ചരിവ് $\frac{2}{3}$ ആകുന്നത്?

പരിഹാരം

(x, y) എന്ന പൊതുവായ ബിന്ദുവിൽ തൊടുവരയുടെ ചരിവ്

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4x-3)^{\frac{1}{2}} 4 = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$$

തൊടുവരയുടെ ചരിവ് $\frac{2}{3}$ ആയതിനാൽ

$$\frac{2}{\sqrt{4x-3}} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 4x - 3 = 9$$

$$\Rightarrow \quad x = 3$$

$x = 3$ ആയാൽ $y = \sqrt{4(3)-3} - 1 = 2$

അതിനാൽ വക്രത്തിലെ നിർദ്ദിഷ്ട ബിന്ദു $(3, 2)$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 16

$y + \frac{2}{x-3} = 0$ എന്ന വക്രത്തിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് 2 ആയ എല്ലാ തൊടുവരകളുടെയും സമവാക്യമെഴുതുക.

പരിഹാരം

(x, y) എന്ന പൊതുവായ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ്

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x-3)^2}$$

> $y + \dfrac{2}{x-3} = 0$ എന്ന വക്രം വരയ്ക്കുക. Min – -15. Max – 5 ആകത്തക്കവിധം a എന്ന ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിക്കുക. $y - 2x \quad a$ എന്ന വരവരയ്ക്കുക. ഈ വര വക്രത്തിന്റെ തൊടുവര ആകുന്നത് എപ്പോഴെല്ലാമാണ്? സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറ്റിനോക്കു.

വരയുടെ ചരിവ് 2 ആയതിനാൽ

$$\frac{2}{(x-3)^2} = 2$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x - 3 = \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad x = 2, 4$$

$x = 2$ ആയാൽ $y = 2$, $x = 4$ ആയാൽ $y = -2$, ആകുന്നു.

(2, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള തൊടുവരയുടെ സമവാക്യം

$y - 2 = 2(x - 2) \Rightarrow y - 2x + 2 = 0$

(4, –2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള തൊടുവരയുടെ സമവാക്യം

$y - (-2) = 2(x - 4) \Rightarrow y - 2x + 10 = 0$

ഉദാഹരണം : 17

$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ എന്ന വക്രത്തിലെ തൊടുവരകൾ (a) x - അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുന്ന ബിന്ദുക്കളും (b) y - അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുന്ന ബിന്ദുക്കളും കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ എന്ന സമവാക്യത്തെ x ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{x}{2} + \frac{2y}{25}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-25}{4}\frac{x}{y}$$

(a) തൊടുവരകൾ x - അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുമ്പോൾ, ചരിവ് '0' ആയിരിക്കും.

അതായത് $\dfrac{-25}{4}\dfrac{x}{y} = 0$, അതായത്, $x = 0$ ആകുന്നു.

$x = 0$ ആയാൽ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തിൽ $\dfrac{0}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 25$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm 5$$

തൊടുവരകൾ x - അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുന്ന വക്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ $(0, 5), (0, -5)$ എന്നിവ ആയിരിക്കും.

(b) തൊടുവരകൾ y - അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുമ്പോൾ, ലംബത്തിന്റെ ചരിവ് 0 ആകുന്നു. $\frac{4y}{25x}=0$, അതുകൊണ്ട് $y=0$

$y=0$ ആയാൽ $x=\pm 2$

ആയതിനാൽ തൊടുവരയുടെ y - അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുന്ന വക്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ $(2, 0), (-2, 0)$ എന്നിവയാകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 18

$y=\frac{x-7}{(x-2)(x-3)}$ എന്ന വക്രം x - അക്ഷത്തിനെ മുറിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽ വരയ്ക്കാനാവുന്ന തൊടുവരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

> $y = \frac{x-7}{(x-2)(x-3)}$ എന്ന h {l w X അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു കണ്ടെത്തുക. ഈ ബിന്ദുവിൽ വക്രത്തിന്റെ തൊടുവര വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ സമവാക്യം എന്താണ്?

പരിഹാരം

x അക്ഷത്തിൽ y 0 ആയിരിക്കുമല്ലോ.

$y=0$ ആയാൽ $\frac{x-7}{(x-2)(x-3)}=0$ അതുകൊണ്ട്, $x=7$

അതിനാൽ വക്രം x - അക്ഷത്തിനെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു $(7, 0)$ ആകുന്നു. തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തെ x ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-y(2x-5)}{(x-2)(x-3)} \quad \text{(എന്തുകൊണ്ട്?)}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(7,0)}=\frac{1-0}{(5)(4)}=\frac{1}{20}$$

അതിനാൽ $(7, 0)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് $\frac{1}{20}$ ആകുന്നു. $(7, 0)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ തൊടുവരയുടെ സമവാക്യം $y-0=\frac{1}{20}(x-7)$ അഥവാ $20y-x+7=0$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 19

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2$ എന്ന വക്രത്തിലെ $(1, 1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെയും, ലംബത്തിന്റെയും സമവാക്യങ്ങളെഴുതുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$

x ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

അതിനാൽ (1, 1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(1,1)} = -1$

(1, 1) എന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള തൊടുവരയുടെ സമവാക്യം.

$$y - 1 = -1\,(x - 1) \Rightarrow y + x - 2 = 0$$

(1, 1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ ലംബത്തിന്റെ ചരിവ്

$$= \frac{-1}{\text{(1, 1) എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ്}}$$

$$= \frac{-1}{-1} = 1 \text{ ആയതിനാൽ}$$

(1, 1) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ലംബത്തിന്റെ സമാവാക്യം

$y - 1 = 1\,(x - 1)$ അതായത്, $y - x = 0$

ഉദാഹരണം : 20

$x = a\sin^3 t,\ y = b\cos^3 t$ എന്ന വക്രത്തിലെ $t = \frac{\pi}{2}$ ആയി വരുന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന വക്രത്തെ 't' ആസ്പദമാക്കി അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{dx}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t,\ \frac{dy}{dt} = -3b\cos^2 t\sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3b\cos^2 t\sin t}{3a\sin^2 t\cos t} = \frac{-b}{a}\frac{\cos t}{\sin t}$$

$t = \frac{\pi}{2}$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ തൊടുവരയുടെ ചരിവ്

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-b\cos\frac{\pi}{2}}{a\sin\frac{\pi}{2}} = 0$$

കൂടാതെ $t = \frac{\pi}{2}$ ആയാൽ $x = a$, $y = 0$ എന്നിവ ആണല്ലോ. ആകയാൽ $t = \frac{\pi}{2}$ അഥവാ $(a, 0)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ തൊടുവരയുടെ സമവാക്യം

$$y - 0 = 0(x - a)$$

അതായത്,

$$y = 0$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 6.3

1. $y = 3x^4 - 4x$ എന്ന വക്രത്തിൽ $x = 4$ ലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
2. $y = \frac{x-1}{x-2}$, $x \neq 2$ എന്ന വക്രത്തിൽ $x = 10$ ലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
3. x സൂചകസംഖ്യ 2 ആയ ബിന്ദുവിൽ $y = x^3 - x + 1$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
4. x സൂചകസംഖ്യ 3 ആയ ബിന്ദുവിൽ $y = x^3 - 3x + 2$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
5. $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ എന്ന വക്രത്തിൽ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ആയിവരുന്ന ബിന്ദുവിലെ ലംബത്തിന്റെ ചരിവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
6. $x = 1 - a\sin\theta, y = b\cos^2\theta$ എന്ന വക്രത്തിൽ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ആയിവരുന്ന ബിന്ദുവിലെ ലംബത്തിന്റെ ചരിവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
7. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ എന്ന വക്രത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരയാണ് x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുന്നത്?
8. $y = (x - 2)^2$ എന്ന വക്രത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയാണ് $(2, 0)$,

(4, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഞാണിന് (chord) സമാന്തരമാകുന്നത്?

9. $y = x^3 - 11x + 5$ എന്ന വക്രത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലാണ് $y = x - 11$ ഒരു തൊടുവരയാകുന്നത്.

> $y = x^3 - 11x + 5$ എന്ന വക്രവും $y = x - 11$ എന്ന വരയും വരയ്ക്കുക. ഈ വര വക്രത്തിന്റെ തൊടുവരയാകുന്ന ബിന്ദു ഏതാണ്?

10. $y = \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 1$ എന്ന വക്രത്തിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് -1 ആകുന്ന എല്ലാ വരകളുടെയും സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

11. $y = \dfrac{1}{x-3}$, $x \neq 3$ എന്ന വക്രത്തിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് 2 ആകുന്ന എല്ലാ തൊടുവരകളുടെയും സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

12. $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 3}$ എന്ന വക്രത്തിലെ ചരിവ് 0 ആയ എല്ലാ വരകളുടെയും സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

13. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ എന്ന വക്രത്തിലെ തൊടുവരകൾ x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാകുന്നതും y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാകുന്നതും ആയ വക്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

> $y = \dfrac{1}{x^3 - 2x + 3}$ എന്ന വക്രം വരച്ച് അതിലെ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവര വരയ്ക്കുക. ഈ തൊടുവര X അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകുന്നത് എപ്പോഴാണ്?

14. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വക്രങ്ങളിലെ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുവരയുടെയും ലംബത്തിന്റെയും സമവാക്യങ്ങളെഴുതുക.

 (i) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$; (0, 5)

 (ii) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$; (1, 3)

 (iii) $y = x^3$; (1, 1)

 (iv) $y = x^2$; (0, 0)

 (v) $x = \cos t, y = \sin t,\ t = \dfrac{\pi}{4}$

15. $y = x^2 - 2x + 7$ എന്ന വക്രത്തിലെ തൊടുവരയുടെ സമവാക്യം ചുവടെ വിവരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾക്കനുസൃതമായി കണ്ടെത്തുക.

(a) തൊടുവര $2x - y + 9 = 0$ എന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരമാകുമ്പോൾ

(b) തൊടുവര $5y - 15x = 13$ എന്ന വരയ്ക്ക് ലംബമാകുമ്പോൾ

16. $y = 7x^3 + 11$ എന്ന വക്രത്തിൽ $x = 2$, $x = -2$ ആയിവരുന്ന ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ സമാന്തരങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

$y - x^3$ എന്ന വക്രം വരയ്ക്കുക (x^3) എന്ന് കൊടുത്താൽ മതി) 'a' എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് $(a, f(a))$ എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുവിലൂടെ വക്രത്തിന്റെ തൊടുവര വരച്ച് അതിന്റെ ചരിവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. വരയുടെ ചരിവും ബിന്ദുവിന്റെ y സൂചക സംഖ്യയും തുല്യമാകുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

17. $y = x^3$ എന്ന വക്രത്തിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് y സൂചകസംഖ്യക്കു തുല്യമായി വരുന്ന എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും എഴുതുക.

18. $y = 4x^3 - 2x^5$ എന്ന വക്രത്തിലെ ഏതെല്ലാം ബിന്ദുക്കളിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളാണ് ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

$f(x) - 4x^3 - 2x^5$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. 'a' എന്ന പേരിൽ സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് $(a, f(a))$ എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുവിലൂടെ വക്രത്തിന് തൊടുവര വരയ്ക്കുക. തൊടുവര ആധാര ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുമ്പോൾ ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

19. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ ഏതെല്ലാം ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകളാണ് ആധാര ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നത്?

20. $ay^2 = x^3$ എന്ന വക്രത്തിലെ (am^2, am^3) ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ലംബത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

21. $x + 14y + 4 = 0$ എന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായി വരുന്ന $y = x^3 + 2x + 6$ വക്രത്തിന്റെ ലംബങ്ങളുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

22. $y^2 = 4ax$ എന്ന സമവക്രത്തിലെ $(at^2, 2at)$ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെയും ലംബത്തിന്റെയും സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

23. $x = y^2$, $xy = k$ എന്നീ വക്രങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദുവിലെ തൊടുവരകൾ പരസ്പരം ലംബമായാൽ $8k^2 = 1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

24. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന അധിവക്രത്തിലെ (x_0, y_0) ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെയും ലംബത്തിന്റെയും സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

25. $y=\sqrt{3x-2}$ എന്ന വക്രത്തിലെ തൊടുവര $4x-2y+5=0$ എന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരമാകുന്നുവെങ്കിൽ തൊടുവരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

ചോദ്യങ്ങൾ 26, 27 എന്നിവയ്ക്ക് ശരിയുത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

26. $y = 2x^2 + 3$ എന്ന വക്രത്തിലെ $x = 0$ ആയിവരുന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള ലംബത്തിന്റെ ചരിവ് .... ആകുന്നു.

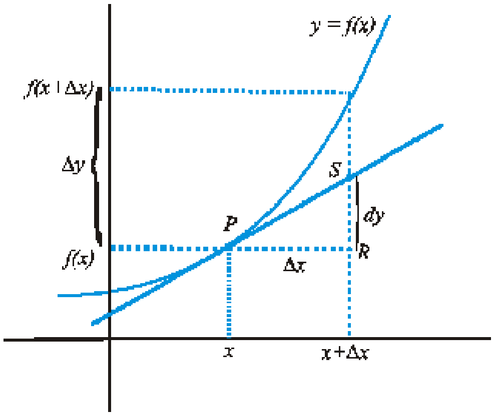
a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) –3 d) $-\frac{1}{3}$

27. $y=x+1$ എന്ന വര $y^2=4x$ വക്രത്തിന് തൊടുവരയാകുന്ന ബിന്ദു .... ആകുന്നു.

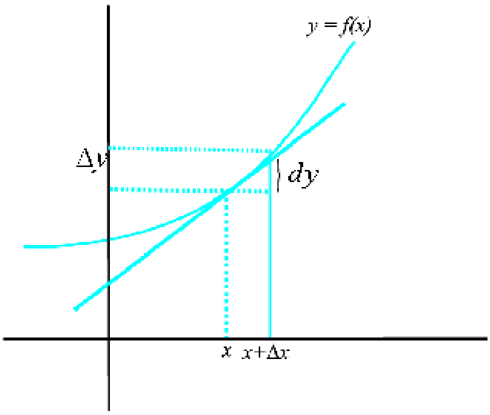
a) (1, 2) b) (2, 1) c) (1, – 2) d) (– 1, 2)

6.5 ഏകദേശവിലനിർണയം (Approximations)

$y=f(x)$ എന്ന ഒരു വക്രത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഈ വക്രത്തിലെ $(x, f(x))$ എന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള തൊടുവരയാണ് PS.



ചിത്രം 6.9*a*



ചിത്രം 6.9*b*

x നു വരുന്ന ചെറിയ വ്യതിയാനത്തെ Δx എന്നും ഇതിനനുസരിച്ച് y ക്ക് വരുന്ന വ്യതിയാനത്തെ Δy എന്നും സൂചിപ്പിക്കാം.

$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta y$ എന്നത് ചിത്രം 6.9 *a* യിൽ നിന്ന് വ്യക്തമാണല്ലോ. എന്നാൽ ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ Δy കണക്കാക്കുന്നത് എളുപ്പമാകില്ല. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ Δy യുടെ ഒരു ഏകദേശ വിലയായി dy ഉപയോഗിക്കാം. (ചിത്രം 6.9 *b*).

Δx ചെറുതാകുന്തോറും Δy, dy ഇവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കുറഞ്ഞുവരുന്നു. (ചിത്രം 6.9*b*).

dy എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാമെന്നു നോക്കാം.

ΔPRS എന്ന മട്ടത്രികോണം പരിഗണിക്കുക.

$\frac{dy}{\Delta x}$ എന്നത് PS എന്ന വരയുടെ ചരിവാണല്ലോ.

അപ്പോൾ $$f'(x) = \frac{dy}{\Delta x}$$

അതിനാൽ $$dy = f'(x).\Delta x$$

i) Δx എന്നതിനു dx എന്നും എഴുതാറുണ്ട്. ഇതിനെ x ന്റെ അവകലം (differential) എന്നു നിർവചിക്കാം.

ii) $dy = f'(x).\Delta x = \frac{dy}{dx}\Delta x$ എന്നതിനെ y യുടെ അവകലം എന്ന് നിർവചിക്കാം.

കുറിപ്പ്

x ന് ഉണ്ടാകുന്ന വ്യതിയാനവും x ന്റെ അവകലവും തുല്യമാണ്. എന്നാൽ y ക്ക് ഉണ്ടാവുന്ന വ്യതിയാനവും y യുടെ അവകലവും തുല്യമല്ല.

ഉദാഹരണം : 21

$\sqrt{36.6}$ ന്റെ ഏകദേശവില അവകലനമുപയോഗിച്ചു കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$y = \sqrt{x}$ പരിഗണിക്കുക. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $x = 36$, $\Delta x = 0.6$ എന്നും കരുതിയാൽ

$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} = \sqrt{36.6} - \sqrt{36} = \sqrt{36.6} - 6$ അഥവാ $\sqrt{36.6} = 6 + \Delta y$, ...(1)

dy എന്നത് Δy യുടെ ഒരു ഏകദേശ വിലയായതിനാൽ

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (0.6) = .05$$

അതിനാൽ $\sqrt{36.6}$ ന്റെ ഏകദേശവില (1) പ്രകാരം $6 + 0.05 = 6.05$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 22

$(25)^{\frac{1}{3}}$ ന്റെ ഏകദേശവില അവകലനമുപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$y = x^{\frac{1}{3}}$ എന്ന് പരിഗണിച്ചാൽ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

$x = 27,\ \Delta x = -2$ എന്നിവ ആയാൽ

$$\Delta y = (x+\Delta x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} = (25)^{\frac{1}{3}} - (27)^{\frac{1}{3}} = (25)^{\frac{1}{3}} - 3$$

അതായത് $(25)^{\frac{1}{3}} = 3 + \Delta y$ ------------(1)

dy എന്നുള്ളത് Δy യുടെ ഏകദേശ വിലയായതിനാൽ

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}(-2)$$

$$= \frac{1}{3((27)^{\frac{1}{3}})^2}(-2) = \frac{-2}{27} = -0.074$$

അതിനാൽ $(25)^{\frac{1}{3}}$ ന്റെ ഏകദേശവില $3 + (-0.\ 074) = 2.926$

ഉദാഹരണം : 23

$f(x) = 3x^2 + 5x + 3$ ആയാൽ $f(3.02)$ ന്റെ ഏകദേശവില അവകലനമുപയോഗിച്ചു കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$f(x) = 3x^2 + 5x + 3$ എന്ന് കരുതിയാൽ

$$f(3.\ 02) = f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 3$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$$

$$\approx f(x) + f'(x)\,\Delta x \qquad (dx = \Delta x \text{ ആയതിനാൽ})$$

$$f(3.02) \approx (3x^2 + 5x + 3) + (6x + 5)\,\Delta x$$

$$= (3(3)^2 + 5(3) + 3) + 6(3) + 5)\,(0.02)$$

($x = 3$, $\Delta x = 0.02$ ആയതിനാൽ)

$$= (27 + 15 + 3) + (18 + 5)\,(0.02)$$

$$= 45 + 0.46 = 45.46$$

$\therefore f(3.02)$ ന്റെ ഏകദേശവില 45.46 ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 24

x മീറ്റർ വശമുള്ള ഒരു സമചതുര കട്ടയുടെ വശം 2% നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അതിന്റെ ഉള്ളളവിൽ വരുന്ന ഏകദേശ മാറ്റം കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

ഉള്ളളവ് V ആണെന്ന് സങ്കൽപിച്ചാൽ

$$V = x^3$$

$$\therefore dV = \left(\frac{dV}{dx}\right)\Delta x = (3x^2)\,\Delta x$$

$$= (3x^2)\,(0.02x) = 0.06x^3 \text{ ഘന.മീറ്റർ}$$

(x ന്റെ 2% = $0.02x$ ആയതിനാൽ)

ഉള്ളളവിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഏകദേശ മാറ്റം = $0.06\,x^3$ ഘന.മീറ്റർ

ഉദാഹരണം : 25

9 സെന്റീമീറ്റർ ആരമുള്ള ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ആരം അളന്നതിൽ 0.03 സെന്റീ. മീറ്റർ വ്യതിയാനം ഉണ്ടായി. എന്നാൽ അതിന്റെ ഉള്ളളവിലുണ്ടായ ഏകദേശ വ്യതിയാന മെത്ര?

പരിഹാരം

ഗോളത്തിന്റെ ആരം r എന്നും ആരത്തിന്റെ വ്യതിയാനം Δr എന്നും കരുതുക. $r = 9$ സെ.മീ. $\Delta r = 0.03$ സെ.മീ. ഗോളത്തിന്റെ ഉള്ളളവ് $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ എന്നിവ ആണ്.

$$\therefore \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

$$dV = \left(\frac{dV}{dr}\right)\Delta r = (4\pi r^2)\Delta r$$

$$= 4\pi(9)^2\,(0.03) = 9.72\pi \text{ ച.സെ.മീ.}$$

അതിനാൽ ഉള്ളളവിലുണ്ടായ ഏകദേശ വ്യതിയാനം 9.72π ഘന.സെ.മീ. ആകുന്നു.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 6.4

1. അവകലനം ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ ഏകദേശവില 3 ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

   (i) $\sqrt{25.3}$ (ii) $\sqrt{49.5}$ (iii) $\sqrt{0.6}$

   (iv) $(0.009)^{\frac{1}{3}}$ (v) $(0.999)^{\frac{1}{10}}$ (vi) $(15)^{\frac{1}{4}}$

   (vii) $(26)^{\frac{1}{3}}$ (viii) $(255)^{\frac{1}{4}}$ (ix) $(82)^{\frac{1}{4}}$

   (x) $(401)^{\frac{1}{2}}$ (xi) $(0.0037)^{\frac{1}{2}}$ (xii) $(26.57)^{\frac{1}{3}}$

   (xiii) $(81.5)^{\frac{1}{4}}$ (xiv) $(3.968)^{\frac{3}{2}}$ (xv) $(32.15)^{\frac{1}{5}}$

2. $f(x) = 4x^2 + 5x + 2$ ആയാൽ $f(2.01)$ ന്റെ ഏകദേശവില കണക്കാക്കുക.
3. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15$ ആയാൽ $f(5.001)$ ന്റെ ഏകദേശവില കണക്കാക്കുക.
4. ഒരു സമചതുര കട്ടയുടെ x മീറ്റർ നീളമുള്ള വക്കിന് 1% വർദ്ധനവുണ്ടായാൽ അതിന്റെ ഉള്ളളവിനു (V) വരുന്ന ഏകദേശ മാറ്റമെത്ര?
5. ഒരു സമചതുര കട്ടയുടെ x മീറ്റർ നീളം വരുന്ന ഒരു വശത്തിന് 1% കുറവ് വരുന്നുവെങ്കിൽ അതിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവിനു വരുന്ന ഏകദേശ മാറ്റമെത്ര?
6. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ആരം അളന്നപ്പോൾ 7 മീറ്റർ എന്ന് കിട്ടി. അതിൽ 0.02 മീറ്റർ വ്യതിയാനം സംഭവിച്ചെങ്കിൽ അതിന്റെ ഉള്ളളവു കാണുമ്പോഴുള്ള ഏകദേശ വ്യതിയാനമെത്ര?
7. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ആരം അളന്നപ്പോൾ 9 മീ എന്ന് കിട്ടി. അതിൽ 0.03 മീറ്റർ വ്യതിയാനം സംഭവിച്ചെങ്കിൽ അതിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവിനു വരുന്ന ഏകദേശ വ്യതിയാനമെത്ര?
8. $f(x) = 3x^2 + 15x + 5$ ആയാൽ $f(3.02)$ ന്റെ ഏകദേശ വില .... ആകുന്നു.

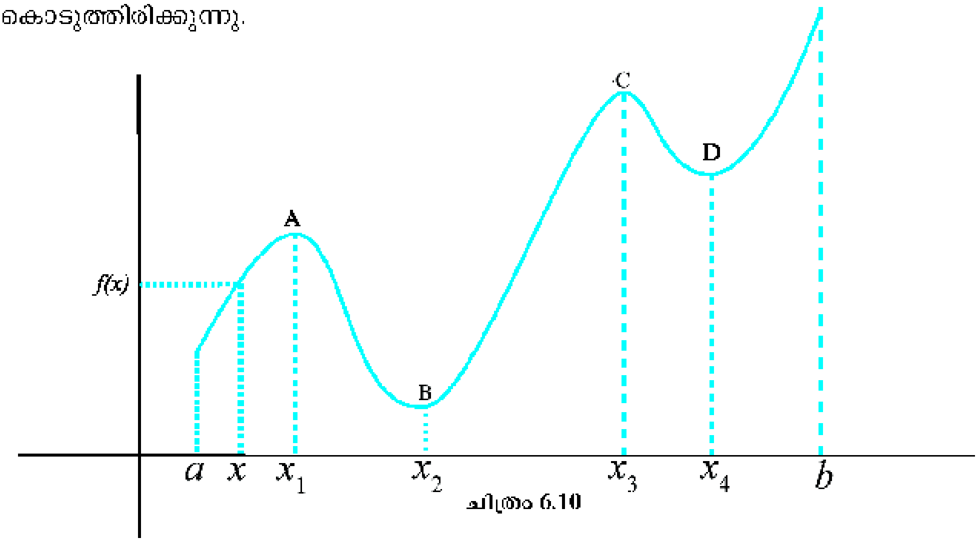
   a) 47.66 b) 57.66 c) 67.66 d) 77.66

9. ഒരു സമചതുര കട്ടയുടെ x മീറ്റർ നീളമുള്ള വശത്തിന് 3% വർദ്ധനവു സംഭവിച്ചുവെങ്കിൽ അതിന്റെ ഉള്ളളവിനുണ്ടാകുന്ന ഏകദേശമാറ്റം .... ആകുന്നു.

   a) $0.06x^3$ ഘന.മീ. b) $0.6\,x^3$ ഘന.മീ. c) $0.09x^3$ ഘന.മീ. d) $0.9x^3$ ഘന.മീ.

6.6 നിമ്നോന്നതങ്ങൾ (Maxima and Minima)

$[a, b]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 6.10

x ന്റെ വില a യിൽ നിന്ന് b യിലേക്ക് മാറുമ്പോൾ $f(x)$ നു എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്?

$f(x)$ ന്റെ വില ആദ്യം കൂടുന്നതായി കാണാം. അങ്ങനെ കൂടി x x_1 ആകുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ വില $f(x_1)$ (A എന്ന ബിന്ദു) ൽ എത്തുന്നു.

അതിനുശേഷം $f(x)$ ന്റെ വില കുറയാൻ തുടങ്ങുന്നു. അതായത് (a, x_2) എന്ന ഇടവേളയിൽ f ന്റെ ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയാണ് $f(x_1)$. ഇതിനെ ഉന്നതവില (maximum value)എന്നു വിളിക്കാം.

$[x_2, x_4]$ എന്ന ഇടവേളയിലോ?

$[x_2, x_3]$ എന്ന ഇടവേള പരിഗണിക്കാം. ഇവിടെ f ന്റെ ഉന്നത വില $f(x_3)$ (B എന്ന ബിന്ദു) ആണെന്ന് കാണാമല്ലോ.

$[a, b]$ എന്ന ഇടവേളയിലോ?

ഇനി (x_2, x_3) എന്ന ഇടവേള പരിഗണിക്കാം.

x ന്റെ വില x_3 യിലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ വില കൂടിക്കൂടി $f(x_3)$ യിലേക്കു അടുക്കുന്നതായി കാണാമല്ലോ. എന്നാൽ x_3 എന്നത് (x_2, x_3) എന്ന ഇടവേളയിൽ

ഇല്ല. അതിനാൽ (x_2, x_3) എന്ന ഇടവേളയിൽ ഈ ഏകദത്തിന് ഉന്നതവില ഇല്ല എന്നുപറയാം.

(a, b) എന്ന ഇടവേളയിലോ?

ഇതുപോലെ ഈ ഏകദത്തിന് വ്യത്യസ്ത ഇടവേളയിലെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില (നിമ്നവില) (minimum value) ഏതൊക്കെയാണെന്ന് ചർച്ച ചെയ്യൂ.

നിർവചനം : ഇടവേള I യിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു ഏകദമാണ് f എന്നിരിക്കട്ടെ.

a) I ലുള്ള ഏത് x നും $f(c) > f(x)$ ആകത്തക്കവിധം I യിൽ ഒരു ബിന്ദു c ഉണ്ടെങ്കിൽ, ഈ ഏകദത്തിന് I എന്ന ഇടവേളയിൽ ഒരു ഉന്നത വിലയുണ്ട് എന്നു പറയാം.

$f(c)$ യെ f ന്റെ I ലെ ഉന്നത വില (maximum value) എന്നു വിളിക്കുന്നു.

c യെ f ന്റെ ഉന്നതവില ബിന്ദു (point of maximum value) എന്നും വിളിക്കുന്നു.

b) I ലുള്ള ഏത് x നും $f\left(x\right) > f\left(c\right)$ ആകത്തക്കവിധം I യിൽ ഒരു ബിന്ദു c ഉണ്ടെങ്കിൽ ഈ ഏകദത്തിന് I എന്ന ഇടവേളയിൽ ഒരു നിമ്ന വില (minimum value) ഉണ്ട് എന്നു പറയാം.

