ഗണിതം

XII

ഭാഗം 2

കേരളസർക്കാർ

പൊതുവിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

തയാറാക്കിയത്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി, കേരളം

2019

First Edition
January 2007 Magha 1928

Reprinted
October 2007 Kartika 1929
January 2009 Pausa 1930
December 2009 Agrahayana 1931
January 2012 Magha 1933
November 2012 Kartika 1934
November 2013 Kartika 1935
December 2014 Pausa 1936
December 2015 Pausa 1937
December 2016 Pausa 1938
December 2017 Pausa 1939

PD 400T BS

© National Council of Educational Research and Training, 2007

₹ ....

Printed on 80 GSM paper with NCERT watermark

Published at the Publication Division by the Secretary, National Council of Educational Research and Training, Sri Aurobindo Marg, New Delhi 110 016 and printed at Shree Ram Printers, D 6 & F 455, Sec 63, Noida 201 301

ISBN 81-7450-629-2 (Part-I)
81-7450-653-5 (Part-II)

ALL RIGHTS RESERVED

- No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without the prior permission of the publisher.
- This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade, be lent, re-sold, hired out or otherwise disposed of without the publisher's consent, in any form of binding or cover other than that in which it is published.
- The correct price of this publication is the price printed on this page, Any revised price indicated by a rubber stamp or by a sticker or by any other means is incorrect and should be unacceptable.

OFFICES OF THE PUBLICATION DIVISION, NCERT

NCERT Campus
Sri Aurobindo Marg
New Delhi 110 016 **Phone : 011-26562708**

108, 100 Feet Road
Hosdakere Halli Extension
Banashankari III Stage
Bangaluru 560 085 Phone : 080-26725740

Navjivan Trust Building
P.O. Navjivan
Ahmedabad 380 014 **Phone : 079-27541446**

CWC Campus
Opp. Dhankal Bus Stop
Panihati
Kolkata 700 114 Phone : 033-25530454

CWC Complex
Maligaon
Guwahati 781 021 **Phone : 0361-2674869**

Publication Team

Head, Publication Division	:	*M. Siraj Anwar*
Chief Editor	:	*Shveta Uppal*
Chief Business Manager	:	*Gautam Ganguly*
Chief Production Officer	:	*Arun Chitkara*
Editor	:	*Bijnan Sutar*
Production Assistant	:	*Sunil Kumar*

Illustration
Arvinder Chawla

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram - 695 012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in, *e-mail* : scertkerala@gmail.com
Phone : 0471-2341883, Fax : 0471-2341869
Typesetting and Layout : SCERT
© Department of Education, Government of Kerala

ആമുഖം

ഏതു വിജ്ഞാനവും മാതൃഭാഷയിൽ പഠിക്കാനും പ്രകാശനം ചെയ്യാനും സാധിക്കും. അതിനുള്ള അവസരം പഠിതാക്കൾക്ക് ഒരുക്കേണ്ടത്, ഏതൊരു പഠന സമ്പ്രദായത്തിന്റെയും അനിവാര്യതയാണ്. അതിന്റെ തുടക്കമെന്ന നിലയ്ക്കാണ് ഹയർസെക്കന്ററി തലത്തിൽ ഭാഷേതര വിഷയങ്ങളിലെ പാഠപുസ്തകങ്ങൾ മലയാളത്തിൽ പ്രസിദ്ധീകരിക്കുന്നത്.

മാതൃഭാഷയിലൂടെയുള്ള വിദ്യാഭ്യാസം, ജ്ഞാനസമ്പാദനത്തിനുള്ള സുഗമമാർഗം എന്നതിനോടൊപ്പം സാംസ്കാരികതനിമയുടെ തിരിച്ചറിയൽ കൂടിയാണ്. അതുകൊണ്ടാണ് വികസിതരാജ്യങ്ങൾ മാതൃഭാഷയെ മുഖ്യബോധന മാധ്യമമായി സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇന്ത്യയിലാകട്ടെ, ദേശീയതലത്തിലുള്ള പ്രധാന പരീക്ഷകളെല്ലാം പ്രാദേശിക ഭാഷകളിൽക്കൂടി നടത്തുന്നതിനുള്ള സംവിധാനവും ഉണ്ടായി വരികയാണ്. ഈയൊരു സാഹചര്യത്തിൽ നമ്മുടെ കുട്ടികളും മാതൃഭാഷയുടെ ശക്തിസൗന്ദര്യങ്ങൾ തിരിച്ചറിഞ്ഞ് വിവിധ വിഷയങ്ങളിൽ ജ്ഞാനാർജനത്തിൽ ഏർപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്. അതിന് അവരെ സജ്ജരാക്കുകയാണ് ഈ പാഠപുസ്തകങ്ങളുടെ മുഖ്യ ലക്ഷ്യം.

പരിഭാഷപ്പെടുത്തിയ പുസ്തകങ്ങളിൽ അതത് വിഷയങ്ങളിലെ സാങ്കേതിക പദങ്ങൾ പരമാവധി മലയാളത്തിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. നമ്മുടെ ഭാഷയിൽ ചിരപരിചിതമായ ഇംഗ്ലീഷ് പദങ്ങളെ അതേപടി സ്വീകരിച്ചിട്ടുമുണ്ട്. വിവർത്തനത്തിന് ഏറ്റവും ലളിതമായ പദങ്ങളെ അതേരീതിയിൽ തന്നെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു. മാധ്യമഭാഷയിൽ പഠിക്കുന്നവർക്ക് ആശയഗ്രഹണം സുഗമമാക്കുന്ന വിധത്തിലാണ് പാഠപുസ്തകരചന നടത്തിയിരിക്കുന്നത്. അതോടൊപ്പം മലയാളഭാഷയുടെ വളർച്ചയ്ക്കും ഈ പ്രവർത്തനം സഹായകമാകുമെന്ന് കരുതുന്നു.

പാഠപുസ്തകവിവർത്തന രംഗത്ത് നമ്മുടെ രാജ്യത്ത് നടന്ന വലിയൊരു കാൽവെപ്പാണ് ഇത്. പ്രഥമ സംരംഭമെന്നനിലയിൽ ചില പരിമിതികളും പരിഭാഷയിൽ വന്നിട്ടുണ്ടാകാം. ക്ലാസ്മുറിയിൽ പ്രയോഗത്തിൽ വരുമ്പോഴാണ് അവയെല്ലാം കൂടുതൽ ബോധ്യപ്പെടുക. തുടർന്ന് വരുന്ന ഘട്ടങ്ങളിൽ അവയൊക്കെ പരിഹരിക്കുന്നതിന് എല്ലാ അഭ്യുദയകാംക്ഷികളിൽ നിന്നും വിശിഷ്യ അധ്യാപകർ, വിദ്യാർഥികൾ എന്നിവരിൽ നിന്നും അഭിപ്രായങ്ങളും നിർദേശങ്ങളും പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു.

ഡോ.ജെ. പ്രസാദ്
ഡയറക്ടർ,
എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി. കേരളം

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

NCERT appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P.K. Jain for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

Textbook Development Committee

CHAIRPERSON, ADVISORY GROUP IN SCIENCE AND MATHEMATICS

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

CHIEF ADVISOR

P.K. Jain, *Professor*, Department of Mathematics, University of Delhi, Delhi

CHIEF COORDINATOR

Hukum Singh, *Professor* and *Head*, DESM, NCERT, New Delhi

MEMBERS

Arun Pal Singh, *Sr. Lecturer*, Department of Mathematics, Dayal Singh College, University of Delhi, Delhi
A.K. Rajput, *Reader*, RIE, Bhopal, M.P.
B.S.P. Raju, *Professor*, RIE Mysore, Karnataka
C.R. Pradeep, *Assistant Professor*, Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, Karnataka
D.R. Sharma, *P.G.T.*, JNV-Mungeshpur, Delhi
Ram Avtar, *Professor* (Retd.) and *Consultant*, DESM, NCERT, New Delhi
R.P. Maurya, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi
S.S. Khare, *Pro-Vice-Chancellor*, NEHU, Tura Campus, Meghalaya
S.K.S. Gautam, *Professor*, DESM, NCERT, New Delhi
S.K. Kaushik, *Reader*, Department of Mathematics, Kirori Mal College, University of Delhi, Delhi
Sangeeta Arora, *P.G.T.*, Apeejay School Saket, New Delhi-110017
Shailja Tewari, *P.G.T.*, Kendriya Vidyalaya, Barkakana, Hazaribagh, Jharkhand
Vinayak Bujade, *Lecturer*, Vidarbha Buniyadi Junior College, Sakkardara Chowk, Nagpur, Maharashtra
Sunil Bajaj, *Sr. Specialist*, SCERT, Gurgaon, Haryana

MEMBER - COORDINATOR

V.P. Singh, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

ശില്പശാലയിൽ പങ്കെടുത്തവർ

ശ്രീ. ജി. ഭുവനേന്ദ്രൻ നായർ
പ്രിൻസിപ്പൽ (റിട്ട.), ഹയർ സെക്കന്ററി വിദ്യാഭ്യാസം

ഡോ. എം. ജയകൃഷ്ണൻ
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (റിട്ട.)
ഹയർ സെക്കന്ററി വിദ്യാഭ്യാസം

ശ്രീ. സജീവ്. സി.എസ്
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (ഗണിതം)
ഗവ. ഗേൾസ് എച്ച്.എസ്.എസ്.
മണക്കാട്, തിരുവനന്തപുരം

ശ്രീ. സത്യൻ. ഇം.എം.
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (ഗണിതം)
എ.കെ.ജി മെമ്മോറിയൽ, ഗവ.
എച്ച്.എസ്.എസ്., പിണറായി, കണ്ണൂർ

ശ്രീ. ബിനുമോൻ. ബി.
എൻ.വി.ടി. (ഗണിതം)
ഗവ. വി.എച്ച്.എസ്.എസ്, പട്ടാഴി

ശ്രീ. സാബു. വി
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം)
ഗവ. മോഡൽ എച്ച്.എസ്.എസ്
കുലശേഖരപുരം

ശ്രീ. ആർ. രാമാനുജം
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം)
എം.എൻ.കെ.എം., ഗവ.എച്ച്.എസ്.എസ്.
പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

ശ്രീ. അച്യുതൻ. സി.ജി.
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം), ഗവ.എച്ച്.
എസ്.എസ്, കാരാകുറിശ്ശി, പാലക്കാട്

ശ്രീ. ജയദാസ്. റ്റി
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം),
റ്റി.ആർ.കെ.എച്ച്.എസ്.എസ്,
വാണിയംകുളം, പാലക്കാട്

ശ്രീ. വിനോദ് കുമാർ. എ
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. (ഗണിതം), പി.കെ.എം.
എം.എച്ച്.എസ്.എസ്, എടരിക്കോട്, മലപ്പുറം

ശ്രീ. സുദീപ്. പി,
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (ഗണിതം)
ഡോ.കെ.ബി. മേനോൻ മെമ്മോറിയൽ എച്ച്.
എസ്.എസ്, തൃത്താല, പാലക്കാട്

ശ്രീ. ബിനേഷ്. ബി,
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (ഗണിതം)
ഗവ.എച്ച്.എസ്.എസ്, മീനങ്ങാടി, വയനാട്

ശ്രീ. പ്രമോദ്. എം.കെ,
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി (ഗണിതം)
ഗവ. മോയൻ മോഡൽ ഗേൾസ്, എച്ച്.എസ്.
എസ്., പാലക്കാട്

ശ്രീ. വിനോദ്കുമാർ. കെ,
എൻ.വി.ടി. (ഗണിതം),
ഗവ. വൊക്കേഷണൽ എച്ച്.എസ്.എസ്.
കൃഷ്ണപുരം, ആലപ്പുഴ

വിദഗ്ധർ

ഡോ. റ്റി.ജി. ശരച്ചന്ദ്രൻ
ഡെപ്യൂട്ടി ഡയറക്ടർ (റിട്ട.), കോളേജ് വിദ്യാഭ്യാസ വകുപ്പ്

ഡോ. പി. സോമൻ
റിട്ട. പ്രൊഫസർ (മലയാളം), യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം

പ്രൊഫ. പി. ചന്ദ്രശേഖരൻ
യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ് (റിട്ട.), തിരുവനന്തപുരം

ശ്രീ. സി. വേണുഗോപാൽ
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫ. ഐ.എ.എസ്.ഇ, തൃശ്ശൂർ

ശ്രീ. സുമേഷ്. എസ്.എസ്
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫ. സെന്റ് ജോൺസ് കോളേജ്
അഞ്ചൽ, കൊല്ലം

ശ്രീ. സുനിൽ കുമാർ. ആർ
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫ. ബി.ജെ.എം., ഗവ. കോളേജ് ചവറ

അക്കാദമിക് കോ-ഓർഡിനേറ്റർ

ഡോ. കെ. എസ്. ശിവകുമാർ
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

G4Z1X7

ഉള്ളടക്കം
ഭാഗം - 2

7. സമാകലജങ്ങൾ 381–472

7.1 ആമുഖം 381

7.2 സമാകലനം അവകലനത്തിന്റെ വിപരീത പ്രക്രിയ 381

7.3 സമാകലനത്തിന്റെ വിവിധ മാർഗങ്ങൾ 394

7.4 ചില പ്രത്യേക ഏകദങ്ങളുടെ കലനം. 407

7.5 ഭാഗിക ഭിന്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള സമാകലനം 419

7.6 ഭാഗങ്ങളാക്കിയുള്ള സമാകലനം 427

7.7 നിശ്ചിത സമാകലജം 438

7.8 കലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം 442

7.9 ആരോപ രീതി ഉപയോഗിച്ച് നിശ്ചിത സമാകലജങ്ങളുടെ വിലകാണൽ 448

7.10 നിശ്ചിത സമാകലജങ്ങളുടെ ചില പ്രത്യേകതകൾ 451

8. സമാകലജങ്ങളുടെ പ്രയോഗം 473–496

8.1 ആമുഖം 473

8.2 ലഘു വക്രങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 473

8.3 രണ്ട് വക്രങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 482

9. അവകലജ സമവാക്യങ്ങൾ 497–546

9.1 ആമുഖം 497

9.2 അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ 498

9.3 ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതു പരിഹാരവും പ്രത്യേക പരിഹാരവും 501

9.4 പൊതു പരിഹാരത്തിൽ നിന്നും അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ രൂപീകരണം 505

9.5 ഒന്നാം ക്രമത്തിലും ഒന്നാം കൃതിയിലുമുള്ള അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കാണുന്ന വിവിധ രീതികൾ 512

10. സദിശ ബീജഗണിതം 547–596

10.1 ആമുഖം 547

10.2 ചില അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ 548

10.3 വിവിധതരം സദിശങ്ങൾ 551

10.4 സദിശങ്ങളുടെ സങ്കലനം 554

10.5 ഒരു സദിശത്തെ അദിശം കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം 557

10.6 സദിശങ്ങളുടെ ഗുണനം 568

10.7 അദിശത്രയ ഗുണനം 583

11. ത്രിമാന ജ്യാമിതി 597–644

11.1 ആമുഖം 597

11.2 ഒരു വരയുടെ ദിശാകൊസൈനും ദിശാനുപാതവും 597

11.3 ത്രിമാനസ്ഥലത്തിലുള്ള ഒരു വരയുടെ സമവാക്യം 603

11.4 രണ്ട് വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ 607

11.5 രണ്ട് വരകൾക്കിടയിലുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ അകലം. 608

11.6 തലം 614

11.7 രണ്ട് വരകളുടെ സമതലീയത 624

11.8 രണ്ട് തലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ 626

11.9 ഒരു തലത്തിൽ നിന്നും ഒരു ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം. 628

11.10 ഒരു വരയ്ക്കും ഒരു തലത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോൺ 630

12. രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് 645–678

12.1 ആമുഖം 645

12.2 രേഖീയപ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നവും അതിന്റെ ഗണിതരൂപീകരണവും 646

12.3 വിവിധതലത്തിലുള്ള രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നങ്ങൾ 658

13. സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം 679–743

13.1 ആമുഖം 679

13.2 സോപാധികസാധ്യത 680

13.3 സാധ്യതകളുടെ ഗുണനം 681

13.4 പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങൾ 691

13.5 ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തം 699

13.6 പ്രവചനാതീതചരവും സാധ്യതാവിതരണവും 710

13.7 ബർണുളി ട്രയലും ദ്വിപദ വിതരണവും 725

ഉത്തരസൂചിക 744

പദാവലി 769

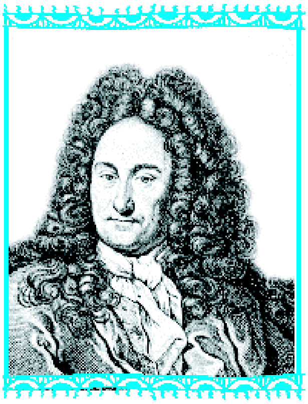
Y3J6N5

അധ്യായം 7

സമാകലജങ്ങൾ (INTEGRALS)

❖ "ഒരു പർവതം അവിടെയുണ്ട് എന്നതിനാൽ ഒരു പർവതാരോഹകൻ അതു കയറുന്നതുപോലെ, പുതിയ വസ്തുതകൾ ഉണ്ട് എന്നതിനാൽ ഒരു നല്ല ഗണിത വിദ്യാർഥി അതു പഠിക്കുന്നു"- ജെയിംസ് ബി. ബ്രിസ്റ്റൺ❖

7.1 ആമുഖം

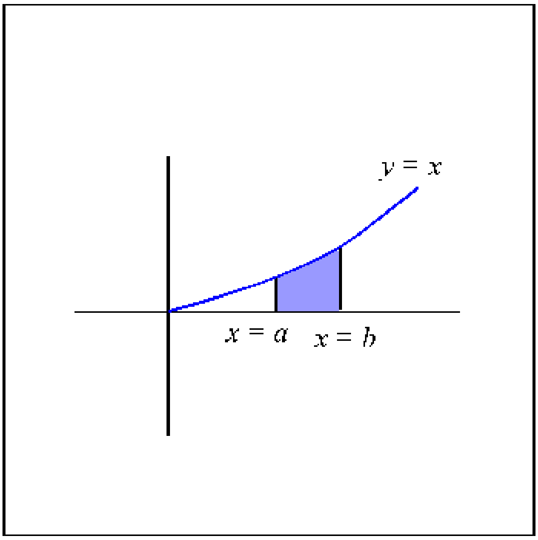


ജി.ഡബ്ല്യു. ലെബ്നിസ്
(1646 -1716)

കഴിഞ്ഞ അധ്യായങ്ങളിൽ അവകലനവും (differentiation) അവയുടെ പ്രയോഗങ്ങളും മനസ്സിലാക്കിയല്ലോ. നിരന്തരം മാറുന്ന ചലനത്തിൽ നിശ്ചിത ക്ഷണത്തിലെ വേഗം കണ്ടുപിടിക്കുക എന്ന ഭൗതിക പ്രശ്നത്തിന്റെയും ഒരു വക്രത്തിലെ നിശ്ചിതബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് കണക്കാക്കുക എന്ന ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നത്തിന്റെയും പരിഹാരമായിട്ടാണ് അവകലനം രൂപപ്പെട്ടത്. ഇതുപോലെ സമയവും ദൂരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക എന്ന ഭൗതിക പ്രശ്നത്തിൽ നിന്നും വക്രങ്ങൾ പരിധിയായി വരുന്ന രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക എന്ന ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നത്തിൽ നിന്നുമാണ് സമാകലനം (Integration) എന്നറിയപ്പെടുന്ന ഗണിതാശയത്തിന്റെ തുടക്കം. തുടർന്ന് അവകലനത്തിന്റെ വിപരീത പ്രക്രിയയായും ഇതിനെ വ്യാഖ്യാനിച്ചു.

I എന്ന ഇടവേളയിൽ $\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$ ആയാൽ $f(x)$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഒരു അവകലജ വിപരീതമാണ് (Anti-derivative) $F(x)$, $F(x) + 1$, $F(x) - \frac{1}{2}$ എന്നിങ്ങനെ, പൊതുവായി C ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായാൽ $F(x) + C$ എന്ന ഓരോ ഏകദവും $f(x)$ ന്റെ അവകലജ വിപരീതമാണെന്നു കാണാവുന്നതാണ്. ഈ അവകലജ വിപരീതങ്ങളെ $f(x)$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ അനിശ്ചിത സമാകലജങ്ങൾ (Indefinite Integrals) എന്നു വിളിക്കുന്നു.

പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുന്ന പ്രശ്നവും സമാകലനത്തിലേക്കു നയിച്ചുവെന്നു പറഞ്ഞല്ലോ. ചിത്രത്തിലെ $y = f(x)$ എന്ന വക്രവും x അക്ഷവും, $x = a$, $x = b$ എന്നീ ലംബരേഖകളും അതിരുകളായ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ, $f(x)$ ന്റെ (a, b) എന്ന ഇടവേളയിലെ നിശ്ചിത സമാകലജം (definite intergal) എന്നു വിളിക്കുന്നു.



ചിത്രം 7.1

നിശ്ചിത, അനിശ്ചിത സമാകലജങ്ങളുടെ പഠനത്തെ സമാകലജ കലനം (Integral Calculus) എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ഇവ രണ്ടും തമ്മിലുള്ള ബന്ധമാണ് "കലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം" എന്നറിയപ്പെടുന്നത്.

ചുരുക്കത്തിൽ, ഒരു ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം തന്നിരുന്നാൽ ഏകദം കണ്ടുപിടിക്കുക, ഒരു ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് നിർണ്ണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക തുടങ്ങിയ പ്രശ്നങ്ങളാണ് സമാകലജകലനത്തിന്റെ വളർച്ചയ്ക്കടിസ്ഥാനം.

7.2 സമാകലനം അവകലനത്തിന്റെ വിപരീതപ്രക്രിയ

സമാകലനത്തെ അവകലനത്തിന്റെ എതിർപ്രക്രിയ എന്ന് പറയാം. അതായത്, ഒരു ഏകദത്തിന്റെ സമാകലജം കാണുന്നതിന് ആ ഏകദം ഏതിന്റെ അവകലജമെന്ന് കണ്ടാൽ മതിയാകും. ഇതിനെ എതിർ അവകലജം (Antiderivative) കാണുന്ന പ്രക്രിയ എന്നു പറയാം. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കുക.

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \ldots (2)$$

$$\frac{d}{dn}(e^x) = e^x \qquad \ldots (3)$$

ഉദാഹരണം (1) ൽ നിന്നും $2x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഒരു എതിർ അവകലജമാണ് x^2. മറ്റേതെങ്കിലും ഏകദത്തിന്റെ അവകലജമായി $2x$ വരുമോ? സ്ഥിരസംഖ്യകളുടെ

അവകലജം (derivative of constants) പൂജ്യം ആണല്ലോ. അത്കൊണ്ട് C ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യയാണെങ്കിൽ

$\frac{d}{dx}(x^2+C)=2x$ ആയിരിക്കുമല്ലോ. അപ്പോൾ $2x$ ന്റെ എതിർ അവകലജം $x^2 + C$ എന്നെടുക്കാമല്ലോ. ഇവിടെ C യുടെ വിവിധ വിലകൾക്ക് അനേകം എതിർ അവകലജങ്ങൾ ലഭിക്കും. ഇനി ഇവയല്ലാതെ മറ്റൊരു ഏകദം $2x$ ന്റെ എതിർ അവകലജമായി വരുമോ? നമുക്ക് പരിശോധിക്കാം.

$g(x)$, $h(x)$ ഇവ രണ്ടും $f(x)$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ എതിർ അവകലജങ്ങളാണ് എന്ന് വിചാരിക്കുക. അപ്പോൾ

$g'(x) = f(x)$ കൂടാതെ $h'(x) = f(x)$; $x \in I$ ആയിരിക്കുമല്ലോ.

$p(x) = g(x) - h(x)$ എന്നെടുത്താൽ $p(x)$ അവകലനം ചെയ്യാൻ സാധിക്കുന്ന ഏകദമാണല്ലോ. അതുകൊണ്ട്

$p'(x) = g'(x) - h'(x) = f(x) - f(x) = 0$; $x \in I$ ആയിരിക്കും

$p'(x) = 0$; $x \in I$ ആയതുകൊണ്ട് $p(x)$ ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായിരിക്കും

$p(x) = C$

അതായത് $g(x) - h(x) = C$

ഇതിൽ നിന്നും ഒരു ഏകദത്തിന്റെ ഏത് രണ്ട് എതിർ അവകലജങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായിരിക്കും.

ചിഹ്നങ്ങൾ

$f(x)$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ എല്ലാ എതിർ അവകലജങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കുന്ന പ്രക്രിയയെ $\int f(x)\,dx$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. മുകളിൽ പറഞ്ഞത് ക്രോഡീകരിച്ചാൽ,

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \text{ ആയാൽ}$$

$\int f(x)\,d(x) = F(x) + C$ ആയിരിക്കും. C ഒരു രേഖീയസംഖ്യയുമായിരിക്കും. ഇതിനെ സമാകലജസ്ഥിരാങ്കം എന്ന് പറയുന്നു.

ചിഹ്നങ്ങൾ/പദങ്ങൾ/ശൈലി	അർത്ഥം
$\int f(x)\,dx$	x ആധാരമായി $f(x)$ ന്റെ സമാകലജം
$\int f(x)\,dx$ ൽ $f(x)$	സമാകല്യം
$\int f(x)\,dx$ ൽ x	സമാകലജത്തിന്റെ ചരം
സമാകലനം	ഏകദത്തിന്റെ സമാകലജം കാണുന്ന പ്രക്രിയ
f ന്റെ സമാകലജം	$F'(x) = f(x)$ ആയ ഒരു ഏകദം
സമാകലജ സ്ഥിരാങ്കം	സ്ഥിര ഏകദമായി പരിഗണിക്കാവുന്ന ഒരു രേഖീയ സംഖ്യ

പട്ടിക 7.1

ഉദാഹരണങ്ങൾ (2), (3) ഇവയിൽ നിന്നും

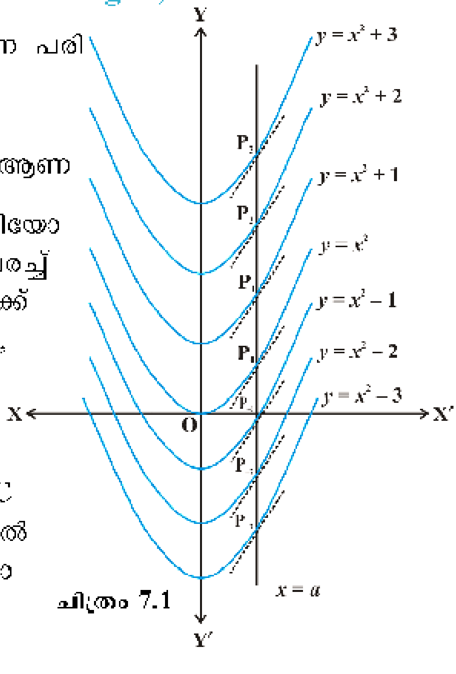
$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

7.2.1 അനിശ്ചിത സമാകലജത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനം (Geometrical interpretation of Indefinite Integral)

നേരത്തെ തന്നിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണം തന്നെ പരിശോധിക്കാം.

$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ ആയതുകൊണ്ട് $\int 2x dx = x^2 + C$ ആണല്ലോ. C ക്ക് വിവിധ വിലകൾ ആരോപിച്ച് ജിയോജിബ്രയിൽ $x^2 + C$ യുടെ ഗ്രാഫുകൾ വരച്ച് നോക്കാം. $C = 0, 1, 2, -1, -2$ എന്നീ വിലകൾക്ക് യഥാക്രമം $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 1$, $y = x^2 - 2$ എന്നീ സമവക്രങ്ങൾ ലഭിക്കും. ഏതെങ്കിലും ഒരു സമവക്രത്തെ മുകളിലേക്കും താഴേക്കും മാറ്റിയാൽ (shift) മറ്റ് സമവക്രങ്ങൾ ലഭിക്കുമല്ലോ. അതായത് $x^2 + C$ എന്നത് സമവക്രങ്ങളുടെ കുടുംബമാണ് ഇതിൽ ഏത് രണ്ടംഗങ്ങളും തമ്മിൽ ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യാ അകലം പാലിക്കുന്നു.



ചിത്രം 7.1

$\int f(x)\, d(x) = F(x) + C$ എന്നതിന്റെ ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനം $F(x)$ എന്ന വക്രവും അതിന്റെ കുടുംബവുമാണ്. (C ക്ക് വ്യത്യസ്ത വിലകൾ നൽകുമ്പോൾ കുടുംബത്തിലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങൾ ലഭിക്കും).

അവകലനം എന്ന അധ്യായത്തിൽ പല ഏകദങ്ങളുടെയും അവകലജം കണ്ടുപിടിച്ചുവല്ലോ. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അവകലജത്തിന്റെയും സമാകലജത്തിന്റെയും സാമാന്യരൂപങ്ങൾ കാണുക.

	അവകലജങ്ങൾ	**സമാകലജങ്ങൾ (അവകലജങ്ങളുടെ വിപരീതം)**
(i)	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n-1}}{n+1}\right) = x^n,\ n \neq -1$;	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n-1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
	$\frac{d}{dx}(x) = 1$;	$\int 1 dx = x + C$
	$\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
(ii)	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$;	$\int e^x dx = e^x + C$
(iii)	$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$;	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$
(iv)	$\frac{d}{dx}(\log\lvert x\rvert) = \frac{1}{x}$;	$\int \frac{1}{x} dx = \log\lvert x\rvert + C$
(v)	$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$;	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
(vi)	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$;	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
(vii)	$\frac{d}{dx}(\log\lvert\sec x\rvert) = \tan x$;	$\int \tan x\, dx = \log\lvert\sec x\rvert + C$
(viii)	$\frac{d}{dx}(\log\lvert\sin x\rvert) = \cot x$;	$\int \cot x\, dx = \log\lvert\sin x\rvert + C$
(ix)	$\frac{d}{dx}(\log\lvert\sec x + \tan x\rvert) = \sec x$	$\int \sec x\, dx = \log\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$
(x)	$\frac{d}{dx}(\log\lvert\mathrm{cosec}\, x - \cot x\rvert) = \mathrm{cosec}\, x$;	$\int \mathrm{cosec}\, x\, dx = \log\lvert\mathrm{cosec}\, x - \cot x\rvert + C$

(xi) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$; $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

(xii) $\frac{d}{dx}(-\cot x) = \operatorname{cosec}^2 x$; $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = \quad \cot x + C$

(xiii) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$; $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

(xiv) $\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x) = \operatorname{cosec} x \cot x$; $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$

(xv) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 \quad x^2}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1 \quad x^2}} = \sin^{-1} x + C$

(xvi) $\frac{d}{dx}(-\cos^{\ 1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \quad \cos^{\ 1} x + C$

(xvii) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{\ 1} x + C$

(xviii) $\frac{d}{dx}(-\cot^{\ 1} x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\cot^{-1} x + C$

(xix) $\frac{d}{dx}(\sec^{\ 1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{\ 1} x + C$

(xx) $\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 \quad 1}}$; $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 \quad 1}} dx = -\operatorname{cosec}^{-1} x + C$

കുറിപ്പ്:

അനിശ്ചിത സമാകലന പ്രക്രിയയിൽ ഏകദങ്ങൾ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഇടവേള തത്കാലം പരിഗണിക്കുന്നില്ല. ആവശ്യമുള്ള സന്ദർഭങ്ങളിൽ അവ പരിഗണിക്കേണ്ടതാണ്.

7.2.2 അനിശ്ചിത സമാകലജത്തിന്റെ ചില പ്രത്യേകതകൾ

I. a) $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$

b) $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

തെളിവ്

$F(x)$ എന്നത് $f(x)$ ന്റെ ഒരു അവകലജവിപരീതം ആയാൽ

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$ ആയിരിക്കുമല്ലോ.

അതുകൊണ്ട് $$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\left(F(x) + C\right)$$

$$= \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

അതുപോലെ $$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

II. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$: k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ

തെളിവ് (I), $$\frac{d}{dx}\int k\,f(x)\,dx = k\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx)$$

$$= k\,f(x) \qquad \text{(I പ്രകാരം)}$$

(I), അതുകൊണ്ട് $$\frac{d}{dx}\int k\,f(x)\,dx = k\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx.$$

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

കുറിപ്പ്:

$\int f(x)dx + C_1,\ C_1 \in R$, $\int g(x)dx + C_2,\ C_2 \in R$ ഇവയുടെ സമതയെ $\int f(x)dx =$ $\int g(x)dx$ എന്ന രീതിയിൽ സമാകലജസ്ഥിരാങ്കം ഇല്ലാതെ സൂചിപ്പിക്കാറുണ്ട്.

III. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

തെളിവ് :

$$\frac{d}{dx}\left[\int [f(x) + g(x)]\, dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)\, dx + \frac{d}{dx}\int g(x)\, dx$$

അതുകൊണ്ട് $\int \left(f(x) + g(x)\right) dx \quad = \quad \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

IV. $\int [k_1\, f_1(x) + k_2\, f_2(x) + ... + k_n f_n(x)]\, dx = k_1 \int f_1(x)\, dx \quad k_2 \int f_2(x) dx + ... + k_n \int f_n(x)\, dx$

തെളിവ് : പ്രത്യേകത II, III ഇവ ഉപയോഗിച്ചാൽ തെളിവ് എളുപ്പം ലഭിക്കും.

☛ കുറിപ്പ്:

1. F എന്നത് f ന്റെ ഒരു അവകലജ വിപരീതം ആണെങ്കിൽ F + C എന്നതും f ന്റെ മുഴുവൻ അവകലജ വിപരീതമാണ് (C എന്നത് ഒരു രേഖീയ സംഖ്യ)
2) f എന്ന ഏകദത്തെ, പോളിനോമിയൽ, ലോഗരിതമിക, എക്സ്പൊണെൻഷ്യൽ, ത്രികോണമിതി, പ്രതിലോമത്രികോണമിതീയ തുടങ്ങിയ മൗലിക ഏകദരൂപത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയുന്നില്ലെങ്കിൽ അത്തരം ചോദ്യങ്ങളെ നാം ഈ അധ്യായത്തിൽ പരിഗണിക്കുന്നില്ല. ഉദാഹരണം $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$ തുടങ്ങിയവ. അതായത് സൂക്ഷ്മപരിശോധനയിൽ e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$ എന്നിവ അവകലജമായി വരുന്ന ഏകദം കണ്ടെത്താൻ കഴിയില്ല.
3. അനിശ്ചിത സമാകലജ പ്രക്രിയ നിർവഹിക്കുമ്പോൾ ഏകദങ്ങൾ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന വിലകൾ തൽക്കാലം പരിഗണിക്കേണ്ടതില്ല.
4. x അല്ലാത്ത ചരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സമാകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ അനുയോജ്യമായ മാറ്റം വരുത്തേണ്ടതാണ് ഉദാഹരണത്തിന്.

$$\int y^1\, dy = \frac{y^5}{5} + C$$

7.3.3 അവകലജം, സമാകലജം ഇവ തമ്മിലുള്ള താരതമ്യം

1. രണ്ടും ഏകദങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള പ്രക്രിയകളാണ്.
2. ഇവ പരസ്പരം വിപരീത പ്രക്രിയകളാണ്.

3. രണ്ടിനും രേഖീയ പ്രത്യേകതകൾ ഉണ്ട്. അതായത്

$$\text{(i)}\quad \frac{d}{dx}\left[k_1\, f_1(x) + k_2\, f_2(x)\right] = k_1 \frac{d}{dx} f_1(x) + k_2 \frac{d}{dx} f_2(x)$$

$$\text{(ii)}\quad \int\left[k_1\, f_1(x) + k_2\, f_2(x)\right]dx = k_1 \int f_1(x)\,dx + k_2 \int f_2(x)\,dx$$

4. എല്ലാ ഏകദങ്ങൾക്കും അവകലജങ്ങൾ ഇല്ല. അത് പോലെ എല്ലാ ഏകദങ്ങൾക്കും സമാകലജങ്ങളും ഇല്ല. ഇവ ഉയർന്ന ക്ലാസുകളിൽ മനസിലാക്കാം.

5. $P(x)$ എന്ന പോളിനോമിയലിനെ അവകലനം ചെയ്താൽ ലഭിക്കുന്ന പോളിനോമിയലിന് ആദ്യപോളിനോമിയലിനെക്കാളും കൃതി ഒന്ന് കുറവായിരിക്കും. എന്നാൽ സമാകലനം ചെയ്ത് ലഭിക്കുന്ന പോളിനോമിയലിന് ആദ്യ പോളിനോമിയലിനെക്കാളും കൃതി ഒന്ന് കൂടുതലായിരിക്കും.

6. ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്ന തൊടുവരകളുടെ ചരിവാണ് അവകലജത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ അർത്ഥം. ഒന്നിന് പുറകെ ഒന്നൊന്നായി സമാന്തരമായിട്ടുള്ള അനേകം വക്രങ്ങളുടെ കൂട്ടമാണ് അനിശ്ചിത സമാകലജത്തിന്റെ ജ്യാമിതിയ അർത്ഥം. ഇവിടെ x അക്ഷത്തിന് ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന രേഖ വക്രങ്ങളിൽ ഓരോന്നിനെയും ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളെല്ലാം സമാന്തരങ്ങളായിരിക്കും. (ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിക്കാം)

8. ഒരു വസ്തുവിന് t സമയത്തുണ്ടായ സ്ഥാനാന്തരം തന്നാൽ അവകലനം ഉപയോഗിച്ച് പ്രവേഗം കണക്കാക്കാം. തിരിച്ച് പ്രവേഗം തന്നാൽ സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് സ്ഥാനാന്തരവും കണക്കാക്കാം.

9. സീമ ഉപയോഗിച്ചുള്ള പ്രക്രിയയാണ് അവകലനം. നിശ്ചിത സമാകലനവും സീമ ഉപയോഗിക്കുന്ന പ്രക്രിയയാണ് (ഇവ പിന്നീട് ചർച്ചചെയ്യാം).

ഉദാഹരണം : 1

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളുടെ അവകലജ വിപരീതങ്ങൾ എഴുതുക.

i) $\cos 2x$ ii) $3x^2 + 4x^3$ iii) $\frac{1}{x}; x \neq 0$

iv) $\frac{1}{1+x^2}$ v) $e^{\sin x}.\ \cos x$

i) ഇവിടെ ഏത് ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം ആയിരിക്കും $\cos 2x$ എന്ന് ആലോചിക്കാം. $\frac{d}{dx}(\sin 2x) = \cos 2x.2$ ആണല്ലോ.

അതുകൊണ്ട് $\frac{d}{dx}\frac{(\sin 2x)}{2} = \cos 2x$ ആയിരിക്കുമല്ലോ.

അതുകൊണ്ട് $\cos 2x$ ന്റെ ഒരു അവകലജ വിപരീതമാണ് $\frac{(\sin 2x)}{2}$.

ii) $\frac{d}{dx}\left(x^3 + x^4\right) = 3x^2 + 4x^3$ ആയതുകൊണ്ട്

$3x^2 + 4x^3$ ന്റെ ഒരു അവകലജ വിപരീതമാണ് $x^3 + x^4$

iii) $\frac{d}{dx}(log\, x) = \frac{1}{x},\ x > 0.$

$$\frac{d}{dx} log(-x)$$

$$= \frac{1}{-x} \times (-1)$$

$$= \frac{1}{x}, x < 0$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(log|x|) = \frac{1}{x}; x \neq 0$$

അതുകൊണ്ട് $\frac{1}{x}$ ന്റെ ഒരു അവകലജ വിപരീതമാണ് $\log|x|$

iv) $\frac{d}{dx}\left(tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$

അതുകാണ്ട് $\frac{1}{1+x^2}$ ന്റെ ഒരു അവകലജ വിപരീതമാണ് $\tan^{-1} x$

v) $\frac{d}{dx}\left(e^{\sin x}\right)=e^{\sin x}.\cos x$

അതുകൊണ്ട് $e^{\sin x}.\cos x$ ന്റെ ഒരു അവകലജ വിപരീതമാണ് $e^{\sin x}$

ഉദാഹരണം : 2

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സമാകലജം കണക്കാക്കുക.

i) $\int \frac{x^3-1}{x^2}dx$ ii) $\int\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)dx$ iii) $\int\left(x^{\frac{3}{2}}+2e^x-\frac{1}{x}\right)dx$

പരിഹാരം

i) $\int \frac{x^3-1}{x^2}dx \quad = \quad \int x\,dx - \int x^{-2}\,dx$ (പ്രത്യേകത IV പ്രകാരം)

$= \frac{x^2}{2}+C_1 \quad \frac{x^{-1}}{1} \quad C_2$

$= \frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C_1 \quad C_2$

$= \frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C$

$(C = C_1 - C_2)$

> **☛ കുറിപ്പ്:**
> തുടർന്നുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ അവസാന ഉത്തരത്തിൽ മാത്രം സമാകലന സ്ഥിരാങ്കം (Constant of Integration) C ചേർത്താൽ മതിയാകും.

ii) $\int (x^{\frac{2}{3}}+1)\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx + \int dx$

$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+x+C$

$$= \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + x + C$$

iii) $\int \left(x^{\frac{3}{2}} + 2\, e^{x} - \frac{1}{x} \right) dx = \int x^{\frac{3}{2}}\, dx + \int 2\, e^{x}\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}-1}}{\frac{3}{2}+1} + 2\, e^{x} - \log |x| + C$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2\, e^{x} - \log |x| + C$$

ഉദാഹരണം : 3

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സമാകലജം കണക്കാക്കുക.

i) $\int (\sin x + \cos x)\, dx$ ii) $\int \operatorname{cosec} x\, (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx$ iii) $\int \frac{1 \quad \sin x}{\cos^2 x}\, dx$

iv) $\int e^{2\log x} dx$ v) $\frac{x \mid 2}{\sqrt{x}} dx$ vi) $\int (x+2)\sqrt{x}\, dx$

പരിഹാരം

i) $\int (\sin x + \cos x)\, dx = \int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx = -\cos x + \sin x + C$

ii) $\int (\operatorname{cosec} x\, (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx + \int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx$

$$= -\cot x \quad \operatorname{cosec} x + C$$

iii) $\int \frac{1 \quad \sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx = \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx$$

$$= \tan x - \sec x + C$$

iv) $\int e^{2\log x} dx = \int e^{\log x^2} dx \quad \int x^2 dx \quad \frac{x^3}{3} + C$

v) $\frac{x-2}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + 4\sqrt{x} + C$

vi) $\int (x \quad 2)\sqrt{x}\, dx = \int \left(x^{3/2} + 2x^{1/2} \right) dx = \frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{4x^{3/2}}{3} + C$

ഉദാഹരണം : 4

f ന്റെ ഒരു അവകലജ വിപരീതമാണ് F. കൂടാതെ $f(x) = 4x^3 - 6$, $F(0) = 3$ എങ്കിൽ F കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$f(x) = 4x^3 - 6$ ആണ്

$\frac{d}{dx}\left(x^4 - 6x\right) = 4x^3 - 6$ ആയതുകൊണ്ട്,

അവകലജ വിപരീതത്തെ $F(x) = x^4 - 6x + C$ എന്നെടുക്കാമല്ലോ.

$F(0) = 3$ ആയതുകൊണ്ട് $C = 3$ എന്നു കിട്ടും.

$F(x) = x^4 - 6x + 3$ ആണ് ആവശ്യമായ അവകലജ വിപരീതം.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.1

I. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ ഒരു അവകലജ വിപരീതം കണ്ടെത്തുക.

1. $\sin 2x$ 2. $\cos 3x$ 3. e^{2x} 4. $(ax + b)^2$ 5. $\sin 2x - 4e^{3x}$

II. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സമാകലജം കണക്കാക്കുക.

6. $\int (4e^{3x} + 1)\, dx$ **7.** $\int x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$ **8.** $\int (ax^2 + bx + c)\, dx$

9. $\int (2x^2 + e^x)\, dx$ **10.** $\int \left(\sqrt{x} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$ **11.** $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx$

12. $\int \frac{x^3+3x+4}{\sqrt{x}}\,dx$ **13.** $\int \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}\,dx$ **14.** $\int (1-x)\sqrt{x}\,dx$

15. $\int \sqrt{x}(3x^2+2x+3)\,dx$ **16.** $\int (2x-3\cos x+e^x)\,dx$

17. $\int (2x^2 \quad 3\sin x+5\sqrt{x})\,dx$ **18.** $\int \sec x(\sec x+\tan x)\,dx$

19. $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}\,dx$ **20.** $\int \frac{2-3\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$

III. 21, 22 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

21. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ന്റെ അവകലജ വിപരീതം ഏതാണ്?

(A) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$ (B) $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}x^2+C$

(C) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$ (D) $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+C$

22. $\frac{d}{dx}f(x)=4x^3-\frac{3}{x^4}$ കൂടാതെ $f(2)=0$ എങ്കിൽ $f(x)=$

(A) $x^4+\frac{1}{x^3}-\frac{129}{8}$ (B) $x^3+\frac{1}{x^4}+\frac{129}{8}$

(C) $x^4+\frac{1}{x^3}+\frac{129}{8}$ (D) $x^3+\frac{1}{x^4}-\frac{129}{8}$

7.3 സമാകലനത്തിന്റെ വിവിധമാർഗങ്ങൾ

f എന്ന ഏകദത്തിന്റെ സമാകലജം കണ്ടുപിടിക്കാൻ Integral [f] എന്ന നിർദ്ദേശം നൽകിയാൽ മതി.

മുൻ ക്ലാസ്സുകളിൽ സമാകലനം നാം കണ്ടെത്തിയത് അവകലനം വഴിയാണ്. ഇത് എപ്പോഴും പ്രായോഗികമല്ല. ചില ഏകദങ്ങൾ ഏത് ഏകദത്തിന്റെ അവകലജമാണ് എന്നത് നമുക്ക് ആലോചിച്ച് എളുപ്പം കണ്ടെത്താൻ സാധിക്കില്ല. അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ നാം വിവിധ മാർഗങ്ങളിൽ കൂടി അവകലജ വിപരീതങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കും. അത്തരം ചില മാർഗ്ഗങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

i) ആരോപ രീതി (Substitution method)

ii) അംശീയ ഭിന്നകരീതി (Integration by partial fraction)

ii) ഭാഗങ്ങളാക്കി സമാകലനം (Integration by parts)

7.3.1 ആരോപ രീതി (Substitution method)

$\int f(x)\,dx$ കണക്കാക്കുന്നതിനു വേണ്ടി സ്വതന്ത്രചരമായ x നെ $x = g(t)$ എന്ന രീതിയിൽ മാറ്റാം.

$x = g(t)$ ആയാൽ $dx = g'(t)\,dt$ ആയിരിക്കും

അതുകൊണ്ട് $I = \int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$ എന്ന രീതിയിൽ മാറും. ഇങ്ങനെ ചരത്തെ മാറ്റി സമാകലനം ചെയ്യുന്ന രീതിയെ ആരോപ രീതി (Substitution method) എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$; $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$; $\int [f(x)]^n . f'(x)dx$

$\int g[f(x)].f'(x)dx$ തുടങ്ങിയവ

ഉദാഹരണം : 5

ആരോപ രീതിയിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക.

(i) $\sin mx$ (ii) $2x \sin (x^2 + 1)$ (iii) $\frac{\tan^{-1}\sqrt{x}\,\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(iv) $\frac{\sin(\tan^{-1}x)}{1+x^2}$ (v) $\frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$ (vi) $2^{\sin^2 x}.\sin 2x$

പരിഹാരം

(i) mx ന്റെ അവകലജം m ആണല്ലോ. അതുകൊണ്ട്

$mx = t$ എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ

$m.dx = dt$

$dx = \frac{dt}{m}$

$$\int \sin mx\,dx = \frac{1}{m}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{m}\cos t + C = -\frac{1}{m}\cos mx + C$$

(ii) $x^2 + 1 = t$ എന്നാരോപിച്ചാൽ

$2x\,dx = dt$

$$\int 2x \sin(x^2+1)\,dx = \int \sin t\,dt = -\cos t + C = -\cos(x^2+1) + C$$

(iii) $\sqrt{x} = t$ ആയാൽ

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dt,\ dx = 2t\,dt$$

$$\int\frac{\tan^4\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int\frac{2t\tan^4 t\sec^2 t\,dt}{t} = 2\int tan^4 t\, sec^2 t\, dt$$

$u = \tan t$ എന്നാരോപിച്ചാൽ

$du = \sec^2 t.dt$

അതുകൊണ്ട് $\displaystyle\int\frac{\tan^4\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int u^4 du$

$$= 2\frac{u^5}{5}+C$$

$$= 2\frac{tan^5 t}{5}+C$$

$$= \frac{2}{5}tan^5\sqrt{x}+C$$

(iv) $t = \tan^{-1}x$ ആയാൽ

$$dt = \frac{1}{1+x^2}dx$$

അതുകൊണ്ട് $\displaystyle\int\frac{\sin(\tan^{-1}x)}{1+x^2}dx$

$$= \int\sin t\,dt = -\cos t + C = -\cos(\tan^{-1}x) + C$$

(v) $t = \sin^{-1}x$ എന്നാരോപിച്ചാൽ

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

അതായത് $\displaystyle\int\frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int e^t.\,dt = e^t + C = e^{\sin^{-1}x} + C$

(vi) $u = \sin^2 x$ ആയാൽ

$du = 2\sin x.\cos x\,dx$

$du = \sin 2x\,dx$

അതുകൊണ്ട് $\int_2^{\sin^2 x} \sin 2x dx = \int 2^u.du. = \frac{2^u}{\log 2} + C$

$= \frac{2^{\sin^2 x}}{\log 2} + C$

ഉദാഹരണം : 6

ആരോപ രീതി ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ സമാകലജം കാണുക.

(1) $\int \tan x\,dx$ (2) $\int \cot x\,dx$ (3) $\int \sec x\,dx$ (4) $\int \operatorname{cosec} x\,dx$

പരിഹാരം

(i) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$\int \tan x\,dx = \int \frac{-du}{u}$

$= -\log|u| + C$

$= -\log|\cos x| + C$

$= \log|\sec x| + C$

(ii) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$u = \sin x$ ആയാൽ

$du = \cos x\,dx$

$\int \cot x\,dx = \int \frac{du}{u}$

$= \log|u| + C$

$= \log|\sin x| + C$

$$\text{(iii)} \int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} dx$$

$u = \sec x + \tan x$ ആയാൽ

$du = (\sec x \ \tan x + \sec^2 x)dx$

$du = \sec x \ (\tan x + \sec x)dx$

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{du}{u}$$

$$= \log|u| + C$$

$$= \log|\sec x + \tan x| + C$$

$$\text{(iv)} \quad \int \cot x\, dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x(\operatorname{cosec} x - \cot x)}{(\operatorname{cosec} x - \cot x)} dx$$

$u = \operatorname{cosec} x - \cot x$ എന്നാരോപിച്ചാൽ

$du = -\operatorname{cosec} x \cot x + \operatorname{cosec}^2 x$

$du = \operatorname{cosec} x\, (\operatorname{cosec} x - \cot x)$

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{du}{u}$$

$$= \log|u| + C$$

$$= \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$$

ഉദാഹരണം : 7

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സമാകലജം കാണുക.

i) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x+1} dx$ ii) $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}\, dx$ iii) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1} dx$

iv) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x+1} dx$ v) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$ vi) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4} dx$

പരിഹാരം

$$\text{i)} \int \frac{x+2}{x+1} dx = \int \frac{x+1+1}{x+1} dx$$

$$= \int 1 + \frac{1}{x+1} dx = \int dx + \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \int 1\,dx + \frac{1}{x+1}dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{du}{u}$$

ഇവിടെ $u = x+1$

$du = dx$

അതുകൊണ്ട്

$$\int \frac{x+2}{x+1}dx = x + log|u| + C$$

$$= x + log|x+1| + C$$

ii) $\int x\sqrt{x+2}\,dx$

$$\int (x+2-2)\sqrt{x+2}\,dx$$

$$= \int \left((x+2)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \int \left(u^{\frac{3}{2}} - 2.u^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

ഇവിടെ $u = x+2,\ dx = du$

അതുകൊണ്ട് $\int x\sqrt{x+2}\,dx = 2\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} - 4\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

$$= \frac{2(x+2)^{5/2}}{5} - \frac{4(x+2)^{3/2}}{3} + C$$

iii) $\int \frac{x}{x^2+1}dx$

x^2+1 ആയാൽ $2x\,dx = du$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{u}.\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\log|u| + C$$

$$= \frac{1}{2} log\left|x^2+1\right|+c$$

iv) $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x+1}dx \quad = \quad \int \frac{x^2(x+1)+x+1+2}{x+1}dx$

$$= \int\left(x^2+1+\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= \int x^2\,dx+\int 1dx+2\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+x+2\int\frac{du}{u} \qquad u = x+1 \text{ ; } du = dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+x+2\,log\left|x+1\right|+C$$

v) $\int \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx \quad = \quad \int \frac{x+3-3}{\sqrt{x+3}}dx$

$$= \int\left(\sqrt{x+3}-\frac{3}{\sqrt{x+3}}\right)dx$$

$$= \int\left(\sqrt{u}\,.-\frac{3}{\sqrt{u}}\right)du. \;; \qquad u = x+3 \text{ ; } du = dx$$

$$= 2\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}-6\,u^{\frac{1}{2}}+C$$

$$= 2\frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{3}-6\sqrt{x+3}+C$$

vi) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$; $u = x^2$ ആയാൽ $du = 2xdx$

$$\frac{du}{2} = xdx$$

അതുകൊണ്ട് $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{2}$.

$$= \frac{1}{2}.\tan^{-1} u + C$$

$$= \frac{1}{2}.\tan^{-1}\left(x^2\right) + C$$

ഉദാഹരണം : 8

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ സമാകലജം കണ്ടുപിടിക്കുക.

i) $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$ ii) $\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)}dx$

iii) $\int \frac{1}{1+\tan x}dx$ iv) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x}dx$

പരിഹാരം

i) $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x\,dx$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x \sin x\,dx$$

$t = \cos x. \Rightarrow dt = -\sin x\,dx$

$\Rightarrow -dt = \sin x\,dx$

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx = -\int \left(1-t^2\right).t^2\,.dt$$

$$= -\int \left(t^2 - t^4\right)dt$$

$$= -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) + C$$

$$= -\left(\frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x\right) + C$$

ii) $x + a = t$ ആയാൽ $x = t - a$ യും $dx = dt$ യും ആകുന്നു.

$$\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)} dx = \int \frac{\sin(t-a)}{\sin t}.dt.$$

$$= \int \frac{\sin t \cos a - \cos t \sin a}{\sin t} dt.$$

$$= \int (\cos a - \cot t . \sin a) dt$$

$$= \cos a.t - \sin a.\log|\sin t| + C$$

$$= (x+a)\cos a - \sin a \log|\sin(x+a)| + C$$

iii) $\int \frac{dx}{1+\tan x} = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$

$$= \frac{1}{2}.\int \frac{2\cos x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos x + \sin x + \cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \frac{1}{2}.\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx \;;\quad u = \cos x + \sin x$$

$$= \frac{1}{2}.x + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u.}$$

$$= \frac{1}{2}.x + \frac{1}{2}\log|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + C$$

iv) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x} dx = \int \frac{\sqrt{\tan x}}{2\sin x \cos x} dx$

$$= \int \frac{\tan x.}{2\sin x \cos x \sqrt{\tan x}} dx.$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}\,dx.$$

$\tan x = u$ ആയാൽ $\sec^2 x\, dx = du$

അതിനാൽ $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}}$;

$$= \frac{1}{2}.2\sqrt{u} + C$$

$$= \sqrt{\tan x} + C$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.2

1 മുതൽ 37 വരെയുള്ള ഏകദങ്ങളെ സമാകലനം ചെയ്യുക.

1. $\frac{2x}{1+x^2}$
2. $\frac{(\log x)^2}{x}$
3. $\frac{1}{x + x\log x}$
4. $\sin x \sin(\cos x)$
5. $\sin(ax+b)\cos(ax+b)$
6. $\sqrt{ax+b}$
7. $x\sqrt{x+2}$
8. $x\sqrt{1+2x^2}$
9. $(4x+2)\sqrt{x^2+x+1}$
10. $\frac{1}{x - \sqrt{x}}$
11. $\frac{x}{\sqrt{x+4}}, x > 0$
12. $(x^3-1)^{\frac{1}{3}}\, x^5$
13. $\frac{x^2}{(2+3x^3)^3}$
14. $\frac{1}{x(\log x)^m}, x > 0, m \neq 1$
15. $\frac{x}{9 - 4x^2}$
16. e^{2x-3}
17. $\frac{x}{e^{x^2}}$
18. $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$
19. $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$
20. $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$
21. $\tan^2(2x-3)$
22. $\sec^2(7-4x)$
23. $\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 7.2 ലെ ചോദ്യങ്ങളുടെ ഉത്തരം കണ്ടുപിടിച്ചതിനു ശേഷം ശരിയാണോ എന്ന് ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിക്കുക.

24. $\dfrac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}$ **25.** $\dfrac{1}{\cos^2 x\,(1-\tan x)^2}$ **26.** $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

27. $\sqrt{\sin 2x}\cos 2x$ **28.** $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ **29.** $\cot x \log \sin x$

30. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ **31.** $\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$ **32.** $\dfrac{1}{1+\cot x}$

33. $\dfrac{1}{1-\tan x}$ **34.** $\dfrac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}$ **35.** $\dfrac{(1+\log x)^2}{x}$

36. $\dfrac{(x+1)(x+\log x)^2}{x}$ **37.** $\dfrac{x^3\sin(\tan^{-1}x^4)}{1+x^8}$

38, 39 എന്നീ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം എടുത്തെഴുതുക.

38. $\displaystyle\int \frac{10x^9 + 10^x \log_e 10}{x^{10} + 10^x}\,dx =$

(A) $10^x - x^{10} + C$ (B) $10^x + x^{10} + C$

(C) $(10^x - x^{10})^{-1} + C$ (D) $\log(10^x + x^{10}) + C$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} =$

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x - \cot x + C$

(C) $\tan x \cot x + C$ (D) $\tan x - \cot 2x + C$

7.3.2 ത്രികോണമിതി സർവസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള സമാകലനം

ഉദാഹരണം : 9

(i) $\int \cos^2 x\,dx$ (ii) $\int \sin 2x\cos 3x\,dx$ (iii) $\int \sin^3 x\,dx$ (iv) $\int \tan^2 x\,dx$

(v) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ (vi) $\int \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ (vii) $\displaystyle\int \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)dx$

ഇവ കാണുക.

പരിഹാരം

(i) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$$\int cos^2 x dx = \int \frac{1+cos\,2x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]+C$$

(ii) $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$

$2 \sin A \cos B = \sin (A + B) + \sin (A - B)$ എന്നറിയാം.

$$\int \sin 2x \cos 3x \, dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(2x+3x)+\sin(2x-3x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int[\sin 5x - \sin x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 5x}{5}+\cos x\right]+C$$

(iii) $\int \sin^3 x \, dx$

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$\Rightarrow \sin^3 A = \frac{3\sin A - \sin 3A}{4}$$

$$\int \sin^3 x \, dx = \frac{1}{4}\int 3\sin x - \frac{1}{4}\int \sin 3x \, dx$$

$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

(iv) $\int \tan^2 x \, dx$

$$\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$$

$$\int \tan^2 x dx = \int\left(\sec^2 x - 1\right)dx$$

$$= \tan x - x + c$$

(v) $$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1}{(1+\sin x)}\frac{(1-\sin x)}{(1-\sin x)}dx$$

$$= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \int\left(\sec^2 x - \sec x \tan x\right)dx$$

$$= \tan x - \sec x + C$$

(vi) $\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$

$$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

$$\int\sqrt{1-\cos 2x}\;dx = \int\sqrt{2\sin^2 x}\;dx$$

$$= \sqrt{2}\int \sin x\,dx$$

$$= -\sqrt{2}\cos x + c$$

(vii) $\int \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)dx$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$$

$$\int \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)dx = \left(\int\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{4} + C$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.3

തന്നിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളെ സമാകലനം ചെയ്യുക.