$f(c)$ യെ f ന്റെ I ലെ നിമ്നവില എന്നു വിളിക്കുന്നു.

c) $f(c)$ എന്നത് f എന്ന ഏകദത്തിന് I ലെ ഉന്നതവിലയോ നിമ്ന വിലയോ ആകത്തക്കവിധം c എന്ന ഒരു ബിന്ദു I ൽ ഉണ്ടെങ്കിൽ f ന് I യിൽ ഒരു അഗ്രവില (maximum or minimum) ഉണ്ടെന്നു പറയാം.

$f(c)$ യെ f ന് I ലെ അഗ്രവില എന്നും c യെ അഗ്രവില ബിന്ദു എന്നും വിളിക്കാം.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം

ഉദാഹരണം : 26

$f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ എന്ന ഏകദത്തിന് ഉന്നതവിലയോ നിമ്നവിലയോ ഉണ്ടെങ്കിൽ കണ്ടുപിടിക്കുക.

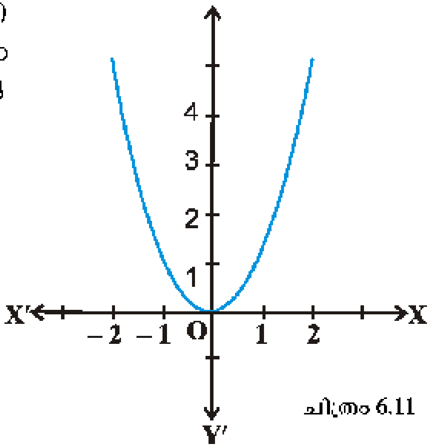
പരിഹാരം

$f(0) = 0$ ആണല്ലോ.

പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏത് സംഖ്യയുടെയും വർഗം പൂജ്യത്തേക്കാൾ വലുതാണ്. അതായത്

$x \neq 0, x \in \mathbf{R}$ ആയാൽ $f(x) \geq 0$

അതിനാൽ fന്റെ നിമ്നവില 0. കൂടാതെ $x = 0$ എന്നത് fന്റെ നിമ്നവില ബിന്ദുവുമാണ്. ഈ ഏകദത്തിന് ഉന്നതവില ഇല്ല എന്നത് ഗ്രാഫിൽ നിന്നും വ്യക്തമാണല്ലോ. അതിനാൽ ഉന്നത വില ബിന്ദു ഇല്ല.



ചിത്രം 6.11

> **കുറിപ്പ്**
> ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം $[-2, 1]$ എന്നെടുത്താൽ $f(-2) = 4$, f ന്റെ ഉന്നത വിലയാവും. $(-2, 1)$ എന്നെടുത്താലോ?

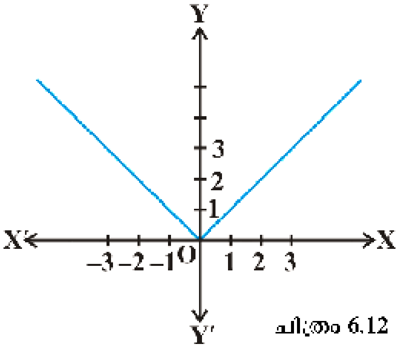
ഉദാഹരണം : 27

$f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$ എന്ന ഏകദത്തിന് ഉന്നത വിലയോ നിമ്നവിലയോ ഉണ്ടെങ്കിൽ കണ്ടു പിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$x \in \mathbf{R}$ ആയാൽ $f(x) = |x| \geq 0$ എന്ന് കാണാമല്ലോ.

$x = 0$ ആകുമ്പോൾ $f(x) = 0$



ചിത്രം 6.12

അതിനാൽ fന്റെ നിമ്നവില പൂജ്യമാണ്. $x = 0$, നിമ്നവിലബിന്ദുവും.

fന് ഉന്നതവില ഇല്ല എന്ന് ഗ്രാഫിൽ നിന്നും വ്യക്തമാണല്ലോ.

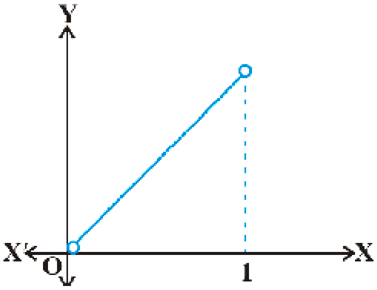
> **കുറിപ്പ്**
> i) ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം $[-2, 1]$ എന്നെടുത്താൽ ഉന്നതവില
> $$f(-2) = |-2| = 2$$ ആയിരിക്കും.
> ii) $x = 0$ ആകുമ്പോൾ ഈ ഏകദം അവകലനീയമല്ല എന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഉദാഹരണം : 28

$f(x) = x$, $x \in (0, 1)$ എന്ന ഏകദത്തിന് ഉന്നതവിലയോ നിമ്നവിലയോ ഉണ്ടെങ്കിൽ കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

ഇത് ഒരു കർശന ആരോഹണ ഏകദമാണല്ലോ. x ന്റെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്ന് ഒന്നിലേക്ക് കൂടുന്നതനുസരിച്ച് $f(x)$ ന്റെ വിലയും കൂടിക്കൂടി വരുന്നതായി കാണാം. ഇടവേള $(0, 1)$ ലെ ഏത് സംഖ്യ x എടുത്താലും അതിനേക്കാൾ വലിയ ഒരു സംഖ്യ ഇതേ ഇടവേളയിൽ കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുമല്ലോ.



ചിത്രം 6.13

അതായത് $\dfrac{x_1+1}{2} > x_1$

അതിനാൽ ഈ ഏകദത്തിന് ഒരു ഉന്നതവില ഇല്ല. അതുപോലെ $(0, 1)$ ൽ ഏത് സംഖ്യ x എടുത്താലും അതിലും ചെറിയ ഒരു സംഖ്യ അതേ ഇടവേളയിൽ കണ്ടെത്താൻ കഴിയും $\left(\dfrac{x}{2}\right)$. അതിനാൽ ഈ ഏകദത്തിന് ഒരു നിമ്നവിലയുമില്ല.

> **കുറിപ്പ്**
>
> ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ, ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തിൽ 0, 1 എന്നീ വിലകൾ കൂടി ഉൾപ്പെടുത്തിയാൽ $x = 0$ ൽ f ന് ഒരു നിമ്നവിലയും $(f(0) \quad 0)$, $x \quad 1$ ൽ f ന് ഒരു ഉന്നതവിലയും $(f(1) = 1)$ ഉണ്ടായിരിക്കും.

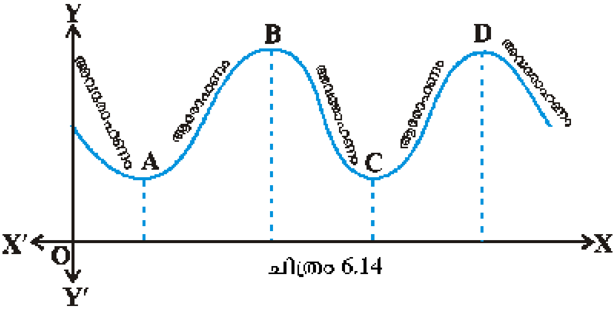
ഒരു ഏകദം ആരോഹണ ഏകദമോ അവരോഹണ ഏകദമോ ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ ഉന്നതവിലയും നിമ്നവിലയും മണ്ഡലത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളിലായിരിക്കും.

ഒരു അടഞ്ഞ ഇടവേളയിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഏകദത്തിന് ഉന്നതവിലയും നിമ്നവിലയും ഉണ്ടായിരിക്കുമെന്നും കാണാം.

(അടഞ്ഞ ഇടവേളയിലെ ഏകദത്തിന്റെ നിമ്നോന്നത വിലകളെക്കുറിച്ച് പിന്നീട് ചർച്ച ചെയ്യുന്നുണ്ട്)

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം നോക്കു

A, B, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെത്തുമ്പോൾ ഏകദം ആരോഹണത്തിൽ നിന്ന് അവരോഹണത്തിലേക്കോ മറിച്ചോ മാറുന്നതായി കാണാം. അതിനാൽ ഇത്തരം ബിന്ദുക്കളെ പരിവർത്തന ബിന്ദുക്കൾ (Turning points)



ചിത്രം 6.14

എന്നു വിളിക്കാം. A യിലേക്കെത്തുമ്പോൾ ഏകദത്തിന്റെ വില കുറഞ്ഞുകുറഞ്ഞ് പിന്നീട് കൂടുന്നായി കണ്ടല്ലോ. അതിൽ A യിൽ ഏകദത്തിന് ഒരു നിമ്നവില ഉണ്ടെന്നു പറയാം. A, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ പ്രാദേശിക നിമ്നവില (local minimum value) ബിന്ദുക്കൾ എന്നു വിളിക്കാം. (ആപേക്ഷിക നിമ്നവില ബിന്ദുക്കൾ എന്നും വിളിക്കാം) അതുപോലെ B, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ പ്രാദേശിക ഉന്നതവിലകൾ (local maximum value) ബിന്ദുക്കൾ എന്നു വിളിക്കാം.

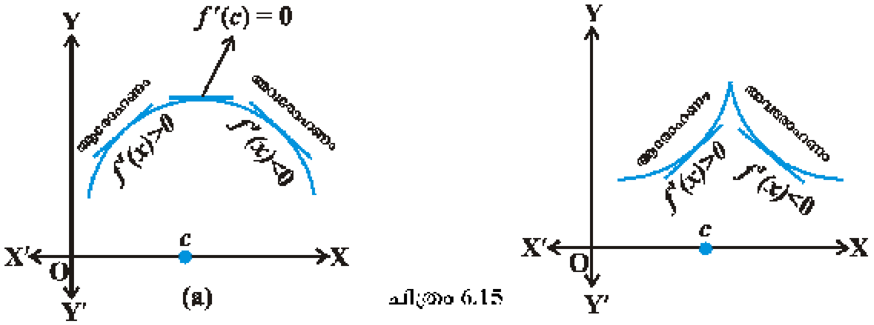
ഇക്കാര്യങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ നിർവചിക്കാം.

നിർവചനം : f ഒരു രേഖീയസംഖ്യാ ഏകദമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. f ന്റെ മണ്ഡലത്തിനുള്ളിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് c എങ്കിൽ

a) $(c-h, c+h)$ എന്ന ഇടവേളയിലുള്ള എല്ലാ x നും $f(c) > f(x)$ ആകത്തക്ക വിധം ഒരു അധിസംഖ്യ h ഉണ്ടെങ്കിൽ c യെ ഒരു പ്രാദേശിയ ഉന്നതവില ബിന്ദു (local maximum point) എന്നു വിളിക്കാം. $f(c)$ യെ f ന്റെ ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നതവില (local maximum value) എന്നു വിളിക്കാം.

b) $(c-h, c+h)$ എന്ന ഇടവേളയിലുള്ള എല്ലാ x നും $f(c) < f(x)$ ആകത്തക്ക വിധം ഒരു അധിസംഖ്യ h ഉണ്ടെങ്കിൽ c യെ ഒരു പ്രാദേശിക നിമ്നവില ബിന്ദു (local minimum point) എന്നും $f(c)$ യെ f ന്റെ ഒരു പ്രാദേശിക നിമ്നവില (local minimum value) എന്നും വിളിക്കാം.

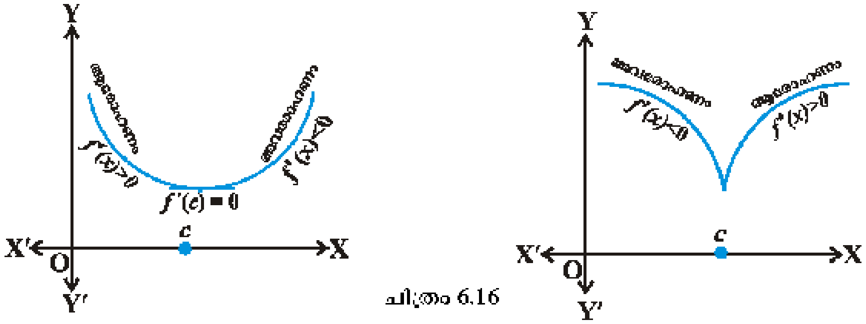
x c ഏകദം f ന്റെ ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നതവില ബിന്ദു ആയാൽ ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിൽ c യോട് അടുത്ത ഭാഗം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതികളിലാവാം.



ചിത്രം 6.15

രണ്ടു ചിത്രങ്ങളിലും c യുടെ ഇടതുവശത്ത് $f'(x)$ അധിസംഖ്യയും വലതുവശത്ത് ന്യൂനസംഖ്യയുമാണല്ലോ. ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ $f'(c)$ പൂജ്യമാണ്. എന്നാൽ രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ x c യിൽ അവകലനീയമല്ല.

x c, ഏകദം f ന്റെ ഒരു പ്രാദേശിക നിമ്നവില ബിന്ദു ആയാൽ ഈ ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിൽ c യോട് അടുത്ത ഭാഗം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതികളിലാവാം.

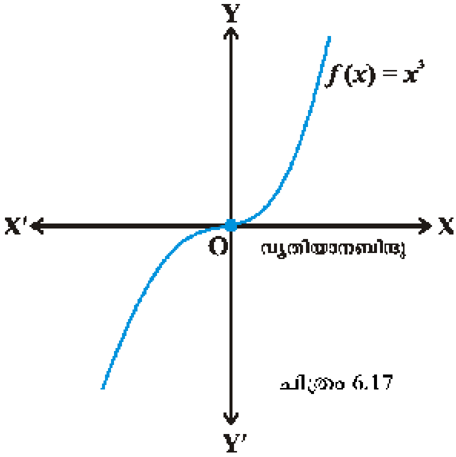


ചിത്രം 6.16

രണ്ട് ചിത്രങ്ങളിലും c യുടെ ഇടതുവശത്ത് $f'(x)$ ന്യൂനസംഖ്യയും വലതുവശത്ത് അധിസംഖ്യയുമാണ്. ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ $f'(c) = 0$ ആണ്. എന്നാൽ രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ $x = c$ യിൽ f അവകലനീയമല്ല.

ഈ ചർച്ചയിൽ നിന്ന് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സിദ്ധാന്തത്തിലേക്കെത്താം. (തെളിവ് ഇവിടെ നൽകുന്നില്ല.)

സിദ്ധാന്തം 2 : I എന്ന തുറന്ന ഇടവേളയിൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു ഏകദമാണ് f എന്നിരിക്കട്ടെ. $c \in I$ എന്നെടുക്കാം. $x = c$ യിൽ f ന് ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നതവിലയോ പ്രാദേശിക നിമ്നവിലയോ ഉണ്ടെങ്കിൽ രണ്ടു സാധ്യതകളുണ്ട്. ഒന്നുകിൽ $f'(c) = 0$ ആയിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ c യിൽ f അവകലനീയമായിരിക്കുകയില്ല.



ചിത്രം 6.17

കുറിപ്പ് :

മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീത സിദ്ധാന്തം ശരിയാവണമെന്നില്ല. അതായത് അവകലജം പൂജ്യമാകുന്ന ഒരു ബിന്ദു പ്രാദേശിക ഉന്നത വില ബിന്ദുവോ പ്രാദേശിക നിമ്ന വില ബിന്ദുവോ ആകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണത്തിന് $f(x) = x^3$ ആയാൽ $f'(x) = 3x^2$. അപ്പോൾ $f'(0) = 0$ എന്നാൽ 0 ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നതവിലബിന്ദുവോ പ്രാദേശിക നിമ്നവിലബിന്ദുവോ അല്ല.

കുറിപ്പ്

i) f എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് c എങ്കിൽ $f'(c)$ പൂജ്യമാവുകയോ c യിൽ f അവകലനീയമല്ലാതിരിക്കുകയോ ചെയ്താൽ c യെ f ന്റെ ഒരു നിർണായക ബിന്ദു (critical point) എന്നു വിളിക്കാം.

ii) c എന്ന ബിന്ദുവിൽ തുടർച്ചയുള്ള ഒരു ഏകദമാണ് f എങ്കിൽ $f'(c) = 0$ ആയാൽ $(c-h, c+h)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ f അവകലനീയമാകത്തക്കവിധം ഒരു അധിസംഖ്യ h ഉണ്ടാകും.

ഒരു ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം ഉപയോഗിച്ച് അതിന്റെ നിമ്നോന്നത വില ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടെത്തുന്നതെങ്ങനെ എന്നു നോക്കാം.

സിദ്ധാന്തം 3 (ഒന്നാം അവകലജ പരിശോധന)

ഒരു തുറന്ന ഇടവേളയിൽ I യിൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഏകദമാണ് f എന്നിരിക്കട്ടെ. c നിർണായക ബിന്ദു c യിൽ f തുടർച്ചയുള്ളതാണെങ്കിൽ

i) c യുടെ ഇടതുവശത്തുനിന്ന് വലതുവശത്തേക്ക് പോകുമ്പോൾ $f(x)$ അധിസംഖ്യയിൽ നിന്ന് ന്യൂനസംഖ്യയായി മാറുന്നു എങ്കിൽ അതായത് c യുടെ ഇടതുവശത്ത് c യോട് വളരെ അടുത്ത ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം $f'(x)$ അധിസംഖ്യയും c യുടെ വലതുവശത്ത് c യോട് അടുത്ത ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം ന്യൂനസംഖ്യയുമായാൽ c ഒരു പ്രദേശിക ഉന്നതബിന്ദു ആയിരിക്കും.

ii) c യുടെ ഇടതുവശത്തു നിന്നും വലതുവശത്തേക്കു പോകുമ്പോൾ $f(x)$ ന്യൂനസംഖ്യയിൽ നിന്നും അധിസംഖ്യയായി മാറുന്നു എങ്കിൽ, അതായത് c യുടെ ഇടതുവശത്ത് c യോട് അടുത്ത ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം $f'(x)$ ന്യൂനസംഖ്യയും c യുടെ വലതുവശത്ത് c യോട് അടുത്ത ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം അധിസംഖ്യയുമായാൽ c ഒരു പ്രാദേശിക നിമ്നബിന്ദു ആയിരിക്കും.

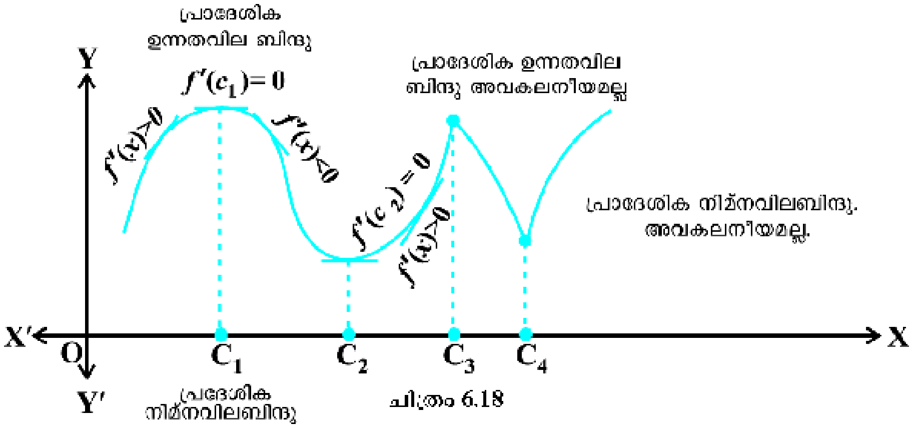
iii) c യുടെ ഇരുവശങ്ങളിലും $f'(x)$ ന് ഒരേ ചിഹ്നമാണെങ്കിൽ c ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നതവില ബിന്ദുവോ നിമ്നവില ബിന്ദുവോ ആവില്ല. ഇത്തരം ഒരു ബിന്ദുവിനെ വ്യതിയാന ബിന്ദു (point of inflection) എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. (ചിത്രം 6.19 നോക്കുക)

$f(x) = x^3$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫും ഇതിന്റെ അവകലജത്തിന്റെ ഗ്രാഫും വരയ്ക്കുക. $x = 0$ ആകുമ്പോൾ $f'(x)$ ന്റെ വിലയും '0' ആണല്ലോ. പൂജ്യത്തിന്റെ ഇരുവശങ്ങളിലും $f'(x)$ x അക്ഷത്തിനു മുകളിലാണ്. അതായത് $f'(x)$ അധിസംഖ്യയാണ് അതിനാൽ $x = 0$ എന്നത് ഒരു വ്യതിയാന ബിന്ദു ആണ്.

കുറിപ്പ്

c ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നതവില ബിന്ദു ആണെങ്കിൽ $f(c)$ ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നതവില ആയിരിക്കും. അതുപോലെ, c ഒരു പ്രാദേശിക നിമ്നവില ബിന്ദു ആണെങ്കിൽ $f(c)$ ഒരു പ്രാദേശിക നിമ്നവില ആയിരിക്കും.

മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ വിശദീകരണം 6.18, 6.19 എന്നീ ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്നും ലഭിക്കും.



ചിത്രം 6.18

$f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി അതിലൂടെ വക്രത്തിന് ഒരു തൊടുവര വരച്ചു നോക്കൂ. പൂജ്യത്തിന്റെ ഇടതുവശത്ത് തൊടുവര ഗ്രാഫിന്റെ മുകളിലും പൂജ്യത്തിന്റെ വലതുവശത്ത് തൊടുവര ഗ്രാഫിന്റെ താഴെയുമല്ല. $x \to 0$ ആകുമ്പോൾ തൊടുവര, അതേ ബിന്ദുവിൽത്തന്നെ ഗ്രാഫിനെ മുറിച്ചു കടക്കുന്നതായും കാണാം.

ഉദാഹരണം : 29

$f(x) = x^3 - 3x + 3$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ പ്രാദേശിക നിമ്നോന്നത വില ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = x^3 - 3x + 3$$
$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$
$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x = -1$$

$x = 1, -1$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ നിർണായക ബിന്ദുക്കളാണ്.

ഇവ പ്രാദേശിക നിമ്നവില ബിന്ദുവോ പ്രാദേശിക ഉന്നതവില ബിന്ദുവോ ആകാം. ഇവ രണ്ടുമല്ലാതെയും വരാം. ഇത് കണ്ടെത്താൻ $x = -1, 1$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ ഇരുവശവും $f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം എന്താണെന്ന് പരിശോധിക്കണം.

ഇതിനായി $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ എന്നീ ഇടവേളകൾ പരിഗണിക്കാം.

$(-\infty, -1)$ എന്ന ഇടവേളയിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും $f'(x)$ ന് ഒരേ ചിഹ്നമായിരിക്കും. കാരണം ഈ ഇടവേളയിൽ ഒരു ബിന്ദുവിൽപ്പോലും $f'(x)$ പൂജ്യമാവു

ന്നില്ല. അതിനാൽ -1 ന്റെ ഇടതുവശത്ത് $f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നമെന്താണെന്ന് അറിയാൻ $(-\infty,-1)$ എന്ന ഇടവേളയിലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിൽ $f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം നോക്കിയാൽ മതി.

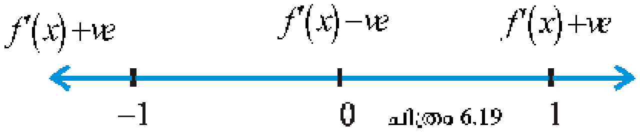
$$f'(-2) = 3x(-2)^2 - 3 > 0$$

അതുപോലെ -1 ന്റെ വലതുവശത്ത് $f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം എന്തെന്നറിയാൻ ഈ ഇടവേളയിലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിൽ $f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം നോക്കാം.

$$f'(0) = 3 \times 0^2 - 3 < 0$$

അതുപോലെ 1 ന്റെ വലതുവശത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദു 2 എടുത്താൽ

$$f'(2) = 3 \times 2^2 - 3 > 0$$



ചിത്രം 6.19

-1 ന്റെ ഇടതുവശത്ത് $f'(x)$ അധിസംഖ്യയും വലതുവശത്ത് ന്യൂനസംഖ്യയുമായതിനാൽ $x = -1$ എന്നത് ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നതവില ബിന്ദുവാണ്. 1 ന്റെ ഇടതുവശത്ത് $f'(x)$ ന്യൂനസംഖ്യയും വലതുവശത്ത് അധിസംഖ്യയുമായതിനാൽ $x \quad 1$ എന്നത് ഒരു പ്രാദേശിക നിമ്നവില ബിന്ദുവാണ്.

$f(-1) = 5$, ഏകദത്തിന്റെ ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നതവിലയും

$f(1) = 1$, ഏകദത്തിന്റെ ഒരു പ്രാദേശിക നിമ്നവിലയുമാണ്.

ഉദാഹരണം : 30

ഏകദം $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ ന്റെ പ്രാദേശിക നിമ്നോന്നത വിലകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x-1)^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

f ന്റെ ഒരേ ഒരു നിർണായക ബിന്ദു $x = 1$

$f'(x) = 6(x-1)^2$ ആയതിനാൽ $x = 1$ അല്ലാത്ത എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും

$f'(x) > 0$ ആയിരിക്കും.

അതായത് x 1 ന്റെ ഇടതും വലതും $f'(x)$ അധിസംഖ്യയാണ്. അതിനാൽ x 1 എന്നത് ഒരു പ്രാദേശിക നിമ്നവില ബിന്ദുവോ പ്രാദേശിക ഉന്നതവില ബിന്ദുവോ അല്ല. ഇവിടെ $x = 1$ ഒരു വ്യതിയാന ബിന്ദുവാണ്.

പ്രാദേശിക നിമ്നോന്നത വില ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടെത്താനുള്ള മറ്റൊരു രീതികൂടി പരിചയപ്പെടാം.

സിദ്ധാന്തം 4 : (രണ്ടാം അവകലജ പരിശോധന) I എന്ന ഇടവേളയിൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു ഏകദമാണ് f എന്നിരിക്കട്ടെ. I ലെ c എന്ന ബിന്ദുവിൽ f നെ രണ്ടുതവണ അവകലനം ചെയ്യാമെങ്കിൽ

i) $f'(c) = 0$ യും $f''(c) < 0$ ഉം ആയാൽ $x = c$ ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നതവില ബിന്ദു ആയിരിക്കും.
$f(c)$ ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നതവില ആയിരിക്കും.

ii) $f'(c) = 0$ യും $f''(c) > 0$ ഉം ആയാൽ $x = c$ ഒരു പ്രാദേശിക നിമ്നവില ബിന്ദു ആയിരിക്കും.

iii) $f'(c)$, $f''(c)$ എന്നിവ രണ്ടും പൂജ്യമായാൽ ഈ പരിശോധനയിലൂടെ പ്രാദേശിക നിമ്നോന്നത വിലകൾ കണ്ടെത്താൻ കഴിയില്ല.

ഉദാഹരണം : 31

$f(x) = 3 + |x|, x \in R, x \in R$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ പ്രാദേശിക നിമ്നവില (local minimum value) കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന ഏകദം $f(x) = 3 + |x|, x \in R, x \in R$

x 0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ f അവകലനീയമല്ല; (എന്തുകൊണ്ട്?) അതിനാൽ രണ്ടാം അവകലജ പരിശോധനാ നിയമം ഇവിടെ ബാധകമല്ല. x 0 എന്നത് ഒരു നിർണായക ബിന്ദു *(critical point)* ആണല്ലോ. അപ്പോൾ '0' ത്തിന്റെ ഇടത്തുവശത്ത് $f(x) = 3 - x$, ആതായത് $f'(x) = -1 < 0$, ഇതുപോലെ '0' ത്തിന്റെ വലതുവശത്ത് $f(x) = 3 - x$, അതുകൊണ്ട് $f'(x) = 1 > 0$ ഉം ആകുന്നു.

അതിനാൽ ഒന്നാം അവകലജ പരിശോധനാ നിയമ പ്രകാരം $x = 0$ എന്നത് f ന്റെ പ്രാദേശിക നിമ്നവില : $f(0) = 3$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 32

$f(x) = 3x^1 + 4x^3 - 12x^2 + 12$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ പ്രാദേശിക ഉന്നതവിലയും, പ്രാദേശിക നിമ്നവിലയും കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$$

അപ്പോൾ $f'(x) \quad 12x^3 + 12x^2 - 24x$

$$= 12x(x - 1)(x + 2)$$

$f'(x) = 0$ ആയാൽ $x = 0, x = 1, x = -2$ എന്നു കിട്ടും.

$$f''(x) = 36x^2 + 24x - 24$$

$$= 12(3x^2 + 2x - 1)$$

ഇനി $f''(0) = -24 < 0$

$$f''(1) = -36 > 0$$

$$f''(-2) = 72 > 0$$

രണ്ടാം അവകലജ പരിശോധനാ നിയമപ്രകാരം $x = 0$ ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നതവില ബിന്ദുവാണ്. $f(0) = 12$ ആകുന്നു. എന്നാൽ $x = 1, x = -2$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ f ന്റെ പ്രാദേശിക നിമ്നവിലകൾ ലഭിക്കുന്നു. കൂടാതെ പ്രാദേശിക നിമ്ന വിലകൾ $f(1) = 7, f(-2) = -20$ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 33

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ പ്രാദേശിക ഉന്നതവിലയും, പ്രാദേശിക നിമ്നവിലയും ലഭിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടെത്തുക.

> $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. ഈ ഗ്രാഫിൽ നിന്ന് ഏകദത്തിന്റെ പ്രാദേശിക നിമ്നോന്നത വിലകൾ കാണുക.

പരിഹാരം

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$

$$f'(x) \quad 6x^2 - 12x + 6 = 6(x - 1)^2$$

$$f''(x) = 12(x - 1)$$

$f'(x) = 0$ ആയാൽ $x = 1$, എന്നു ലഭിക്കും. കൂടാതെ $f''(1) = 0$ ആണ്. അപ്പോൾ രണ്ടാം അവകലജ പരിശോധനാ നിയമം ഇവിടെ ബാധകമാവുന്നില്ല എന്നു കാണാൻ കഴിയും. അതുകൊണ്ട് ഒന്നാം അവകലജ പരിശോധനാ നിമയത്തിലേക്ക് തിരിച്ചു പോവുകയാണെങ്കിൽ $x = 1$ പ്രാദേശിക ഉന്നതവിലയോ, പ്രാദേശിക നിമ്ന വിലയോ ലഭിക്കുന്ന ബിന്ദുവല്ല എന്ന് കാണാം. (പരിശോധിക്കുക)

അതിനാൽ $x = 1$ ഒരു വ്യതിയാന ബിന്ദുവാണെന്നു ആണ് (point of inflexion).

ഉദാഹരണം : 34

രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ തുക 15, അവയുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക ഏറ്റവും കുറവും ആയാൽ സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

ഒരു സംഖ്യ x എന്ന് സങ്കല്പിച്ചാൽ അടുത്ത സംഖ്യ $(15 - x)$ ആകുമല്ലോ.
സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക $S(x)$ ആയാൽ

$$S(x) \quad x^2 + (15 - x)^2 \quad 2x^2 - 30x + 225$$

$$\therefore S'(x) = 4x - 30$$

$$S''(x) = 4$$

$S(x) = 0$ ആയാൽ $x \quad \frac{15}{2}$. കൂടാതെ $S''\left(\frac{15}{2}\right) = 4 > 0$ ആണ്. അതിനാൽ രണ്ടാം അവകലജ പരിശോധന പ്രകാരം $x = \frac{15}{2}$ എന്നത് പ്രാദേശിക നിമ്നവില ലഭിക്കുന്ന ബിന്ദുവാണ്.

അതുകൊണ്ട് സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക ഏറ്റവും കുറവ് ആകുന്നത് $\frac{15}{2}$, $15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ എന്നീ വിലകൾക്കാണ്.

നിർദ്ദിഷ്ട സംഖ്യകൾ $\frac{15}{2}, \frac{15}{2}$ എന്നിവയാണ്.

കുറിപ്പ്

ഉദാഹരണം 34 ൽ നിന്നും, രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ തുക k യും, അവയുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക ഏറ്റവും കുറവും ആകണമെങ്കിൽ സംഖ്യകൾ $\frac{k}{2}, \frac{k}{2}$ എന്നിവയായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 35

$y \quad x^2$ എന്ന സമവക്രത്തിൽ നിന്നും $(0, c)$ എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ അകലം കണ്ടെത്തുക. ഇവിടെ $0 \leq c \leq 5$ ആകുന്നു.

പരിഹാരം

(h, k) എന്നത് $y = x^2$ എന്ന സമവക്രത്തിലെ ഒരു പൊതുബിന്ദുവായി പരിഗണിക്കുക. നമുക്ക് (h, k), $(0, c)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. ഈ അകലത്തെ 'D' കൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചാൽ

$$D = \sqrt{(h-0)^2 + (k-c)^2} = \sqrt{h^2 + (k-c)^2} \text{ ....(1)}$$

(h, k) എന്നത് $y \quad x^2$ എന്ന സമവക്രത്തിലെ ബിന്ദു ആയതുകൊണ്ട് $k \quad h^2$ ആയിരിക്കും.

സമവാക്യം (1) ൽ നിന്നും

$$D \equiv D(k) = \sqrt{k + (k - c)^2} > 0$$

$$\therefore D'(k) \qquad \frac{1 + 2(k - c)}{2\sqrt{k + (k - c)^2}}$$

$D'(k) = 0$ ആയാൽ $\quad k = \dfrac{2c - 1}{2}$ ആയിരിക്കും

$k < \dfrac{2c - 1}{2}$ ആയാൽ $2(k - c) + 1 < 0$ ആകും. അതായത് $D'(k) < 0$. $k > \dfrac{2c - 1}{2}$ ആയാൽ $D'(k) > 0$ ഒന്നാം അവകലജ പരിശോധന ഉപയോഗിച്ച് $k = \dfrac{2c - 1}{2}$ യിൽ $D(k)$ ക്ക് നിമ്നവിലയാണ് ഉള്ളതെന്ന് പറയാം.

അതുകൊണ്ട് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ അകലം

$$= D\left(\frac{2c - 1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2c - 1}{2} + \left(\frac{2c - 1}{2} - c\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4c - 1}{2}}$$

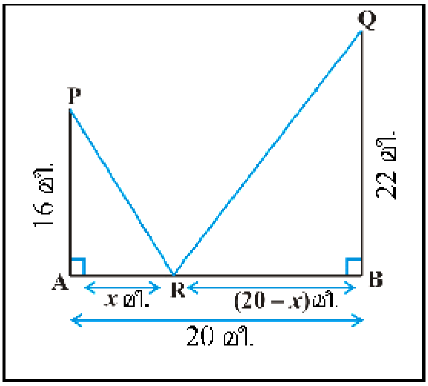
> **കുറിപ്പ്**
>
> ഉദാഹരണം 35 ൽ ഒന്നാം അവകലജ പരിശോധനാരീതിയാണ് രണ്ടാം അവകലജ പരിശോധനാ രീതിയേക്കാൾ ഹ്രസ്വവും, ലളിതവും, അതിനാൽ ഇവിടെ ആ മാർഗം സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 36

A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കുത്തനെവെച്ചിരിക്കുന്ന രണ്ടു കമ്പുകളാണ് AP, BQ എന്നിവ, $AP \quad 16$ മീ., $BQ = 22$ മീ, $AB = 20$ മീ ആകുന്നു. AB യിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണ് 'R' എങ്കിൽ $RP^2 - RQ^2$ ന്റെ വില ഏറ്റവും കുറഞ്ഞതാകുമ്പോൾ R എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് A യിൽ നിന്നുമുള്ള അകലം കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

R എന്ന ബിന്ദു AB യിൽ ആയതിനാൽ $AR \quad x$ മീ. എന്ന് സങ്കല്പിച്ചാൽ $RB \quad (20 - x)$ മീ. ആയിരിക്കുമല്ലോ.



ചിത്രം 6.20

ചിത്രം 6.21 ൽ നിന്നും $RP^2 = AR^2 \quad AP^2$;
$RQ^2 = RB^2 + BQ^2$.

$\therefore RP^2 \quad RQ^2 = AR^2 \quad AP^2 + RB^2 \quad BQ^2$

$= x^2 + (16)^2 + (20 - x)^2 + (22)^2$

$2x^2 - 40x^2 + 1140$

$S \equiv S(x) \quad RP^2 - RQ^2 \quad 2x^2 - 40x - 1140$ എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ.

$\therefore S'(x) = 4x - 40$

$\therefore S'(x) = 0$ ആയാൽ $x = 10$ എന്ന് ലഭിക്കും.

കൂടാതെ $S''(x) = 4 > 0$

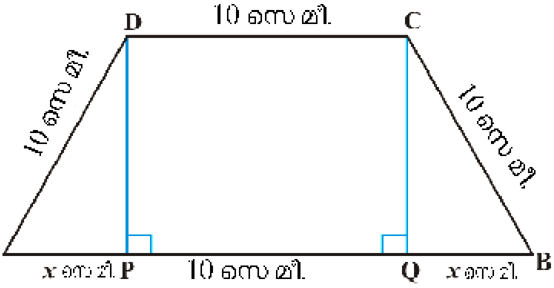
അതിനാൽ $S''(10) = 4 > 0$ ആയിരിക്കും. അപ്പോൾ രണ്ടാം അവകലജ പരിശോധന നിയമമനുസരിച്ച് $x = 10$ എന്നുള്ളത് S ന്റെ പ്രാദേശിക നിമ്നവില ലഭിക്കുന്ന ബിന്ദുവാണ്.

അതുകൊണ്ട് A യിൽ നിന്നും R ലേക്കുള്ള അകലം : $AR = x = 10$ മീ. ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 37

ഒരു ലംബകത്തിന്റെ പാദമല്ലാത്ത മൂന്ന് വശങ്ങളുടെയും നീളം 10 സെ.മീ. ആയാൽ ലംബകത്തിന്റെ ഏറ്റവും വലിയ പരപ്പളവ് കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം



ചിത്രം 6.21

ചിത്രം 6.22 പരിഗണിക്കുക. DP, CQ എന്നിവ പാദം AB യിലേക്കുള്ള ലംബങ്ങളാകുന്നു.

$AP = x$ സെ.മീ. എന്ന് സങ്കല്പിച്ചാൽ $\Delta APD \cong \Delta BQC$ ആയതിനാൽ $QB = x$ സെ.മീ. ആയിരിക്കും. പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം

$$DP = QC = \sqrt{100 - x^2}$$

ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് A ആണെന്ന് കരുതിയാൽ

$A \equiv A(x) \quad \frac{1}{2}$ (സമാന്തരവശങ്ങളുടെ തുക) (ഉയരം)

$$\frac{1}{2}(2x + 10 + 10)\sqrt{100 - x^2}$$

$$(x + 10)\sqrt{100 - x^2}$$

$$\therefore \quad A'(x) \qquad (x+10)\ \frac{(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}} + \sqrt{100-x^2}$$

$$\frac{-2x^2-10x+100}{\sqrt{100-x^2}}$$

$A'(x) = 0$ ആയാൽ $2x^2 + 10x - 100 = 0$

അതായത് $x \quad 5,\ x \quad -10$

പക്ഷേ $x \quad -10$ സാധ്യമല്ല (എന്തുകൊണ്ട്?)

അതിനാൽ $x \quad 5$ ആകുന്നു.

$$A''(x) = \frac{\sqrt{100-x^2}(-4x-10)-(-2x^2-10x+100)(-2x)/2\sqrt{100-x^2}}{(100-x^2)}$$

$$\frac{2x^2-300x-1000}{(100-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$A''(5) \quad \frac{2(5)^2-300(5)-1000}{(100-5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2250}{75\sqrt{75}}$$

$$\frac{-30}{\sqrt{75}} < 0$$

അതുകൊണ്ട് ലംബകത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ഏറ്റവും ഉയർന്ന വില സ്വീകരിക്കുന്നത് $x = 5$ ആകുമ്പോഴാണ്.

ഏറ്റവും കൂടിയ പരപ്പളവ്

$$A(5) \qquad = \quad (5+10)\ \sqrt{100-(5)^2} = 15\sqrt{75}$$

$$75\sqrt{3} \text{ ച.സെ.മീ.}$$

ഉദാഹരണം : 38

ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയിൽ അന്തർലേഖനം (inscribe) ചെയ്തിരിക്കുന്ന വൃത്തസ്തംഭങ്ങളിൽ വക്രമുഖ പരപ്പളവ് ഉയർന്ന വില സ്വീകരിക്കുന്നത് വൃത്ത സ്തംഭത്തിന്റെ ആരം, വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരത്തിന്റെ പകുതിയായിരിക്കുമ്പോഴാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

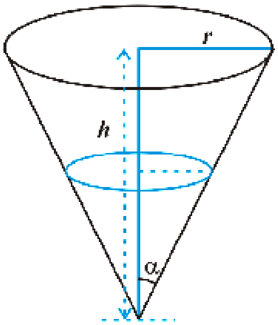
പരിഹാരം

ചിത്രം 6.23 പരിഗണിക്കുക. വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരും $OC = r$ എന്നും ഉയരം $OA = h$ എന്നും കരുതുക. വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആരം $OE = x$ ആയാൽ സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം QE കാണുന്നതിന് ΔQEC, ΔAOC എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

$$\frac{QE}{OA} = \frac{EC}{OC} \quad (\Delta QEC \sim \Delta AOC \text{ ആയതിനാൽ})$$

$$\Rightarrow \frac{QE}{h} = \frac{r - x}{r}$$

$$\Rightarrow QE = \frac{h}{r}(r - x)$$



ചിത്രം 6.22

വൃത്ത സ്തംഭത്തിന്റെ വക്രമുഖ പരപ്പളവ് S ആണെന്ന് സങ്കല്പിക്കുക.

$$S \equiv S(x) = \frac{2\pi x h(r - x)}{r} = \frac{2\pi}{r}(rx - x^2)$$

$$\therefore S'(x) = \frac{2\pi h}{r}(r - 2x)$$

$$S''(x) \quad \frac{-4\pi h}{r}$$

$S'(x) = 0$ ൽ ആയാൽ $x = \frac{r}{2}$ കൂടാതെ $S''\left(\frac{r}{2}\right) < 0$

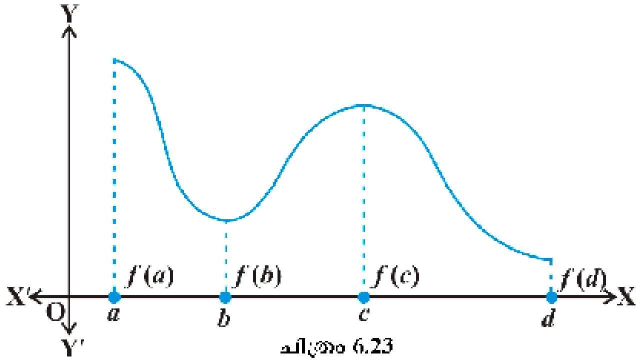
അതുകൊണ്ട് $x = \frac{r}{2}$ S ന്റെ ഉന്നതവില സ്വീകരിക്കുന്ന ബിന്ദുവാണ്. ആയതിനാൽ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വക്രമുഖ പരപ്പളവ് ഏറ്റവും കൂടുന്നത് സ്തംഭത്തിന്റെ ആരം വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരത്തിന് പകുതിയാകുമ്പോഴാണ്.

6.6.1 അടഞ്ഞ ഇടവേളയിൽ ഒരു ഏകദത്തിന്റെ നിമ്നോന്നത വിലകൾ

$f(x) = x + 2, x \in (0, 1)$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. $(0, 1)$ ൽ $f(x)$ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണല്ലോ. കൂടാതെ f ന് $(0, 1)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ ഉന്നതവിലയോ, നിമ്ന വിലയോ ഇല്ല എന്നും കാണാം. അതുകൊണ്ടു തന്നെ പ്രാദേശിക നിമ്നോന്നത വിലകളും ഇല്ല.

ഇനി f ന്റെ മണ്ഡലം അടഞ്ഞ ഇടവേള ആയി പരിഗണിച്ചാലും f ന് പ്രാദേശിക നിമ്നോന്നത വിലകൾ കണ്ടെത്താനാവില്ല. എന്നാൽ $[0, 1]$ ൽ f ന് ഉന്നത വില $f(1) = 3$, നിമ്ന വില $f(0) = 2$ ഉം ഉണ്ടെന്നു കാണാവുന്നതാണ്. ഇവിടെ $[0, 1]$ ൽ 3 എന്നത് f ന്റെ കേവല ഉന്നതവില (Absolute maximum value or global maximum or greatest value) എന്നും 2 എന്നത് f ന്റെ $[0, 1]$ ലെ കേവല നിമ്നവില (Absolute minimum value or global minimum or least value) എന്നും പറയുന്നു.

അടഞ്ഞഇടവേള $[a, b]$ യിലെ തുടർച്ചയുള്ള ഒരു ഏകദം ചിത്രം 6.24 ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഇതിൽ $x = b$ ആകുമ്പോൾ f ന് ഒരു പ്രാദേശിക നിമ്നവില, $f(b)$ ഉണ്ടെന്നും $x = c$ ആകുമ്പോൾ f ന് ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നതവില $f(c)$ ഉണ്ടെന്നും കാണാവുന്നതാണ്.



ചിത്രം 6.23

$f(x)$ എന്ന ഏകദത്തിന് (a, d) യിൽ $x = a$ ആകുമ്പോൾ കേവല ഉന്നതവില, $f(a)$ യും $x = d$ ആകുമ്പോൾ കേവല നിമ്നവില, $f(d)$ യും ഉണ്ടെന്ന് ഗ്രാഫിൽ നിന്നും വ്യക്തമാണല്ലൊ. മാത്രമല്ല കേവല നിമ്ന വില പ്രാദേശിക നിമ്ന വിലയിൽ നിന്നും വ്യത്യസ്തവുമാണ്. കേവല ഉന്നതവിലയും പ്രാദേശിക ഉന്നതവിലയും വ്യത്യസ്തമാണെന്നും കാണാം.

കേവല നിമ്നോന്നത വിലകളുമായി ബന്ധമുള്ള രണ്ട് സിദ്ധാന്തങ്ങൾ (തെളിവ് ഇവിടെ ആവശ്യമില്ല) ഇവിടെ സൂചിപ്പിക്കാം.

സിദ്ധാന്തം 5 : $I = [a, b]$ എന്ന ഇടവേളയിലെ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ് f എന്നിരിക്കട്ടെ. അങ്ങനെയെങ്കിൽ I ൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു വിലയിലെങ്കിലും f ന് കേവല ഉന്നത വില ഉണ്ടായിരിക്കും. അതുപോലെ I ലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വിലയിലെങ്കിലും f ന് കേവല നിമ്നവിലയും ഉണ്ടായിരിക്കും.

സിദ്ധാന്തം 6 : I എന്നത് ഒരു അടഞ്ഞ ഇടവേളയും f എന്നത് I യിലുള്ള ഒരു അവകലനീയ ഏകദവുമാണ് എന്നു കരുതുക. I യിലുള്ള ഒരു ആന്തരിക ബിന്ദുവാണ് c എങ്കിൽ,

i. $x = c$ ൽ f ന് കേവല ഉന്നതവിലയുണ്ടെങ്കിൽ $f'(c) = 0$

ii. $x = c$ ൽ f ന് കേവല നിമ്ന വിലയുണ്ടെങ്കിൽ $f'(c) = 0$ ആയിരിക്കും.

മേൽപ്പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങളിൽ നിന്ന് $[a, b]$ എന്ന അടഞ്ഞ ഇടവേളയിൽ ഏകദം $f(x)$ ന് കേവല നിമ്നോന്നത വിലകൾ കണ്ടെത്തുന്നതിനുള്ള മാർഗ രേഖ ചുവടെ കാണുന്ന വിധം രൂപീകരിക്കാം.

ഘട്ടം 1 : $[a, b]$ യിൽ ഏകദം f നുള്ള എല്ലാ നിർണായക ബിന്ദുക്കളും (critical points) കണ്ടുപിടിക്കുക. അതായത് $f'(x) = 0$ അല്ലെങ്കിൽ f അവകലനീയമല്ലാത്ത എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും x വിലകളും കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഘട്ടം 2 : ഇടവേളയുടെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $x = a,\ x = b$ എന്നിവ പരിഗണിക്കുക.

ഘട്ടം 3 : മുകളിൽ രണ്ടു ഘട്ടങ്ങളിലും കണ്ടുപിടിച്ച ബിന്ദുക്കളിൽ f ന്റെ വിലകൾ കണക്കാക്കുക.

ഘട്ടം 4 : ഘട്ടം 3 ൽ കണ്ടെത്തിയ f ന്റെ വിലകളിൽ ഏറ്റവും വലിയത് f ന്റെ കേവല ഉന്നതവിലയും ഏറ്റവും ചെറിയത് f ന്റെ കേവല നിമ്ന വിലയുമായി എടുക്കാം.

ഉദാഹരണം : 39

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ $[1, 5]$ എന്ന ഇടവേളയിലുള്ള കേവല ഉന്നതവിലയും കേവല നിമ്നവിലയും കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$$
$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x - 2)(x - 3)$$

$f'(x) = 0$ ആയാൽ $x = 2,\ x = 3$ ആകുമല്ലോ. f എന്ന ഏകദത്തിന്റെ വില ഈ ബിന്ദുക്കളിലും $[1, 5]$ എന്ന ഇടവേളയിലെ അഗ്രബിന്ദുക്കളായ $x = 1,\ x = 5$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും പരിശോധിച്ചാൽ

$$f(1) = 2(1^3) - 15(1^2) + 36(1) + 1 = 24$$
$$f(2) = 2(2^3) - 15(2^2) + 36(2) + 1 = 29$$
$$f(3) = 2(3^3) - 15(3^2) + 36(3) + 1 = 28$$
$$f(5) = 2(5^3) - 15(5^2) + 36(5) + 1 = 56$$

അതിനാൽ $[1, 5]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ $x = 5$ എന്ന ബിന്ദുവിലാണ് f കേവല ഉന്നത വിലയായ 56, അതു പോലെ $x = 1$ എന്ന ബിന്ദുവിലാണ് കേവല നിമ്നവിലയായ 24, കിട്ടുന്നത്

ഉദാഹരണം : 40

$f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}},\ x \in [-1, 1]$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ കേവല ഉന്നതവിലയും കേവല നിമ്ന വിലയും കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) \quad 16x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2(8x - 1)}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$f'(x) = 0$ ആയാൽ $x = \dfrac{1}{8}$ എന്ന് ലഭിക്കും. കൂടാതെ $x = 0$ ൽ $f'(x)$ നിർവചിക്കാൻ സാധ്യമല്ല (എന്തുകൊണ്ട്?). അതിനാൽ f ന്റെ വ്യതിയാന നിർണായക ബിന്ദുക്കൾ (critical points) $x = 0,\ x = \dfrac{1}{8}$ എന്നിവ ആണ്. ഈ വ്യതിയാന ബിന്ദുക്കളിൽ f ന്റെ വില പരിശോധിച്ചാൽ.

$$f(0) = 12(0) - 6(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) \quad 12\left(\frac{1}{8}\right)^{4/3} - 6\left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = \frac{-9}{4}$$

കൂടാതെ ഇടവേള $[-1, 1]$ അഗ്രബിന്ദുക്കളായ $x = 7, x = 1$ ലും f ന്റെ വില കാണുകയാണെങ്കിൽ

$$f(-1) = 12(-1)^{4/3} - 6(-1)^{1/3} = 18$$

$$f(1) = 12(1)^{4/3} - 6(1)^{1/3} = 6$$

ഇതിൽ നിന്നും f ന്റെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന വിലയായ 18 ലഭിക്കുന്നത് $x = -1$ ആകുമ്പോഴും ഏറ്റവും ചെറിയ വിലയായ $\dfrac{-9}{4}$ ലഭിക്കുന്നത് $x \quad \dfrac{1}{8}$ ആകുമ്പോഴുമാണ് എന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം : 41

ഒരു ശത്രുരാജ്യത്തിന്റെ 'അപ്പാച്ചെ' ഹെലികോപ്ടറിന്റെ സഞ്ചാരപഥം $y \quad x^2+7$ എന്ന വക്രത്തിനനുസൃതമായാണ്. (3, 7) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിലയുറപ്പിച്ച സൈനികൻ ഈ ഹെലികോപ്ടറിനെ അയാൾക്ക് ഏറ്റവും അടുത്ത് എത്തുന്ന സമയത്ത് വെടിവെച്ച് തകർക്കുവാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. ഹെലികോപ്ടറും സൈനികനും തമ്മിലുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ അകലം കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

ഹെലികോപ്ടറിന്റെ സഞ്ചാരപഥത്തിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവും $(x, y) = (x, x^2 + 7)$ എന്ന രീതിയിലാണ്. ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്നും സൈനികൻ നിലയുറപ്പിച്ച (3, 7) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം $= \sqrt{(x-3)^2 + (x^2+7-7)^2} \quad \sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ ആകുമല്ലോ.

$$f(x) = (x-3)^2 + x^4 \text{ എന്ന് കരുതിയാൽ}$$

$$f'(x) \quad 2(x-3) + 4x^3 \quad 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3).$$

$f'(x) = 0$ ആയാൽ $x = 1$ അല്ലെങ്കിൽ $2x^2 + 2x + 3 = 0$ ആകുമല്ലോ. പക്ഷേ $2x^2 + 2x + 3 = 0$ എന്ന ദ്വിമാനസമവാക്യത്തിന് രേഖീയമൂല്യങ്ങളില്ലെന്ന് കാണാം. (പരിശോധിക്കുക).

കൂടാതെ ഇടവേളയിലെ അഗ്രബിന്ദുക്കളിൽ $f'(x) = 0$ ആകുന്ന തരത്തിൽ ബിന്ദുക്കളില്ലാത്തതിനാൽ $x = 1$ എന്ന ഒരേ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രമേ $f'(x) = 0$ ആകുകയുള്ളൂ. ഈ ബിന്ദുവിൽ f ന്റെ വില $f(1) = (1 - 3)^2 + (1)^4 = 5$: കൂടാതെ $f''(x) = 2 + 12x^2$; $f''(1) = 2 + 12 > 0$ അതുകൊണ്ട് സൈനികനും ഹെലികോപ്ടറും തമ്മിലുള്ള കുറഞ്ഞ അകലം $\sqrt{f(1)} = \sqrt{5}$ ആകുന്നു.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 6.5

1. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങൾക്ക് ഉന്നതവിലയോ നിമ്നവിലയോ ഉണ്ടെങ്കിൽ കണ്ടുപിടിക്കുക.

   i) $f(x) = (2x-1)^2 + 3$ ii) $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$

   iii) $f(x) = -(x-1)^2 + 10$ iv) $g(x) = x^3 + 1$

2. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങൾക്ക് ഉന്നതവിലയോ നിമ്നവിലയോ ഉണ്ടെങ്കിൽ കണ്ടുപിടിക്കുക.

   i) $f(x) = |x+2| - 1$ ii) $g(x) = -|x+1| + 3$

   iii) $h(x) = \sin(2x) + 5$ iv) $f(x) = |\sin 4x + 3|$

   v) $h(x) = x + 1, x \in (-1, 1)$

3. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ പ്രാദേശിക ഉന്നതവില, പ്രാദേശിക നിമ്നവില എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

   i) $f(x) = x^2$ ii) $g(x) = x^3 - 3x$

   iii) $h(x) = \sin x + \cos x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

   iv) $f(x) = \sin x - \cos x, \quad 0 < x < 2\pi$ v) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$

   vi) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{2}, \; x > 0$ vii) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$

   viii) $f(x) = x\sqrt{1-x} \quad 0 < x < 1$

4) ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങൾക്ക് ഉന്നതവിലയോ നിമ്നവിലയോ ഇല്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.

i) $f(x)=e^x$ ii) $g(x)=\log x$

iii) $h(x)=x^3+x^2+x+1$

5) ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ കേവല ഉന്നതവിലയും കേവല നിമ്നവിലയും തന്നിരിക്കുന്ന ഇടവേളയിൽ കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $f(x)=x^3, \quad x\in[-2,2]$

ii) $f(x)=\sin x+\cos x, \quad x\in[0,\pi]$

iii) $f(x)=4x-\frac{1}{2}x^2, \quad x\in\left[-2,\frac{9}{2}\right]$

iv) $f(x)=(x-1)^2+3, \quad x\in[-3,1]$

6) ഒരു കമ്പനിയുടെ ലാഭത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഏകദം (Profit function) $p(x)=41-72x-18x^2$ ആണെങ്കിൽ ആ കമ്പനിക്ക് ലഭിക്കുന്ന പരമാവധി ലാഭം (Maximum Profit) കണക്കാക്കുക.

7) ഏകദം $3x^4-8x^3+12x^2-48x+25$ ന് (0, 3) ൽ ലഭിക്കുന്ന പരമാവധി ഉയർന്നവിലയും, കുറഞ്ഞവിലയും കണക്കാക്കുക.

8. ഇടവേള $[0,2\pi]$ ഏതെല്ലാം ബിന്ദുക്കളിലാണ് $\sin 2x$ ന് പരമാവധി ഉയർന്നവില സ്വീകരിക്കുന്നത് എന്നു കണക്കാക്കുക.

9. ഏകദം $\sin x+\cos x$ ന്റെ പരമാവധി ഉയർന്നവില എന്ത്?

10. ഏകദം $2x^3-24x+107$ ത്തിന് [1, 3] എന്ന ഇടവേളയിൽ ലഭിക്കുന്ന ഉന്നതവിലയും [- 3, - 1]എന്ന ഇടവേളയിൽ ലഭിക്കുന്ന ഉന്നതവിലയും കണ്ടുപിടിക്കുക.

11. ഏകദം x^4-62x^2+ax+9 ന് ഇടവേള $[0,2]$ ൽ $x=1$ ഒരു ഉന്നതവിലയുണ്ടെങ്കിൽ 'a' യുടെ വില കണക്കാക്കുക.

12. ഏകദം ഇടവേള $[0, 2\pi]$ യിലെ $x+\sin 2x$ ഉന്നതവിലയും നിമ്നവിലയും കണക്കാക്കുക.