1. $\sin^2 (2x + 5)$ **2.** $\sin 3x \cos 4x$ **3.** $\cos 2x \cos 4x \cos 6x$

4. $\sin^3 (2x + 1)$ **5.** $\sin^3 x \cos^3 x$ **6.** $\sin x \sin 2x \sin 3x$

7. $\sin 4x \sin 8x$ **8.** $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ **9.** $\dfrac{\cos x}{1 + \cos x}$

10. $\sin^4 x$ **11.** $\cos^4 2x$ **12.** $\dfrac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$

13. $\dfrac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha}$ **14.** $\dfrac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x}$ **15.** $\tan^3 2x \sec 2x$

16. $\tan^4 x$ **17.** $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$ **18.** $\dfrac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}$

19. $\dfrac{1}{\sin x \cos^3 x}$ **20.** $\dfrac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^2}$ **21.** $\sin^{-1} (\cos x)$

22. $\dfrac{1}{\cos (x - a) \cos (x - b)}$

ചോദ്യങ്ങൾ 23, 24 എന്നിവയ്ക്ക് ശരിയുത്തരം തിരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

23. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx =$

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x + \operatorname{cosec} x + C$

(C) $-\tan x + \cot x + C$ (D) $\tan x + \sec x + C$

24. $\displaystyle\int \frac{e^x (1 + x)}{\cos^2 (e^x x)}\, dx =$

(A) $\cot (ex^x) + C$ (B) $\tan (xe^x) + C$

(C) $\tan (e^x) + C$ (D) $\cot (e^x) + C$

7.4 ചില പ്രത്യേക ഏകദങ്ങളുടെ സമാകലജങ്ങൾ

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log \left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

തെളിവ്

(1) $$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{(x+a)-(x-a)}{(x \quad a)(x+a)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x \quad a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

അതുകൊണ്ട് $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 \quad a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x \quad a} \quad \int \frac{dx}{x+a}\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log \ (x-a)| - \log|(x+a)|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

(2) $$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)(a-x)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right]$$

അതുകൊണ്ട്, $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{a-x} + \int \frac{dx}{a+x}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}[-\log|a-x| + \log|a+x|] + C$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

(3) $\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx$

$x = a \tan\theta$ ആയാൽ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ എന്നും

$dx = a\sec^2\theta\, d\theta$ എന്നും ലഭിക്കും

അതുകൊണ്ട് $$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2\tan^2\theta + a^2}.a\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{1}{a^2\sec^2\theta}.a\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{a}.\theta + C$$

$$= \frac{1}{a}.\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx$

$x = a\sec\theta$ ആയാൽ $\theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ എന്നും $dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ എന്നും ലഭിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}}$$

$$= \int \frac{a \sec\theta \tan\theta \, d\theta}{a \tan\theta}$$

$$= \int \sec\theta \, d\theta$$

$$= \log \left| \sec\theta + \tan\theta \right| + C_1$$

$$= \log \left| \sec\theta + \sqrt{\sec^2\theta - 1} \right| + C_1$$

$$= \log \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right| + C_1$$

$$= \log \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C_1$$

$$= \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| - \log |a| + C_1$$

$= \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$, ഇവിടെ $C = C_1 - \log |a|$

(5) $I = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

$x = a \sin\theta$ ആയാൽ $dx = a \cos\theta \, d\theta$ ആയിരിക്കും.

$$I = \int \frac{a \cos\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\theta}}$$

$$= \int \frac{a \cos\theta \, d\theta}{a \cos\theta}$$

$$= \int 1 \, d\theta$$

$$= \theta + C$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

(6) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

$x = a \tan\theta$ ആയാൽ $\tan\theta = \frac{x}{a}$ യും $dx = a \sec^2\theta \, d\theta$ യും ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട്.

$$I = \int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta + a^2}}$$

$$= \int \frac{a\sec^2\theta}{a\sec\theta} d\theta$$

$$= \int \sec\theta d\theta$$

$$= \log\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C_1$$

$$= \log\left|\sqrt{1+\tan^2\theta} + \tan\theta\right| + C_1$$

$$= \log\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a}\right| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right| + C$$

(7) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ രൂപത്തിലുള്ളവ

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a.\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a.\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]$$

$X = x + \frac{b}{2a}$ എന്നെടുത്താൽ $ax^2 + bx + C$ യെ $a(X^2 + A^2)$ എന്നോ $a\ (X^2 - A^2)$ എന്നോ മാറ്റാൻ സാധിക്കും. കൂടാതെ $dX = dx$ ആണ്.

ആയതിനാൽ

$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{1}{a\left(X^2 \pm A^2\right)} dY$ എന്ന രൂപത്തിലാകുകയും അറിയാവുന്ന രീതി ഉപയോഗിച്ച് സമാകലനം നടത്താനും കഴിയും.

(8) $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള അതേ രീതിയിൽ ഇവയെ സമാകലനം ചെയ്യാൻ കഴിയും.

(9) $\int \frac{Px+q}{ax^2+bx+c}dx$, a,b,c,p,q ഇവ രേഖീയ സംഖ്യകൾ

$$px + q = A.\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) + B = A(2ax + b) + B$$

ഇതിൽ നിന്നും A യുടെയും B യുടെയും വിലകൾ കണക്കാക്കുക.

തുടർന്ന്

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = A\frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}$$. അതിനാൽ

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx = A\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

$$I = I_1 + I_2$$

I_1, I_2 എന്നിവ പ്രത്യേകം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(10) $$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

(9) ൽ സൂചിപ്പിച്ചത് പോലെ സമാകലനം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 10

ചുവടെയുള്ളവയുടെ സമാകലജങ്ങൾ കാണുക.

(i) $\int \frac{dx}{x^2-16}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

പരിഹാരം

(i) $$\int \frac{dx}{x^2-16} = \int \frac{dx}{x^2-4^2}$$

$$= \frac{1}{2\times 4}\log\left|\frac{x \quad 4}{x+4}\right| + C$$

$$= \frac{1}{8}\log\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C$$

(ii) $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$ ആയാൽ

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$t = x - 1$ എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ $dt = dx$

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

$$= \sin^{-1}(t) + C$$

$$= \sin^{-1}(x-1) + C$$

ഉദാഹരണം : 11

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ സമാകലജങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$ (ii) $\int \frac{dx}{3x^2 + 13x - 10}$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 2x}}$

പരിഹാരം

(i) $x^2 - 6x + 13 = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 13$

$= (x - 3)^2 + 4$

$$\int \frac{1}{(x-3)^2 + 2^2}\,dx = I$$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$x - 3 = t$ ആയാൽ $dx = dt$ ആയിരിക്കും.

$$I = \int \frac{dt}{t^2 + 2^2}$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C$$

$$\text{(ii) } 3x^2 + 13x \quad 10 = 3\left(x^2 + \frac{13x}{3} \quad \frac{10}{3}\right)$$

$$= 3\left(x^2 + \frac{13}{3}x \times \left(\frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{10}{3}\right)\right)$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{13}{6}\right)^2 - \frac{289}{36}\right]$$

$$\int \frac{dx}{3x^2 + 13 - 10} = \int \frac{dx}{3\left[\left(x + \frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2\right]}$$

$t = x + \frac{13}{6}$ ആയാൽ $dt = dx$

അതുകൊണ്ട് $$\int \frac{dx}{3x^2 + 13x - 10} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3 \times 2 \times \frac{17}{6}} \log \left|\frac{t - \frac{17}{6}}{t + \frac{17}{6}}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{17} \log \left|\frac{x + \frac{13}{6} - \frac{17}{6}}{x + \frac{13}{6} + \frac{17}{6}}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{17} \log \left|\frac{6x - 4}{6x + 30}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{17} \log \left|\frac{3x - 2}{x + 5}\right| + C_1 + \frac{1}{17} \log \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right| + C, \left(C = C_1 + \frac{1}{17}\log\frac{1}{3}\right)$$

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5\left(x^2 - \frac{2x}{5}\right)}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2}}$$ (പൂർണവർഗ രൂപത്തിലെഴുതുമ്പോൾ)

$x - \frac{1}{5} = t$ ആയാൽ $dx = dt$ ആകും. അതിനാൽ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|t + \sqrt{t^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|x - \frac{1}{5} + \sqrt{x^2 - \frac{2x}{5}}\right| + C$$

ഉദാഹരണം : 12

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ സമാകലജങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\displaystyle\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x+x^2}}\,dx$

പരിഹാരം

(i) $x + 2 = A\frac{d}{dx}\left(2x^2+6x+5\right) + B$ ആയാൽ

$x + 2 = A(4x+6)+B$ ഇതിൽ നിന്നും

$4A = 1$ എന്നും

$6A + B = 2$ എന്നും ലഭിക്കുന്നു. ആയതിനാൽ $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$ എന്നാകും.

അതുകൊണ്ട്

$$\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{4x+6}{2x^2+6x+5}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$$

$$= \frac{1}{4}I_1 + \frac{1}{2}I_2 \quad \text{—————— (1)}$$

ഇവിടെ $\quad I_1 = \int \frac{4x+6}{2x^2+6x+5}$

$$I_2 = \int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$$

I_1 ൽ $t = 2x^2 + 6x + 5$ എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ

$(4x + 6)\, dx = dt$ എന്ന് ലഭിക്കും.

അതിനാൽ

$$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C_1$$

$$= \log|2x^2+6x+5| + C_1 \quad \text{—————— (2)}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$x+\frac{3}{2} = t$ എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ $dx = dt$.

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} \tan^{-1} 2t + C_2$$

$$= \tan^{-1} 2\left(x + \frac{3}{2}\right) + C_2$$

$$= \tan^{-1}(2x+3) + C_2 \quad \text{________________ (3)}$$

(2), (3) എന്നിവ (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$I = \frac{1}{4}\log\left|2x^2 + 6x + 5\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+3) + C$$ എന്ന് ലഭിക്കും

ഇവിടെ

$$C = \frac{C_1}{4} + \frac{C_2}{2}$$ ആണ്.

(ii) $x + 3 = A\frac{d}{dx}(5 - 4x - x^2) + B$

$x + 3 = A(-4 - 2x) + B$

x ന്റെ ഗുണകങ്ങൾ തുലനം ചെയ്താൽ

$1 = -2A$ അതിനാൽ

$A = -\frac{1}{2}$ എന്നു ലഭിക്കും.

സ്ഥിരസംഖ്യകൾ തുലനം ചെയ്താൽ

$3 = -4A + B$ എന്നും തുടർന്ന്

$B = 1$ എന്നും ലഭിക്കും.

അതുകൊണ്ട്

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-4-2x)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} I_1 + I_2$$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം ... (1)

I_1 ൽ $t = 5 - 4x - x^2$ എന്നെടുത്താൽ $(-4 - 2x)\, dx = dt$ ആയിരിക്കും. അതിനാൽ

$$I_1 = \int \frac{(\quad 4 - 2x)dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C_1$$

$$= 2\sqrt{5 \quad 4x \quad x^2} + C_1 \qquad \ldots (2)$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9 \quad (x+2)^2}}$$

$x + 2 = u$, ആയാൽ $dx = du$,

$$I_2 = \int \frac{du}{\sqrt{3^2 - u^2}} = \sin^{\ 1} \frac{u}{3} + C_2$$

$$= \sin^{\ 1} \frac{x+2}{3} + C_2 \qquad \ldots (3)$$

(2), (3) എന്നിവ (1) - ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} = \quad \sqrt{5 \quad 4x \quad x^2} \quad \sin^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C,$$ ഇവിടെ $C = C_2 - \frac{C_1}{2}$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 7.4

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഏകദങ്ങളെ സമാകലനം ചെയ്യുക.

1. $\frac{3x^2}{x^6 + 1}$
2. $\frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}$
3. $\frac{1}{\sqrt{(2 - x)^2 + 1}}$
4. $\frac{1}{\sqrt{9 \quad 25x^2}}$
5. $\frac{3x}{1 + 2x^1}$
6. $\frac{x^2}{1 - x^6}$
7. $\frac{x \quad 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
8. $\frac{x^2}{\sqrt{x^6 + a^6}}$
9. $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x + 4}}$
10. $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$
11. $\frac{1}{9x^2 + 6x + 5}$
12. $\frac{1}{\sqrt{7 - 6x - x^2}}$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 7.4 ലെ ചോദ്യങ്ങളുടെ ഉത്തരം കണ്ടുപിടിച്ചതിനു ശേഷം ശരിയാണോ എന്ന് ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിക്കുക.

13. $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ 14. $\frac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}$ 15. $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

16. $\frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}$ 17. $\frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}$ 18. $\frac{5x-2}{1+2x+3x^2}$

19. $\frac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}}$ 20. $\frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}$ 21. $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

22. $\frac{x+3}{x^2-2x-5}$ 23. $\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}$.

24, 25. എന്നീ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക.

24. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} =$

(A) $x\tan^{-1}(x+1)+C$ (B) $\tan^{-1}(x+1)+C$

(C) $(x+1)\tan^{-1}x+C$ (D) $\tan^{-1}x+C$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}} =$

(A) $\frac{1}{9}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$ (B) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-9}{9}\right)+C$

(C) $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+C$ (D) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{9}\right)+C$

7.5 ഭാഗികഭിന്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള സമാകലനം (Integration by partial fraction)

അംശവും ഛേദവും പോളിനോമിയൽ ആയ ഏകദത്തെയാണ് ഭിന്നക ഏകദങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നത്. അതായത് $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$: $P(x)$, $Q(x)$ ഇവ പോളിനോമിയലുകളും $Q(x) \neq 0$ ആയിരിക്കുകയും വേണം.

ഇതിൽ $P(x)$ ന്റെ കൃതി $Q(x)$ ന്റെ കൃതിയെക്കാൾ കുറവാണെങ്കിൽ അത്തരം ഭിന്നക ഏകദത്തെ സാധാരണ ഭിന്നക ഏകദം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അല്ലെങ്കിൽ ഭിന്നക ഏകദത്തെ വിഷമഭിന്നക ഏകദം എന്നും വിളിക്കുന്നു. $P(x)$ ന്റെ കൃതി $Q(x)$ ന്റെ കൃതിക്ക്

തുല്യമാവുകയോ അല്ലെങ്കിൽ കൂടുതലാവുകയോ ആണെങ്കിൽ ഹരണം ഉപയോഗിച്ച്

$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$ എന്ന് മാറ്റാം. ഇവിടെ $T(x)$ ഒരു പോളിനോമിയലും $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ സാധാരണ ഭിന്നക ഏകദവുമാണ്.

ഏതൊരു പോളിനോമിയലിനെയും ഘടകങ്ങളാക്കി ഒന്നാം കൃതിയിലുള്ളതോ രണ്ടാം കൃതിയിലുള്ളതോ ആയ പോളിനോമിയലുകളുടെ ഗുണനഫലമാക്കി മാറ്റി എഴുതാവുന്നതാണ് എന്ന സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഇവിടെ ഛേദത്തിലുള്ള $Q(x)$ എന്ന പോളിനോമിയലിനെ മാറ്റി എഴുതാം. ഇങ്ങനെയുള്ള സാധാരണഭിന്നക ഏകദത്തെ ഭാഗിക ഭിന്നകങ്ങളാക്കി മാറ്റാം. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക ശ്രദ്ധിക്കുക.

പട്ടിക 7.2

ക്രമനം.	സാധാരണ ഭിന്നകം	ഭാഗിക ഭിന്നകം
1.	$\frac{px+q}{(x-a)(x-b)}, a \neq b$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$
2.	$\frac{px+q}{(x-a)^2}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$
3.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$
4.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}$
5.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)}$ (ഇവിടെ $x^2 + bx + c$ എന്നതിനെ ഒന്നാം കൃതി ഘടകങ്ങൾ ആക്കാൻ കഴിയില്ല)	$\frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$,

സൂചന :

മുകളിലെ പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്ന A, B, C തുടങ്ങിയവ രേഖീയസംഖ്യകളാണ്. അവയുടെ വിലകൾ കണ്ടെത്തേണ്ടതുണ്ട്.

ഉദാഹരണം : 13

$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം: ഇവിടെ സമാകലം സാധാരണ ഭിന്നക ഏകദമാണ്. ഇതിനെ ഭാഗിക ഭിന്നകം ആക്കാം.

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$1 = A(x+2) + B(x+1).$$

x ന്റെ ഗുണോത്തരങ്ങളും, സ്ഥിരസംഖ്യകളും തുലനം ചെയ്താൽ

$A + B = 0$ എന്നും

$2A + B = 1$ എന്നും ലഭിക്കും.

ഇവയിൽ നിന്നും $A = 1, B = -1$ എന്ന് ലഭിക്കും.

അതുകൊണ്ട് $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x+2}$ ആയിരിക്കും.

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int \frac{dx}{x+1} \quad \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \log|x+1| - \log|x+2| + C$$

$$= \log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

ഉദാഹരണം : 14

$\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6} dx$ കാണുക.

പരിഹാരം

$\frac{x^2+1}{x^2 \quad 5x+6}$ എന്നത് വിഷമ ഭിന്നക ഏകദമാണ്; ഹരണം ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$\frac{x^2+1}{x^2 \quad 5x+6} = 1 + \frac{5x \quad 5}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x \quad 5}{(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{5x \quad 5}{(x \quad 2)(x \quad 3)} = \frac{A}{x \quad 2} + \frac{B}{x \quad 3}$$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക

അതുകൊണ്ട് $5x - 5 = A(x-3) + B(x-2)$

x ന്റെ ഗുണകങ്ങളും, സ്ഥിരസംഖ്യകളും രണ്ടു ഭാഗവും തുലനം ചെയ്താൽ.

A + B = 5 എന്നും −3A − 2B = −5. എന്നും ലഭിക്കും. ഇതിൽ നിന്നും A = − 5 എന്നും B = 10 എന്നും ലഭിക്കും.

$$\frac{x^2+1}{x^2 \quad 5x+6} = 1 - \frac{5}{x-2} + \frac{10}{x-3}$$

അതുകൊണ്ട്
$$\int \frac{x^2+1}{x^2 \quad 5x+6}\,dx = \int dx - 5\int \frac{1}{x \quad 2}\,dx + 10\int \frac{dx}{x \quad 3}$$
$$= x - 5 \log|x-2| + 10 \log|x-3| + C.$$

ഉദാഹരണം : 15

$$\int \frac{3x-2}{(x+1)^2\,(x+3)}\,dx$$ കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം
$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3}$$ എന്നെടുക്കുക.

അതുകൊണ്ട്
$$3x-2 = A(x+1)(x+3) + B(x+3) + C(x+1)^2$$
$$= A(x^2+4x+3) + B(x+3) + C(x^2+2x+1)$$

x^2, x എന്നിവയുടെ ഗുണകങ്ങളും സ്ഥിരസംഖ്യകളും തുലനം ചെയ്താൽ. A + C = 0, 4A + B + 2C = 3 കൂടാതെ 3A + 3B + C = – 2 എന്ന് ലഭിക്കും. ഇവയുടെ പരിഹാരം $A = \frac{11}{4}, B = \frac{5}{2}$ and $C = \frac{11}{4}$ എന്ന് ലഭിക്കും.

അതുകൊണ്ട്

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4(x+1)} - \frac{5}{2(x+1)^2} - \frac{11}{4(x+3)}$$

അതുകൊണ്ട്

$$\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}\,dx = \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+3}$$
$$= \frac{11}{4}\log|x+1| + \frac{5}{2(x+1)} - \frac{11}{4}\log|x+3| + C$$
$$= \frac{11}{4}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + \frac{5}{2(x+1)} + C$$

ഉദാഹരണം : 16

$\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$ കാണുക.

പരിഹാരം

$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$ പരിഗണിക്കാം.

$x^2 = y$ എന്ന് എടുത്താൽ

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{y}{(y+1)(y+4)}$$

$$\frac{y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4} \text{ ആയാൽ}$$

$$y = A(y+4) + B(y+1)$$

y യുടെ ഗുണകങ്ങളും, സ്ഥിരസംഖ്യകളും താരതമ്യം ചെയ്താൽ.

$A + B = 1, \quad 4A + B = 0,$ എന്ന് ലഭിക്കും.

$A = -\frac{1}{3}$ എന്നും $B = \frac{4}{3}$ എന്നും ലഭിക്കുന്നു

അതുകൊണ്ട് $$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{-1}{3(x^2+1)} + \frac{4}{3(x^2+4)}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1} x + \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1} x + \frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{x}{2} + C$$

മുകളിലുള്ള ചോദ്യത്തിൽ ആരോപണം നൽകിയത് സമാകലന ഭാഗത്തല്ല മറിച്ച് ഭാഗിക ഭിന്ന ഭാഗത്താണ്. അടുത്ത ഉദാഹരണത്തിൽ സമാകലന ഭാഗത്ത് അരോപണം നൽകിയിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 17

$$\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi$$

പരിഹാരം

ഇവിടെ $y = \sin\phi$ എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ

$dy = \cos\phi\, d\phi$ എന്ന് ലഭിക്കും.

അതുകൊണ്ട്, $$\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi = \int \frac{(3y-2)\, dy}{5-(1-y^2)-4y}$$

$$= \int \frac{3y-2}{y^2-4y+4}\, dy$$

$$= \int \frac{3y-2}{(y-2)^2}\, dy = \text{I}$$ എന്നെഴുതാം

$$\frac{3y-2}{(y-2)^2} = \frac{\text{A}}{y-2} + \frac{\text{B}}{(y-2)^2}$$ ആയാൽ

$$3y - 2 = \text{A}(y-2) + \text{B}$$

y യുടെ ഗുണകങ്ങളും, സ്ഥിരസംഖ്യകളും താരതമ്യം ചെയ്താൽ

$\text{A} = 3$ എന്നും $-2 = -2\text{A} + \text{B}$ എന്നും ലഭിക്കും. ഇതിൽ നിന്നും $\text{A} = 3$ എന്നും $\text{B} = 4$ എന്നും ലഭിക്കും.

$$\text{I} = \int \left[\frac{3}{y-2} + \frac{4}{(y-2)^2}\right] dy = 3\int \frac{dy}{y-2} + 4\int \frac{dy}{(y-2)^2}$$

$$= 3\log|y-2| + 4\left(-\frac{1}{y-2}\right) + \text{C}$$

$$= 3\log\left|\sin\phi - 2\right| + \frac{4}{2 - \sin\phi} + C$$ (2 − sin ϕ എല്ലായ്പോഴും അധി സംഖ്യ ആയതുകൊണ്ട്)

$$= 3\log(2 - \sin\phi) + \frac{4}{2 - \sin\phi} + C$$

ഉദാഹരണം : 18

$\int \frac{(x^2 + x + 1)\,dx}{(x+2)(x^2+1)}$ കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $\int \frac{x^2 + x + 1\,dx}{(x+2)(x^2+1)}$ എന്നത് സാധാരണ ഭിന്നക ഏകദമാണ്. അതുകൊണ്ട് ഇതിനെ ഭാഗികഭിന്നകമാക്കിയാൽ.

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)} \qquad \text{———————— (1)}$$

$$x^2 + x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 2)$$

x^2, x ഇവയുടെ ഗുണകങ്ങളും, സ്ഥിരസംഖ്യകളും തുലനം ചെയ്താൽ
$A + B = 1$, $2B + C = 1$, $A + 2C = 1$ എന്ന് ലഭിക്കും.

ഇതിൽ നിന്നും $A = \frac{3}{5}$, $B = \frac{2}{5}$ കൂടാതെ $C = \frac{1}{5}$ അതുകൊണ്ട് (1) ൽ നിന്നും

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}{x^2+1} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{1}{5}\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)$$

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x^2+1)(x+2)}\,dx = \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{5}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\log\left|x+2\right| + \frac{1}{5}\log\left|x^2+1\right| + \frac{1}{5}\tan^{-1}x + C$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.5

1 മുതൽ 21 വരെയുള്ള ഏകദങ്ങളെ സമാകലനം ചെയ്യുക.

1. $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$

2. $\dfrac{1}{x^2-9}$

3. $\dfrac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

4. $\dfrac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

5. $\dfrac{2x}{x^2+3x+2}$

6. $\dfrac{1-x^2}{x(1-2x)}$

7. $\dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)}$

8. $\dfrac{x}{(x-1)^2(x+2)}$

9. $\dfrac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$

10. $\dfrac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}$

11. $\dfrac{5x}{(x+1)(x^2-4)}$

12. $\dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$

13. $\dfrac{2}{(1-x)(1+x^2)}$

14. $\dfrac{3x-1}{(x+2)^2}$

15. $\dfrac{1}{x^4-1}$

16. $\dfrac{1}{x(x^n+1)}$ [സൂചന : അംശത്തെയും ഛേദത്തെയും x^{n-1} കൊണ്ട് ഗുണിച്ച ശേഷം $x^n = t$ എന്ന് ആരോപിക്കുക.]

17. $\dfrac{\cos x}{(1-\sin x)(2-\sin x)}$ [സൂചന : $\sin x = t$]

18. $\dfrac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}$

19. $\dfrac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}$

20. $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$

21. $\dfrac{1}{(e^x-1)}$ [സൂചന : $e^x = t$]

22, 23 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

22. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)} =$

(A) $\log\left|\dfrac{(x-1)^2}{x-2}\right| + C$ (B) $\log\left|\dfrac{(x-2)^2}{x-1}\right| + C$

(C) $\log\left|\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2\right|+C$ (D) $\log\left|(x-1)(x-2)\right|+C$

23. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)} =$

(A) $\log|x|-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C$ (B) $\log|x|+\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C$

(C) $-\log|x|+\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C$ (D) $\frac{1}{2}\log|x|+\log(x^2+1)+C$

7.6 ഭാഗങ്ങളാക്കിയുള്ള സമാകലനം (Integration by parts)

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$ എന്നതിനെ ആസ്പദമാക്കി സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}\,dx+\int v\frac{du}{dx}\,dx$$

ഇതിൽ നിന്നും

$$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv \quad \int v\frac{du}{dx}\,dx \qquad \ldots (1)$$

$u = f(x)$ എന്നും $\frac{dv}{dx} = g(x)$ എന്നും പരിഗണിച്ചാൽ,

$$\frac{du}{dx} = f'(x), \quad v = \int g(x)\,dx$$

അതിനാൽ സമവാക്യം (1) നെ

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\int g(x)\,dx \quad \int\left[\int g(x)\,dx\right] f'(x)\,dx$$ എന്നെഴുതാം

അതായത്, $$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\int g(x)\,dx - \int\left[f'(x)\int g(x)\,dx\right]dx$$

ഇതിനെ താഴെ എഴുതിയത് പോലെ പറയാം.

രണ്ട് ഏകദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ സമാകലജം = (ആദ്യത്തെ ഏകദം) × രണ്ടാം ഏകദത്തിന്റെ സമാകലജം) - (ആദ്യ ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം × രണ്ടാം ഏകദത്തിന്റെ സമാകലജം)ന്റെ സമാകലജം

$$\int I^{st} \times II^{nd}\,dx = I^{st} \times \int II^{nd}\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(I^{st}\right).\int II^{nd}\,dx\right\}dx$$

ഉദാഹരണം : 19

$\int x \cos x \, dx$ കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $f(x) = x$ എന്നും $g(x) = \cos x$ എന്നും പരിഗണിച്ചാൽ

$$\int x \cos x \, dx = x \int \cos x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(x) \int \cos x \, dx\right] dx$$

$$= x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

ഇതേ ചോദ്യത്തിൽ $f(x) = \cos x$ എന്നും $g(x) = x$ എന്നും എടുത്താൽ,

$$\int x \cos x \, dx = \cos x \int x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\cos x) \int x \, dx\right] dx$$

$$= (\cos x)\frac{x^2}{2} + \int \sin x \frac{x^2}{2} dx$$

ഇവിടെ സമാകലനം അവസാനിക്കുന്നില്ല. മാത്രമല്ല x ന്റെ കൃതി വർധിക്കുകയും സങ്കീർണമായ സമാകലജമായി മാറുകയും ചെയ്യുന്നു. അതിനാൽ ആദ്യ ഏകദം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിൽ വളരെയധികം പ്രാധാന്യമുണ്ട്.

കുറിപ്പ്

(i) ഭാഗങ്ങളാക്കിയുള്ള സമാകലനം എല്ലായ്പോഴും ചെയ്യാൻ സാധിക്കില്ല. ഉദാഹരണമായി $\int \sqrt{x} \sin x \, dx$ എന്നതിനെ ഭാഗങ്ങളാക്കി തിരിച്ച് സമാകലനം ചെയ്യാൻ സാധിക്കില്ല. കാരണം ഒരു ഏകദത്തിന്റെ അവകലജമായി $\sqrt{x} \sin x$ എഴുതാൻ കഴിയില്ല.

(ii) ഭാഗങ്ങളാക്കി സമാകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ സ്ഥിരസംഖ്യ അവസാനം എഴുതിയാൽ മതി.

ഉദാഹരണമായി $\int x \cos x \, dx = x(\sin x + k) - \int (\sin x + k) \, dx$

$$= x(\sin x + k) - \int \sin x \, dx - \int k \, dx$$

$$= x(\sin x + k) + \cos x - kx + C$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

ഇവിടെ ആദ്യം എഴുതിയ k എന്ന സ്ഥിരസംഖ്യ ഒഴിവായിപ്പോയത് കാണാം.

(iii) സാധാരണയായി ഭാഗങ്ങളാക്കി സമാകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ ലോഗരിതമിക ഏകദം, പ്രതിലോമത്രികോണമിതീയ ഏകദം എന്നിവ വരുന്നുണ്ടെങ്കിൽ അത് ആദ്യ ഏകദമായി തെരഞ്ഞെടുക്കണം. ഇവ രണ്ടും ഇല്ലെങ്കിൽ പോളിനോമിയൽ ഏകദം ആദ്യ ഏകദമായി പരിഗണിക്കാം.

ഉദാഹരണം : 20

$\int \log x \, dx$ കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ *log x* ഏത് ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം എന്നറിയാത്തത് കൊണ്ട് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത് പോലെ ചെയ്യാം.

$$\int (\log x . 1)\, dx = \log x \int 1\, dx - \int [\frac{d}{dx}(\log x) \int 1\, dx]\, dx$$

$$= (\log x) \cdot x - \int \frac{1}{x} x\, dx = x \log x - x + C .$$

ഉദാഹരണം : 21

$\int x\, e^x dx$ കാണുക.

പരിഹാരം

ആദ്യ ഏകദമായി x ഉം രണ്ടാമത്തെ ഏകദമായി e^x ഉം പരിഗണിക്കണം. e^x ന്റെ സമാകലജം e^x തന്നെയാണ്.

അതുകൊണ്ട്

$$\int x\, e^x dx = x\, e^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + C.$$

ഉദാഹരണം : 22

$\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ ആദ്യ ഏകദം $\sin^{-1} x$ എന്നും രണ്ടാമത്തേത് $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ എന്നും എടുത്താൽ

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$t = 1 - x^2$ ആയാൽ $dt = -2x\,dx$

അതുകൊണ്ട് $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx = (\sin^{-1}x)\left(-\sqrt{1-x^2}\right) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-\sqrt{1-x^2})\,dx$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x + x + C$$

$$= x - \sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x + C$$

മറ്റൊരു രീതിയിൽ : ഇവിടെ $\sin^{-1}x = \theta$ എന്ന് ആരോപിച്ചും സമാകലനം ചെയ്യുവാൻ കഴിയും.

ഉദാഹരണം : 23

$\int e^x \sin x\,dx$ കാണുക.

പരിഹാരം

$$I = \int e^x \sin x\,dx = e^x(-\cos x) + \int e^x \cos x\,dx$$

$$= -e^x \cos x + I_1 \qquad \ldots (1)$$

ഇവിടെ $I_1 = \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - I$

അതിനാൽ (1) ൽ നിന്ന്

$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$ എന്നു കിട്ടുന്നു. അതായത്

$$2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

മറ്റൊരു വിധത്തിൽ : ഇവിടെ ആദ്യ ഏകദം $\sin x$ ആയി പരിഗണിച്ച് സമാകലനം ചെയ്യാൻ കഴിയും.

7.6.1 $\int e^x [f(x)+f'(x)]\,dx$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ളവയുടെ സമാകലനം

$$I = \int e^x [f(x)+f'(x)]\,dx$$

$$I = \int e^x f(x)\,dx + \int e^x f'(x)\,dx$$

$$I = I_1 + \int e^x f'(x)\,dx$$

ഇവിടെ $I_1 = \int e^x f(x)\,dx$. ഒന്നാമത്തെ ഏകദമായി $f(x)$ നെ പരിഗണിച്ച് സമാകലനം ചെയ്താൽ $I_1 = f(x)e^x - \int f'(x)e^x\,dx + C$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു. അതിനാൽ

$$I = e^x f(x) - \int f'(x)e^x dx + \int e^x f'(x)\,dx + C = e^x f(x) + C$$

$$\boldsymbol{\int e^x [f(x)+f'(x)]\,dx = e^x f(x) + C}$$

ഉദാഹരണം : 24

(i) $\int e^x(\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2})\,dx$ (ii) $\int \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}\,dx$ കാണുക.

പരിഹാരം

(i) $I = \int e^x(\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2})\,dx$

$f(x) = \tan^{-1}x$ എങ്കിൽ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ആയിരിക്കും.

അപ്പോൾ $I = \int e^x [f(x) + f'(x)]\,dx$ എന്ന രൂപത്തിലാണല്ലോ.

അതുകൊണ്ട്,

$$I = \int e^x(\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2})\,dx$$

$$= e^x \tan^{-1}x + C$$

(ii) $I = \int \frac{(x^2+1)\,e^x}{(x+1)^2}dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$= \int e^x \left[\frac{x^2-1+1+1)}{(x+1)^2}\right]dx$$

$$= \int e^x \left[\frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2}\right]dx$$

$$= \int e^x \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right]dx$$

$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, ആയി പരിഗണിച്ചാൽ $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ ആയിരിക്കും. അതിനാൽ

$I = \int e^x\,[f(x) + f'(x)]dx$ എന്ന രൂപത്തിലാണ്. അതിനാൽ

$I = e^x\,[f(x)] + C$

$$I = \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x\,dx = \frac{x-1}{x+1}e^x + C$$

$$= e^x . \frac{(x-1)}{(x+1)} + C$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.6

1 മുതൽ 27 വരെയുള്ള ഏകദങ്ങളെ സമാകലനം ചെയ്യുക.

1. $x \sin x$ **2.** $x \sin 3x$ **3.** $x^2\, e^x$ **4.** $x \log x$

5. $x \log 2x$ **6.** $x^2 \log x$ **7.** $x \sin^{-1} x$ **8.** $x \tan^{-1} x$

9. $x\cos^{-1}x$ **10.** $(\sin^{-1}x)^2$ **11.** $\dfrac{x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ **12.** $x\sec^2 x$

13. $\tan^{-1}x$ **14.** $x(\log x)^2$ **15.** $(x^2+1)\log x$

16. $e^x(\sin x+\cos x)$ **17.** $\dfrac{x e^x}{(1+x)^2}$ **18.** $e^x\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

19. $e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ **20.** $\dfrac{(x-3)e^x}{(x-1)^3}$ **21.** $e^{2x}\sin x$

22. $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

23, 24 എന്നീ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക.

23. $\int x^2 e^{x^3}dx =$

(A) $\dfrac{1}{3}e^{x^3}+C$ (B) $\dfrac{1}{3}e^{x^2}+C$

(C) $\dfrac{1}{2}e^{x^3}+C$ (D) $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$

24. $\int e^x\sec x(1+\tan x)\,dx$ equals

(A) $e^x\cos x+C$ (B) $e^x\sec x+C$

(C) $e^x\sin x+C$ (D) $e^x\tan x+C$

7.6.2 സമാകലനം കൂടുതൽ വിധത്തിൽ

കഴിഞ്ഞ ഭാഗങ്ങളിൽ 6 വിധത്തിലുള്ള പ്രത്യേക ഏകദങ്ങളുടെ സമാകലനം പഠിച്ചു. ഇവിടെ 3 രൂപത്തിലുള്ളവ കൂടി ചർച്ച ചെയ്യാം.

(i) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ (ii) $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ (iii) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

ഒന്നാമത്തെ ഉദാഹരണം നോക്കാം.

$I=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ എന്നെടുക്കാം.

$\sqrt{x^2 - a^2}$ നെ ആദ്യ ഏകദവും 1 നെ രണ്ടാമത്തെ ഏകദവുമായി പരിഗണിച്ച് സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$I = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - a^2}} x\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - I - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$2I = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

അതായത് $$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

ഇതേ രീതിയിൽ (ii), (iii) എന്നിവ ക്രിയ ചെയ്താൽ

(ii) $$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$

(iii) $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

മറ്റൊരു രീതി : (i), (ii), (iii) ചോദ്യങ്ങളിൽ യഥാക്രമം (i) $x = a \sec \theta$, (ii) $x = a \tan \theta$ (iii) $x = a \sin \theta$ എന്ന് ആരോപിച്ചും സമാകലനം സാധ്യമാണ്.

ഉദാഹരണം : 25

$\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx$ കാണുക.

പരിഹാരം

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2+4}\,dx$$

ഇവിടെ $x + 1 = y$ ആയാൽ $dx = dy$.

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \int \sqrt{y^2+2^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}y\sqrt{y^2+4}+\frac{4}{2}\log\left|y+\sqrt{y^2+4}\right|+C$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5}+2\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$$

ഉദാഹരണം : 26

$\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$ കാണുക.

പരിഹാരം

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}\,dx$$

ഇവിടെ $x + 1 = y$ ആയാൽ $dx = dy$.

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}y\sqrt{4-y^2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{y}{2}+C$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}+2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

7.6.3 $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$.

A യും B യും ചുവടെ പറയുന്ന രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുത്താൽ

$$px+q = A\left[\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)\right]+B$$

$$= A(2ax+b)+B$$

x ന്റെ ഗുണകങ്ങളും, സ്ഥിരസംഖ്യകളും താരതമ്യം ചെയ്താൽ

$2a\mathrm{A} = p$ യും $\mathrm{A}b + \mathrm{B} = q$

ഈ സമവാക്യങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്താൽ A യുടെയും B യുടെയും വിലകൾ ലഭിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട് മേൽസൂചിപ്പിച്ച സമാകലജത്തെ ചുവടെ കൊടുത്ത രീതിയിൽ എഴുതാം.

$$\mathrm{A}\int (2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx + \mathrm{B}\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$= \mathrm{AI}_1 + \mathrm{BI}_2$$

ഇവിടെ $\mathrm{I}_1 = \int (2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\;dx$

$$\mathrm{I}_2 = \int (ax^2+bx+c)\,dx$$

$t = ax^2 + bx + c$ എന്നാരോപിച്ചാൽ
$dt = (2ax + b)dx$

അതുകൊണ്ട് $\mathrm{I}_1 = \frac{2}{3}(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}_1$

$$\mathrm{I}_2 = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\;dx$$

എന്നിവയുടെ വില മുമ്പ് പഠിച്ച പാഠഭാഗത്തെപോലെ, സമാകലനം ചെയ്യാൻ കഴിയുന്നു (പേജ് 433, 7.6.2)

ഉദാഹരണം : 27

$\int x\sqrt{1+x-x^2}$ കാണുക.

പരിഹാരം

മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച രീതി അവലംബിച്ചാൽ

$$x = \mathrm{A}\left[\frac{d}{dx}\left(1+x-x^2\right)\right] + \mathrm{B}$$

$$= \mathrm{A}(1-2x) + \mathrm{B}$$ എന്നെഴുതാം

x ന്റെ ഗുണകങ്ങളും, സ്ഥിരസംഖ്യകളും താരതമ്യം ചെയ്താൽ $-2A = 1$, $A + B = 0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

അതായത് $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതിനാൽ $\int x\sqrt{1+x-x^2}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x-x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2 \qquad (1)$$

$$I_1 = \int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx$$ പരിഗണിക്കുക

$1 + x - x^2 = t$, ആയാൽ $(1-2x)dx = dt$

അതിനാൽ $I_1 = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C_1$

$$= \frac{2}{3}\left(1+x-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C_1$$

അതുകൊണ്ട് $I_2 = \int \sqrt{1+x-x^2}\,dx = \int \sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}\,dx$

$x - \frac{1}{2} = t$, ആയാൽ $dx = dt$

അതുകൊണ്ട് $I_2 = \int \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - t^2}\,dt$

$$= \frac{1}{2} t \sqrt{\frac{5}{4} - t^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \sin^{-1} \frac{2t}{\sqrt{5}} + C_2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(2x-1)}{2} \sqrt{\frac{5}{4} - (x - \frac{1}{2})^2} + \frac{5}{8} \sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C_2$$

$$= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{1 + x - x^2} + \frac{5}{8} \sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C_2,$$

I_1, I_2 ഇവയുടെ വിലകൾ (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$\int x\sqrt{1 + x - x^2}\, dx = -\frac{1}{3}(1 + x - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}(2x-1)\sqrt{1 + x - x^2}$$

$$+ \frac{5}{16} \sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C,$$

$$C = -\frac{C_1 + C_2}{2}$$

ഉദാഹരണം : 28

$\int (x-3)\sqrt{x^2 + 3x - 18}\, dx$ കാണുക.

പരിഹാരം

$(x - 3) = A. \dfrac{d}{dx}(x^2 + 3x - 18) + B$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക

$x - 3 = A(2x + 3) + B$

x ന്റെ ഗുണകങ്ങളും, സ്ഥിരസംഖ്യകളും തുലനം ചെയ്താൽ

$1 = 2A$ എന്നും $-3 = 3A + B$ എന്നും ലഭിക്കുന്നു. അതായത് $A = \dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{-9}{2}$ ആയിരിക്കും.

$$(x-3)\sqrt{x^2+3x-18} = \frac{1}{2}(2x+3)\sqrt{x^2+3x-18}-\frac{9}{2}\sqrt{x^2+3x-18}$$

$$\int(x-3)\sqrt{x^2+3x-18}\,dx = \frac{1}{2}\int(2x+3)\sqrt{x^2+3x-18}\,dx-\frac{9}{2}\int\sqrt{x^2+3x-18}\,dx$$

$$I = \frac{1}{2}I_1-\frac{9}{2}I_2 \qquad \text{———— (1)}$$

ഇവിടെ $I_1 = \int(2x+3)\sqrt{x^2+3x-18}\,dx$ ആണ്.

$t = x^2 + 3x - 18$ ആയാൽ $dt = (2x + 3)dx$ ആയിരിക്കും.

$$I_1 = \int\sqrt{t}\,dt$$

$$= \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}+C_1$$

$$= \frac{2}{3}\left(x^2+3x-18\right)^{\frac{3}{2}}+C_1 \qquad \text{———— (2)}$$

കൂടാതെ

$$I_2 = \int\sqrt{x^2+3x-18}\,dx$$

$$= \int\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{9}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)}{2}\sqrt{x^2+3x-18}-\frac{81}{8}\log\left|\left(x+\frac{3}{2}\right)+\sqrt{x^2+3x-18}\right|+C_2 \qquad \text{—— (3)}$$

(2), (3) ഇവ (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$I = \frac{1}{3}\left(x^2+3x-18\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{9}{2}\left[\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2+3x-18}-\frac{81}{8}\log\left|\frac{2x+3}{2}+\sqrt{x^2+3x-18}\right|\right]+C$$

$$C = \frac{C_1}{2}-\frac{9}{2}C_2$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.7

1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള ഏകദങ്ങളെ സമാകലനം ചെയ്യുക.

1. $\sqrt{4-x^2}$
2. $\sqrt{1-4x^2}$
3. $\sqrt{x^2+4x+6}$
4. $\sqrt{x^2+4x+1}$
5. $\sqrt{1-4x-x^2}$
6. $\sqrt{x^2+4x-5}$
7. $\sqrt{1+3x-x^2}$
8. $\sqrt{x^2+3x}$
9. $\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}$

10, 11 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

10. $\int\sqrt{1+x^2}\,dx =$ ന്റെ വില കാണുക

(A) $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\log\left|\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right|+C$

(B) $\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ (C) $\frac{2}{3}x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

(D) $\frac{x^2}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}x^2\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$

11. $\int\sqrt{x^2-8x+7}\,dx =$ ന്റെ വില കാണുക

(A) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7}+9\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

(B) $\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{x^2-8x+7}+9\log\left|x+4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

(C) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7}-3\sqrt{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

(D) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7}-\frac{9}{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right|+C$

12. $x\sqrt{x+x^2}$
13. $(x+1)\sqrt{2x^2+3}$
14. $(x+3)\sqrt{3-4x-x^2}$

7.7 നിശ്ചിത സമാകലജം (Definite Integral)

കഴിഞ്ഞ ഭാഗങ്ങളിൽ വിവിധ ഏകദങ്ങളുടെ അനിശ്ചിത സമാകലജവും വിവിധ രീതിയിലുള്ള സമാകലജങ്ങളും പഠിച്ചു. ഇവിടെ സമാകലനത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ രീതിയായ നിശ്ചിത സമാകലജം പരിചയപ്പെടാം. ജ്യാമിതിയരൂപങ്ങളുടെ നീളം, പരപ്പളവ്, ഉള്ളളവ് തുടങ്ങിയവ കണക്കാക്കാനുള്ള പ്രക്രിയ ഏകദേശം ബി.സി

500 ൽ തന്നെ ആരംഭിച്ചതായി കാണാം. ഏകദേശം എ.ഡി. 1600 ന് ശേഷമാണ് ഇതിന് പൂർണരൂപം കൈവന്നത്. ചില നിബന്ധനകൾക്ക് വിധേയമായി ഏകദങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുകയാണ് നിശ്ചിത സമാകലനം കൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത്. ഈ അധ്യായത്തിൽ നിശ്ചിതസമാകലജം രണ്ട് രീതിയിൽ അവതരിപ്പിക്കാം.

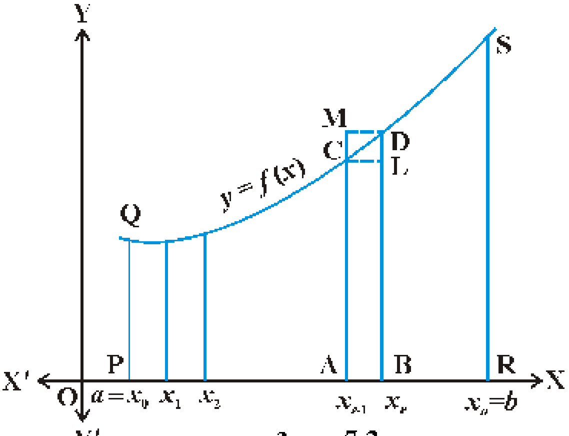
(i) തുകയുടെ സീമയായി നിശ്ചിതസമാകലജം കാണുന്ന വിധം

(ii) $[a, b]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ അവകലജത്തിന്റെ വിപരീതം ഉപയോഗിച്ച്

$\int_a^b f(x)\,dx$ എന്ന രീതിയിലാണ് $f(x)$ ന്റെ നിശ്ചിത സമാകലജത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. ഇവിടെ a, b എന്നത് സമാകലജത്തിന്റെ നിമ്ന, ഉന്നത സീമകൾ എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

7.7.1 തുകയുടെ സീമയായി നിശ്ചിത സമാകലജം കാണുന്ന വിധം

$[a, b]$ യിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള അധിസംഖ്യാ വിലകളുള്ളതും തുടർച്ചയുള്ളതും ആയ ഏകദമാണ് $f(x)$. അതിന്റെ ഗ്രാഫ് x അക്ഷത്തിന് മുകളിലായിരിക്കുമല്ലോ. $\int_a^b f(x)\,dx$ എന്നതിന്റെ ജ്യാമിതീയ അർഥം $y = f(x)$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന് $x = a$, $x = b$, x - അക്ഷം ഇവയ്ക്കിടയിലുള്ള പരപ്പളവ് ആണ്. (ചിത്രം 7.2)



ചിത്രം. 7.2

PRSQP യുടെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനു വേണ്ടി $[a, b]$ യെ തുല്യ ഇടവേളയുള്ള 'n' സ്ട്രിപ്പുകളായി മാറ്റുന്നു. അവ

$[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,...., $[x_{r-1}, x_r]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, ... ,

$x_r = a + rh$, ..., $x_n = b$, $n = \dfrac{b-a}{h}$ ആയിരിക്കും. അതോടൊപ്പം $n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ $h \to 0$ ആയിരിക്കും.

PRSQP ന്റെ പരപ്പളവിനെ 'n' ചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവിന്റെ തുകയായി അവതരിപ്പിക്കാം.

ചിത്രം 7.2 ൽ നിന്നും ചതുരം ABLC യുടെ പരപ്പളവ് < ABDCA യുടെ പരപ്പളവ് < ചതുരം ABDM ന്റെ പരപ്പളവ്

s_n, S_n എന്നിവ താഴത്തെയും മുകളിലത്തെയും ചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുക എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക.

ഇതിൽ നിന്നും 'n' ചതുരങ്ങളെയും പരിഗണിച്ചാൽ

$$s_n = h\,[f(x_0) + \ldots + f(x_{n-1})] = h\sum_{r=0}^{n-1} f(x_r) \qquad \ldots (2)$$

$$S_n = h\,[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] = h\sum_{r=1}^{n} f(x_r) \qquad \ldots (3)$$

s_n <PRSQP യുടെ പരപ്പളവ് < S_n ആയിരിക്കും. ... (4)

$n \to \infty$ ആകുമ്പോൾ ചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം അനന്തതയിലേക്കും h ന്റെ വില പൂജ്യത്തിലേക്കും നീങ്ങുന്നു.

s_n ന്റെയും S_n ന്റെയും വിലകൾ PRSQP യുടെ പരപ്പളവിനോട് തുല്യമായി മാറുന്നു.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \text{PRSQP യുടെ പരപ്പളവ്} = \int_a^b f(x)dx \qquad \ldots (5)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\,[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+(n-1)h] \text{ എന്നോ}$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+(n-1)h] \qquad \ldots (6)$$

എന്നോ നിർവചിക്കാം. ഇവിടെ $h = \dfrac{b-a}{n}$ ആണ്.

(6) നെയാണ് തുകയുടെ സീമ ആയി കണക്കാക്കുന്നത്.

> **കുറിപ്പ്**
>
> $\int_a^b f(x)\,dx$ ന്റെ വില $f(x)$ ഏകദത്തെയും $[a, b]$ എന്ന ഇടവേളയെയും ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന ചരത്തെ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല.

ഉദാഹരണം : 29

$\int_0^2 (x^2+1)\,dx$ ഒരു തുകയുടെ സീമയായി കാണുക.

പരിഹാരം

നിർവചന പ്രകാരം

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)h],$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

ഇവിടെ $a = 0, b = 2, f(x) = x^2 + 1,\ h = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

അതുകൊണ്ട്

$$\int_0^2 (x^2+1)\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(0)+f(\frac{2}{n})+f(\frac{4}{n})+\ldots+f(\frac{2(n-1)}{n})]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[1+(\frac{2^2}{n^2}+1)+(\frac{4^2}{n^2}+1)+\ldots+\left(\frac{(2n-2)^2}{n^2}+1\right)]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n}+\frac{1}{n^2}(2^2+4^2+\ldots+(2n-2)^2]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[n+\frac{2^2}{n^2}(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[n+\frac{4}{n^2}\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[n+\frac{2}{3}\frac{(n-1)\ (2n-1)}{n}]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}[1+\frac{2}{3}(1-\frac{1}{n})\ (2-\frac{1}{n})] = 2\ [1+\frac{4}{3}] = \frac{14}{3}$$

ഉദാഹരണം : 30

$\int_0^2 e^x\,dx$ നെ തുകയുടെ സീമയായി എഴുതി വില കാണുക.

പരിഹാരം

നിർവചനത്തിൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$\int_0^2 e^x\,dx = (2-0)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[e^0+e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{4}{n}}+\ldots+e^{\frac{2n-2}{n}}\right]$$

ഒരു സമഗുണിത ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കാണുന്ന സൂത്ര വാക്യം ഉപയോഗിച്ചാൽ $a = 1,\ r = e^{\frac{2}{n}}$

$$\int_0^2 e^x\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^{\frac{2n}{n}}-1}{e^{\frac{2}{n}}-1}\right] = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^2-1}{e^{\frac{2}{n}}-1}\right]$$

$$= \frac{2\,(e^2-1)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{2}{n}}\right]\cdot 2} = e^2-1 \quad \left[\lim_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h}=1 \text{ ഉപയോഗിച്ച്}\right]$$

മറ്റൊരു രീതി :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots f\big(a+(n-1)h\big)\right]$$

$$nh = b-a$$

ഇവിടെ $f(x)=e^x$, $nh = 2 - 0 = 2$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\left[e^a+e^{a+h}+e^{a+2h}+\ldots+e^{a+(n-1)h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[e^a\,\frac{\left(e^{nh}-1\right)}{e^h-1}\right]$$ ഇവിടെ $a = e^a,\ r = e^h$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\left(e^2-1\right)}{e^h-1} \quad \because \lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}=1$$

$$= e^2-1$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 7.8

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന നിശ്ചിത സമാകലജങ്ങളെ തുകയുടെ സീമ ഉപയോഗിച്ച് വില കണക്കാക്കുക.

1. $\int_a^b x\,dx$
2. $\int_0^5 (x+1)\,dx$
3. $\int_2^3 x^2\,dx$
4. $\int_1^1 (x^2 - x)\,dx$
5. $\int_{-1}^1 e^x\,dx$
6. $\int_0^4 (x+e^{2x})\,dx$

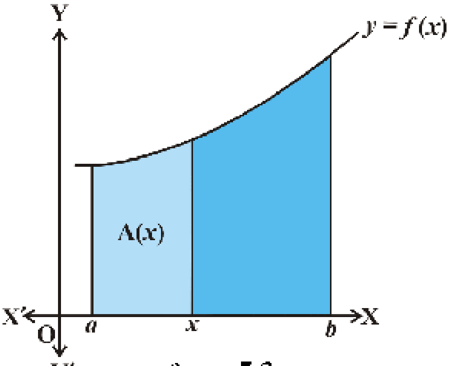
7.8 കലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം

7.8.1 പരപ്പളവിന്റെ ഏകദം

$\int_a^b f(x)\,dx$ എന്നത് $y = f(x)$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫും $x = a$, $x = b$, $y = 0$ എന്നീ വരകളും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ്.

ഇതിൽ നിന്നും പരപ്പളവിന്റെ ഏകദം നമുക്ക് നിർമിക്കാം.

$$A(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$



ചിത്രം. 7.3

ഇതിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കി രണ്ട് പ്രധാന സിദ്ധാന്തങ്ങൾ ഉണ്ട്.

7.8.2 സമാകലജകലനത്തിന്റെ ഒന്നാം അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം

$f(x)$ എന്നത് $[a, b]$ യിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു തുടർച്ചയുള്ള ഏകദവും $A(x)$ എന്നത് പരപ്പളവിന്റെ ഏകദവും ആയാൽ $[a, b]$ എന്ന ഇടവേളയിലെ ഏതൊരു x നും $A'(x) = f(x)$ ആയിരിക്കും.

7.8.3 സമാകലജകലനത്തിന്റെ രണ്ടാം അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം

$f(x)$ എന്നത് $[a, b]$ യിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാണ്. $F(x)$ എന്നത് ഇതിന്റെ അവകലജവിപരീതം ആയാൽ

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \text{ ആയിരിക്കും.}$$

കുറിപ്പ്

1) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, ഇവിടെ അവകലജവിപരീതം അഗ്രബിന്ദുക്കളായ a, b ഇവയെ മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് കാണുന്നു.

2) $\int_a^b f(x)\,dx$ കണക്കാക്കുമ്പോൾ $f(x)$ എന്ന ഏകദം $[a, b]$ യിൽ നിർവചിച്ചതായിരിക്കണം. ഉദാഹരണമായി $\int_{-2}^{3} x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$ പരിഗണിക്കുന്നത് തെറ്റായ പ്രവണതയാണ് കാരണം,

$\int_{-2}^{3} x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$ എന്നത് $-1 < x < 1$ എന്ന ഭാഗത്ത് നിർവചിച്ചിട്ടില്ല. $[-1, 1]$ എന്നത് $[-2, 3]$ യുടെ ഉപഗണമാണ്.

3) അവകലജവും സമാകലജവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം സമാകലജകലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനസിദ്ധാന്തം ശാക്തീകരിക്കുന്നു.

4) തുകയുടെ സീമയായി നിശ്ചിത സമാകലനം ചെയ്യുന്നതിനെക്കാൾ വളരെ എളുപ്പത്തിൽ രണ്ടാം അടിസ്ഥാനകലനസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് നിശ്ചിത സമാകലനം നടത്തുവാൻ കഴിയുന്നു.

$\int_a^b f(x)\,dx$ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള വിവിധഘട്ടങ്ങൾ

i) ആദ്യം $\int f(x)\,dx$ കണ്ടു പിടിക്കുക. ഇത് $F(x)$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. 'C' ഉപയോഗിക്കേണ്ട ആവശ്യം ഇവിടെ ഇല്ല കാരണം,

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)+C]_a^b = [F(b)+C]-[F(a)+C] = F(b)-F(a).$$

ii) $F(b) - F(a)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

$f(x) = x^2+1$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. n എന്ന പേരിൽ ഒരു integer slider നിർമിച്ച് Lower Sum [f, 0, 2, n] എന്ന് നൽകിയാൽ, $y = x^2+1$ എന്ന വക്രം, x അക്ഷം, $x = 0$, $x = 2$ എന്നീ വരകൾ ഇവ അതിരുകളായി വരുന്ന ഭാഗത്തിനെ n ചതുരങ്ങളായി വിഭജിച്ചു കിട്ടും. അവയുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയും ലഭിക്കും. n ന്റെ വില വർദ്ധിപ്പിക്കുമ്പോൾ ചതുരങ്ങളുടെ എണ്ണം വർദ്ധിക്കുകയും അവയുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുക, മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവിനോട് അടുക്കുകയും ചെയ്യും.

ഉദാഹരണം : 31

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമാകലജങ്ങളുടെ വില കാണുക.

(i) $\int_2^3 x^2\, dx$ (ii) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\, dx$

(iii) $\int_1^2 \frac{x\, dx}{(x+1)(x+2)}$ (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t\, dt$

(v) $\int_0^1 sin^{-1} x dx$ (vi) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{1-sin\, x}{1-cos\, x}\right) e^x\, dx$

പരിഹാരം

(i) $I = \int_2^3 x^2\, dx$ എന്നെഴുതാം.

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} = F(x)$$

സമാകലജകലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം 2 അനുസരിച്ച്

$$I = F(3) - F(2)$$

$$= \frac{27}{3} - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{19}{3}$$

(ii) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30 \quad x^{\frac{3}{2}})^2}\, dx = I$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക

$30 \quad x^{\frac{3}{2}} = t$ ആയാൽ $-\frac{3}{2}\sqrt{x}\, dx = dt$

$$\sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} dt$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(30 \quad x^{\frac{3}{2}})^2}\, dx = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{t}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{\left(30 \quad x^{\frac{3}{2}}\right)}\right] \quad = \quad F(x)$$

സമാകലജകലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം 2 അനുസരിച്ച്

$$I \quad = \quad F(9) - F(4)$$

$$= \quad \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 - x^{\frac{3}{2}})}\right]_4^9$$

$$= \quad \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30-27)} - \frac{1}{30-8}\right]$$

$$= \quad \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{22}\right]$$

$$= \quad \frac{19}{99}$$

(iii) $\quad I = \int_1^2 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)} = I$ എന്നെഴുതാം.

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)} = -\log|x+1| + 2\log|x+2| = F(x)$$

$$I = \quad F(2) - F(1) = [-\log 3 + 2\log 4] - [-\log 2 + 2\log 3]$$

$$= -3\log 3 + \log 2 + 2\log 4 = \log\left(\frac{32}{27}\right)$$

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t\, dt = I$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക

$\sin 2t = u$ ആയാൽ $\cos (2t).2.\, dt = du$ ആകും.

$$\int \sin^3 2t \cos 2t\, dt = \frac{1}{2}\int u^3 du$$

$$= \frac{1}{8}[u^4] = \frac{1}{8}\sin^4 2t = F(t)$$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$I = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0)$$

$$= \frac{1}{8}\sin^4\left(2.\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{8}\sin^4(0)$$

$$= \frac{1}{8}$$

(v) $\int_0^1 \sin^{-1} x.dx = I$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക

$$\int_0^1 \sin^{-1} x.1.dx = \sin^{-1} x \int 1\, dx - \int \tfrac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right)\int 1\, dx\, .\, dx$$

$$= \sin^{-1} x.x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$1 - x^2 = t$ ആയാൽ $-2xdx = dt$

$$= x\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$$

$$= F(x)$$

അതിനാൽ

$$I = F(1) - F(0)$$

$$= \sin^{-1}(1) - 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$\int_b^a f(x)dx$ ലഭിക്കാൻ Integral [f, a, b] എന്ന നിർദ്ദേശം നൽകിയാൽ മതി ഉദാഹരണമായി, $\int_2^3 x^2 dx$ ലഭിക്കാക്കാൻ Integral [x^2, 2, 3] എന്ന് നൽകുക.

(vi) $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{1 - \sin x}{1 - \cos x} \right) e^x dx$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{\sin x}{1 - \cos x} \right) e^x dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} \right) e^x dx$$

$f(x) = -\cot\left(\frac{x}{2}\right)$ ആയാൽ $f'(x) = \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{x}{2}\right)$

അതിനാൽ,

$$F(x) = \int \left[\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{x}{2}\right) - \cot\left(\frac{x}{2}\right) \right] e^x dx = -e^x \cot\left(\frac{x}{2}\right)$$

ഇതിൽ നിന്നും,

$$I = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \left[-e^{\pi} . \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] - \left[-e^{\frac{\pi}{2}} . \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$= -e^{\pi/2}$$

പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങൾ 7.9

1 മുതൽ 20 വരെയുള്ള നിശ്ചിത സമാകലജങ്ങളുടെ വില കാണുക.

1. $\int_{-1}^{1} (x+1)\, dx$
2. $\int_{2}^{3} \frac{1}{x} dx$
3. $\int_{1}^{2} (4x^3 - 5x^2 + 6x + 9)\, dx$
4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx$
5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$
6. $\int_{4}^{5} e^x dx$
7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx$
8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cosec} x\, dx$
9. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$
11. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2 - 1}$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$ 13. $\int_2^3 \frac{x\, dx}{x^2+1}$ 14. $\int_0^1 \frac{2x+3}{5x^2+1} dx$ 15. $\int_0^1 x\, e^{x^2} dx$

16. $\int_1^2 \frac{5x^2}{x^2+4x+3}$ 17. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sec^2 x + x^3 + 2)\, dx$ 18. $\int_0^{\pi} (\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2})\, dx$

19. $\int_0^2 \frac{6x+3}{x^2+4} dx$ 20. $\int_0^1 (x\, e^x + \sin \frac{\pi x}{4})\, dx$

21, 22 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക.

21. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} =$

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{12}$

22. $\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{4+9x^2} =$

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{12}$ (C) $\frac{\pi}{24}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

7.9 ആരോപരീതി ഉപയോഗിച്ച് നിശ്ചിത സമാകലജങ്ങളുടെ വില കാണുന്ന വിധം

കഴിഞ്ഞ ഭാഗങ്ങളിൽ അനിശ്ചിത സമാകലജം കാണുന്ന വിവിധ രീതികൾ പരിചയപ്പെട്ടു. സമാകലജകലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം 2 അനുസരിച്ച് നിശ്ചിത സമാകലജം ചെയ്യാൻ വേണ്ടി അനിശ്ചിത സമാകലജം ഉപയോഗിക്കാം. അനിശ്ചിത സമാകലജം ചെയ്യുമ്പോൾ ചില ഏകദങ്ങളിൽ മറ്റൊരു ചരം ആരോപിക്കേണ്ടി വരുന്നു. അത്തരം സാഹചര്യങ്ങളിൽ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് രീതികളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് ഉപയോഗിക്കാം.

രീതി 1

ഘട്ടം 1 $\int_a^b f(x)\, dx$ എന്നതിനെ $\int f(x) dx$ ആയി പരിഗണിക്കുക.

ഘട്ടം 2 $y = f(x)$ അല്ലെങ്കിൽ $x = g(y)$ തുടങ്ങിയ ആരോപണം നൽകുക

ഘട്ടം 3 സമാകലനം ചെയ്യുക; C ഉപയോഗിക്കേണ്ടതില്ല

ഘട്ടം 4 യഥാർത്ഥ ചരത്തിലേക്ക് മാറ്റി എഴുതി, സീമകൾ നൽകാം.

രീതി 2

ഘട്ടം 1 $\int_a^b f(x)\,dx$ എന്നതിനെ $\int f(x)\,dx$ ആയി പരിഗണിക്കുക

ഘട്ടം 2 $y = f(x)$ അല്ലെങ്കിൽ $x = g(y)$ തുടങ്ങിയവ ആരോപിക്കുകയും അതോടൊപ്പം നിലവിലുള്ള സീമകളെ പുതിയ സീമകളിലേക്ക് മാറ്റുകയും ചെയ്യുക.

ഘട്ടം 3 സമാകലനം ചെയ്യുക. യഥാർത്ഥ ചരത്തിലേക്ക് തിരിച്ചു പോകേണ്ടതില്ല. പകരം പുതിയ സീമകൾ ഉപയോഗിച്ച് വില കാണുക.

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണം നോക്കാം.

ഉദാഹരണം : 32

$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

രീതി 1 ഉപയോഗിച്ച്

$t = x^5 + 1$, ആയാൽ $dt = 5x^4\,dx$.

$$\int 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x^5+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \frac{2}{3}\left[(x^5+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{3}\left[(1^5+1)^{\frac{3}{2}} - \left((-1)^5+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

രീതി 2 ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ

$t = x^5 + 1$ ആയാൽ $dt = 5x^4\,dx$.

$x = -1$, ആയാൽ $t = 0$ ആയിരിക്കും.

$x = \ 1,$ ആയാൽ $t = 2$ ആയിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് $\int_{1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\, dx = \int_0^2 \sqrt{t}\, dt$

$$= \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

ഉദാഹരണം : 33

$$\int_0^1 \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}\, dx$$

$$t = \tan^{-1}x$$

$$dt = \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$x = 0$ ആയാൽ $t = \tan^{1}(0) = 0$

$x = 1$ ആയാൽ $t = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$$\text{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t\, dt$$

$$= \left[e^t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= e^{\frac{\pi}{4}} - 1$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.10

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന നിശ്ചിത സമാകലജങ്ങളുടെ വില കാണുക.

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\phi}\, \cos^5\phi\, d\phi$
3. $\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$
4. $\int_0^2 x\sqrt{x+2}$ (സൂചന : $x + 2 = t^2$)
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

6. $\int_0^2 \frac{dx}{x+4-x^2}$ 7. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ 8. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)e^{2x}dx$

9, 10 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക.

9. $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}dx$ ന്റെ വില.

(A) 6 (B) 0 (C) 3 (D) 4

10. $f(x)=\int_0^x t\sin t\, dt$, ആയാൽ $f'(x)=$

(A) $\cos x + x\sin x$ (B) $x\sin x$

(C) $x\cos x$ (D) $\sin x + x\cos x$

7.10 നിശ്ചിത സമാകലജങ്ങളുടെ ചില പ്രത്യേകതകൾ

നിശ്ചിത സമാകലനം എളുപ്പമാക്കുന്നതിന് നിശ്ചിത സമാകലജത്തിന്റെ പ്രധാനപ്പെട്ട പ്രത്യേകതകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

P$_0$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)\,dt$

P$_1$: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. പ്രത്യേകിച്ച്, $\int_a^a f(x)dx = 0$

P$_2$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \; (a \le c \le b)$

P$_3$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

P$_4$: $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

(P_3 യുടെ ഒരു പ്രത്യേക സാഹചര്യമാണ് P_4)

P$_5$: $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx$

P$_6$: $\int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx;\; f(2a-x) = f(x)$ ആകുമ്പോൾ

$= 0;\; f(2a-x) = -f(x)$ ആകുമ്പോൾ

(P_5 ന്റെ ഒരു പ്രത്യേക സാഹചര്യമാണ് P_6)

$\mathbf{P}_7$: (i) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$, $f(x)$ ഒരു ഇരട്ട ഏകദമായാൽ, അതായത് $f(-x) = f(x)$.

(ii) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, $f(x)$ ഒരു ഒറ്റ ഏകദമായാൽ അതായത് $f(-x) = -f(x)$.

ഇവയുടെ തെളിവുകൾ ഓരോന്നായി പരിശോധിക്കാം.

തെളിവുകൾ

$\mathbf{P}_0$: $x = t$ എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ മതി.

$\mathbf{P}_1$: $f(x)$ ന്റെ അവകലജ വിപരീതമാണ് $F(x)$ എങ്കിൽ

അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച്

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$= -[F(a) - F(b)]$$

$$= -\int_b^a f(x)dx$$

$a = b$ ആയാൽ $\int_a^b f(x)dx = 0$ ആയിരിക്കും.

$\mathbf{P}_2$: F എന്നത് f ന്റെ അവകലജ വിപരീതമായാൽ

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \ldots (1)$$

$$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a) \quad \ldots (2)$$

$$\int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c) \quad \ldots (3)$$

(2), (3) ഇവ കൂട്ടിയാൽ

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

$\mathbf{P}_3$: $t = a + b - x$. എന്ന് എടുത്താൽ $dt = -dx$

$x = a$ ആയാൽ $t = b$ ആയിരിക്കും.

$x = b$ ആയാൽ $t = a$ ആയിരിക്കും.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(a+b-t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(a+b-t)\,dt \quad (\text{P}_1 \text{ അനുസരിച്ച്})$$

$$= \int_a^b f(a+b-x)\,dx \quad (\text{P}_0 \text{ അനുസരിച്ച്})$$

$\mathbf{P}_4$: $t = a - x$ ഉപയോഗിച്ച് $\mathbf{P}_3$ ചെയ്തത് പോലെ തുക

$\mathbf{P}_5$: P_2 അനുസരിച്ച്

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx.$$

$t = 2a - x$ എന്ന് രണ്ടാമത്തെ സമാകലനത്തിൽ മാത്രം ഉപയോഗിക്കാം.

$dt = -dx$

$x = a$ ആയാൽ $t = a$ ആയിരിക്കും

$x = 2a$ ആയാൽ $t = 0$ ആയിരിക്കും

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(2a-t)\,dt = \int_0^a f(2a-t)\,dt = \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

അതുകൊണ്ട്, $$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx \quad \ldots (1)$$

$\mathbf{P}_6$: P_5 ൽ നിന്ന് നേരിട്ട് ലഭിക്കും.

$f(2a - x) = f(x)$, ആയാൽ (1) ൽ നിന്ന്

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$$

$f(2a - x) = -f(x)$, ആയാൽ (1) ൽ

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

$\mathbf{P}_7$: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$.അതിനാൽ

വലതുഭാഗത്തെ ഒന്നാമത്തെ സമാകലജത്തിൽ മാത്രം $x = -t$ എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ

$$dx = -\,dt$$

$x = -a$ ആയാൽ $t = a$

$x = 0$ ആയാൽ $t = 0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(i) $f(-x) = f(x)$ ആയാൽ

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii) $f(-x) = -f(x)$ ആയാൽ

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$ എന്നും ലഭിക്കും

ഉദാഹരണം : 34

$\int_{-1}^{2} \left| x^3 - x \right| dx$ കാണുക.

പരിഹാരം

$-1 \leq x \leq 0$ ആകുമ്പോഴും $x \geq 1$ ആകുമ്പോഴും $x\,(x^2 - 1) \geq 0$; മറ്റു സന്ദർഭങ്ങളിൽ $x\,(x^2 - 1) < 0$ ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് $\mathbf{P}_2$ പ്രകാരം

$$\int_{1}^{2} \left| x^3 - x \right| dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} -(x^3 - x)\,dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+(4-2)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}-\frac{3}{4}+2=\frac{11}{4}$$

ഉദാഹരണം : 35

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

$\sin^2 x$ എന്നത് ഇരട്ട ഏകദമാണ്. P_7 പ്രകാരം

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$$ എന്നാണ്.

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos 2x)}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2x) dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

ഉദാഹരണം : 36

$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക

P_4 പ്രകാരം, $$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)\, dx}{1+\cos^2(\pi - x)}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} - I$$

അതുകൊണ്ട്

$$2\,I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$$

$\cos x = t$ ആയാൽ $-\sin x\,dx = dt$ ആയിരിക്കും. കൂടാതെ

$x = 0$ ആയാൽ $t = 1$

$x = \pi$ ആയാൽ $t = -1$ ആയിരിക്കും.

$$I = \frac{-\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \pi\int_0^{1} \frac{dt}{1+t^2}$$ ($\frac{1}{1+t^2}$ ഇരട്ട ഏകദമായതിനാൽ, P_7 ഉപയോഗിക്കാം)

$$= \pi\left[\tan^{-1} t\right]_0^1 = \pi\left[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0\right] = \pi\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi^2}{4}$$

ഉദാഹരണം : 37

$\int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x\,dx$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

$$I = \int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x\,dx$$

$f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$ എന്നും പരിഗണിച്ചാൽ

$f(-x) = \sin^5(-x)\cos^4(-x) = -\sin^5 x \cos^4 x = -f(x)$

അതുകൊണ്ട് $f(x)$ ഒരു ഒറ്റ ഏകദമാണ്. അതിനാൽ P_7 പ്രകാരം $I = 0$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 38

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക ... (1)

P_4 ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx \qquad \ldots (2)$$

സവാക്യങ്ങൾ (1), (2) ഇവ കൂട്ടിയാൽ

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{4}$$

ഉദാഹരണം : 39

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക

$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}\,dx}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക $\qquad \ldots (1)$

$-\int_b^a f(x)dx = \int_b^a f(a+b-x)dx$ എന്ന പ്രത്യേകത ഉപയോഗിച്ചാൽ

(അതായത് P_3 പ്രകാരം) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}dx}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}+\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}}dx$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx \qquad \ldots (2)$$

സമവാക്യങ്ങൾ (1) , (2) ഇവ കൂട്ടിയാൽ

$$2I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$$

$$2I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx$$

$$2I = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$2I = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$

$$I = \frac{\pi}{12}$$

ഉദാഹരണം : 40

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx \quad \text{——— (1)}$$

$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ എന്ന പ്രത്യേകത ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx \quad \text{——— (2)}$$

ലഭിക്കും.

സമവാക്യങ്ങൾ (1) ഉം (2) ഉം കൂട്ടിയാൽ

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x \cos x) dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log((\sin 2x) - \log 2) dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 \, dx$$

$f(x) = x^3$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. a, b എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് സ്ലൈഡറുകൾ നിർമിച്ച് $f(a+b-x)$ എന്ന നിർദ്ദേശം നൽകി ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. ഈ ഗ്രാഫുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്? ഇവ തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ x സൂചകസംഖ്യക്ക് a, b എന്നീ സംഖ്യകളുമായി എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ? സ്ലൈഡറുകളുടെ വില മാറ്റിനോക്കൂ.

$\int_b^a f(x)dx$, $\int_b^a f(a+b-x)dx$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിച്ചുനോക്കൂ. ഇതിൽ $a = 0$ ആകുമ്പോൾ P_4 എന്ന പ്രത്യേകതയുടെ ജ്യാമിതീയ വിശദീകരണം ലഭിക്കും. $f(x) = x^3$ എന്നതിനുപകരം മറ്റ് ഏകദങ്ങളും നൽകി നോക്കാം.

a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിക്കുക. $f(x)$ എന്ന പേരിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. (ഉദാഹരണം $f(x) = x^3$). $f(2a-x)$ എന്ന നിർദ്ദേശം നൽകി ആ ഏകദത്തിന്റെയും ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

$\int_0^{2a} f(x)dx$, $\int_0^a f(x)dx$, $\int_0^a f(2a-x)dx$

എന്നിവ കണക്കാക്കുക. P_5 എന്ന പ്രത്യേകത ശരിയാകുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് ജ്യാമിതീയമായി പറയാൻ കഴിയുമോ?

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x)dx - \log 2.\frac{\pi}{2}$$

$2x = t$ ആയാൽ $dx = \frac{1}{2}dt$

$x = 0$, ആയാൽ $t = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$, ആയാൽ $t = \pi$ ആയിരിക്കും.

> $\left|x^3 - x\right|$, $x^3 - x$ എന്നിവയുടെ ഗ്രാഫുകൾ വരച്ച് നോക്കുക. $[-1, 2]$ ഇടവേളയിൽ എപ്പോഴെല്ലാമാണ് ഇവ തുല്യമാകുന്നത്? $\left|x^3 - x\right|$, $-(x^3 - x)$ എന്നിവ തുല്യമാകുന്നത് എപ്പോഴാണ്?

$$2I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin t \, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t \, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$$ [P6 ഉപയോഗിക്കാം, $\sin(\pi - t) = \sin t$)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx - \frac{\pi}{2}\log 2$$ (t യ്ക്ക് പകരം x എഴുതുന്നു; P_0) $= I - \frac{\pi}{2}\log 2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = \frac{-\pi}{2}\log 2.$$

> $|x|$, x^2, $\cos x$, $|\sin x|$ തുടങ്ങിയവ ഇരട്ട ഏകദങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ് x^3, $\sin x$, x^5 തുടങ്ങിയവ ഒറ്റ ഏകദങ്ങൾക്കും ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. a എന്ന ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിക്കുക. $f(x)$ എന്ന ഒരു ഇരട്ട ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ കണക്കാക്കിനോക്കൂ. എന്തുകൊണ്ടാണ് P_7 എന്ന പ്രത്യേകത ശരിയാവുന്നത്? $f(x)$ ഒരു ഒറ്റ ഏകദമാകുമ്പോൾ എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നത്?

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.11

നിശ്ചിത സമാകലജത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ ഉപയോഗിച്ച് 1 മുതൽ 19 വരെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ വിലകൾ കണക്കാക്കുക.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x \, dx}{\sin^{\frac{3}{2}} x + \cos^{\frac{3}{2}} x}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x \, dx}{\sin^5 x + \cos^5 x}$

5. $\int_{-5}^{5} |x+2| \, dx$

6. $\int_2^8 |x-5| \, dx$

7. $\int_0^1 x(1-x)^n \, dx$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x) \, dx$

9. $\int_0^2 x\sqrt{2-x} \, dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\log\sin x - \log\sin 2x) \, dx$

11. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$

12. $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{1+\sin x}$

13. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx$

14. $\int_0^{2\pi} \cos^5 x \, dx$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\sin x \cos x} dx$

16. $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x) \, dx$

17. $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}} dx$

18. $\int_0^1 |x-1| \, dx$

19. $f(x) = f(a-x)$; $g(x) + g(a-x) = 4$ ആയാൽ

$\int_0^a f(x)g(x) \, dx = 2\int_0^a f(x) \, dx$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

20, 21 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയുത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക.

20. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x\cos x + \tan^5 x + 1) \, dx$ ആയാൽ

(A) 0 (B) 2 (C) π (D) 1

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right) dx =$

(A) 2 (B) $\frac{3}{4}$ (C) 0 (D) –2

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 41

$\int \cos 6x \sqrt{1+\sin 6x}\, dx$ കാണുക.

പരിഹാരം

$t = 1 + \sin 6x$, ആയാൽ $dt = 6 \cos 6x\, dx$

അതുകൊണ്ട് $\int \cos 6x\sqrt{1+\sin 6x}\, dx = \frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}} dt$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{2}{3}(t)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{9}(1+\sin 6x)^{\frac{3}{2}} + C$$

ഉദാഹരണം : 42

$\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx$ കാണുക.

പരിഹാരം

$$\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx = \int \frac{(1 - \frac{1}{x^3})^{\frac{1}{4}}}{x^4} dx$$

$1 - \frac{1}{x^3} = 1 - x^{-3} = t$ എങ്കിൽ $\frac{3}{x^4} dx = dt$

$$\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5} dx = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{4}}\, dt = \frac{1}{3}\times\frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{15}\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{5}{4}} + C$$

ഉദാഹരണം : 43

$\int \frac{x^4\, dx}{(x-1)(x^2+1)}$ കാണുക.

പരിഹാരം

$$\frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)} = (x+1) + \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$= (x+1) + \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} \qquad \ldots (1)$$

ഇതിൽ $$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} \qquad \ldots (2)$$

$$1 = A\,(x^2+1) + (Bx + C)\,(x-1)$$
$$= (A+B)\,x^2 + (C-B)\,x + A - C$$

ഗുണകങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്താൽ

$A + B = 0,\ C - B = 0$ and $A - C = 1$, അതിൽ നിന്നും $A = \frac{1}{2}, B = C = -\frac{1}{2}$ എന്ന്

ലഭിക്കുന്നു. ഇവ (2) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)} \qquad \ldots (3)$$

(3) എന്ന സമവാക്യത്തെ (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$\frac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)} = (x+1) + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

$$\int \frac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

ഉദാഹരണം : 44

$$\int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$$ കാണുക.

പരിഹാരം

$$I = \int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$$

$$= \int \log(\log x)\,dx + \int \frac{1}{(\log x)^2}dx$$

$$I = x\log(\log x) - \int \frac{1}{x\log x}x\,dx + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x\log(\log x) - \int \frac{dx}{\log x} + \int \frac{dx}{(\log x)^2} \qquad \ldots (1)$$

$\int \frac{dx}{\log x}$ പരിഗണിക്കുക.

$$\int \frac{dx}{\log x} = \left[\frac{x}{\log x} - \int x \left\{ -\frac{1}{(\log x)^2} \left(\frac{1}{x} \right) \right\} dx \right] \qquad \ldots (2)$$

(2), (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$I = x \log(\log x) - \frac{x}{\log x} - \int \frac{dx}{(\log x)^2} + \int \frac{dx}{(\log x)^2} = x \log(\log x) - \frac{x}{\log x} + C$$

ഉദാഹരണം : 45

$\int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x} \right] dx$ കാണുക.

പരിഹാരം

$$I = \int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x} \right] dx = \int \sqrt{\tan x}(1 + \cot x)\, dx$$

$\tan x = t^2$, $\sec^2 x\, dx = 2t\, dt$

$$dx = \frac{2t\, dt}{1 + t^4}$$

$$I = \int t \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \frac{2t}{(1 + t^4)} dt$$

$$= 2 \int \frac{(t^2 + 1)}{t^4 + 1} dt = 2 \int \frac{\left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt}{\left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right)} = 2 \int \frac{\left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt}{\left(t - \frac{1}{t} \right)^2 + 2}$$

$t - \frac{1}{t} = y$, ആയാൽ $\left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt = dy$

$$I = 2 \int \frac{dy}{y^2 + \left(\sqrt{2} \right)^2} = \sqrt{2} \tan^{-1} \frac{y}{\sqrt{2}} + C = \sqrt{2} \tan^{-1} \frac{\left(t - \frac{1}{t} \right)}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \sqrt{2} \tan^{-1} \left(\frac{t^2 - 1}{\sqrt{2}\, t} \right) + C = \sqrt{2} \tan^{-1} \left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2 \tan x}} \right) + C$$

ഉദാഹരണം : 46

$$\int \frac{\sin 2x \cos 2x\, dx}{\sqrt{9-\cos^4(2x)}}$$ കാണുക.

പരിഹാരം

$$I = \int \frac{\sin 2x \cos 2x}{\sqrt{9-\cos^4 2x}}\, dx$$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$\cos^2 (2x) = t$ ആയാൽ $4 \sin 2x \cos 2x\, dx = -dt$

$$\therefore I = \frac{-1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \frac{-1}{4}\sin^{-1}\frac{t}{3}+c \quad = \frac{-1}{4}\sin^{-1}\left[\frac{1}{3}\cos^2 2x\right]+c$$

ഉദാഹരണം : 47

$$\int_{1}^{\frac{3}{2}} \left|x \sin(\pi x)\right| dx$$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

$$f(x) = |x \sin \pi x| = \begin{cases} x \sin \pi x, & -1 \le x \le 1 \\ -x \sin \pi x, & 1 \le x \le \frac{3}{2} \end{cases}$$

അതുകൊണ്ട് $\int_{1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x|\, dx = \int_{1}^{1} x \sin \pi x\, dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} - x \sin \pi x\, dx$

$$= \int_{-1}^{1} x \sin \pi x\, dx - \int_{1}^{\frac{3}{2}} x \sin \pi x\, dx$$

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x|\, dx = \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{1}^{1} - \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} - \left[-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right] = \frac{3}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}$$

ഉദാഹരണം : 48

$$\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

$$\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \text{I}$$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതായത്, $$\text{I} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\,dx}{a^2\cos^2(\pi - x) + b^2\sin^2(\pi - x)}$$ (P_4 ഉപയോഗിച്ച്)

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} - \text{I}$$

$$2\text{I} = \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$\text{I} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$ (P_6 ഉപയോഗിച്ച്)

$$= \pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\right] = \pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x\,dx}{a^2 + b^2\tan^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{cosec}^2 x\,dx}{a^2\cot^2 + b^2}\right]$$

= $\tan x = t$ എന്നും $\cot x = u$ എന്നും ആരോപിച്ചാൽ

$dt = \sec^2 dx$, $du = -\text{cosec}^2\, dx$

അതായത്, $$\text{I} = \pi\left[\int_0^1 \frac{dt}{a^2 + b^2t^2} - \int_1^0 \frac{du}{a^2u^2 + b^2}\right]$$

$$I = \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{b}{a} + \tan^{-1}\frac{a}{b}\right] = \frac{\pi}{\text{ab}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2\text{ab}}$$

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1 മുതൽ 24 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾ സമാകലനം ചെയ്യുക.

1. $\dfrac{1}{x - x^3}$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$

3. $\dfrac{1}{x\sqrt{ax - x^2}}$ [സൂചന: $x = \dfrac{a}{t}$]

4. $\dfrac{1}{x^2(x^4+1)^{\frac{3}{4}}}$

5. $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$ [സൂചന: $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}\left(1 + x^{\frac{1}{6}}\right)}$, $x = t^6$]

6. $\dfrac{5x}{(x+1)(x^2+9)}$ 7. $\dfrac{\sin x}{\sin(x-a)}$ 8. $\dfrac{e^{5\log x}-e^{4\log x}}{e^{3\log x}-e^{2\log x}}$

9. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$ 10. $\dfrac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}$ 11. $\dfrac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

12. $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$ 13. $\dfrac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)}$ 14. $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

15. $\cos^3 x\, e^{\log \sin x}$ 16. $e^{3\log x}(x^4+1)\ 1$ 17. $f'(ax+b)[f(ax+b)]^n$

18. $\dfrac{1}{\sqrt{\sin^3 x\sin(x+\alpha)}}$ 19. $\dfrac{\sin^{\ 1}\sqrt{x}-\cos^{\ 1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x}+\cos^{-1}\sqrt{x}}$, $x\in[0,1]$

20. $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ 21. $\dfrac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}e^x$ 22. $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}$

23. $\tan^{\ 1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ 24. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}\left[\log(x^2+1)-2\log x\right]}{x^4}$

ചോദ്യങ്ങൾ 25 മുതൽ 33 വരെയുള്ള നിശ്ചിത സമാകലജങ്ങളുടെ വില കാണുക.

25. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x\left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right)dx$ 26. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$ 27. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x\,dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$

28. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}dx$ 29. $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}$ 30. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}dx$

31. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\tan^{\ 1}(\sin x)\,dx$ 32. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x+\tan x}dx$

33. $\displaystyle\int_1^4[|x-1|+|x-2|+|x-3|]\,dx$

34 മുതൽ 39 വരെയുള്ള പ്രശ്നങ്ങൾ തെളിയിക്കുക.

34. $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{x^2(x+1)}=\frac{2}{3}+\log\frac{2}{3}$ 35. $\displaystyle\int_0^1 x\,e^x\,dx=1$

36. $\displaystyle\int_{\ 1}^{1}x^{17}\cos^4 x\,dx=0$ 37. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\frac{2}{3}$

38. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^3 x\, dx = 1 - \log 2$

39. $\int_0^1 \sin^{-1} x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$

40. $\int_0^1 e^{2-3x} dx$ നെ തുകയുടെ സീമ ഉപയോഗിച്ച് വില കാണുക.

41 മുതൽ 44 വരെ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

41. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} =$

(A) $\tan^{-1}(e^x) + C$ (B) $\tan^{-1}(e^{-x}) + C$
(C) $\log(e^x - e^{-x}) + C$ (D) $\log(e^x + e^{-x}) + C$

42. $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx =$

(A) $\frac{-1}{\sin x + \cos x} + C$ (B) $\log|\sin x + \cos x| + C$
(C) $\log|\sin x - \cos x| + C$ (D) $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

43. $f(a+b-x) = f(x)$ ആയാൽ $\int_a^b x f(x) dx =$

(A) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b-x)dx$ (B) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b+x)dx$
(C) $\frac{a-b}{2}\int_a^b f(x)dx$ (D) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

44. $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{1+x-x^2}\right)dx =$

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) $\frac{\pi}{4}$

സംഗ്രഹം

- അവകലനത്തിന്റെ വിപരീത പ്രക്രിയയാണ് സമാകലനം. അവകലനത്തിൽ തന്നിട്ടുള്ള ഒരു ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം കാണുമ്പോൾ സമാകലനത്തിൽ അവകലജം തന്നിട്ടുള്ളത് ഏത് ഏകദത്തിന്റെയാണോ ആ ഏകദം കാണുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്. അങ്ങനെ അവകലനത്തിന്റെ വിപരീത പ്രക്രിയ തന്നെയാണ് സമാകലനം.

  $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ എന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ എന്നു എഴുതാം. ഇത്തരം സമാകലജങ്ങളെ അനിശ്ചിത സമാകലജം അഥവാ പൊതു

സമാകലജം എന്നു പറയുന്നു. ഇവിടെ C യെ സമാകലനസ്ഥിരാങ്കം എന്നു പറയുന്നു. ഇത്തരം സമാകലജങ്ങൾ തമ്മിൽ ഒരു സ്ഥിരാങ്കത്തിന്റെ വ്യത്യാസമേ ഉണ്ടാവുകയുള്ളൂ.

- ജ്യാമിതീയമായി നോക്കിയാൽ y അക്ഷത്തിലൂടെ ഒരു വക്രത്തിനെ മുകളിലോട്ടോ താഴോട്ടോ മാറ്റം ചെയ്യപ്പെട്ടു കിട്ടുന്ന വക്രങ്ങളുടെ ഒരു കുടുംബം ആണ് സമാകലജം എന്നു കാണാം.
- അനിശ്ചിത സമാകലജങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

1. $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2. ഏതൊരു രേഖീയസംഖ്യ k യ്ക്കും $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

പൊതുവായി $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ ഇവ ഏകദങ്ങളും $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ഇവ രേഖീയ സംഖ്യകളും ആയാൽ

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)]\,dx$$

$$= k_1 \int f_1(x)\,dx + k_2 \int f_2(x)\,dx + \ldots + k_n \int f_n(x)\,dx$$

- **ചില സാമാന്യ സമാകലജങ്ങൾ**

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$. പ്രത്യേകിച്ച് $\int dx = x + C$

(ii) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(iii) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(iv) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

(v) $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$

(vi) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

(vii) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$

(viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

(ix) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$

(x) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

(xi) $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + C$

(xii) $\int e^x dx = e^x + C$

(xiii) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

(xiv) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C$

(xv) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{cosec}^{-1} x + C$

(xvi) $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$

- **ഭാഗികഭിന്നം ഉപയോഗിച്ചുള്ള സമാകലനം**

$P(x)$, $Q(x)$ ഇവ രണ്ടുംബഹുപദങ്ങളും $Q(x) \neq 0$ ആയിരിക്കുകയും ചെയ്താൽ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ എന്ന ഭിന്നക ഏകദത്തെക്കുറിച്ച് അറിയാമല്ലോ. $P(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ കൃതി $Q(x)$ ന്റെ കൃതിയേക്കാൾ കൂടുതലായാൽ $P(x)$നെ $Q(x)$ കൊണ്ട് ഹരിച്ച് $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$ എന്നെഴുതാം.

ഇവിടെ $T(x)$ ഒരു ബഹുപദമായതുകൊണ്ട് അതിന്റെ സമാകലജം വളരെ എളുപ്പത്തിൽ കാണാം. $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ നെ ചുവടെ കാണുന്ന രൂപത്തിൽ ഭാഗിക ഭിന്നമായി മാറ്റി സമാകലജം കാണാം.

1. $\frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}, \; a \neq b$

2. $\frac{px+q}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$

3. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$

4. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}$

5. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

ഇവിടെ $x^2 + bx + c$ എന്നതിനെ ഘടകങ്ങളാക്കാൻ കഴിയില്ല.

- **സമാകലനം ആരോപരീതിയിൽ**

സമാകലജത്തിലെ ചരത്തിനെ അനുയോജ്യമായ മാറ്റത്തിലൂടെ പലപ്പോഴും അടിസ്ഥാന സമാകലജ രൂപത്തിൽ മാറ്റാൻ കഴിയും. ഒരു ചരത്തിനു പകരം അനുയോജ്യമായ രീതിയിൽ മറ്റൊരു ചരം ആരോപിച്ച് സമാകലജം കാണുന്ന മാർഗമാണ് ആരോപരീതി. ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങൾ ഉൾപ്പെട്ട സമാകലജങ്ങളെ ഏറെ പരിചിതമായ ത്രികോണമിതി സർവ്വസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സമാകലനം ചെയ്യാം. ആരോപരീതി ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സാമാന്യ സമാകലജങ്ങൾ കാണാം.

(i) $\int \tan x \, dx = \log |\sec x| + C$ (ii) $\int \cot x \, dx = \log |\sin x| + C$

(iii) $\int \sec x \, dx = \log |\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

- **ചില പ്രത്യേക ഏകദങ്ങളുടെ സമാകലജങ്ങൾ**

(i) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

(ii) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$ (iii) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$ (v) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

- **ഭാഗങ്ങളാക്കിയുള്ള സമാകലനം**

f_1, f_2, എന്നിവ തന്നിട്ടുള്ള ഏകദങ്ങളായാൽ

$$\int f_1(x) \cdot f_2(x) \, dx = f_1(x) \int f_2(x) \, dx - \int \left[\frac{d}{dx} f_1(x) \cdot \int f_2(x) \, dx \right] dx,$$

അതായത് രണ്ട് ഏകദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ സമാകലജം ആദ്യത്തെ ഏകദം × രണ്ടാം ഏകദത്തിന്റെ സമാകലജം – (ആദ്യ ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം × രണ്ടാം ഏകദത്തിന്റെ സമാകലജം) ന്റെ സമാകലജം. ഒന്നാമത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും ഏകദങ്ങൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

- $\int e^x [f(x) + f'(x)] \, dx = \int e^x f(x) \, dx + C$

- **കൂടുതൽ ഏകദങ്ങളുടെ സമാകലജം**

(i) $\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

(ii) $\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

(iii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ അല്ലെങ്കിൽ $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ളവയുടെ സമാകലജങ്ങൾ

$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$

എന്ന രൂപത്തിൽ മാറ്റി എഴുതി സമാകലജം കാണാം.

(v) $\int \frac{px + q\, dx}{ax^2 + bx + c}$ അഥവാ $\int \frac{px + q\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ളവയെ സാമാന്യരൂപത്തിൽ മാറ്റി എഴുതുന്നതിന്

$px + q = A\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) + B = A(2ax + b) + B$

ഇരുവശവും താരതമ്യം ചെയ്തു A, B ഇവയുടെ വിലകാണാം.

- $y = f(x)$ എന്ന വക്രം, x അക്ഷം, $x = a$, $x = b$ എന്നീ വരകൾ ഇവ രൂപീകരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവായാണ് $\int_a^b f(x)\, dx$ നെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത്. $\int_a^x f(x)\, dx$ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് പരപ്പളവ് ഏകദം $A(x)$ നെയാണ്. പരപ്പളവ് ഏകദം $A(x)$ സമാകലന കലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനസിദ്ധാന്തത്തിലേക്കു നയിക്കുന്നു.
- **സമാകലജകലനത്തിന്റെ ഒന്നാം അടിസ്ഥാനസിദ്ധാന്തം**

  $A(x) = \int_a^x f(x)\, dx$ എന്ന പരപ്പളവ് ഏകദത്തിൽ f എന്നത് $[a, b]$ ൽ തുടർ ഏകദം ആയാൽ $A'(x) = f(x)\ \forall\ x \in [a, b]$.
- **സമാകലജകലനത്തിന്റെ രണ്ടാം അടിസ്ഥാനസിദ്ധാന്തം**

  f എന്നത് $[a, b]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ തുടർച്ചയുള്ള ഏകദമാവുകയും $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ എന്ന തരത്തിൽ F എന്ന മറ്റൊരു ഏകദം ഉണ്ടാവുകയും ചെയ്താൽ $\int_a^b f(x)\, dx = [F(x) + C]_a^b = F(b) - F(a)$

  ഇതിനെ $[a, b]$ യിലുള്ള ഒരു നിശ്ചിത ഏകദം എന്നു പറയുന്നു. ഇവിടെ a യെ നിമ്ന സീമയെന്നും b യെ ഉന്നത സീമയെന്നും പറയുന്നു.

Q1N1B6

അധ്യായം 8

സമാകലജങ്ങളുടെ പ്രയോഗം
(APPLICATION OF INTEGRALS)

❖ *"പ്രകൃതിയെ ഇണക്കമാർന്ന രൂപത്തിൽ കാണാൻ ഗണിത, ശാസ്ത്രത്തിനേ കഴിയൂ. അതിനാൽ ഗണിതം പഠിക്കണം."- ബിരിക്കോഫ്* ❖

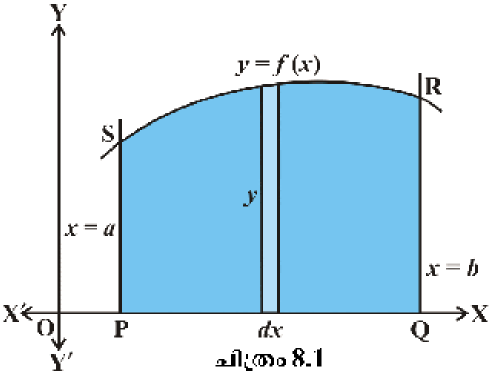
8.1 ആമുഖം

എ.എൻ. കോഷി
(1789-1857)

ജ്യാമിതിയിൽ ത്രികോണങ്ങൾ, ചതുരങ്ങൾ, വൃത്തങ്ങൾ, ലംബകങ്ങൾ ഉൾപ്പെടെയുള്ള വിവിധ രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കാണാനുള്ള മാർഗങ്ങൾ നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്.
നിത്യജീവിതത്തിലെ പല പ്രശ്നങ്ങളുടെയും പരിഹാരം കാണാനുള്ള അടിസ്ഥാന സൂത്രവാക്യങ്ങളാണ് അവയെല്ലാം. എന്നാൽ പല വക്രങ്ങളും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന പരപ്പളവ് കാണാൻ അവ പര്യാപ്തമല്ല. അതിനുവേണ്ടത് സമാകലനത്തിന്റെ ആശയങ്ങളാണ്.
നിശ്ചിത സമാകലനത്തിന്റെ വില, തുകയുടെ സീമയുടെ രൂപത്തിൽ കാണുന്ന രീതി എന്നിവ നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇവിടെ $y = f(x)$ എന്ന വക്രം, x അക്ഷം, $x = a$, $x = b$ എന്നീ രേഖകളും ചേർന്ന രൂപത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ലഘു വക്രങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന പരപ്പളവ്, ഒരു രേഖയും വൃത്തത്തിന്റെ ചാപം, സമവക്രം, ന്യൂനവക്രം എന്നിവയും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന പരപ്പളവ് എന്നിവ കാണുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് വിശദീകരിക്കുന്നു.

8.2 ലഘുവക്രങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

കഴിഞ്ഞ അധ്യായത്തിൽ നിശ്ചിത സമാകലജം, തുകയുടെ സീമ, കലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് നിശ്ചിത സമാകലജത്തിന്റെ വില കാണാനും നാം പഠിച്ചു.
$y = f(x)$ എന്ന വക്രം, x അക്ഷം, $x = a$, $x = b$ എന്നീ വരകൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗ



ചിത്രം 8.1

ത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എങ്ങനെ കാണാം എന്നു നോക്കാം. ചിത്രം 8.1 ൽ നിന്നും വക്രത്തിന്റെ ചുവടെയുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് നേരിയ സ്ട്രിപ്പുകളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണെന്നു കാണാം. ഉയരം y, വീതി dx ഉള്ള ഒരു സ്ട്രിപ്പ് പരിഗണിക്കുക. ആ സ്ട്രിപ്പിന്റെ പരപ്പളവ് $dA = ydx = f(x)dx$ ആയിരിക്കും. ഈ പരപ്പളവിനെ അടിസ്ഥാന പരപ്പളവെന്നു പറയാം. ചിത്രത്തിൽ PQRSP എന്ന ഭാഗത്തിലെ ഇത്തരത്തിലുള്ള എല്ലാ നേരിയ സ്ട്രിപ്പുകളുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയായി x അക്ഷം, $x = a$, $x = b$ എന്നീ വരകൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണാം. ഈ പരപ്പളവ് A ആണെങ്കിൽ

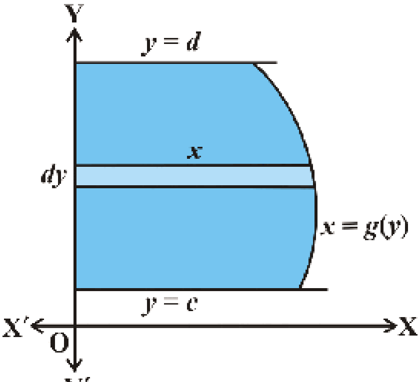
> f എന്നത് ഒരു ഏകദമായാൽ $\int_a^b f(x)dx$ ലഭിക്കുന്നതിന് Integral [f, a, b] എന്ന് Input നൽകിയാൽ മതി. ഉദാഹരണമായി $y = x^2$ എന്ന വക്രവും x അക്ഷവും $x = 1$, $x = 3$ എന്നീ വരകളും അതിരുകളായി വരുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ലഭിക്കാൻ Integral [x^2, 1, 3] എന്ന് നൽകിയാൽ മതി.

$A = \int_a^b dA = \int_a^b ydx = \int_a^b f(x)\,dx$ എന്നെഴുതാം.

ഇതുപോലെ, (ചിത്രം 8.2) $x = g(y)$ എന്ന വക്രം, y-അക്ഷം, $y = c$, $y = d$ എന്നീ വരകളും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന പരപ്പളവ് A ആണെങ്കിൽ

$A = \int_c^d xdy = \int_c^d g(y)\,dy$ എന്നെഴുതാം.

ചിത്രം 8.2 ശ്രദ്ധിക്കുക.

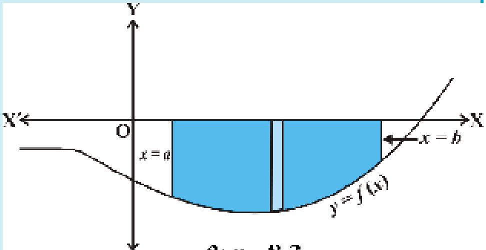


ചിത്രം 8.2

കുറിപ്പ്

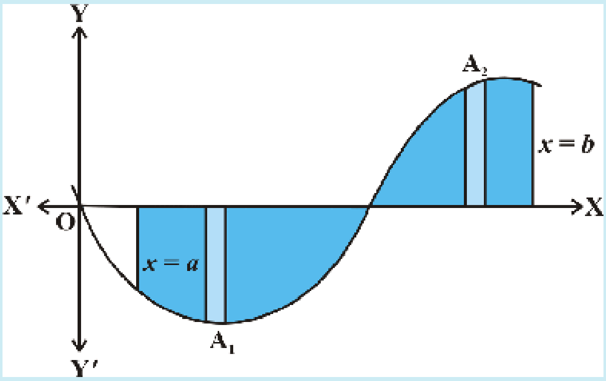
ചിത്രം 8.3 ലെ പോലെ ഒരു വക്രം x അക്ഷത്തിന്റെ താഴെയാണെങ്കിൽ a മുതൽ b വരെ $f(x) < 0$ ആയിരിക്കും. ഈ അവസരത്തിൽ $\int_a^b f(x)\,dx$ ന്യൂനസംഖ്യയായിരിക്കും. പരപ്പളവ് ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയല്ലാത്തതുകൊണ്ട് $\int_a^b f(x)\,dx$ ന്റെ കേവലവിലയായിരിക്കും പരപ്പളവ്.

അതായത് $A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$



ചിത്രം 8.3

ചിത്രം 8.4 ൽ കാണുന്നതുപോലെ വക്രത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗം x-അക്ഷത്തിനു മുകളിലും മറ്റൊരു ഭാഗം x- അക്ഷത്തിനു താഴെയും ആയാൽ $y = f(x)$ എന്ന വക്രം, x-അക്ഷം, $x = a$, $x = b$ എന്നിവ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $A = |A_1| + A_2$ ആണ്.



ചിത്രം 8.4

ഉദാഹരണം : 1

$x^2 + y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തം ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

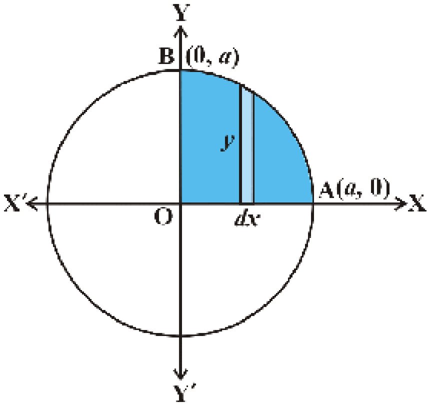
ചിത്രം 8.5 ൽ നിന്നും വൃത്തം ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

= 4 (AOBA എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്)

$= 4\int_0^a y\,dx$ (ലംബ സ്ട്രിപ്പുകൾ പരിഗണിച്ചാൽ)

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$



ചിത്രം 8.5

$$= 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right)-0\right] = 4\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi a^2$$

മറ്റൊരു രീതി

ചിത്രം 8.6 ൽ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള തിരശ്ചീന സ്ട്രിപ്പുകൾ പരിഗണിച്ചാൽ,

വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

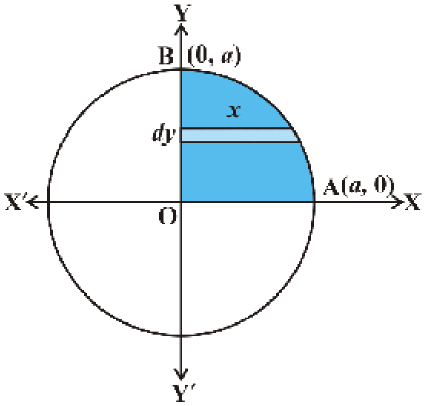
$$= 4\int_0^a x\,dy$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^a$$

$$= 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right)-0\right]$$

$$= 4\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2}=\pi a^2$$



ചിത്രം 8.6

ഉദാഹരണം : 2

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ എന്ന ന്യൂനവക്രം ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ചിത്രം 8.7 ൽ നിന്നും ന്യൂനവക്രം ഉൾക്കൊള്ളുന്ന പരപ്പളവ്

= 4 (വക്രം, x - അക്ഷം, $x = 0$, $x = a$ എന്നീ വരകളും ഉൾകൊള്ളുന്ന AOBA എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്)

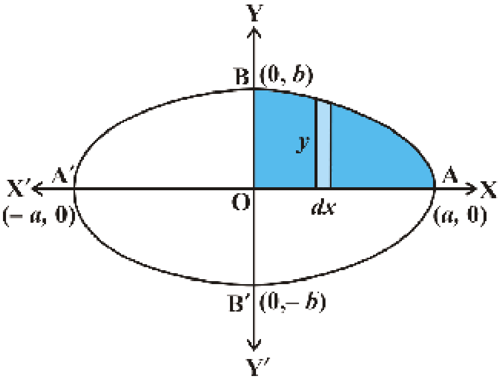
$$= 4\int_0^a y\,dx$$

$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\left(\frac{a}{2}\times 0+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right)-0\right]$$

$$= \frac{4b}{a}\,\frac{a^2}{2}\,\frac{\pi}{2}=\pi ab$$



ചിത്രം 8.7

മറ്റൊരു രീതി

ചിത്രം 8.8 ൽ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള തിരശ്ചീന സ്ട്രിപ്പുകൾ പരിഗണിച്ചാൽ,

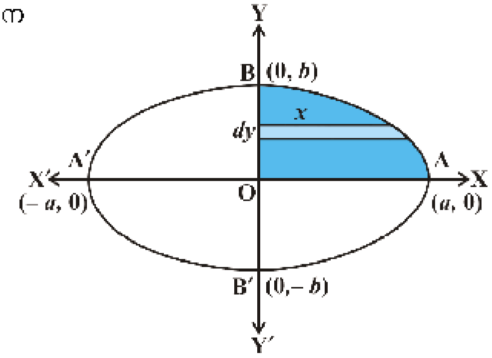


Fig 8.8

പരപ്പളവ്

$$= 4\int_0^b x\,dy$$

$$= 4\frac{a}{b}\int_0^b\sqrt{b^2-y^2}\,dy$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{b^2-y^2}+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{b}\right]_0^b$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\left(\frac{b}{2}\times 0+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}1\right)-0\right]$$

$$= \frac{4a}{b}\,\frac{b^2}{2}\,\frac{\pi}{2}=\pi ab$$

8.2.1 ഒരു വക്രവും ഒരു വരയും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

ഒരു വരയും വൃത്തവും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന പരപ്പളവ് ഒരു വരയും സമവക്രവും, ഉൾക്കൊള്ളുന്ന പരപ്പളവ്, ഒരു വരയും ന്യൂനവക്രവും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എന്നിവ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാമെന്ന് നോക്കാം.

ഉദാഹരണം : 3

$y = x^2$ എന്ന വക്രവും $y = 4$ എന്ന വരയും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

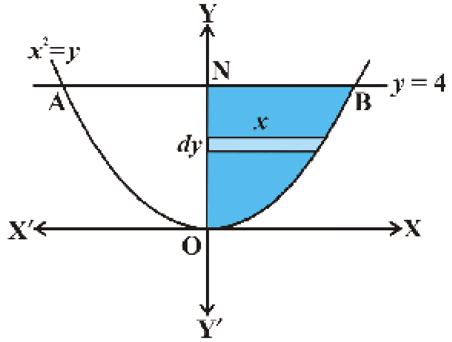
പരിഹാരം

$y = x^2$ എന്ന വക്രം y അക്ഷത്തിനു സമമിതമായ ഒരു സമവക്രമായതുകൊണ്ട് ചിത്രം 8.9 ൽ നിന്നും നമുക്കാവശ്യമായ AOBA എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$= 2\int_0^4 x dy$$

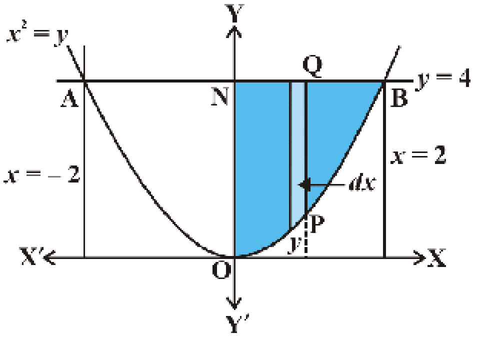
$$= 2\int_0^4 \sqrt{y} dy = 2 \times \frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{4}{3} \times 8 = \frac{32}{3}$$



ചിത്രം 8.9

ഇവിടെ ചിത്രം 8.9 ൽ സൂചിപ്പിച്ചതുപോലെ തിരശ്ചീനമായ സ്ട്രിപ്പുകളാണ് പരിഗണിച്ചത്.



ചിത്രം 8.10

ചിത്രം 8.10 ൽ ലംബമായ സ്ട്രിപ്പുകൾ പരിഗണിച്ചാൽ പരപ്പളവ് മറ്റൊരു രീതിയിലും കാണാം.

അതിനായി ആദ്യം നമുക്ക് $y = x^2$ എന്ന സമവക്രത്തിന്റെയും $y = 4$ എന്ന വരയുടെയും സംഗമബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

അതിനായി $y = 4$ എന്നത് $y = x^2$ ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$x^2 = 4$, എന്നും $x = \pm 2$ എന്നും ലഭിക്കും എങ്കിൽ സംഗമബിന്ദുക്കൾ (2, 4), (-2, 4) എന്നിവയായിരിക്കും.

AOBA എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$= \int_{-2}^{2} y dx,$$

[y = (Q ന്റെ y സൂചകം) – (P യുടെ y സൂചകം) = $4 - x^2$]

$$= 2\int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx$$

$$= 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

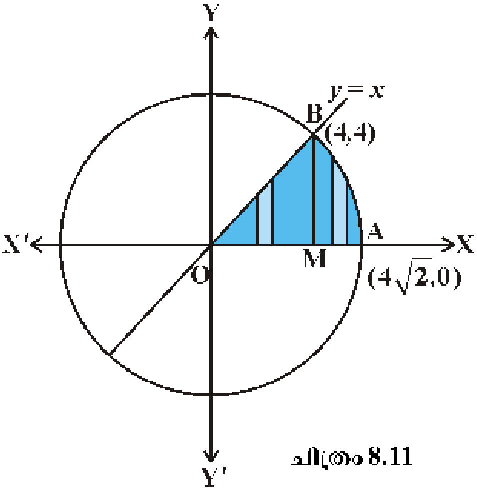
$$= 2\left[4\times2-\frac{8}{3}\right]$$

$$= \frac{32}{3}$$

> **കുറിപ്പ്**
>
> ലംബസ്ട്രിപ്പുകളോ അല്ലെങ്കിൽ തിരശ്ചീനസ്ട്രിപ്പുകളോ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണാം. എന്നാൽ സാധാരണ ലംബസ്ട്രിപ്പുകളാണ് കൂടുതലായി ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണം : 4

$y = x$ എന്ന വരയും $x^2 + y^2 = 32$ എന്ന വൃത്തവും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലെ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.



ചിത്രം 8.11

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ

$$y = x \ldots (1)$$

$$x^2 + y^2 = 32 \ldots (2)$$

പരിഗണിക്കുക.

(1)–ാമത്തെയും (2)–ാമത്തെയും സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ വരയും വൃത്തവും ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ B(4, 4) എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുന്നതു കാണാം. (ചിത്രം 8.11)

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും

ആവശ്യമായ പരപ്പളവ് = OBMO എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് + BMAB എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

OBMO എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$= \int_0^4 y\,dx$$

$$= \int_0^4 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^4 = 8 \quad \ldots (3)$$

> $x^2 + y^2 = 32$ എന്ന വൃത്തവും $y = x$ എന്ന വരയും വരയ്ക്കുക. വൃത്തം x അക്ഷവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു A യും വൃത്തവും വരയും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു B യും അടയാളപ്പെടുത്തുക. (ചിത്രം 8.11) Integral [x, 0, x(B)] എന്ന് നൽകിയാൽ OBMO എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവും Integral [Sqrt (32 - x^2), x(B), x(A)] എന്ന് നൽകിയാൽ BMAB എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവും ലഭിക്കും. ഇവയുടെ തുകയാണ് OBAO എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

BMAB എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= \int_4^{4\sqrt{2}} y\,dx$

$$= \int_4^{4\sqrt{2}} \sqrt{32 - x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{32 - x^2} + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{-1}\frac{x}{4\sqrt{2}}\right]_4^{4\sqrt{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}4\sqrt{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{-1}1\right) -$$

$$\left(\frac{4}{2}\sqrt{32-16} + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 8\pi - (8 + 4\pi) = 4\pi - 8 \ldots (4)$$

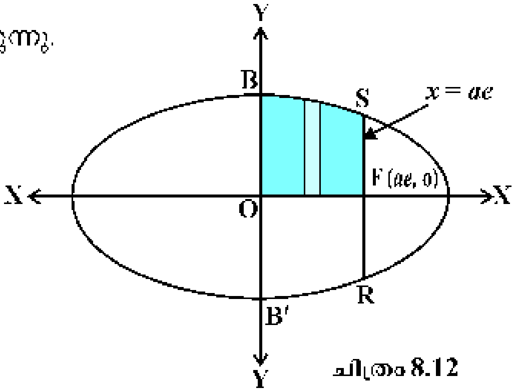
(3), (4) എന്നിവ തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ ആവശ്യമായ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $= 8 + 4\pi - 8 = 4\pi$ എന്ന് കിട്ടും.

ഉദാഹരണം : 5

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ എന്ന ന്യൂനവക്രവും $x = 0$, $x = ae$ എന്നീ വരകളും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഇവിടെ $b^2 = a^2(1 - e^2) \Rightarrow e < 1$ ആകുന്നു.

പരിഹാരം



ചിത്രം 8.12

ചിത്രം 8.12 ൽ നിന്നും നമുക്കാവശ്യമായ പരപ്പളവ് BOB′RFSB എന്ന ഭാഗത്തിന്റേതാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

BOB′RFSB എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$= 2\int_0^{ae} y\,dx = 2\frac{b}{a}\int_0^{ae}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{2b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^{ae}$$

$$= \frac{2b}{2a}\left[ae\sqrt{a^2 - a^2e^2} + a^2\sin^{-1}e\right] = ab\left[e\sqrt{1 - e^2} + \sin^{-1}e\right]$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 8.1

1. $y^2 = x$ എന്ന വക്രവും $x = 1$, $x = 4$ എന്നീ വരകളും x-അക്ഷവും നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
2. $y^2 = 9x$, $x = 2$, $x = 4$, x അക്ഷം എന്നിവ ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
3. $x^2 = 4y$, $y = 2$, $y = 4$, y അക്ഷം എന്നിവ ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
4. ന്യൂനവക്രം $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
5. ന്യൂനവക്രം $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
6. ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ x അക്ഷം, വര $x = \sqrt{3}\,y$, വൃത്തം $x^2 + y^2 = 4$ എന്ന വൃത്തം ഇവ നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
7. $x^2 + y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തത്തെ $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ എന്ന വര ഖണ്ഡിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
8. $x = y^2$, $x = 4$ എന്നിവ നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ $x = a$ എന്ന വര രണ്ടു തുല്യമായി ഭാഗിക്കുന്നു. എങ്കിൽ a യുടെ വിലയെന്ത്?
9. $y = x^2$; $y = |x|$ എന്നിവ നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
10. $x^2 = 4y$ വക്രം, വര $x = 4y - 2$ ഇവ നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവെന്ത്?
11. $y^2 = 4x$ വക്രം, വര $x = 3$ ഇവ നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 12, 13 എന്നിവയിൽ ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

12. ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ, $x^2 + y^2 = 4$ എന്ന വൃത്തവും, $x = 0$, $x = 2$ എന്നീ വരകളും കൂടി നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

(A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

13. വക്രം $y^2 = 4x$, y-അക്ഷം, വര $y = 3$ ഇവ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

(A) 2 (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{9}{3}$ (D) $\frac{9}{2}$

8.3 രണ്ട് വക്രങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

ഒരു ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ ആ ഭാഗത്തെ അനേകം ചെറിയ സ്ട്രിപ്പുകളായി വിഭജിച്ച് അവയുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാക്കി എഴുതുന്ന പ്രക്രിയയായിട്ടാണ് സമാകലനത്തെ ലൈബ്നിറ്റ്സ് കണ്ടെത്തിയത്. $y = f(x)$, $y = g(x)$, (ചിത്രം 8.13 ൽ കാണുന്നതു പോലെ) $[a, b]$ ൽ $f(x) \geq g(x)$ ആണ്). രണ്ട് വക്രങ്ങളുടെയും സംഗമ ബിന്ദുക്കളാണ് $x = a$, $x = b$.

മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ച വക്രങ്ങൾ നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ചിത്രം 8.13 ൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ലംബമായ സ്ട്രിപ്പ് പരിഗണിക്കുക. സ്ട്രിപ്പിന്റെ ഉയരം $f(x) - g(x)$, വീതി dx ആയിരിക്കും. എങ്കിൽ അടിസ്ഥാന പരപ്പളവ്

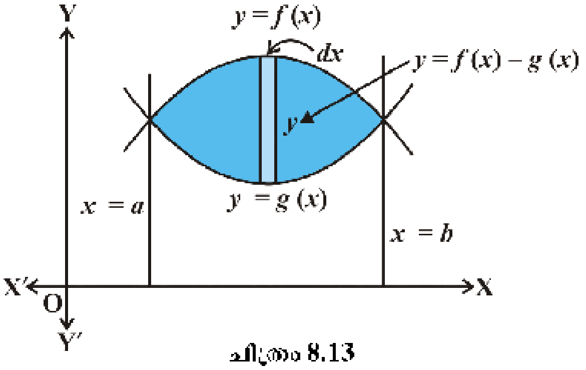
$dA = [f(x) - g(x)]\, dx$. അതുകൊണ്ട് ആകെ പരപ്പളവ് $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

മറ്റൊരു രീതിയിലും നമുക്ക് ഈ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാം.

A =[$y = f(x)$, x-അക്ഷം, $x = a$, $x = b$ എന്നീ വരകൾ എന്നിവ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന പരപ്പളവ്]

– [$y = g(x)$, x-അക്ഷം, $x = a$, $x = b$ എന്നീ വരകൾ എന്നിവ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന പരപ്പളവ്]

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$



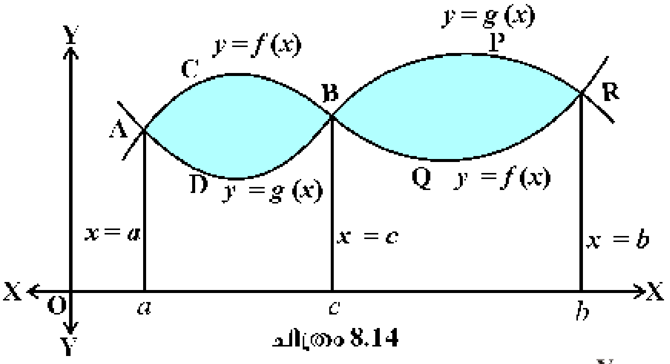
ചിത്രം 8.13

$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$, ഇവിടെ $[a,b]$ യിൽ $f(x) \geq g(x)$ ആയിരിക്കും.

ചിത്രം 8.14 ൽ കാണുന്നതുപോലെ $[a, c]$ യിൽ $f(x) \geq g(x)$, $[c, b]$ യിൽ $f(x) \leq g(x)$, ആണെങ്കിൽ ഈ രണ്ട് വക്രങ്ങളും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന പരപ്പളവ്

= ACBDA എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് + BPRQB എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് (ഇവിടെ $a < c < b$ ആയിരിക്കും).

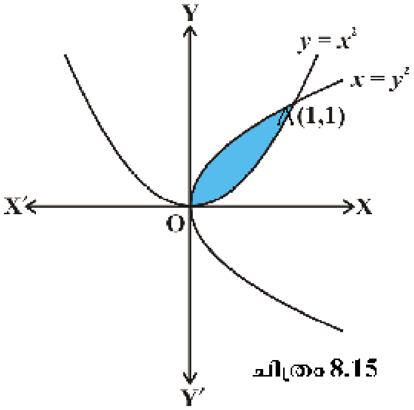
$$= \int_a^c [f(x)-g(x)]dx + \int_c^b [g(x)-f(x)]dx$$



ചിത്രം 8.14

ഉദാഹരണം : 6

$y = x^2, y^2 = x$ എന്നീ രണ്ടു സമവക്രങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.



ചിത്രം 8.15

പരിഹാരം

$y^2 = x \Rightarrow y = \sqrt{x} = f(x)$

$y = x^2 = g(x)$

രണ്ടു സമവക്രങ്ങളുടെയും സംഗമബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$(x^2)^2 = x, \qquad x^4 = x$$
$$x^4 - x = 0, \qquad x(x^3-1) = 0$$
$$x = 0, \qquad x = 1$$

$x = 0$ ആകുമ്പോൾ $y = 0$,

$x = 1$ ആയാൽ $y = 1$ സംഗമബിന്ദുക്കൾ O(0, 0), A(1, 1) എന്നിങ്ങനെ ലഭിക്കും.

$y \geq x^2 \wedge x \geq y^2$ എന്ന Input നൽകിയാൽ $y = x^2$, $x = y^2$ എന്നീ വക്രങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ഭാഗം ലഭിക്കും.

$y = x^2$, $x = y^2$ എന്നീ വക്രങ്ങൾ വരച്ച് അവയുടെ സംഗമബിന്ദുക്കൾ O, A ഇവ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Integral between [x^2, sqrt(x), x(O), x(A)] എന്ന് നൽകിയാൽ വക്രങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള പരപ്പളവ് ലഭിക്കും.