13. തുക 24 ഗുണനഫലം ഏറ്റവും വലുതുമായ രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

14. തുക 60 xy^3 ഉന്നതവില വരുന്നതുമായ രണ്ട് അധിസംഖ്യകളാണ് x, y എങ്കിൽ സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

15. x, y എന്നീ രണ്ടു അധിസംഖ്യകളുടെ തുക 35 ഗുണനഫലം x^2y^5 എന്ന ഏറ്റവും ഉയർന്നവില സ്വീകരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നെങ്കിൽ x, y സംഖ്യകളുടെ വില കണക്കാക്കുക.
16. രണ്ട് അധിസംഖ്യകളുടെ തുക 16 അവയുടെ ഘനങ്ങളുടെ (cubes) തുക ഏറ്റവും കുറവുമാണെങ്കിൽ സംഖ്യകളേവ?
17. ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 18 സെ.മീ. ആയ സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ടിൻ ഷീറ്റിന്റെ നാലു മൂലകളിൽ നിന്നും ഒരേ വലിപ്പത്തിലുള്ള നാലു സമചതുര കഷണങ്ങൾ മുറിച്ചുമാറ്റി, ബാക്കി വരുന്ന ഭാഗങ്ങൾ മുകളിലേക്ക് മടക്കി അടപ്പില്ലാത്ത ഒരു പെട്ടിയുണ്ടാക്കുന്നു. ഇത്തരത്തിൽ നിർമിക്കാവുന്ന ഏറ്റവും ഉയർന്ന ഉള്ളളവുള്ള പെട്ടിയുടെ അളവുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
18. 45 സെ.മീ. നീളവും 24 സെ.മീ. വീതിയുമുള്ള ചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ടിൻ ഷീറ്റിന്റെ നാലു മൂലകളിൽ നിന്നും ഒരേ വലിപ്പത്തിലുള്ള നാലു സമചതുര കഷണങ്ങൾ മുറിച്ചുമാറ്റി, ബാക്കി വരുന്ന ഭാഗങ്ങൾ മുകളിലേക്ക് മടക്കി അടപ്പില്ലാത്ത ഒരു പെട്ടിയുണ്ടാക്കുന്നു. ഇത്തരത്തിൽ ഏറ്റവും ഉയർന്ന ഉള്ളളവുള്ള പെട്ടിയുടെ അളവുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
19. ഒരു നിശ്ചിത വൃത്തത്തിൽ ആലേഖനം ചെയ്തിട്ടുള്ള ചതുരങ്ങളിൽ ഏറ്റവും ഉയർന്ന പരപ്പളവുള്ളത് സമചതുരത്തിനാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
20. നിശ്ചിത ഉപരിതലപരപ്പളവുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ (സിലിണ്ടർ) ഉള്ളളവ് ഏറ്റവു ഉയർന്ന വിലയാകണമെങ്കിൽ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം അതിന്റെ പാദവ്യാസത്തിനു തുല്യമായിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.
21. വൃത്തസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള അടപ്പുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ ഉള്ളളവ് 100 ഘന സെ.മീ. ആണ്. ഇതിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയാകണമെങ്കിൽ പാത്രത്തിന്റെ അളവുകൾ കണക്കാക്കുക.
22. 28 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പി മുറിച്ച് രണ്ട് കഷണങ്ങളാക്കുന്നു. ഇതിൽ ആദ്യത്തെ കഷണമുപയോഗിച്ച് ഒരു സമചതുരവും രണ്ടാമത്തെ കഷണമുപയോഗിച്ച് ഒരു വൃത്തവും ഉണ്ടാക്കണം. ഈ രൂപങ്ങളുടെ ആകെ പരപ്പളവ് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയാകണമെങ്കിൽ ഓരോ കഷണത്തിന്റെയും നീളം എത്രയായിരിക്കും?
23. നിശ്ചിത ആരമുള്ള (R) ഒരു ഗോളത്തിനകത്ത് വെയ്ക്കാവുന്ന (അന്തർലേഖനം ചെയ്യാവുന്ന) ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തുപികയുടെ ഉള്ളളവ് ഗോളത്തിന്റെ ഉള്ളളവിന്റെ $\frac{8}{27}$ ഭാഗമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക
24. നിശ്ചിത ഉള്ളളവുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തുപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ് ഏറ്റവും ചെറിയവിലയാണെങ്കിൽ സ്തുപികയുടെ ഉയരം അതിന്റെ പാദ ആരത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ മടങ്ങാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

25. നിശ്ചിത ചരിവുയരം (പാർശ്വോന്നതി) ഉള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉള്ളളവ് ഏറ്റവുംഉയർന്ന വിലയാകുമ്പോൾ അതിന്റെ അർദ്ധശീർഷകോൺ (semi vertical angle) $\tan^{1}\sqrt{2}$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

26. ഒരു നിശ്ചിത ഉപരിതല പരപ്പളവുള്ള വൃത്തസ്തുപികയുടെ ഉള്ളളവ് ഏറ്റവും ഉയർന്ന വിലയാകുമ്പോൾ അതിന്റെ അർധശീർഷകോൺ $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

27 മുതൽ 29 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയുത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

27. $(0, 5)$ നോട് $x^2 = 2y$ എന്ന വക്രത്തിലെ ഏത് ബിന്ദുവാണ് ഏറ്റവും അടുത്തു സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്?

A) $\left(2\sqrt{2}, 4\right)$ B) $\left(2\sqrt{2}, 0\right)$

C) $(0, 0)$ D) $(2, 2)$

28. ഏതൊരു രേഖീയസംഖ്യ x നും $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില

A) 0 B) 1

C) 3 D) $\frac{1}{3}$

29. $\left[x(x-1)+1\right]^{\frac{1}{3}}$, $0 \le x \le 1$ ന്റെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന വില

A) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ B) $\frac{1}{2}$

C) 1 D) 0

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 42

ഒരു കാർ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും സമയം $t = 0$ സെക്കന്റിൽ പുറപ്പെട്ട് Q എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിർത്തുന്നു. t സെക്കന്റുകൾ കൊണ്ട് കാർ $x = t^2\left(2-\frac{t}{3}\right)$ മീറ്റർ ദൂരം

സഞ്ചരിച്ചാൽ P യിൽ നിന്നും Q വിലേക്കെത്താനുള്ള സമയവും ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലവും കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

കാറിന്റെ പ്രവേഗം t സെക്കന്റിൽ v ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$$x = t^2\left(2-\frac{t}{3}\right)$$

അതിനാൽ $$v = \frac{dx}{dt} = 4t - t^2 = t(4-t)$$

അതായത് $v=0$ ആയാൽ $t=0$ അല്ലെങ്കിൽ $t=4$ എന്നു ലഭിക്കും. P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും $v = 0$ ആണെന്നറിയാമല്ലോ.

കൂടാതെ P യിൽ $t = 0$ ആയതിനാൽ Q വിൽ $t = 4$ ആയിരിക്കും.

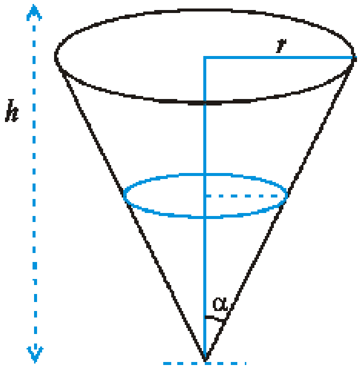
അതായത് P യിൽ നിന്ന് Q വിലേക്കെത്തുന്നതിന് 4 സെക്കന്റ് സമയം ആവശ്യമാണ്.

കൂടാതെ 4 സെക്കന്റിൽ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം

$$x = 4^2\left(2-\frac{4}{3}\right) = 16\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ മീറ്റർ}$$

ഉദാഹരണം : 43

ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന വൃത്തസ്തുപികാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ടാങ്കിന്റെ ശീർഷം താഴെയും അക്ഷം ലംബ രീതിയിലുമാണ്. കൂടാതെ അതിന്റെ അർധ ശീർഷകോൺ $\tan^{-1}(0.5)$ ആണ്. മണിക്കൂറിൽ 5 ഘന മീറ്റർ നിരക്കിൽ ടാങ്കിലേക്ക് വെള്ളം നിറയ്ക്കുന്നുവെങ്കിൽ ടാങ്കിലെ ജലനിരപ്പ് 4 മീറ്റർ ഉയരത്തിലാകുമ്പോൾ ജലനിരപ്പ് ഉയരുന്ന നിരക്ക് കണക്കാക്കുക.



ചിത്രം 6.24

പരിഹാരം

ചിത്രം 6.25 പരിഗണിക്കുക

$$\tan\alpha = \frac{r}{h}$$

ആയതിനാൽ $$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right)$$

പക്ഷേ $$\alpha = \tan^{-1}(0.5)$$

$$\frac{r}{h} = 0.5$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{h}{2}$$

വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉള്ളളവ് V ആയാൽ

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$$

ആയതിനാൽ ശൃംഖലാനിയമം അനുസരിച്ച്

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dh}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right)\frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

ഉള്ളളവിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് $\frac{dv}{dt} = 5$ ഘന.മീറ്റർ/മണിക്കൂർ. കൂടാതെ $h = 4$മീറ്റർ

അതിനാൽ $5 = \frac{\pi}{4}(4)^2\frac{dh}{dt}$

അഥവാ $\frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi} = \frac{35}{88}$ മീ/മണിക്കൂർ $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

അതുകൊണ്ട് ജലനിരപ്പിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് $\frac{35}{88}$ മീ/മണിക്കൂർ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 44

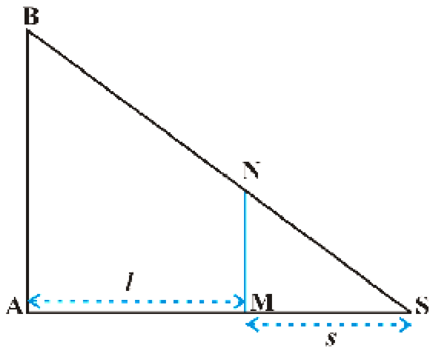
2 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ മണിക്കൂറിൽ 5 കി.മീ. വേഗതയിൽ ഒരു വിളക്കുകാലിന്റെ എതിർദിശയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. വിളക്കുകാലിന്റെ ഉയരം 6 മീറ്റർ ആയാൽ അയാളുടെ നിഴലിന്റെ നീളവർധനവിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

ചിത്രം 6.25 പരിഗണിക്കുക.

AB എന്ന വിളക്കുകാലിൽ ബൾബിന്റെ സ്ഥാനം B യാണെന്നും MN ഒരു പ്രത്യേക സമയം t യിൽ ആ വ്യക്തിയുടെ സ്ഥാനവുമാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക.

$AM = l$ മീറ്റർ എന്നും



ചിത്രം 6.25

$MS = S$ മീറ്റർ എന്നും പരിഗണിച്ചാൽ

$\Delta MSN \sim \Delta ASB$ ആണ്.

അപ്പോൾ $\dfrac{MS}{AS} = \dfrac{MN}{AB}$

$$\frac{MS}{AS} = \frac{2}{6}$$

$$AS = 3S \quad (MS = S)$$

$$AM = 3S - S = 2S \text{ പക്ഷേ } AM = l$$

അതായത് $l = 2S$

$$\frac{dl}{dt} = 2.\frac{ds}{dt}$$

$\dfrac{dl}{dt} = 5$ കി.മീ/മണിക്കൂർ ആയതിനാൽ

$\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{5}{2}$ കി.മീ./മണിക്കൂർ

അതിനാൽ നിഴലിന്റെ നീളം $\dfrac{5}{2}$ കി. മീ./മണിക്കൂർ എന്ന നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 45

$x^2 = 4y$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ ലംബം (1, 2) ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നുവെങ്കിൽ ലംബത്തിന്റെ സമവാക്യ കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$x^2 = 4y$ എന്ന വക്രത്തെ x അടിസ്ഥാനമാക്കി അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$$

ലംബത്തിന്റെ വക്രത്തിലുള്ള സംഗമബിന്ദു (h, k) ആയാൽ ഈ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ്

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(h,k)} = \frac{h}{2}$$

അതുകൊണ്ട് (h,k) എന്ന ബിന്ദുവിൽ ലംബത്തിന്റെ ചരിവ് $=\dfrac{-2}{h}$

ആയതിനാൽ (h,k) എന്ന ബിന്ദുവിലെ ലംബത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$y-k=\frac{-2}{h}(x-h)--------(1)$$

ഈ ലംബം $(1,2)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതിനാൽ

$$2-k=\frac{-2}{h}(1-h)$$

$$k=2+\frac{2}{h}(1-h)-------(2)$$

(h,k) എന്നുള്ളത് $x^2=4y$ എന്ന വക്രത്തിലെ ബിന്ദു ആയതിനാൽ

$$h^2=4k--------(3)$$

സമവാക്യങ്ങൾ (2), (3) എന്നിവയിൽ നിന്ന് $h=2,\quad k=1$ എന്നും ലഭിക്കും.

അതുകൊണ്ട് സമവാക്യം (1) ൽ നിന്ന് ലംബത്തിന്റെ സമവാക്യം $y-1=\dfrac{-2}{2}(x-2)$

അഥവാ $x+y=3$ എന്നു ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം : 46

$y=\cos(x+y),-2\pi\le x\le 2\pi$ എന്ന വക്രത്തിലെ തൊടുവര $x+2y=0$ എന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായാൽ തൊടുവരകളുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$y=\cos(x+y)$ യെ ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{dy}{dx}=-\sin(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}\left(1+\sin(x+y)\right)=-\sin(x+y)$$

അതായത് (x, y) എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ്

$$= \frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$$

തൊടുവരയ്ക്ക് സമാന്തരവരയുടെ ചരിവ് $\frac{-1}{2}$ ആയതിനാൽ

$$\frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x+y) = 1$$

$$\Rightarrow x+y = n\pi + (-1)^2 \frac{\pi}{2}, \quad n \in Z$$

അപ്പോൾ $$y = \cos(x+y) = \cos\left(n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}\right) \quad n \in Z$$

$$= 0, \quad n \in Z$$

കൂടാതെ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ആയതിനാൽ $x = \frac{-3\pi}{2}$ എന്നും $x = \frac{\pi}{2}$ എന്നും ലഭിക്കും.

അതായത്, തന്നിരിക്കുന്ന വക്രത്തിന്റെ തൊടുവര $x + 2y = 0$ എന്ന വരയ്ക്ക് $\left(\frac{-3\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സമാന്തരം ആണ്.

ആയതിനാൽ തൊടുവരയുടെ സമവാക്യം

$$y - 0 = \frac{-1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow (y-0) = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$ ആകുന്നു.

അതായത് $2x + 4y + 3\pi = 0$, $2x + 4y - \pi = 0$ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 47

ഏതെല്ലാം ഇടവേളകളിലാണ്

$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36x}{5} + 11$$

എന്ന ഏകദം

(a) കർശന ആരോഹണവും

(b) കർശന അവരോഹണവുമാകുന്നത് എന്ന് കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

$$f(x)=\frac{3}{10}x^4-\frac{4}{5}x^3-3x^2+\frac{36x}{5}+11$$

$$\therefore f'(x)=\frac{3}{10}\times 4x^3-\frac{4}{5}\times 3x^2-3\times 2x+\frac{36}{5}$$

$$=\frac{6}{5}(x-1)(x+2)(x-3)$$

$f'(x)=0$ ആയാൽ $x=1,\ x=-2,\ x=3$ എന്ന് ലഭിക്കും

സംഖ്യാരേഖയെ $(-\infty,-2),(-2,1),(1,3),(3,\infty)$ എന്നീ ഇടവേളകളായി ചിത്രം 6.27 ലേതുപോലെ ഭാഗിച്ചാൽ

ചിത്രം 6.26

$(-\infty,-2)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ $x<-2$ ആകുന്നതിനാൽ

$(x-1)<0, (x+2)<0,\ (x-3)<0$ എന്നും ലഭിക്കും.

$$f'(x)=(x-1)(x+2)(x-3)=(-4)(-1)(-6)<0$$

ഉദാഹരണമായി $x=-3$ ആയാൽ

$$f'(x)=(x-1)(x+2)(x-3)=(-4)(-1)(-6)<0$$

അതിനാൽ $x<-2$ ആകുമ്പോൾ $f'(x)<0$ ആകുന്നു.

അതായത് $f(x)$, $(-\infty,-2)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ കർശന അവരോഹണ ഏകദമാകുന്നു.

അടുത്തതായി $(-2,1)$ എന്ന ഇടവേള പരിഗണിച്ചാൽ $-2<x<1$. ഇവിടെ

$(x-1)<0, (x+2)>0, (x-3)<0$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

(ഉദാഹരണമായി $x=0$ ആകുമ്പോൾ $f'(x)=(-1)(2)(-3)=6>0$)

ആയതിനാൽ $(-2,1)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ $f'(x)>0$ ആകുന്നു

അപ്പോൾ $(-2,1)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ $f(x)$ കർശന ആരോഹണമാകുന്നു.

ഇനി $(1,3)$ എന്ന ഇടവേള പരിഗണിച്ചാൽ

$1<x<3$. ഇവിടെ $(x-1)>0,\ (x+2)>0, (x-3)<0$ എന്നും $f'(x)<0$ ആണ്.
അതായത് (1, 3) എന്ന ഇടവേളയിൽ $f(x)$ കർശന അവരോഹണ ഏകദമാകുന്നു.

അവസാനമായി $(3,\infty)$ എന്ന ഇടവേള പരിഗണിച്ചാൽ ഇവിടെ $x>3$ ആയതിനാൽ

$(x-1)>0,\ (x+2)>0,\ (x-3)>0$ ആയിരിക്കും. അപ്പോൾ $f'(x)>0$ ആകു മെന്ന് കാണാൻ കഴിയും.

അതിനാൽ $(3,\infty)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ $f(x)$ കർശന ആരോഹണ ഏകദമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 48

$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x),\ x > 0$ എന്ന ഏകദം ഒരു കർശന ആരോഹണ ഏകദമാ ണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x),\ x > 0$

അതിനാൽ $$f'(x)=\frac{1}{1+(\sin x+\cos x)^2}(\cos x-\sin x)$$

$$=\frac{\cos x-\sin x}{2+\sin 2x}$$

ഏതൊരു $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ നും $2+\sin 2x>0$ ആയിരിക്കുമല്ലോ.

അതിനാൽ $\cos x - \sin x > 0$ ആകുമ്പോൾ $\cos x > \sin x$ ആയിരിക്കും.

$\therefore \cos x > \sin x$ ആകുമ്പോൾ $f'(x)>0$ ആയിരിക്കും. അതായത് $\cot x > 1$ ആയാൽ

$f'(x)>0$ ആകും. $\tan x > 1$ ആയാൽ $\cot x > 1$ ആകും. അതായത് $0<x<\frac{\pi}{4}$

ആണ്. അതുകൊണ്ട്, $f'(x)>0$ ആകുന്നത് $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ ൽ ആണ്. അതായത്

$\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ എന്ന ഇടവേളയിൽ $f(x)$ ഒരു കർശന ആരോഹണ ഏകദമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 49

3 സെ.മീ. ആരമുള്ള വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു തകിട് ചൂടാക്കുന്നു. അതിന്റെ ആരം സെക്കന്റിൽ 0.05 സെ.മീ എന്ന നിരക്കിൽ വികസിക്കുന്നു. ആരം 3.2 സെ.മീ. ആകുമ്പോൾ അതിന്റെ പരപ്പളവിന് വരുന്ന വർദ്ധനവിന്റെ നിരക്കെത്ര?

പരിഹാരം

തകിടിന്റെ ആരം r എന്നും പരപ്പളവ് A എന്നും സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ

$$A \quad \pi r^2$$

ശൃംഖലാ നിയമം അനുസരിച്ച് അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

ആരത്തിൽ ഉള്ള വർദ്ധനവിന്റെ നിരക്ക് $= dr = \dfrac{dr}{dt} \times \Delta t$

$= 0.05$ സെ.മീ./സെ

ആയതിനാൽ പരപ്പളവിനുണ്ടാകുന്ന ഏകദേശ വർദ്ധനവ്

$$dA = \frac{dA}{dt}(\Delta t) = 2\pi r\left(\frac{dr}{dt}\Delta t\right)$$

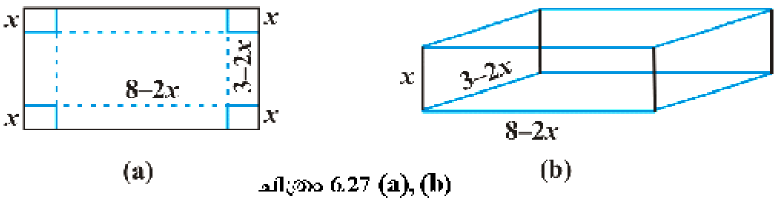
$2\pi\ (3.2)\ (0.05) = 0.320\pi$ ച.സെ.മീ./സെ.

ഉദാഹരണം : 50

8 മീ നീളവും 3 മീ. വീതിയുമുള്ള ചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു അലുമിനിയം ഷീറ്റിന്റെ നാലു മൂലകളിൽ നിന്നും ഒരേ വലിപ്പമുള്ള നാല് സമചതുര കഷണങ്ങൾ മുറിച്ചുമാറ്റി, ബാക്കിഭാഗം ഉള്ളിലേക്ക് മടക്കി മുകൾ വശം തുറന്നരീതിയിലുള്ള ഒരു പെട്ടിയുണ്ടാക്കുന്നു. ഇത്തരം പെട്ടിയുടെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന ഉള്ളളവ് എത്ര?

പരിഹാരം

ചിത്രം 6.28 (a), (b) എന്നിവ പരിഗണിക്കുക.



ചിത്രം 6.27 (a), (b)

മുറിച്ചു മാറ്റുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക, അപ്പോൾ പെട്ടിയുടെ ഉയരം x മീറ്റർ, നീളം $8 - 2x$ മീറ്റർ, വീതി $3 - 2x$ മീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയാകുന്നു.

പെട്ടിയുടെ ഉള്ളളവ് $V(x)$ ആയാൽ

$$\begin{aligned} V(x) &= x(3-2x)(8-2x) \\ &= 4x^3 - 22x^2 + 24x \end{aligned}$$

x ആധാരമാക്കി അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\begin{cases} V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 4(x-3)(3x-2) \\ V''(x) = 24x - 44 \end{cases}$$

$V'(x) = 0$ ആയാൽ $x = 3, \frac{2}{3}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

പക്ഷേ $x \neq 3$ (എന്തുകൊണ്ട്?)

അതിനാൽ $x = \frac{2}{3}$

ഇനി $V''\left(\frac{2}{3}\right) = 24\left(\frac{2}{3}\right) - 44 = -28 < 0$.

അതിനാൽ $x = \frac{2}{3}$ എന്നത് x ന്റെ ഒരു ഉയർന്ന വിലയാകുന്നു.

$\therefore$ മുറിച്ചു മാറ്റേണ്ട സമചതുരക്കഷണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം $\frac{2}{3}$ മീറ്റർ ആകുന്നു.

പെട്ടിയുടെ ഉള്ളളവ്

$$\begin{aligned} V\left(\frac{2}{3}\right) &= 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{200}{27} \text{ ഘനമീ.} \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം : 51

ഒരു നിർമ്മാതാവ് x ഉൽപന്നങ്ങൾ, $\left(5 - \frac{x}{100}\right)$ രൂപ നിരക്കിൽ വിൽക്കുവാൻ കഴി

യും x ഉൽപന്നങ്ങളുടെ വാങ്ങിയ വില $\left(\frac{x}{5}+500\right)$ രൂപ ആയാൽ, പരമാവധി ലാഭം ലഭിക്കുവാൻ അയാൾ എത്ര എണ്ണം ഉൽപന്നങ്ങൾ വിൽക്കണം?

പരിഹാരം

x ഉൽപന്നങ്ങളുടെ വാങ്ങിയ വില $C(x)$, വിറ്റ വില $S(x)$ ആണെന്ന് കരുതുക.

അപ്പോൾ
$$S(x) = \left(5-\frac{x}{100}\right)x = 5x-\frac{x^2}{100}$$

$$C(x) = \frac{x}{5}+500 \text{ ഉം ആകുന്നു;}$$

ലാഭം,
$$P(x) = S(x)-C(x) = 5x-\frac{x^2}{100}-\frac{x}{5}-500$$

$$P(x) = \frac{24}{5}x-\frac{x^2}{100}-500$$

$$\therefore\ P'(x) = \frac{24}{5}-\frac{x}{50}$$

$P'(x) = 0$ ആയാൽ $x = 240$.

$P''(x)=\frac{-1}{50}$. അപ്പോൾ $P''(240)=\frac{-1}{50}<0$ ആകയാൽ $x = 240$ എന്നത് x ന്റെ ഒരു ഉയർന്ന വിലയാകുന്നു. അതുകൊണ്ട് പരമാവധി ലാഭം ലഭിക്കുവാൻ അയാൾ 240 എണ്ണം ഉൽപന്നങ്ങൾ വിൽക്കേണ്ടിയിരിക്കുന്നു.

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. അവകലനം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ ഏകദേശവില കണക്കാക്കുക.

   (a) $\left(\frac{17}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$ (b) $(33)^{-\frac{1}{5}}$

2. $f(x)=\frac{\log x}{x}$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഉന്നതവില $x = e$ എന്ന ബിന്ദുവിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

3. ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ പാദം 'b' യൂണിറ്റ് നീളമാണ്. അതിന്റെ രണ്ട് തുല്യവശങ്ങളുടെ നീളം സെക്കന്റിൽ 3 സെ.മീ. എന്ന നിരക്കിൽ കുറയുന്നു. ത്രികോണത്തിന്റെ തുല്യവശങ്ങളുടെ നീളം പാദത്തിന്റെ നീളത്തിന് തുല്യമാകുമ്പോൾ അതിന്റെ പരപ്പളവിലുണ്ടാകുന്ന വ്യത്യാസത്തിന്റെ നിരക്ക് എത്ര?

4. $(1, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും $x^2 = 4y$ എന്ന വക്രത്തിനു ലംബവുമായ വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

5. $x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta$, $y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta$ എന്ന വക്രത്തിലെ ഏതൊരു ബിന്ദു θ യിൽ കൂടി വരയ്ക്കുന്ന ലംബം ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഒരേ അകലത്തിലായിരിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. ഏതെല്ലാം ഇടവേളകളിലാണ് $f(x) = \dfrac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$ എന്ന ഏകദം ആരോഹണവും അവരോഹണവുമാകുന്നത് എന്ന് കണ്ടെത്തുക.

7. ഏതെല്ലാം ഇടവേളകളിലാണ് $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$, $x \neq 0$ എന്ന ഏകദം ആരോഹണവും അവരോഹണവുമാകുന്നത്?

8. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന ന്യൂനവക്രത്തിൽ ദീർഘ അക്ഷത്തിലെ ഒരു അഗ്രബിന്ദു ശീർഷമായി വരുന്ന രീതിയിൽ ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണം ആലേഖനം ചെയ്താൽ അതിന്റെ പരമാവധി പരപ്പളവ് എത്ര?

9. മുകൾഭാഗം തുറന്നതും പാദവും വശങ്ങളും ചതുരാകൃതിയിലുള്ളതും ആഴം 2 മീറ്ററും ഉള്ളളവ് 8 ഘനമീറ്ററുമായ ഒരു ടാങ്ക് നിർമിക്കേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. ഇതിന്റെ പാദം നിർമ്മിക്കുവാൻ ച. മീറ്ററിന് 70 രൂപ നിരക്കിലും വശങ്ങൾ ച. മീറ്ററിന് 45 രൂപ നിരക്കിലും ചെലവ് വരുന്നുവെങ്കിൽ ഇത്തരം ടാങ്ക് നിർമിക്കുവാൻ വേണ്ട ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചെലവ് എത്രയാണെന്ന് കണക്കാക്കുക.

10. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെയും സമചതുരത്തിന്റെയും ചുറ്റളവുകളുടെ തുക k എന്ന സ്ഥിരസംഖ്യയാകുന്നു. അവയുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുക ഏറ്റവും കുറയുന്നത് സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ ഇരട്ടിയാകുമ്പോഴാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

11. ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിനു മുകളിൽ അതേ നീളം വ്യാസമായി വരുന്ന രീതിയിൽ ഒരു അർദ്ധവൃത്തം ഘടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന മാതൃകയിൽ ഒരു ജനൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. ഈ ജനലിന്റെ ആകെ ചുറ്റളവ് 10 മീറ്റർ ആയാൽ ഇതി

ലുടെ ഏറ്റവും കൂടുതൽ വെളിച്ചം കടത്തിവിടാനുള്ള ജനലിന്റെ അളവുകൾ കണ്ടെത്തുക.

12. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിലെ കർണത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളിൽ നിന്നും യഥാക്രമം 'a', 'b' യൂണിറ്റ് അകലെയാണ്. എന്നാൽ കർണത്തിന്റെ ഏറ്റവും കൂടിയ നീളം $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

13. $f(x)=(x-2)^4(x+1)^3$ എന്ന ഏകദത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ താഴെപ്പറയുന്ന നിബന്ധനകൾക്കനുസൃതമായി കണക്കാക്കുക.
    (i) പ്രാദേശിക ഉന്നതവിലയിൽ
    (ii) പ്രാദേശിക നിമ്നവിലയിൽ
    (iii) വ്യതിയാന ബിന്ദുവിൽ

14. $f(x)=\cos^2 x+\sin x, x\in[0,\pi]$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ കേവല ഉയർന്ന വിലയും (absolute maximum) കേവല നിമ്നവിലയും (absolute minimum) കണക്കാക്കുക.

15. നിശ്ചിത ആരം r ഉള്ള ഒരു ഗോളത്തിനകത്ത് വയ്ക്കാവുന്നതും ഗോളത്തെ സ്പർശിക്കുന്നതുമായ (അന്തർലേഖനം ചെയ്യുന്ന) വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ഉള്ളളവ് ഏറ്റവും ഉയർന്നവിലയാകുമ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം $\frac{4r}{3}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

16. (a, b) എന്ന ഇടവേളയിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു ഏകദമാണ് f. കൂടാതെ എല്ലാ $x\in(a,b)$ യ്ക്കും $f'(x)>0$ ആണ്. എന്നാൽ (a, b) യിൽ f ഒരു ആരോഹണ ഏകദമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

17. R എന്ന നിശ്ചിത ആരമുള്ള ഒരു ഗോളത്തിനകത്ത് വെയ്ക്കാവുന്ന (അന്തർലേഖനം ചെയ്യാവുന്ന) വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ഉള്ളളവ് ഏറ്റവും ഉന്നത വിലയാകുമ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ സ്തൂപികയുടെ ഉള്ളളവിന്റെ ഉന്നതവിലയും കണക്കാക്കുക.

18. നിശ്ചിത ഉയരം h, അർധശീർഷകോൺ α യും ഉള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപികക്കകത്ത് വെയ്ക്കാവുന്ന (ആലേഖനം ചെയ്യാവുന്ന) വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉള്ളളവ് ഏറ്റവും ഉയർന്ന വിലയാകുമ്പോൾ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം സ്തൂപികയുടെ ഉയരത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണെന്നും വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉള്ളളവിന്റെ ഉന്നതവില $\frac{4}{27}\pi h^3\tan^2\alpha$ എന്നും തെളിയിക്കുക.

19. 10 മീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ടാങ്കിൽ മണിക്കൂറിൽ 314 ഘന മീറ്റർ നിരക്കിൽ വെള്ളം നിറയ്ക്കുന്നു. എന്നാൽ ടാങ്കിലെ ജലനിരപ്പ് ഉയരുന്നതിന്റെ നിരക്ക് .... ആകുന്നു.

a) 1 മീറ്റർ/മണിക്കൂർ b) 0.1 മീറ്റർ/മണിക്കൂർ

c) 1.1 മീറ്റർ/മണിക്കൂർ d)0.5 മീറ്റർ/മണിക്കൂർ

20. വക്രം $x = t^2 + 3t - 8,\ y = 2t^2 - 2t - 5$ ലെ $(2\ -1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് .... ആകുന്നു.

a) $\frac{22}{7}$ b) $\frac{6}{7}$ c) $\frac{7}{6}$ d) $\frac{-6}{7}$

21. $y^2 = 4x$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ തൊടുവര $y = mx + 1$ ആയാൽ *'m'* ന്റെ വില

a) 1 b) 2 c) 3 d) $\frac{1}{2}$

22. വക്രം $2y + x^2 = 3$ ലെ $(1,1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലെ ലംബത്തിന്റെ സമവാക്യം .... ആകുന്നു.

a) $x + y = 0$ b) $x - y = 0$

c) $x + y + 1 = 0$ d) $x - y = 1$

23. വക്രം $x^2 = 4y$ ലെ $(1, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവിലെ ലംബം .... ആകുന്നു.

a) $x + y = 3$ b) $x - y = 3$

c) $x + y = 1$ d) $x - y = 1$

24. $9y^2 = x^3$ എന്ന വക്രത്തിലെ ഏത് ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ലംബമാണ് അക്ഷങ്ങളുമായി തുല്യ ഇട അകലം **(Intercepts)** പാലിക്കുന്നത്.

a) $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$ b) $\left(4, \frac{-8}{3}\right)$

c) $\left(4, \pm\frac{3}{8}\right)$ d) $\left(\pm 4, \frac{3}{8}\right)$

സംഗ്രഹം

- y എന്ന വസ്തു x എന്ന വസ്തുവിനെ ആധാരമാക്കി $y = f(x)$ എന്ന നിയമ പ്രകാരം മാറ്റത്തിനു വിധേയമകുന്നുവെങ്കിൽ x ആധാരമാക്കിയുള്ള y യുടെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെ $\frac{dy}{dx}$ (അല്ലെങ്കിൽ $f'(x)$) എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $x = x_0$ ൽ y യുടെ x ആധാരമാക്കിയുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (അല്ലെങ്കിൽ $f'(x_0)$) എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.
- x, y എന്നീ ചരങ്ങൾ മറ്റൊരു ചരമായ t ആധാരമാക്കി മാറുന്നുവെങ്കിൽ – അതായത്, $x = f(t)$, $y = g(t)$ എങ്കിൽ – ശൃംഖലാ നിയമപ്രകാരം

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}, \left(\frac{dx}{dt} \neq 0 \text{ എങ്കിൽ}\right)$$

- ഏകദം f
  - (a) ഇടവേള (a, b) യിലെ എല്ലാ x_1, x_2 നും $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ പാലിക്കുന്നുവെങ്കിൽ (a, b) യിലെ ഓരോ x നും $f'(x) \geq 0$ ആകും. ഇവിടെ f ഒരു ആരോഹണ ഏകദമാണ്.
  - (b) ഇടവേള (a,b) യിലെ എല്ലാ x_1, x_2 നും $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ പാലിക്കുന്നുവെങ്കിൽ (a, b) യിലെ ഓരോ x നും $f'(x) \leq 0$ ആകും ഇവിടെ f ഒരു അവരോഹണ ഏകദമാണ്.
- വക്രം $y = f(x)$ ന് (x_0, y_0) എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ സമവാക്യം.

$$y - y_0 = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)} (x - x_0) \text{ ആണ്.}$$

- (x_0, y_0) എന്ന ബിന്ദുവിൽ $\frac{dy}{dx}$ ഇല്ലെങ്കിൽ ഈ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവര y അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായിരിക്കും അതിന്റെ സമവാക്യം $x = x_0$ ആണ്.
- വക്രം $y = f(x)$ ന്റെ $x = x_0$ ലെ തൊടുവര x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണെങ്കിൽ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0} = 0$

- വക്രം $y = f(x)$ ന് (x_0, y_0) എന്ന ബിന്ദുവിലെ ലംബത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$y - y_0 = \frac{-1}{\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)}}(x - x_0)$$ ആണ്.

- (x_0, y_0) എന്ന ബിന്ദുവിൽ $\frac{dy}{dx}$ പൂജ്യമാണെങ്കിൽ ലംബത്തിന്റെ സമവാക്യം $x = x_0$ ആണ്.

- (x_0, y_0) എന്ന ബിന്ദുവിൽ $\frac{dy}{dx}$ ഇല്ലെങ്കിൽ ലംബം x അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായിരിക്കും. അതിന്റെ സമവാക്യം $y = y_0$ ആണ്.
- $y = f(x)$ എന്നിരിക്കട്ടെ. x ലെ വർധനവ് Δx ഉം അതിനനുസൃതമായി y ലെ വർധനവ് Δy യും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. അതായത്, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. $dx = \Delta y$ താരതമ്യേന ചെറുതായിരിക്കെ Δy യുടെ ഒരു നല്ല ഏകദേശമാണ്.

$$dy = f'(x)dx \text{ അല്ലെങ്കിൽ } dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x .$$

ഇതിനെ $dy \approx \Delta y$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.
- $f'(c) = 0$ ആവുകയോ f അവകലനീയമല്ലാതിരിക്കുകയോ ചെയ്യുന്ന f ന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ c എന്ന ബിന്ദുവിനെ f ന്റെ നിർണായക ബിന്ദു എന്നു പറയുന്നു.
- **ഒന്നാം അവകലജ പരിശോധന** തുറന്ന ഇടവേള I യിൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ട ഏകദമാണ് f എന്നിരിക്കട്ടെ. I ലെ c എന്ന നിർണായക ബിന്ദുവിൽ f തുടർച്ചയുള്ളതാണെന്നുമിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ
  - (i) c യിലൂടെ x വർധിക്കുന്നതനുസരിച്ച് $f'(x)$ ന്റെ വില അധിസംഖ്യയിൽ നിന്നും ന്യൂനസംഖ്യയിലേക്കു മാറുന്നുവെങ്കിൽ, അതായത്, c യോട് വളരെ അടുത്ത് c യ്ക്ക് ഇടതുവശത്തുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും $f'(x) > 0$ ആവുകയും c യോട് വളരെ അടുത്ത് c യ്ക്ക് വലതുവശത്തുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും $f'(x) < 0$ ആവുകയും ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ c ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നതവില ബിന്ദുവാണെന്നു പറയുന്നു.
  - (ii) c യിലൂടെ x വർധിക്കുന്നതനുസരിച്ച് $f'(x)$ ന്റെ വില ന്യൂന സംഖ്യയിൽ നിന്നും അധിസംഖ്യയിലേക്കു മാറുന്നുവെങ്കിൽ, അതായത്, c യോട് വളരെ അടുത്ത് c യ്ക്ക് ഇടതുവശത്തുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്ക

ളിലും $f'(x) < 0$ ആവുകയും c യോട് വളരെ അടുത്ത് c യ്ക്ക് വലതു വശത്തുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും $f'(x) > 0$ ആവുകയും ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ c ഒരു പ്രാദേശിക നിമ്നവില ബിന്ദുവാണെന്നു പറയുന്നു.

(iii) c യിലൂടെ x വർധിക്കുന്നതനുസരിച്ച് $f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം മാറുന്നുവെങ്കിൽ, c ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നത വിലയോ പ്രാദേശിക നിമ്നവിലയോ അല്ല. അത്തരം ബിന്ദുവിനെ വ്യതിയാന ബിന്ദുവെന്നു പറയുന്നു.

- **രണ്ടാം അവകലജ പരിശോധന** ഇടവേള I നിർവചിക്കപ്പെട്ട ഏകദമാണ് f എന്നിരിക്കട്ടെ. $c \in$ I എന്നുമിരിക്കട്ടെ, c യിൽ f രണ്ടു പ്രാവശ്യം അവകലനീയമാണെങ്കിൽ,

  (i) $f'(c) = 0$ ഉം $f''(c) < 0$ ഉം ആണെങ്കിൽ $x = c$ ഒരു പ്രാദേശിക ഉന്നത വില ബിന്ദുവാണ്. f ന്റെ പ്രാദേശിക ഉന്നതവിലയാണ് $f(c)$.

  (ii) $f'(c) = 0$ ഉം $f''(c) > 0$ ഉം ആണെങ്കിൽ $x = c$ ഒരു പ്രാദേശിക നിമ്ന വില ബിന്ദുവാണ്. f ന്റെ പ്രാദേശിക നിമ്ന വിലയാണ് $f(c)$.

  (iii) $f'(c) = 0, f''(c) = 0$ എങ്കിൽ പരീക്ഷണം പരാജയപ്പെടുന്നു.

  ഈയവസരത്തിൽ നമ്മൾ ഒന്നാം അവകലജ പരീക്ഷണമുപയോഗിച്ച് c ഒരു ഉന്നതവിലയോ നിമ്നവിലയോ വ്യതിയാന ബിന്ദുവോ എന്നു പരിശോധിക്കുന്നു.

- കേവല ഉന്നതവിലയും കേവല നിമ്നവിലയും കാണാനുള്ള പ്രായോഗിക പദ്ധതി.

  ഘട്ടം 1 : ഇടവേളയിലെ f ന്റെ എല്ലാ നിർണായക ബിന്ദുക്കളും കാണുക. അതായത്, $f'(x) = 0$ ആവുകയോ f അവകലനീയമല്ലാതാവുകയോ ചെയ്യുന്ന ബിന്ദുക്കൾ.

  ഘട്ടം 2 : ഇടവേളയിലെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ പരിഗണിക്കുക.

  ഘട്ടം 3 : ഘട്ടം 1, 2 എന്നിവയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും f ന്റെ വില കാണുക.

  ഘട്ടം 4 : ഘട്ടം 3 ൽ കണക്കാക്കിയ എല്ലാ വിലകളിൽ നിന്നും f ന്റെ ഉന്നതവിലയും നിമ്നവിലയും കണ്ടെത്തുക. ഈ ഉന്നതവില f ന്റെ കേവല ഉന്നതവിലയും നിമ്നവില f ന്റെ കേവലനിമ്നവിലയുമായിരിക്കും.

അനുബന്ധം 1

ഗണിതത്തിലെ തെളിവുകൾ (Proofs in Mathematics)

❖ കവിതയ്ക്ക് അക്ഷരവിന്യാസം പോലെയാണ് ഗണിതത്തിന് തെളിവുകൾ. കവിതയിൽ അക്ഷരങ്ങളെന്നപോലെ ഗണിതത്തിൽ തെളിവുകളുണ്ട് – വ്ളദിമിർ ആർനോൾഡ് ❖

A.1.1 ആമുഖം

ഗണിത പ്രസ്താവനകൾ സംയുക്ത പ്രസ്താവനകൾ, ഒരു ഗണിത പ്രസ്താവനയുടെ നിഷേധം, വിപരീതപ്രസ്താവനകൾ, എതിർ നിഷേധാനുകൂല പ്രസ്താവനകൾ, സ്വയംപ്രമാണങ്ങൾ, സിദ്ധാന്തങ്ങൾ എന്നിവയെക്കുറിച്ചെല്ലാം 11-ാം ക്ലാസിൽ നാം ചർച്ച ചെയ്തിരുന്നല്ലോ. ഈ അധ്യായത്തിൽ ഗണിതത്തിലെ തെളിവുകളുടെ വിവിധ രീതികളെപ്പറ്റിയാണ് ചർച്ചചെയ്യുന്നത്.

A.1.2 എന്താണ് 'തെളിവ്'?

ഗണിതത്തിൽ വളരെ പ്രാധാന്യമുള്ള ഒന്നാണല്ലോ തെളിവ്? എന്താണ് യഥാർത്ഥത്തിൽ തെളിവ്? ഒരു കാര്യം സമർത്ഥിക്കാനായി യുക്തിപൂർവം അടുക്കിയടുക്കി വെക്കുന്ന ഗണിത പ്രസ്താവനകളാണ് തെളിവ് എന്ന് ചുരുക്കി പറയാം. ഈ ഗണിത പ്രസ്താവനകളോരോന്നും ഒരു നിർവ്വചനം കൊണ്ടോ, സിദ്ധാന്തം കൊണ്ടോ മുൻകൂട്ടി സമർത്ഥിക്കപ്പെട്ടവയായിരിക്കണം.

പലപ്പോഴും ഒരു അനുപ്രമാണത്തിൽ (Proposition) തന്നിരിക്കുന്ന വസ്തുതകൾ ഉപയോഗിച്ചുകൊണ്ടുതന്നെ നേരിട്ട് അതിന്റെ തെളിവ് അവതരിപ്പിക്കാനായേക്കും. എന്നാൽ ചില സാഹചര്യങ്ങളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന അനുപ്രമാണത്തിന് തത്തുല്യമായ അനുപ്രമാണം തെളിയിക്കുന്നതായിരിക്കും കൂടുതൽ ലളിതമായിരിക്കുന്നത്. ഇതിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തെളിവുകളെ നേരിട്ടുള്ളവ (Direct) എന്നും നേരിട്ടല്ലാത്തവ (Indirect) എന്നും രണ്ടായി തിരിക്കാം. ഇവയോരോന്നും ചുവടെ കൊടുത്ത രീതിയിൽ വീണ്ടും മൂന്നായിതരം തിരിക്കാവുന്നതാണ്.

നേരിട്ടുള്ള തെളിവ്

തെളിയിക്കേണ്ട അനുപ്രമാണത്തിൽ (ഗണിത ആശയത്തിൽ) തന്നിരിക്കുന്ന കാര്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് നേരിട്ട് തെളിവിലേക്കെത്തുന്ന രീതിയാണിത്. ഇതുതന്നെ മൂന്ന് വ്യത്യസ്ത രീതികളിൽ ആകാം.

(i) നേർക്കുനേർ സമീപനം (Straight forward approach)

സ്വയംപ്രമാണങ്ങളുടെയും നിർവചനങ്ങളുടെയും തെളിയിക്കപ്പെട്ട സിദ്ധാന്ത ങ്ങളുടെയും സഹായത്തോടെ തന്നിരിക്കുന്ന വസ്തുതകളിൽ നിന്നോ സങ്കല്പങ്ങളിൽ നിന്നോ നേരിട്ട് യുക്തിനിയമങ്ങളുടെ പിൻബലത്തിൽ വാദ ങ്ങളുടെ ശൃംഖലയായി അവതരിപ്പിക്കുന്ന രീതി.

ഉദാഹരണം : 1

$x^2 - 5x + 6 = 0$, എങ്കിൽ $x = 3$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 2$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$x^2 - 5x + 6 = 0$ (തന്നിട്ടുണ്ട്)

$\Rightarrow (x-3)(x-2) = 0$ (ഒരു പ്രസ്താവന മാറ്റി തത്തുല്യമായ പ്രസ്താവന എഴുതുന്നു)

$\Rightarrow x - 3 = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $x - 2 = 0$ ($ab = 0 \Rightarrow a = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $b = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$ എന്ന സിദ്ധാന്തം)

$\Rightarrow x - 3 + 3 = 0 + 3$ അല്ലെങ്കിൽ $x - 2 + 2 = 0 + 2$

(ഒരു സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുവശങ്ങളിലും ഒരേ സംഖ്യകൂട്ടുന്നത് ആ സമവാക്യ ത്തിന്റെ സ്വഭാവത്തെ മാറ്റുന്നില്ല)

$\Rightarrow x + 0 = 3$ അല്ലെങ്കിൽ $x + 0 = 2$ $[x + -x = 0;\ x \in \mathbf{R}]$

$\Rightarrow x = 3$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 2$ $[x + 0 = x;\ x \in \mathbf{R}]$

അതിനാൽ $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 2$.

വിശദീകരണം

തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവന $x^2 - 5x + 6 = 0$ എന്നതിന് p എന്ന പേർ നൽകുന്നു. നമുക്ക് എത്തിച്ചേരേണ്ട പ്രസ്താവനയായ $x = 3$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 2$ എന്നും എടു ക്കുക.

p എന്ന പ്രസ്താവനയിൽ നിന്നും നമുക്ക് r എന്ന അടുത്ത പ്രസ്താവനയായ r : $(x-3)(x-2) = 0$ എന്നതിലേക്കെത്താം. അപ്പോൾ രണ്ടു കാര്യങ്ങൾ മുന്നിലെ ത്തുന്നു.

(i) എങ്ങനെയാണ് $(x-3)(x-2)$ എന്നത് $x^2 - 5x + 6$ ന് തുല്യമായതായത്?

(ii) എങ്ങനെയാണ് ഒരു പ്രസ്താവനയെ മാറ്റി പകരം അതിന് തുല്യമായ പ്രസ്താ വന എഴുതാൻ കഴിയുക?

ഇതിൽ ആദ്യത്തേത് മുൻക്ലാസുകളിൽ ഘടകങ്ങളുടെ പാഠത്തിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്.

അതായത്, $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x-3) - 2(x-3) = (x-3)(x-2)$.

രണ്ടാമത്തേത് യുക്തിയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ശരിയാകുന്ന കാര്യമാണ്.

ഇനി r എന്ന പ്രസ്താവനയിൽ നിന്ന് നമുക്ക് $s : x - 3 = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $x - 2 = 0$ എന്ന പ്രസ്താവനയിലേക്കെത്താം.

ഇങ്ങനെ ഒരു പ്രസ്താവനയിൽ നിന്ന് തുടങ്ങി അടുത്ത പ്രസ്താവനയിലേക്ക് എത്തി ആ പ്രക്രിയ തുടർന്ന് അവസാനം തെളിയിക്കേണ്ട പ്രസ്താവനയിലേക്കെത്തിച്ചേരുന്നു.

അതായാത് ഈ പ്രക്രിയയെ ആകെ ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിപ്പറയാം.

p യിൽ തുടങ്ങി, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow \ldots \Rightarrow q$.

ഇതിൽ നിന്ന് $p \Rightarrow q$ എന്നത് ശരിയാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം : 2

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 5$ എന്നത് ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

x_1, x_2, എന്നീ R ലെ ഏതു രണ്ടു വിലകൾക്കും $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ എന്ന് തെളിയിച്ചാൽ f എന്ന ഏകദം ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമാകുമല്ലോ.

അതിനാൽ $f(x_1) = f(x_2)$ എന്നതിൽ നിന്ന് തുടങ്ങാം.

അതായത് $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ (തന്നിട്ടുണ്ട്)

$\Rightarrow 2x_1 + 5 - 5 = 2x_2 + 5 - 5$ (സമതയുടെ ഇരുവശങ്ങളും തുല്യമായത് കുട്ടുന്നു)

$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$ $[x + -x = 0; x \in \mathbf{R}]$

$\Rightarrow \frac{2}{2} x_1 = \frac{2x_2}{2}$ (സമതയുടെ ഇരുവശത്തേയും പൂജ്യമല്ലാത്ത സംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നു)

$\Rightarrow x_1 = x_2$

അതിനാൽ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

അതുകൊണ്ട് f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമാണ്.

(ii) ഗണിത ആഗമനിക രീതി

ഈ രീതി XI-ാം ക്ലാസിൽ വിശദമായി പരിചയപ്പെട്ടതാണല്ലോ. ഈ രീതിയുടെ അടിസ്ഥാനതത്വം ഇങ്ങനെ പറയാം.

S എന്നത് എണ്ണൽസംഖ്യാഗണ(**N**) ത്തിന്റെ ഒരു ഉപഗണമാണെന്ന് കരുതുക.

(i) $1 \in S$ എന്നതും

(ii) k എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യ S ൽ ഉള്ളപ്പോഴെല്ലാം $k + 1$ എന്ന എണ്ണൽ സംഖ്യയും S ൽ ഉണ്ടായിരിക്കും എന്നതു ശരിയായാൽ $S = \mathbf{N}$ ആയിരിക്കും എന്നതാണ് ആഗമനിക രീതിയുടെ അടിസ്ഥാന തത്വം.

അതായത്, ആഗമനികരീതിയുടെ തത്വം $S(n)$ എന്ന പ്രസ്താവന $n = 1$ എന്നതിന് ശരിയാകുകയും $S(k)$ ശരിയാകുമ്പോഴെല്ലാം $(k \geq 1)$, $S(k + 1)$ ശരിയാകുകയും ചെയ്താൽ $S(n)$ എന്ന പ്രസ്താവന എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കും ശരിയായിരിക്കും എന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം : 3

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$P(n) : A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

$$P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

അതിനാൽ $P(1)$ ശരിയാണ്.

ഇനി $P(k)$ ശരിയാണെന്ന് കരുതുക.

$$\text{അതായത് } P(k) : A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

$P(k)$ ശരിയാകുമ്പോഴെല്ലാം $P(k + 1)$ ശരിയാകണം എന്നാണ് ഇനി തെളിയിക്കേണ്ടത്.

$$P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

$$A^{k+1} = A^k . A = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k\,\theta \cos\theta - \sin k\,\theta \sin\theta & \cos k\,\theta \sin\theta + \sin k\,\theta \cos\theta \\ -\sin k\,\theta \cos\theta - \cos k\,\theta \sin\theta & -\sin k\,\theta \sin\theta + \cos k\,\theta \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

അതായത് $P(k)$ ശരിയാകുമ്പോഴെല്ലാം $P(k + 1)$ ശരിയാകുന്നുണ്ട്. അതിനാൽ എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കും $P(n)$ എന്ന പ്രസ്താവന ശരിയാണ്. (ഗണിത ആഗമനിക തത്വ പ്രകാരം)

(iii) തെളിവിന്റെ നിശ്ശേഷക രീതി (Proof by Exhaustion)

$p \Rightarrow q$ എന്ന രീതിയിലുള്ള പ്രസ്താവനകൾ തെളിയിക്കുന്നതിന് ഇത് ഉപയോഗിക്കാം. ഇവിടെ p എന്ന പ്രസ്താവന തന്നെ r, s, t തുടങ്ങിയ ഉപവിഭാഗങ്ങളായി ഭാഗിക്കപ്പെടുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതായത് $p = r \vee s \vee t$ ($\vee$ നെ അല്ലെങ്കിൽ എന്ന് വായിക്കുക.)

ഇവിടെ $r \Rightarrow q$; $s \Rightarrow q$; $t \Rightarrow q$ എന്നിവ ഓരോന്നും തെളിയിക്കപ്പെട്ടാൽ $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$, എന്നത് തെളിയിക്കപ്പെട്ടതായി കണക്കാക്കാം.

അതായത് $p \Rightarrow q$ എന്നത് തെളിയിക്കപ്പെട്ടതായി കണക്കാക്കാം.

ഇതിൽ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനയുടെ ഓരോ ഉപവിഭാഗവും പ്രത്യേകം പ്രത്യേകം തെളിയിക്കണമെന്നതിനാൽ ഇത്തരം ഉപവിഭാഗങ്ങളുടെ എണ്ണം പരിമിതമായ തരം സാഹചര്യങ്ങളിൽ മാത്രമേ ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാൻ കഴിയുകയുള്ളൂ.

ഉദാഹരണം : 4

ഏതൊരു ത്രികോണം ABC യിലും $a = b \cos C + c \cos B$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

p : ABC ഒരു ത്രികോണമാണ്.

$q : a = b \cos C + c \cos B$ എന്നീ രണ്ട് പ്രസ്താവനകളായി എടുക്കുക.

ത്രികോണം ABC യിൽ A യിൽ നിന്ന് BC യിലേക്ക് (ചിലപ്പോൾ BC നീട്ടി വരച്ചതിലേക്ക്) AD എന്ന ലംബം വരക്കുക.

ഏതൊരു ത്രികോണവും ഒന്നുകിൽ ന്യൂനത്രികോണമോ അല്ലെങ്കിൽ മട്ടത്രികോണമോ അതുമല്ലെങ്കിൽ ബൃഹത്ത്രികോണമോ ആയിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് p : ABC ഒരു ത്രികോണമാണ് എന്ന പ്രസ്താവനയെ നമുക്ക് r, s, t

എന്നീ മൂന്ന് പ്രസ്താവനകളായി വിഭജിക്കാം.

r : ABC ഒരു ന്യൂനത്രികോണമാണ്, ∠C ന്യൂനകോണാണ്.

s : ABC ഒരു ബൃഹത്ത്രികോണമാണ് ∠C ബൃഹത്കോൺ ആണ്.

t : ABC ഒരു മട്ടത്രികോണമാണ് ∠C ഒരു മട്ടകോൺ ആണ്.

അതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന വസ്തുത മൂന്ന് വിഭാഗങ്ങളിലായി തെളിയിക്കാം.

സാധ്യത 1

∠C ന്യൂനകോൺ ആകുമ്പോൾ (ചിത്രം A1.1)

ചിത്രത്തിലെ മട്ടത്രികോണം ADB യിൽ നിന്ന്,

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

$$BD = AB \cos B$$
$$= c \cos B$$

മട്ടത്രികോണം ADC യിൽ നിന്ന്,

$$\frac{CD}{AC} = \cos C$$

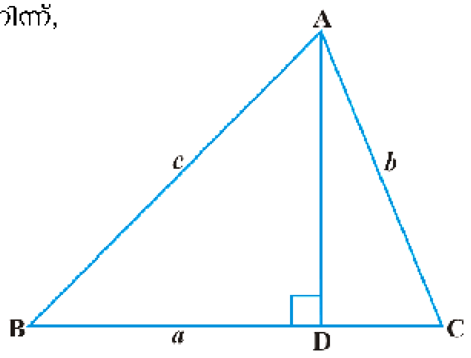
അതായത്, $CD = AC \cos C$

$= b \cos C$

ഇനി, $a = BD + CD$

$= c \cos B + b \cos C$

അതായത്, $a = c \cos B + b \cos C$ ... (1)



ചിത്രം A1.1

സാധ്യത 2

∠C ബൃഹത് കോൺ ആകുമ്പോൾ (ചിത്രം A1.2)

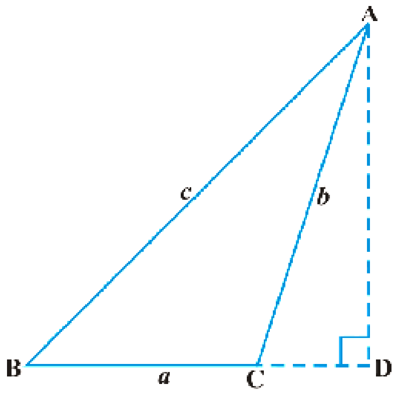
മട്ടത്രികോണം ADB യിൽ നിന്ന്.