നിശ്ചിത പരപ്പളവ്

$$= \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^1 - \frac{\left[x^3\right]_0^1}{3}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

> *f*(*x*) = *sqrt*(16 − (*x* − 4) ^ 2), *g*(*x*) = *sqrt*(4*x*) എന്നീ നിർദേശങ്ങൾ നൽകി വക്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അവയുടെ സംഗമബിന്ദു P അടയാളപ്പെടുത്തുക (ചിത്രം8.16). Integral [g, 0, *x*(P)] എന്ന് നിർദേശം നൽകിയാൽ $y^2 = 4x$ എന്ന വക്രത്തിനടിയിലുള്ള പരപ്പളവും Integral [*f*, *x*(P) 8] എന്ന നിർദേശം നൽകിയാൽ വൃത്തഭാഗത്തിനിടയിലുള്ള പരപ്പളവും ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം : 7

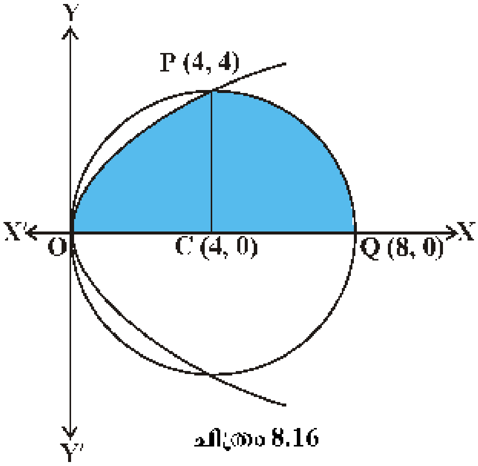
$x^2 + y^2 = 8x$ എന്ന വൃത്തവും $y^2 = 4x$ എന്ന സമവക്രവും x അക്ഷവും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $x^2 + y^2 = 8x$ പരിഗണിക്കുക. ഈ സമവാക്യത്തെ

$(x - 4)^2 + y^2 = 16$ എന്നെഴുതാം.

വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം (4, 0), ആരം 4 ആണ്. വൃത്തത്തിന്റെയും $y^2 = 4x$ എന്ന സമവക്രത്തിന്റെയും സംഗമബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കാം. അതിന്



ചിത്രം 8.16

$y^2 = 4x$ എന്നത് വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യത്തിൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$x^2 + 4x = 8x$$
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x - 4) = 0$$
$$x = 0, x = 4$$

അതുകൊണ്ട് സംഗമബിന്ദുക്കൾ O(0, 0), P(4, 4) എന്നിവയായിരിക്കും. ചിത്രം 8.16 ൽ നിന്നും നമുക്കാവശ്യമുള്ള പരപ്പളവ് = OPQCO എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

= OCPO യുടെ പരപ്പളവ് + PCQP യുടെ പരപ്പളവ്

$$= \int_0^4 y\,dx + \int_4^8 y\,dx$$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx + \int_4^8 \sqrt{4^2 - (x-4)^2}\,dx$$

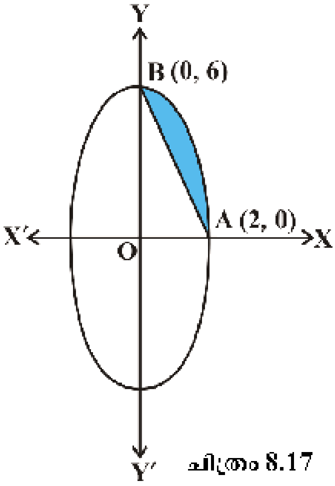
$$= 2\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 + \left[\frac{(x-4)}{2}\sqrt{4^2-(x-4)^2}+\frac{4^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{(x-4)}{4}\right)\right]_4^8$$

$$= \frac{4}{3}\times 8 + \left[\frac{4}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 4^2\times\sin^{-1}(1)\right]$$

$$\frac{32}{3}+8\times\frac{\pi}{2}=\frac{32}{3}+4\pi=\frac{4}{3}(8+3\pi)$$

ഉദാഹരണം : 8

ചിത്രം 8.17 ൽ AOBA എന്നത് $9x^2 + y^2 = 36$ എന്ന ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലെ ഒരു ഭാഗമാണ്. കൂടാതെ OA = 2, OB = 6 ആകുന്നു. ചാപം AB യും ഞാൺ AB യും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.



ചിത്രം 8.17

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന $9x^2 + y^2 = 36$ എന്ന ന്യൂനവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യത്തെ നമുക്ക് $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$ എന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം. അതായത് $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

അതുകൊണ്ട് A(2, 0), B(0, 6) എന്നി ബിന്ദുക്കളായിരിക്കും.

AB എന്ന ഞാണിന്റെ സമവാക്യം

$$y - 0 = \frac{6-0}{0-2}(x-2)$$

$$y = -3(x-2)$$

അതായത്

$$y = -3x + 6 \text{ ആയിരിക്കും.}$$

നിശ്ചിത ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$= 3\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx - \int_0^2(6-3x)\,dx$$

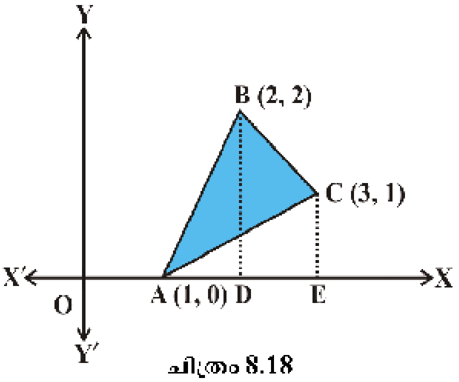
$$= 3\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 - \left[6x-\frac{3x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= 3\left[\frac{2}{2}\times 0+2\sin^{-1}(1)\right]-\left[12-\frac{12}{2}\right]$$

$$= 3\times 2\times\frac{\pi}{2}-6 = 3\pi-6$$

ഉദാഹരണം : 9

(1, 0), (2, 2), (3, 1) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ മൂലകളായി വരുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് സമാകലനമുപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.



ചിത്രം 8.18

പരിഹാരം

A(1, 0), B(2, 2), C(3, 1) എന്നിവയാണ് ത്രികോണം ABC യുടെ മൂലകൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ത്രികോണം ABC യുടെ പരപ്പളവ്

= ത്രികോണം ABD യുടെ പരപ്പളവ് + ലംബകം BDEC യുടെ പരപ്പളവ് – ത്രികോണം AEC യുടെ പരപ്പളവ്.

AB, BC, CA എന്നീ വശങ്ങളുടെ സമവാക്യം യഥാക്രമം

$y = 2(x-1)$, $y = 4-x$, $y = \frac{1}{2}(x-1)$ എന്നിങ്ങനെയായിരിക്കും

അതുകൊണ്ട് ത്രികോണം ABC യുടെ പരപ്പളവ്

$$= \int_1^2 2(x-1)\,dx+\int_2^3(4-x)\,dx-\int_1^3\frac{x-1}{2}\,dx$$

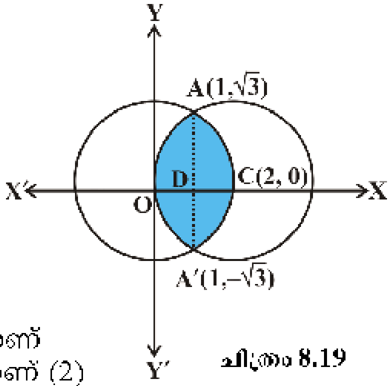
$$= 2\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2+\left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_2^3-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3$$

$$=2\left[\left(\frac{2^2}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]+\left[\left(4\times3-\frac{3^2}{2}\right)-\left(4\times2-\frac{2^2}{2}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^2}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2}$$

ഉദാഹരണം : 10

$x^2 + y^2 = 4$, $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ എന്നീ വൃത്തങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.



ചിത്രം 8.19

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad \text{.. (1)}$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4 \qquad \text{... (2)}$$

കേന്ദ്രം (0, 0) യും ആരം 2 യൂണിറ്റുമായ വൃത്തമാണ് (1), കേന്ദ്രം (2, 0), ആരം 2 യൂണിറ്റുമായ വൃത്തമാണ് (2)

(1) ന്റെയും (2) ന്റെയും പരിഹാരം കണ്ടാൽ

$$(x - 2)^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2$$

$$x = 1 \text{ ആയാൽ } y = \pm\sqrt{3}$$

അതുകൊണ്ട്

(1), (2) എന്നീ വൃത്തങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദുക്കൾ $A(1, \sqrt{3})$, $A'(1, -\sqrt{3})$ എന്നിവ ആയിരിക്കും.

ചിത്രം 8.19 ൽ നിന്നും, നിർദിഷ്ടഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

= OACA′O എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

= 2 [ODCAO എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്]

= 2 [ODAO എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് + DCAD എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്]

$$= 2\left[\int_0^1 y\,dx + \int_1^2 y\,dx\right]$$

$$= 2\left[\int_0^1 \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx\right] \qquad \text{(എന്തുകൊണ്ട്?)}$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2} + \frac{1}{2}\times 4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_0^1$$

$$+ 2\left[\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2}\times 4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2} + 4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_0^1 + \left[x\sqrt{4-x^2} + 4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[\left(-\sqrt{3}+4\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right) - 4\sin^{-1}(-1)\right] + \left[4\sin^{-1}1 - \sqrt{3} - 4\sin^{-1}\frac{1}{2}\right]$$

$$= \left[\left(-\sqrt{3} - 4\times\frac{\pi}{6}\right) + 4\times\frac{\pi}{2}\right] + \left[4\times\frac{\pi}{2} - \sqrt{3} - 4\times\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \left(-\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) + \left(2\pi - \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 8.2

1. സമവക്രം $x^2 = 4y$, വൃത്തം $4x^2 + 4y^2 = 9$ എന്നിവ നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
2. വക്രങ്ങൾ $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$ എന്നിവ നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
3. $y = x^2 + 2$ എന്ന വക്രവും, $y = x$, $x = 0$, $x = 3$ എന്നീ വരകളും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
4. $(-1, 0)$, $(1, 3)$, $(3, 2)$ എന്നിവ മൂലകളായി വരുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് സമാകലനമുപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തുക.
5. $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$, $x = 4$ എന്നിവ വശങ്ങളായി വരുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന 6, 7 എന്നീ പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങളുടെ ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക

6. $x^2 + y^2 = 4$ എന്ന വൃത്തവും $x + y = 2$ എന്ന വരയും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

   (A) $2(\pi - 2)$ (B) $\pi - 2$ (C) $2\pi - 1$ (D) $2(\pi + 2)$

7. $y^2 = 4x$ എന്ന സമവക്രവും $y = 2x$ എന്ന വരയും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

   (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 11

$y^2 = 4ax$ എന്ന സമവക്രവും അതിന്റെ ലാറ്റസ്റെക്ടവും നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും, $y^2 = 4ax$ എന്ന സമവക്രത്തിന്റെ ശീർഷം (0, 0). ലാറ്റസ്റെക്ടം LSL' ന്റെ സമവാക്യം $x = a$. കൂടാതെ സമവക്രം x അക്ഷത്തിന് സമമിതവുമാണ്.

അതുകൊണ്ട് നിശ്ചിത പരപ്പളവ്

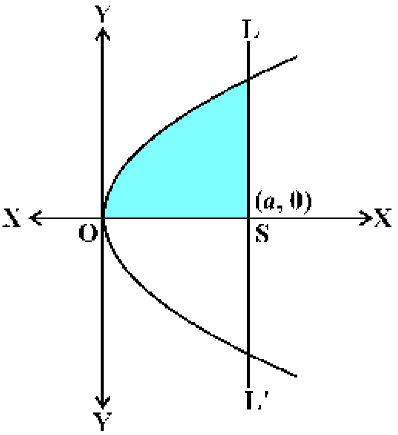
$$= 2\,(\text{OLSO യുടെ പരപ്പളവ്})$$

$$= 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a \sqrt{4ax}\,dx$$

$$= 2\times 2\sqrt{a}\int_0^a \sqrt{x}\,dx$$

$$= 4\sqrt{a}\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{a}\left[a^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{3}a^2$$



ചിത്രം 8.20

ഉദാഹരണം : 12

$y = 3x + 2$ എന്ന വര, x അക്ഷം, $x = -1$, $x = 1$ എന്നീ വരകൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

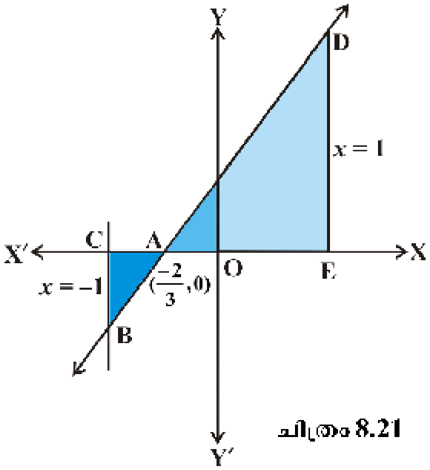
$y = 3x + 2$ എന്ന വര, x അക്ഷത്തെ $\left(\frac{-2}{3}, 0\right)$ എന്ന ബിന്ദുവിലും $x = -1$ എന്ന വരയെ $(-1, -1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലും ഖണ്ഡിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് നിശ്ചിത പരപ്പളവ് x അക്ഷത്തിന്റെ ചുവടെ $x = -1$ മുതൽ $x = \frac{-2}{3}$ വരെയും x അക്ഷത്തിന് മുകളിൽ $x = \frac{-2}{3}$ മുതൽ $x = 1$ വരെയും ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട് നിശ്ചിത പരപ്പളവ് = ACBA യുടെ പരപ്പളവ് + ADEA യുടെ പരപ്പളവ്

$$= \left|\int_{-1}^{\frac{-2}{3}} (3x+2)dx\right| + \int_{\frac{-2}{3}}^{1} (3x+2)dx$$

$$= \left|\left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{\frac{-2}{3}}\right| + \left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{\frac{-2}{3}}^{1}$$

$$= \frac{1}{6}+\frac{25}{6} = \frac{13}{3}$$



ചിത്രം 8.21

ഉദാഹരണം : 13

$y = \cos x$ എന്ന വക്രവും $x = 0$, $x = 2\pi$ എന്നീ വരകളും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

പരിഹാരം

ചിത്രം 8.22 പരിഗണിച്ചാൽ ആവശ്യമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

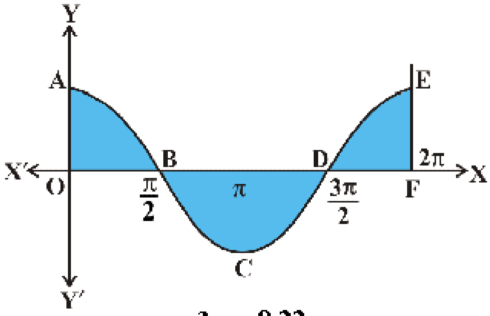
= OABO യുടെ പരപ്പളവ് + BCDB യുടെ പരപ്പളവ് + DEFD യുടെ പരപ്പളവ്

സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച്,

$$\text{നിശ്ചിത പരപ്പളവ്} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx\right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\,dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left|[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right| + [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= 1 + 2 + 1 = 4$$



ചിത്രം 8.22

മറ്റൊരു രീതിയിൽ

$y = \cos x$ എന്നത് x അക്ഷത്തിന് സമമിതമാണ്. അതുകൊണ്ട്

$$\text{നിശ്ചിത പരപ്പളവ്} = 4 \times \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$$

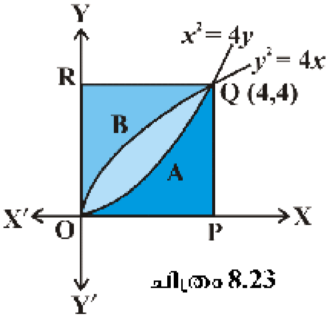
$$= 4 \times 1$$

$$= 4$$

> $y = |\cos x|$ എന്ന വക്രവും $x = 0$, $x = 2\pi$ എന്നീ വരകളും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ലഭിക്കാൻ Integral [abs(cos (x)), 0, 2π] എന്ന് നൽകിനോക്കൂ. Integral [cos (x), 0, 2π] എന്ന് നൽകിയാൽ എന്താണ് ലഭിക്കുന്നത്. എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇങ്ങനെ ലഭിക്കുന്നത്?

ഉദാഹരണം : 14

$y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ എന്നീ വക്രങ്ങൾ $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$, $y = 0$ എന്നീ വരകൾ നിർണയിക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ മൂന്ന് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു എന്ന് സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.



ചിത്രം 8.23

പരിഹാരം

$y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ എന്നീ സമവക്രങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദുക്കളാണ് (0, 0), (4, 4) (ചിത്രം 8.23 കാണുക).
ചിത്രം 8.23ൽ നിന്നും OAQBO യുടെ പരപ്പളവ്

$$= \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx$$

$$= \left[2 \times \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3} \quad \dots (1)$$

OPQAO എന്ന ഭാഗം $x^2 = 4y$, $x = 0$, $x = 4$, x അക്ഷം ഇവ നിർണയിക്കുന്നതാണ്

$$\text{പരപ്പളവ്} = \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{12}\left[x^3\right]_0^4 = \frac{16}{3} \quad \dots (2)$$

OBQRO എന്ന ഭാഗം $y^2 = 4x$, y അക്ഷം, $y = 0$, $y = 4$ ഇവ നിർണയിക്കുന്നതാണല്ലോ.

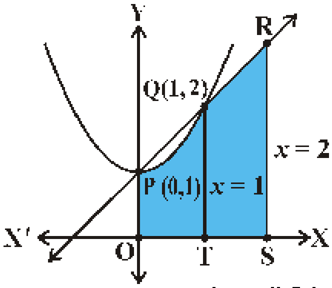
$$\text{പരപ്പളവ്} = \int_0^4 x\,dy = \int_0^4 \frac{y^2}{4}\,dy = \frac{1}{12}\left[y^3\right]_0^4 = \frac{16}{3} \quad \dots (3)$$

സമവാക്യങ്ങൾ (1), (2), (3) ഇവയിൽ നിന്നും OAQBO യുടെ പരപ്പളവ് = OPQAO യുടെ പരപ്പളവ് = OBQRO യുടെ പരപ്പളവ് എന്ന് ലഭിക്കും. അതായത് $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ എന്നീ സമവക്രങ്ങൾ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ മൂന്ന് തുല്യ ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 15

$\{(x, y) : 0 \le y \le x^2 + 1, 0 \le y \le x + 1, 0 \le x \le 2\}$ എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം



ചിത്രം 8.24

$$A_1 = \{(x, y) : 0 \le y \le x^2 + 1\},$$
$$A_2 = \{(x, y) : 0 \le y \le x + 1\}$$
$$A_3 = \{(x, y) : 0 \le x \le 2\}$$

$y = x^2 + 1$ ന്റെയും $y = x + 1$ ന്റെയും സംഗമബിന്ദുക്കൾ P(0, 1), Q(1, 2) ആണല്ലോ. OPQRSTO യുടെ പരപ്പളവ്

= OTQPO ന്റെ പരപ്പളവ് + TSRQT യുടെ പരപ്പളവ്

$$= \int_0^1 (x^2+1)\,dx + \int_1^2 (x+1)\,dx$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right]_0^1 + \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right]_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3}+1\right)-0\right] + \left[(2+2)-\left(\frac{1}{2}+1\right)\right] = \frac{23}{6}$$

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന വക്രങ്ങളും വരകളും നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.
   (i) $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$, x അക്ഷം
   (ii) $y = x^4$, $x = 1$, $x = 5$, x അക്ഷം
2. $y = x$, $y = x^2$ എന്നീ രണ്ട് വക്രങ്ങൾക്കുമിടയിലുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

3. ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലുള്ളതും $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 4$ എന്നീ വക്രങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നതുമായ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

4. $y = |x+3|$ യുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. $\int_{-6}^{0}|x+3|\,dx$ കാണുക.

5. $y = \sin x$ എന്ന വക്രത്തിനും $x = 0$, $x = 2\pi$ എന്നീ വരകൾക്കുമിടയിലുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

6. $y^2 = 4ax$ എന്ന സമവക്രവും $y = mx$ എന്ന വരയും നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

7. $4y = 3x^2$ എന്ന സമവക്രവും $2y = 3x + 12$ എന്ന വരയും നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

8. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ എന്ന ന്യൂനവക്രവും $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ എന്ന വരയുടെയും ഇടയിലുള്ള ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ എന്ന ന്യൂനവക്രവും $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ എന്ന വരയുടെയും ഇടയിലുള്ള ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

10. $x^2 = y$, എന്ന സമവക്രവും $y = x + 2$ എന്ന വരയും x- അക്ഷവും നിർണ്ണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

11. സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് $|x|+|y|=1$ എന്ന വക്രം നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

    [സൂചന: $x+y=1$, $x-y=1$, $-x+y=1$, $-x-y=1$ എന്നീ വരകൾ നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗം].

12. $\{(x, y) : y \geq x^2,\ y = |x|\}$ എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

13. ത്രികോണം ABC യുടെ മൂലകളാണ് A(2, 0), B (4, 5), C (6, 3) എങ്കിൽ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

14. സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് $2x + y = 4$, $3x - 2y = 6$, $x - 3y + 5 = 0$ എന്നീ വരകൾ നിർണയിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

15. $\{(x, y) : y^2 \leq 4x,\ 4x^2 + 4y^2 \leq 9\}$ എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

16 മുതൽ 20 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

16. $y = x^3$, x-അക്ഷം, $x = -2$, $x = 1$ ഇവ നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

(A) -9 (B) $\frac{-15}{4}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{17}{4}$

17. $y = x\,|x|$, x-അക്ഷം, $x = -1$, $x = 1$ എന്നിവ നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

[സൂചന : $x > 0$ ആയാൽ $y = x^2$, $x < 0$ ആയാൽ $y = -x^2$].

18. $x^2 + y^2 = 16$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ഉള്ളിലായും $y^2 = 6x$, എന്ന സമവക്രത്തിന്റെ ബാഹ്യമായും വരുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

(A) $\frac{4}{3}(4\pi - \sqrt{3})$ (B) $\frac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})$ (C) $\frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$ (D) $\frac{4}{3}(8\pi + \sqrt{3})$

19. y അക്ഷം, $y = \cos x$, $y = \sin x$ കൂടാതെ $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ആയ ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

(A) $2(\sqrt{2} - 1)$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2} + 1$ (D) $\sqrt{2}$

സംഗ്രഹം

- $y = f(x)$, x-അക്ഷം കൂടാതെ $x = a$, $y = b$ എന്നീ വരകൾ നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$
- $x = \phi(y)$, y-അക്ഷം, കൂടാതെ $y = c$, $y = d$ എന്നീ വരകൾ നിർണയിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\int_c^d x\,dy = \int_c^d \phi(y)\,dy$.
- $y = f(x)$, $y = g(x)$ എന്നീ വക്രങ്ങൾക്കും കൂടാതെ, $x = a$, $x = b$ എന്നീ വരകൾക്കിടയിലുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

  $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$, ഇവിടെ $f(x) \ge g(x)$; $x \in [a, b]$

- $[a, c]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ $f(x) \geq g(x)$ ആകുകയും $[c, b]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ $f(x) \leq g(x)$ ആകുകയും ചെയ്താൽ ഈ വക്രങ്ങൾക്കിടയിൽ $a < c < b$, എന്ന ഇടവേളയിലെ പരപ്പളവ്

$$\int_a^c [f(x)-g(x)]dx + \int_c^b [g(x)-f(x)]dx$$

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

സമാകലജകലനത്തിന്റെ ഉറവിടത്തിന് ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ പുരോഗതിയുടെ കാലത്തോളം പഴക്കമുണ്ട്. അതായത് പുരാതന ഗ്രീക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർ വികസിപ്പിച്ച ശോഷണ മാർഗ (method of exhaustion)വുമായി ഇതിന് ബന്ധമുണ്ട്. ഈ മാർഗ്ഗം പ്രധാനമായും ഉയർന്നുവന്നത് ഒരു തലത്തിലെ രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ്, ഘനരൂപങ്ങളുടെ ഉപരിതല പരപ്പളവ് കൂടാതെ വ്യാപ്തി എന്നിവ കണ്ടെത്തുന്നതിലൂടെയാണ്. ഈ അർത്ഥത്തിൽ ശോഷണ മാർഗത്തെ സമാകലന മാർഗമായി വ്യാഖ്യാനിക്കാം. ശോഷണ മാർഗത്തിന്റെ പുരോഗതിയുടെ ആദ്യകാലഘട്ടത്തിലെ സംഭാവനകൾ ഇഡോക്സസി (Eudoxus (440 B.C.)) ന്റെയും ആർക്കിമെഡീസിന്റെ (Archimedes (300 B.C.)) യും കണ്ടെത്തലുകളാണ്.

17-ാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ് കലനപ്രമാണത്തിലേക്ക് ചിട്ടയായ സമീപനം ഉണ്ടായത്. 1665 ൽ ന്യൂട്ടൻ കലനത്തെ കുറിച്ച് പഠനം നടത്തുകയും പ്രവാഹപ്രമാണം (theory of fluxion) കണ്ടെത്തുകയും ഇത് ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വക്രത്തിലെ പൊതു ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയും വക്രതല ആരം (Radius of curvature) കാണുകയും ചെയ്തു. പ്രതിലോമ ഏകദത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന എതിർ അവകലനം അഥവാ തൊടുവരയുടെ വിപരീത മാർഗം അവതരിപ്പിച്ചത് ന്യൂട്ടനാണ്.

1684 - 86 കാലഘട്ടത്തിൽ ലൈബ്നിറ്റ്സ് അക്റ്റാ എറുഡിതോറിയം (Acta Eruditorum) എന്ന ലേഖനം പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു. അദ്ദേഹം ഇതിനെ കാൽക്കുലസ് സമ്മെറ്റോറിയസ് (Calculum Summatorius) എന്നാണ് വിളിച്ചിരുന്നത്. കാരണം ഇതിൽ അദ്ദേഹം പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട ഭാഗത്തെ അനന്തമായ ചെറിയ ഭാഗങ്ങളായി മുറിച്ച് ഇവയുടെ ഓരോന്നിന്റെയും പരപ്പളവിന്റെ തുകയാണ് ആകെയുള്ള പരപ്പളവ് എന്നു പരാമർശിക്കുകയും ഈ തുകയെ '∫' എന്ന ചിഹ്നം കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുകയും ചെയ്തു. 1696-ൽ ജെ. ബർണൂളിയുടെ അഭിപ്രായപ്രകാരം ഈ ലേഖനത്തിന്റെ പേര് കാൽക്കുലസ് ഇന്റഗ്രലി (Calculus integrali) എന്നു മാറ്റി. ഇതിന് ന്യൂട്ടന്റെ തൊടുവരയുടെ വിപരീത മാർഗവുമായി സാദൃശ്യം ഉണ്ട്.

ന്യൂട്ടനും ലൈബനിറ്റ്സും തികച്ചും സ്വതന്ത്രമായ വഴികളിലൂടെ സഞ്ചരിച്ചതുകൊണ്ട് മൗലികമായ വ്യത്യസ്തതകൾ പുലർത്തിയിരുന്നു. എന്നിരുന്നാലും തങ്ങളുടെ സിദ്ധാന്തങ്ങളിലൂടെ സഫലമാക്കുന്ന പരിണതഫലങ്ങൾ പ്രയോഗത്തിൽ താദാത്മ്യം പുലർത്തിയിരുന്നു. ലെബനിറ്റ്സ് നിശ്ചിത സമാകലജം എന്ന ആശയം ഉപയോഗിക്കുകയും ഇതിലൂടെ ആദ്യമായി എതിർ അവകലജവും നിശ്ചിത സമാകലജവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെക്കുറിച്ച് ഗുണനിരൂപണം നടത്തുകയും ചെയ്തു.

സമാകലജകലന പ്രമാണങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങളും പ്രാഥമികമായി അവകലജകലനവുമായുള്ള ബന്ധത്തെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിന്റെ വളർച്ച ഫെർമാ, ന്യൂട്ടൻ, ലെബനിറ്റ്സ് എന്നിവരുടെ അദ്ധ്വാനഫലമായി 17-ാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ അവസാന കാലഘട്ടങ്ങളിൽ നടന്നു. എന്നിരുന്നാലും സീമകളുടെ ആശയങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഇവക്ക് ന്യായീകരണം നൽകിയത് A. I. കോഷിയുടെ പഠനങ്ങളിലൂടെ 19-ാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ അവസാന കാലഘട്ടത്തിലാണ്. അവസാനമായി ലീ സോഫിയുടെ (Lie Sophie's) ഉദ്ധരണി ഇവിടെ പ്രാധാന്യം അർഹിക്കുന്നു. "വേണമെങ്കിൽ ഇങ്ങനെ പറയാം അവകലനം സമാകലനം എന്നീ ആശയങ്ങളുടെ ഉത്പത്തി ആർക്കമെഡീസിന്റെ കാലം മുതൽക്കാണെങ്കിലും ശാസ്ത്രത്തിലേക്ക് ഇവയുടെ പ്രവേശനം കെപ്ലർ, ദെക്കാർത്തെ, കവാലറി, ഫെർമ, വാൽസ് എന്നിവരുടെ അന്വേഷണാത്മകമായ കണ്ടെത്തലുകൾക്കൊടുവിലാണ്. അവകലനവും സമാകലനവും വിപരീത പ്രക്രിയകളാണെന്നുള്ള ആശയത്തിന്റെ ഉപജ്ഞാതാക്കൾ ന്യൂട്ടനും, ലെബനിറ്റ്സുമാണ്.

Y7Z7H5

അധ്യായം 9

അവകലജ സമവാക്യങ്ങൾ
(DIFFERENTIAL EQUATIONS)

❖ "വ്യക്തമായ ഒരു പ്രശ്നം മനസ്സിലില്ലാതെ പരിഹാര മാർഗങ്ങൾ തേടുന്നയാൾ വിഫലശ്രമമാണു നടത്തുന്നത്." - ഡി. ഹിൽബർട് ❖

9.1 ആമുഖം

ഹെൻട്രി പോയിൻകാരെ
(1854-1912)

f എന്ന ഒരു ഏകദത്തിന്റെ അവകലജം സ്വതന്ത്ര ചരത്തെ ആധാരമാക്കി കാണുന്നതിനു നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതായത്, തന്നിരിക്കുന്ന f എന്ന ഏകദത്തിന്റെ $f'(x)$ മണ്ഡലത്തിലെ ഓരോ x നും എങ്ങനെ കാണാം എന്നും നാം പഠിച്ചു. കൂടാതെ സമാകലനം എന്ന അധ്യായത്തിൽ അവകലജം g ആയി വരുന്ന f എന്ന ഏകദം കാണുന്ന രീതിയും ചർച്ച ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. അതായത്, $g(x)$ എന്ന ഏകദം തന്നിരുന്നാൽ, $y = f(x)$ എന്ന ഏകദം

$\frac{dy}{dx} = g(x)$ എന്ന രൂപത്തിൽ കാണാനറിയാം.

$\frac{dy}{dx} = g(x)$ ന്റെ രൂപത്തിലുള്ള സമവാക്യങ്ങളെ അവകലജ സമവാക്യങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു.

ഭൗതികശാസ്ത്രം, രസതന്ത്രം, ജീവശാസ്ത്രം, നരവംശശാസ്ത്രം, ഭൂഗർഭശാസ്ത്രം, സാമ്പത്തികശാസ്ത്രം തുടങ്ങി പല ശാസ്ത്രശാഖകളിലും അവകലജ സമവാക്യങ്ങൾ കാണാൻ കഴിയും. ആധുനിക കാലഘട്ടത്തിലെ ശാസ്ത്ര കണ്ടെത്തലുകളിൽ നിർണായക സ്ഥാനമാണ് അവകലജ സമവാക്യങ്ങൾക്കുള്ളത്.

ഈ അധ്യായത്തിൽ അവകലജ സമവാക്യങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതു, പ്രത്യേക പരിഹാരങ്ങൾ, അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ രൂപീകരണം, ക്രമവും കൃതിയും ഒന്ന് വരുന്ന അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കാണുന്നതിനുള്ള വിവിധ മാർഗങ്ങൾ, അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ വ്യത്യസ്തമേഖലകളിലുള്ള പ്രയോഗങ്ങൾ എന്നിവ ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

9.2 അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \quad \dots (1)$$
$$\sin x + \cos x = 0 \dots (2)$$
$$x + y = 7 \dots (3)$$

എന്നീ തരത്തിലുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ നമുക്ക് പരിചയമുള്ളതാണ്.

$x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ ... (4) പരിഗണിക്കുക.

(1), (2), (3)എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾ സ്വതന്ത്രചരവും ആശ്രിത ചരവും മാത്രം ഉൾപ്പെട്ടതാണ്. പക്ഷേ സമവാക്യം (4) ൽ ചരങ്ങളും ആശ്രിതചരമായ y യുടെ x ആധാരമാക്കിയുള്ള അവകലജവും ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. ഇത്തരത്തിലുള്ള സമവാക്യങ്ങളെയാണ് അവകലജ സമവാക്യങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നത്.

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ സ്വതന്ത്രചരത്തെ (ചരങ്ങളെ) ആധാരമാക്കിയുള്ള ആശ്രിത ചരത്തിന്റെ അവകലജം (അവകലജങ്ങൾ) ഉൾപ്പെടുന്ന സമവാക്യത്തെയാണ് അവകലജ സമവാക്യം എന്നു പറയുന്നത്.

ആശ്രിതചരത്തിന്റെ അവകലജം ഒരു സ്വതന്ത്രചരത്തെ മാത്രം ആധാരമാക്കിയുള്ളതാണെങ്കിൽ അത്തരം സമവാക്യത്തെ സാധാരണ അവകലജ സമവാക്യം എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന് $\qquad 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \quad \dots (5)$

ഒരു സാധാരണ അവകലജ സമവാക്യമാണ്.

ഒന്നിൽ കൂടുതൽ സ്വതന്ത്രചരത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള അവകലജങ്ങൾ ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുള്ള അവകലജ സമവാക്യത്തെ ഭാഗിക അവകലജ സമവാക്യം എന്നു പറയുന്നു. ഈ അധ്യായത്തിൽ നമ്മൾ സാധാരണ അവകലജ സമവാക്യങ്ങൾ മാത്രമേ പരിഗണിക്കുന്നുള്ളൂ. തുടർന്നുള്ള ചർച്ചകളിൽ സാധാരണ അവകലജ സമവാക്യത്തിന് പകരം അവകലജ സമവാക്യം എന്നു മാത്രം ഉപയോഗിക്കാം.

കുറിപ്പ്

1. അവകലജത്തിന് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സൂചകങ്ങളും ഉപയോഗിക്കാം

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

2. n ക്രമത്തിലുള്ള അവകലജം $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ നെ സൂചിപ്പിക്കാൻ നമുക്ക് y_n ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

9.2.1. ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം (Order of a Differential Equation)

ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിൽ ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു സ്വതന്ത്രചരത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ആശ്രിത ചരത്തിന്റെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന അവകലജത്തിന്റെ ക്രമത്തെയാണ് ആ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം എന്നു പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണത്തിന് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അവകലജ സമവാക്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

$$\frac{dy}{dx} = e^x \ \ldots (6)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \ \ldots (7)$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 0 \ \ldots (8)$$

(6), (7), (8) എന്നീ അവകലജ സമവാക്യങ്ങളിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന ഉയർന്ന അവകലജത്തിന്റെ ക്രമം യഥാക്രമം, ഒന്ന്, രണ്ട്, മൂന്ന് എന്നിങ്ങനെയാണ്. അതുകൊണ്ട് ഈ അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ ക്രമം യഥാക്രമം 1, 2, 3 എന്നിങ്ങനെയാണ്.

9.2.2 ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ കൃതി (Degree of a Differential Equation)

ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ കൃതി നിർവചിക്കുന്നതിന് വേണ്ട പ്രധാനപ്പെട്ട വസ്തുത അവകലജ സമവാക്യത്തിലെ അവകലജങ്ങളെല്ലാം y', y'', y''' ബഹുപദ രൂപത്തിലായിരിക്കണം എന്നതാണ്. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അവകലജ സമവാക്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx} + y = 0 \ \ldots (9)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right) - \sin^2 y = 0 \ \ldots (10)$$

$$\frac{dy}{dx} + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \ \ldots (11)$$

സമവാക്യം(9) y''', y'', y', എന്നിവയുടെ ഒരു ബഹുപദസമവാക്യമാണ്, സമവാക്യം (10) y' ന്റെ ഒരു ബഹുപദ സമവാക്യമാണ്. ഇത്തരം സമവാക്യങ്ങളുടെ കൃതി നിർവചിക്കാൻ കഴിയും. എന്നാൽ സമവാക്യം (11) y' ലുള്ള ഒരു ബഹുപദസമവാക്യമല്ല അതുകൊണ്ട് തന്നെ ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ കൃതി നിർവചിക്കാൻ കഴിയില്ല.

അവകലജങ്ങളെല്ലാം ബഹുപദരൂപത്തിലാണെങ്കിൽ ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ കൃതി എന്നത് ആ സമവാക്യത്തിലെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന ക്രമമുള്ള അവകലജത്തിന്റെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന കൃതി(അധിസംഖ്യ)യായിരിക്കും.

(6), (7), (8), (9) എന്നീ അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെയും കൃതി 1 ആണ്. സമവാക്യം (10) ന്റെ കൃതി 2. സമവാക്യം (11) ന്റെ കൃതി നിർവചിക്കാൻ കഴിയില്ല.

കുറിപ്പ്

ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമവും, കൃതിയും എപ്പോഴും അധിപൂർണ സംഖ്യകളായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 1

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെയും ക്രമവും, കൃതിയും (നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ) എഴുതുക.

(i) $\frac{dy}{dx} - \cos x = 0$ (ii) $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $y''' + y^2 + e^{y'} = 0$

പരിഹാരം

(i) സമവാക്യത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന ഏറ്റവും ഉയർന്ന ക്രമമുള്ള അവകലജം $\frac{dy}{dx}$ ആണ്. അതുകൊണ്ട് ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം 1 ആണ്. തന്നിരിക്കുന്ന അവകലജസമവാക്യം y' ലുള്ള ഒരു ബഹുപദസമവാക്യമാണ് കൂടാതെ $\frac{dy}{dx}$ ന്റെ കൃതി 1 ആയതുകൊണ്ട് സമവാക്യത്തിന്റെ കൃതി 1 ആണ്.

(ii) സമവാക്യത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന ഏറ്റവും ഉയർന്ന ക്രമമുള്ള അവകലജം $\frac{d^2y}{dx^2}$. അതുകൊണ്ട് സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം 2 ആണ്. തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം

$\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ എന്നിവയിലുള്ള ഒരു ബഹുപദ സമവാക്യവും, കൂടാതെ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ന്റെ കൃതി 1 ആയതുകൊണ്ട് സമവാക്യത്തിന്റെ കൃതി 1 ആകുന്നു.

(iii) സമവാക്യത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന ഏറ്റവും ഉയർന്ന ക്രമമുള്ള അവകലജം y''' ആയതുകൊണ്ട് സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം 3 ആണ്. തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം അവകലജങ്ങളുടെ ബഹുപദ സമവാക്യം അല്ലാത്തതുകൊണ്ട് സമവാക്യത്തിന്റെ കൃതി നിർവചിക്കാൻ കഴിയില്ല.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.1

1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങളിൽ തന്നിട്ടുള്ള അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ ക്രമവും കൃതിയും എഴുതുക

1. $\frac{d^4y}{dx^4}+\sin(y''')=0$

2. $y' + 5y = 0$

3. $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\frac{d^2s}{dt^2}=0$

4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\cos\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$

5. $\frac{d^2y}{dx^2}=\cos 3x+\sin 3x$

6. $(y''')^2 + (y'')^3 + (y')^4 + y^5 = 0$

7. $y''' + 2y'' + y' = 0$

8. $y' + y = e^x$

9. $y'' + (y')^2 + 2y = 0$

10. $y'' + 2y' + \sin y = 0$

11. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)+1=0$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ കൃതി

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) നിർവചിച്ചിട്ടില്ല

12. $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+y=0$ എന്ന അവകലജസമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം.

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) നിർവചിച്ചിട്ടില്ല

9.3. ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരവും (General Solution) പ്രത്യേക പരിഹാരവും (Particular Solution)

മുൻ ക്ലാസുകളിൽ നാം

$$x^2 + 1 = 0 \quad \dots (1)$$

$$\sin^2 x - \cos x = 0 \dots (2)$$

എന്നീ വിധത്തിലുള്ള സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരങ്ങൾ കണ്ടിട്ടുണ്ട്.

(1), (2) എന്നീ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരങ്ങൾ രേഖീയസംഖ്യകളോ അല്ലെങ്കിൽ സമ്മിശ്രസംഖ്യകളോ ആയിരിക്കും. ഈ പരിഹാരങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളിൽ കൊടുത്താൽ സമവാക്യത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളും തുല്യമായിരിക്കും.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \ldots (3)$$

എന്ന അവകലജ സമവാക്യം പരിഗണിക്കുക. മുകളിൽ പരിഗണിച്ച രണ്ട് സമവാക്യങ്ങൾക്കു വിഭിന്നമായി ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം ഒരു ഏകകദമായിരിക്കും. ഈ ഏകകദം ϕ എന്നിരിക്കട്ടെ, എങ്കിൽ y ക്കു പകരം ϕ എന്ന ഏകകദം കൊടുത്താൽ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ രണ്ടുവശങ്ങളും തുല്യമായിരിക്കും.

$y = \phi(x)$ എന്ന വക്രത്തെ തന്നിരിക്കുന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാര വക്രം (സമാകലന വക്രം) എന്നു പറയാം.

$$y = \phi(x) = a \sin(x + b) \ldots (4)$$

എന്ന ഏകകദം പരിഗണിക്കുക ഇവിടെ, $a, b \in \mathbf{R}$ ആണ്. ഈ ഏകകദവും അതിന്റെ അവകലജവും സമവാക്യം (3) ൽ കൊടുത്താൽ രണ്ടു വശങ്ങളും തുല്യമാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. അതുകൊണ്ട് $y = a \sin(x + b)$ എന്നത് അവകലജ സമവാക്യം (3) ന്റെ പരിഹാരമായിരിക്കും.

a ക്കും b ക്കും ചില പ്രത്യേക വിലകൾ കൊടുത്തു നോക്കാം. ഉദാഹരണത്തിൽ $a = 2$ എന്നും $b = \frac{\pi}{4}$ എന്നും കൊടുക്കാം.

$y = \phi_1(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ എന്ന ഏകകദം ലഭിക്കുന്നു. ഈ ഏകകദവും അതിന്റെ അവകലജവും സമവാക്യം (3) ൽ കൊടുത്താൽ അതിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളും തുല്യമായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് ϕ_1, (3) ന്റെ ഒരു പരിഹാരമായിരിക്കും.

a, b എന്നിവ ഏത് വിലയും സ്വീകരിക്കുന്ന സ്ഥിരസംഖ്യകൾ (Arbitrary Constants) ഉൾപ്പെട്ട ഒരു ഏകകദമാണ് ϕ. ഈ ഏകകദത്തെ തന്നിരിക്കുന്ന അവകലജസമവാക്യത്തിന്റെ പൊതു പരിഹാരം (General Solution) എന്നു പറയുന്നു.

നേരെ മറിച്ച് a, b എന്നീ പരാമീറ്ററുകൾക്ക് ചില പ്രത്യേക വിലകൾ നൽകി, ഏതൊരു വിലയും സ്വീകരിക്കാൻ കഴിയുന്ന സ്ഥിരസംഖ്യകൾ ഒന്നും തന്നെ ഉൾപ്പെടാത്ത ഒരു ഏകകദമാണ് ϕ_1. ഈ ഏകകദത്തെ തന്നിരിക്കുന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പ്രത്യേകപരിഹാരം (Particular Solution) എന്നു പറയാം.

ഏത് വിലയും സ്വീകരിക്കാവുന്ന സറിര സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുന്ന പരിഹാരത്തെ, അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതു പരിഹാരം എന്നു പറയുന്നു.
ഏത് വിലയും സ്വീകരിക്കാൻ കഴിയുന്ന സറിരസംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടാതെ, അതായത് പൊതുപരിഹാരത്തിലെ പരാമീറ്ററുകൾക്കു പ്രത്യേക വിലകൾ നൽകി ലഭിക്കുന്ന പരിഹാരത്തെ ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പ്രത്യേക പരിഹാരം എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം: 2

$y = e^{3x}$ എന്നത് $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാര മാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

$y = e^{3x}$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട്,

$$\frac{dy}{dx} = -3e^{-3x} \quad \dots (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{-3x}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}$ y എന്നിവയുടെ വിലകൾ തന്നിരിക്കുന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തു ആരോപിച്ചാൽ.

$$9e^{-3x} + (-3e^{-3x}) - 6.e^{-3x} = 9e^{-3x} - 9$$
$$e^{3x} = 0 = \text{വലതുവശം}$$

അതുകൊണ്ട് $y = e^{-3x}$ എന്നത് തന്നിരിക്കുന്ന അവകലജസമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരമാണ്.

ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കാണാം. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം കാണണമെങ്കിൽ CAS തുറന്ന് (View CAS) Solve ODE $[y'' + y' - 6y = 0]$ എന്ന് നൽകിയാൽ മതി.

ഉദാഹരണം : 3

$y = a\cos x + b\sin x,\ a, b \in \mathbf{R}$ എന്നത് $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന ഏകദം

$$y = a \cos x + b \sin x \ldots (1)$$

അതുകൊണ്ട് $\frac{dy}{dx} = -a \sin x + b \cos x \ldots (2)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a \cos x - b \sin x \ldots (3)$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$, y എന്നിവയുടെ വിലകൾ തന്നിരിക്കുന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തു കൊടുത്താൽ

$(-a \cos x - b \sin x) + (a \cos x + b \sin x) = 0 =$ വലതുവശം

അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന ഏകദം തന്നിരിക്കുന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരമാണ്.

പരിശീലനപ്രശ്നം 9.2

1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള പരിശീലന പ്രശ്നങ്ങളിൽ തന്നിട്ടുള്ള ഏകദങ്ങൾ ഒപ്പം തന്നിരിക്കുന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

1. $y = e^x + 1$: $y'' - y' = 0$
2. $y = x^2 + 2x + C$: $y' - 2x - 2 = 0$
3. $y = \cos x + C$: $y' + \sin x = 0$
4. $y = \sqrt{1+x^2}$: $y' = \frac{xy}{1+x^2}$
5. $y = Ax$: $xy' = y \ (x \neq 0)$
6. $y = x \sin x$: $xy' = y + x \sqrt{x^2 - y^2}$ ($x \neq 0$, $x > y$ അല്ലെങ്കിൽ $x < y$)
7. $xy = \log y + C$: $y' = \frac{y^2}{1-xy} \ (xy \neq 1)$
8. $y - \cos y = x$: $(y \sin y + \cos y + x)\, y' = y$
9. $x + y = \tan^{-1} y$: $y^2 y' + y^2 + 1 = 0$
10. $y = \sqrt{a^2 - x^2} \ x \in (-a, a)$: $x + y \frac{dy}{dx} = 0 \ (y \neq 0)$

11. ക്രമം നാല് ആയിട്ടുള്ള ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരത്തിൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന ഏതു വിലയും സ്വീകരിക്കാവുന്ന സറിരാങ്കങ്ങളുടെ (Arbitrary Constants) എണ്ണം

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. ക്രമം മൂന്നായിട്ടുള്ള ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പ്രത്യേക പരിഹാരത്തിൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന ഏതു വിലയും സ്വീകരിക്കാവുന്ന സറിരാങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം.

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

9.4 പൊതുപരിഹാരത്തിൽ നിന്നും അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ രൂപീകരണം

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0 \quad \dots (1)$$

എന്നത് കേന്ദ്രം $(-1, 2)$, ആരം 1 ആയ ഒരു വൃത്തമാണ്.

(1) നെ x ആധാരമാക്കി അവകലനം നടത്തിയാൽ

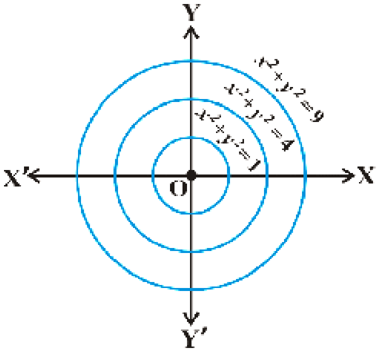
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y}, \quad (y \neq 2) \quad \dots (2)$$

എന്നു ലഭിക്കും. ഇതൊരു അവകലജ സമവാക്യമാണ്.

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \dots (3)$$

എന്ന സമവാക്യം പരിഗണിക്കുക. r ന് വ്യത്യസ്ത വിലകൾ നൽകിയാൽ കൂട്ടത്തിലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങളുടെ സമവാക്യം ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണത്തിന്,



ചിത്രം 9.1

$x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ എന്നിങ്ങനെ (ചിത്രം 9.1 കാണുക). അതുകൊണ്ട് സമവാക്യം (3), ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രമായി വരുന്ന ഏകകേന്ദ്രവൃത്തങ്ങളുടെ ഒരു കൂട്ടത്തെയാണ് പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതെന്നു കാണാം.

ഈ കൂട്ടത്തിലെ ഓരോ അംഗത്തിനും അനുയോജ്യമായ ഒരു അവകലജസമവാക്യം എങ്ങനെ കാണാമെന്നു നോക്കാം. r ന്റെ വില ഓരോ അംഗത്തിനും വ്യത്യസ്തമായതുകൊണ്ട് അവകലജ സമവാക്യം r ൽ നിന്നും സ്വതന്ത്രമായിരിക്കണം. അങ്ങനെയൊരു അവകലജ സമവാക്യം ലഭിക്കാൻ (3) നെ x ആധാരമാക്കി അവകലനം നടത്തിയാൽ മതി.

അതായത്,

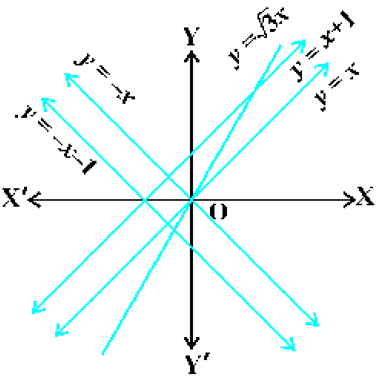
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{അല്ലെങ്കിൽ}$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \; ... (4)$$

സമവാക്യം (3) ൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഏകകേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിന്റെ അവകലജ സമവാക്യമാണ് (4)

അടുത്തതായി

സമവാക്യം $y = mx + c$ ... (5) പരിഗണിക്കുക. m, c, എന്നീ പരാമീറ്ററുകൾക്ക് വ്യത്യസ്ത വിലകൾ നൽകിയാൽ കുടുംബത്തിലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങ ളുടെ സമവാക്യം ലഭിക്കും.



ചിത്രം 9.2

ഉദാഹരണത്തിന്

$y = x$	$(m = 1, \; c = 0)$
$y = \sqrt{3}\,x$	$(m = \sqrt{3}, \; c = 0)$
$y = x + 1$	$(m = 1, \; c = 1)$
$y = \quad x$	$(m = -1, \; c = 0)$
$y = -x - 1$	$(m = -1, \; c = -1)$

എന്നിങ്ങനെ (ചിത്രം 9.2 കാണുക).

അതുകൊണ്ട് സമവാക്യം (5) നേർവരകളുടെ ഒരു കുടുംബത്തെയാണ് പ്രതിനിധീ കരിക്കുന്നത് എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ഇവിടെ m, c എന്നിവയാണ് പരാമീറ്ററുകൾ ഈ കുടുംബത്തിലെ വ്യത്യസ്ത അംഗങ്ങളുടെ m ന്റെയും, c യുടെയും വില വ്യത്യസ്ത മായതുകൊണ്ട്, m ൽ നിന്നും c യിൽ നിന്നും സ്വതന്ത്രമായ ഒരു അവകലന സമവാ ക്യമാണ് നാം രൂപീകരിക്കേണ്ടത്. ഇത് ലഭിക്കാൻ സമവാക്യം (5) നെ തുടർച്ച യായി രണ്ടു തവണ x ആധാരമാക്കി അവകലനം നടത്തിയാൽ

$$\frac{dy}{dx} = m \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \; ... (6)$$

എന്നിങ്ങനെ ലഭിക്കും

സമവാക്യം (6) നേർവരകളുടെ കൂട്ടമായ (5) നെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു എന്ന് മന സ്സിലാക്കാം.

(3), (5) എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾ യഥാക്രമം (4), (6) എന്നീ അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ പൊതുപരിഹാരങ്ങളാണ്.

9.4.1 ഒരു കൂട്ടം വക്രങ്ങളുടെ അവകലജ സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുന്ന പ്രക്രിയ

(a) തന്നിരിക്കുന്ന വക്രങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിന് ഒരു പരാമീറ്റർ മാത്രമേയുള്ളൂ എങ്കിൽ അവയെ $F_1(x, y, a) = 0$ എന്നെഴുതാം ... (1)

ഉദാഹരണമായി $y^2 = ax$ എന്നത് x അക്ഷമായ സമവക്രങ്ങളുടെ കൂട്ടമാണ്.

അതിനെ $f(x, y, a)$:$y^2=ax$ എന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാം.

$F_1(x, y, a) = 0$ എന്നതിനെ അവകലനം ചെയ്താൽ

$g(x, y, y', a) = 0$-----(2) എന്ന രൂപത്തിൽ ലഭിക്കും.

(1), (2) സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും 'a' എന്ന പരാമീറ്ററിനെ ഒഴിവാക്കിയാൽ ലഭിക്കുന്ന സമവാക്യത്തെയാണ് (1) ന്റെ അവകലജ സമവാക്യം എന്ന് പറയുന്നത്.

$$\text{അതായത്, } F(x, y, y') = 0$$

(b) ഇനി രണ്ട് പരാമീറ്ററുകളുള്ള കുടുംബത്തെ എടുത്താൽ

$F_2(x, y, a, b) = 0$------(1) ആയിരിക്കും. ഇതിനെ രണ്ട് തവണ അവകലനം ചെയ്താൽ

$g(x, y, y', a, b) = 0$ ... (2) എന്നും

$h(x, y, y', y'', a, b) = 0$ ... (3) എന്നും ലഭിക്കും.

സമവാക്യങ്ങൾ (1), (2), (3) എന്നിവയിൽ നിന്നും a, b എന്നീ പരാമീറ്ററുകൾ ഒഴിവാക്കിയാൽ ലഭിക്കുന്ന സമവാക്യത്തെയാണ് അവകലജ സമവാക്യം എന്ന് വിളിക്കുന്നത്. ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം 2 ആയിരിക്കും പരാമീറ്ററുകളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് ഈ പ്രക്രിയ തുടരുക. 3 പരാമീറ്ററുകളുള്ള വക്രങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിന് ലഭിക്കുന്ന അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം 3 ആയിരിക്കും.

☛ കുറിപ്പ്

വക്രങ്ങളുടെ കുടുംബത്തിന്റെ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം ആ കൂട്ടത്തിലെ പരാമീറ്ററുകളുടെ എണ്ണം ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 4

$y = mx$, എന്ന വക്രങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിന് അനുയോജ്യമായ അവകലജ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

$$\text{ഇവിടെ } y = mx \quad \dots (1)$$

m എന്ന ഒരു പരാമീറ്ററുള്ളത് കൊണ്ട് ഒരു പ്രാവശ്യം മാത്രം അവകലനം ചെയ്യുക.

$$\frac{dy}{dx} = m \dots (2)$$

(1), (2) എന്നിവയിൽ നിന്നും m നെ ഒഴിവാക്കിയാൽ

$y = \frac{dy}{dx} \cdot x$ എന്ന് ലഭിക്കും. ഇതാണ് ആവശ്യമായ അവകലജ സമവാക്യം

$$\text{അല്ലെങ്കിൽ, } x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

ഉദാഹരണം : 5

$y = a \sin(x + b)$ (ഇവിടെ a, b എന്നിവ പരാമീറ്ററുകളാണ്) എന്ന വക്രങ്ങളുടെ അവകലജ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

$y = a \sin(x + b)$ ------ (1)

അവകലനം ചെയ്താൽ

$$y' = a \cos(x + b) \dots (2)$$

വീണ്ടും ചെയ്താൽ

$$y'' = -a \sin(x + b) \dots (3)$$

(1), (3) എന്നിവയിൽ നിന്നും $y'' = -y$

അതുകൊണ്ട് അവകലജ സവവാക്യം

$$y'' + y = 0 \text{ ആയിരിക്കും}$$

ഉദാഹരണം : 6

ഫോക്കസുകൾ x– അക്ഷത്തിലും കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവുമായ എല്ലാ ന്യൂനവക്രങ്ങളുടെയും (Ellipse) അവകലജ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

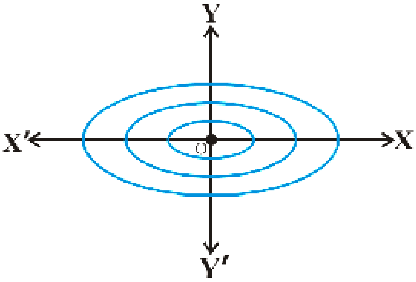
ന്യൂനവക്രങ്ങളുടെ സമവാക്യങ്ങളുടെ പൊതുരൂപം

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \ldots (1)$$

അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)= \frac{-b^2}{a^2} \quad \ldots (2)$$



ചിത്രം 9.3

വീണ്ടും അവകലനം ചെയ്താൽ.

$$\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\left(\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

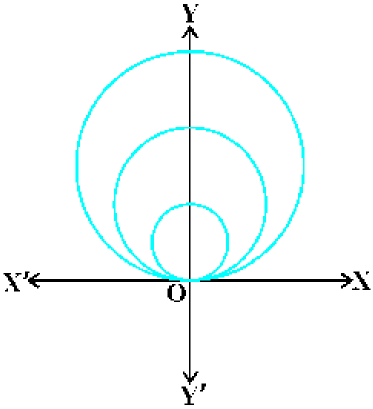
$$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0 \ldots (3)$$

ഉദാഹരണം : 7

x അക്ഷത്തിനെ ആധാരബിന്ദുവിൽ തൊടുന്ന എല്ലാ വൃത്തങ്ങളുടെയും അവകലജ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും $(0, a)$ ആയിരിക്കും ഏതൊരു വൃത്തത്തിന്റെയും കേന്ദ്രം. അതുപോലെ ആരം a യും ആയിരിക്കും.



ചിത്രം 9.4

സമവാക്യം

$$(x-0)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 = 2ay \ldots (1)$$

അവകലനം ചെയ്താൽ

$$2x+2y\frac{dy}{dx} = 2a\frac{dy}{dx}$$

$$a \quad \frac{x+y\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx}} \quad \ldots (2)$$

(2) എന്നത് (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ.

$$x^2 + y^2 = 2y\frac{\left[x+y\frac{dy}{dx}\right]}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$ എന്ന് ലഭിക്കും

ഉദാഹരണം : 8

ശീർഷം ആധാരബിന്ദുവും അക്ഷം x-അക്ഷവുമായ എല്ലാ സമവക്രങ്ങളുടെയും അവകലജ സമവാക്യം കാണുക.

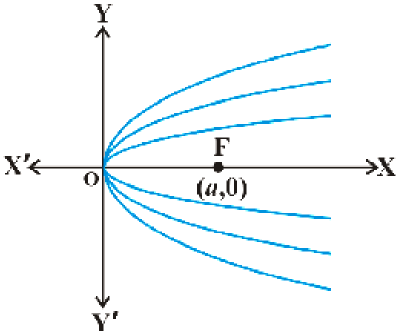


Fig 9.5

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവക്രങ്ങളുടെ സമവാക്യം

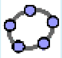
$y^2 = 4ax$ ആയിരിക്കും ... (1)

അവകലനം ചെയ്താൽ

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \quad ... (2)$$

(1), (2) എന്നിവയിൽ നിന്നും $4a$ ഒഴിവാക്കിയാൽ $\frac{y^2}{x} = 2y\frac{dy}{dx}$

അതുകൊണ്ട് നിശ്ചിത അവകലജ സമവാക്യം $y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} = 0$ ആയിരിക്കും



a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമിച്ച് $y^2 = 4ax$ എന്ന വക്രം വരയ്ക്കുക. ഈ വക്രത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു A അടയാളപ്പെടുത്തി അതിലൂടെ വക്രത്തിന് തൊടുവര വരയ്ക്കുക. ഈ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് കണക്കാക്കുക. y(A)/2 * x(A)) എന്ന നിർദ്ദേശം നൽകുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന സംഖ്യയും തൊടുവരയുടെ ചരിവും തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം? a യുടെ വിലയും ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനവും മാറ്റി നോക്കൂ.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.3

1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന വക്രങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിന് യോജിച്ച അവകലജ സമവാക്യങ്ങൾ കാണുക.

1. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
2. $y^2 = a\,(b^2 - x^2)$
3. $y = a\,e^{3x} + b\,e^{-2x}$
4. $y = e^{2x}\,(a + bx)$
5. $y = e^x\,(a \cos x + b \sin x)$
6. y - അക്ഷത്തെ ആധാരബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്ന എല്ലാ വൃത്തങ്ങളുടെയും അവകലജ സമവാക്യം കാണുക.
7. അക്ഷം, y - അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയും (Positive direction) ശീർഷം ആധാര ബിന്ദുവുമായ എല്ലാ സമവക്രങ്ങളുടെയും (Parabola) അവകലജ സമവാക്യം കാണുക.
8. ഫോക്കസുകൾ y-അക്ഷത്തിലും കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവുമായ എല്ലാ ന്യൂന വക്രങ്ങളുടെയും (ellipse) അവകലജ സമവാക്യം കാണുക.
9. ഫോക്കസുകൾ x-അക്ഷത്തിലും കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവുമായ അധിവക്ര ങ്ങളുടെ (Hyperbolas) അവകലജ സമവാക്യം കാണുക.
10. ആരം 3 യൂണിറ്റും കേന്ദ്രം y-അക്ഷത്തിലുമായ എല്ലാ വൃത്തങ്ങളുടെയും അവകലജ സമവാക്യം കാണുക.
11. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏത് അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരമാണ് $y = c_1\,e^x + c_2\,e^{-x}$?

    (A) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$ (C) $\frac{d^2y}{dx^2}+1=0$

    (D) $\frac{d^2y}{dx^2}-1=0$
12. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏത് അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ ഒരു പ്രത്യേക പരിഹാരമാണ് $y = x$?

    (A) $\frac{d^2y}{dx^2}-x^2\frac{dy}{dx}+xy=x$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+xy=x$

    (C) $\frac{d^2y}{dx^2}-x^2\frac{dy}{dx}+xy=0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+xy=0$

9.5. ഒന്നാം ക്രമത്തിലും, ഒന്നാം കൃതിയിലുമുള്ള അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കാണുന്ന വിവിധ രീതികൾ

9.5.1 ചരങ്ങളെ വേർതിരിക്കാവുന്ന അവകലജ സമവാക്യങ്ങൾ (Variable separable differential equations)

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \ldots (1)$$

$F(x, y)$ എന്നതിനെ $g(x)\, h(y)$ എന്ന രൂപത്തിൽ $g(x)$ എന്നത് x മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ഏകദവും $h(y)$ എന്നത് y മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ഏകദവുമായി എഴുതാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ അത്തരം അവകലജ സമവാക്യങ്ങളെ ചരങ്ങളെ വേർതിരിക്കാവുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ എന്ന് വിളിക്കാം.

$$\frac{dy}{dx} = h(y)\, g(x) \ldots (2)$$

$$\frac{1}{h(y)}\, dy = g(x)\, dx, \quad h(y) \neq 0 \ldots (3)$$

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx \ldots (4)$$

അതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം സമവാക്യം (4) ന്റെ മറ്റൊരു രൂപമായ $H(y) = G(x) + C$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാം. ഇവിടെ $H(y)$, $G(x)$ യഥാക്രമം $\frac{1}{h(y)}$, $g(x)$ എന്നിവയുടെ എതിർ അവകലജങ്ങളാണ്.

ഉദാഹരണം : 9

അവകലജ സമവാക്യം $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y}$, $(y \neq 2)$ ന്റെ പൊതുപരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y} \ldots (1)$$

$$(2-y)\, dy = (x+1)\, dx \ldots (2)$$

രണ്ടു ഭാഗവും സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$\int (2-y)dy = \int (x+1)dx$$

$$2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + C_1$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2\,C_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + C = 0,\ C = 2C_1$$

ഉദാഹരണം : 10

$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

$1 + y^2 \neq 0$, ആയതുകൊണ്ട്

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + C$$

ഉദാഹരണം : 11

അവകലജ സമവാക്യം $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$ ന്റെ $x = 0, y = 1$ ആകുന്ന പ്രത്യേക പരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

$y \neq 0$, ആണെങ്കിൽ

$$\frac{dy}{y^2} = -4x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = -4\int x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = -2x^2 + C$$

> $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന് $x = 0, y = 1$ ആകുമ്പോഴുള്ള പരിഹാരം ലഭിക്കാൻ CAS ൽ Solve ODE[y' = -4x * y ^ 2, (0, 1)] എന്ന് നൽകിയാൽ മതി.

$$y = \frac{1}{2x^2 - C} \quad \dots (2)$$

$x = 0, y = 1$ എന്നിവ ആരോപിച്ചാൽ $C = -1$ എന്ന് ലഭിക്കും സമവാക്യം (2) ൽ നിന്നും

$y = \frac{1}{2x^2+1}$ എന്ന പ്രത്യേക പരിഹാരം ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം : 12

$x\,dy = (2x^2 + 1)dx;\ (x \neq 0)$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യം ശരിയാവുകയും (1,1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്നതുമായ ഒരു വക്രം കണ്ടുപിടിക്കുക.

> Solve ODE [x * y' = 2x^2 + 1] എന്ന് CAS ൽ നൽകുക. അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം ലഭിക്കും. ഈ സമവാക്യം കോപ്പി ചെയ്ത് (Right Click → copy) input bar ൽ പേസ്റ്റ് ചെയ്യുക (ctrl + v) സമവാക്യം സൂചിപ്പിക്കുന്ന വക്രം ലഭിക്കും. സമവാക്യത്തോടൊപ്പം Algebra യിൽ c_1 എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ ലഭിക്കും. ഈ സ്ലൈഡറിലെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. വക്രത്തിനു വരുന്ന മാറ്റമെന്താണ്? c_1 ന്റെ ഏതു വിലയ്ക്കാണ് വക്രം (1, 1) എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നു പോകുന്നത്?
>
> സമവാക്യത്തിന്റെ പ്രത്യേക പരിഹാരം ലഭിക്കാൻ SolveODE [x * y' = 2x² + 1, (1, 1)] എന്ന നിർദ്ദേശം CAS ൽ നൽകിയാൽ മതി.

പരിഹാരം

$$x\,dy = (2x^2 + 1)dx$$

$$dy \quad \left(\frac{2x^2+1}{x}\right)dx$$

$$\int dy = \int\left(2x + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$y = x^2 + \log|x| + C \quad \dots (2)$$

സമവാക്യം (2) ഒരു കൂട്ടം വക്രങ്ങളാണ്. കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട വക്രം (1, 1) എന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നു പോകുന്നത് കൊണ്ട്.

$$1 = 1 + \log 1 + C$$

$C = 0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ആവശ്യപ്പെട്ട വക്രം $y = x^2 + \log|x|$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം : 13

$(-2, 3)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി പോകുന്ന വക്രത്തിലെ (x, y) എന്ന പൊതുബിന്ദുവിലുള്ള തൊടുവരയുടെ ചരിവ് $\frac{2x}{y^2}$ ആണെങ്കിൽ വക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

തൊടുവരയുടെ ചരിവ് $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2} \quad \dots (1)$$

$$y^2\,dy = 2x\,dx$$

$$\int y^2 dy = \int 2x\, dx$$

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + C$$

$x = -2, y = 3$ ആയാൽ C = 5 ലഭിക്കും.

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + 5$$

അഥവാ, $y = (3x^2 + 15)^{\frac{1}{3}}$ ആണ് ആവശ്യപ്പെട്ട വക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം

ഉദാഹരണം : 14

ഒരു ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്ന മൂലധനം തുടർച്ചയായി എല്ലാവർഷവും 5% നിരക്കിൽ വർധിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കും. എങ്കിൽ 1000 രൂപ ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപിച്ചാൽ എത്ര വർഷം കൊണ്ട് ഇരട്ടിയാകും എന്ന് അവകലജ സമവാക്യം രൂപീകരിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

മുതൽ P ഇരട്ടിയാകാനുള്ള വർഷം t എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ

$$\frac{dP}{dt} = P \times 5\%$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{5}{100} P$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{dt}{20} \quad \ldots (1)$$

സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$\log P = \frac{t}{20} + C_1$$

$$P = e^{\frac{t}{20}} \cdot e^{C_1}$$

$$P = C\, e^{\frac{t}{20}} \quad \text{ഇവിടെ } C = e^{C_1}$$

$t = 0$ ആയാൽ P = 1000 (ആരംഭത്തിൽ)

$$1000 = Ce^{\circ}$$

$$P = 1000\, e^{\frac{t}{20}}$$

P = 2000 ആയാൽ

$$2000 = 1000\, e^{\frac{t}{20}}$$

$$2 = e^{\frac{t}{20}}$$

$$t = 20 \log_e 2$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.4

1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് പൊതുപരിഹാരം കാണുക

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{4-y^2}\ (-2 < y < 2)$

3. $\dfrac{dy}{dx} + y = 1\ (y \neq 1)$

4. $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$

5. $(e^x + e^{-x})\, dy - (e^x - e^{-x})\, dx = 0$

6. $\dfrac{dy}{dx} = (1+x^2)(1+y^2)$

7. $y \log y\, dx - x\, dy = 0$

8. $x^5 \dfrac{dy}{dx} = -y^5$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \sin^{-1} x$

10. $e^x \tan y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0$

11 മുതൽ 14 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് പ്രത്യേക പരിഹാരം കാണുക

11. $(x^3 + x^2 + x + 1)\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + x;\ y = 1,\ x = 0$

12. $x(x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} = 1\ ;\ y = 0,\ x = 2$

13. $\cos\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = a\ \ (a \in \mathbf{R});\ y = 2,\ x = 0$

14. $\dfrac{dy}{dx} = y \tan x\ ;\ y = 1,\ x = 0$

15. $y' = e^x \sin x$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യമുള്ളതും (0, 0) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ വക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

16. $xy\dfrac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$ അവകലജ സമവാക്യമുള്ളതും (1, –1) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ വക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

17. ഒരു വക്രത്തിന്റെ പൊതുവായ ബിന്ദു (x, y) ലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവിന്റെയും y സൂചകസംഖ്യയുടെയും ഗുണനഫലം x സൂചകസംഖ്യക്ക് തുല്യമായതും $(0, -2)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്ന് പോകുന്നതുമായ വക്രത്തിന്റെ അവകലജ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

18. ഒരു വക്രത്തിലെ (x, y) എന്ന പൊതു ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവിന്റെ ഇരട്ടിയാണ് ഈ ബിന്ദുവും (– 4, –3) എന്ന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ചെരിവ്. ഇത്തരം വക്രങ്ങളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ കണ്ടെത്തി അതിൽ (–2, 1) എന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നുപോകുന്ന പ്രത്യേകവക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

19. ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ബലൂണിന്റെ ഉള്ളളവ് ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യാനിരക്കിൽ വർദ്ധിച്ചു വരുന്നു. തുടക്കത്തിൽ ആരം 3 യൂണിറ്റും 3 സെക്കന്റ് കഴിഞ്ഞപ്പോൾ ആരം 6 യൂണിറ്റും ആയി മാറുന്നു എങ്കിൽ t സെക്കന്റിനു ശേഷമുള്ള ആരം കണക്കാക്കുക.

20. ഒരു ബാങ്കിലെ നിക്ഷേപം തുടർച്ചയായി എല്ലാവർഷവും r% നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുന്നു. 100 രൂപ 10 വർഷം കൊണ്ട് ഇരട്ടിയായെങ്കിൽ r ന്റെ വില കാണുക. $(\log_e 2 = 0.6931)$.

21. ഒരു ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപം തുടർച്ചയായി എല്ലാവർഷവും 5% നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുന്നു. 1000 രൂപ നിക്ഷേപിച്ച ഒരാൾക്ക് 10 വർഷത്തിനു ശേഷം ലഭിക്കുന്ന തുക അവകലജസമവാക്യം രൂപീകരിച്ച് കണക്കാക്കുക. $(e^{0.5} = 1.648)$.

22. ഒരു വസ്തുവിലുള്ള ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം 1,00,000 ആകുന്നു. ഇവയുടെ എണ്ണം ഓരോ 2 മണിക്കൂറിലും 10% നിരക്കിൽ വർദ്ധിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നു. ബാക്ടീരിയയുടെ വർദ്ധനവ് അവയുടെ എണ്ണത്തിന് ആനുപാതികമാകുന്നുവെങ്കിൽ ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം 2,00,000 ആകാൻ വേണ്ട സമയം കണക്കാക്കുക.

23. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരം ഏത്?

(A) $e^x + e^{-y} = C$ (B) $e^x + e^y = C$

(C) $e^{-x} + e^y = C$ (D) $e^{-x} + e^{-y} = C$

9.5.2 സമകൃതി അവകലജ സമവാക്യങ്ങൾ (Homogeneous differential equations)

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഏകദങ്ങൾ പരിശോധിക്കുക.

$F_1(x, y) = y^2 + 2xy$

$F_2(x, y) = 2x - 3y$

$F_3(x, y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$

$F_4(x, y) = \sin x + \cos y$

ഇവയിൽ x ന് പകരം λx എന്നും y യ്ക്ക് പകരം λy എന്നും മാറ്റി എഴുതിയാൽ.

$F_1(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 (y^2 + 2xy) = \lambda^2 F_1(x, y)$

$F_2(\lambda x, \lambda y) = \lambda (2x - 3y) = \lambda F_2(x, y)$

$F_3(\lambda x, \lambda y) = \cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \lambda^0 \ F_3(x, y)$

$F_4(\lambda x, \lambda y) = \sin \lambda x + \cos \lambda y \neq \lambda^n F_4(x, y)$, എല്ലാ $n \in \mathbf{N}$

ഇവ നിരീക്ഷിച്ചതിൽ നിന്നും F_1, F_2, F_3 എന്നിവയെ $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ എന്ന രീതിയിൽ എഴുതാൻ സാധിക്കുന്നുണ്ട്. പക്ഷെ F_4 ന് ഇത് സാധിക്കുന്നില്ല എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

$F(x, y)$ എന്ന ഏകദം n കൃതിയുള്ള ഒരു സമകൃതി ഏകദമാവണമെങ്കിൽ $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാൻ സാധിക്കണം. $(\lambda \neq 0)$

F_1, F_2, F_3 എന്നീ സമകൃതി ഏകദങ്ങളുടെ കൃതികൾ യഥാക്രമം 2, 1, 0 ആയിരിക്കുമല്ലോ.

F_4 എന്നത് ഒരു സമകൃതി ഏകദമല്ല. കൂടാതെ, മറ്റൊരു രീതി നോക്കാം.

$$F_1(x, y) = x^2\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x}\right) = x^2 h_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$F_1(x, y) = y^2\left(1 + \frac{2x}{y}\right) = y^2 h_2\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$F_2(x, y) = x^1\left(2 - \frac{3y}{x}\right) = x^1 h_3\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$F_2(x, y) = y^1\left(2\frac{x}{y}-3\right) = y^1 h_1\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$F_3(x, y) = x^0 \cos\left(\frac{y}{x}\right) = x^0\, h_5\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$F_4(x, y) \neq x^n h_6\left(\frac{y}{x}\right), \quad n \in \mathbf{N}$$

$$F_4(x, y) \neq y^n h_7\left(\frac{x}{y}\right), \quad n \in \mathbf{N}$$

അതുകൊണ്ട് $F(x, y)$ എന്നത് കൃതി n ആയ ഒരു സമകൃതി ഏകദമാവണമെങ്കിൽ $F(x,y) = x^n g\left(\frac{y}{x}\right)$ എന്നോ $y^n h\left(\frac{x}{y}\right)$ എന്നോ എഴുതാൻ സാധിക്കുന്നതായിരിക്കണം.

$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഒരു അവകലജ സമവാക്യം സമകൃതി അവകലജ സമവാക്യമാവണമെങ്കിൽ $F(x, y)$ എന്നത് കൃതി പൂജ്യം ആയ ഒരു സമകൃതി ഏകദമായിരിക്കണം.

അതായത്

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = x^0 g\left(\frac{y}{x}\right) \text{ അല്ലെങ്കിൽ } y^0 h\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) \text{ ------(1)}$$

$y = vx$ എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ ... (2)

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \text{ ... (3)}$$ ആയിരിക്കും.

(1) ൽ നിന്നും

$$v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$

$$x\frac{dv}{dx} = g(v) - v \quad \ldots (4)$$

$$\frac{dv}{g(v)-v} = \frac{dx}{x} \quad \ldots (5)$$

ഇരുവശവും സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$\int\frac{dv}{g(v)-v} = \int\frac{1}{x}dx + C \quad \ldots (6)$$

സമവാക്യം (6) ൽ $v = \frac{y}{x}$ എന്ന് മാറ്റി ആരോപിച്ചാൽ സമവാക്യം (1) ന്റെ പരിഹാരം ലഭിക്കും.

കുറിപ്പ്

$\frac{dx}{dy} = F(x, y)$ ഒരു സമകൃതി സമവാക്യമാണെങ്കിൽ $F(x, y)$ കൃതി പൂജ്യമായ ഒരു സമകൃതി ഏകദമായിരിക്കും. അങ്ങനെയെങ്കിൽ, $\frac{x}{y} = v$ എന്നോ $x = vy$ എന്നോ നൽകി $\frac{dx}{dy} = F(x, y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$ എന്ന രൂപത്തിൽ പൊതുപരിഹാരം കണ്ടെത്താൻ കഴിയും.

ഉദാഹരണം: 15

$(x-y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യം സമകൃതി അവകലജ സമവാക്യമാണെന്നു തെളിയിച്ചശേഷം പൊതുപരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തെ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x-y} \quad \ldots (1) \text{ എന്നെഴുതാം}$$

$$F(x, y) = \frac{x+2y}{x-y}$$

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda(x+2y)}{\lambda(x-y)} = \lambda^0 \cdot F(x,y)$$

അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം ഒരു സമകൃതി അവകലജ സമവാക്യമാണ്.
മറ്റൊരുരീതിയിൽ

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1+\frac{2y}{x}}{1-\frac{y}{x}}\right) = x^0 g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \ldots (2)$$

വലത് വശം $g\left(\frac{y}{x}\right)$ എന്നത് സമകൃതി ഏകദമാണ്.

ഇതിനു പരിഹാരം കാണുന്നതിന്,

$y = vx$ ആരോപിച്ചാൽ ... (3)

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \ldots (4)$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+v+1}{1-v}$$

$$\frac{v-1}{v^2+v+1}dv = \frac{-dx}{x}$$

ഇരുവശവും സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$\int \frac{v-1}{v^2+v+1}dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2v+1-3}{v^2+v+1}\,dv = -\log|x| + C_1$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2v+1}{v^2+v+1}\,dv - \frac{3}{2}\int \frac{1}{v^2+v+1}\,dv = -\log|x| + C_1$$

$$\frac{1}{2}\log\left|v^2+v+1\right| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dv = -\log|x| + C_1$$

$$\frac{1}{2}\log\left|v^2+v+1\right| - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) = -\log|x| + C_1$$

$$\frac{1}{2}\log\left|v^2+v+1\right| + \frac{1}{2}\log x^2 = \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) + C_1$$

v എന്നതിന് പകരം $\frac{y}{x}$ എന്നാരോപിച്ചാൽ

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right| + \frac{1}{2}\log x^2 = \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right) + C_1$$

$$\frac{1}{2}\log\left|\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right)x^2\right| = \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right) + C_1$$

$$\log\left|(y^2+xy+x^2)\right| = 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right) + 2C_1$$

$$\log\left|(x^2+xy+y^2)\right| = 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2y}{\sqrt{3}x}\right) + C$$

എന്നതാണ് പൊതുപരിഹാരം

ഉദാഹരണം : 16

$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യം സമകൃതി അവകലജ സമവാക്യമാണെന്നു തെളിയിച്ച് പൊതുപരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തെ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \ldots (1) \text{ എന്ന് എഴുതാം.}$$

$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ രൂപത്തിലാണ്.

$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 F(x, y)$ ആണ്.

അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം സമകൃതി അവകലജ സമവാക്യമാണ്.

$y = vx$ ആരോപിച്ചാൽ

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \text{ എന്നും}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v+1}{\cos v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v+1}{\cos v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos v}$$

$$\cos v\, dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \cos v\, dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\sin v = \log|x| + \log|C|$$

$$\sin v = \log|Cx|$$

$v = \frac{y}{x}$ എന്ന് മാറ്റിയാൽ $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log|Cx|$ എന്ന പൊതു പരിഹാരം ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം : 17

$2y\,e^{\frac{x}{y}}dx + \left(y - 2x\,e^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0$ എന്ന സമവാക്യം സമകൃതി അവകലജ സമവാക്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. $x = 0$ ആകുമ്പോൾ $y = 1$ ആകുന്ന പ്രത്യേക പരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x\,e^{\frac{x}{y}} - y}{2y\,e^{\frac{x}{y}}} \quad \ldots (1)$$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാം.

$$F(x, y) = \frac{2xe^{\frac{x}{y}} - y}{2ye^{\frac{x}{y}}}$$ എന്നെടുത്താൽ

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda\left(2xe^{\frac{x}{y}} - y\right)}{\lambda\left(2ye^{\frac{x}{y}}\right)} = \lambda^0 [F(x, y)]$$

അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം ഒരു സമകൃതി അവകലജ സമവാക്യമാണ്.

$x = vy \ldots (2)$ എന്നാരോപിച്ചാൽ

$$\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$

$x, \dfrac{dx}{dy}$ എന്നിവയുടെ വിലകൾ ആരോപിച്ചാൽ

$$v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\,e^{v} - 1}{2e^{v}}$$

$$y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\,e^{v} - 1}{2e^{v}} - v$$

$$y\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{2e^{v}}$$

$$2e^{v}\,dv = \frac{-dy}{y}$$

$$\int 2e^{v} \cdot dv = -\int \frac{dy}{y}$$

$$2\, e^{v} = -\log |y| + C$$

$v = \dfrac{x}{y}$ എന്നു മാറ്റി ആരോപിച്ചാൽ. $2\, e^{\frac{x}{y}} + \log |y| = C \ldots (3)$

$x = 0$ എന്നും $y = 1$ എന്നും ആരോപിച്ചാൽ (3) ൽ നിന്നും C = 2 എന്ന് ലഭിക്കും.

$2\, e^{\frac{x}{y}} + \log |y| = 2$ എന്ന പ്രത്യേക പരിഹാരം ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം : 18

(x, y) എന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള തൊടുവരയുടെ ചരിവ് $\dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ ആയ വക്രങ്ങളുടെ കുടുംബത്തിന്റെ സമവാക്യം $x^2 - y^2 = cx$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

തൊടുവരയുടെ ചരിവ് $\dfrac{dy}{dx}$ ആണ്.

അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന അവകലജ സമവാക്യം

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \text{ എന്നാണ്}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{2y}{x}} \ldots (1)$$

ഇത് സമകൃതി അവകലജ സമവാക്യമാണ്.

$y = vx$ എന്നും $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ എന്നും ആരോപിച്ചാൽ

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v}$$

$$\frac{2v}{1-v^2}dv = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{2v}{v^2-1}dv = -\frac{dx}{x}$$

അതുകൊണ്ട് $\int\frac{2v}{v^2-1}dv = -\int\frac{1}{x}dx$

$$\log|v^2-1| = -\log|x| + \log|C_1|$$

$$\log|(v^2-1)(x)| = \log|C_1|$$

$$(v^2-1)\,x = \pm C_1$$

$v = \frac{y}{x}$ എന്നു മാറ്റിയാൽ

$$\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)x = \pm C_1$$

$(y^2 - x^2) = \pm C_1\, x$ അല്ലെങ്കിൽ $x^2 - y^2 = Cx$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.5

1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള അവകലജ സമവാക്യങ്ങൾ സമകൃതി അവകലജ സമവാക്യങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിച്ച് ഓരോന്നിന്റെയും പൊതുപരിഹാരം കാണുക.

1. $(x^2 + xy)\,dy = (x^2 + y^2)\,dx$
2. $y' = \frac{x+y}{x}$
3. $(x - y)\,dy - (x + y)\,dx = 0$
4. $(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$
5. $x^2\frac{dy}{dx} = x^2 - 2y^2 + xy$
6. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$
7. $\left\{x\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\}y\,dx = \left\{y\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\}x\,dy$

8. $x\frac{dy}{dx} - y + x\sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

9. $y\,dx + x\log\left(\frac{y}{x}\right)dy - 2x\,dy = 0$

10. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$

11 മുതൽ 15 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകളനുസരിച്ച് പ്രത്യേക പരിഹാരം കാണുക.

11. $(x + y)\,dy + (x - y)\,dx = 0;\ y = 1,\ x = 1$

12. $x^2\,dy + (xy + y^2)\,dx = 0;\ y = 1,\ x = 1$

13. $\left[x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right]dx + x\,dy = 0;\ y = \frac{\pi}{4},\ x = 1$

14. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \operatorname{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) = 0;\ y = 0,\ x = 1$

15. $2xy + y^2 - 2x^2\frac{dy}{dx} = 0;\ y = 2,\ x = 1$

16. $\frac{dx}{dy} = h\left(\frac{x}{y}\right)$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം കാണാൻ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ഏത് സമവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം?

(A) $y = vx$ (B) $v = yx$ (C) $x = vy$ (D) $x = v$

17. തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ സമകൃതി അവകലജ സമവാക്യങ്ങൾ ഏവ?

(A) $(4x + 6y + 5)\,dy - (3y + 2x + 4)\,dx = 0$

(B) $(xy)\,dx - (x^3 + y^3)\,dy = 0$

(C) $(x^3 + 2y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

(D) $y^2\,dx + (x^2 - xy - y^2)\,dy = 0$

9.5.3 രേഖീയ അവകലജ സമവാക്യങ്ങൾ (Linear differential equations)

ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ രൂപം.

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

ഇവിടെ P, Q എന്നിവ സ്ഥിരസംഖ്യകളോ അല്ലെങ്കിൽ x മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ഏകദങ്ങളോ ആയാൽ അതിനെ രേഖീയ അവകലജ സമവാക്യം എന്ന് വിളിക്കാം.

ഉദാഹരണത്തിന്, $\frac{dy}{dx} + y = \sin x$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{y}{x\log x}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)y = e^x$$

രേഖീയ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ മറ്റൊരു രൂപം

$$\frac{dx}{dy} + P_1x = Q_1$$

ഇവിടെ P_1, Q_1 എന്നിവ സ്ഥിരസംഖ്യകളോ അല്ലെങ്കിൽ y മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ഏകദങ്ങളോ ആയിരിക്കണം.

ഉദാഹരണത്തിന്, (i) $\frac{dx}{dy} + x = \cos y$

(ii) $\frac{dx}{dy} + \frac{-2x}{y} = y^2e^{-y}$

ഒന്നാം ക്രമമുള്ള രേഖീയ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം കാണുന്ന വിധം.

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \dots (1)$$

ഇരുവശത്തെയും x മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന $g(x)$ എന്ന ഏകദം കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയാണ് എന്ന് കരുതിയാൽ.

$$g(x)\frac{dy}{dx} + P.(g(x))\,y = Q.g(x) \quad \dots (2)$$

$g(x)$ നെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നത് വലത് വശം $y.\,g(x)$ ന്റെ അവകലജം എന്ന രീതിയിലാണ്; അപ്പോൾ

$$g(x)\,\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}.\,g(x)\,y = \frac{d}{dx}\,[y.\,g(x)]$$

$$g(x).\,\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}.\,g(x)\,y = g(x)\,\frac{dy}{dx} + y\,.g'(x)$$

$$\mathrm{P}.\,g(x) = g'(x)$$

$$\mathrm{P} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$\int \mathrm{P}dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$$

$$\int \mathrm{P}\cdot dx = \log(g(x))$$

അതുകൊണ്ട് $g(x) = e^{\int \mathrm{P}\,dx}$ എന്ന് കിട്ടും.

സമവാക്യം (1) ന്റെ ഇരുവശവും $e^{\int \mathrm{P}\,dx}$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ ഇടത് വശം ഒരു ഏകദത്തിന്റെ അവകലജമായി മാറും. $g(x) = e^{\int \mathrm{P}\,dx}$ എന്ന ഏകദത്തെ **ഇന്റഗ്രേറ്റിങ്ങ് ഫാക്ടർ** അഥവാ **സമാകലന ഘടകം** (Integrating factor) എന്ന് വിളിക്കും.

$g(x)$ ന്റെ വില സമവാക്യം (2) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$e^{\int \mathrm{P}\,dx}\,\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}\,e^{\int \mathrm{P}\,dx}\,y = \mathrm{Q}\cdot e^{\int \mathrm{P}\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y\,e^{\int \mathrm{P}\,dx}\right) = \mathrm{Q}e^{\int \mathrm{P}\,dx}$$

x ആസ്പദമാക്കി ഇരുഭാഗവും സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$y\cdot e^{\int \mathrm{P}dx} = \int\left(\mathrm{Q}\cdot e^{\int \mathrm{P}\,dx}\right)dx$$

$$y = e^{-\int \mathrm{P}\,dx}\cdot\int\left(\mathrm{Q}\cdot e^{\int \mathrm{P}\,dx}\right)dx + \mathrm{C}$$

ഇതാണ് (1) ന്റെ പൊതു പരിഹാരം.

ഒന്നാം ക്രമത്തിലുള്ള അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം കാണുന്ന ഘട്ടങ്ങൾ.

(i) ആദ്യമായി തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തെ $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതുക. (P, Q എന്നിവ സ്ഥിരസംഖ്യയോ, x മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ഏകദങ്ങളോ ആണ്.)

(ii) സമാകലന ഘടകം (I.F) = $e^{\int P\,dx}$ കാണുക.

(iii) തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരം.

$$y\,(\text{I.F}) = \int (Q\times \text{I.F})\,dx + C$$

ഇതിൽ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ രൂപം $\frac{dx}{dy}+P_1x=Q_1$, എന്നാണെങ്കിൽ (P_1, Q_1 എന്നിവ സ്ഥിര സംഖ്യയോ അല്ലെങ്കിൽ y മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ഏകദമോ ആണ്)

I.F = $e^{\int P_1 dy}$. പൊതുപരിഹാരം x . (I.F) = $\int (Q_1\times \text{I.F})\,dy + C$ ആണ്.

ഉദാഹരണം : 19

$\frac{dy}{dx}-y=\cos x$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം $\frac{dy}{dx}+Py=Q$, എന്ന രൂപത്തിലാണ്. $P=-1$, $Q=\cos x$

$$\text{I.F} = e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$$

e^{-x} കൊണ്ട് ഇരുവശവും ഗുണിച്ചാൽ

$$e^{-x}\frac{dy}{dx}-e^{-x}y = e^{-x}\cos x$$

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{-x}\right)=e^{-x}\cos x$$

ഇരുവശവും സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$ye^{-x} = \int e^{-x} \cos x \, dx + C \ldots \ (1)$$

ye^{-x} നെ I എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചാൽ

$$I = \int e^{-x} \cos x \, dx$$

$$= \cos x \left(\frac{e^{-x}}{-1} \right) - \int (-\sin x)(-e^{-x}) \, dx$$

$$= -\cos x \, e^{-x} - \int \sin x \, e^{-x} \, dx$$

$$= -\cos x \, e^{-x} - \left[\sin x (-e^{-x}) - \int \cos x \, (-e^{-x}) \, dx \right]$$

$$= -\cos x \, e^{-x} + \sin x \, e^{-x} - \int \cos x \, e^{-x} \, dx$$

$$I = -e^{-x} \cos x + \sin x \, e^{-x} - I$$

അതായത്, $2I = (\sin x - \cos x) \, e^{-x}$

$$I = \frac{(\sin x - \cos x) e^{-x}}{2}$$

സമവാക്യം (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$ye^{-x} = \left(\frac{\sin x - \cos x}{2} \right) e^{-x} + C$$

$$y = \left(\frac{\sin x - \cos x}{2} \right) + C e^{x}$$

ഉദാഹരണം : 20

$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \ (x \neq 0)$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2$$

ഇരുവശവും x കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x$$

ഇത് $\dfrac{dy}{dx}+\text{P}y=\text{Q}$, എന്ന രൂപത്തിലാണ്. $\text{P}=\dfrac{2}{x}$, $\text{Q}=x$.

അതുകൊണ്ട്, $\text{I.F} = e^{\int\frac{2}{x}dx} = e^{2\log x} = e^{\log x^2} = x^2 \quad [e^{\log f(x)} = f(x)]$

പൊതുപരിഹാരം,

$$y\,.\,x^2 = \int (x)(x^2)\,dx + \text{C} = \int x^3 dx + \text{C}$$

$$y\,.\,x^2 = \frac{x^4}{4} + \text{C}$$

$$y = \frac{x^2}{4} + \text{C}x^{-2}$$

ഉദാഹരണം : 21

$y\,dx-(x+2y^2)\,dy=0$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തെ

$$\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y} = 2y \text{ എന്നെഴുതാം}$$

ഇത് $\dfrac{dx}{dy}+\text{P}_1 x=\text{Q}_1$ എന്ന രൂപത്തിലാണ്, $\text{P}_1 = -\dfrac{1}{y}$, $\text{Q}_1 = 2y$.

$$\text{I.F} = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = e^{-\log y} = e^{\log (y)^{-1}} = \frac{1}{y}$$

പൊതുപരിഹാരം,

$$x\frac{1}{y} = \int (2y)\left(\frac{1}{y}\right)dy + \text{C}$$

$$\frac{x}{y} = 2y + \text{C}$$

$$x = 2y^2 + \text{C}y$$

ഉദാഹരണം : 22

$\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2x + x^2 \cot x \ (x \neq 0)$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിനു $x = \frac{\pi}{2}$ ആയാൽ $y = 0$ ആകുന്ന പ്രത്യേക പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, എന്ന രൂപത്തിലാണ്.

$P = \cot x$, $Q = 2x + x^2 \cot x$.

$$\text{I.F} = e^{\int \cot x\, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$$

അതുകൊണ്ട് പൊതുപരിഹാരം,

$$y \,.\, \sin x = \int (2x + x^2 \cot x) \sin x\, dx + C$$

$$y \sin x = \int 2x \sin x\, dx + \int x^2 \cos x\, dx + C$$

$$y \sin x = \sin x \left(\frac{2x^2}{2}\right) - \int \cos x \left(\frac{2x^2}{2}\right) dx + \int x^2 \cos x\, dx + C$$

$$y \sin x = x^2 \sin x - \int x^2 \cos x\, dx + \int x^2 \cos x\, dx + C$$

$$y \sin x = x^2 \sin x + C \ \ldots (1)$$

സമവാക്യം (1) ൽ $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ ആരോപിച്ചാൽ

$$0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C$$

$$C = \frac{-\pi^2}{4}$$

$$y \sin x = x^2 \sin x - \frac{\pi^2}{4}$$

അല്ലെങ്കിൽ, $y = x^2 - \frac{\pi^2}{4 \sin x} (\sin x \neq 0)$

എന്നതാണ് നിശ്ചിത പ്രത്യേക പരിഹാരം.

ഉദാഹരണം : 23

(0, 1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്ന് പോകുന്ന ഒരു വക്രത്തിലെ പൊതുബിന്ദുവായ (x, y) ലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ്, സൂചകസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെകൂടെ x സൂചകസംഖ്യകൂട്ടുന്നതാണെങ്കിൽ വക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

പരിഹാരം

തൊടുവരയുടെ ചരിവ് $\frac{dy}{dx}$ ആണ്.

അതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധനകളിൽ നിന്നും

$\frac{dy}{dx} = x + xy$ എന്ന് കിട്ടും.

$\frac{dy}{dx} - xy = x$ എന്നത് $\frac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q}$, എന്ന രൂപത്തിലാണ്. $\text{P} = -x$, $\text{Q} = x$.

$$\text{I.F} = e^{\int -x\,dx} = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

പൊതുപരിഹാരം $y \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} = \int (x)\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)dx + \text{C}$ ... (2)

$$\text{I} = \int (x)\, e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx$$

$\frac{-x^2}{2} = t$, എന്നെടുത്താൽ $-x\,dx = dt$ അല്ലെങ്കിൽ $x\,dx = -dt$.

$$\text{അതുകൊണ്ട്, } \text{I} = -\int e^t dt = -e^t = -e^{\frac{-x^2}{2}}$$

ഇത് (2) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$y\,e^{\frac{-x^2}{2}} = -e^{\frac{-x^2}{2}} + \text{C}$$

$$\text{അല്ലെങ്കിൽ, } y = -1 + \text{C}\,e^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{... (3)}$$

(3) സൂചിപ്പിക്കുന്നത് പൊതുപരിഹാരമാണ് അല്ലെങ്കിൽ വക്രങ്ങളുടെ കൂട്ടമാണ്. ഇതിൽ നിന്നും പ്രത്യേക വക്രത്തെ കണ്ടുപിടിക്കാൻ (0, 1) എന്ന ബിന്ദു ആരോപിക്കണം.

അപ്പോൾ $\text{C} = 2$ എന്ന് ലഭിക്കും.

അതുകൊണ്ട്, $y = -1 + 2e^{\frac{x^2}{2}}$ എന്നതാണ് ആവശ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന വക്രം.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.6

തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെയും പൊതുപരിഹാരം കാണുക.

1. $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$ **2.** $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$ **3.** $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$

4. $\frac{dy}{dx} + (\sec x)y = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$ **5.** $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$

6. $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$ **7.** $x \log x \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \log x$

8. $(1 + x^2)\, dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx\ (x \ne 0)$

9. $x\frac{dy}{dx} + y - x + xy \cot x = 0\ (x \ne 0)$ **10.** $(x + y)\frac{dy}{dx} = 1$

11. $y\, dx + (x - y^2)\, dy = 0$ **12.** $(x + 3y^2)\frac{dy}{dx} = y\ (y > 0)$.

13 മുതൽ 15 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾക്കനുസരിച്ചുള്ള പ്രത്യേക പരിഹാരം കാണുക.

13. $\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x;\ y = 0;\ x = \frac{\pi}{3}$

14. $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{1 + x^2};\ y = 0;\ x = 1$

15. $\frac{dy}{dx} - 3y \cot x = \sin 2x;\ y = 2;\ x = \frac{\pi}{2}$

16. ആധാരബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്ന് പോകുന്ന ഒരു വക്രത്തിലെ പൊതുവായ ബിന്ദു (x, y) ലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് x സൂചകസംഖ്യയുടെയും y സൂചകസംഖ്യയുടെയും തുകയ്ക്ക് തുല്യമായാൽ വക്രം കാണുക.

17. ഒരു വക്രത്തിലെ പൊതുവായ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയുടെ ചരിവിനെക്കാൾ 5 കൂടുതലാണ് ആ ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളുടെ തുക. വക്രം (0, 2) എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്നുവെങ്കിൽ വക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

18. $x\frac{dy}{dx}-y=2x^2$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ സമാകലന ഘടകം.

(A) e^{x} (B) e^{y} (C) $\frac{1}{x}$ (D) x

19. $(1-y^2)\frac{dx}{dy}+yx=ay(-1<y<1)$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ സമാകലന ഘടകം

(A) $\frac{1}{y^2-1}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ (C) $\frac{1}{1-y^2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം: 24

c_1, c_2 എന്നിവ സ്ഥിരസംഖ്യകളായാൽ, $y = c_1\, e^{ax}\cos bx + c_2\, e^{ax}\sin bx$, എന്നത് $\frac{d^2y}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+\left(a^2+b^2\right)y=0$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരമാണോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

$$y = e^{ax}\,[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx] \quad \ldots (1)$$

അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}\left[-bc_1\sin bx+bc_2\cos bx\right]+\left[c_1\cos bx+c_2\sin bx\right]e^{ax}\cdot a$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}[(bc_2+ac_1)\cos bx+(ac_2-bc_1)\sin bx] \quad \ldots (2)$$

വീണ്ടും അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax}[(bc_2+ac_1)(-b\sin bx)+(ac_2-bc_1)(b\cos bx)] +$$

$$[(bc_2+ac_1)\cos bx+(ac_2-bc_1)\sin bx]\, e^{ax}.a$$

$$= e^{ax}[(a^2c_2-2abc_1-b^2c_2)\sin bx+(a^2c_1+2abc_2-b^2c_1)\cos bx] \quad \ldots (3)$$

(1), (2), (3) എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിൽ ആരോപിച്ചാൽ.

$$\text{L.H.S.} = e^{ax}[(a^2c_2-2abc_1-b^2c_2)\sin bx+(a^2c_1-2abc_2-b^2c_1)\cos bx]$$

$$-2ae^{ax}[(bc_2+ac_1)\cos bx+(ac_2-bc_1)\sin bx]+(a^2+b^2)e^{ax}[(c_1\cos bx+c_2\sin bx]$$

$$= e^{ax}\left[\begin{array}{l}\left(a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2 - 2a^2c_2 + 2abc_1 + a^2c_2 + b^2c_2\right)\sin bx \\ +(a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1 - 2abc_2 - 2a^2c_1 + a^2c_1 + b^2c_1)\cos bx\end{array}\right]$$

$= e^{ax}[0 \times \sin bx + 0\cos bx] = 0$ എന്ന് ലഭിക്കും.

അതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള ഏകദം അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരമാണ്.

ഉദാഹരണം: 25

രണ്ടാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലുള്ളതും രണ്ട് അക്ഷങ്ങൾ തൊടുവരയായിട്ടുള്ളതുമായ എല്ലാ വൃത്തങ്ങളുടെയും അവകലജ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും ഒരു വൃത്തമെടുത്താൽ അതിന്റെ കേന്ദ്രം $(-a, a)$ യും ആരം a യും ആയിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് സമവാക്യം.

$$(x + a)^2 + (y - a)^2 = a^2 \quad \ldots (1)$$

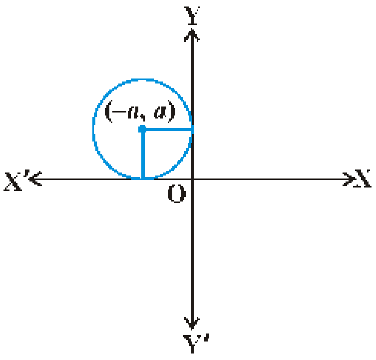
$$x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + a^2 = 0 \quad \ldots (2)$$

അവകലനം ചെയ്താൽ

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2a - 2a\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = a\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)$$

$$a = \frac{x + y\,y'}{y' - 1}$$



ചിത്രം 9.6

(1) ൽ നിന്നും

$$\left[x + \frac{x + y\,y'}{y' - 1}\right]^2 + \left[y - \frac{x + y\,y'}{y' - 1}\right]^2 = \left[\frac{x + y\,y'}{y' - 1}\right]^2$$

$$[xy' - x + x + y\,y']^2 + [y\,y' - y - x - y\,y']^2 = [x + y\,y']^2$$

$$(x + y)^2\,y'^2 + [x + y]^2 = [x + y\,y']^2$$

$(x + y)^2\,[(y')^2 + 1] = [x + y\,y']^2$ തന്നിട്ടുള്ള വൃത്തങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 26

$\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന് (0, 0) എന്ന ബിന്ദുവിലെ പ്രത്യേക പരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

$$\frac{dy}{dx} = e^{(3x+4y)}$$ എന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം.

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x} \, . \, e^{4y} \ldots (1)$$

$$\frac{dy}{e^{4y}} = e^{3x}\, dx$$

$$\int e^{-4y} dy = \int e^{3x} dx$$

$$\frac{e^{-4y}}{-4} = \frac{e^{3x}}{3} + C$$

$x = 0, y = 0$ എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ

$$C = \frac{-7}{12}$$ എന്നു കിട്ടും.

സമവാക്യം $4\, e^{3x} + 3\, e^{-4y} - 7 = 0$ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം ആണ്.

ഉദാഹരണം: 27

$(x\, dy - y\, dx)\, y \sin\left(\frac{y}{x}\right) = (y\, dx + x\, dy)\, x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതു പരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തെ

$$\left[x\, y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right] dy = \left[xy \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right] dx$$ എന്നെഴുതാം.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{xy\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുവശത്തിന്റെ അംശത്തെയും ഛേദത്തെയും x^2 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \ldots (1)$$

$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ രൂപത്തിലായതു കൊണ്ട് ഇതൊരു സമകൃതി അവകലജ സമവാക്യമാണ്.

ഇതിന്റെ പരിഹാരം കാണുന്നതിന് $y = vx$ എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + v^2\sin v}{v\sin v - \cos v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2v\cos v}{v\sin v - \cos v}$$

$$\left(\frac{v\sin v - \cos v}{v\cos v}\right)dv = \frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{v\sin v - \cos v}{v\cos v}\right)dv = 2\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int\tan v\,dv - \int\frac{1}{v}\,dv = 2\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\log|\sec v| - \log|v| = 2\log|x| + \log|C_1|$$

$$\log\left|\frac{\sec v}{v\,x^2}\right| = \log|C_1|$$

$$\frac{\sec v}{v x^2} = \pm C_1 \ \dots (3)$$

$v = \dfrac{y}{x}$ എന്ന് മാറ്റിയാൽ

$$\frac{\sec\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)(x^2)} = C,\ C = \pm C_1$$

സമവാക്യം $\sec\left(\dfrac{y}{x}\right) = Cxy$ തന്നിട്ടുള്ള അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം: 28

$(\tan^{-1}y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതു പരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$$ എന്നെഴുതാം ... (1)

ഇത് $\dfrac{dx}{dy} + P_1\, x = Q_1$ എന്ന രൂപത്തിലാണ്.

$$P_1 = \frac{1}{1+y^2}, \quad Q_1 = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}.$$

$$\text{I.F} = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1}y}$$

പൊതുപരിഹാരം

$$x e^{\tan^{-1}y} = \int \left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1}y} dy + C \ \dots (2)$$

$$I = \int \left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1}y} dy$$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$\tan^{-1} y = t$ ആയാൽ $\left(\frac{1}{1+y^2}\right) dy = dt$ ആയിരിക്കും

$$I = \int t\, e^t dt = t\, e^t - \int 1 \,.\, e^t\, dt = t\, e^t - e^t = e^t\,(t-1)$$

$$I = e^{\tan^{-1} y}(\tan^{-1} y - 1)$$

(2) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$x \,.\, e^{\tan^{-1} y} = e^{\tan^{-1} y}(\tan^{-1} y - 1) + C$$

$x = (\tan^{-1} y - 1) + C\, e^{-\tan^{-1} y}$ എന്നത് പൊതുപരിഹാരമാകുന്നു.

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. തന്നിരിക്കുന്ന അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ ക്രമവും കൃതിയും കാണുക.

(i) $\frac{d^2 y}{dx^2} + 5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6y = \log x$ (ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 7y = \sin x$

(iii) $\frac{d^4 y}{dx^4} - \sin\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) = 0$

2. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഏകദങ്ങൾ അവയ്ക്ക് നേരെ നൽകിയിരിക്കുന്ന അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

(i) $y = a\, e^x + b\, e^{-x} + x^2$: $x\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy + x^2 - 2 = 0$

(ii) $y = e^x\,(a \cos x + b \sin x)$: $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(iii) $y = x \sin 3x$: $\frac{d^2 y}{dx^2} + 9y - 6\cos 3x = 0$

(iv) $x^2 = 2y^2 \log y$: $(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$

3. $(x - a)^2 + 2y^2 = a^2$ എന്ന വക്രങ്ങളുടെ കുട്ടത്തിന് അനുയോജ്യമായ അവകലജ സമവാക്യം കാണുക.

4. $(x^3 - 3xy^2)\,dx = (y^3 - 3x^2y)\,dy$, എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതു പരിഹാരമാണ് $x^2 - y^2 = c\,(x^2 + y^2)^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലുള്ളതും രണ്ട് അക്ഷങ്ങളെയും സ്പർശിക്കുന്നതുമായ വൃത്തങ്ങളുടെ കുട്ടത്തിന് അനുയോജ്യമായ അവകലജ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

6. $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരം കാണുക.

7. $\frac{dy}{dx} + \frac{y^2+y+1}{x^2+x+1} = 0$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരമാണ് $(x + y + 1) = A\,(1 - x - y - 2xy)$, എന്നു തെളിയിക്കുക.

8. $\sin x \cos y\, dx + \cos x \sin y\, dy = 0$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യം സൂചിപ്പിക്കുന്നതും, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നുപോകുന്നതുമായ വക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

9. $(1 + e^{2x})\,dy + (1 + y^2)\,e^x\,dx = 0$, എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിനു $y = 1$, $x = 0$ ആയി വരുന്ന പ്രത്യേക പരിഹാരം കാണുക.

10. $y\,e^{\frac{x}{y}}dx = \left(x\,e^{\frac{x}{y}} + y^2\right)dy\ (y \neq 0)$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം കാണുക.

11. $(x - y)\,(dx + dy) = dx - dy$, എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന് $x = 0$, ആകുമ്പോൾ $y = -1$ ആകുന്ന പ്രത്യേക പരിഹാരം കാണുക. (സൂചന $x - y = t$ എന്ന് ആരോപിക്കുക.)

12. $\left[\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right]\frac{dx}{dy} = 1\ (x \neq 0)$ ആയ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം കാണുക.

13. $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 4x\,\text{cosec}\,x\ (x \neq 0)$, എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിനു $x = \frac{\pi}{2}$ ആകുമ്പോൾ $y = 0$ ആകുന്ന പ്രത്യേക പരിഹാരം കാണുക.

14. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = 2e^{-y} - 1$, എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന് $x = 0$ ആകുമ്പോൾ $y = 0$ ആകുന്ന പ്രത്യേക പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക.

15. ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ ജനസംഖ്യ തുടർച്ചയായി വർദ്ധിക്കുന്ന നിരക്ക് ആ സമയത്ത് ജീവിച്ചിരിക്കുന്ന ജനങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന് നേർ അനുപാതത്തിലാണ്. 1999 ൽ ജനസംഖ്യ 20000 വും 2004 ൽ 25000 വും ആയിരുന്നെങ്കിൽ 2009 ലുള്ള ജനസംഖ്യ കണക്കാക്കുക.

16. $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y} = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരം.

(A) $xy = C$ (B) $x = Cy^2$ (C) $y = Cx$ (D) $y = Cx^2$

17. $\dfrac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതു പരിഹാരം ഏത്?

(A) $y\,e^{\int P_1 dy} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1 dy}\right) dy + C$

(B) $y \,.\, e^{\int P_1 dx} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1 dx}\right) dx + C$

(C) $x\,e^{\int P_1 dy} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1 dy}\right) dy + C$

(D) $x\,e^{\int P_1 dx} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1 dx}\right) dx + C$

18. $e^x dy + (y\,e^x + 2x)\,dx = 0$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരം ഏത്?

(A) $x\,e^y + x^2 = C$ (B) $x\,e^y + y^2 = C$

(C) $y\,e^x + x^2 = C$ (D) $y\,e^y + x^2 = C$

സംഗ്രഹം

- ഒരു സ്വതന്ത്രചരത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ആശ്രിതചരത്തിന്റെ അവകലജം ഉൾപ്പെടുന്ന സമവാക്യത്തെ അവകലജ സമവാക്യം എന്നു പറയുന്നു.
- ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിൽ ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു സ്വതന്ത്രചരത്തെ ആധാരമാക്കിയുള്ള ആശ്രിത ചരത്തിന്റെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന അവകലജ ത്തിന്റെ ക്രമത്തെയാണ് ആ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം എന്ന് പറയുന്നത്.
- ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിലെ അവകലജങ്ങളെല്ലാം ബഹുപദരൂപത്തി ലാണെങ്കിൽ മാത്രമേ അതിന്റെ കൃതി നിർവചിക്കാൻ കഴിയൂ.
- ബഹുപദ രൂപത്തിലുള്ള അവകലജ സമവാക്യത്തിലെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന ക്രമമുള്ള അവകലജത്തിന്റെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന കൃതിയാണ് ആ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ കൃതി.
- അവകലജ സമവാക്യം ശരിയായി വരുന്ന ഏകദത്തെ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം എന്ന് പറയുന്നു. ഒരു അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ കൃതിക്ക് തുല്യമായ സ്വിര സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുന്ന പരിഹാരത്തെ പൊതുപരി ഹാരം എന്ന് പറയുന്നു. അതുപോലെ സ്ഥിര സംഖ്യകളില്ലാത്ത പരിഹാ രത്തെ പ്രത്യേക പരിഹാരം എന്ന് പറയുന്നു.
- ഒരു ഏകദത്തിന്റെ അവകലജ സമവാക്യം കണ്ടെത്താൻ അതിലെ സ്വിര സംഖ്യകളുടെ എണ്ണത്തിന് തുല്യമായ പ്രാവശ്യം ഏകദത്തെ അവകലനം നടത്തുകയും ലഭിച്ച സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സ്വിരസംഖ്യകളെ ഒഴി വാക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.
- ചരങ്ങളെ വേർതിരിച്ച് എഴുതാൻ കഴിയുന്ന അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരത്തിനായി ചരങ്ങളെ വേർതിരിക്കുന്ന രീതി അവലംബിക്കുന്നു. അതായത് y ഉൾപ്പെടുന്ന പദങ്ങൾ dy യോടൊപ്പവും x ഉൾപ്പെടുന്ന പദ ങ്ങൾ dx നൊടൊപ്പവും വേർതിരിക്കുന്നു.
- $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ അല്ലെങ്കിൽ $\dfrac{dx}{dy} = g(x, y)$ എന്നീ രൂപത്തിൽ വരുന്ന അവക ലജ സമവാക്യത്തിൽ $f(x, y)$, $g(x, y)$ എന്നിവ പൂജ്യം കൃതിയുള്ള സമ കൃതി ഏകദങ്ങളാണെങ്കിൽ ഈ സമവാക്യങ്ങളെ സമകൃതി അവകലജ സമവാക്യങ്ങളെന്ന് പറയുന്നു.
- $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിൽ P, Q സ്വിരസംഖ്യകളോ x ലെ ഏകദമോ ആയാൽ സമവാക്യത്തെ രേഖീയ അവകലജ സമവാക്യം എന്ന് പറയുന്നു.

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

ശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാനപ്പെട്ട ഭാഷ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റേതാണ്. ഇതിനു തുടക്കമായത് 1675, നവംബർ 11-ൽ G.W.F ലൈബ്നിറ്റ്സ് (1646 - 1716) $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2$ എന്ന സമവാക്യം വിശദീകരിക്കുന്നതിലൂടെ $\int$, dy എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ നിർദേശിക്കുകയും ചെയ്തപ്പോഴാണ്. ശരിക്കും പറഞ്ഞാൽ, ഒരു വക്രത്തിലെ തൊടുവരയുടെ സമവാക്യം അറിയാമെങ്കിൽ ആ വക്രം കണ്ടെത്തുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കാണുന്നതിൽ വ്യാപൃതനായിരുന്നു ലൈബ്നിറ്റ്സ്. ഈ ചിന്തകൾ 1691-ൽ ചരങ്ങളെ വേർതിരിക്കുന്ന രീതിയിലേക്ക് നയിച്ചു. (അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാര രീതിയിലേക്ക് എത്തിച്ചേർന്നു. തുടർന്ന്, അധികം വൈകാതെ ഒന്നാം കൃതി രേഖീയ അവകലജസമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം). ആശ്ചര്യജനകമായ കാര്യം എന്ന് അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ ആവിർഭാവത്തിന്റെ 25 വർഷത്തിനുള്ളിൽ ഒരു വ്യക്തിയിൽ നിന്നും ഇത്രയും പരിഹാരരീതികൾ വന്നു എന്നതാണ്. ആരംഭകാലഘട്ടങ്ങളിൽ ഒരു അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം എന്നതിന് പകരം ഉപയോഗിച്ചിരുന്ന വാക്ക് അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ സമാകലനം എന്നായിരുന്നു. ജെയിംസ് ബർണ്ണുളി (1654 - 1705) യാണ് 1690 ൽ ഈ വാക്ക് ഉപയോഗിച്ചു തുടങ്ങിയത്. അവകലജ സമവാക്യങ്ങളുടെ ആവിർഭാവത്തിനു 100 വർഷങ്ങൾക്കുശേഷം 1774 ൽ പരിഹാരം എന്ന വാക്ക് J.I. ലഗ്രാഞ്ഷ് (1736 - 1813) ആണ് ആദ്യമായി ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ഹെന്റി പോയിൻകാരെ (Jules Henri Poincare (1854 - 1912)) പരിഹാരം എന്ന വാക്കിന്റെ ഉപയോഗത്തിനു വേണ്ടി ശക്തമായി വാദിക്കുകയും തുടർന്ന് ഈ വാക്കിന് സാങ്കേതിക ഭാഷയിലുള്ള ഇന്നത്തെ സ്ഥാനം ലഭിക്കുകയും ചെയ്തു. ചരങ്ങളെ വേർതിരിക്കുന്ന രീതി കൊണ്ടുവന്നതിന്റെ പ്രശസ്തി ജെയിംസ് ബെർണ്ണുളിയുടെ ഇളയ സഹോദരൻ ജോൺ ബെർണ്ണുളിയുടെ (1667 - 1748) പേരിലാണ്.

ജ്യാമിതീയ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പ്രയോഗശൈലിയെക്കുറിച്ചും വിശദീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ സങ്കീർണമായ സ്വഭാവങ്ങളിലേക്ക് ആദ്യമായി വെളിച്ചം വീശിയത് ജോൺ ബെർണ്ണുളിയാണ്. 1715, മെയ് 20 ന് അദ്ദേഹം ലൈബ്നിറ്റ്സിന് അയച്ച കത്തിൽ $x^2 y'' = 2y$, എന്ന അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം നിർദ്ദേശിക്കുകയുണ്ടായി. ഇത് സമവക്രം, അധിവക്രം, ഒരു വിഭാഗം മൂന്നാം കൃതി വക്രങ്ങൾ എന്നീ മൂന്ന് തരത്തിലുള്ള വക്രങ്ങളിലേക്ക് നയിക്കുകയുണ്ടായി. ഒറ്റ നോട്ടത്തിൽ ലളിതമെന്ന് തോന്നുന്ന ഈ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം എത്രമാത്രം വൈവിധ്യമാർ

ന്നതാണെന്ന് ഇതിൽ നിന്നും മനസ്സിലാക്കാം. ഇരുപതാംനൂറ്റാണ്ടിന്റെ മധ്യത്തോടുകൂടി അവകലജസമവാക്യത്തിന്റെ ഇത്തരത്തിലുള്ള സങ്കീർണസ്വഭാവത്തെക്കുറിച്ച് ആഴത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാൻ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ ഗുണാത്മക അപഗ്രഥനം (*qualitative analysis of differential equations*) എന്ന തലക്കെട്ടിൽ പുതിയമേഖല തുടങ്ങി. ഈ മേഖല ഇന്നത്തെ കാലഘട്ടത്തിലെ അവകലജ സമവാക്യത്തിന്റെ സൂക്ഷ്മപരിശോധനകളിൽ ഒഴിച്ചുകൂടാൻ പറ്റാത്തതാണ്.

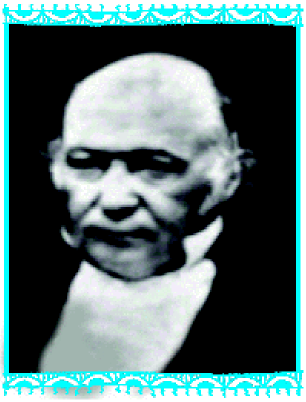
M1Q5Z9

അധ്യായം **10**

സദിശ ബീജഗണിതം (VECTOR ALGEBRA)

❖ *സാധാരണ ശാസ്ത്രവിഷയങ്ങളിൽ ഒരു തലമുറ രൂപീകരിച്ച കാര്യങ്ങൾ മറ്റൊരു തലമുറ നിരാകരിക്കുകയും ഒരിക്കൽ സ്ഥാപിച്ചെടുത്ത കാര്യങ്ങൾ മറ്റൊരിക്കൽ ഉപയോഗശൂന്യമാവുകയും ചെയ്യുന്നു. എന്നാൽ ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിൽ മാത്രമാണ് ഒരു തലമുറ ഒരിക്കൽ രൂപീകരിച്ച അടിസ്ഥാനത്തിന്മേൽ പുതിയവ പണിയുന്നത് - ഹെർമൻ ഹെൻകൽ* ❖

10.1 ആമുഖം



വില്യം ആർ. ഹാമിൽട്ടൻ
(1805-1865)

നിത്യജീവിതത്തിൽ നാം സാധാരണ അഭിമുഖീകരിക്കുന്ന ചില ചോദ്യങ്ങൾ പരിശോധിക്കാം.

i. നിങ്ങളുടെ ഉയരമെന്ത്?
ii. ഒരു കാൽപന്തുകളിക്കാരൻ മൈതാനത്തു വെച്ച് തന്റെ കുട്ടുകാരന് പാസ്സ് നൽകുന്നതെങ്ങനെ?
iii. A എന്ന നഗരത്തിൽ നിന്ന് B യിലേക്ക് പോകുന്നതെങ്ങനെ?

മുകളിലുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം നൽകുമ്പോഴുള്ള വ്യത്യാസങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കുക. ഒന്നാമത്തെ ചോദ്യത്തിന് 165 സെ.മീറ്റർ എന്ന ഉത്തരം നൽകാം. എന്നാൽ രണ്ടാമത്തെ ചോദ്യത്തിന് അഞ്ച് മീറ്റർ അകലെയുള്ള കുട്ടുകാരന് 5 മീറ്റർ അകലേക്ക് പന്ത് തട്ടണം എന്നു മാത്രമല്ല, ഏതു ദിശയിലേക്ക് തട്ടണം എന്നു കൂടി പ്രാധാന്യമുള്ളതാണ്. ഇതുപോലെ മൂന്നാമത്തെ ചോദ്യത്തിന് A യിൽ നിന്ന് 50 കി.മീറ്റർ ദൂരേക്ക് പോകണം എന്ന ഉത്തരം പര്യാപ്തമല്ല. ഏത് ദിശയിലേക്ക് പോകണമെന്നും പറയേണ്ടതുണ്ട്.