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

$$BD = AB \cos B$$
$$= c \cos B$$

മട്ടത്രികോണം ADC യിൽ നിന്ന്.

$$\frac{CD}{AC} = \cos \angle ACD$$
$$= \cos (180° - C)$$
$$= -\cos C$$



ചിത്രം A1.2

അതായത്, $CD = -AC\cos C$

$= -b\cos C$

കൂടാതെ $a = BC = BD - CD$

അതായത്, $a = c\cos B - (-b\cos C)$

$a = c\cos B + b\cos C \quad \ldots (2)$

സാധ്യത 3

$\angle C$ ഒരു മട്ടകോൺ ആകുമ്പോൾ മട്ടത്രികോണം ACB യിൽ നിന്ന്, (ചിത്രം A1.3)

$$\frac{BC}{AB} = \cos B$$

$$BC = AB\cos B$$

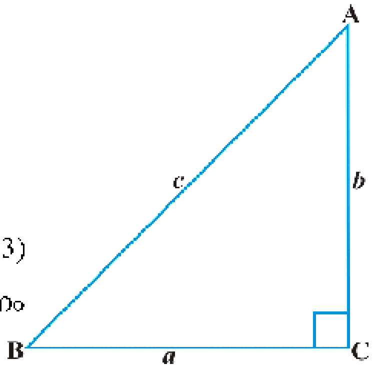
$$a = c\cos B,$$

കൂടാതെ, $b\cos C = b\cos 90^\circ = 0.$

അതിനാൽ $a = 0 + c\cos B = b\cos C + c\cos B \ldots (3)$

(1), (2), (3) എന്നിവയിൽ നിന്നും ഏതൊരു ത്രികോണം ABC യിലും

$$a = b\cos C + c\cos B \text{ ആകുന്നു.}$$



ചിത്രം A1.3

സാധ്യത (1) പ്രകാരം $r \Rightarrow q$ എന്ന് തെളിയിച്ചു.

സാധ്യത (2) പ്രകാരം $s \Rightarrow q$ എന്ന് തെളിയിച്ചു.

സാധ്യത (3) പ്രകാരം $t \Rightarrow q$ എന്ന് തെളിയിച്ചു.

അതായത് $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$ എന്ന് തെളിഞ്ഞു. അതിനാൽ $p \Rightarrow q$ എന്ന് തെളിയിച്ചു എന്നു കരുതാം.

നേരിട്ടല്ലാത്ത തെളിവുകൾ

തന്നിരിക്കുന്ന അനുപ്രമേയം നേരിട്ട് തെളിയിക്കാതെ അതിന് തത്തുല്യമായ അനുപ്രമാണം തെളിയിക്കുന്ന രീതിയാണിത്.

(i) വൈരുധ്യ രീതിയിലെ തെളിവ് (Proof by contradiction) : തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവന തെറ്റാണ് എന്ന് സങ്കല്പിച്ചു കൊണ്ടാണ് ഈ രീതിയിൽ നാം തുടങ്ങുന്നത്. തുടർന്ന് യുക്തിയുടെ നിയമങ്ങളിലൂടെ ലഭിക്കുന്ന ഒരു വൈരുധ്യത്തിൽ നിന്ന് സങ്കല്പം തെറ്റാണെന്ന നിഗമനത്തിൽ എത്തിച്ചേരുന്നു. അതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവന ശരിയായിരിക്കണമല്ലോ.

ഉദാഹരണം : 5

അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗണം അനന്തമാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

P എന്നത് എല്ലാ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടേയും (Prime numbers) ഗണമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഗണം അനന്തമാണ് എന്ന പ്രസ്താവന തെറ്റാണെന്ന് സങ്കല്പിക്കുക. അതായത് P ഒരു പരിമിത ഗണമാണ് (finite set) എന്ന് നാം സങ്കല്പിക്കുന്നു. അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ P യിലുള്ള അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം പരിമിതമാണല്ലോ. അപ്പോൾ P യിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളുടെയും ഒരു പട്ടിക തയാറാക്കാൻ സാധിക്കും. P യിലെ അംഗങ്ങൾ $P_1, P_2, P_3, ..., P_k$ എന്ന് വിളിക്കാം. ഇവയല്ലാതെ മറ്റൊരു അഭാജ്യസംഖ്യയും ഉണ്ടായിരിക്കാൻ പാടില്ലല്ലോ?

ഇനി $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_k + 1$ .....(1) എന്നു സങ്കൽപിക്കുക. ഈ സംഖ്യ നേരത്തെ രേഖപ്പെടുത്തിയ എല്ലാ അഭാജ്യസംഖ്യകളേക്കാളും വലുതാണ് അതുകൊണ്ട് N ഈ പട്ടികയിലെ ഒരു സംഖ്യയല്ല. N ഒന്നുകിൽ ഭാജ്യമോ അല്ലെങ്കിൽ അഭാജ്യമോ ആയിരിക്കും.

N ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയാണെങ്കിൽ നേരത്തെ നാം പട്ടികപ്പെടുത്തിയതല്ലാതെ ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയുണ്ട് എന്ന് അംഗീകരിക്കേണ്ടി വരും.

ഇനി N ഭാജ്യസംഖ്യയാണെന്നിരിക്കട്ടെ, എങ്കിൽ N എന്ന സംഖ്യക്ക് ഒരു അഭാജ്യ ഘടകം ഉണ്ടായിരിക്കണം. എന്നാൽ നിലവിൽ പട്ടികപ്പെടുത്തിയ $P_1, P_2, P_3, ..., P_k$ എന്നീ ഏത് അഭാജ്യസംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിച്ചാലും ശിഷ്ടം 1 വരുമല്ലോ. അതായത് N ഒരു ഭാജ്യസംഖ്യയാണെങ്കിൽ ഇതിന് P എന്ന ഗണത്തിലില്ലാത്ത ഒരു അഭാജ്യ ഘടകം ഉണ്ടായിരിക്കണം.

അതിനാൽ N ഭാജ്യമായാലും അഭാജ്യമായാലും P എന്ന ഗണത്തിന് പുറത്തുള്ള ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയുണ്ടെന്ന വൈരുദ്ധ്യത്തിലേക്കെത്തുന്നു. അതിനാൽ നാം സങ്കല്പിച്ചത് തെറ്റാണെന്ന് വരുന്നു. അതിനാൽ അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ ഗണം അനന്തമാണ്.

(ii) എതിർ നിഷേധാനുകൂല പ്രസ്താവന ഉപയോഗിച്ചുള്ള തെളിവ് (Proof by using contrapositive statement)

$p \Rightarrow q$, എന്ന പ്രസ്താവനയുടെ എതിർ നിഷേധാനുകൂല പ്രസ്താവനയാണ് $\sim q \Rightarrow \sim p$ എന്ന് നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇവ രണ്ടും തുല്യമായ പ്രസ്താവനകളാണ്. അതിനാൽ $p \Rightarrow q$ എന്ന് തെളിയിക്കുന്നതിന് $\sim q \Rightarrow \sim p$ എന്ന് തെളിയിച്ചാൽ മതിയാകും.

ഉദാഹരണം : 6

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 5$ എന്ന ഏകദം ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$ ആണെങ്കിൽ f ഒരു ഒന്നിനൊന്ന് ഏകദമായിരിക്കുമല്ലോ.

ഇവിടെ $p : 2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ എന്നും, $q : x_1 = x_2$ എന്നും കരുതിയാൽ ഇത് $p \Rightarrow q$ എന്ന രൂപത്തിലാണല്ലോ?

ഇതിന്റെ എതിർ നിഷേധാനുകൂല പ്രസ്താവന $\sim q \Rightarrow \sim p$ എന്നതാണ്.

അതായത് $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ എന്നതാണ് ഇതിന്റെ എതിർ നിഷേധാനുകൂല പ്രസ്താവന.

ഇനി

$$x_1 \neq x_2$$
$$\Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2$$
$$\Rightarrow \quad 2x_1 + 5 \neq 2x_2 + 5$$
$$\Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

അതിനാൽ, $\sim q \Rightarrow \sim p$ എന്ന് തെളിയിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഇത് $p \Rightarrow q$ എന്നതിന്റെ തെളിവായി കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണം : 7

മാട്രിക്സ് A പ്രതിലോമ്യമാണെങ്കിൽ അത് സിംഗുലർ ആയിരിക്കില്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനയെ $p \Rightarrow q$, എന്നു പരിഗണിക്കാം.

p : മാട്രിക്സ് A പ്രതിലോമ്യമാണ്.

q : A സിംഗുലർ ആയിരിക്കില്ല.

$p \Rightarrow q$ തെളിയിക്കുന്നതിന് പകരം അതിന്റെ എതിർ നിഷേധാനുകൂല പ്രസ്താവനയായ $\sim q \Rightarrow \sim p$ എന്ന് തെളിയിക്കാം. അതായത് 'A ഒരു സിംഗുലർ മാട്രിക്സ് ആയിരിക്കില്ല' എന്നത് തെറ്റാണെങ്കിൽ 'A എന്ന മാട്രിക്സ് പ്രതിലോമ്യമാണ്' എന്നത് തെറ്റായിരിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കാം.

$\sim q$: A എന്നത് സിംഗുലർ അല്ല എന്നത് തെറ്റാണ്.

$\Rightarrow$ A സിംഗുലർ ആണ്.

$\Rightarrow |A| = 0$

$\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{adj\ A}{|A|}$ നിർവ്വചിക്കപ്പെടില്ല. (കാരണം $|A| = 0$)

അതുകൊണ്ട് A^{-1} ഇല്ല. A പ്രതിലോമ്യമല്ല

അപ്പോൾ $\sim q \Rightarrow \sim p$.

അതുകൊണ്ട് A പ്രതിലോമ്യമാണെങ്കിൽ A സിംഗുലർ ആയിരിക്കില്ല.

(iii) എതിർ ഉദാഹരണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള തെളിവ് (Proof by a counter example)

ഒരു വസ്തുത ശരിയാണോ എന്ന് തെളിയിക്കാനുള്ള എല്ലാ ശ്രമങ്ങളും പരാജയപ്പെടുമ്പോഴും ആ വസ്തുത ശരിയോ തെറ്റോ എന്ന അവ്യക്തത നിലനിൽക്കുന്ന സാഹര്യങ്ങൾ ഗണിതശാസ്ത്ര ചരിത്രത്തിലുണ്ട്. അത്തരം സാഹചര്യങ്ങളിൽ ചിലപ്പോൾ പ്രസ്തുത വസ്തുത തെറ്റാണെന്ന് ബോധ്യപ്പെടാവുന്ന വിധത്തിൽ ഒരു ഉദാഹരണം കണ്ടെത്താൻ കഴിയാറുണ്ട്. ഇത്തരത്തിൽ ഒരു കാര്യം തെറ്റാണെന്ന് സമർത്ഥിക്കാനായി ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളെയാണ് എതിർ ഉദാഹരണങ്ങൾ (counter examples) എന്നു വിളിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണം : 8

"ഏതൊരു എണ്ണൽസംഖ്യ n നും $2^{2^n}+1$ ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ ആയിരിക്കും."

ഈ പ്രസ്താവന നോക്കുക.

$$2^{2^1}+1 = 2^2+1 = 5 \text{ ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ}$$
$$2^{2^2}+1 = 2^4+1 = 17 \text{ ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ}$$
$$2^{2^3}+1 = 2^8+1 = 257 \text{ ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യ}$$

ഇത്തരത്തിലെല്ലാം ശരിയാകുന്നതിനാൽ മുകളിലെ പ്രസ്താവന ശരിയാണെന്ന് കുറേ കാലത്തോളം കരുതിയിരുന്നു.

പിന്നീടാണ് $2^{2^5}+1 = 2^{32}+1 = 4294967297$ എന്ന സംഖ്യയെ 641×6700417 എന്ന് എഴുതാമെന്നും അതുകൊണ്ട് തന്നെ $2^{2^n}+1$ എപ്പോഴും അഭാജ്യസംഖ്യ ആകുമെന്നത് തെറ്റാണെന്നും തെളിയിക്കപ്പെട്ടത്. അതായത് ഒരു കാര്യം തെറ്റാണെന്ന് തെളിയിക്കാൻ കേവലം ഒരു ഉദാഹരണം മതി. ഈ ഉദാഹരണമാണ് എതിർ ഉദാഹരണം.

ഉദാഹരണം : 9

തുടർച്ചയുള്ള എല്ലാ ഏകദങ്ങളും അവകലനീയമാണ് എന്ന പ്രസ്താവന പരിഗണിക്കുക.

$f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$, $h(x) = \sin x$ തുടങ്ങിയ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങളെല്ലാം അവകലനീയമാണ് എന്ന് നമുക്കറിയാം. അതിനാൽ മുകളിൽ നൽകിയ പ്രസ്താവന ശരിയാണെന്ന് തോന്നിയേക്കാം. എന്നാൽ $\phi(x) = |x|$ എന്ന ഏകദം പരിഗണിക്കുക. ഇത് ഏകദമാണ്. എന്നാലും $\phi(x) = |x|$ എന്ന ഈ ഏകദം $x = 0$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ അവകലനീയമല്ലെന്ന് നമുക്കറിയാം. അതായത് $\phi(x) = |x|$ എന്ന ഒറ്റ എതിർ ഉദാഹരണത്തിലൂടെ "തുടർച്ചയുള്ള എല്ലാ ഏകദങ്ങളും അവകലനീയമാണ്" എന്ന പ്രസ്താവന തെറ്റാണെന്ന് തെളിയിക്കാം.

അനുബന്ധം 2

ഗണിതവൽകരണം (Mathematical Modelling)

A.2.1 ആമുഖം

ജീവിതഗന്ധിയായ പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങളുടെ ഗണിതരൂപവൽക്കരണവും പരിഹാരവും പതിനൊന്നാം ക്ലാസിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. നിബന്ധനകൾക്ക് വിധേയമായ ചില പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങളെ അനുയോജ്യമായ രീതിയിൽ ഗണിതവൽക്കരിച്ച് പരിഹാരം കാണാനാണ് അവിടെ ശ്രമിച്ചിട്ടുള്ളത്. ചുരുക്കത്തിൽ ഒരു പ്രായോഗിക പ്രശ്നത്തെ ചിഹ്നങ്ങൾ, വാക്കുകൾ, ഗ്രാഫുകൾ, വരകൾ, സ്കെച്ചുകൾ, സൂത്രവാക്യങ്ങൾ, കമ്പ്യൂട്ടർ പ്രോഗ്രാമുകൾ തുടങ്ങിയവയുടെ സഹായത്തോടെ ഒരു ഗണിത പ്രശ്നമാക്കി മാറ്റുന്ന പ്രക്രിയയാണ് ഗണിതരൂപവൽക്കരണം (Mathematical Modelling).

കഴിഞ്ഞ വർഷം ധാരാളം പ്രശ്നങ്ങൾ ഗണിതരൂപവൽക്കരണം നടത്തി പരിഹരിച്ചുവല്ലോ. അതുകൊണ്ട് ഗണിതരൂപവൽക്കരണം ഒരു പ്രത്യേക അധ്യായമായി ഇവിടെ ചർച്ചചെയ്യുന്നത് ഉചിതമായിരിക്കാം. പ്രായോഗിക തലത്തിലെ ചില പ്രശ്നങ്ങളെ മാട്രിക്സ്, കലനം, രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിംഗ് തുടങ്ങിയ ഗണിത ആശയങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പരിഹരിക്കുന്നതിനാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ ശ്രമിക്കുന്നത്.

A.2.2 എന്തുകൊണ്ട് ഗണിതവൽക്കരണം?

അങ്കഗണിതം, ബീജഗണിതം, ത്രികോണമിതി, രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് തുടങ്ങിയവയിലുള്ള പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങളെ ഗണിതവൽക്കരണം നടത്തി പരിഹാരം കാണുന്നതിന് കുട്ടികൾക്ക് പരിചയമുണ്ട്. ഭൗതികനിയമങ്ങൾ അനുസരിച്ചും അല്ലാതെയും ഇത്തരം ചില പ്രശ്നങ്ങൾ ഗണിതവൽക്കരണം നടത്തിയിട്ടുണ്ട്. നമ്മൾ അഭിമുഖീകരിക്കുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ ഗണിതവൽക്കരണം നടത്തുന്നതിന് പല വഴികളും സ്വീകരിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ചോദ്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

(i) ഒരു നദിയുടെ വീതി കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെ? (നദി മുറിച്ച് കടക്കാതെ)

(ii) ഷോട്ട് എറിയുമ്പോൾ ഏറ്റവും കൂടുതൽ ദൂരം ലഭിക്കാൻ ഏതു കോണളവിൽ എറിയണം (ഇവിടെ ആളിന്റെ ഉയരം, വായുവിന്റെ പ്രതിരോധം, ഗുരുത്വാകർഷണത്വരണം ഇവ പരിഗണിക്കണം)

(iii) ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ (ഗോപുരത്തിന്റെ മുകളിൽ കയറാതെ)

(iv) സൂര്യന്റെ ഉപരിതലത്തിലെ ചൂട് കണ്ടുപിടിക്കാൻ.

(v) എന്തുകൊണ്ട് ഹൃദ്രോഗികൾ ലിഫ്റ്റ് ഉപയോഗിക്കാൻ പാടില്ല? (മനുഷ്യന്റെ ശരീരധർമ്മശാസ്ത്രമറിയാതെ)

(vi) ഭൂമിയുടെ പിണ്ഡം കണക്കാക്കാൻ

(vii) ഇന്ത്യയിലെ വിളഞ്ഞു നിൽക്കുന്ന ചെടികളിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്ന പയറു വർഗത്തിന്റെ അളവ് കണക്കാക്കുന്നതിന് (വിളവെടുപ്പ് നടത്താതെ).

(viii) ഒരു വ്യക്തിയുടെ ശരീരത്തിലെ രക്തത്തിന്റെ അളവ് കണക്കാക്കാൻ.

(ix) 2020 ൽ ഇന്ത്യയിൽ ഉണ്ടാകാവുന്ന ജനസംഖ്യ കണക്കാക്കൽ.

ഗണിതതത്വങ്ങളുപയോഗിച്ചും ഗണിതരൂപവൽക്കരണത്തിലൂടെയും ഇത്തരത്തിലുള്ള പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കണ്ടെത്താനാകും. ഈ പുസ്തകത്തിൽത്തന്നെ ഇത്തരം പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഗണിതത്തിന്റെ സഹായമില്ലാതെ ഇതൊന്നു പരിഹരിക്കാൻ ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ! അപ്പോഴാണ് ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ശക്തിയും പ്രാധാന്യവും സൗന്ദര്യവും ആസ്വാദനവും നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്.

A.2.3 ഗണിതവൽക്കരണത്തിന്റെ തത്വങ്ങൾ

ഗണിതവൽക്കരണം ഗണിതതത്വങ്ങളെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ളതാണ്. ഇത്തരം ഗണിതതത്വങ്ങൾ ഏറെക്കുറെ തത്വശാസ്ത്രപരമാണെന്ന് കാണാം. ചില അടിസ്ഥാനതത്വങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

(i) ഗണിതവൽക്കരണത്തിന്റെ ആവശ്യകത തിരിച്ചറിയുക. (എന്താണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്)

(ii) ആവശ്യമായ ചരങ്ങളും അളവുകോലുകളും കണ്ടെത്തുക. (Variables and parameters)

(iii) ലഭ്യമായ ദത്തങ്ങളിലെ പ്രസക്തമായവ കണ്ടെത്തുക.

(iv) ഉപയോഗിക്കേണ്ട സാഹചര്യങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക.

(v) ഉപയോഗിക്കേണ്ട ഭൗതികതത്വങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുക.

(vi) ആവശ്യമായ സമവാക്യങ്ങൾ, ക്രിയകൾ, പ്രശ്നപരിഹാര മൂല്യങ്ങൾ ഇവ തിരിച്ചറിയുക.

(vii) സ്ഥിരതയും, ഉപയോഗയോഗ്യതയും തിരിച്ചറിയുക.

(viii) ഗണിതവൽക്കരണത്തെ പരിപോഷിപ്പിക്കേണ്ട അളവുകോലുകൾ കണ്ടെത്തുക.

മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഈ തത്വങ്ങളിൽ നിന്നും നമുക്ക് ഗണിതവൽക്കരണത്തെ വിവിധ ഘട്ടങ്ങളായി ചിത്രീകരിക്കാം.

ഘട്ടം 1: ഭൗതികസാഹചര്യം നിർണയിക്കുക.

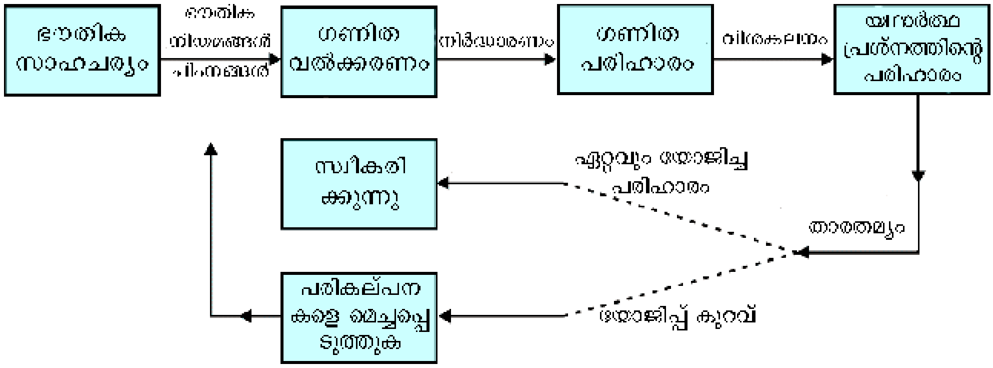
ഘട്ടം 2: ഭൗതികസാഹചര്യത്തെ (പ്രായോഗികപ്രശ്നത്തെ) വിവിധ ചരങ്ങളും പാരമീറ്ററുകളും തത്വങ്ങളും മറ്റും ഉപയോഗിച്ച് ഗണിതവൽക്കരണം നടത്തുക.

ഘട്ടം 3: പ്രശ്നപരിഹാരം കണ്ടെത്തുക.

ഘട്ടം 4: ലഭിച്ചിരിക്കുന്ന പരിഹാരങ്ങളെ തന്നിരിക്കുന്ന സാഹചര്യവുമായി പൊരുത്തപ്പെടുത്തുക.

ഘട്ടം 5: യോജിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അതിനെ സ്വീകരിക്കുക. അല്ലെങ്കിൽ പരികല്പനകളെയും അനുമാനത്തെയും പരിപോഷിപ്പിച്ച് ഘട്ടം 2 ലേക്ക് തിരിച്ച് പോകുക.

ഇത് ഒരു ചിത്രത്തിന്റെ രൂപത്തിൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം A.2.1

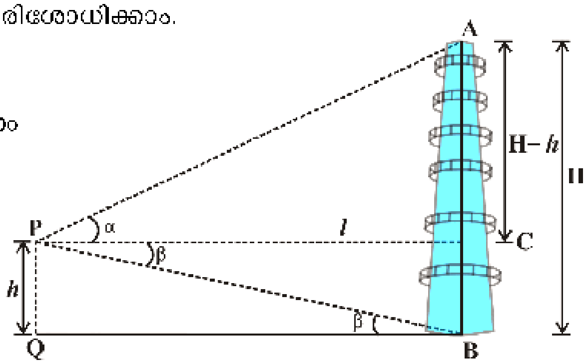
ഉദാഹരണം : 1

" ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം കണക്കാക്കു" ഈ പ്രശ്നത്തിന്റെ ഗണിതരൂപവൽക്കരണം നമുക്ക് ഘട്ടം ഘട്ടമായി പരിശോധിക്കാം.

പരിഹാരം

ഘട്ടം 1 : ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഘട്ടം 2 : ചിത്രത്തിൽ നിന്നും AB ഗോപുരവും, PQ നിരീക്ഷകന്റെ ഉയരവും, P എന്നത് നിരീക്ഷകന്റെ കണ്ണ് എന്ന് സങ്കൽപിക്കാം.



ചിത്രം A.2.2

ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം 'H', നിരീക്ഷകന്റെ ഉയരം 'h', നിരീക്ഷണ കോൺ α, ഗോപുരവും നിരീക്ഷകനും തമ്മിലുള്ള അകലം 'l' എന്നും എടുത്താൽ

$$l = PC = QB$$

$$\tan\alpha = \frac{AC}{PC} = \frac{H-h}{l}$$

$$H = h + l\tan\alpha \ldots (1)$$

ഘട്ടം 3 : ഇവിടെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന h, l, α ഇവയുടെ വിലകൾ നിരീക്ഷകന് അളവ് ഉപകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കൃത്യമായി നിർണയിക്കാം.

ഘട്ടം 4 : ഏതെങ്കിലും സാഹചര്യത്തിൽ l ന്റെ അളവ് നിർണയിക്കാൻ പ്രയാസമാണെങ്കിൽ കീഴ്കോൺ β ഉപയോഗിക്കുകയും, $\tan\beta = \frac{PQ}{QB} = \frac{h}{l}$ (ചിത്രത്തിൽ നിന്നും $l = h\cot\beta$ എന്നും ലഭിക്കും.

ഘട്ടം 5 : ഇവിടെ h, l, α, β ഇവയുടെ കൃത്യമായ വിലകൾ അറിയാമെന്നുള്ളതുകൊണ്ട് ഘട്ടം 5 ആവശ്യമില്ല.

ഉദാഹരണം : 2

ഒരു വ്യാപാരസ്ഥാപനം മൂന്നു രീതിയിലുള്ള ഉൽപന്നങ്ങൾ നിർമിക്കുന്നു അവ P_1, P_2, P_3 എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവയ്ക്കുവേണ്ട അസംസ്കൃത വസ്തുക്കളാണ് R_1, R_2, R_3 എന്നിവ. F_1, F_2 എന്നീ രണ്ടു വ്യക്തികളിൽ നിന്നും സ്ഥാപനത്തിന് പർച്ചേസ് ഓർഡർ ലഭിച്ചിട്ടുണ്ട്. അസംസ്കൃതവസ്തുക്കളുടെ ലഭ്യതക്ക് പരിമിതിയുണ്ട്. പർച്ചേസ് ഓർഡർ നൽകുന്നതിനാവശ്യമായ അസംസ്കൃത വസ്തുക്കളുടെ അളവ് കണ്ടെത്തുന്നതിന് ഒരു ഗണിതവൽക്കരണ മാതൃക കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

ഘട്ടം 1 : ചോദ്യത്തിലെ സാഹചര്യം വ്യക്തമായി മനസ്സിലാക്കുക.

ഘട്ടം 2 : F_1, F_2 എന്നീ വ്യക്തികളുടെ പർച്ചേസ് ഓർഡർ മാട്രിക്സ് A എന്നെടുത്താൽ.

$$A = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \end{array}$$

P_1, P_2, P_3 എന്നീ ഉൽപന്നങ്ങൾ നിർമ്മിക്കാനാവശ്യമായ അസംസ്കൃത വസ്തുക്കളുടെ അളവിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന മാട്രിക്സ് B എന്നെടുത്താൽ.

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} R_1 \; R_2 \; R_3 \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{array}$$

ഘട്ടം 3 : A, B എന്നീ മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ

$$AB = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array} \begin{array}{c} R_1 \; R_2 \; R_3 \\ \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \end{array}$$

F_1, F_2 എന്നീ വ്യക്തികൾക്ക് ഓർഡർ നൽകുന്നതിനുള്ള അസംസ്കൃത വസ്തുക്കളുടെ അളവ് ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 3

ഉദാഹരണം 2 നെ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സാഹചര്യത്തിൽ വ്യാഖ്യാനിക്കുക.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

ആവശ്യമായ അസംസ്കൃതവസ്തുക്കൾ R_1, R_2, R_3 ഇവ യഥാക്രമം 330 യൂണിറ്റ്, 455 യൂണിറ്റ്, 140 യൂണിറ്റ് എന്ന് തന്നിരുന്നാൽ.

പരിഹാരം

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array} \begin{array}{c} R_1 \quad R_2 \quad R_3 \\ \begin{bmatrix} 165 & 247 & 87 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix} \end{array}$$

ഇത് പരിശോധിച്ചാൽ, ആവശ്യമായി വരുന്ന അസംസ്കൃത വസ്തുക്കൾ R_1, 335 യൂണിറ്റും R_2, 467 യൂണിറ്റും R_3 എന്നത് 147 യൂണിറ്റും ആണ്. ഇത് തന്നിരിക്കുന്നതിനേക്കാളും അല്പം കൂടുതലാണ്. ഇവിടെ ഒന്നുകിൽ അസംസ്കൃത വസ്തുക്കളുടെ ലഭ്യത വർദ്ധിപ്പിച്ചോ അല്ലെങ്കിൽ ഓർഡർ കുറച്ചോ പ്രശ്നം പരിഹരിക്കാവുന്നതാണ്.

പരാമർശം : ഉദാഹരണം 3 ലെ A എന്ന മാട്രിക്സിനെ

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

എന്ന് മാറ്റിയാൽ; അതായത്

F_1, F_2 എന്നിവർ ആവശ്യമുള്ള ഓർഡർ കുറച്ചാൽ

$$A_1 B = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141 & 216 & 78 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix}$$

ഇതിൽ നിന്നും R_1, 311 യൂണിറ്റും, R_2, 436 യൂണിറ്റും R_3, 138 യൂണിറ്റുമാണ്.

> **കുറിപ്പ്**
> A എന്ന മാട്രിക്സിനെ വീണ്ടും മാറ്റി ലഭ്യമായ അസംസ്കൃത വസ്തുക്കൾ മുഴുവനായും ഉപയോഗപ്രദമാക്കാവുന്നതാണ്.

അന്വേഷണം : ഒരു നിശ്ചിത മാട്രിക്സ് B യും നിശ്ചിത അളവ് അസംസ്കൃത വസ്തുക്കളും തന്നാൽ പർച്ചേസ് ഓർഡർ ക്രമീകരിച്ച് മുഴുവൻ അസംസ്കൃത വസ്തുക്കളും ഉപയോഗപ്രദമാക്കാം. തന്നിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണം പരിശോധിക്കുക.

ഉദാഹരണം : 4

P_1, P_2, P_3 യും R_1, R_2, R_3 യും ഉദാഹരണം 2 ൽ തന്നതു പോലെയാണ്. R_1 എന്നത് 330 യൂണിറ്റും, R_2 എന്നത് 455 യൂണിറ്റും R_3 എന്നത് 140 യൂണിറ്റും ലഭ്യമാണ്. കൂടാതെ.

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

എങ്കിൽ ഓരോ ഉൽപന്നവും എത്ര യൂണിറ്റ് വീതം ഉപയോഗിച്ചാൽ തന്നിരിക്കുന്ന അസംസ്കൃത വസ്തുക്കൾ മുഴുവൻ ഉപയോഗപ്രദമാക്കാം.

പരിഹാരം

ഘട്ടം 1 : പ്രശ്നം എളുപ്പം മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയുന്നതാണ്.

ഘട്ടം 2 : സ്ഥാപനങ്ങൾ P_1, P_2, P_3 എന്നിവ ഉൽപന്നങ്ങൾ യഥാക്രമം x യൂണിറ്റ്, y യൂണിറ്റ്, z യൂണിറ്റ് എന്ന രീതിയിൽ ഉൽപ്പാദിപ്പിച്ചാൽ,

$$3x + 7y + 5z = 330$$
$$4x + 9y + 12z = 455$$
$$3y + 7z = 140$$ എന്ന് ലഭിക്കുമല്ലോ.

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 455 \\ 140 \end{bmatrix}$$

ഘട്ടം 3 : മൗലികരൂപാന്തരണം (Elementary operations) അനുസരിച്ച്

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \\ 5 \end{bmatrix}$$ എന്നു ലഭിക്കും.

ഇതിൽ നിന്നും 20 യൂണിറ്റ് P_1 ഉം 35 യൂണിറ്റ് P_2 ഉം 5 യൂണിറ്റ് P_3 ഉം ഉൽപാദിപ്പിച്ചാൽ തന്നിരിക്കുന്ന അസംസ്കൃത വസ്തുക്കൾ മൊത്തമായും ചെലവാകും.

കുറിപ്പ്

സ്ഥാപന ഉടമയ്ക്ക് ലഭിച്ചിരിക്കുന്ന ഓർഡറിനനുസരിച്ച് ഉൽപന്നം നിർമിക്കാതെ തന്നിരിക്കുന്ന അസംസ്കൃത വസ്തുക്കൾ കൊണ്ട് മുഴുവനായും ഉൽപന്നം നിർമിച്ചാൽ (ഉദാഹരണം 3), F_1 എന്ന കക്ഷി 6 യൂണിറ്റ് P_3 ഉൽപ്പന്നം ആവശ്യപ്പെട്ടെങ്കിലും 5 യൂണിറ്റ് മാത്രമെ നൽകാൻ സാധിക്കുകയുള്ളു എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം : 5

മരുന്നുകളുടെ ഒരു നിർമാതാവ് മരുന്നുകളുടെ ഉൽപാദന പ്ലാൻ തയാറാക്കുകയാണ്. M_1, M_2 എന്നീ രണ്ട് തരം മരുന്നുകളാണ് ഉൽപാദിപ്പിക്കാൻ ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്. 20000 കുപ്പിയിൽ M_1 എന്ന മരുന്നും 40000 കുപ്പിയിൽ M_2 എന്ന മരുന്നും ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കാനാവശ്യമായ അസംസ്കൃത വസ്തുക്കൾ ലഭ്യമാക്കിയിട്ടുണ്ട്. എങ്കിലും ആകെ 45000 കുപ്പികൾ മാത്രമെ ഉള്ളു. M_1 എന്ന മരുന്ന് 1000 കുപ്പികൾ ഉണ്ടാക്കാൻ 3 മണിക്കൂറും M_2 എന്ന മരുന്ന് ഉണ്ടാക്കാൻ 1 മണിക്കൂറും സമയം ആവശ്യമാണ്. ആകെ അന്യവദനിയമായ സമയം 66 മണിക്കൂറാണ്. M_1 എന്ന മരുന്ന് ഒരു കുപ്പിയിൽ വിൽക്കുമ്പോൾ 8 രൂപയും M_2 ഒരു കുപ്പിക്ക് 7 രൂപയും ലാഭം കിട്ടുന്നു. എത്ര കുപ്പികൾ വീതം നിർമിച്ചാൽ അദ്ദേഹത്തിന് പരമാവധി ലാഭം ലഭിക്കും?

പരിഹാരം

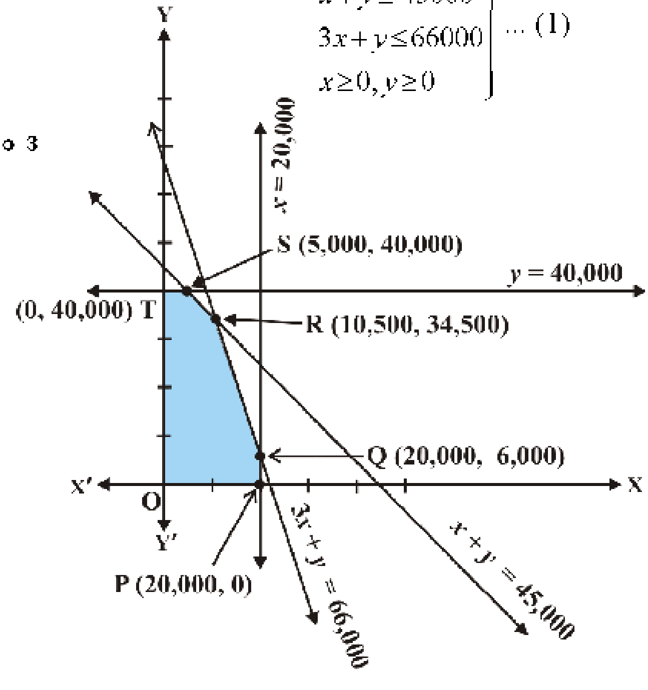
ഘട്ടം 1 : പരമാവധി ലാഭം ലഭിക്കാൻ എത്ര കുപ്പികൾ വീതം M_1, M_2 എന്നീ മരുന്നുകൾ നിർമിക്കണം എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കണം.

ഘട്ടം 2 : M_1 എന്ന മരുന്ന് x കുപ്പികളും M_2 എന്ന മരുന്ന് y കുപ്പികളും നിർമിച്ചാൽ, ലാഭം $8x + 7y$ ആകുന്നു. പരമാവധിലാഭം ലഭിക്കേണ്ട ഏകദം

$Z = 8x + 7y$ എന്നാണല്ലോ കൂടാതെ

$$\left.\begin{aligned} &x \leq 20000 \\ &y \leq 40000 \\ &x + y \leq 45000 \\ &3x + y \leq 66000 \\ &x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

ഘട്ടം 3



ചിത്രം A.2.3

ചിത്രത്തിൽ ഷേയ്ഡ് ചെയ്ത OPQRST എന്ന ഭാഗമാണ് സാധ്യതാഭാഗം. O, P, Q, R, S, T ഇവയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ യഥാക്രമം (0, 0), (20000, 0), (20000, 6000), (10500, 34500), (5000, 40000), (0, 40000), ആകുന്നു.

Z ന്റെ വില O (0, 0) യിൽ = 0

Z ന്റെ വില P (20000, 0) യിൽ $= 8 \times 20000 = 160000$

Z ന്റെ വില Q (20000, 6000) യിൽ $= 8 \times 20000 + 7 \times 6000 = 202000$

Z ന്റെ വില R (10500, 34500) യിൽ $= 8 \times 10500 + 7 \times 34500 = 325500$

Z ന്റെ വില S (5000, 40000) ൽ $= 8 \times 5000 + 7 \times 40000 = 320000$

Z ന്റെ വില T (0, 40000) യിൽ $= 7 \times 40000 = 280000$

നിരീക്ഷിച്ചാൽ $x = 10500, y = 34500$ ആയാൽ പരമാവധി ലാഭമായ 325500 ലഭിക്കും എന്ന് കാണാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം : 6

ഒരു കമ്പനി പുതിയൊരുൽപന്നം നിർമിക്കാൻ പദ്ധതി ഇടുന്നു. ഉൽപന്ന നിർമാണത്തിന് സ്ഥിര ചെലവും അസ്ഥിര ചെലവും ഉണ്ട് (Fixed and variable cost). കമ്പനി ഉൽപ്പന്നത്തിന് ഒരു സ്ഥിരവില നൽകി വിൽക്കുന്നു. ഉൽപന്നത്തിന്റെ ലാഭനഷ്ടങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്ന ഒരു ഗണിതവൽക്കരണ മാതൃക തയാറാക്കുക.

പരിഹാരം

ഘട്ടം 1 : പ്രശ്നത്തിൽ നിന്നും ലാഭ-നഷ്ടം സംഭവിക്കുന്ന സാധ്യത കണക്കാക്കണം.

ഘട്ടം 2 : ഇവിടെ രണ്ടു രീതിയിലുള്ള ചെലവ് സംഭവിക്കുന്നുണ്ട്. സ്ഥിര ചെലവ് (fixed) ഉദാഹരണം (വാടക, നിരക്ക്). ഇത് ഉൽപന്നത്തിന്റെ എണ്ണത്തിനെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല. അസ്ഥിര ചെലവ് (variable cost) ഉദാഹരണം (അസംസ്കൃത വസ്തുക്കൾ) ഇവ ഉൽപന്നങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന് ആനുപാതികമാണ്

കമ്പനി ഉൽപന്നത്തിന് സ്ഥിരവില ഈടാക്കി വിൽപന നടത്തുന്നു.

x = ഉൽപാദിപ്പിക്കുന്ന (വിൽക്കുന്ന) ഉൽപ്പന്നങ്ങളുടെ എണ്ണം

C = ആകെ ഉൽപാദനചെലവ് (രൂപയിൽ)

I = വില്പനയിൽ നിന്നുള്ള വരവ് (രൂപയിൽ)

P = ലാഭം (രൂപയിൽ)

C ഇവിടെ രണ്ട് രീതിയിൽ ഉണ്ടെന്ന് സൂചിപ്പിച്ചല്ലോ.

(i) സ്ഥിര ചെലവ് $= a$ (രൂപയിൽ)

(ii) അസ്ഥിര ചെലവ് $= b$ (രൂപ/യൂണിറ്റ്)

അതുകൊണ്ട് $C = a + bx$ ... (1)

ഒരെണ്ണം വിറ്റാൽ വരവ് s (രൂപയിൽ)

ആകെ വരവ് $I = sx$ ... (2)

ലാഭം

$$\begin{aligned} P &= I - C \\ &= sx - (a + bx) \\ &= (s - b)\,x - a \qquad \ldots (3) \end{aligned}$$

ഇവിടെ x, a, b, s അറിയാമെങ്കിൽ P കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഘട്ടം 3 : സമവാക്യം (3) ൽ നിന്നും "ബ്രേക്ക് ഇവൻ പോയിന്റ്" (ലാഭവും നഷ്ടവും സംഭവിക്കാത്ത സന്ദർഭം) കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$P = 0, \text{ ആയാൽ, } x = \frac{a}{s-b} \text{ യൂണിറ്റ്}$$

ഘട്ടം 4, 5 : ബ്രേക്ക് ഇവൻ പോയിന്റിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ x ന്റെ വില $\frac{a}{s-b}$ യൂണിറ്റിനു താഴെയെത്തിയാൽ നഷ്ടം സംഭവിക്കുന്നു. കൂടുതലായാൽ ലാഭവും സംഭവിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ് : സമവാക്യം (3) ൽ നിന്നും

$$\frac{dP}{dx} = s - b \text{ ആയിരിക്കുമല്ലോ.}$$

ഇതു സൂചിപ്പിക്കുന്നത് x ന്റെ വിലയ്ക്ക് ആധാരമായി P യിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് ഉൽപന്നത്തിന്റെ വിലയുടെയും അസ്ഥിര ചെലവിന്റെയും വ്യത്യാസത്തിന് തുല്യമാണെന്നാണ്. ഇതിൽ നിന്നും $s - b$ പോസിറ്റീവ് ആയാൽ ലാഭം സംഭവിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 7

ഒരു ടാങ്കിൽ 1000 ലിറ്റർ ഉപ്പുവെള്ളമുണ്ട്. ഒരു ലിറ്റർ ഉപ്പുവെള്ളത്തിൽ 250 ഗ്രാം ഉപ്പ് അടങ്ങിയിട്ടുണ്ട്. ഈ ടാങ്കിലേക്ക് ഒരു ലിറ്ററിൽ 200 ഗ്രാം ഉപ്പ് അടങ്ങിയ വെള്ളം ഒരു മിനിറ്റിൽ 25 ലിറ്റർ എന്ന നിരക്കിൽ പമ്പ് ചെയ്യുന്നു. അതേ നിരക്കിൽ ടാങ്കിൽ നിന്നും പുറത്തേക്കും ഉപ്പുവെള്ളം ഒഴുക്കി വിടുന്നു. എങ്കിൽ ടാങ്കിലുള്ള വെള്ളത്തിലടങ്ങിയ ഉപ്പിന്റെ ഏതു സമയത്തെയും എത്രയെന്ന് അളവ് കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

ഘട്ടം 1 : ടാങ്കിലുള്ള മിശ്രിതത്തിലെ ഉപ്പിന്റെ അളവ് ഏതു സമയത്തെയും അളവ് കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

ഘട്ടം 2 : മിശ്രിതത്തിൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന ഉപ്പിന്റെ അളവ് t മിനിറ്റിൽ $y = y(t)$ എന്ന് കരുതാം.

അകത്തേക്കും പുറത്തേക്കും ഒഴുകുന്നതിന് മുൻപ് $t = 0$ ആണ്.

$$y = 250 \text{ ഗ്രാം} \times 1000 = 250 \text{ കി.ഗ്രാം ആണല്ലോ.}$$

അകത്തേക്കും പുറത്തേക്കും ഉള്ള ഒഴുക്കിനനുസരിച്ച് y യുടെ വില മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുമല്ലോ.

അകത്തേക്കുള്ള ഒഴുക്ക് ഒരു മിനിറ്റിൽ 5 കി.ഗ്രാം ഉപ്പ് കൊണ്ടുവരുന്നുണ്ട്.

(25 × 200 ഗ്രാം = 5 കി.ഗ്രാം) പുറത്തേക്കുള്ള ഒഴുക്കിൽ $25\left(\frac{y}{1000}\right)=\frac{y}{40}$ കി.ഗ്രാം ഉപ്പ് ഒരുമിനിറ്റിൽ നഷ്ടപ്പെടുന്നു. t സമയം കൊണ്ടുണ്ടാകുന്ന മാറ്റം.

$$\frac{dy}{dt} = 5-\frac{y}{40} \quad \text{(എന്തുകൊണ്ട്?)}$$

$$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{40}y = 5 \; ... \; (1)$$

ഘട്ടം 3 : സമവാക്യം (1) ഒരു രേഖീയ അവകല സമവാക്യമാണല്ലോ. ഇതിന്റെ പരിഹാരം $ye^{\frac{t}{40}} = 200e^{\frac{t}{40}} + C$

അല്ലെങ്കിൽ $y(t) = 200 + C\ e^{-\frac{t}{40}}$ -----(2) ആകുന്നു.

$t = 0$ ആയാൽ $y = 250$ ആണല്ലോ.

അതുകൊണ്ട് $C = 50$

സമവാക്യം (2) ൽ നിന്നും $y(t) = 200 + 50\ e^{-\frac{t}{40}}$ ... (3)

അതുകൊണ്ട് $t = 40\log_e\left(\frac{50}{y-200}\right)$ ... (4) ആയിരിക്കും.

ഘട്ടം 4 : $e^{-\frac{t}{40}}$ എല്ലായ്പ്പോഴും പോസിറ്റീവ് ആണല്ലോ. സമവാക്യം (3) ൽ നിന്നും എല്ലായ്പ്പോഴും $y > 200$ ആയിരിക്കും. ഏത് സമയത്തും ചുരുങ്ങിയത് 200 കി.ഗ്രാം ഉപ്പ് ടാങ്കിലെ മിശ്രിതത്തിൽ ഉണ്ടായിരിക്കും.

കൂടാതെ സമവാക്യം (4) ൽ നിന്നും.

$t > 0$ ആയാൽ $0 < y - 200 < 50$ ആയിരിക്കും. ഏതു സമയത്തും $200 < y < 250$ ആയിരിക്കും.

ഗണിതരൂപവൽകരണത്തിന്റെ പരിമിതികൾ

ഗണിതരൂപവൽകരണ മാതൃകകൾ വികസിപ്പിച്ച് അവ ഉപയോഗിച്ചുകൊണ്ട് വിവിധ സാഹചര്യങ്ങളിലുള്ള ആയിരക്കണക്കിനു പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കണ്ടിട്ടുണ്ട്. ഊർജതന്ത്രം, സാമ്പത്തികശാസ്ത്രം, ഓപ്പറേഷൻസ്, റിസേർച്ച്, എഞ്ചിനിയറിംഗ്, സാമൂഹ്യശാസ്ത്രം തുടങ്ങി വിവിധമേഖലകളിലുള്ള വ്യത്യസ്ത സാഹചര്യങ്ങളി

ലുള്ള ധാരാളം പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ഗണിതമാതൃകകൾ രൂപീകരിക്കുകയും അവയ്ക്ക് പരിഹാരം കാണുകയും ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ഗണിതമാതൃകകൾക്ക് പരിഹാരം കാണുന്നതിനുവേണ്ടി പലപ്പോഴും സൂപ്പർകമ്പ്യൂട്ടറുകളും ഉപയോഗിക്കേണ്ടി വരുന്നു.

എങ്കിലും ഇപ്പോഴും ധാരാളം പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ഗണിതരൂപവൽകരണം നടത്താനോ പരിഹാരം കാണാനോ സാധിക്കാതെയുണ്ട്. പലപ്പോഴും ചോദ്യങ്ങളുടെ സങ്കീർണതകൊണ്ട് ഗണിതരൂപവൽകരണം വളരെ പ്രയാസമുള്ളതോ അസാധ്യമോ ആകുന്നു. ചില സാഹചര്യങ്ങളിൽ ഗണിതരൂപവൽക്കരണം നടത്തിയാലും ചരങ്ങളുടെയും മറ്റും ആധിക്യം കൊണ്ട് അവയ്ക്ക് പരിഹാരം കാണാനും കഴിയില്ല. സമുദ്രശാസ്ത്രം, പരിസ്ഥിതി പഠനശാസ്ത്രം, മലിനീകരണ നിയന്ത്രണമേഖല തുടങ്ങിയ മേഖലകളിലുള്ള പല പ്രശ്നങ്ങളും പലപ്പോഴും സങ്കീർണമേറിയതാണ്. ഗണിത രൂപവൽക്കരണം കൊണ്ട് ഇവയ്ക്ക് പരിഹാരം കാണാൻ സാധിക്കുന്നില്ല.

ഉത്തരസൂചിക

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 1.1

1. (i) പ്രതിസമമോ, സമമിതമോ സാംക്രമികമോ അല്ല
   (ii) പ്രതിസമമോ സമമിതമോ അല്ല. സാംക്രമികമാണ്
   (iii) പ്രതിസമവും സാംക്രമികവുമാണ്. എന്നാൽ സമമിതമല്ല
   (iv) പ്രതിസമവും സമമിതവും സാംക്രമികവുമാണ്.
   (v) (a) പ്രതിസമവും സമമിതവും സാംക്രമികവുമാണ്
       (b) പ്രതിസമവും സമമിതവും സാംക്രമികവുമാണ്
       (c) പ്രതിസമമോ സമമിതമോ സാംക്രമികമോ അല്ല
       (d) പ്രതിസമമോ സമമിതമോ അല്ല. എന്നാൽ സാംക്രമികമാണ്
       (e) പ്രതിസമമോ സമമിതമോ സാംക്രമികമോ അല്ല.
3. പ്രതിസമമോ, സമമിതമോ സാംക്രമികമോ അല്ല.
5. പ്രതിസമമോ, സമമിതമോ സാംക്രമികമോ അല്ല.
9. (i) {1, 5, 9}, (ii) {1}
12. T_1 ന് T_3 യോട് ബന്ധമുണ്ട്.
13. എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളുടെയും ഗണം
14. $y = 2x + c$, $c \in \mathbf{R}$ എന്ന എല്ലാ രേഖകളുടെയും ഗണം
15. B
16. C

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 1.2

1. അല്ല
2. (i) ഒന്നിനൊന്ന് ആണ്. എന്നാൽ പരിക്ഷേപമല്ല.
   (ii) ഒന്നിനൊന്നോ പരിക്ഷേപമോ അല്ല.
   (iii) ഒന്നിനൊന്നോ പരിക്ഷേപമോ അല്ല.
   (iv) ഒന്നിനൊന്ന് ആണ്. എന്നാൽ പരിക്ഷേപമല്ല.
   (v) ഒന്നിനൊന്ന് ആണ്. എന്നാൽ പരിക്ഷേപമല്ല.
7. (i) ഒന്നിനൊന്നും പരിക്ഷേപവുമാണ്
   (ii) ഒന്നിനൊന്നോ പരിക്ഷേപമോ അല്ല.
9. അല്ല
10. അതെ
11. D
12. A

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 1.3

1. $gof = \{(1, 3), (3,1), (4,3)\}$
3. (i) $(gof)(x) = |5|x| - 2|$, $(fog)(x) = |5x - 2|$

   (ii) $(gof)(x) = 2x$, $(fog)(x) = 8x$
4. f ന്റെ പ്രതിലോമം f തന്നെയാണ്.
5. (i) ഇല്ല. f പലതിനൊന്ന് ആയതുകൊണ്ട്.

   (ii) ഇല്ല. g പലതിനൊന്ന് ആയതുകൊണ്ട്.

   (iii) അതെ. h ഒന്നിനൊന്നും പരിക്ഷേപവുമാണ്.
6. ഏകദം f^{-1} നെ $f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{1-y}$, $y \neq 1$ എന്നു നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു.
7. ഏകദം f^{-1} നെ $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{4}$ എന്നു നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു.
11. ഏകദം f^{-1} നെ $f^{-1}(a) = 1$, $f^{-1}(b) = 2$, $f^{-1}(c) = 3$ എന്നു നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു.
13. (C)
14. (B)

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 1.4

1. (i) അല്ല (ii) അതെ (iii) അതെ (iv) അതെ (v) അതെ
2. (i) * ക്രമനിയമമോ സംയോജന നിയമമോ പാലിക്കുന്നില്ല.

   (ii) * ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നു. എന്നാൽ സംയോജനനിയമം പാലിക്കുന്നില്ല.

   (iii) * ക്രമനിയമവും സംയോജനനിയമവും പാലിക്കുന്നു.

   (iv) * ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നു. എന്നാൽ സംയോജനനിയമം പാലിക്കുന്നില്ല.

   (v) * ക്രമനിയമമോ സംയോജനനിയമമോ പാലിക്കുന്നില്ല.

   (vi) * ക്രമനിയമമോ സംയോജനനിയമമോ പാലിക്കുന്നില്ല.

3.

A	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

4. (i) $(2 * 3) * 4 = 1, 2 * (3 * 4) = 1$ (ii) അതെ (iii) 1

5. അതെ

6. (i) $5 * 7 = 35, 20 * 16 = 80$ (ii) അതെ (iii) അതെ (iv) 1 (v) 1

7. അല്ല

8. * ക്രമനിയമവും സംയോജനനിയമവും പാലിക്കുന്നു;
   * ന് N ൽ അനന്യദം ഇല്ല.

9. (ii) , (iv), (v) ഇവ ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നു;
   (v) സംയോജനനിയമം പാലിക്കുന്നു.

10. (v)

11. അനന്യദം ഇല്ല

12. (ii) തെറ്റ് (ii) ശരി 13. B

അധ്യായം 1 ലെ കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. $g(y) = \frac{y-7}{10}$ 2. f ന്റെ പ്രതിലോമം f തന്നെയാണ്

3. $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$ 8. അല്ല 10. $n!$

11. (i) $F^{-1} = \{(3, a), (2, b), (1, c)\}$, (ii) F^{-1} ഇല്ല 12. അല്ല

15. അതെ 16. A 17. B 18. അല്ല

19. B

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 2.1

1. $\frac{-\pi}{6}$	**2.** $\frac{\pi}{6}$	**3.** $\frac{\pi}{6}$	**4.** $\frac{-\pi}{3}$
5. $\frac{2\pi}{3}$	**6.** $-\frac{\pi}{4}$	**7.** $\frac{\pi}{6}$	**8.** $\frac{\pi}{6}$
9. $\frac{3\pi}{4}$	**10.** $\frac{-\pi}{4}$	**11.** $\frac{3\pi}{4}$	**12.** $\frac{2\pi}{3}$
13. B	**14.** B		

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 2.2

5. $\frac{1}{2}\tan^{-1} x$	**6.** $\frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x$	**7.** $\frac{x}{2}$	**8.** $\frac{\pi}{4} - x$
9. $\sin^{-1}\frac{x}{a}$	**10.** $3\tan^{-1}\frac{x}{a}$	**11.** $\frac{\pi}{4}$	**12.** 0
13. $\frac{x+y}{1-xy}$	**14.** $\frac{1}{5}$	**15.** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	**16.** $\frac{\pi}{3}$
17. $\frac{-\pi}{4}$	**18.** $\frac{17}{6}$	**19.** B	**20.** D
21. B			

അധ്യായം 2 ലെ കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. $\frac{\pi}{6}$	**2.** $\frac{\pi}{6}$	**13.** $x = \frac{\pi}{4}$	**14.** $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$
15. D	**16.** C	**17.** C	

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 3.1

1. (i) 3×4 (ii) 12 (iii) 19, 35, – 5, 12, $\frac{5}{2}$

2. $1 \times 24, 2 \times 12, 3 \times 8, 4 \times 6, 6 \times 4, 8 \times 3, 12 \times 2, 24 \times 1; 1 \times 13, 13 \times 1$

3. $1 \times 18, 2 \times 9, 3 \times 6, 6 \times 3, 9 \times 2, 18 \times 1; 1 \times 5, 5 \times 1$

4. (i) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$

5. (i) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

6. (i) $x = 1, \quad y = 4, \quad z = 3$

(ii) $x = 4, \quad y = 2, \quad z = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 2, \quad y = 4, \; z = 0$

(iii) $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 3$

7. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$

8. C **9.** B **10.** D

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 3.2

1. (i) $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $3A - C = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $AB = \begin{bmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}$ (v) $BA = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

2. (i) $\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} (a+b)^2 & (b+c)^2 \\ (a-c)^2 & (a-b)^2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 16 & 5 & 21 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. (i) $\begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 14 & 0 & 42 \\ 18 & -1 & 56 \\ 22 & -2 & 70 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

4. $A+B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, B-C=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. (i) $X=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $X=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-12}{5} \\ \frac{-11}{5} & 3 \end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{bmatrix}$

8. $X=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $x = 3, y = 3$ **10.** $x = 3, y = 6, z = 9, t = 6$

11. $x = 3, y = -4$ **12.** $x = 2, y = 4, w = 3, z = 1$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ **17.** $k = 1$

19.(a) ₹ 15000, ₹ 15000 (b) ₹ 5000, ₹ 25000

20. ₹ 20160 **21.** A **22.** B

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 3.3

1. (i) $\begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

10. (i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ \frac{-5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & 0 & 3 \\ \frac{-3}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

11. A **12.** B

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 3.4

1. $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ **12.** പ്രതിലോമം ഇല്ല

13. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** പ്രതിലോമം ഇല്ല

15. $\begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{25} & \frac{11}{25} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

18. D

അധ്യായം 3 ലെ കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

6. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

7. $x = -1$ **9.** $x = \pm 4\sqrt{3}$

10. (a) മാർക്കറ്റ് I ലെ ആകെ വരുമാനം = ₹ 46000

മാർക്കറ്റ് II ലെ ആകെ വരുമാനം = ₹ 53000

(b) ലാഭം ₹ 15000, ₹ 17000

11. $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ **13.** C **14.** B **15.** C

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 4.1

1. (i) 18 **2.** (i) 1, (ii) $x^3 - x^2 + 2$

5. (i) – 12, (ii) 46, (iii) 0, (iv) 5 **6.** 0

7. (i) $x = \pm\sqrt{3}$, (ii) $x = 2$ **8.** (B)

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 4.2

15. C **16.** C

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 4.3

1. (i) $\frac{15}{2}$, (ii) $\frac{47}{2}$, (iii) 15

3. (i) 0, 8, (ii) 0, 8 **4.** (i) $y = 2x$, (ii) $x - 3y = 0$ **5.** (D)