ഈ വ്യത്യാസമാണ് സദിശം എന്ന ആശയത്തിന് അടിസ്ഥാനം നൽകുന്നത്. ഒന്നാമത്തെ ഉത്തരത്തിൽ അളവ് വലിപ്പം (Magnitude) മാത്രമാണ്. എന്നാൽ രണ്ടും മൂന്നും ചോദ്യങ്ങളിലെ ഉത്തരത്തിന് വലിപ്പം (ദൂരം) മാത്രം മതിയാകില്ല എന്നു കാണാം. ഇവിടെ ദിശ (Direction) കൂടി പ്രതിപാദിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

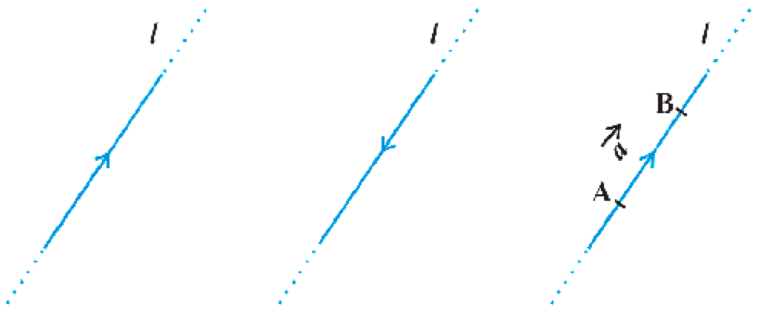
വലിപ്പം മാത്രമുള്ള അളവുകളെ അദിശം (Scalar) എന്നും വലിപ്പവും ദിശയുമുള്ള ഭൗതിക അളവുകളെ സദിശം (vector) എന്നും വിളിക്കുന്നു.

ഗണിതശാസ്ത്രം, ഊർജതന്ത്രം, എഞ്ചിനീയറിംഗ് എന്നിവയിൽ സാധാരണയായി രണ്ടു തരം അളവുകളും ഉപയോഗിക്കുന്നു.

നീളം, പിണ്ഡം, സമയം, ദൂരം, വേഗം, പരപ്പളവ്, വ്യാപ്തം, ഊഷ്മാവ്, പ്രവൃത്തി, പണം, വോൾട്ടത, സാന്ദ്രത, പ്രതിരോധം തുടങ്ങിയവ അദിശങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണ മാണ്. എന്നാൽ സ്ഥാനാന്തരം, ത്വരണം, പ്രവേഗം, ബലം, തൂക്കം, ആവേഗം, വൈദ്യുത മണ്ഡലത്തിന്റെ തീവ്രത തുടങ്ങിയവ സദിശങ്ങളാണ്.
ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം സദിശത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ, അവയുടെ വിവിധ ക്രിയകൾ, പ്രത്യേകതകൾ എന്നിവയെപ്പറ്റിയാണ് പഠിക്കുന്നത്.

10.2 ചില അടിസ്ഥാന ആശയങ്ങൾ

ഒരു തലത്തിലോ ത്രിമാന സ്ഥലത്തോ (space) ഉള്ള ഒരു രേഖയാണ് l എന്നു കരുതുക. അമ്പ് ചിഹ്നം നൽകി ഈ രേഖയ്ക്ക് രണ്ട് ഭാഗത്തേക്കും ദിശ നൽകാവുന്നതാണ്. ഈ വിധം ദിശ സൂചിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന് നീളവും ദിശയുമുണ്ട്. ദിശ സൂചിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡം ഉപയോഗിച്ച് നാം സദിശങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ചിത്രം 10.1 (i), (ii) എന്നിവ കാണുക.



ചിത്രം 10.1

സദിശ രേഖയിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ A, B എന്നിവ പരിഗണിച്ചാൽ (ചിത്രം 10.1(iii)) ദിശയുള്ള ഒരു രേഖാഖണ്ഡം ലഭിക്കുന്നു.

നിർവചനം 1 : ഒരേ സമയം വലിപ്പവും ദിശയും ഉള്ള ഭൗതിക അളവാണ് സദിശം.

ചിത്രം (10.1(iii)) ൽ സൂചിപ്പിച്ചത് ഒരു സദിശമാണെന്ന് ശ്രദ്ധിക്കുക. ഇതിനെ $\overline{AB}$ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{a}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. ഇത് വായിക്കുന്നത് യഥാക്രമം 'സദിശം $\overline{AB}$' അല്ലെങ്കിൽ 'സദിശം $\vec{a}$' എന്നാണ്.

ഇവിടെ സദിശവും സദിശ രേഖയും തമ്മിലുള്ള പ്രധാന വ്യത്യാസമെന്താണ്? രേഖക്ക് തുടക്കവും ഒടുക്കവുമില്ല എന്ന് നമുക്കറിയാം. എന്നാൽ സദിശം $\overline{AB}$

യുടെ ദിശ A യിൽ നിന്ന് ആരംഭിച്ച് B യിൽ അവസാനിക്കുന്നു. ആയതിനാൽ A എന്നത് ഈ സദിശത്തിന്റെ ആരംഭബിന്ദു (initial point) എന്നും B എന്നത് അവസാനബിന്ദു (terminal point) എന്നും പറയുന്നു.

ആരംഭബിന്ദുവിന്റേയും അവസാനബിന്ദുവിന്റേയും ഇടയിലുള്ള അകലമാണ് ആ സദിശത്തിന്റെ വലിപ്പം (magnitude). ഇതിനെ $|\overrightarrow{AB}|$, അല്ലെങ്കിൽ $|\vec{a}|$, അല്ലെങ്കിൽ a എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. അകലം അധിസംഖ്യ ആയതിനാൽ $|\vec{a}| > 0$ ആയിരിക്കും. ഇവിടെ അമ്പടയാളം സദിശത്തിന്റെ ദിശയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$\overrightarrow{AB}$ എന്നത് ത്രിമാന സമതലത്ത് എവിടെ വേണമെങ്കിലും പരിഗണിക്കാവുന്ന ഒരു സദിശമാണ്. അതുകൊണ്ടുതന്നെ $\overrightarrow{AB}$ ഒരു സ്വതന്ത്രസദിശമാണ് (Free vector) വലിപ്പമോ ദിശയോ മാറാതെ സദിശങ്ങളെ സ്ഥാനവ്യതിയാനം വരുത്താവുന്നതാണ്. ഇത്തരം സദിശങ്ങളാണ് **സ്വതന്ത്രസദിശങ്ങൾ**.

$\overrightarrow{AB}$ യുടെ ആരംഭബിന്ദുവായി ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുതന്നെ പരിഗണിക്കണമെന്നുണ്ടോ? അതുപോലെ അവസാന ബിന്ദു ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവാണോ?
ഒരു സ്വതന്ത്രസദിശത്തെ ത്രിമാന സമതലത്ത് എവിടെ വേണമെങ്കിലും പരിഗണിക്കാം എന്നതിനാൽ, അതിന്റെ ആരംഭബിന്ദു ഏതു ബിന്ദുവേണമെങ്കിലും ആകാവുന്നതാണ്. ഇവിടെ ദിശയോ വലിപ്പമോ മാറാൻ പാടില്ല എന്നു മാത്രം.
A യും B യും ഒരേ അഷ്ടകാംശത്തിലോ വിവിധ അഷ്ടകാംശങ്ങളിലോ വരാം.

ഒരിക്കൽ ആരംഭബിന്ദു A തെരഞ്ഞെടുത്താൽ $\overrightarrow{AB}$ യുടെ വലിപ്പം, ദിശ എന്നിവ മാറാതെ തന്നെ അവസാനബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്.
അങ്ങനെയെങ്കിൽ ത്രിമാനതലത്തിലെ ഏതൊരു സദിശത്തേയും ആധാരബിന്ദു (Origin) ആരംഭബിന്ദുവായി തെരഞ്ഞെടുത്ത് മാറ്റാമോയെന്ന് ചിന്തിക്കുക.

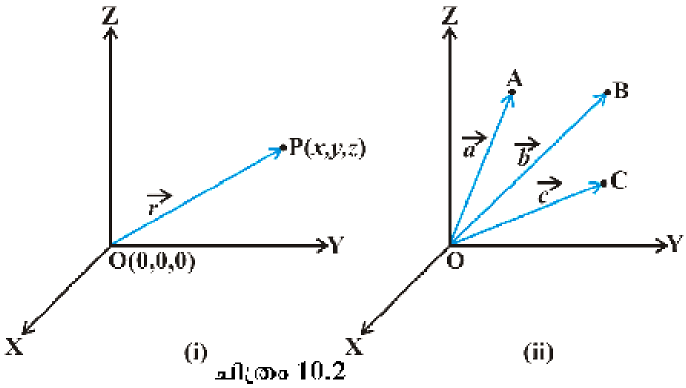
സ്ഥാനസദിശം (Position Vector)

11-ാം ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ച ത്രിമാന സൂചക (Rectangular coordinate) സംവിധാനത്തെക്കുറിച്ച് ഓർക്കുമല്ലോ. (ചിത്രം 10.2(i))

$P(x, y, z)$ എന്നത് ത്രിമാന തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവാണെന്നിരിക്കട്ടെ. $\overline{OP}$ എന്നത് P അവസാനബിന്ദുവും, O (ആധാരബിന്ദു) ആരംഭബിന്ദുവുമായ ഒരു സദിശമാണ്. ഈ സദിശത്തെ P യുടെ **സ്ഥാനസദിശം (Position Vector)** എന്നു പറയുന്നു. ദൂര സമവാക്യമുപയോഗിച്ച് $\overline{OP}$ യുടെ വലിപ്പം $|\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ എന്ന് കാണാം.

Vector കമാന്റ് ഉപയോഗിച്ച് സദിശങ്ങൾ നിർമിക്കാം. 3D Graphics തുറക്കുക (View → 3D Graphics) Vector (3, 2, -2) എന്ന input കമാന്റ് നൽകിയാൽ (3, 2, -2) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം ലഭിക്കും. A, B എന്നിവ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളായാൽ $\overline{AB}$ എന്ന സദിശം ലഭിക്കാൻ Vector (A, B) എന്ന് നൽകിയാൽ മതി.

സാധാരണയായി A, B, C എന്നി ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശം $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാം.

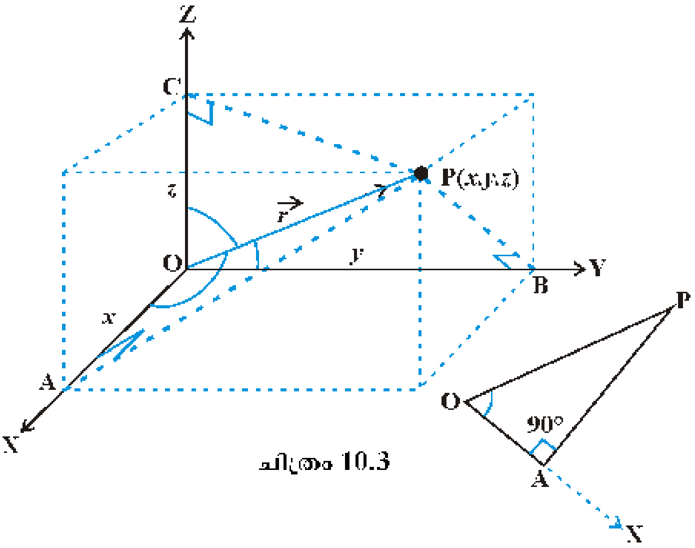


ചിത്രം 10.2

ദിശാകൊസൈൻസ് (Direction cosines)

P(x, y, z) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $\vec{r}$ പരിഗണിക്കുക. ചിത്രം 10.3 ൽ X, Y, Z അക്ഷങ്ങളുടെ അധി ദിശയുമായി നിർമിക്കുന്ന കോണുകൾ യഥാക്രമം α, β, γ എന്നിരിക്കട്ടെ ഈ കോണുകൾ ദിശാകോണുകൾ (Direction angles) എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ഇവയുടെ കൊസൈനുകൾ; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ എന്നിവയെ $\vec{r}$ ന്റെ ദിശാ കൊസൈനുകൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇവയെ യഥാക്രമം l, m, n എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

ചിത്രം 10.3 ൽ ΔOAP ഒരു മട്ടത്രികോണമാണെന്ന് കാണാം



ചിത്രം 10.3

ഇവിടെ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\cos\beta = \frac{y}{r}$, $\cos\gamma = \frac{z}{r}$ ആയിരിക്കും. കൂടാതെ P യുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ (lr, mr, nr) ആവുകയും ചെയ്യുന്നു. ഇവ ദിശാകൊസൈനുകൾക്ക് ആനുപാതികമായതിനാൽ, $\vec{r}$ ന്റെ ദിശാനുപാതങ്ങൾ (Direction ratios) എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

കൂടാതെ $a = lr$, $b = mr$, $c = nr$ എന്നെഴുതാവുന്നതാണ്.

> **കുറിപ്പ്**
>
> $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. പൊതുവെ $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$

10.3 വിവിധ തരം സദിശങ്ങൾ

1. **ശൂന്യസദിശം (Zero Vector)** : ആരംഭബിന്ദുവും അവസാനബിന്ദുവും ഒരേ ബിന്ദുവായ സദിശം പരിഗണിക്കുക. ഇത്തരം ഒരു സദിശത്തെക്കുറിച്ച് ചിന്തിക്കുക. ഈ സദിശത്തിന്റെ വലിപ്പമെന്ത്? ദിശയെന്താണ്?

   ഈ സദിശത്തിന്റെ വലിപ്പം പൂജ്യമായതിനാൽ ദിശ വ്യക്തമാക്കാൻ സാധ്യമല്ല. ഇതിനെ $\overrightarrow{AA}$ എന്നോ $\overrightarrow{BB}$ എന്നോ സൂചിപ്പിക്കാം. ഇവയെ ശൂന്യസദിശങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

2. **ഏകക സദിശം (Unit Vector)** വലിപ്പം ഒരു ഏകകം (1 യൂണിറ്റ്) ആയ സദിശമാണ് ഏകക സദിശം. $\vec{a}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ ദിശയിലുള്ള ഏകകസദിശത്തെ $\hat{a}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

3. **ആരംഭ ബിന്ദു ഒന്ന് ആയ സദിശങ്ങൾ (Coinitial Vectors)** രണ്ടോ അതിലധികമോ സദിശങ്ങൾക്ക് പൊതുവായി ഒരു ആരംഭ ബിന്ദു ഉണ്ടെങ്കിൽ അവയെ ആരംഭ ബിന്ദു ഒന്ന് ആയ സദിശങ്ങൾ എന്നു പറയാം.

4. **സമരേഖീയ സദിശങ്ങൾ (Collinear Vectors)** ഒരു രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായി വരുന്ന രണ്ടോ അതിലധികമോ സദിശങ്ങളാണ് സമരേഖീയ സദിശങ്ങൾ. ഇവിടെ വലിപ്പവും ദിശയും വ്യത്യസ്തങ്ങളാവാം.

> u എന്ന സദിശത്തിന് സമാന്തരമായി, A എന്ന ബിന്ദുവിൽ തുടങ്ങുന്ന സദിശം ലഭിക്കാൻ Vector from point ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ബിന്ദുവിലും സദിശത്തിലും ക്ലിക്കു ചെയ്താൽ മതി.

5. **തുല്യ സദിശങ്ങൾ (Equal Vectors)** $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നീ രണ്ടു സദിശങ്ങൾക്ക് തുല്യമായ വലിപ്പവും ദിശയും ഉണ്ടെങ്കിൽ അവ തുല്യ സദിശങ്ങൾ എന്നറിയപ്പെടുന്നു. കൂടാതെ $\vec{a} = \vec{b}$ എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ സദിശങ്ങളുടെ ആരംഭ/അവസാന ബിന്ദുക്കൾ വ്യത്യസ്തങ്ങളാകാം.

6. ന്യൂന സദിശം (Negative of a Vector)

ഒരു സദിശത്തിന്റെ വലിപ്പം തന്നിട്ടുള്ള സദിശത്തിന്റേതിന് തുല്യവും എന്നാൽ ദിശ നേരെ വിപരീതവുമായാൽ അതിനെ ആദ്യത്തേതിന്റെ ന്യൂനസദിശം എന്നു പറയുന്നു.

u എന്ന സദിശത്തിന്റെ ന്യൂനസദിശം ലഭിക്കാൻ -u എന്ന് input നൽകിയാൽ മതി.

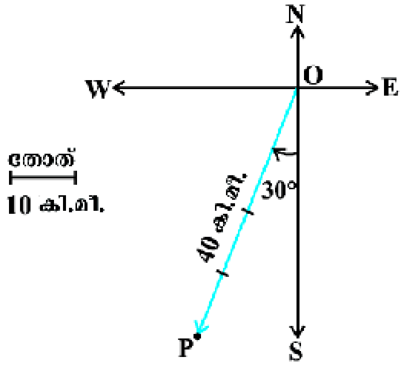
ഉദാ: $\overline{AB}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ ന്യൂനസദിശമാണ് $\overline{BA}$. കൂടാതെ $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

കുറിപ്പ്

ഈ അധ്യായത്തിൽ സ്വതന്ത്ര സദിശങ്ങളെക്കുറിച്ചാണ് പ്രതിപാദിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണം: 1

40 കി.മീ. അകലെ തെക്കുപടിഞ്ഞാറ് 30° അളവിലുള്ള സ്ഥാനചലനത്തെ ഗ്രാഫുപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുക.



ചിത്രം 10.4

പരിഹാരം

ചിത്രത്തിൽ (10.4) സദിശം $\overline{OP}$ എന്നത് ചോദ്യത്തിലുള്ള സ്ഥാനചലനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം : 2

ചുവടെ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകൾ അദിശം, സദിശം എന്നിങ്ങനെ വേർതിരിക്കുക.

(i) 5 സെക്കന്റ് (ii) 1000 ഘ.സെ.മീ.

(iii) 10 ന്യൂട്ടൻ (iv) 30 കി.മീ./മണിക്കൂർ

(v) 10 ഗ്രാം/ഘനസെ.മീ. (vi) 20 മീ./സെക്കന്റ് തെക്ക് ദിശയിൽ

പരിഹാരം

(i) സമയം–അദിശം (ii) വ്യാപ്തം–അദിശം (iii) ബലം–സദിശം

(iv) വേഗത– അദിശം (v) സാന്ദ്രത–അദിശം (vi) പ്രവേഗം–സദിശം

ഉദാഹരണം: 3

ചിത്രത്തിൽ (10.5) തന്നിട്ടുള്ള സദിശങ്ങളെ

(i) സമരേഖീയ സദിശങ്ങൾ

(ii) തുടക്കബിന്ദു ഒന്നായ സദിശങ്ങൾ

(iii) തുല്യസദിശങ്ങൾ എന്നിങ്ങനെ തരംതിരിക്കുക.

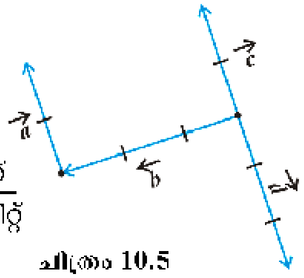
പരിഹാരം

(i) സമരേഖീയം : $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

(ii) തുടക്കബിന്ദു ഒന്നായത് : $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$

(iii) തുല്യസദിശങ്ങൾ : $\vec{a}$, $\vec{c}$

തോത് / 1 യൂണിറ്റ്



ചിത്രം 10.5

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 10.1

1. 40 കി.മീ. അകലെ വടക്കു കിഴക്ക് 30° അളവിലുള്ള സ്ഥാനാന്തരത്തെ ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുക.

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അളവുകളെ, അദിശം, സദിശം എന്നിങ്ങനെ തരംതിരിക്കുക.

   (i) 10 കി.ഗ്രാം (ii) 2 മീ. - വടക്ക് പടിഞ്ഞാറ് (iii) 40°

   (iv) 40 വാട്ട് (v) 10^{-19} കൂളംബ് (vi) 20 മീ/ച.സെക്കന്റ്

3. താഴെ പറയുന്നവ അദിശം, സദിശം എന്നിങ്ങനെ തരംതിരിക്കുക.

   (i) സമയം (ii) ദൂരം (iii) ബലം

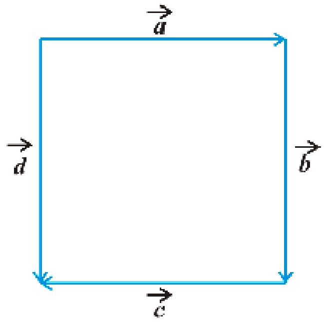
   (iv) പ്രവേഗം (v) പ്രവൃത്തി

4. ചിത്രം (10.6) ൽ

   (i) ആരംഭബിന്ദു ഒന്നായ സദിശങ്ങൾ

   (ii) തുല്യ സദിശങ്ങൾ

   (iii) സമരേഖീയം എന്നാൽ തുല്യമല്ലാത്ത സദിശങ്ങൾ എന്നിവ കണ്ടെത്തുക.



ചിത്രം 10.6

5. തെറ്റോ ശരിയോ എന്ന് കണ്ടെത്തുക.

   (i) $\vec{a}$, $-\vec{a}$ എന്നിവ സമരേഖീയ സദിശങ്ങളാണ്.

   (ii) രണ്ട് സമരേഖീയ സദിശങ്ങളുടെ വലിപ്പം എപ്പോഴും തുല്യമാണ്.

   (iii) ഒരേ വലിപ്പ (magnitude) മുള്ള രണ്ട് സദിശങ്ങൾ സമരേഖീയമാണ്.

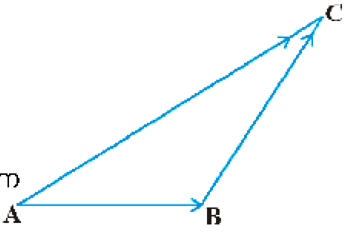
   (iv) ഒരേ വലിപ്പമുള്ള രണ്ട് സമരേഖീയ സദിശങ്ങൾ തുല്യസദിശങ്ങളാണ്.

10.4 സദിശങ്ങളുടെ സങ്കലനം

$\overline{AB}$ എന്നത് A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്കുള്ള സ്ഥാനാന്തരമാണ്. ചിത്രം (10.7) ൽ ഒരു കുട്ടി A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്കും B യിൽ നിന്ന് C യിലേക്കും പോകുന്ന ഈ കുട്ടി യുടെ ആകെയുള്ള സ്ഥാനാന്തരം A യിൽനിന്ന് C യിലേക്കുള്ള സദിശമാണെന്ന് കാണാം.

അതായത്

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

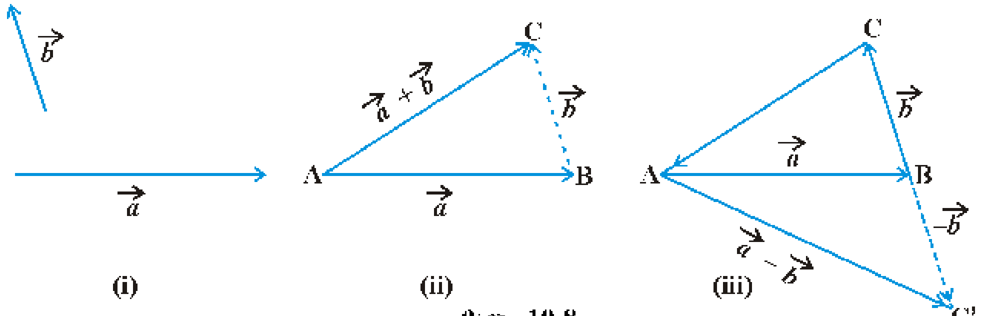


ചിത്രം 10.7

ഇതിനെ സദിശങ്ങളുടെ സങ്കലനത്തിനുള്ള ത്രികോണ നിയമം (Triangular law of addition) എന്നു പറയുന്നു.

ചിത്രം 10.8(i) ൽ കാണിച്ചതുപോലെ രണ്ട് സദിശ ങ്ങളാണ് $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നു കരുതുക. അവയുടെ തുക കാണുന്നതിനുവേണ്ടി ചിത്രം 10.8 (i) ലേതുപോലെ $\vec{b}$ യുടെ ആരംഭബിന്ദുവും $\vec{a}$ യുടെ അവസാന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുക. ഇതിനായി സദിശങ്ങളുടെ ദിശയോ വലിപ്പമോ മാറ്റാൻ പാടില്ല.

ഇവിടെ $\vec{a} + \vec{b}$ എന്നത് ΔABC ചിത്രം 10.8(ii) യുടെ മൂന്നാമത്തെ വശം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം.



ചിത്രം 10.8

ഇവിടെ $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ എന്നു കാണാം. കൂടാതെ $\overline{AC} = -\overline{CA}$ ആയതിനാൽ

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AA} = \vec{0}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതായത്,

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങളും സദിശങ്ങളായി കണക്കാക്കി യഥാക്രമം തുക കണ്ടാൽ അത് ശൂന്യസദിശമാകുന്നു. ചിത്രം 10.8(iii)

ത്രികോണത്തിനു പകരം വിവിധ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ യഥാക്രമം സദി

ശങ്ങളായി പരിഗണിച്ചാൽ അവയുടെ തുക ശൂന്യസദിശമാകുന്നുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഇതിനായി ബഹുഭുജത്തിന്റെ എല്ലാ വികർണങ്ങളും പരിഗണിക്കാവുന്നതാണ്.

u, v എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ തുക ലഭിക്കാൻ u + v എന്ന input കമാന്റ് നൽകിയാൽ മതി. ഇതുപോലെ u - v എന്ന കമാന്റ് നൽകി നോക്കൂ.

സദിശങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം

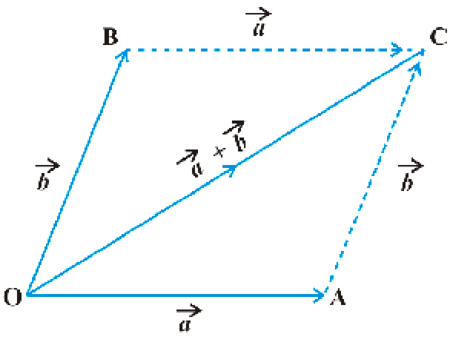
ചിത്രത്തിൽ (10.8(3)) $\overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{BC}$

$\Delta ABC'$ ൽ ത്രികോണസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{BC})$ $= \vec{a} - \vec{b}$ ആയതിനാൽ സദിശം $\overrightarrow{AC'}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവയുടെ വ്യത്യാസത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

സാമാന്തരിക സിദ്ധാന്തം

ഒരു പുഴയുടെ ഒരു തീരത്തുനിന്നും ഒരു ബോട്ട് മറുകരയിലേക്ക് യാത്ര തിരിക്കുന്നു. ഒഴുക്കിന് ലംബമായി യാത്രചെയ്യുന്ന ബോട്ടിന് രണ്ടുതരം പ്രവേഗങ്ങൾ അനുഭവപ്പെടുന്നു, ബോട്ടിന്റെ പ്രവേഗത്തിന്റെയും നദിയുടെ ഒഴുക്കിന്റെ പ്രവേഗത്തിന്റെയും പരിണതഫലം (resultant) താഴെ പറയും വിധം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$\vec{a}$ എന്നത് ബോട്ടിന്റെ പ്രവേഗത്തിന്റെ ദിശയേയും $\vec{b}$ എന്നത് നദിയുടെ ഒഴുക്കിന്റെ പ്രവേഗത്തിന്റെ ദിശയേയും സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ സാമാന്തരികം OACB യിൽ പരിണതഫലം അതിന്റെ വികർണത്താൽ സൂചിപ്പിക്കാം. അതായത് $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ കൂടാതെ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$. ഇതിനെ **സദിശസങ്കലനത്തിന്റെ സാമാന്തരിക സിദ്ധാന്തം** എന്നു പറയുന്നു.



ചിത്രം 10.9

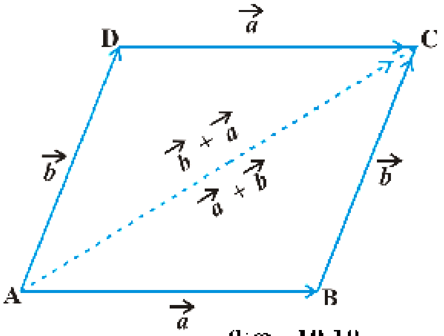
കുറിപ്പ്

സദിശങ്ങളുടെ തുകയുടെ സാമാന്തരിക സിദ്ധാന്തവും ത്രികോണ സിദ്ധാന്തവും ഒന്നുതന്നെയാണെന്ന് നിരീക്ഷിക്കുക.

സദിശസങ്കലനത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ

1. ക്രമനിയമം (Commutative Property)

$\vec{a}, \vec{b}$ എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ തുക ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നു. അതായത് $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$



ചിത്രം 10.10

തെളിവ്: സാമാന്തരികം ABCD യിൽ $\overline{AB} = \vec{a}, \overline{BC} = \vec{b}$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. സാമാന്തരികത്തിന്റെ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യവും സമാന്തരവുമായതിനാൽ $\overline{AD} = \overline{BC} = \vec{b}$. കൂടാതെ $\overline{DC} = \overline{AB} = \vec{a}$. ΔABC യിൽ ത്രികോണസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, അതായത്, $\overline{AC} = \vec{a}+\vec{b}$. ത്രികോണസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് ΔADC യിൽ $\overline{AC} = \overline{AD}+\overline{DC} = \vec{b}+\vec{a}$

അതുകൊണ്ട്, $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

2. സംയോജനനിയമം (Associative Property)

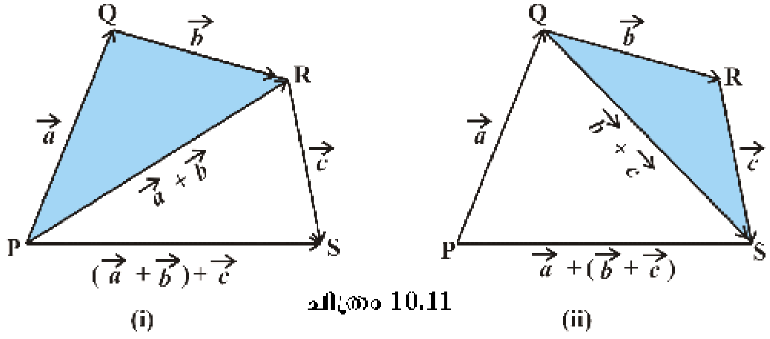
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ മൂന്ന് സദിശങ്ങളാണെങ്കിൽ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

തെളിവ്: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ യഥാക്രമം $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RS}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് $\vec{a}+\vec{b} = \overline{PQ}+\overline{QR} = \overline{PR}$ എന്നും $\vec{b}+\vec{c} = \overline{QR}+\overline{RS} = \overline{QS}$ എന്നും എഴുതാം.

അതുകൊണ്ട്, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \overline{PR}+\overline{RS} = \overline{PS}$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = \overline{PQ}+\overline{QS} = \overline{PS}$$

$$\therefore (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$



ചിത്രം 10.11

> ☛ **കുറിപ്പ്**
>
> സദിശങ്ങളുടെ സംയോജനനിയമം ഉപയോഗിച്ച് $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ എന്നിവയുടെ തുക $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ എന്നെഴുതാം.

3. സദിശസങ്കലനത്തിന്റെ അനന്യദാനിയമം (Additive Identity)

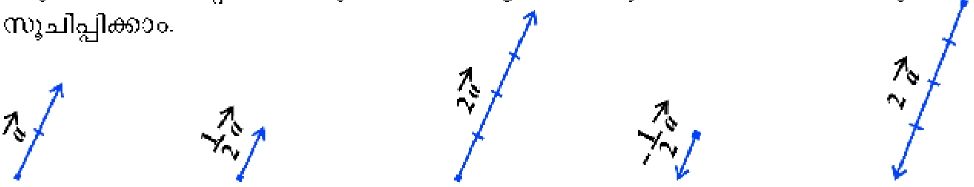
$\vec{a}$ എന്ന സദിശത്തിന്, $\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$ ആണ്. ഇവിടെ $\vec{0}$ എന്നത് ശൂന്യസദിശമാണ്.

10.5 ഒരു സദിശത്തെ അദിശം കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം

$\vec{a}$ എന്നത് ഒരു സദിശവും λ എന്നത് ഒരു അദിശവുമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. അവയുടെ ഗുണനഫലം $\lambda\vec{a}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $\lambda\vec{a}$, $\vec{a}$ എന്നിവ സമരേഖീയമായ സദിശങ്ങളാണ്. $\lambda\vec{a}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ ദിശ ഒന്നുകിൽ $\vec{a}$ ന്റേതിന് തുല്യമോ (λ അധിസംഖ്യ ആയാൽ), $\vec{a}$ ന്റെ വിപരീതദിശയിലോ (λ ന്യൂനസംഖ്യ ആയാൽ) ആയിരിക്കും. കൂടാതെ $\lambda\vec{a}$ യുടെ വലിപ്പം $\vec{a}$ യുടെ വലിപ്പത്തിന്റെ $|\lambda|$ മടങ്ങ് ആയിരിക്കും.

$$\text{അതായത്, } |\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$$

ഒരു സദിശത്തിന്റെ അദിശഗുണിതത്തെ ജ്യാമിതീയരൂപത്തിൽ താഴെ കാണും വിധം സൂചിപ്പിക്കാം.



ചിത്രം 10.12

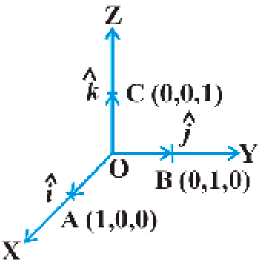
$-\vec{a}$ എന്ന സദിശം $\vec{a}$ യുടെ ന്യൂനസദിശം ആണല്ലോ.
ഇവിടെ $\lambda = -1$ ആകുമ്പോഴാണ് $\vec{a}$ യുടെ ന്യൂനസദിശം ലഭിക്കുന്നത്.
കൂടാതെ $\vec{a}+(-\vec{a}) = (-\vec{a})+\vec{a} = \vec{0}$

> a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡറും u എന്ന പേരിൽ ഒരു സദിശവും നിർമിക്കുക. $a * u$ എന്ന കമാന്റ് നൽകുക. a യുടെ വില മാറ്റി നോക്കു $a = 0$ ആയാൽ എന്താണ് ലഭിക്കുന്നത്?

> ☛ **കുറിപ്പ്**
>
> i) $\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|}$, $\vec{a} \neq 0$ ആയാൽ $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$
>
> ii) k ഒരു അദിശമായാൽ $k\vec{0} = \vec{0}$

10.5.1 സദിശത്തിന്റെ ഭാഗങ്ങൾ (Components of a vector)

ഒരു ത്രിമാനസ്ഥലത്ത് (Space), A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ പരിഗണിക്കുക. ഇവ യഥാക്രമം ഏതൊക്കെ അക്ഷങ്ങളിലാണെന്ന് പറയാമോ?



ചിത്രം 10.13

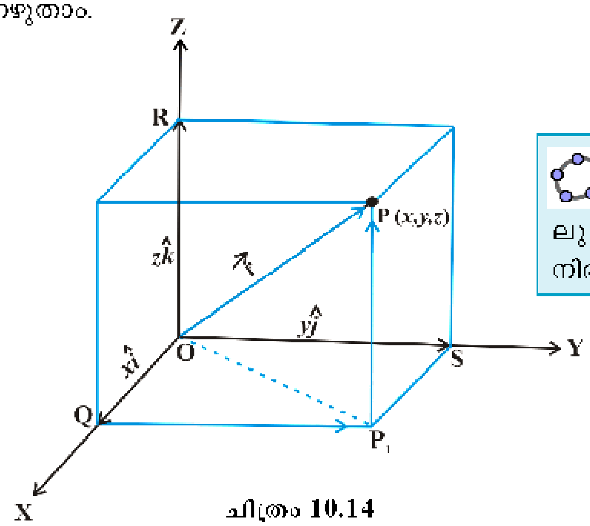
മൂലബിന്ദു (0, 0, 0) വിൽ നിന്ന് A, B, C എന്നിവയിലേക്ക് $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ എന്നിവ പരിഗണിക്കുക. ഇവ യഥാക്രമം X, Y, Z അക്ഷങ്ങളിലാണെന്ന് കാണാമല്ലോ?

വലിപ്പം 1 ആയ ഈ സദിശങ്ങളെ നാം യഥാക്രമം $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഇനി P(*x*, *y*, *z*) എന്നത് ത്രിമാന സ്ഥലത്തെ ഒരു ബിന്ദുവാണെന്ന് കരുതുക. P യുടെ സ്ഥാനസദിശം $\overrightarrow{OP}$ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ എന്നിവ ഉപയോഗിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. ചിത്രം 10.14 ൽ P യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ യഥാക്രമം x, y, z എന്നിവയാണ്. ഇവയെ യഥാക്രമം OQ, OS, OR എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$\overrightarrow{OQ} = x\hat{i},\ \overrightarrow{OS} = y\hat{j},\ \overrightarrow{OR} = z\hat{k}$$

എന്നെഴുതാം.



ചിത്രം 10.14

ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രം 10.14 ലുള്ള ഒരു ത്രിമാനരൂപം നിർമിക്കാവുന്നതാണ്

സദിശങ്ങളുടെ സങ്കലനം ഉപയോഗിച്ച്

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP_1} \text{ എന്നും}$$

$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P}$ എന്നും എഴുതാം.

അതായത്, $\vec{r} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP_1} + \overrightarrow{P_1P}$

$= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OR}$

$= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

ഈ രീതിയിൽ $\overrightarrow{OP}$ യെ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ഘടകങ്ങളായി (component form) എഴുതാം.

ഇവിടെ x, y, z എന്നിവ $\overrightarrow{OP}$ യുടെ അദിശഭാഗങ്ങളും $x\hat{i}, y\hat{j}, z\hat{k}$ എന്നിവ സദിശ ഭാഗങ്ങളുമാണ്. $\vec{r}$ ന്റെ വലിപ്പം എന്നത് O ൽ നിന്ന് P യിലേക്കുള്ള ദൂരമാണല്ലോ. അതിനാൽ,

$$|\vec{r}| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

> u എന്ന സദിശത്തിന്റെ വലിപ്പം ലഭിക്കാൻ $abs(u)$ എന്ന input നൽകിയാൽ മതി.

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ഭാഗങ്ങളായി തന്നിട്ടുള്ള സദിശങ്ങളുടെ സങ്കലനവും അദിശം കൊണ്ടുള്ള ഗുണനവും

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ എന്നും $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ എന്നുമായാൽ

(i) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$

(ii) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$

(iii) $\vec{a} = \vec{b}$ എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം (if and only if) $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$ ആയിരിക്കും.

(iv) $\vec{a}$ യുടേയും അദിശം λ യുടെയും ഗുണനം $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$ ആകുന്നു.

m, n എന്നിവ അദിശങ്ങളാണെങ്കിൽ

(i) $k\vec{a} + m\vec{a} = (k + m)\vec{a}$

(ii) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$

(iii) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

കുറിപ്പ്

(i) λ യുടെ വില എന്തായാലും $\vec{a}$, $\lambda\vec{a}$ എന്നിവ സമരേഖീയ സദിശങ്ങളാണെന്ന് കാണാം. അതായത്, $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവ സമരേഖീയമാകണമെങ്കിൽ $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ ആയിരിക്കണം. λ എന്നത് ഏതെങ്കിലും ഒരു രേഖീയസംഖ്യയാണ്.

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{j} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, ആയാൽ

$$\vec{a} = \lambda\vec{b} \Rightarrow$$

$a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} = \lambda(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) = \lambda b_1\hat{i} + \lambda b_2\hat{j} + \lambda b_3\hat{k}$

രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ തുല്യത അവയുടെ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ഭാഗങ്ങളുടെ തുല്യതയായതിനാൽ,

$a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, $a_3 = \lambda b_3$

$\Rightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = \lambda$ എന്നു കാണാം.

സദിശങ്ങൾ സമരേഖീയമാകാനുള്ള നിബന്ധന, $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ ആവുക എന്നതാണ്. അതായത് അദിശഘടകങ്ങൾ ആനുപാതികമായിരിക്കും.

(ii) $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ആയാൽ a_1, a_2, a_3 എന്നിവ $\vec{a}$ യുടെ ദിശാനുപാതങ്ങൾ (Direction ratios) എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

(iii) $\vec{a}$ യുടെ ദിശകൊസൈനുകൾ യഥാക്രമം l, m, n ആയാൽ $l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$ എന്നത് $\vec{a}$ യുടെ ദിശയിലുള്ള ഏകകസദിശമാണല്ലോ. ഇവിടെ $l = \cos\alpha, m = \cos\beta, n = \cos\gamma$

- P(x, y, z) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ആണെന്ന് കണ്ടല്ലോ. ഇതിന്റെ ദിശാകൊസൈൻസ് എന്തൊക്കെയായിരിക്കും?

  $\overline{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ എന്നതിന്റെ ദിശയിലുള്ള ഏകകസദിശം

$$\frac{\overline{OP}}{|\overline{OP}|} = \frac{x\hat{i} + y\hat{i} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$l = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad m = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad n = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- ഇവിടെ $x \quad y \quad z$ ആയാൽ $\overrightarrow{OP}$ യുടെ ദിശാകൊസൈനുകളുടെ പ്രത്യേകതയെന്ത്?

- P എന്ന ബിന്ദു $(x, -x, x)$ ആയാലോ?
- ഇങ്ങനെ P എന്ന ബിന്ദു വിവിധ അഷ്ടകാംശത്തിലായാൽ $\overline{OP}$ യുടെ ദിശാകൊസൈനുള്ള മാറ്റങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കുക.
- $\overline{OP}$ യിലെ x, y, z എന്നീ ഗുണകങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് പൂജ്യമായാലോ? ചിന്തിക്കുക.
- സൂചക അക്ഷങ്ങളിലെ സദിശത്തിന്റെ ദിശാകൊസൈനുകൾ ഏതൊക്കെയെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉദാഹരണം: 4

$\vec{a} = x\hat{i} + 2\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾ തുല്യമായാൽ x, y, z എന്നിവ കാണുക.

പരിഹാരം

$\vec{a} = \vec{b}$ ആയാൽ അവയുടെ അദിശഘടകങ്ങൾ തുല്യമാകുമല്ലോ.

അതായത്,

$$x = 2, y = 2, z = 1$$

ഉദാഹരണം: 5

$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു. (i) $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ ഇവ തുല്യമാണോ? (ii) സദിശങ്ങൾ $\vec{a}, \vec{b}$ തുല്യമാണോ?

പരിഹാരം

i. $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

അതുകൊണ്ട്, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

ii. രണ്ടു സദിശങ്ങൾ തുല്യമാകാൻ അവയുടെ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ഭാഗങ്ങൾ തുല്യമാകേണ്ടതുണ്ട്. എന്നാൽ ഇവിടെ $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവയുടെ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ഭാഗങ്ങൾ തുല്യമല്ല. അതുകൊണ്ട് $\vec{a}, \vec{b}$ ഇവ തുല്യമല്ല.

ഉദാഹരണം: 6

$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ യുടെ ദിശയിലുള്ള ഏകക സദിശം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$\vec{a}$ യുടെ ദിശയിലുള്ള ഏകകസദിശം, $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$, ഇവിടെ $|\vec{a}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}$

$$\therefore\ \hat{a} = \frac{2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$$

ഉദാഹരണം : 7

$\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ ദിശയിലുള്ളതും 7 യൂണിറ്റ് വലിപ്പമുള്ളതുമായ സദിശം രൂപീകരിക്കുക.

പരിഹാരം

$\vec{a}$ യുടെ ദിശയിലുള്ള ഏകക സദിശം

$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ ആണല്ലോ.

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

അതുകൊണ്ട്, $\hat{a} = \frac{\hat{i} - 2\hat{j}}{\sqrt{5}}$

അതിനാൽ 7 യൂണിറ്റ് വലിപ്പമുള്ള സദിശം $= 7\hat{a}$

$$= \frac{7}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j}) = \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$$

ഉദാഹരണം: 8

$\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു. $\vec{a}+\vec{b}$ യുടെ ദിശയിലുള്ള ഒരു ഏകക സദിശം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\vec{a} + \vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

$\vec{a}+\vec{b}$ യുടെ ദിശയിലുള്ള ഏകക സദിശം $= \frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{4\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{4^2+3^2+(-2)^2}}$

$$= \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j} + \frac{-2}{\sqrt{29}}\hat{k}$$

ഉദാഹരണം : 9

$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ യുടെ ദിശാനുപാതം എഴുതുക. കൂടാതെ $\vec{a}$ യുടെ ദിശാ കൊസൈനുകൾ എന്ത്?

പരിഹാരം

$\vec{a}$ യുടെ ദിശാനുപാതം : $a = 1, b = 1, c = -2$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

∴ ദിശാകൊസൈൻസ് $l = \frac{1}{\sqrt{6}}, \ m = \frac{1}{\sqrt{6}}, \ n = \frac{-2}{\sqrt{6}}$

അതായത്, $$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

10.5.2 രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന സദിശം

$P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ എന്നീ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന സദിശമാണ് $\overrightarrow{P_1P_2}$.

P_1, P_2 എന്നിവയുടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങളാണ് $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$.

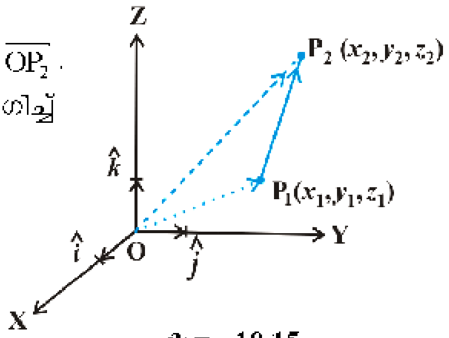
ΔOP_1P_2 വിൽ നിന്ന് ത്രികോണ നിയമം ഉപയോഗിച്ച്

$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$ എന്നെഴുതാം.

അതായത് $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$

അതായത്,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$
$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$



ചിത്രം 10.15

$\overrightarrow{P_1P_2}$ വിന്റെ വലിപ്പവും (magnitude) താഴെ കാണുന്നവിധം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ഉദാഹരണം : 10

P(2, 3, 0), Q(– 1, – 2, – 4) എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുന്ന സദിശം $\overrightarrow{PQ}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ സദിശം P യിൽ നിന്നും തുടങ്ങി Q വിൽ അവസാനിക്കുന്നു.

P ആരംഭ ബിന്ദുവും Q അവസാന ബിന്ദുവുമാണ്.

$$\overrightarrow{PQ} = (-1-2)\hat{i} + (-2-3)\hat{j} + (-4-0)\hat{k}$$

$$= -3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}.$$

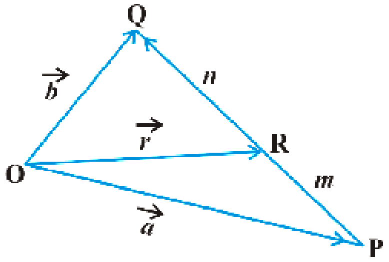
10.5.3 വിഭജന സൂത്രം (Section Formula)

P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാന സദിശങ്ങളാണ് $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ എന്നിവ. ഇവിടെ O എന്നത് ആധാരബിന്ദുവാണ്. PQ എന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ R എന്ന ബിന്ദു രണ്ടായിവിഭജിക്കുന്നു. ഈ വിഭജനം, (1) ആന്തരികവും, (2) ബാഹ്യവുമായി നിർവചിക്കാവുന്നതാണ്.

ഇവിടെ R എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

ഭാഗം 1: ആന്തരികവിഭജനം (Internal division)

PQ വിനെ ആന്തരികമായി R വിഭജിക്കുമ്പോൾ $m\,\overrightarrow{RQ} = n\,\overrightarrow{PR}$, ഇവിടെ *m, n* എന്നിവ അധിസംഖ്യകളായ അദിശങ്ങളാണ്. ഇവിടെ $\overline{PQ}$ വിനെ R എന്ന ബിന്ദു $m : n$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ ആന്തരികമായി വിഭജിക്കുന്നു.



ചിത്രം 10.16

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = \vec{b} - \vec{r}$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \vec{r} - \vec{a},$$

അതുകൊണ്ട്, $m(\vec{b} - \vec{r}) = n(\vec{r} - \vec{a})$

അതുകൊണ്ട്, $\vec{r} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$

അതായത് PQ വിനെ R എന്ന ബിന്ദു $m : n$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ ആന്തരികമായി വിഭജിക്കുമ്പോൾ R ന്റെ സ്ഥാനസദിശം, $\overrightarrow{OR} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$

u, v ഇവ P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാന സദിശങ്ങളായാൽ ഇവയുടെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം ലഭിക്കാൻ (u + v)/2 എന്ന കമാന്റ് നൽകിയാൽ മതി. PQ വിനെ *m* : *n* എന്ന അനുപാതത്തിൽ ആന്തരികമായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം ലഭിക്കാൻ (*m* * *v* + *n* * *u*)/(*m* + *n*) എന്ന് input നൽകിയാൽ മതി.

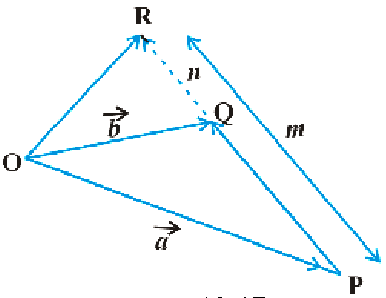
ഭാഗം 2: ബാഹ്യവിഭജനം (External division)

A(7, -4, 4) എന്ന ബിന്ദു 4-ാമത്തേയും B(1, 2, 1) എന്ന ബിന്ദു ഒന്നാമത്തേയും അഷ്ടകാംശങ്ങളിലാണെന്ന് അറിയാമല്ലോ. $\overline{AB}$ യെ YZ തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു C യിൽ ഖണ്ഡിക്കും. ഈ സദിശത്തെ C ഖണ്ഡിക്കുന്ന അനുപാതം 2 : 1 ആണെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി മുൻക്ലാസിൽ പഠിച്ചത് ഓർക്കുക. അപ്പോൾ C യുടെ സ്ഥാന സദിശം,

$$r = \frac{2(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + 7\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}}{3}$$

$= 3\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}$ ആണെന്ന് കിട്ടും

എന്നാൽ $\overline{AB}$ യുടെ അതേ ദിശയിൽ ഒരു അമ്പ് (Arrow) XY തലത്തിലേക്ക് തൊടുത്തു വിടുന്നു എന്നു കരുതുക. തലത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു D ആണെങ്കിൽ, D യുടെ സ്ഥാന സദിശം എങ്ങനെ കാണാം? ഇവിടെ D എന്ന ബിന്ദു $\overline{AB}$ യിൽ അല്ല എന്ന കാര്യം ശ്രദ്ധിക്കുക. അപ്പോൾ D, AB യെ ബാഹ്യമായി ഖണ്ഡിക്കുന്നു എന്ന് പറയാം. XY തലത്തിൽ Z സൂചകം പൂജ്യമായതിനാൽ അനുപാതം 4 : 1 ആണെന്നു കാണാം. ബാഹ്യമായി വിഭജിക്കുന്നതിനാൽ D യുടെ സ്ഥാന സദിശം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കും വിധം കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്.



ചിത്രം 10.17

ചിത്രത്തിൽ R എന്ന ബിന്ദു PQ വിനെ $m:n$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ ബാഹ്യമായി വിഭജിക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക. അങ്ങനെ ആയാൽ R ന്റെ സ്ഥാന സദിശം

$\overline{OR} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m - n}$ ആയിരിക്കും. മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ D യുടെ സ്ഥാന സദിശം,

$$\overline{OD} = \frac{4(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) - (7\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k})}{4 - 1}$$

$= \dfrac{-3\hat{i} + 12\hat{j}}{3} = -\hat{i} + 4\hat{j}$ ആയിരിക്കും

> m, n എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് സ്ലൈഡറുകൾ നിർമിച്ച് ഈ പ്രവർത്തനം ചെയ്തുനോക്കൂ. ബാഹ്യമായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം ലഭിക്കാൻ $(mv - nu)/(m - n)$ എന്ന input നൽകിയാൽ മതി.

> **കുറിപ്പ്**
>
> PQ വിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണ് R എങ്കിൽ $m = n$ ആയിരിക്കും. അപ്പോൾ R ന്റെ സ്ഥാനസദിശം $\overrightarrow{OR} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം : 11

P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ $\overrightarrow{OP} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + \vec{b}$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. PQ എന്ന വരയെ R എന്ന ബിന്ദു 2:1 അനുപാതത്തിൽ (i) ആന്തരികമായി (ii) ബാഹ്യമായി വിഭജിക്കുന്നു. R ന്റെ സ്ഥാനസദിശം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

(i) R എന്ന ബിന്ദു PQ വിനെ ആന്തരികമായാണ് വിഭജിക്കുന്നതെങ്കിൽ

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a}+\vec{b})+(3\vec{a}-2\vec{b})}{2+1} = \frac{5\vec{a}}{3}$$

(ii) ബാഹ്യമായി വിഭജിക്കുമ്പോൾ

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a}+\vec{b})-(3\vec{a}-2\vec{b})}{2-1} = 4\vec{b}-\vec{a}$$

ഉദാഹരണം: 12

$A(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$, $B(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$, $C(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$ എന്നിവ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. ഇവിടെ ബ്രാക്കറ്റിലുള്ളവ അതാത് ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാന സദിശമാണ്.

പരിഹാരം

ഇവിടെ,

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\hat{i} + (-3+1)\hat{j} + (-5-1)\hat{k} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3-1)\hat{i} + (-4+3)\hat{j} + (-4+5)\hat{k} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\overrightarrow{CA} = (2-3)\hat{i} + (-1+4)\hat{j} + (1+4)\hat{k} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}, \ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}, \ |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$$

കൂടാതെ,

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 41 = 6 + 35 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$$

അതുകൊണ്ട്, ΔABC ഒരു മട്ടത്രികോണമാണ്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 10.2

1. ചുവടെയുള്ള സദിശങ്ങളുടെ വലിപ്പം (magnitude) കണ്ടുപിടിക്കുക.

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}; \quad \vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} - 3\hat{k}; \quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

2. ഒരേ നീളമുള്ള രണ്ട് വ്യത്യസ്ത സദിശങ്ങൾ എഴുതുക.
3. ഒരേ ദിശയുള്ള രണ്ട് വ്യത്യസ്ത സദിശങ്ങൾ എഴുതുക.
4. $2\hat{i} + 3\hat{j}$, $x\hat{i} + y\hat{j}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾ തുല്യമായാൽ x, y എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.
5. (2, 1) ആരംഭബിന്ദുവും (– 5, 7) അവസാനബിന്ദുവും ആയ സദിശത്തിന്റെ സദിശ, അദിശ ഘടകങ്ങൾ എഴുതുക.
6. $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{c} = \hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ തുകയെന്ത്?
7. $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ അതേദിശയിലുള്ള ഏകകസദിശം കണ്ടുപിടിക്കുക.
8. P(1, 2, 3), Q(4, 5, 6) എന്നിവ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളായാൽ $\overrightarrow{PQ}$ വിന്റെ ദിശയിലുള്ള ഏകക സദിശം ഏത്?
9. $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ എന്നിവ തന്നിട്ടുണ്ട്. $\vec{a} + \vec{b}$ യുടെ അതേ ദിശയിലുള്ള ഏകക സദിശമേത്?
10. $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ അതേ ദിശയിലുള്ളതും നീളം 8 യൂണിറ്റ് ആയതുമായ സദിശം കണ്ടുപിടിക്കുക.
11. $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾ സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
12. $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ ദിശാകൊസൈൻസ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
13. A (1, 2, –3), B(–1, –2, 1), എന്നിങ്ങനെയായാൽ A യിൽ നിന്ന് B യിലേക്കുള്ള സദിശത്തിന്റെ ദിശാകൊസൈൻസ് കണ്ടുപിടിക്കുക.
14. $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് OX, OY, OZ എന്നീ അക്ഷങ്ങളുമായുള്ള ചരിവുകൾ തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

15. P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാന സദിശങ്ങൾ യഥാക്രമം $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}, -\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. R എന്ന ബിന്ദു PQ നെ 2 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ (i) ആന്തരികമായി (ii) ബാഹ്യമായി വിഭജിക്കുന്നു എങ്കിൽ R ന്റെ സ്ഥാന സദിശങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

16. P(2, 3, 4), Q(4, 1, –2) എന്നിവ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളായാൽ PQ ന്റെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം കണ്ടുപിടിക്കുക.

17. A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ $\vec{a}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$, എന്നിങ്ങനെയായാൽ ΔABC ഒരു മട്ടത്രികോണമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

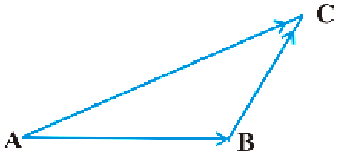
18. ചിത്രത്തിൽ ΔABC തന്നിട്ടുണ്ട്. താഴെ പറയുന്നവയിൽ ശരിയല്ലാത്തതേത്?

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

(B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$



ചിത്രം 10.18

19. $\vec{a},\vec{b}$ എന്നിവ സമരേഖീയ സദിശങ്ങളാണെങ്കിൽ താഴെ പറയുന്നവയിൽ ശരിയല്ലാത്തതേത്?

(A) $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, λ ഒരു അദിശമാണ്.

(B) $\vec{a}=\pm\vec{b}$

(C) $\vec{a},\vec{b}$ എന്നിവയുടെ $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ ഘടകങ്ങൾ ആനുപാതികമാണ്.

(D) $\vec{a},\vec{b}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾക്ക് ഒരേ ദിശയും വ്യത്യസ്ത വലിപ്പവുമാണ്.

10.6 സദിശങ്ങളുടെ ഗുണനം

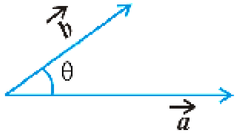
സദിശങ്ങളുടെ തുക, വ്യത്യാസം എന്നിവ കാണാൻ നാം പഠിച്ചു. ഇനി നമുക്ക് സദിശങ്ങളുടെ ഗുണനം കാണുന്നതെങ്ങനെയെന്നു പഠിക്കാം. സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം മറ്റൊരു സംഖ്യയും മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനഫലം മറ്റൊരു മാട്രിക്സുമാണെന്ന് നാം കണ്ടു.

എന്നാൽ ഏകദങ്ങളുടെ ഗുണനം രണ്ടു രീതിയിൽ ഉണ്ടെന്ന് വിശദീകരിക്കപ്പെട്ടതാണ്. സാധാരണ രീതിയിലുള്ള ഗുണനവും സംയോജനവും (Product and

composition). ഇതുപോലെ സദിശങ്ങളുടെ ഗുണനവും രണ്ട് രീതിയിൽ ഉണ്ട്. i) അദിശ (ഡോട്ട്) ഗുണനവും ii) സദിശ (ക്രോസ്) ഗുണനവും കൂടാതെ ഇത്തരം ഗുണനങ്ങൾ ഭൗതികശാസ്ത്രം, ജ്യാമിതി, എൻജിനീയറിംഗ് തുടങ്ങിയ മേഖലകളിൽ ധാരാളമായി പ്രയോഗിക്കുന്നു.

10.6.1 ഡോട്ട് ഗുണനം/അദിശ ഗുണനം (Dot Product/ Scalar Product)

നിർവചനം : $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ ഡോട്ട് ഗുണനം $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, എന്നാണ്. ഇവിടെ $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ എന്നിവ യഥാക്രമം $\vec{a}$ യുടെയും $\vec{b}$ യുടെയും വലിപ്പവും, θ എന്നത് അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോണളവുമാണ്, $0 \le \theta \le \pi$



ചിത്രം 10.19

കുറിപ്പ്

ഇവിടെ $\vec{a} = \vec{0}$ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{b} = \vec{0}$ ആയാൽ θ എന്നത് നിർവചിക്കാൻ സാധ്യമല്ല. ആയതിനാൽ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ എന്ന് പറയാം.

u, v എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ ഡോട്ട് ഗുണനം ലഭിക്കാൻ *u* * *v* അല്ലെങ്കിൽ *Dot (u, v)* എന്ന input നൽകിയാൽ മതി.

നിരീക്ഷണങ്ങൾ

1. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ഒരു രേഖീയസംഖ്യയാണ്.
2. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ ശൂന്യസദിശങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
   $\left(\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}\right)$
3. $\theta = 0$ ആയാൽ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$, കൂടാതെ $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ ആകുന്നു.
4. $\theta = \pi$, ആയാൽ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$
   കൂടാതെ $\vec{a} \cdot (-\vec{a}) = -|\vec{a}|^2$, $(\theta = \pi)$.
5. $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ എന്നീ ഏകക സദിശങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമായതിനാൽ
$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1,$$
$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$$
6. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവയുടെ ഇടയിലുള്ള കോൺ θ
$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

7. ഡോട്ട് ഗുണനം ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നു

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

8. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2$

അദിശഗുണനത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ

I. (സങ്കലനത്തിനുമേൽ അദിശ ഗുണനത്തിന്റെ വിതരണ നിയമം) : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ മൂന്ന് സദിശങ്ങളാണെങ്കിൽ

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ ആയിരിക്കും.

II. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ രണ്ട് സദിശങ്ങളും λ ഒരു അദിശവുമായാൽ

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

$\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ രീതിയിൽ തന്നാൽ അവയുടെ അദിശ ഗുണനം കാണുന്ന വിധം:

$\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ $\quad\quad$ $\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$$

$$= a_1\hat{i}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})+a_2\hat{j}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})+a_3\hat{k}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i})+a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k})$$

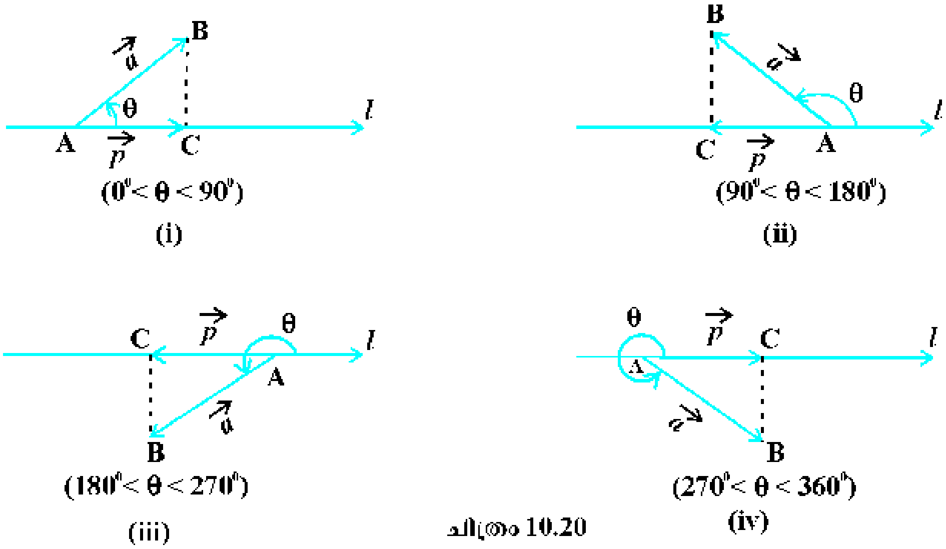
$$+ a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k})$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

അതായത് $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

10.6.2 ഒരു രേഖയിൽ ഒരു സദിശത്തിനുള്ള പ്രക്ഷേപം (Projection of a vector on a Line)

$\overline{AB}$ എന്ന സദിശം l എന്ന രേഖയുമായി അപ്രദക്ഷിണ ദിശയിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ θ ആണെന്ന് കരുതുക. ചിത്രത്തിൽ $\overline{AB}$ എന്ന രേഖ l ൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന പ്രക്ഷേപം സദിശം $\vec{p}$ എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇതിന്റെ വലിപ്പം $|\overline{AB}|\cos\theta$ ആയിരിക്കും. $\cos\theta$ യുടെ വില അധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ l, $\vec{p}$ എന്നിവ ഒരേ ദിശയിലായിരിക്കും. ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ അവ എതിർദിശയിലായിരിക്കും.



ചിത്രം 10.20

ഇവിടെ $\vec{p}$ പ്രക്ഷേപ സദിശവും $|\vec{p}|$ പ്രക്ഷേപവുമാണ്.

നിരീക്ഷണങ്ങൾ

1. l എന്ന രേഖയിൽ ഉള്ള ഏകക സദിശമാണ് $\hat{p}$ എങ്കിൽ $\vec{a}$ യുടെ l ലുള്ള പ്രക്ഷേപം $\vec{a}\cdot\hat{p}$ ആയിരിക്കും.
2. സദിശം $\vec{a}$ ക്ക് സദിശം $\vec{b}$ യിലുള്ള പ്രക്ഷേപം $\vec{a}\cdot\hat{b}$, അല്ലെങ്കിൽ $\vec{a}\cdot\left(\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ ആയിരിക്കും.
3. $\theta = 0$ ആയാൽ $\overrightarrow{AB}$ ക്ക് l ലുള്ള പ്രക്ഷേപ സദിശം $\overrightarrow{AB}$
   $\theta = \pi$ ആയാൽ $\overrightarrow{AB}$ ക്ക് l ലുള്ള പ്രക്ഷേപ സദിശം $\overrightarrow{BA}$
   $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ആയാൽ $\overrightarrow{AB}$ ക്ക് l ലുള്ള പ്രക്ഷേപ സദിശം $\vec{0}$

കുറിപ്പ്

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ ദിശാകോണുകൾ α, β, γ എന്നിവ ആണെങ്കിൽ ദിശാകൊസൈൻസ് $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\hat{i}}{|\vec{a}|\,|\hat{i}|} = \dfrac{a_1}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_3}{|\vec{a}|}$ ആയിരിക്കും. ഇവിടെ $|\vec{a}|\cos\alpha$ എന്നത് $\vec{a}$ ക്ക് OX ലുള്ള പ്രക്ഷേപമാണ്. എന്നാൽ $|\vec{a}|\cos\alpha = a\cos\alpha = a_1$, ആണല്ലോ. $\vec{a}$ യുടെ ഭാഗങ്ങളിൽ $\hat{j}$ യുടെ ഗുണകമായ a_1 എന്നത് $\vec{a}$ യ്ക്ക് OX ലുള്ള പ്രക്ഷേപമാണെന്ന് കാണാം. ഇതുപോലെ a_2, a_3 എന്നിവ യഥാക്രമം OY, OZ എന്നീ അക്ഷങ്ങളിൽ $\vec{a}$ യ്ക്കുള്ള പ്രക്ഷേപങ്ങളാണ്. കൂടാതെ $\vec{a}$ ഒരു ഏകക സദിശമായാൽ $\vec{a} = \cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$ എന്ന് എഴുതാം.

ഉദാഹരണം: 13

വലിപ്പം യഥാക്രമം 1, 2 ആയ രണ്ട് സദിശങ്ങളാണ് $\vec{a}, \vec{b}$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ ആയാൽ $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ തമ്മിലുള്ള കോണളവെന്ത്?

പരിഹാരം

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1, |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$ എന്നു തന്നിട്ടുണ്ട്. θ സദിശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള കോണളവായാൽ, $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

ഉദാഹരണം: 14

$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ആയാൽ ഇവ തമ്മിലുള്ള കോണളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

കോണളവ് θ ആയാൽ

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

ഇവിടെ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + 1 \times -1 + -1 \times 1 = -1$

$$\therefore \cos\theta = \frac{-1}{3}$$

കൂടാതെ $\theta = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

ഉദാഹരണം : 15

$\vec{a} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ എന്നിവ പരസ്പരം ലംബമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ ഡോട്ട് ഗുണനം പൂജ്യമായാൽ അവ പരസ്പരം ലംബമാണെന്ന് നമുക്കറിയാം.

ഇവിടെ $\vec{a} + \vec{b} = (5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}) + (\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$

$\vec{a} - \vec{b} = (5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}) - (\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (6\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) = 24 - 8 - 16 = 0.$

$\therefore \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ എന്നിവ പരസ്പരം ലംബമാണ്.

ഉദാഹരണം : 16

$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിലുള്ള പ്രക്ഷേപം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$\bar{a}$ യ്ക്ക് $\dot{b}$ യിലേക്കുള്ള പ്രക്ഷേപം $= \frac{1}{|\dot{b}|}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{(2\times1+3\times2+2\times1)}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{5}{3}\sqrt{6}$

ഉദാഹരണം: 17

$\dot{a}, \dot{b}$ എന്നിവ രണ്ടു സദിശങ്ങളാണ് $|\dot{a}|=2$, $|\dot{b}|=3$, $\bar{a}\cdot\dot{b}=4$ ആയാൽ $|\bar{a}-\dot{b}|$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$|\dot{a}-\dot{b}|^2 = (\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})$$
$$= \dot{a}.\dot{a} - \dot{a}\cdot\bar{b} - \bar{b}\cdot\dot{a} + \vec{b}\cdot\bar{b}$$
$$= |\vec{a}|^2 - 2(\bar{a}\cdot\dot{b}) + |\dot{b}|^2$$
$$= (2)^2 - 2(4) + (3)^2$$
$$\therefore |\bar{a}-\vec{b}| = \sqrt{5}$$

ഉദാഹരണം: 18

$\vec{a}$ ഒരു ഏകകസദിശമാണ്. കൂടാതെ $(\dot{x}-\dot{a})\cdot(\dot{x}+\dot{a})=8$. $|\dot{x}|$ കാണുക.

പരിഹാരം

$\vec{a}$ ഒരു ഏകക സദിശമായതിനാൽ $|\vec{a}|=1$ കൂടാതെ $\bar{a}\,.\,\bar{a} = a^2 = 1$

$$(\dot{x}-\dot{a})\cdot(\dot{x}+\dot{a}) = (\vec{x})^2 + \bar{x}\cdot\vec{a} - \vec{a}\,.\,x - (\bar{a})^2$$
$$= x^2 - a^2 = x^2 - 1 = 8 \text{ (തന്നിട്ടുണ്ട്)}$$

$\therefore x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$, $\dot{x}$ ന്റെ വലിപ്പം

ഉദാഹരണം: 19

$\dot{a}, \dot{b}$ എന്നിവ ഏതു രണ്ട് സദിശങ്ങൾ ആയാലും $|\vec{a}+\dot{b}| \le |\bar{a}||\dot{b}|$ (കോഷി ഷ്വാർട്സ് അസമത)

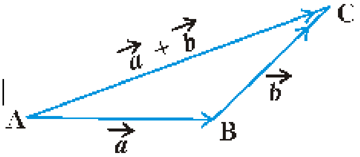
പരിഹാരം

$\dot{a}=0$. അല്ലെങ്കിൽ $\bar{b}=0$ ആയാൽ ഈ അസമത സുവ്യക്തമാണ്. അതായത് $\dot{a}\cdot\dot{b} = 0 = |\dot{a}||\dot{b}|$

$\vec{a}\ne0, \vec{b}\ne0$ എന്ന് കരുതിയാൽ $\frac{\bar{a}.\vec{b}}{|\bar{a}||\vec{b}|} = |\cos\theta| \le 1$, അതുകൊണ്ട് $\dot{a}\cdot\dot{b} \le |\dot{a}||\dot{b}|$

ഉദാഹരണം: 20

$\vec{a}, \vec{b}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾക്ക് $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$ (ത്രികോണ അസമത) തെളിയിക്കുക.



ചിത്രം 10.21

പരിഹാരം

$\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവയിൽ ഒന്നെങ്കിലും $\vec{0}$ ആയാൽ തന്നിട്ടുള്ള അസമത ശരിയാണ്. അതിനാൽ $|\vec{a}| \ne 0 \ne |\vec{b}|$ എന്ന അവസരത്തിലുള്ള തെളിവാണ് വേണ്ടത്.

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = a^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + b^2$$

$$\le |\vec{a}|^2 + 2\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| + |\vec{b}|^2 \qquad (\because x \le |x|)$$

$$\le \left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| + \left|\vec{b}\right|^2$$

$$= (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$$

അതുകൊണ്ട്, $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$

ഉദാഹരണം: 21

$A(-2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})$, $B(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$, $C(7\hat{i}-\hat{k})$ എന്നിവ സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $\overrightarrow{AB} = (1+2)\hat{i}+(2-3)\hat{j}+(3-5)\hat{k} = 3\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}$,

$$\overrightarrow{BC} = (7-1)\hat{i}+(0-2)\hat{j}+(-1-3)\hat{k} = 6\hat{i}-2\hat{j}-4\hat{k},$$

$$\overrightarrow{AC} = (7+2)\hat{i}+(0-3)\hat{j}+(-1-5)\hat{k} = 9\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}$$

$$= \sqrt{14},\ |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{14},\ |\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{14}$$

അതുകൊണ്ട്, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = |\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$

A, B, C എന്നിവ സമരേഖീയമാണ്.

കുറിപ്പ്

ഉദാഹരണം, 21 ൽ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = 0$ ആണെങ്കിൽ തന്നെയും A, B, C എന്നിവ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ അല്ല എന്നത് ശ്രദ്ധേയമാണ്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 10.3

1. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ യഥാക്രമം വലിപ്പം $\sqrt{3}$, 2 ആയ രണ്ട് സദിശങ്ങളാണ്. കൂടാതെ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$ ആയാൽ അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് കാണുക.

2. $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവെന്ത്?

3. $\hat{i} - \hat{j}$ എന്ന സദിശത്തിന് $\hat{i} + \hat{j}$ യിലുള്ള പ്രക്ഷേപം കാണുക.

4. $7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിനുമേൽ $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ ക്കുള്ള പ്രക്ഷേപം കാണുക.

5. തന്നിരിക്കുന്ന മൂന്ന് സദിശങ്ങളും ഏകക സദിശങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

   $\frac{1}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$, $\frac{1}{7}(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})$, $\frac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$

   കൂടാതെ ഇവ മൂന്നും പരസ്പരം ലംബമാണെന്നും തെളിയിക്കുക.

6. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 8, |\vec{a}| = 8|\vec{b}|$ ആയാൽ $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. $(3\vec{a} - 5\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 7\vec{b})$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ വലിപ്പം തുല്യമാണ്. അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് 60° യും അദിശഗുണനഫലം $\frac{1}{2}$ ഉം ആയാൽ സദിശങ്ങളുടെ വലിപ്പമെന്ത്?

9. $\vec{a}$ ഒരു ഏകക സദിശവും $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} + \vec{a}) = 12$ ഉം ആയാൽ $|\vec{x}|$ കാണുക.

10. $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ കൂടാതെ $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{c}$ ക്കു ലംബമായാൽ λ യുടെ വിലയെന്ത്?

11. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ ശൂന്യമല്ലാത്ത രണ്ടു സദിശങ്ങളായാൽ $|\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}$ എന്നത് $|\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a}$ ന് ലംബമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

12. $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ആയാൽ $\vec{b}$ യുടെ പ്രത്യേകതയെന്ത്?

13. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ മൂന്ന് ഏകക സദിശങ്ങളാണ്. കൂടാതെ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ആയാൽ $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ യുടെ വില കാണുക.

14. $\vec{a} = \vec{0}$ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{b} = \vec{0}$, ആയാൽ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. ഇതിന്റെ വിപരീതപ്രസ്താവന ശരിയാവണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണസഹിതം ന്യായീകരിക്കുക.

15. ΔABC യുടെ ശീർഷങ്ങളാണ് A(1, 2, 3), B(–1, 0, 0), C(0, 1, 2). $\angle ABC$ കണക്കാക്കുക.

16. A(1, 2, 7), B(2, 6, 3), C(3, 10, –1) എന്നിവ സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

17. $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k},\ \hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k},\ 3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

18. $\vec{a}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ വലിപ്പം a യും λ എന്നത് പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു അദിശവുമാണ്. $\lambda\vec{a}$ ഒരു ഏകക സദിശമാകണമെങ്കിൽ.

(A) $\lambda = 1$ (B) $\lambda = -1$ (C) $a = |\lambda|$ (D) $a = 1/|\lambda|$

10.6.3 ക്രോസ്സ് ഗുണനം/സദിശ ഗുണനം (Cross Product/Vector Product)

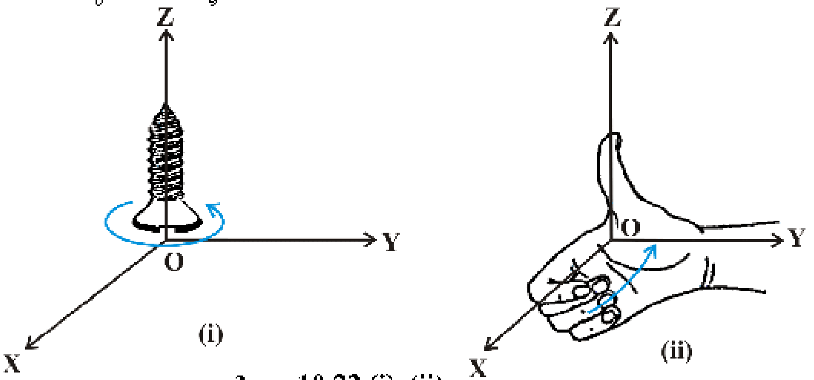
വലതുകൈ സൂചക സംവിധാനം (Right handed Co-ordinate System)

ഭാഗം 10.2 ൽ ത്രിമാന ചതുർത്ഥാംശ സൂചക സംവിധാനത്തെക്കുറിച്ച് പറഞ്ഞത് ഓർക്കുമല്ലോ. ഇതിൽ X അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയിൽ നിന്ന് Y അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയിലേക്ക് ഒരു വലതുപിരിയൻ സ്ക്രൂ തിരിക്കുമ്പോൾ അത് Z അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയിൽ കയറുന്നു.

> u, v എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ ക്രോസ് ഗുണനം ലഭിക്കാൻ cross (u, v) എന്ന കമാന്റ് നൽകിയാൽ മതി. (u ⊗ v എന്ന കമാന്റും നൽകാം.) u, v എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് സദിശങ്ങൾ നിർമിക്കുക. Plane ((0, 0, 0), u, v) എന്ന കമാന്റ് നൽകിയാൽ ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും u, v എന്നീ സദിശങ്ങൾക്ക് സമാന്തരവുമായ ഒരു തലം ലഭിക്കും. u × v കണ്ടുപിടിക്കുക. ഈ സദിശം തലത്തിന് ലംബമാണെന്ന് കാണാം.

മറ്റൊരുവിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ വലതുകൈയിലെ തള്ളവിരൽ മുകളിലേക്കും മറ്റു വിരലുകൾ ചുരുട്ടിയും (thums up) പടിച്ചാൽ X അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് Y അക്ഷത്തിലേക്കുള്ള ദിശയെ മറ്റു വിരലുകളും, തള്ള വിരൽ Z അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഇതാണ് വലതുകൈ സൂചക സംവിധാനം.

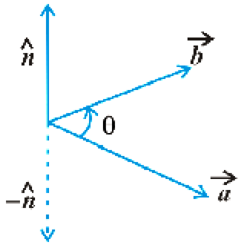


ചിത്രം 10.22 (i), (ii)

നിർവചനം:

ശൂന്യമല്ലാത്ത രണ്ട് സദിശങ്ങൾ $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവയുടെ ക്രോസ് ഗുണനം എന്നതിനെ $\vec{a} \times \vec{b}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഇത് നിർവചിക്കപ്പെടുന്നത്, $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ എന്നാണ്. ഇവിടെ θ എന്നത് $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവയ്ക്കിടയിലെ കോണളവും $0 \le \theta \le \pi$, $\hat{n}$ എന്നത് $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവക്ക് ലംബമായ ഏകക സദിശവുമാണ്. കൂടാതെ $(\vec{a}, \vec{b}, \hat{n})$ എന്നിവ യഥാക്രമം ഒരു വലതുകൈ സൂചക സംവിധാനമാകുന്നു (ചിത്രം 10.23). അതായത്, ഈ വലതുകൈ സൂചക സംവിധാനം $\vec{a}$ ൽ നിന്ന് $\vec{b}$ ലേക്ക് തിരിച്ചാൽ, അതിന്റെ ദിശ $\hat{n}$ ന്റെ ദിശയായിരിക്കും.



ചിത്രം 10.23

> **കുറിപ്പ്**
>
> $\vec{a}$ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{b}$ ശൂന്യസദിശമായാൽ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ആയിരിക്കും.

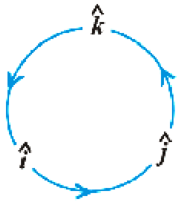
നിരീക്ഷണങ്ങൾ

1. $\vec{a} \times \vec{b}$ ഒരു സദിശമാണ് (നിർവചനത്തിൽ $\hat{n}$ ന്റെ സാന്നിദ്ധ്യം ശ്രദ്ധിക്കുക)

2. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ ശൂന്യമല്ലാത്ത സദിശങ്ങളായാൽ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ സമാന്തരങ്ങളായിരിക്കും (അല്ലെങ്കിൽ സമരേഖീയമായിരിക്കും)

   പ്രത്യേകിച്ച് $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, $\vec{a} \times (-\vec{a}) = \vec{0}$ ആകുമല്ലോ. ആദ്യത്തേതിൽ $\sin\theta = 0$, $\theta = 0$. രണ്ടാമത്തേതിൽ $\sin\theta = 0$, $\theta = \pi$.

3. $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ആയാൽ $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$.



ചിത്രം 10.24

4. നിരീക്ഷണങ്ങൾ 2, 3 എന്നിവയിൽ നിന്ന് നമുക്ക് ചുവടെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന നിഗമനങ്ങളിലെത്താം.

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k},\quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i},\quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

5. സദിശ ഗുണനം ഉപയോഗിച്ച് $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് θ കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$\sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

6. $\vec{a}$ എന്ന സദിശത്തിൽ നിന്ന് $\vec{b}$ ലേക്ക് അപ്രദക്ഷിണ (Anticlockwise) ദിശയിൽ കോണളക്കുമ്പോൾ $(\vec{a}, \vec{b}, \hat{n})$ എന്നത് ഒരു വലതുകൈ സൂചക സംവിധാനമാകുന്നു. ഇവിടെ $\hat{n}$ എന്നത് $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവക്ക് ലംബമായ ഏകക സദിശമാണ്. (ചിത്രം 10.25 (i))

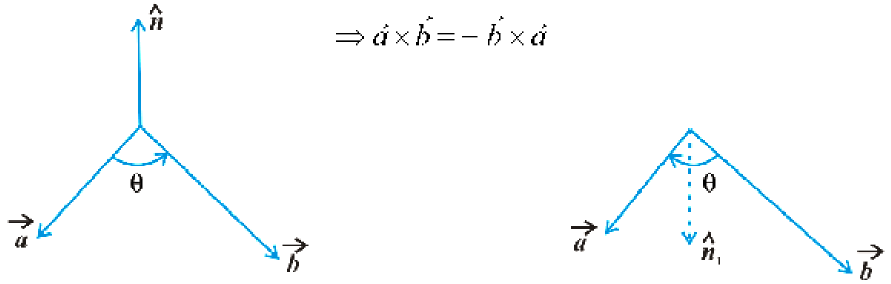
എന്നാൽ $\vec{b}$ ൽ നിന്ന് $\vec{a}$ ലേക്ക് അപ്രദിക്ഷിണദിശയിൽ കോണളക്കുകയാണെങ്കിൽ $(\vec{b}, \vec{a}, -\hat{n})$ ഒരു വലതുകൈ സൂചക സംവിധാനമാകുന്നു.

ചുരുക്കത്തിൽ $\vec{a}\times\vec{b} = ab\sin\theta\,\hat{n}$

$$\vec{b}\times\vec{a} = -ab\sin\theta\,\hat{n}$$

സദിശഗുണനം ക്രമനിയമം പാലിക്കുന്നില്ല.

$$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$



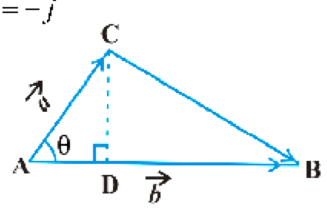
ചിത്രം 10.25

7. മുകളിൽ പറഞ്ഞതിൽ നിന്നും,

$$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k},\ \ \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i},\ \ \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$$

8. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ 2 വശങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു എങ്കിൽ CD = $|\vec{a}|\sin\theta$

AB = $|\vec{b}|$, CD = $|\vec{a}|\sin\theta$

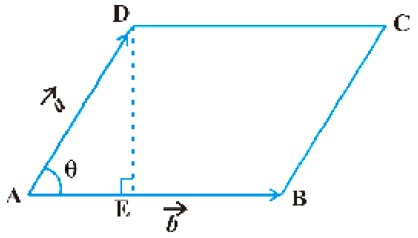


ചിത്രം 10.26

ΔABC യുടെ പരപ്പളവ് $= \frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta$

$= \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

9. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ അടുത്തടുത്ത രണ്ടു വശങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, അതിന്റെ പരപ്പളവ് $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ആയിരിക്കും.



ചിത്രം 10.27

സാമാന്തരികം ABCD യുടെ പരപ്പളവ്
= AB. DE

ഇവിടെ $AB = |\vec{b}|$

$DE = |\vec{a}|\sin\theta$

∴ സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$= |\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta = |\vec{a}\times\vec{b}|.$

സദിശഗുണനത്തിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ മൂന്ന് സദിശങ്ങളും λ ഒരു അദിശവുമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ

സദിശസങ്കലനത്തിനുമേൽ സദിശ ഗുണിതത്തിന്റെ വിതരണം നിയമം:

(i) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

(ii) $\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

(iii) $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ ആയാൽ

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$ ആയിരിക്കും.

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$$
$$= a_1b_1.\vec{0}+a_1b_2k - a_1b_3j - a_2b_1k + a_2b_2\vec{0}$$
$$+a_2b_3i + a_3b_1j - a_3b_2i + a_3b_3\vec{0}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$ ഇവിടെ $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

ഉദാഹരണം : 22

$\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ ആയാൽ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ കാണുക.

പരിഹാരം

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-2-15) - (-4-9)\hat{j} + (10 \quad 3)\hat{k} = -17\hat{i} + 13\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-17)^2 + (13)^2 + (7)^2} = \sqrt{507}$$

ഉദാഹരണം : 23

$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ആയാൽ

$(\vec{a} + \vec{b})$, $(\vec{a} - \vec{b})$ എന്നിവയ്ക്ക് ലംബമായ ഏകക സദിശം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$\vec{a} + \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{a} - \vec{b} = -\hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ എന്നിവക്ക് ലംബമായ സദിശം,

$$\vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{c}| = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$\therefore$ നിശ്ചിത ഏകകസദിശം $= \dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \dfrac{-1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \dfrac{2}{\sqrt{6}}\hat{j} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$

കുറിപ്പ്

$\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ എന്നിവയ്ക്കു ലംബമായ മറ്റൊരു ഏകക സദിശമാണ് $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\hat{i} - \dfrac{2}{\sqrt{6}}\hat{j} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$. ഇത് $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$ യുടെ ദിശയിലുള്ളതാണ്.

ഉദാഹരണം : 24

A(1.1.1). B(1,2,3), C(2.3.1) എന്നിവ ശീർഷങ്ങളായ ΔABC യുടെ പരപ്പളവ് കാണുക.

പരിഹാരം

$$\overline{AB} = \hat{j} + 2\hat{k},\ \overline{AC} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\Delta ABC \text{ യുടെ പരപ്പളവ് } = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\therefore\ |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{16 + 4 + 1} = \sqrt{21}$$

$$\therefore\ \Delta ABC \text{ യുടെ പരപ്പളവ് } = \frac{1}{2}\sqrt{21}$$

ഉദാഹരണം : 25

$\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}, \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ എന്നിവ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ അടുത്തടുത്ത വശങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സദിശങ്ങളാണ്. സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവെന്ത്?

> ഉദാഹരണം 25 ലെ സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്താൽ കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ സാമാന്തരികത്തിന്റെ അടുത്തടുത്ത വശങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സദിശങ്ങളാണ്. സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ആകുന്നു.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\therefore\ |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{25 + 1 + 16} = \sqrt{42}$$

$$\therefore\ \text{സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് } = \sqrt{42}$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 10.4

1. $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ആയാൽ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

2. $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ആയാൽ $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ എന്നിവക്ക് ലംബമായ ഏകക സദിശം കണ്ടുപിടിക്കുക.

3. $\vec{a}$ എന്ന ഏകക സദിശം യഥാക്രമം $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങളുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \theta$ (0 എന്നത് ഒരു ന്യൂനകോൺ ആണ്) ആണെങ്കിൽ, θ യുടെ വില കാണുക. കൂടാതെ $\vec{a}$ യുടെ $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ ഭാഗങ്ങൾ ഏതെല്ലാം?

4. $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = \vec{0}$ ആയാൽ λ, μ എന്നിവയുടെ വിലയെന്ത്?

6. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നീ സദിശങ്ങളെക്കുറിച്ച് എന്ത് അനുമാനിക്കാം?

7. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ യഥാക്രമം $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, $c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ ആയാൽ $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. $\vec{a} = \vec{0}$ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{b} = \vec{0}$ ആയാൽ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. ഇതിന്റെ വിപരീത പ്രസ്താവന (converse) ശരിയാണോ? ഉദാഹരണസഹിതം സമർത്ഥിക്കുക.

9. A(1, 1, 2), B(2, 3, 5), C(1, 5, 5) ശീർഷങ്ങളായ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.

10. $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ എന്നിവ അടുത്തടുത്ത വശങ്ങളായ സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവെന്ത്?

> $(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}$ എന്ന സദിശം ലഭിക്കാൻ $(u \otimes v)^* w$ എന്ന input നൽകിയാൽ മതി.

11. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ആയ രണ്ട് സദിശങ്ങളാണ് $\vec{a}, \vec{b}$. $\vec{a} \times \vec{b}$ ഒരു ഏകക സദിശമായാൽ, $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോണളവ്.

(A) $\pi/6$ (B) $\pi/4$ (C) $\pi/3$ (D) $\pi/2$

12. A, B, C, D എന്നിവയുടെ സ്ഥാന സദിശങ്ങൾ യഥാക്രമം $-\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$, $\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$, $\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$, $-\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+4\hat{k}$ ആയാൽ ചതുരം ABCD യുടെ പരപ്പളവ്.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1

(C) 2 (D) 4

10.7 അദിശ ത്രയ ഗുണനം (Scalar Triple Product)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ മൂന്ന് സദിശങ്ങളാണെങ്കിൽ ഇവയ്ക്കിടയിൽ ഡോട്ട് ഗുണനം, ക്രോസ് ഗുണിതം എന്നീ ക്രിയകൾ ഒരുമിച്ചു വരാനുള്ള സാധ്യകൾ എന്തൊക്കെ?

i. $\vec{a}\cdot\vec{b}.\vec{c}$ ii. $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ iii. $\vec{a}\times(\vec{b}\cdot\vec{c})$ iv. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

ഇവയിൽ ii, iv, എന്നീ ഗുണിതങ്ങൾ മാത്രമേ നിലനിൽക്കുന്നുള്ളൂ എന്ന് കാണാം. എന്തുകൊണ്ട്? ഇവയിൽ ii നെ അദിശത്രയഗുണിതം എന്നു വിളിക്കുന്നു. iv-ാമത്തേത് ഉയർന്ന ക്ലാസ്സുകളിൽ ചർച്ച ചെയ്യും.

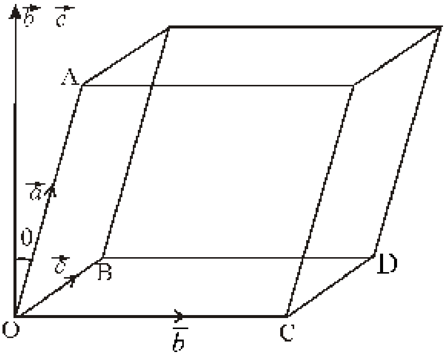
അതായത് $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ എന്നിവയുടെ ഡോട്ട് ഗുണിമാണ് അദിശത്രയ ഗുണനം.

ഇതിനെ $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ എന്നോ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ എന്നോ സൂചിപ്പിക്കാം.

$$\text{A X nb X y } [\vec{a},\vec{b}, \vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

നിരീക്ഷണങ്ങൾ

1. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ എന്നത് ഒരു അദിശമാണ്.
2. ജ്യാമിതീയമായി $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ എന്നത് $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ അടുത്തടുത്ത വരുന്ന മൂന്ന് വക്കുകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സാമാന്തരികപ്പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തമാണ്.



ചിത്രം 10.28

സാമാന്തരികപ്പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം അതിന്റെ പാദവശത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെയും ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്, ഉയരം $\vec{b}\times\vec{c}$ യിൽ $\vec{a}$ യുടെ പ്രക്ഷേപം ആണല്ലോ.

$$\text{ഉയരം} = \frac{|\dot{a}.(\bar{b}\times\dot{c})|}{|(\bar{b}\times\bar{c})|}$$

$$\therefore \text{ വ്യാപ്തം} = |\bar{b}\times\bar{c}| \times \frac{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}{|\vec{b}\times\vec{c}|}$$

$$= |[a\ b\ c]|$$

3. $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k},\ \bar{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k},\ \bar{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ ആയാൽ

$$\dot{b}\times\dot{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ എന്ന് നമുക്കറിയാം}$$

$$= (b_2c_3 - b_3c_2)\ \hat{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\ \hat{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\ \hat{k}$$

$$\dot{a}.(\dot{b}\times\dot{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\text{ie, } [\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

4. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},$ എന്നിവ ഏതെങ്കിലും മൂന്ന് സദിശങ്ങളായാൽ, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\dot{b}, \dot{c}, \dot{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$ ആയിരിക്കും. സദിശങ്ങളുടെ ചക്രീയമാറ്റം അദിശത്രയ ഗുണനത്തിന്റെ വിലയെ ബാധിക്കുന്നില്ല.

5. അദിശത്രയ ഗുണിതത്തിൽ ഡോട്ടും ക്രോസും പരസ്പരം മാറ്റാവുന്നതാണ്.

$\dot{a}\cdot(\dot{b}\times\dot{c}) = [\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}] = [\dot{b}, \dot{c}, \dot{a}] = [\dot{c}, \dot{a}, \dot{b}] = \dot{c}\cdot(\dot{a}\times\dot{b}) = (\dot{a}\times\dot{b})\cdot\dot{c}$

6. $[\vec{a}, \bar{b}, \bar{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$

അതായത്, $[\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}] = \dot{a}\cdot[\dot{b}\times\dot{c}]$

$$= \vec{a}.\left[-\vec{c}\times\vec{b}\right]$$

$$= -\vec{a}.\left[\vec{c}\times\vec{b}\right]$$

$$= -\left[\vec{a},\ \bar{c},\ \vec{b}\right]$$

7. $[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{a}, \vec{a}] = 0$

$[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}] = [\vec{b}, \vec{a}, \vec{a}] = \vec{b}.(\vec{a} \times \vec{a}) = \vec{b}.\vec{0} = 0.$

10.7.1 മൂന്ന് സദിശങ്ങളുടെ സമതലീയത

സിദ്ധാന്തം : 1 മൂന്ന് സദിശങ്ങൾ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ സമതലീയമാണെങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ ആയിരിക്കും.

തെളിവ് : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ സമതലീയമാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$\vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ സമാന്തരങ്ങളാണെങ്കിൽ $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$

അതുകൊണ്ട്, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

$\vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ സമാന്തരങ്ങളല്ലെങ്കിൽ, $\vec{b} \times \vec{c}$ എന്നത് $\vec{b}$ യ്ക്കും $\vec{c}$ യ്ക്കും ലംബമാണ്. മൂന്ന് സദിശങ്ങളും സമതലീയമായതിനാൽ $\vec{b} \times \vec{c}$ എന്നത് $\vec{a}$ ക്കും ലംബമാണ്.

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ അതായത് $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

വിപരീതമായി $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ ആയാൽ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ സമതലീയമായിരിക്കും.

i. $\vec{a} = \vec{0}$ ആയാൽ $\vec{a}$ എന്നത് ഏത് സദിശങ്ങളുമായും സമതലീയമാണ്.

അതുകൊണ്ട്, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ സമതലീയമാണ്.

ii. $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$ ആയാൽ $\vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ സമാന്തരമാണ്. അതുകൊണ്ട്, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ സമതലീയമാണ്.

iii. $\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}$ എന്നിവ ശൂന്യസദിശമല്ലെങ്കിൽ, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}$ എന്നിവ പരസ്പരം ലംബമാണ്. $\vec{b} \times \vec{c}$ എന്നത് $\vec{b}$ യ്ക്കും $\vec{c}$ യ്ക്കും ലംബമായതിനാൽ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ സമതലീയമായിരിക്കും.

കുറിപ്പ്

നാല് ബിന്ദുക്കളുടെ സമതലീയത മൂന്ന് സദിശങ്ങളുടെ സമതലീയത ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കാവുന്നതാണ്. A, B, C, D എന്നിവ നാല് ബിന്ദുക്കളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ എന്നിവ കാണുക.

$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = 0$ ആയാൽ നാല് ബിന്ദുക്കളും സമതലീയമാണെന്ന് കാണാം.

ഉദാഹരണം : 26

$\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ ആയാൽ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ കാണുക.

പരിഹാരം

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-10$$

ഉദാഹരണം : 27

$\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=-2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$, $\vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ എന്നിവ സമതലീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 3 & -4\\ 1 & -3 & 5\end{vmatrix}=0$$

$\therefore\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ സമതലീയമാണ്.

ഉദാഹരണം : 28

$\vec{a}=\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{c}=\lambda\hat{i}+7\hat{j}+3\hat{k}$ എന്നിവ സമതലീയമായാൽ λ യുടെ വിലകാണുക.

പരിഹാരം

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ \lambda & 7 & 3\end{vmatrix}=0,\qquad \Rightarrow \lambda(-3+1)-7(-1-2)+3(-1-6)=0$$

$$\text{ie, } -2\lambda+21-21=0$$

$$\Rightarrow \lambda=0.$$

ഉദാഹരണം : 29

A, B, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ യഥാക്രമം $4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}$, $-(\hat{j}+\hat{k})$, $3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k}$, $4(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ ആയാൽ, ഇവ സമതലീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

A, B, C, D എന്നിവ സമതലീയമാകണമെങ്കിൽ, $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = 0$ ആകണം.

ഇവിടെ

$$\overrightarrow{AB} = -(\hat{j}+\hat{k})-(4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}) = -4\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k})-(4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}) = -\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = 4(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})-(4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}) = -8\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

അതുകൊണ്ട്, A. B, C, D എന്നിവ സമതലീയമാണ്.

ഉദാഹരണം: 30

$\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right] = 2\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right] = (\vec{a}+\vec{b}).((\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a}))$$

$$= (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})$$

$$= (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a})$$

$$= \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})$$

$$= \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]+\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\right]+\left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{a}\right]+\left[\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}\right]+\left[\vec{b}, \vec{b}, \vec{a}\right]+\left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right]$$

$$= 2\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$$

ഉദാഹരണം: 31

$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}+\vec{d}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]+\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right]$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{d}\right]=\vec{a}.(\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{d}))$$

$$=\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d})$$

$$=\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{d})$$

$$=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right].$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 10.5

1. $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}, \vec{b}=2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}, c=3i+j-2\hat{k}$ ആയാൽ $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

2. $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}, \vec{b}=-2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}, \vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ എന്നിവ സമതലീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

3. $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, 3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}, \hat{i}+\lambda\hat{j}-3\hat{k}$ എന്നിവ സമതലീയമായാൽ λ യുടെ വിലയെന്ത്?

4. $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}, \vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ,

   (a) $c_1=1, c_2=2,$ ആയാൽ c_3 യുടെ ഏത് വിലയ്ക്ക് $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ സമതലീയമാകും.

   (b) $c_2=-1, c_3=1,$ ആയാൽ c_1 ന്റെ ഒരു വിലയ്ക്കും $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ സമതലീയമാവുകയില്ലെന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. നാല് ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ യഥാക്രമം $4\hat{i}+8\hat{j}+12\hat{k}, 2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}, 3\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k}, 5\hat{i}+8\hat{j}+5\hat{k}$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. ഇവ സമതലീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. A(3, 2, 1), B(4, x, 5), C(4, 2, –2), D(6, 5, –1) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമതലീയമാണെങ്കിൽ x ന്റെ വിലയെന്ത്?

7. $\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}$ എന്നിവ സമതലീയമാമെങ്കിൽ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ സമതലീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഉൾപ്പെടുന്ന തലത്തിന് ലംബമാണ് $i+j+k$ എന്ന സദിശം എന്ന് തെളിയിക്കുക.

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം: 32

XY തലത്തിലുള്ളതും ആധാരബിന്ദു തുടക്കബിന്ദുവുമായ എല്ലാ ഏകകസദിശങ്ങളും എഴുതുക.

പരിഹാരം

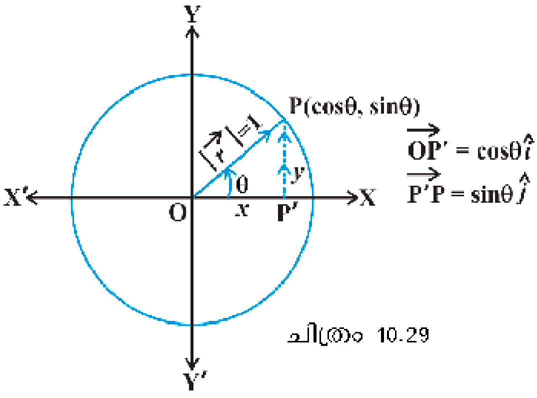
$\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}$ എന്നത് XY തലത്തിലെ ഏകകസദിശമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് $x = \cos\theta$ എന്നും $y = \sin\theta$ എന്നും കാണാം. ഇവിടെ θ എന്നത് $\overline{OP}$, X അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവാണ്.

$$\therefore \vec{r} = \cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{j} \quad .... (1)$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = 1$$

ഇവിടെ θ യുടെ വില 0 ത്തിൽ നിന്ന് 2π വരെ എത്തുമ്പോൾ ഒരു വൃത്തം രൂപപ്പെടുന്നതിനാൽ $x^2 + y^2 = 1$

ആയതിനാൽ (1) എന്ന സദിശം എല്ലാ ഏകക സദിശത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇവിടെ $0 \le \theta < 2\pi$



ചിത്രം 10.29

ഉദാഹരണം : 33

$\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $2\hat{i}+5\hat{j}$, $3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, $\hat{i}-6\hat{j}-\hat{k}$ എന്നിവ യഥാക്രമം A, B, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാന സദിശങ്ങളായാൽ $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ എന്നിവക്കിടയിലുള്ള കോണളവെന്ത്? $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ എന്നിവ സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

AB, CD എന്നിവക്കിടയിലുള്ള കോണളവാണ് θ എങ്കിൽ $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ എന്നിവക്കിടയിൽ കോണളവും θ തന്നെയായിരിക്കും.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= (2\hat{i}+5\hat{j})-(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = \hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2+(4)^2+(-1)^2} = 3\sqrt{2}$$
$$\overrightarrow{CD} = -2\hat{i}-8\hat{j}+2\hat{k},\ |\overrightarrow{CD}| = 6\sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}$$
$$= \frac{1(-2)+4(-8)+(-1)(2)}{(3\sqrt{2})(6\sqrt{2})} = \frac{-36}{36} = -1$$

$0 \le \theta \le \pi$, ആയതിനാൽ ഇവിടെ $\theta = \pi$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ എന്നിവ സമരേഖീയമാണ്. അല്ലെങ്കിൽ,

$\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ആയതിനാൽ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ എന്നിവ സമരേഖീയമാണ്.

ഉദാഹരണം: 34

$|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, |\vec{c}|=5$ ആയിട്ടുള്ള മൂന്ന് സദിശങ്ങളാണ് $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, കൂടാതെ ഓരോന്നും മറ്റു രണ്ടു സദിശങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് ലംബവുമാണ്. $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ കാണുക.

പരിഹാരം

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = 0,\ \vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{a}) = 0,\ \vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 0$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

കൂടാതെ,
$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})$$
$$+\ \vec{c}.(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.\vec{c}$$
$$= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$
$$= 9+16+25 = 50$$
$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

ഉദാഹരണം: 35

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ മൂന്ന് സദിശങ്ങളാണ്. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=4,\ |\vec{c}|=2$ ആയാൽ $\mu = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ ന്റെ വിലകാണുക.

പരിഹാരം

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ആയതിനാൽ

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} = -|\vec{a}|^2 = -1 \quad \ldots (1)$$

കൂടാതെ $\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c} = -|\vec{b}|^2 = -16 \quad \ldots (2)$$

അതുപോലെ $\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} = -4 \quad \ldots (3)$

$(1)+(2)+(3) \Rightarrow$

$$2\,(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}) = -21$$

$$\therefore 2\mu = -21,\ \mu = \frac{-21}{2}$$

ഉദാഹരണം: 36

$\vec{\alpha}=3\hat{i}-\hat{j},\ \vec{\beta}=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}_1$ ന് സമാന്തരവും $\vec{\beta}_2$ ന് ലംബവുമാണ്. $\vec{\beta}$ നെ $\vec{\beta}=\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2$ എന്ന രൂപത്തിലെഴുതുക.

പരിഹാരം

$\vec{\beta}_1 = \lambda\vec{\alpha}$, λ എന്നത് ഒരു അദിശമാണ്.

അതായത്, $\vec{\beta}_1 = 3\lambda\hat{i}-\lambda\hat{j}$

$$\vec{\beta}_2 = \vec{\beta}-\vec{\beta}_1 = (2-3\lambda)\hat{i}+(1+\lambda)\hat{j}-3\hat{k}.$$

$\alpha \perp \beta_2$ ആയതിനാൽ, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}_2 = 0$ ആകുമല്ലോ.

$$3(2-3\lambda)-(1+\lambda) = 0$$

അതുകൊണ്ട്, $\lambda = \dfrac{1}{2}$

അതുകൊണ്ട്, $\vec{\beta}_1 = \dfrac{3}{2}\hat{i}-\dfrac{1}{2}\hat{j},\quad \vec{\beta}_2 = \dfrac{1}{2}\hat{i}+\dfrac{3}{2}\hat{j}-3\hat{k}$

$$\vec{\beta}=\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2 = \frac{3}{2}\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+\frac{1}{2}\hat{i}+\frac{3}{2}\hat{j}-3\hat{k} = 2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$$

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. X അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി 30° കോൺ നിർമിക്കുന്നതും XY തലത്തിലുള്ളതുമായ ഏകക സദിശം എഴുതുക.
2. $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുന്ന സദിശത്തിന്റെ അദിശഭാഗങ്ങളും വലിപ്പവും കാണുക.
3. ഒരു പെൺകുട്ടി പടിഞ്ഞാറു ദിശയിൽ 4 കി.മീറ്റർ സഞ്ചരിച്ച് 30° വടക്ക് കിഴക്ക് ഭാഗത്തേക്ക് തിരിഞ്ഞ് 3 കി.മീറ്റർ യാത്ര ചെയ്യുന്നു. പെൺകുട്ടിയുടെ സ്ഥാനാന്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക.
4. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ ആയാൽ $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$ ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഉത്തരം സാധൂകരിക്കുക.
5. $x(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ ഒരു ഏകക സദിശമാണെങ്കിൽ x ന്റെ വിലയെന്ത്?
6. $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ എന്നിവയുടെ പരിണതഫല(resultant)ത്തിന് സമാന്തരമായതും 5 യൂണിറ്റ് വലിപ്പമുള്ളതുമായ സദിശം കണ്ടുപിടിക്കുക.
7. $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ എന്നിങ്ങനെ ആയാൽ $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ ക്കു സമാന്തരമായ ഒരു ഏകകസദിശം കണ്ടുപിടിക്കുക.
8. A(1, – 2, – 8), B(5, 0, –2), C(11, 3, 7) എന്നിവ സമരേഖീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. B എന്ന ബിന്ദു AC യെ വിഭജിക്കുന്ന അനുപാതം കണ്ടുപിടിക്കുക.
9. P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ യഥാക്രമം $(2\vec{a} + \vec{b}), (\vec{a} - 3\vec{b})$ ആയാൽ $\overline{PQ}$ വിനെ ബാഹ്യമായി 1 : 2 എന്ന അനുപാതത്തിൽ വിഭജിക്കുന്ന R എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശമെന്ത്? RQ ന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണ് P എന്ന് തെളിയിക്കുക.
10. $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$, $\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ എന്നിവ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ അടുത്തടുത്ത രണ്ടു വശങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതിന്റെ വികർണത്തിന് സമാന്തരമായ ഏകക സദിശം കാണുക. സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവെന്ത്?
11. OX, OY, OZ അക്ഷങ്ങളുമായി തുല്യമായ കോണുകൾ നിർമിക്കുന്ന ഒരു സദിശത്തിന്റെ ദിശാകൊസൈൻസ് യഥാക്രമം $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

12. $\vec{a}=\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+7\hat{k}$, $\vec{c}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവക്ക് ലംബമായ $\vec{d}$ എന്ന സദിശം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇവിടെ $\vec{c}\cdot\vec{d}=15$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

13. $2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$, $\lambda\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ തുകയുടെ ദിശയിലുള്ള ഏകകസദിശത്തിന്റേയും $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ യുടേയും അദിശഗുണിതം 1 ആയാൽ λ യുടെ വിലയെന്ത്?

14. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ എന്നിവ ഒരേ വലിപ്പവും പരസ്പരം ലംബമായതുമായ മൂന്ന് സദിശങ്ങളാണ്. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ എന്ന സദിശം $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവയുമായി ഒരേ ചരിവിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

15. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ ലംബമാണെങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക. ഇവിടെ $\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$

16 മുതൽ 19 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയുത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

16. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവക്കിടയിലുള്ള കോണാണ് θ, താഴെ പറയുന്നവയിൽ ഏതാകുമ്പോഴാണ് $\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 0$ ആവുക?

(A) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ (B) $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

(C) $0<\theta<\pi$ (D) $0\leq\theta\leq\pi$

17. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ രണ്ട് ഏകക സദിശങ്ങളാണ്. θ എന്നത് അവയ്ക്കിടയിലെ കോണളവാകുന്നു. $\vec{a}+\vec{b}$ ഒരു ഏകക സദിശമാകണമെങ്കിൽ,

(A) $\theta=\frac{\pi}{4}$ (B) $\theta=\frac{\pi}{3}$ (C) $\theta=\frac{\pi}{2}$ (D) $\theta=\frac{2\pi}{3}$

18. $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k})+\hat{j}\cdot(\hat{i}\times\hat{k})+\hat{k}\cdot(\hat{i}\times\hat{j})$ യുടെ വില,

(A) 0 (B) −1 (C) 1 (D) 3

19. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവയ്ക്കിടയിലെ കോണാണ് θ. $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{b}|$ ആകണമെങ്കിൽ θ എന്ത്?

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

സംഗ്രഹം

- P(x, y, z) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശം $\overline{\text{OP}}(=\vec{r}) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. അതിന്റെ വലിപ്പം $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- ഒരു സദിശത്തിന്റെ അദിശഭാഗങ്ങൾ അതിന്റെ ദിശാനുപാതങ്ങൾ (direction ratios) ആണ്. അവ യഥാക്രമം ഓരോ അക്ഷത്തിലേക്കുമുള്ള അതിന്റെ പ്രക്ഷേപവുമാണ്.
- ഒരു സദിശത്തിന്റെ വലിപ്പം (r), ദിശാനുപാതം (a, b, c) ദിശാകൊസൈൻസ് (l, m, n) എന്നിവ പരസ്പരബന്ധിതമാണ്.

$$l = \frac{a}{r}, \quad m = \frac{b}{r}, \quad n = \frac{c}{r}$$

- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ സദിശങ്ങൾ (ക്രമമായി) സൂചിപ്പിച്ചാൽ അവയുടെ തുക ശൂന്യസദിശമാണ്.
- ആരംഭബിന്ദു ഒന്നായ രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ തുക, അവ വശങ്ങളായി വരാവുന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണമായി സൂചിപ്പിക്കുന്നു.
- ഒരു സദിശത്തെ അദിശം λ കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം ആ സദിശത്തിന്റെ വലിപ്പത്തിൽ മാറ്റം വരുത്തുന്നു. വലിപ്പം $|\lambda|$ മടങ്ങാവുകയും λ യുടെ ചിഹ്നമനുസരിച്ച് അധിസംഖ്യ ആയാൽ ദിശ മാറാതെയും λ ന്യൂനസംഖ്യ ആയാൽ വിപരീത ദിശയിലും ആകുന്നു.
- $\vec{a}$ എന്ന സദിശത്തിന് $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ എന്നത് അതിന്റെ ദിശയിലുള്ള ഏകക സദിശമാണ്.
- സ്ഥാന സദിശങ്ങൾ $\vec{a}, \vec{b}$ ആയ P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അഗ്രബിന്ദുക്കളായ രേഖാഖണ്ഡമാണ് PQ. അതിനെ R എന്ന ബിന്ദു $m : n$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ വിഭജിക്കുന്നു. R ന്റെ സ്ഥാന സദിശം,

  (i) വിഭജനം ആന്തരികമാണെങ്കിൽ $\vec{r} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$.

  (ii) വിഭജനം ബാഹ്യമാണെങ്കിൽ $\vec{r} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m - n}$.

- $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ ഇടയിലുള്ള കോൺ θ ആയാൽ, അവയുടെ അദിശഗുണനം (ഡോട്ട് ഗുണനം)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

കൂടാതെ, $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

- $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോണളവാണ് θ എങ്കിൽ സദിശങ്ങളുടെ സദിശ ഗുണനം (ക്രോസ് ഗുണനം)

$$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$$

ഇവിടെ $\hat{n}$ എന്നത് $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ ഉൾപ്പെടുന്ന തലത്തിന് ലംബമായ ഏകക സദിശമാണ്. കൂടാതെ $\vec{a}, \vec{b}, \hat{n}$ എന്നത് ഒരു വലതുകൈ സൂചക സംവിധാനമാകുന്നു.

- $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ എന്നിവ രണ്ട് സദിശങ്ങളും λ ഒരു അദിശവുമായാൽ,

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\hat{i} + (a_2+b_2)\hat{j} + (a_3+b_3)\hat{k};$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k};$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3;$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$ ആയിരിക്കും.

- $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ ആയാൽ

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ ആയിരിക്കും.

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾ സമതലീയമാണെങ്കിൽ $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0$

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

'വെക്ടസ്' (*vectus*) എന്ന ലാറ്റിൻ വാക്കിൽ നിന്നാണ് വെക്ടർ (സദിശം) എന്ന വാക്കിന്റെ ഉൽഭവം. ഇതിനർത്ഥം 'ചുമക്കുക' എന്നാണ്. ആധുനിക സദിശസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വികാസം ആരംഭിക്കുന്നത് 1800 കളിലാണ്. കാസ്പർ വെസ്സൽ

(1745-1818) ഴാങ് റോബേർ ആർഗങ് (1768-1822) എന്നിവർ സുചകതലത്തിലുള്ള സദിശരേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ $a \quad ib$ എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യക്ക് ഒരു ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനം നൽകാൻ ശ്രമിച്ചു. ഐറിഷ് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന വില്ല്യം റോവൻ ഹാമിൽട്ടൺ (1805-1865) ആണ് അദ്ദേഹത്തിന്റെ ലക്ചേർസ് ഓൺ ക്വാടേർണിയൻസ് (1853) എന്ന കൃതിയിൽ വെക്ടർ എന്ന പദം ആദ്യമായി ഉപയോഗിക്കുന്നത്. ത്രിമാനതലത്തിലെ രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ ഗുണനം എന്ന പ്രശ്നത്തിന് അദ്ദേഹത്തിന്റെ 'മെത്തേഡ് ഓഫ് ക്വാട്ടേർണിയൻസ്' (ചില ബീജഗണിത ചട്ടങ്ങളോടെ $a+b\hat{i}+c\hat{j}+d\hat{k}$, $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ എന്ന നാല് രേഖീയ സംഖ്യകളുടെ ഒരു ക്രമികഗണം ത്രിമാനതലത്തിലെ സദിശ ഗുണനത്തിനും പരിഹാരം കാണാൻ ഏറെ സഹായിച്ചു. ഇങ്ങനെയാണെങ്കിലും സദിശം എന്ന ആശയവും അവയുടെ സങ്കലനവും ഗ്രീക്ക് തത്ത്വചിന്തകനും പ്ലാറ്റോയുടെ ശിഷ്യനുമായിരുന്ന അരിസ്റ്റോട്ടിലി (384-322 B.C.) ന്റെ കാലത്തു തന്നെ അറിയപ്പെട്ടിരുന്നു എന്ന് പറയാതെ വയ്യ. രണ്ടോ അതിലധികമോ ബലങ്ങളുടെ പ്രവർത്തനം, സാമാന്തരിക സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് അവയുടെ തുക കണ്ടുപിടിച്ച് നിരീക്ഷിക്കാമായിരുന്നു എന്ന അറിവ് ആ കാലത്തുതന്നെ ഉണ്ടായിരുന്നതായി സംശയിക്കേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. സദിശങ്ങളായി സങ്കലനം ചെയ്യുന്ന ബലങ്ങളുടെ സംയോജനത്തിനുള്ള ശരിയായ നിയമം, ലംബബലങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ സ്റ്റെവിൻ - സൈമൺ (1548-1620) കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടുണ്ട്. *De Beghinselen der Weeghconst* എന്ന കൃതിയിൽ അദ്ദേഹം എ.ഡി. 1586 ൽ ബലങ്ങളുടെ ജ്യാമിതീയ സങ്കലത്തെക്കുറിച്ചുള്ള തത്ത്വം വിശദമായി പ്രതിപാദിക്കുന്നു. ഇത് മെക്കാനിക്സിന്റെ (ബലതന്ത്രം) വളർച്ചയിൽ വിപ്ലവം സൃഷ്ടിച്ചു. എന്നാൽ പിന്നീട് 200 വർഷത്തോളമെടുത്തു, സദിശങ്ങളുടെ പൊതുവായ ആശയം രൂപപ്പെടുന്നതിന്.

അനിവാര്യമായും ക്വാട്ടേർനിയൻസിൽ നിന്ന് വാസ്തവിക (അദിശം) ഭാഗവും അവാസ്തവിക (സദിശം) ഭാഗവും വേർതിരിച്ച് ഇന്ന് നമ്മൾ അറിയുന്ന 'സദിശ അപഗ്രഥനം' രൂപീകരിച്ചത് 1880 ൽ അമേരിക്കൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനും ഭൗതികശാസ്ത്രജ്ഞനുമായിരുന്ന ജോസൈ വില്ലാർഡ് ഗിബ്സ് (1839-1903) ഇംഗ്ലീഷ് എഞ്ചിനീറായിരുന്ന ഒലിവർ ഹെവിസൈഡ് (1850-1925), എന്നിവരാണ്. 1881 ലും 1884 ലും ഗിബ്സ് തന്റെ 'എലമെന്റ്സ് ഓഫ് വെക്ടർ അനാലിസിസ്' എന്ന കൃതി പുറത്തിറക്കി. ഈ കൃതിയാണ് സദിശത്തെക്കുറിച്ച് ആധികാരികവും സമഗ്രവുമായ വിവരങ്ങൾ നൽകിയത്. എന്നിരുന്നാലും സദിശത്തിന്റെ ഉപയോഗം വിശദീകരിക്കുന്നതിൽ അംഗീകരിക്കേണ്ടത്, ഈ വിഷയത്തിൽ ഒരുപാട് സംഭാവനകൾ നൽകിയ ഡി.ഹിവിസൈഡ്, വി.ജി.ടെയ്റ്റ് (1831-1901) എന്നിവരെയാണ്.

അധ്യായം **11**

ത്രിമാന ജ്യാമിതി
(THREE DIMENSIONAL GEOMETRY)

❖ ഗണിതത്തിലെ കണ്ടുപിടുത്തങ്ങളുടെ ചാലകശക്തി യുക്തിയല്ല ഭാവനയാണ് - എ. ദ്മോർഗൺ ❖

11.1 ആമുഖം

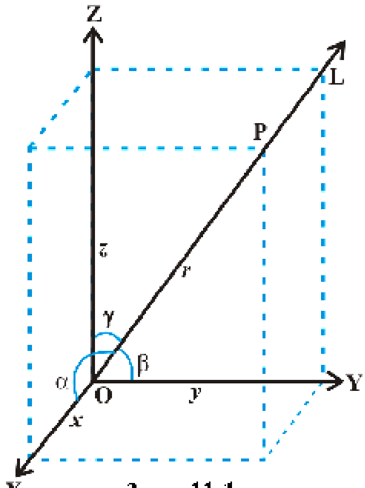
ലെയ്നാഡ് ഓയ്‌ലർ
(1707-1783)

പതിനൊന്നാം ക്ലാസിൽ 'നേർവരകൾ', 'ത്രിമാന ജ്യാമിതിക്ക് ഒരാമുഖം'എന്നീ അധ്യായങ്ങളിലൂടെ നാം കടന്നുവന്നുവല്ലോ. നേർവരകൾ എന്ന അധ്യായത്തിൽ ദ്വിമാനതലത്തിലുള്ള നേർവരകളെക്കുറിച്ചാണ് ചർച്ച ചെയ്തത്. 'ത്രിമാനജ്യാമിതിക്ക് ഒരാമുഖം' എന്ന അധ്യായത്തിലാവട്ടെ ത്രിമാനസ്ഥലത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യ, സൂചകതലങ്ങൾ, ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം, തുടങ്ങിയ അടിസ്ഥാന കാര്യങ്ങൾ നാം മനസ്സിലാക്കി. ഈ അധ്യായത്തിൽ ത്രിമാനസ്ഥലത്തുള്ള നേർവരകളെക്കുറിച്ചും, തലങ്ങളെക്കുറിച്ചും, അവയുടെ സമവാക്യങ്ങളെക്കുറിച്ചും വിശദമായി പഠിക്കുകയാണ്. കഴിഞ്ഞ അധ്യായത്തിൽ നാം മനസ്സിലാക്കിയ സദിശങ്ങൾ എന്ന ആശയം, ഇവിടെ ത്രിമാനജ്യാമിതിയിലെ ആശയരൂപീകരണത്തിന് വലിയതോതിൽ ഉപയോഗപ്പെടുത്തുന്നുണ്ട്. അതുകൊണ്ട് തന്നെ ഈ അധ്യായത്തിൽ ഓരോ സമവാക്യം രൂപീകരിക്കുമ്പോഴും അതിന് ഒരു കാർട്ടീഷ്യൻ മാതൃകയും, സദിശമാതൃകയും ഒരേ സമയം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

11.2 ഒരു വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകളും ദിശാനുപാതങ്ങളും (Direction cosines and Direction ratios)

സദിശ ഗണിതം എന്ന അധ്യായത്തിൽ വരകളുടെ ദിശാകൊസൈൻ, ദിശാനുപാതം എന്നിവയെപ്പറ്റി മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ഒരു നിശ്ചിത ദിശയുള്ള ഒരു നേർവരയുടെ (directed line) ദിശാകോണുകൾ α, β, γ ആണെങ്കിൽ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ എന്നീ സംഖ്യകളെ ആ വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ (direction cosines) എന്നുപറയുന്നു.

ഒരു നേർവര രണ്ട് ദിശകളിലേക്കും അനന്തമായി നീളുന്നതാണ്. ഇതിലേതെങ്കിലും ഒരു ദിശ ആ വരയ്ക്ക് നൽകുമ്പോഴാണ് അത് ദിശയുള്ള ഒരു വരയാവുന്നത് (directed line).