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 4.4

1. (i) $M_{11} = 3, M_{12} = 0, M_{21} = -4, M_{22} = 2, A_{11} = 3, A_{12} = 0, A_{21} = 4, A_{22} = 2$

(ii) $M_{11} = d, M_{12} = b, M_{21} = c, M_{22} = a$

$A_{11} = d, A_{12} = -b, A_{21} = -c, A_{22} = a$

2. (i) $M_{11} = 1, M_{12} = 0, M_{13} = 0, M_{21} = 0, M_{22} = 1, M_{23} = 0, M_{31} = 0, M_{32} = 0, M_{33} = 1,$

$A_{11} = 1, A_{12} = 0, A_{13} = 0, A_{21} = 0, A_{22} = 1, A_{23} = 0, A_{31} = 0, A_{32} = 0, A_{33} = 1$

(ii) $M_{11} = 11, M_{12} = 6, M_{13} = 3, M_{21} = -4, M_{22} = 2, M_{23} = 1, M_{31} = -20, M_{32} = -13, M_{33} = 5$

$A_{11} = 11, A_{12} = -6, A_{13} = 3, A_{21} = 4, A_{22} = 2, A_{23} = -1, A_{31} = -20, A_{32} = 13, A_{33} = 5$

3. 7 **4.** $(x - y)(y - z)(z - x)$ **5.** (D)

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 4.5

1. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ **5.** $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

13. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **14.** $a = -4, b = 1$ **15.** $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

16. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **17.** B **18.** B

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 4.6

1. സംഗതം **2.** സംഗതം **3.** സംഗതമല്ല

4. സംഗതം **5.** സംഗതമല്ല **6.** സംഗതം

7. $x = 2, y = -3$ **8.** $x = \frac{-5}{11}, y = \frac{12}{11}$ **9.** $x = \frac{-6}{11}, y = \frac{-19}{11}$

10. $x = -1, y = 4$ **11.** $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{-3}{2}$

12. $x = 2, y = -1, z = 1$ **13.** $x = 1, y = 2, z = -1$

14. $x = 2, y = 1, z = 3$

15. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}, x = 1, y = 2, z = 3$

16. 1 കി.ഗ്രാം ഉള്ളിയുടെ വില = ₹ 5
1 കി.ഗ്രാം ഗോതമ്പിന്റെ വില = ₹ 8
1 കി.ഗ്രാം അരിയുടെ വില = ₹ 8

അധ്യായം 4 ലെ കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

3. 1 **5.** $x = \frac{-a}{3}$ **7.** $\begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9. $-2(x^3+y^3)$ 10. xy 16. $x=2, y=3, z=5$
17. A 18. A 19. D

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.1

2. f എന്നത് $x = 3$ ൽ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്.
3. (a), (b), (c), (d) എന്നിവ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങളാണ്.
5. f എന്നത് $x = 0$, $x = 2$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ തുടർച്ചയുള്ളതാണ്. എന്നാൽ $x = 1$ ൽ തുടർച്ചയില്ല.
6. $x = 2$ ൽ തുടർച്ചയില്ല 7. $x = 3$ ൽ തുടർച്ചയില്ല
8. $x = 0$ ൽ തുടർച്ചയില്ല 9. തുടർച്ചയില്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദുവുമില്ല
10. തുടർച്ചയില്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദുവുമില്ല
11. തുടർച്ചയില്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദുവുമില്ല
12. $x = 1$ ൽ f ന് തുടർച്ചയില്ല 13. $x = 1$ ൽ f ന് തുടർച്ചയില്ല
14. $x = 1, x = 3$ ൽ f ന് തുടർച്ചയില്ല
15. $x = 1$ ൽ മാത്രമാണ് തുടർച്ചയില്ലാത്തത്
16. തുടർച്ചയുള്ളത് 17. $a = b + \frac{2}{3}$
18. λ യുടെ ഒരു വിലയ്ക്കും $x = 0$ ൽ f ന് തുടർച്ചയില്ല. എന്നാൽ λ യുടെ ഏതു വിലക്കും $x = 1$ ൽ തുടർച്ചയുണ്ട്.
20. $x = \pi$ ൽ f ന് തുടർച്ചയുണ്ട്. 21. (a), (b), (c) ഇവയെല്ലാം തുടർച്ചയുള്ളവയാണ്.
22. $x \in \mathbf{R}$; cosine ഏകദം തുടർച്ചയുള്ളതാണ്.
$x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$; ഒഴികെ, cosecant തുടർച്ചയുള്ളതാണ്.
$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$ ഒഴികെ, secant തുടർച്ചയുള്ളതാണ്.
$x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$ ഒഴികെ, cotangent തുടർച്ചയുള്ളതാണ്.
23. തുടർച്ചയില്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദുവുമില്ല.
24. അതെ; $x \in \mathbf{R}$ ൽ f ന് തുടർച്ചയുണ്ട്.
25. $x \in \mathbf{R}$ ൽ f തുടർച്ചയുള്ളതാണ്.
26. $k = 6$ 27. $k = \frac{3}{4}$ 28. $k = \frac{-2}{\pi}$
29. $k = \frac{9}{5}$ 30. $a = 2, b = 1$
34. തുടർച്ചയില്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദുവുമില്ല.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.2

1. $2x\cos(x^2+5)$ 2. $-\cos x\sin(\sin x)$ 3. $a\cos(ax+b)$

4. $\dfrac{\sec(\tan\sqrt{x}).\tan(\tan\sqrt{x}).\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

5. $a\cos(ax+b)\sec(cx+d)+c\sin(ax+b)\tan(cx+d)\sec(cx+d)$

6. $10x^4\sin x^5\cos x^5\cos x^3-3x^2\sin x^3\sin^2 x^5$

7. $\dfrac{-2\sqrt{2}\,x}{\sin x^2\sqrt{\sin 2x^2}}$ 8. $-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.3

1. $\dfrac{\cos x-2}{3}$ 2. $\dfrac{2}{\cos y-3}$ 3. $-\dfrac{a}{2by+\sin y}$

4. $\dfrac{\sec^2 x-y}{x+2y-1}$ 5. $-\dfrac{(2x+y)}{(x+2y)}$ 6. $-\dfrac{(3x^2+2xy+y^2)}{(x^2+2xy+3y^2)}$

7. $\dfrac{y\sin xy}{\sin 2y-x\sin xy}$ 8. $\dfrac{\sin 2x}{\sin 2y}$ 9. $\dfrac{2}{1+x^2}$ 10. $\dfrac{3}{1+x^2}$

11. $\dfrac{2}{1+x^2}$ 12. $\dfrac{-2}{1+x^2}$ 13. $\dfrac{-2}{1+x^2}$ 14. $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.4

1. $\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x},\ x\neq n\pi,\ n\in\mathbf{Z}$ 2. $\dfrac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1)$

3. $3x^2e^{x^3}$ 4. $-\dfrac{e^{-x}\cos(\tan^{-1}e^{-x})}{1+e^{-2x}}$

5. $-e^x \tan e^x,\ e^x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{N}$

6. $e^x + 2x e^{x^2} + 3x^2 e^{x^3} + 4x^3 e^{x^4} + 5x^4 e^{x^5}$

7. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x e^{\sqrt{x}}}}, x > 0$

8. $\dfrac{1}{x \log x}, x > 1$

9. $-\dfrac{(x \sin x \cdot \log x + \cos x)}{x(\log x)^2}, x > 0$

10. $-\left(\dfrac{1}{x} + e^x\right) \sin(\log x + e^x), x > 0$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.5

1. $-\cos x \cos 2x \cos 3x\ [\tan x + 2 \tan 2x + 3 \tan 3x]$
2. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left[\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x-5}\right]$
3. $(\log x)^{\cos x}\left[\dfrac{\cos x}{x \log x} - \sin x \log(\log x)\right]$
4. $x^x (1 + \log x) - 2^{\sin x} \cos x \log 2$
5. $(x+3)(x+4)^2(x+5)^3(9x^2 + 70x + 133)$
6. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^x \left[\dfrac{x^2-1}{x^2+1} + \log\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\right] + x^{1+\frac{1}{x}}\left(\dfrac{x+1-\log x}{x^2}\right)$
7. $(\log x)^{x-1}\ [1 + \log x \,.\, \log(\log x)] + 2x^{\log x - 1} \,.\, \log x$
8. $(\sin x)^x (x \cot x + \log \sin x) + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x - x^2}}$
9. $x^{\sin x}\left[\dfrac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right] \quad (\sin x)^{\cos x}\ [\cos x \cot x - \sin x \log \sin x]$
10. $x^{x \cos x}\ [\cos x \,.\, (1 + \log x) - x \sin x \log x] - \dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$
11. $(x \cos x)^x\ [1 - x \tan x + \log(x \cos x)] + (x \sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{x \cot x + 1 - \log(x \sin x)}{x^2}\right]$
12. $-\dfrac{yx^{y-1} + y^x \log y}{x^y \log x + xy^{x-1}}$
13. $\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{y - x \log y}{x - y \log x}\right)$

14. $\frac{y \tan x + \log \cos y}{x \tan y + \log \cos x}$

15. $\frac{y(x-1)}{x(y+1)}$

16. $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)\left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8}\right]$; $f'(1) = 120$

17. $5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.6

1. t^2
2. $\frac{b}{a}$
3. $-4 \sin t$
4. $-\frac{1}{t^2}$
5. $\frac{\cos\theta - 2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta - \sin\theta}$
6. $-\cot\frac{\theta}{2}$
7. $-\cot 3t$
8. $\tan t$
9. $\frac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$
10. $\tan\theta$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 5.7

1. 2
2. $380\, x^{18}$
3. $-x \cos x - 2 \sin x$
4. $-\frac{1}{x^2}$
5. $x(5 + 6 \log x)$
6. $2e^x(5 \cos 5x - 12 \sin 5x)$
7. $9\, e^{6x}(3 \cos 3x - 4 \sin 3x)$
8. $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$
9. $-\frac{(1+\log x)}{(x \log x)^2}$
10. $-\frac{\sin(\log x) + \cos(\log x)}{x^2}$

12. $-\cot y \operatorname{cosec}^2 y$

അധ്യായം 5 ലെ കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. $27(3x^2 - 9x + 5)^8(2x - 3)$
2. $3\sin x \cos x(\sin x - 2\cos^4 x)$
3. $(5x)^{3\cos 2x}\left[\frac{3\cos 2x}{x} - 6\sin 2x \log 5x\right]$

4. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{1-x^3}}$

5. $-\left[\frac{1}{\sqrt{4-x^2}\,\sqrt{2x+7}}+\frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{(2x+7)^{\frac{3}{2}}}\right]$

6. $\frac{1}{2}$

7. $(\log x)^{\log x}\left[\frac{1}{x}+\frac{\log(\log x)}{x}\right], x>1$

8. $(a \sin x - b \cos x) \sin (a \cos x + b \sin x)$

9. $(\sin x - \cos x)^{\sin x - \cos x} (\cos x + \sin x) (1 + \log (\sin x - \cos x)), \sin x > \cos x$

10. $x^x (1 + \log x) + a x^{a-1} + a^x \log a$

11. $x^{x^2-3}\left[\frac{x^2-3}{x}+2x\log x\right]+(x-3)^{x^2}\left[\frac{x^2}{x-3}+2x\log(x-3)\right]$

12. $\frac{6}{5}\cot\frac{t}{2}$

13. 0

17. $\frac{\sec^3 t}{at}, 0<t<\frac{\pi}{2}$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 6.1

1. (a) 6π ച.സെ.മീ./സെമീ. (b) 8π ച.സെ.മീ./സെമീ.

2. $\frac{8}{3}$ ച.സെ.മീ./സെക്കന്റ്

3. 60π ച.സെ.മീ./സെക്കന്റ്

4. 900 ച.സെ.മീ./സെക്കന്റ്

5. 80π ച.സെ.മീ./സെക്കന്റ്

6. 1.4π സെ.മീ./സെക്കന്റ്

7. (a) -2 സെ.മീ./മിനിറ്റ് (b) 2 ച.സെ.മീ./മിനിറ്റ്

8. $\frac{1}{\pi}$ സെ.മീ./സെക്കന്റ്

9. 400π ഘന.സെ.മീ./സെമീ.

10. $\frac{8}{3}$ സെ.മീ./സെക്കന്റ്

11. $(4, 11)$ $\left(-4, \frac{-31}{3}\right)$

12. 2π ഘന.സെ.മീ./സെക്കന്റ്

13. $\frac{27}{8}\pi(2x+1)^2$ **14.** $\frac{1}{48\pi}$ സെ.മീ./സെക്കന്റ്

15. ₹ 20.967

16. ₹ 208 **17.** B **18.** D

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 6.2

4. (a) $\left(\frac{3}{4},\infty\right)$ (b) $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)$

5. (a) $(-\infty,-2)$, $(3,\infty)$ (b) $(-2, 3)$

6. (a) $x<-1$ ൽ കർശന അവരോഹണവും

$x>-1$ ൽ കർശന ആരോഹണവുമാണ്

(b) $x>-\frac{3}{2}$ ൽ കർശന അവരോഹണവും

$x<-\frac{3}{2}$ ൽ കർശന ആരോഹണവുമാണ്

(c) $-2<x<-1$ ൽ കർശന ആരോഹണം

$x<-2, x>-1$ ൽ കർശന അവരോഹണം

(d) $x<-\frac{9}{2}$ ൽ കർശന ആരോഹണവും

$x>-\frac{9}{2}$ കർശന അവരോഹണവുമാണ്.

(e) $(1, 3)$ ലും $(3,\infty)$ ലും കർശന ആരോഹണവും $(-\infty,-1)$ ലും $(-1, 1)$ ലും കർശന അവരോഹണവും ആയിരിക്കും.

8. $0<x<1, x>2$

12. A, B

13. D **14.** $a=-2$ **19.** D

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 6.3

1. 764
2. $\frac{-1}{64}$
3. 11
4. 24
5. 1
6. $\frac{-a}{2b}$
7. $(3, -20), (-1, 12)$
8. $(3, 1)$
9. $(2, -9)$
10. (i) $y + x + 1 = 0$ ഉം $y + x - 3 = 0$
11. ചരിവ് 2 ആയ ഒരു തൊടുവരയും ഈ വക്രത്തിന് ഇല്ല.
12. $y = \frac{1}{2}$
13. (i) $(0, \pm 4)$ (ii) $(\pm 3, 0)$
14. (i) തൊടുവര: $10x + y = 5$; ലംബം: $x - 10y + 50 = 0$
    (ii) തൊടുവര: $y = 2x + 1$; ലംബം: $x + 2y - 7 = 0$
    (iii) തൊടുവര: $y = 3x - 2$; ലംബം: $x + 3y - 4 = 0$
    (iv) തൊടുവര: $y = 0$; ലംബം: $x = 0$
    (v) തൊടുവര: $x + y - \sqrt{2} = 0$; ലംബം: $x = y$
15. (a) $y - 2x - 3 = 0$ (b) $36y + 12x - 227 = 0$
17. $(0, 0), (3, 27)$
18. $(0, 0), (1, 2), (-1, -2)$
19. $(1, \pm 2)$
20. $2x + 3my - am^2 (2 + 3m^2) = 0$
21. $x + 14y - 254 = 0$, $x + 14y + 86 = 0$
22. $ty = x + at^2$, $y = -tx + 2at + at^3$
24. $\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$, $\frac{y - y_0}{a^2 y_0} + \frac{x - x_0}{b^2 x_0} = 0$
25. $48x - 24y = 23$
26. D
27. A

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 6.4

1. (i) 5.03 (ii) 7.035 (iii) 0.8
   (iv) 0.208 (v) 0.9999 (vi) 1.96875
   (vii) 2.9629 (viii) 3.9961 (ix) 3.009
   (x) 20.025 (xi) 0.06083 (xii) 2.948
   (xiii) 3.0046 (xiv) 7.904 (xv) 2.00187

2. 28.21 **3.** – 34.995 **4.** $0.03\ x^3\ \text{m}^3$

5. $0.12\ x^2\ \text{m}^2$ **6.** $3.92\ \pi\ \text{m}^3$ **7.** $2.16\ \pi\ \text{m}^3$

8. D **9.** C

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 6.5

1. (i) നിമ്ന വില = 3 (ii) നിമ്ന വില = – 2

(iii) ഉന്നത വില = 10 (iv) നിമ്നവിലയോ ഉന്നതവിലയോ ഇല്ല

2. (i) നിമ്ന വില = – 1; ഉന്നത വില ഇല്ല

(ii) ഉന്നത വില = 3; നിമ്ന വില ഇല്ല

(iii) നിമ്ന വില = 4; ഉന്നത വില = 6

(iv) നിമ്ന വില = 2; ഉന്നത വില = 4

(v) നിമ്ന വിലയോ ഉന്നത വിലയോ ഇല്ല.

3. (i) $x = 0$ ൽ പ്രാദേശിക നിമ്നം, പ്രാദേശിക നിമ്ന വില = 0

(ii) $x = 1$ ൽ പ്രാദേശിക നിമ്നം, പ്രാദേശിക നിമ്ന വില = – 2

$x = -1$ ൽ പ്രാദേശിക ഉന്നതി, പ്രാദേശിക ഉന്നത വില = 2

(iii) $x = \dfrac{\pi}{4}$, ൽ പ്രാദേശിക ഉന്നതി, പ്രാദേശിക ഉന്നത വില = $\sqrt{2}$

(iv) $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ൽ പ്രാദേശിക ഉന്നതി, പ്രാദേശിക ഉന്നത വില = $\sqrt{2}$

$x = \dfrac{7\pi}{4}$ ൽ പ്രാദേശിക ഉന്നതി, പ്രാദേശിക ഉന്നത വില = $-\sqrt{2}$

(v) $x = 1$ ൽ പ്രാദേശിക ഉന്നതി, പ്രാദേശിക ഉന്നത വില = 19

$x = 3$ ൽ പ്രാദേശിക നിമ്നം, പ്രാദേശിക നിമ്ന വില = 15

(vi) $x = 2$ ൽ പ്രാദേശിക നിമ്നം, പ്രാദേശിക നിമ്ന വില = 2

(vii) $x = 0$ ൽ പ്രാദേശിക ഉന്നതി, പ്രാദേശിക ഉന്നത വില = $\dfrac{1}{2}$

(viii) $x = \dfrac{2}{3}$ ൽ പ്രാദേശിക ഉന്നതി, പ്രാദേശിക ഉന്നത വില = $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

5. (i) കേവല നിമ്ന വില = – 8, കേവല ഉന്നത വില = 8

(ii) കേവല നിമ്ന വില = – 1, കേവല ഉന്നത വില = $\sqrt{2}$

(iii) കേവല നിമ്ന വില = – 10, കേവല ഉന്നത വില = 8

(iv) കേവല നിമ്ന വില = 19, കേവല ഉന്നത വില = 3

6. ഉന്നത ലാഭം = 113 യൂണിറ്റ്

7. $x = 2$, ൽ നിമ്നം, നിമ്ന വില = 39, $x = 0$ യിൽ ഉന്നതവില, ഉന്നത വില = 25.

8. $x = \frac{\pi}{4}$ ഉം $\frac{5\pi}{4}$ ഉം

9. ഉന്നത വില = $\sqrt{2}$

10. $x = 3$ ൽ ഉന്നതവില, ഉന്നതവില = 89;

$x = -2$ ൽ ഉന്നതവില, ഉന്നതവില = 139

11. $a = 120$

12. $x = 2\pi$ ൽ ഉന്നതവില, ഉന്നതവില = 2π;

$x = 0$ ൽ നിമ്നവില, നിമ്നവില = 0

13. 12, 12 **14.** 45, 15 **15.** 25, 10 **16.** 8, 8

17. 3 സെ.മീ. **18.** $x = 5$ സെ.മീ.

21. ആരം = $\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ സെ.മീ., ഉയരം = $2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ സെ.മീ.

22. $\frac{112}{\pi+4}$ സെ.മീ., $\frac{28\pi}{\pi+4}$ സെ.മീ.

27. A **28.** D **29.** C

അധ്യായം 6 ലെ കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. (a) 0.677 (b) 0.497

3. $b\sqrt{3}$ ച.സെ.മീ./സെക്കന്റ്

4. $x + y - 3 = 0$

6. (i) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ഉം $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ യും (ii) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

7. (i) $x < -1$ ഉം $x > 1$ ഉം (ii) $-1 < x < 1$

8. $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$

9. ₹ 1000

11. നീളം $= \frac{20}{\pi + 4}$ മീ., വീതി $= \frac{10}{\pi + 4}$ മീ.

13. (i) $x = \frac{2}{7}$ ൽ പ്രാദേശിക ഉന്നതി

(ii) $x = 2$ ൽ പ്രാദേശിക നിമ്നം

(iii) $x = -1$ വ്യതിയാന ബിന്ദു

14. കേവല ഉന്നതി വില $= \frac{5}{4}$, കേവല നിമ്ന വില = 1

17. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$

19. A

20. B

21. A

22. B

23. A

24. A

അനുബന്ധം

അധ്യായം 5

(i) $f(x) = e^x$ എന്ന കൃതി ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം

$f(x) = e^x$, ആയാൽ

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right)$$

$$= e^x \cdot 1 \quad \left[\text{എന്തെന്നാൽ } \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1\right]$$

$$= e^x$$

അതുകൊണ്ട്, $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

(ii) $f(x) = \log_e x$. എന്ന ലോഗരിതമിക ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം

$f(x) = \log_e x$, ആയാൽ

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e(x + \Delta x) - \log_e x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\log_e\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \times 1 \quad \left[\text{എന്തെന്നാൽ } \lim_{h \to 0} \frac{\log_e(1 + h)}{h} = 1\right]$$

$$= \frac{1}{x}$$

അതുകൊണ്ട്, $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$.

പദാവലി

അദിശ മാട്രിക്സ്	-	Scalar matrix
അർദ്ധ ശീർഷ കോൺ	-	Semi vertical angle
അധിവക്രം	-	Hyperbola
അനന്യ ഏകദം	-	Identity function
അനന്യ മാട്രിക്സ്	-	Identity matrix
അവകലം	-	Differential
അവകലനം	-	Differentiation
അവകലജങ്ങളുടെ പ്രയോഗം	-	Application of Derivatives
അധിസംഖ്യ	-	Positive number
അവകലജം	-	Derivative
അവരോഹണ ഏകദം	-	Decreasing function
അവകലനീയത	-	Differentiability
അസംഗതം	-	Inconsistency
ആധാരബിന്ദു	-	Origin
ആരോഹണ ഏകദം	-	Increasing function
ഇടവില സിദ്ധാന്തം	-	Mean value theorem
ഇടവേള	-	Interval
ഇടതു സീമ	-	Left limit
ഉന്നത വില	-	Maximum value
ഉപ സിദ്ധാന്തം	-	Corollory
ഉപഗണം	-	Subset
ഉഭയക്ഷേപ ഏകദം	-	Bijective function
ഉഭയക്ഷേപം	-	Bijection
ഏകദം	-	Function
ഏകദസീമ	-	Limit of a function
ഏകദേശനം	-	Approximation
ഏകദത്തിന്റെ പ്രതിലോമം	-	Inverse of a function
എങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം	-	If and only if
ഏകമാത്രത മൂല്യം/ഏകമാത്രത പരിഹാരം	-	Uniqueness of solution
ഒന്നിനൊന്ന്	-	Injective/One - one
കലനം	-	Calculus
കർശന അവരോഹണം	-	Strictly decreasing
കർശന ആരോഹണം	-	Strictly increasing
കേവല ഉന്നത വില	-	Absolute maximum value

കേവല ഏകദം	-	Modulus function
കേവല നിമ്ന വില	-	Absolute minimum value
കൃതി ഏകദം	-	Exponential function
ക്രിയാപട്ടിക	-	Operation table
കോ - ഫാക്ടർ	-	Cofactor
ക്രമജോടി	-	Ordered pair
ക്രമനിയമം	-	Commutative law
ഗണിത ആഗമനിക രീതി	-	Mathematical Induction Method
ഗുണക മാട്രിക്സ്	-	Coefficient Matrix
ചരിത്രക്കുറിപ്പ്	-	Historical Note
തലം	-	Plane
ഡിറ്റർമിനന്റ്	-	Determinant
തുടർച്ചയുള്ള ഏകദങ്ങൾ	-	Continuous functions
തുടർച്ചയും അവകലനീയതയും	-	Continuity and Differentiability
തൊടുവര	-	Tangent
ദ്വയാംഗ ക്രിയ	-	Binary operation
നിബന്ധനാരീതി	-	Set builder form
നിമ്ന വില	-	Minimum value
നിമ്നോന്നത വിലകൾ	-	Maxima and minima
നിര മാട്രിക്സ്	-	Column matrix
ന്യൂന വക്രം	-	Ellipse
ന്യൂന സമമിത മാട്രിക്സ്	-	Skew - symmetric matrix
ന്യൂന സംഖ്യ	-	Negative number
നൈസർഗിക കൃതി ഏകദം	-	Natural exponential function
ചെറു പൊതുഗുണിതം	-	LCM
പട്ടികാരീതി	-	Roster method
പരിമിതഗണം	-	Finite set
പരിവർത്തന ബിന്ദു	-	Turning point
പരിക്ഷേപം	-	Surjective/onto
പൂജ്യം മാട്രിക്സ്	-	Zero matrix
പ്രതിലോമ ത്രികോണമിതീയ ഏകദം	-	Inverse Trignometric Function
പ്രതിലോമം	-	Inverse
പ്രതിലോമ്യ ഏകദം	-	Invertible function
പ്രതിസമം	-	Reflexive
പ്രതിസമത	-	Reflexivity
പ്രയോഗം	-	Application
പ്രത്യക്ഷ ഏകദം	-	Explicit function
പ്രാദേശിക ഉന്നത വില	-	Local maximum value
പ്രത്യേകതകൾ	-	Properties

പ്രാദേശിക നിമ്ന വില	-	Local minimum value
പ്രാചലം	-	Parameter
പ്രാചലിക രൂപം	-	Parametric form
ബന്ധം	-	Relation
ഭിന്നക ഏകദം	-	Rational function
മണ്ഡലം	-	Domain
മാട്രിക്സ്	-	Matrix
മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനം	-	Addition of matrices
മാട്രിക്സുകളുടെ മൗലിക രൂപാന്തരണം	-	Elementary Transformation of matrices
മാട്രിക്സുകളുടെ വ്യത്യാസം	-	Difference of matrices
മാട്രിക്സുകളുടെ തുല്യത	-	Equality of matrices
മാട്രിക്സിന്റെ പ്രതിലോമം	-	Inverse of a matrix
മാട്രിക്സുകളുടെ ക്രിയകൾ	-	Operations on matrices
മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം	-	Order of a matrix
മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക്	-	Rate of change
മുഖ്യവിലഭാഗം	-	Principal branch
മുഖ്യവില	-	Principal value
മാട്രിക്സിന്റെ ട്രാൻസ്പോസ്	-	Transpose of a matrix
മൗലിക രൂപാന്തരണം	-	Elementry trasformation
യോഗം	-	Union
രംഗം	-	Range
രേഖാ ചിത്രം, ഗ്രാഫ്	-	Graph
രേഖീയമൂല്യ ഏകദം	-	Real valued function
രണ്ടാം ക്രമ അവകലജം	-	Second order derivative
രണ്ടാം ക്രമ അവകലജ പരിശോധന	-	Second derivative test
ലോഗരിതമിക ഏകദം	-	Logarithmic function
ലോഗരിതമിക അവകലനം	-	Logarithmic differentiation
ലംബം	-	Normal
വക്രം	-	Curve
വരി മാട്രിക്സ്	-	Row matrix
വൻപൂർണ സംഖ്യാ ഏകദം	-	Greatest integer function
വര	-	Line
വലതുസീമ	-	Right limit
വിലോമ പ്രതിബിംബം	-	Pre image
വികർണ മാട്രിക്സ്	-	Diagonal matrix
വിയുക്ത ഇടവേളകൾ	-	Disjoint intervals
വിയുക്തഗണങ്ങൾ	-	Disjoint sets
വിവിധ തരം മാട്രിക്സുകൾ	-	Types of matrices
വ്യതിയാന ബിന്ദു	-	Point of inflexion

ശൂന്യ ബന്ധം	-	Empty relation
ശൃംഖലാ നിയമം (ശൃംഖല)	-	Chain rule
സങ്കലനത്തിന്റെ അനന്യദം	-	Additive identity
സമവക്രം	-	Parabola
സങ്കലനത്തിന്റെ വിപരീതം	-	Additive inverse
സമ്മിശ്ര ഏകദം	-	Composite function
സംഗ്രഹം	-	Summary
സമമിതം	-	Symmetric
സമമിതി	-	Symmetry
സമമിത മാട്രിക്സ്	-	Symmetric matrix
സമചതുര മാട്രിക്സ്	-	Square matrix
സമസ്ത ബന്ധം	-	Universal relation
സമാനബന്ധം	-	Equivalence relation
സഹചാരി	-	Adjoint
സഹമണ്ഡലം	-	Codomain
സംയോജന നിയമം	-	Associative law
സംഖ്യാ ഏകദം	-	Constant function
സംഗതം	-	Consistency
സമാകലനം	-	Integration
സാംക്രമികം	-	Transitive
സാംക്രമികത	-	Transitivity
സാധാരണ കൃതി ഏകദം	-	Common exponential function
സാധ്യതാഭാഗം	-	Feasible region
സിംഗുലറല്ലാത്ത	-	Non-singular
സിംഗുലർ	-	Singular
സുവ്യക്തബന്ധങ്ങൾ	-	Trivial relations
സൂചക ഏകദം	-	Implicit function
സ്ഥിരസംഖ്യകൊണ്ടുള്ള ഗുണനം	-	Scalar multiplication
സ്വാഭാവിക മണ്ഡലം	-	Natural domain
റോൾ സിദ്ധാന്തം	-	Rolle's theorem