ചിത്രം 11.1

ചിത്രത്തിലെ L എന്ന വരയുടെ ദിശാകോണുകൾ α, β, γ എന്നിവയാണ്. ഈ വരയുടെ ദിശ നേരെ വിപരീതമാക്കിയാൽ അതിന്റെ ദിശാകോണുകൾ $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$ എന്നിവയാവും.

അപ്പോൾ ദിശാകൊസൈനുകൾ $\cos(\pi-\alpha)$, $\cos(\pi-\beta)$, $\cos(\pi-\gamma)$ എന്നീ മൂന്ന് സംഖ്യകൾ നേരത്തെ സൂചിപ്പിച്ച $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ന്യൂനമായിരിക്കും.

അതായത്

ഒരു നേർവരയ്ക്ക് ദിശാകൊസൈനുകൾ ആയി ചിഹ്നങ്ങളിൽ മാത്രം വ്യത്യാസമുള്ള ഒരു ജോടി സംഖ്യാത്രയങ്ങൾ ഉണ്ടാവും.

ഈ നേർവരയുടെ ദിശ തീരുമാനിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ അതിന് ദിശാകൊസൈനുകൾ ആയി ഒരു സംഖ്യാത്രയം മാത്രമേ ഉണ്ടായിരിക്കുകയുള്ളൂ. അവയെ സൗകര്യത്തിനായി l, m, n എന്ന് പേര് നൽകാം.

അതായത് $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$

> **കുറിപ്പ്**
>
> ഇപ്പോൾ പരിഗണിച്ചത് ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയാണ്. അങ്ങനെയല്ലാത്ത വരകൾ പരിഗണിക്കേണ്ടിവരും. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഈ വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായ, ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ ദിശാകോണുകളാണ് α, β, γ ആയി പരിഗണിക്കുക.

l, m, n എന്നീ ദിശാകൊസൈനുകൾക്ക് ആനുപാതികമായി എടുക്കാവുന്ന ഏത് സംഖ്യാത്രയങ്ങളേയും ആ വരയുടെ ദിശാനുപാതങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

അതായത്, λ എന്നത് പൂജ്യമല്ലാത്ത രേഖീയസംഖ്യയാണെങ്കിൽ

λl, λm, λn എന്നിവയെ ആ വരയുടെ ദിശാനുപാതങ്ങളായി എടുക്കാം.

ദിശാകൊസൈനുകൾ, ദിശാനുപാതങ്ങൾ എന്നിവ ലളിതമായ ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ വ്യക്തമാക്കാം.

സൂചകാക്ഷങ്ങൾ എല്ലാം നേർവരകളാണ്. അവയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ, ദിശാനുപാതങ്ങൾ എന്നിവ എന്തായിരിക്കും?

x അക്ഷം പരിഗണിക്കാം.

x അക്ഷം, x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ 0°ആണ്.

അതുപോലെ y അക്ഷവുമായും z അക്ഷവുമായും ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ 90^0 വീതവുമാണ്. അതായത് x അക്ഷത്തിന്റെ ദിശാകോണുകൾ 0^0, 90^0, 90^0 ആയിരിക്കും.

അതിനാൽ ദിശാ കൊസൈനുകൾ $\cos 0^\circ, \cos 90^\circ, \cos 90^\circ$ ആണ്. ഇത് യഥാക്രമം 1, 0, 0 ആണ്. അതായത് x അക്ഷത്തിന്റെ ദിശാകൊസൈനുകൾ 1, 0, 0 ആണ്.

ഇതിന് ആനുപാതികമായ ഏത് സംഖ്യാത്രയങ്ങളും x അക്ഷത്തിന്റെ ദിശാനുപാതം ആയിരിക്കും. x അക്ഷത്തിന് മാത്രമല്ല, x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ എല്ലാ വരകൾക്കും ദിശാകോൺ, ദിശാകൊസൈനുകൾ, ദിശാനുപാതങ്ങൾ ഇവ തന്നെയായിരിക്കുമെന്ന് വ്യക്തമാണ്.

മുകളിൽ പറഞ്ഞ രീതിയിൽ ചിന്തിച്ചാൽ y അക്ഷത്തിന്റെയും, y അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഏതൊരു വരയുടെയും ദിശാകൊസൈനുകൾ 0,1,0 ആയിരിക്കും.

അതുപോലെ z അക്ഷത്തിന്റെത് (z അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായതും) 0,0,1 ആയിരിക്കും.

അക്ഷം/സമാന്തരം	ദിശാകോണുകൾ	ദിശാകൊസൈനുകൾ
x	$0^0, 90^0, 90^0$	1, 0, 0
y	$90^0, 0^0, 90^0$	0, 1, 0
z	$90^0, 90^0, 0^0$	0, 0, 1

ഇനി അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമല്ലാത്ത വരകൾ പരിഗണിക്കാം.

ഇത്തരത്തിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു വര ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു എന്ന് കരുതുക. ഈ വരയിലുള്ള അനേകം ബിന്ദുക്കളിൽ ഒരു ബിന്ദുവായി $P(a, b, c)$ എടുക്കുക.

P യിൽ നിന്ന് x അക്ഷത്തിലേക്ക് ഒരു ലംബം വരയ്ക്കുക. x അക്ഷത്തെ ഇത് Q എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഇതിലെ $\angle POQ$ എന്നത് നാം പരിഗണിക്കുന്ന വരയുടെ α എന്ന ദിശാകോൺ ആയിരിക്കും.

ΔPOQ ൽ

$$\cos\alpha = \frac{OQ}{OP} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ഇത് പോലെ y അക്ഷത്തിലേക്കും z അക്ഷത്തിലേക്കും ലംബം വരച്ച് നമുക്ക്

$\cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ എന്നും $\cos\gamma = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ എന്നും കണ്ടെത്താം.

അതായത്, ആധാരബിന്ദു $P(a, b, c)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ആയിരിക്കും.

ഇവയെ $\lambda = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ a, b, c എന്ന ദിശാനുപാതവും ലഭിക്കും. ഇതിനെ സദിശം എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ച് മറ്റൊരു തരത്തിലും പറയാം.

$\overline{OP}$ എന്നത് $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ എന്ന സദിശമാണ്. ഇത് നാം പരിഗണിക്കുന്ന വരയിലുള്ള (സമാന്തരമായ) സദിശമാണ്. ഈ സദിശത്തിന്റെ ദിശാകൊസൈനുകളും ഈ വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകളും ഒന്നുതന്നെയായിരിക്കും.

അതായത്, ഒരു വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ, ദിശാനുപാതങ്ങൾ എന്നിവ ലഭിക്കാൻ ആ വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായ ഏതെങ്കിലും ഒരു സദിശത്തിന്റെ ദിശാകൊസൈൻ, ദിശാനുപാതം എന്നിവ അറിഞ്ഞാൽ മതി.

ഈ അറിവ് ഉപയോഗിച്ച് ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവാത്ത ഒരു വരയുടേയും ദിശാകൊസൈനുകൾ അതിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അറിയാമെങ്കിൽ നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഒരു വര $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോവുന്നു എന്ന് കരുതുക.

അപ്പോൾ

$\overline{PQ} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}\ (z_2 - z_1)\hat{k}$. ഇതിന്റെ ദിശാകൊസൈനുകൾ

$$\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}, \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$ ആയിരിക്കും.

ഇതിന്റെ ദിശാനുപാതം $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ എന്നീ സംഖ്യകൾ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 1

ഒരു വരയ്ക്കുന്ന x, y, z അക്ഷങ്ങളുടെ അധിദിശയുമായിട്ടുള്ള കോണളവുകൾ യഥാക്രമം $90°, 60°, 30°$ ആയാൽ വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ കാണുക.

പരിഹാരം

ദിശാകൊസൈനുകൾ യഥാക്രമം

l, m, n എന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ $l = \cos 90^0 = 0$

$$m = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

$$n = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ഉദാഹരണം: 2

ഒരു വരയുടെ ദിശാനുപാതങ്ങൾ യഥാക്രമം $2, -1, -2$ ആയാൽ ദിശാകൊസൈനുകൾ കാണുക.

പരിഹാരം

ദിശാകൊസൈനുകൾ

$$\frac{2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}, \frac{-2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}$$

അതായത്, $\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}$ ആയിരിക്കും

ഉദാഹരണം: 3

$(-2, 4, -5)$, $(1, 2, 3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ കാണുക.

പരിഹാരം

P (x_1, y_1, z_1), Q (x_2, y_2, z_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ $\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}$

ഇവിടെ, $PQ = \sqrt{(1-(-2))^2 + (2-4)^2 + (3-(-5))^2} = \sqrt{77}$

ആയതിനാൽ, ദിശാകൊസൈനുകൾ $\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$

ഉദാഹരണം: 4

x, y, z അക്ഷങ്ങളുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ കാണുക.

പരിഹാരം

x അക്ഷം x, y, z അക്ഷങ്ങളുമായി യഥാക്രമം $0°, 90°, 90°$ കോണളവുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു.

ആയതിനാൽ, x അക്ഷത്തിന്റെ ദിശാകൊസൈനുകൾ $\cos 0°, \cos 90°, \cos 90°$. അതായത് 1, 0, 0 ആകുന്നു.

ഇതേ രീതിയിൽ y, z അക്ഷങ്ങളുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ 0, 1, 0; 0, 0, 1 ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം: 5

A (2, 3, –4), B (1, –2, 3), C (3, 8, –11) എന്നിവ സമരേഖീയ ബിന്ദുക്കൾ (Collinear points) ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ദിശാനുപാതങ്ങൾ $1-2, -2-3, 3+4$ ആകുന്നു. അതായത് ദിശാനുപാതങ്ങൾ. –1, –5, 7 ആണ്. ഇതുപോലെ B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ദിശാനുപാതങ്ങൾ യഥാക്രമം 2, 10, –14 എന്നിവയും ആണ്. AB, BC എന്നീ രേഖകളുടെ ദിശാനുപാതങ്ങൾ ആനുപാതികമായതിനാൽ AB, BC എന്നിവ സമാന്തരരേഖകളാണ്. എന്നാൽ B എന്ന ബിന്ദു AB യ്ക്കും BC യ്ക്കും പൊതുവായ ബിന്ദു ആയതിനാൽ A, B, C എന്നിവ സമരേഖീയ ബിന്ദുക്കൾ ആകുന്നു.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 11.1

1. ഒരു വര x, y, z അക്ഷങ്ങളുമായി സൃഷ്ടിക്കുന്ന കോണുകൾ യഥാക്രമം 90°, 135°, 45° ആയാൽ ആ വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ കാണുക.
2. ഒരു വര അക്ഷങ്ങളുമായി തുല്യ കോണളവിലാണെങ്കിൽ ആ വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ എഴുതുക.
3. ദിശാനുപാതങ്ങൾ -18, 12, –4 ആയ വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ എത്രയായിരിക്കും?
4. (2, 3, 4), (–1, –2, 1), (5, 8, 7) എന്നിവ സമരേഖീയബിന്ദുക്കൾ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.
5. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ യഥാക്രമം (3, 5, -4) (-1, 1, 2), (-5, -5 -2) എന്നിവ ആയാൽ അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ കാണുക.

11.3 ത്രിമാനസ്ഥലത്തിലുള്ള വരയുടെ സമവാക്യം (Equation of a Line in Space)

11- ാം ക്ലാസിൽ ദ്വിമാനതലത്തിലുള്ള വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങളെക്കുറിച്ച് വിശദമായി നാം ചർച്ച ചെയ്തു. ഇതേ വരകൾ ഒരു ത്രിമാനസ്ഥലത്താണ് നാം പരിഗണിക്കുന്നതെങ്കിൽ എങ്ങനെയായിരിക്കും അവയുടെ സമവാക്യങ്ങൾ എന്നാണ് ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. നേരത്തെ സൂചിപ്പിച്ചതുപോലെ സദിശമാതൃകയിലും കാർട്ടീഷ്യൻ മാതൃകയിലും സമവാക്യങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാം.

ത്രിമാന സ്ഥലത്തും ഒരു വര കൃത്യമായി പ്രതിനിധീകരിക്കപ്പെടാൻ താഴെപറയുന്ന വിവരങ്ങൾ മതി.

(1) ആ വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവും, വരയുടെ ദിശയും

(2) ആ വരയിലുള്ള രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ

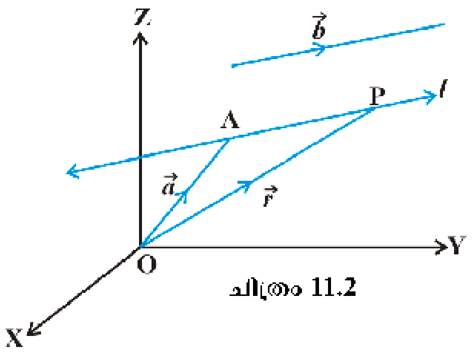
11.3.1 വരയിലെ ബിന്ദുവും വരയുടെ ദിശയും തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ സമവാക്യം കാണുന്ന വിധം

സദിശരൂപം (Vector form)

$\vec{a}$ എന്നത് വരയിലെ തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവായ A യുടെ സ്ഥാനസദിശവും, $\vec{b}$ എന്നത് നാം പരിഗണിക്കുന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായ ഒരു സദിശവും ആണ് എന്ന് കരുതുക.

ഈ വരയിലുള്ള A അല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു P ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. P യുടെ സ്ഥാനസദിശം $\vec{r}$ ആണെന്നും കരുതാം.

P എന്ന ബിന്ദു വരയിൽ എവിടെയാണെങ്കിലും $\overline{AP}$, $\vec{b}$ ക്ക് സമാന്തരമാണ്.



ചിത്രം 11.2

അതായത്, $\overline{AP} = \lambda \vec{b}$

എന്നാൽ, $\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA}$

$\lambda \vec{b} = \vec{r} - \vec{a}$

അതായത്, $\vec{r} - \vec{a} = \lambda \vec{b}$

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ ---------------(1)

മാത്രമല്ല, തിരിച്ച് λ യുടെ ഏതൊരു വിലയ്ക്കും ഈ സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ചാൽ P എന്ന പൊതുബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം ലഭിക്കുകയും ചെയ്യും.

അതായത്,

ഈ വരയുടെ സമവാക്യം $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ എന്നെടുക്കാം

കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം (Cartesian form)

A യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1, z_1), വരയുടെ ദിശാനുപാതം a, b, c, പൊതുബിന്ദു P യുടെ സൂചകസംഖ്യ (x, y, z) എന്നെടുത്താൽ

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\ ;\ \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

$$\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

സമവാക്യം (1) ആരോപിച്ചാൽ

$$x = x_1 + \lambda a;\ y = y_1 + \lambda b;\ z = z_1 + \lambda c$$

അതായത്, $$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

ഇതാണ് പ്രസ്തുത വരയുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യം.

കുറിപ്പ്

l, m, n എന്നീ ദിശാകൊസൈനുകൾ ദിശാനുപാതങ്ങൾ കൂടിയാണ് എന്നതിനാൽ

$\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$ എന്നും ഈ വരയുടെ സമവാക്യത്തെ എഴുതാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം: 6

(5, 2, –4) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും $3\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് സമാന്തരവുമായ വരയുടെ സദിശ സമവാക്യവും കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യവും എഴുതുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $\vec{a}=5\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$ യും $\vec{b}=3\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k}$ യും ആണ്. ആയതിനാൽ വരയുടെ സദിശ സമവാക്യം

$$\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

$$\vec{r}=5\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k})$$

ഇവിടെ $\vec{r}$ എന്നുള്ളത് $P(x, y, z)$ എന്ന പൊതുബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശമാകുന്നു. ആയതിനാൽ,

$$x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} = 5\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+2\hat{j}-8\hat{k})$$

$$= (5+3\lambda)\hat{i}+(2+2\lambda)\hat{j}+(-4-8\lambda)\hat{k}$$

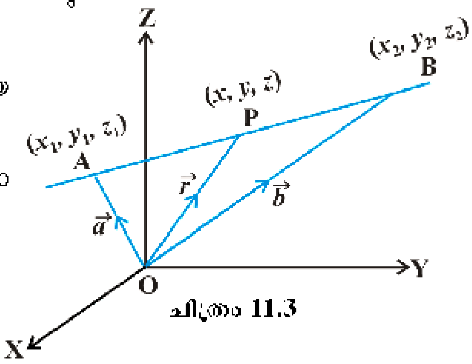
$$x=5+3\lambda,\ y=2+2\lambda,\ z=4-8\lambda,$$

അതായത്, $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+4}{-8}$ എന്നതാണ് പ്രസ്തുത വരയുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യം.

11.3.2 വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ സമവാക്യം കാണുന്ന വിധം

സദിശ രൂപം

A, B എന്നിവ വരയിലെ തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ ആണ്. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ യഥാക്രമം അവയുടെ സ്ഥാന സദിശങ്ങളാണെന്നും കരുതുക.



ചിത്രം 11.3

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ എന്നത് വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായ ഒരു സദിശമാണ്.

$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ എന്നിവ സമരേഖീയ സദിശങ്ങളാണ്. അതുകൊണ്ട്,

$\vec{r}-\vec{a}=\lambda(\vec{b}-\vec{a})$ എന്ന് കിട്ടും

അതായത്, $\vec{r}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})$ --------(1)

കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം

A യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1, z_1) എന്നും B യുടേത് (x_2, y_2, z_2) എന്നും കരുതാം. അപ്പോൾ ഈ വരയുടെ ദിശാനുപാതം $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ ആണല്ലോ.

ഇനി സമവാക്യം (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ,

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} + \lambda[(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}]$$

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1);\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1);\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$$

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ എന്നതാണ് രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യം.

ഉദാഹരണം: 7

(-1, 0, 2), (3, 4, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ സദിശസമവാക്യം എഴുതുക.

പരിഹാരം

A(-1, 0, 2), B(3, 4, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാന സദിശങ്ങൾ യഥാക്രമം $\bar{a}$, $\bar{b}$ ആണെന്ന് കരുതുക.

അപ്പോൾ, $\bar{a} = -\hat{i} + 2\hat{k}$

$$\bar{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$$

ആയതിനാൽ, $\bar{b} - \bar{a} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$ ആയിരിക്കും. ഈ വരയിലെ ഒരു പൊതുബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശമാണ് $\bar{r}$ എന്നു സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ വരയുടെ സദിശ സമവാക്യം $\bar{r} = \bar{a} + \lambda(\bar{b} - \bar{a})$, $\bar{r} = -\hat{i} + 2\hat{k} + \lambda(4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 8

ഒരു വരയുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യം $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-5}{4} = \dfrac{z+6}{2}$ ആയാൽ അതിന്റെ സദിശ സമവാക്യം കാണുക.

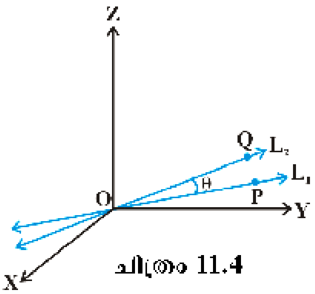
പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യം $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-5}{4} = \dfrac{z+6}{2}$ ആണ്. ഈ വര $(-3, 5, -6)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും $2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് സമാന്തരവുമാണെന്ന് കാണാം. ആയതിനാൽ, വരയുടെ സദിശസമവാക്യം.

$\vec{r} = (-3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ എന്നെഴുതാം. ഇവിടെ $\vec{r}$ എന്നത് ഈ വരയിലെ ഒരു പൊതുബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശമാകുന്നു.

11.4 രണ്ട് വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ (Angle between Two Lines)

$L_1(\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1)$, $L_2(\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2)$ എന്നീ വരകൾക്കിടയിലെ ന്യൂനകോൺ θ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം 11.4

ആദ്യവര $\vec{b}_1$ നും, രണ്ടാംവര $\vec{b}_2$ നും സമാന്തരമാണ്.

അതായത് L_1 നും L_2 നും ഇടയിലുള്ള കോണും $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ എന്നീ സദിശങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണും തുല്യമാണ്.

$\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ നും ഇടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ θ ആയതുകൊണ്ട്,

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right|$$ ആയിരിക്കും.

L_1, L_2 എന്നിവയുടെ സമവാക്യം കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപത്തിൽ ആണെങ്കിൽ,

അതായത്, $$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1} \qquad \text{------------------ (1)}$$

$$\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2} \qquad \text{------------------ (2)}$$

ആയാൽ $$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 9

$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ $\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$

എന്നീ വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന വരകൾക്ക് സമാന്തരമായ സദിശങ്ങൾ യഥാക്രമം $\vec{b_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b_2} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ എന്നിവയാണ്.

വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് θ ആയാൽ

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}\right| = \left|\frac{(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})\cdot(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\,\sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

ആയതിനാൽ, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 10

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണളവ് കാണുക

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4},$$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$$

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ടു വരകളുടേയും ദിശാനുപാതങ്ങൾ യഥാക്രമം 3, 5, 4; 1, 1, 2 എന്നിവ ആകുന്നു.

വരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണളവ് θ ആയാൽ

$$\cos\theta = \left|\frac{3.1+5.1+4.2}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\,\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right| = \frac{16}{\sqrt{50}\,\sqrt{6}} = \frac{16}{5\sqrt{2}\,\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

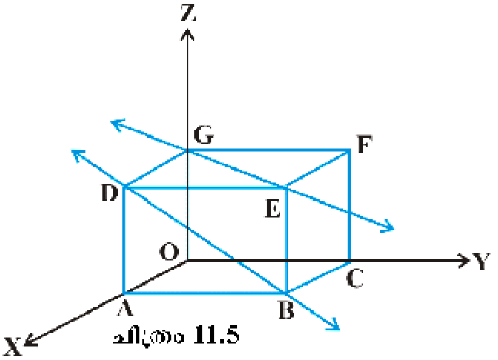
ആയതിനാൽ, നിർദ്ദിഷ്ട കോണളവ് $\cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$ ആയിരിക്കും

11.5 രണ്ട് വരകൾക്കിടയിലുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ അകലം (Shortest distance between two lines)

ത്രിമാനസ്ഥലത്തുള്ള രണ്ട് വരകൾ പരസ്പരം കൂട്ടിമുട്ടുന്നുവെങ്കിൽ അവയുടെ ഇടയിലെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ അകലം പൂജ്യം ആയിരിക്കുമല്ലോ.

ഇവ പരസ്പരം സമാന്തരങ്ങളായ വരകൾ ആണെങ്കിൽ ഇവയ്ക്കിടയിലെ ലംബ ദൂരം കണക്കാക്കിയാൽ മതി.

ഒരു തലത്തിലുള്ള വരകളാണ് നാം പരിഗണിക്കുന്നതെങ്കിൽ അവ ഒന്നുകിൽ സമാന്തരമായിരിക്കും അല്ലെങ്കിൽ പരസ്പരം കൂട്ടിമുട്ടും. എന്നാൽ ത്രിമാനസ്ഥലത്ത് പരസ്പരം കൂട്ടിമുട്ടാതെയും, പരസ്പരം സമാന്തരമാവാതെയും വരകൾ സാധ്യമാണ്. ഇത്തരം വരകളെയാണ് അസമരേഖകൾ (Skew Lines) എന്ന് വിളിക്കുന്നത്. ഇവ ഒരേ തലത്തിലെ വരകൾ (Coplanar Lines) ആയിരിക്കില്ല.



ചിത്രം 11.5

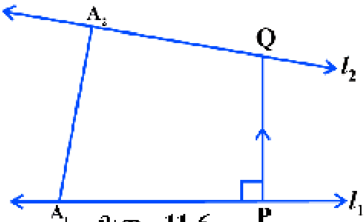
രണ്ട് അസമവരകൾക്കിടയിലുള്ള കുറഞ്ഞ ദൂരം അവയ്ക്കിടയിലെ ലംബ ദൂരം ആയിരിക്കും.

11.5.1 അസമവരകൾക്കിടയിലെ കുറഞ്ഞ ദൂരം (Distance between two skew lines)

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$$

$$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$$

എന്നിവയാണ് നാം പരിഗണിക്കുന്ന രണ്ട് അസമവരകൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.



ചിത്രം 11.6

l_1 എന്ന വരയിലെ ഒരു ബിന്ദു A_1 ഉം അതിന്റെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{a}_1$ ഉം ആണ്. അതുപോലെ l_2 വിലെ ഒരു ബിന്ദു A_2 ഉം അതിന്റെ സ്ഥാന സദിശം $\vec{a}_2$ ഉം ആണ്. PQ എന്ന വര l_1 നും l_2 നും ഒരുപോലെ ലംബമാണെങ്കിൽ PQ ന്റെ നീളം ആയിരിക്കും l_1 നും l_2 നും ഇടയിലുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം.

അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ, $\overrightarrow{A_1A_2}$ എന്ന സദിശത്തിന് $\overrightarrow{PQ}$ എന്ന സദിശത്തിലുള്ള പ്രക്ഷേപമാണ് ഈ വരകൾക്കിടയിലെ കുറഞ്ഞ ദൂരം

$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ എന്ന വര $\vec{b}_1$ ന് സമാന്തരമാണ്.

$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ എന്ന വര $\vec{b}_2$ ന് സമാന്തരമാണ്.

അതുകൊണ്ട്, $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ എന്ന സദിശം l_1 നും l_2 നും ലംബമായിരിക്കും.

അതുകൊണ്ടുതന്നെ $\overline{PQ}$ ന് സമാന്തരമായ ദിശയിലായിരിക്കണം.

അതായത്,

$\overline{A_1A_2}$ എന്ന സദിശത്തിന് $\overline{PQ}$ എന്ന സദിശത്തിലുള്ള പ്രക്ഷേപമായിരിക്കും ഈ വരകൾക്കിടയിലുള്ള കുറഞ്ഞ ദൂരം

അതിനാൽ, $PQ = \dfrac{\overrightarrow{A_1A_2}.\left(\dot{b_1} \times \dot{b_2}\right)}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}$

($\bar{a}$ എന്ന സദിശത്തിന് $\dot{b}$ എന്ന സദിശത്തിലുള്ള പ്രക്ഷേപം $\dfrac{\bar{a}\ .\ \dot{b}}{|\vec{b}|}$ ആണെന്ന് ഓർക്കുക)

അതിനാൽ, $PQ = \dfrac{\left(\overline{a_2} - \overline{a_1}\right).\left(\overline{b_1} \times \overline{b_2}\right)}{\left|\dot{\overline{b_1}} \times \overline{b_2}\right|}$

PQ ദൂരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിനാൽ ഇതിന്റെ കേവല വില മാത്രം പരിഗണിച്ചാൽ മതി. അതുകൊണ്ട്.

കുറഞ്ഞ ദൂരം d എന്ന് എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ

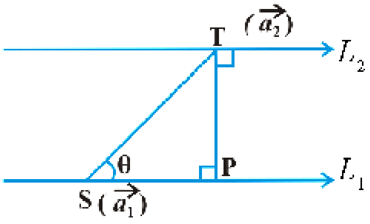
$$d = \left|\frac{\left(\overrightarrow{a_2} - \overline{a_1}\right).\left(\overrightarrow{b_1} \times \overline{b_2}\right)}{\left|\dot{\overline{b_1}} \times \overline{b_2}\right|}\right|$$

11.5.2 സമാന്തര വരകൾക്കിടയിലെ ദൂരം (Distance between parallel lines)

$L_1 : \left(\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\bar{b}\right)$ .... (1)

$L_2 : \left(\vec{r} = \bar{a}_2 + r\bar{b}\right)$ .... (2)

ഇവ രണ്ട് സമാന്തര വരകളാണെന്ന് കരുതുക.



ചിത്രം 11.7

$\vec{a}_1$ എന്നത് L_1 എന്ന വരയിലെ S എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശവും $\vec{a}_2$ എന്നത് L_2 വിലെ T എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശവുമാണ്.

L_1, L_2 എന്നീ വരകൾ ഒരേ തലത്തിലുള്ളവയാകയാൽ ഇവിടെ |TP| ആയിരിക്കും L_1 നും L_2 നും ഇടയിലുള്ള അകലം

$\overline{ST}$, $\vec{b}$ എന്നിവയ്ക്ക് ഇടയിലെ കോൺ θ ആണെന്ന് കരുതുക.

$$\vec{b} \times \overline{ST} = (|\vec{b}||\overline{ST}|\sin\theta)\hat{n} \qquad \ldots (3)$$

$\hat{n}$ എന്നത് L_1 L_2 എന്നിവയുടെ തലത്തിന് ലംബമായ ഏകകസദിശമാണ്.

കൂടാതെ $\overline{ST} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$ ആണ്.

(3) ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = |\vec{b}|PT\,\hat{n} \quad (PT = ST\sin\theta \text{ ആയതുകൊണ്ട്})$$

അതായത്,

$$|\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)| = |\vec{b}|PT \cdot 1 \quad (|\vec{n}| = 1 \text{ ആയതുകൊണ്ട്})$$

അതിനാൽ, ഈ വരകൾക്കിടയിലെ ദൂരം

$$d = |\overline{PT}| = \left|\frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right|$$

ഉദാഹരണം: 11

L_1, L_2 എന്നീ വരകളുടെ സദിശ സമവാക്യങ്ങൾ

യഥാക്രമം $\qquad \vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \qquad \ldots (1)$

$$\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}) \ldots (2)$$

ആയാൽ അവ തമ്മിലുള്ള കുറഞ്ഞ അകലം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന വരകളെ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$, $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ എന്നീ സാമാന്യ സമവാക്യങ്ങളുമായി താരതമ്യം ചെയ്താൽ

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + \hat{j},\ \vec{b}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k},\ \vec{b}_2 = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

അതായത്, $\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} - \hat{k}$

$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}$$

അതായത്, $|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59}$

വരകൾ തമ്മിലുള്ള കുറഞ്ഞ അകലം

$$d = \left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right| = \frac{|3-0+7|}{\sqrt{59}} = \frac{10}{\sqrt{59}}$$

ഉദാഹരണം: 12

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന L_1 L_2 എന്നീ വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണുക.

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന വരകൾ സമാന്തരങ്ങളാണ്. (എന്തുകൊണ്ട്?)

ആയതിനാൽ,

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}, \ \vec{a}_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}, \ \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

ആയതിനാൽ, വരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

$$d = \left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|} \right| = \left| \frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+9+36}} \right|$$

$$= \frac{-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{7}$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 11.2

1. ദിശാകൊസൈനുകൾ $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}$; $\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}$; $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ ആയ 3 വരകൾ പരസ്പര ലംബങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
2. (1, –1, 2), (3, 4, –2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വര (0, 3, 2), (3, 5, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയ്ക്ക് ലംബമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.
3. (4,7,8), (2, 3, 4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വര (–1, –2, 1), (1, 2, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

4. (1, 2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും, $3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് സമാന്തരവുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

5. സ്ഥാനസദിശം $2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ ആയ ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതും $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന് സമാന്തരവുമായ വരയുടെ സദിശ സമവാക്യവും കാർട്ടീഷ്യൻ സമവവാക്യവും എഴുതുക.

6. $(-2,4,-5)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും, $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+8}{6}$ എന്ന വരയ്ക്ക് സമാന്തരവുമായ വരയുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യം എഴുതുക.

7. കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യം $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$ ആയ വരയുടെ സദിശ സമവാക്യം എഴുതുക.

8. ആധാര ബിന്ദുവിലൂടെയും $(5,-2,3)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയും കടന്നു പോകുന്ന വരയുടെ സദിശസമവാക്യവും, കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യവും എഴുതുക.

9. $(3,-2,-5)$, $(3,-2,6)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ സദിശ സമവാക്യവും, കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യവും എഴുതുക.

10. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണളവ് കാണുക.

(i) $\vec{r}=2\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})$,

$\vec{r}=7\hat{i}-6\hat{k}+\mu(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$

(ii) $\vec{r}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}+\lambda(\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})$,

$\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}-56\hat{k}+\mu(3\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k})$

11. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ജോടി വരകളും തമ്മിലുള്ള കോണളവ് കാണുക.

(1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{-3}$, $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-4}{8}=\frac{z-5}{4}$

(2) $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$, $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{8}$

12. $\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2p}=\frac{z-3}{2}$, $\frac{7-7x}{3p}=\frac{y-5}{1}=\frac{6-z}{5}$ എന്നീ വരകൾ പരസ്പര ലംബങ്ങളായാൽ 'p' യുടെ വില കാണുക.

13. $\frac{x-5}{7}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z}{1}, \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ എന്നീ വരകൾ പരസ്പരം ലംബങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

14. $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}) + \lambda(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}), \vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}+\mu(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$ എന്നീ വരകൾ തമ്മിലുള്ള കുറഞ്ഞ അകലം കാണുക.

15. $\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}, \frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$ എന്നീ വരകൾ തമ്മിലുള്ള കുറഞ്ഞ അകലം കാണുക.

16. രണ്ട് വരകളുടെ സദിശ സമവാക്യങ്ങൾ യഥാക്രമം

$\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) + \lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$

$\vec{r}=4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$ ആയാൽ അവ തമ്മിലുള്ള കുറഞ്ഞ അകലം കാണുക.

17. സദിശ സമവാക്യങ്ങൾ $\vec{r}=(1-t)\hat{i}+(t-2)\hat{j}+(3-2t)\hat{k}$,

$$\vec{r}=(s+1)\hat{i}+(2s-1)\hat{j}-(2s+1)\hat{k}$$

ആയ രണ്ട് വരകൾ തമ്മിലുള്ള കുറഞ്ഞ അകലം കാണുക.

11.6 തലം (Plane)

ഒരു തലം ഏകമാത്രമായി നിർണയിക്കപ്പെടുന്ന (uniquely determined) ചില സാഹചര്യങ്ങൾ

(1) ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്ന് തലത്തിലേക്കുള്ള അകലവും തലത്തിന് ലംബമായ വരയും അറിയാമെങ്കിൽ

(2) തലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവും, ലംബദിശയും അറിയാമെങ്കിൽ

(3) തലത്തിലുള്ള 3 ബിന്ദുക്കൾ അറിയാമെങ്കിൽ

ഈ മൂന്ന് സാഹചര്യങ്ങളിലും തലത്തിന്റെ സമവാക്യം സദിശരൂപത്തിലും, കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപത്തിലും നമുക്ക് കണ്ടെത്താം.

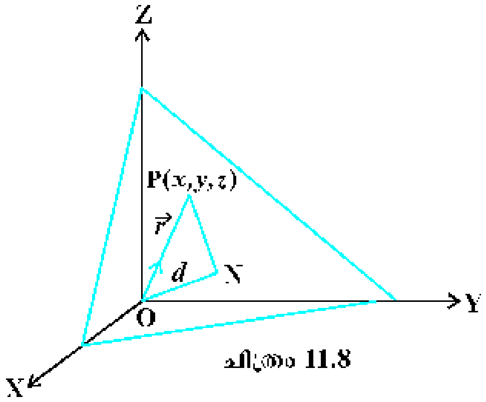
11.6.1 തലത്തിന്റെ സമവാക്യം - ലംബരൂപം (Normal form)

സദിശരൂപം

ഒരു തലം ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്ന് d യൂണിറ്റ് അകലത്തിലാണെന്ന് കരുതുക. $(d \neq 0)$. ഈ തലത്തിന് ലംബമായ $\hat{n}$ ഏകകസദിശമാണ് എന്നും വിചാരിക്കുക. O എന്ന ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്ന് തലത്തിലെക്കുള്ള ലംബമാണ് ON.

എങ്കിൽ $\overrightarrow{ON} = d\hat{n}$ എന്നെഴുതാം. ($\overrightarrow{ON}$, $d\hat{n}$ ഇവ ഒരേ ദിശയിലാണ്.)

തലത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു P എന്നിരിക്കട്ടെ. N, P ഇവ ഒരേ തലത്തിലായതിനാൽ $\overline{NP}$ ആ തലത്തിലുള്ള ഒരു സദിശമാണ്. മാത്രമല്ല ഇത് $\overline{ON}$ എന്ന സദിശത്തിന് ലംബവുമാണല്ലോ.



ചിത്രം 11.8

അതായത്, $\bar{NP} \cdot \bar{ON} = 0$ .... (1)

P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $\vec{r}$ ആണ്

എങ്കിൽ $\bar{NP} = \vec{r} - d\,\hat{n}$ $\left(\vec{ON} + \vec{NP} \quad \vec{OP}\right)$

അതുകൊണ്ട്, (1) ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$(\vec{r} - d\,\hat{n}) \cdot d\,\hat{n} = 0$$

$$(\vec{r} - d\,\hat{n}) \cdot \hat{n} = 0 \qquad (d \neq 0)$$

$$\vec{r} \cdot \hat{n} - d\,\hat{n} \cdot \hat{n} = 0$$

അതായത്, $\vec{r} \,.\, \hat{n} - d = 0 \quad (\hat{n} \cdot \hat{n} = 1)$ (2)

അല്ലെങ്കിൽ, $\vec{r} \,.\, \hat{n} = d$ (3)

ഇതാണ് പ്രസ്തുത തലത്തിന്റെ സമവാക്യത്തിന്റെ സദിശരൂപം.

കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം

P(*x*, *y*, *z*) ആണ് തലത്തിലെ ബിന്ദു എന്ന് കരുതാം. അതുപോലെ തലത്തിന് ലംബമായ വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ *l*, *m*, *n* എന്നിവയെന്നും കരുതാം.

അപ്പോൾ $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$ ആയിരിക്കും.

$\hat{n} = l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k}$ ആയിരിക്കും.

അതിനാൽ (2) എന്ന സമവാക്യം

$(x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}) \cdot (l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k}) = d$ എന്നെഴുതാം

അതായത്,

$$lx + my + nz = d$$

ഇതാണ് കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യം

കുറിപ്പ്

l, m, n എന്നീ ദിശാകൊസൈനുകൾക്കു പകരം ആനുപാതികമായ a, b, c എന്നീ ദിശാനുപാതമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നതെങ്കിൽ തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം $\vec{r}.\vec{n} = d$ എന്നാകും. ഇവിടെ d ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ദൂരമാകുകയില്ല. ഇതിന്റെ കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം $ax + by + cz = d$ എന്നാകും. a, b, c എന്നിവ തലത്തിന് ലംബമായ ദിശാനുപാതമാണ്.

ഉദാഹരണം: 13

ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $\frac{6}{\sqrt{29}}$ യൂണിറ്റ് അകലമുള്ളതും, ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ലംബ സദിശം $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ആയ തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യവും, കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യവും എഴുതുക.

പരിഹാരം

$\vec{n} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ആയാൽ

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{29}}$$

ആയതിനാൽ, തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം $\vec{r}.\hat{n} = d$ യിൽ ആരോപിച്ചാൽ

$\vec{r}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{-3}{\sqrt{29}}\hat{j} + \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{k}\right) = \frac{6}{\sqrt{29}}$ എന്നാകുന്നു. കൂടാതെ തലത്തിന്റെ കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യം $\frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{-3}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z = \frac{6}{\sqrt{29}}$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 14

$\vec{r}\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 1 = 0$ എന്ന തലത്തിന് ലംബമായതും, ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതുമായ ഏകക സദിശത്തിന്റെ ദിശാകൊസൈനുകൾ കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

$\vec{r}\cdot(-6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 1$ ....(1) എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാം.

കൂടാതെ $|-6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}| = \sqrt{36+9+4} = 7$. ആയതിനാൽ, സമവാക്യം (1)

നെ 7 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ $\vec{r}\cdot\left(-\frac{6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}\right) = \frac{1}{7}$ എന്ന് ലഭിക്കും. ഇത് $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$.

എന്ന രൂപമാണ്. അപ്പോൾ

$$\hat{n} = -\frac{6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k} \text{ ആണ്.}$$

തന്നിരിക്കുന്ന തലത്തിന് ലംബവും, ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ ഏകക സദിശം $-\frac{6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}$ ആണ്.

അതുകൊണ്ട്, ദിശാകൊസൈനുകൾ യഥാക്രമം $\frac{-6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$

ഉദാഹരണം: 15

ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ എന്ന തലത്തിലേക്കുള്ള അകലം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന തലത്തിന്റെ ലംബസദിശത്തിന്റെ ദിശാനുപാതങ്ങൾ 2, –3, 4 ആണ്. അപ്പോൾ അതിന്റെ ദിശാകൊസൈനുകൾ യഥാക്രമം,

$$\frac{2}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}, \frac{-3}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}, \frac{4}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}$$

അതായത്, $\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$ എന്നിവയായിരിക്കും.

ആയതിനാൽ, തന്നിരിക്കുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യമായ $2x - 3y + 4z = 6$ നെ $\sqrt{29}$

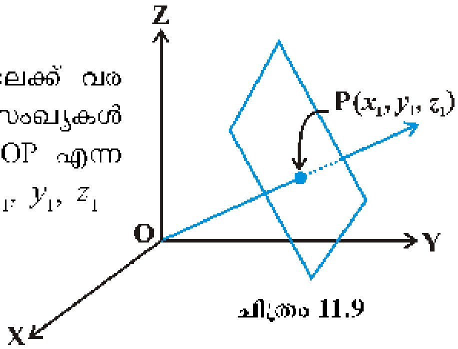
കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ, $\frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{-3}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z = \frac{6}{\sqrt{29}}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഇത് $lx + my + nz = d$, എന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യ മാതൃകയിലാണ് എങ്കിൽ ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും തലത്തിലേക്കുള്ള അകലം $d = \frac{6}{\sqrt{29}}$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 16

$2x - 3y + 4z - 6 = 0$ എന്ന തലത്തിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിലെ പാദത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

പരിഹാരം



ചിത്രം 11.9

ആധാരബിന്ദു 'O' യിൽ നിന്നും തലത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിലെ പാദത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1, z_1) എന്ന് സങ്കൽപിക്കാം. എങ്കിൽ OP എന്ന വരയുടെ ദിശാനുപാതങ്ങൾ യഥാക്രമം x_1, y_1, z_1 ആയിരിക്കും.

തന്നിരിക്കുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യത്തെ ലംബരൂപത്തിൽ എഴുതിയാൽ

$\frac{2}{\sqrt{29}}x - \frac{3}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z = \frac{6}{\sqrt{29}}$ എന്ന് ലഭിക്കും. ഇതിൽ നിന്നും OP എന്ന വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ $\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$ എന്ന് ലഭിക്കും.

ഒരു വരയുടെ ദിശാനുപാതങ്ങളും ദിശാകൊസൈനുകളും ആനുപാതികമാണെന്ന് അറിയാം. ആയതിനാൽ,

$$\frac{x_1}{\frac{2}{\sqrt{29}}} = \frac{y_1}{\frac{-3}{\sqrt{29}}} = \frac{z_1}{\frac{4}{\sqrt{29}}} = k$$

$$x_1 = \frac{2k}{\sqrt{29}}, y_1 = \frac{-3k}{\sqrt{29}}, z_1 = \frac{4k}{\sqrt{29}}$$ എന്ന് ലഭിക്കും

ഇത് തന്നിരിക്കുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യമായ $2x - 3y + 4z = 6$ ൽ ആരോപിച്ചാൽ $k = \frac{6}{\sqrt{29}}$ എന്ന് ലഭിക്കും.

ആയതിനാൽ, ലംബവരയുടെ പാദത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(\frac{12}{29}, \frac{-18}{29}, \frac{24}{29}\right)$ ആയിരിക്കും.

കുറിപ്പ്

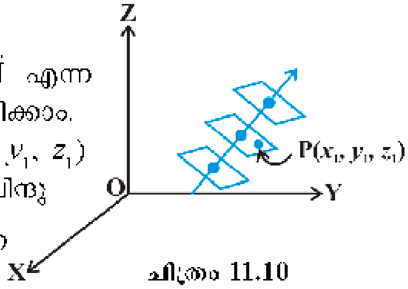
ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും തലത്തിലേക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ ദിശാകൊസൈനുകൾ യഥാക്രമം l, m, n ഉം ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും തലത്തിലേക്കുള്ള അകലം 'd' യൂണിറ്റും ആയാൽ ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും തലത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ പാദസൂചകസംഖ്യകൾ ld, md, nd ആയിരിക്കും.

11.6.2 തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവും തലത്തിന് ലംബമായ ഒരു സദിശവും തന്നിരുന്നാൽ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

ഒരു ത്രിമാനസ്ഥലത്ത് തന്നിരിക്കുന്ന സദിശത്തിന് ലംബമായി അനേകം തലങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. പക്ഷെ $P(x_1, y_1, z_1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു തലം മാത്രമേ ഉണ്ടാകുകയുള്ളൂ.

സദിശരൂപം

A എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും $\bar{N}$ എന്ന സദിശത്തിന് ലംബവുമായ ഒരു തലം പരിഗണിക്കാം. തലത്തിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു $P(x_1, y_1, z_1)$ എന്ന് കരുതുക. P എന്നത് തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു വാകണമെങ്കിൽ $\overline{AP}$ എന്ന സദിശവും $\bar{N}$ എന്ന സദിശവും പരസ്പരം ലംബമാകണം.



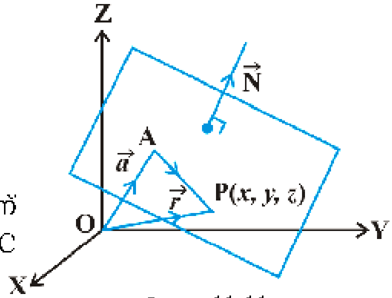
ചിത്രം 11.10

അതായത്, $\overline{AP} \cdot \bar{N} = 0$

$$\Rightarrow \overline{OP} - \overline{OA} \cdot \bar{N} = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{r} - \vec{a}) \cdot \bar{N} = 0$$

ഇതാണ് തലത്തിന്റെ സദിശരൂപം



ചിത്രം 11.11

കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം

$A(x_1, y_1, z_1)$, $P(x, y, z)$ എന്ന് കരുതുക, തലത്തിന് ലംബമായ വരയുടെ ദിശാനുപാതമാണ് A, B,C എന്നും കരുതുക.

$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$,

$\bar{N} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$

$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \bar{N} = 0$

$$\Rightarrow \left[(x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}\right] \cdot (A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}) = 0$$

അതായത്, $\mathbf{A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0}$

ഉദാഹരണം: 17

ഒരു തലത്തിലെ ലംബമായ വരയുടെ ദിശാനുപാതങ്ങൾ 2, 3, −1 എന്നിവയും (5, 2, −4) അതേ തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായാൽ തലത്തിന്റെ സദിശസമവാക്യ വും, കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യവും എഴുതുക.

പരിഹാരം

(5, 2, -4) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $\vec{a}=5\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$ യും തലത്തിലേക്കുള്ള ലംബസദിശം $\vec{N}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ യും ആയി സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ

തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{N}=0$ ആണെന്നറിയാമല്ലോ.

$$\therefore\ [\vec{r}-(5\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})]\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})=0 \quad \text{............. (1)}$$

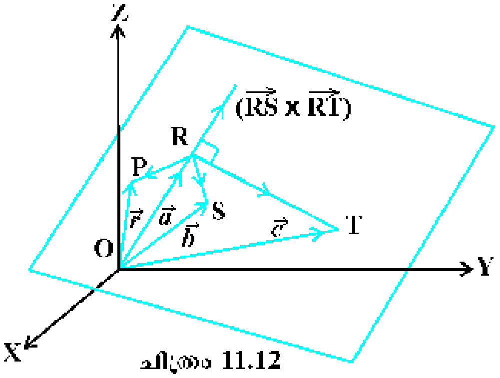
കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം

$$[(x-5)\hat{i}+(y-2)\hat{j}+(z+4)\hat{k}]\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})=0$$

$$2(x-5)+3(y-2)-1(z+4)=0$$

11.6.3. ഒരേ വരയിലല്ലാത്ത തലത്തിലെ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ തന്നിരുന്നാൽ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം.

R, S, T എന്നിവ ഒരു തലത്തിലെ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളാണെന്ന് കരുതുക. യഥാക്രമം അവയുടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ആണെന്നും കരുതുക.



ചിത്രം 11.12

അപ്പോൾ $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{RT}$ എന്നിവ ഇതേ തലത്തിലുള്ള സദിശങ്ങളാകും.

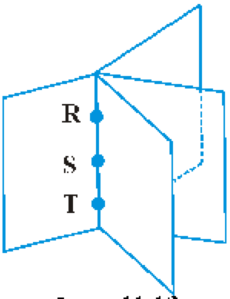
അതിനാൽ,

$\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{RT}$ എന്ന സദിശം ഈ തലത്തിന് ലംബമായിരിക്കും.

$\vec{r}$ എന്നത് തലത്തിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു P യുടെ സ്ഥാനസദിശമാണെങ്കിൽ നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ ഈ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{RT})=0$$

അതായത്, $$(\vec{r}-\vec{a}).[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})]=0 \quad \text{............... (1)}$$



ചിത്രം 11.13

> **കുറിപ്പ്**
>
> മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വരയിൽ ആയാൽ ചിത്രം 11.13 കാണുന്നതു പോലെ അനേകം തലങ്ങൾ ഉണ്ടാവും. അതുകൊണ്ട് ഏക മാത്രമായ ഒരു തലം ഉണ്ടാകണമെങ്കിൽ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വരയിൽ ആവരുത്.

കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം

R, S, T എന്നിവയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ യഥാക്രമം $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ എന്ന് കരുതുക. (x, y, z) എന്നത് തലത്തിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു P യുടെ സൂചക സംഖ്യകളുമായാൽ,

$$\overline{RP} = (x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}$$
$$\overline{RS} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$
$$\overline{RT} = (x_3 - x_1)\hat{i} + (y_3 - y_1)\hat{j} + (z_3 - z_1)\hat{k}$$

ഇത് സമവാക്യം (1) ൽ നൽകി അതിനെ ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ രൂപത്തിൽ എഴുതിയാൽ

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ഇതാണ് തലത്തിന്റെ കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യം.

ഉദാഹരണം: 18

R(2, 5, – 3), S (– 2, – 3, 5) , T (5, 3,– 3). എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ സദിശസമവാക്യം എഴുതുക.

പരിഹാരം

$\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$,

$\vec{b} = -2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$,

$\vec{c} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$ എന്ന് സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ എന്നിവയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ സദിശസമവാക്യം $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\overline{RS} \times \overline{RT}) = 0$ (എന്തുകൊണ്ട്?)

$$\Rightarrow (\vec{r} - \vec{a}) \cdot [(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})] = 0$$

$$\Rightarrow [\vec{r} - (2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k})] \cdot [(-4\hat{i} - 8\hat{j} + 8\hat{k}) \times (3\hat{i} - 2\hat{j})] = 0$$

11.6.4 തലത്തിന്റെ ഇട അകലരൂപ സമവാക്യം (Intercept form)

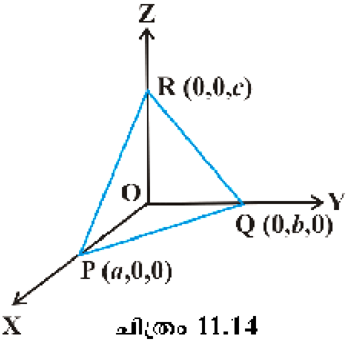
ഒരു തലത്തിന്റെ സമവാക്യം സൂചകാക്ഷത്തിൽ നിന്നുള്ള ഇട അകലങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തുന്ന രീതി മനസ്സിലാക്കാം. ഒരു തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $Ax + By + Cz + D = 0$ $(D \neq 0)$ ....(1) എന്ന് പരിഗണിക്കാം. ഈ തലം x, y, z അക്ഷങ്ങളുമായി യഥാക്രമം a, b, c ഇട അകലങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു എന്ന് കരുതാം. എങ്കിൽ തലം x, y, z അക്ഷങ്ങളെ യഥാക്രമം $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സംഗമിക്കുന്നു.

തലം $(a, 0, 0)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്നതിനാൽ

$$Aa + 0 + 0 + D = 0$$

അതായത്, $Aa = -D$

$$A = \frac{-D}{a}$$



ചിത്രം 11.14

ഇതുപോലെതന്നെ

$$B = \frac{-D}{b}$$ എന്നും $$C = \frac{-D}{c}$$ എന്നും കിട്ടും.

ഇത് (1) നൽകിയാൽ, $\frac{-D}{a}x + \frac{-D}{b}y + \frac{-D}{c}z + D = 0$

അതായത്, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

ഉദാഹരണം: 19

x, y, z അക്ഷങ്ങളുമായി യഥാക്രമം 2, 3, 4 ഇട അകലങ്ങൾ പാലിക്കുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യം എഴുതുക.

പരിഹാരം

തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ എന്ന് സങ്കൽപിച്ചാൽ ഇവിടെ $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ ആയതിനാൽ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

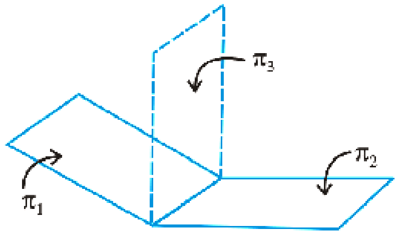
$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ അഥവാ $6x + 4y + 3z = 12$ എന്ന് ലഭിക്കും.

11.6.5 രണ്ട് തലങ്ങളുടെ സംഗമരേഖയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യം.

π_1, π_2 എന്നീ രണ്ട് തലങ്ങൾ പരസ്പരം കൂട്ടിമുട്ടുന്നുവെന്ന് കരുതുക. ഇവ ഒരു നേർവരയിലാണല്ലോ കൂട്ടിമുട്ടുന്നത്. ഈ സംഗമരേഖയിലൂടെ എത്ര തലങ്ങൾക്ക് കടന്നുപോകാം? അനന്തം എണ്ണം തലങ്ങൾ ഇതിലൂടെ കടന്നുപോകാം. ഇവയുടെയെല്ലാം സമവാക്യം എങ്ങനെ കണ്ടെത്താം.

π_1 എന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $\vec{r}\cdot\hat{n}_1 = d_1$ എന്നും π_2 വിന്റേത് $\vec{r}\cdot\hat{n}_2 = d_2$ എന്നും കരുതുക.

ഇവ സംഗമിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാവുന്ന വരയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $\vec{t}$ ആയാൽ



ചിത്രം 11.15

$\vec{r}\cdot\hat{n}_1 = d_1,\ \vec{r}\cdot\hat{n}_2 = d_2$ ആയിരിക്കും. അങ്ങനെയെങ്കിൽ λ എന്ന രേഖീയ വിലയ്ക്ക് $\vec{r}\cdot(\hat{n}_1+\lambda\hat{n}_2) = d_1+\lambda d_2$ എന്നാകും.

ഇവിടെ $\vec{r}$ ഒരു പൊതുബിന്ദുവാണ്. പക്ഷെ ഈ സമവാക്യം വരയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുവിനും ശരിയാകും.

ഇത് π_3 എന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യമാണ്. π_1, π_2 എന്നീ തലങ്ങളുടെ സമവാക്യങ്ങൾ പാലിക്കുന്ന സദിശം $\vec{r}$, π_3 യുടെ സമവാക്യവും പാലിക്കും.

അതുകൊണ്ട്, $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1, \vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ സംഗമത്തിലൂടെയുള്ള തലത്തിന്റെ സമവാക്യം, $\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2) = d_1+\lambda d_2$

കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം

$$\vec{n}_1 = A_1\hat{i}+B_1\hat{j}+C_1\hat{k}$$

$$\vec{n}_2 = A_2\hat{i}+B_2\hat{j}+C_2\hat{k}$$

$$\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

അപ്പോൾ (1) എന്ന സമവാക്യം

$$x(A_1+\lambda A_2)+y(B_1+\lambda B_2)+z(C_1+\lambda C_2) = d_1+\lambda d_2$$ ആകും

അല്ലെങ്കിൽ, $(A_1x+B_1y+C_1z-d_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z-d_2)=0$ .... (2) എന്നായി മാറും.

λ യുടെ വിലകൾ മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വ്യത്യസ്തങ്ങളായ അത്തരം തലങ്ങൾ നമുക്ക് ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം: 20

$\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$, $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})=-5$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ സംഗമരേഖയിലൂടെയും (1,1,1) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയും കടന്നു പോകുന്ന തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം എഴുതുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $\vec{n}_1=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{n}_2 = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$;

$d_1 = 6$, $d_2 = -5$ ആകുന്നു

ആയതിനാൽ, $\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2)=d_1+\lambda d_2$ എന്ന സമവാക്യം പരിഗണിച്ചാൽ

$$\vec{r}\cdot[\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})] = 6-5\lambda$$

$$\vec{r}\cdot[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1+4\lambda)\hat{k}] = 6-5\lambda \quad \dots (1)$$

ഇവിടെ λ ഒരു രേഖീയസംഖ്യയാകുന്നു

$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ എന്ന് സമവാക്യം (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1+4\lambda)\hat{k}]=6-5\lambda$$

$$(1+2\lambda)x+(1+3\lambda)y+(1+4\lambda)z=6-5\lambda$$

$$(x+y+z-6)+\lambda(2x+3y+4z+5)=0 \quad \dots (2)$$

ഈ തലം (1, 1, 1) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതിനാൽ

$$(1+1+1-6)+\lambda(2+3+4+5)=0$$

$$\text{അതുകൊണ്ട്, } \lambda = \frac{3}{14}$$

λ യുടെ വില സമവാക്യം (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$\vec{r}\left[\left(1+\frac{3}{7}\right)\hat{i}+\left(1+\frac{9}{14}\right)\hat{j}+\left(1+\frac{6}{7}\right)\hat{k}\right] = 6-\frac{15}{14}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r}\left(\frac{10}{7}\hat{i}+\frac{23}{14}\hat{j}+\frac{13}{7}\hat{k}\right) = \frac{69}{14}$$

$$\vec{r}\cdot(20\hat{i}+23\hat{j}+26\hat{k}) = 69$$

ഇതാണ് തലത്തിന്റെ സദിശസമവാക്യം.

11.7 രണ്ട് വരകളുടെ സമതലീയത (Coplanarity of Two Lines)

രണ്ട് വരകൾ സമതലീയമാവുന്നത് (ഒരേ തലത്തിലുള്ളത്) എപ്പോഴാണ്?

$$\vec{r} = \vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1 \quad \dots (1)$$

$\vec{r} = \vec{a}_2+\mu\vec{b}_2 \quad \dots (2)$ എന്നീ വരകൾ പരിഗണിക്കുക,

ആദ്യവര കടന്നുപോവുന്ന $\vec{a}_1$ സ്ഥാനസദിശമുള്ള ബിന്ദു A എന്നും, രണ്ടാമത്തെ വര കടന്നു പോവുന്ന $\vec{a}_2$ സ്ഥാനസദിശമുള്ള ബിന്ദു B എന്നും എടുക്കാം. ആദ്യവര $\vec{b}_1$ എന്ന സദിശത്തിനും രണ്ടാമത്തെ വര $\vec{b}_2$ എന്ന സദിശത്തിനും സമാന്തരമാണ്. അതിനാൽ $\vec{b}_1\times\vec{b}_2$ എന്നത് $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ എന്നീ വരകൾ ഉൾപ്പെടുന്ന തലത്തിന് ലംബമാണ്.

$\overline{AB} = \vec{a}_2-\vec{a}_1$ ആണ്.

രണ്ട് വരകൾ സമതലീയമാവണമെങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം $\overline{AB}$, $\vec{b}_1\times\vec{b}_2$ വിന് ലംബമായിരിക്കും.

അതായത്, $\overline{AB}.(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$

$$\Rightarrow (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$$

കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം

A യുടേയും B യുടേയും സൂചകസംഖ്യകൾ യഥാക്രമം (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) എന്നിവയാണെന്ന് കരുതുക. $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ എന്നീ സദിശങ്ങളുടെ ദിശാനുപാതങ്ങൾ a_1, b_1, c_1 യും a_2, b_2, c_2 യും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ, $\overline{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

$$\vec{b}_1 = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k},\ \vec{b}_2 = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$$

രേഖകൾ സമതലീയമാവാനുള്ള നിബന്ധന $\overline{AB}\cdot\left(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right) = 0$ ആണ്.

ഇതിനെ കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപത്തിൽ

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

എന്നെഴുതാം

ഉദാഹരണം: 21

$\dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-5}{5}$, $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-5}{5}$ എന്നീ വരകൾ സമതലീയങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ, $x_1 = -3, y_1 = 1, z_1 = 5, a_1 = -3, b_1 = 1, c_1 = 5$

$x_2 = -1, y_2 = 2, z_2 = 5, a_2 = -1, b_2 = 2, c_2 = 5$ ആകുന്നു.

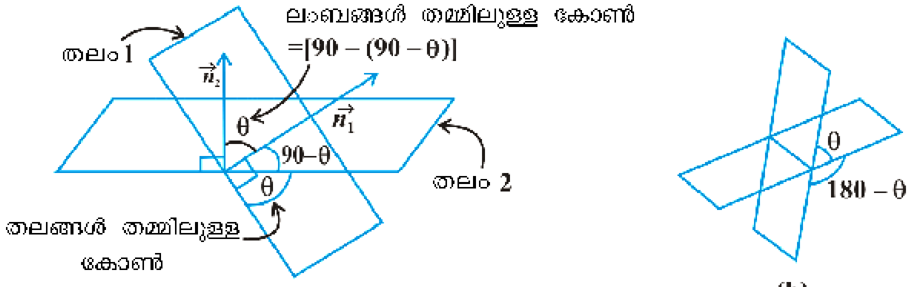
$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

ആയതിനാൽ, മേൽസൂചിപ്പിച്ച വരകൾ സമതലീയങ്ങളാകുന്നു.

11.8 രണ്ട് തലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ (Angle between Two Planes)

നിർവചനം: 2

രണ്ട് തലങ്ങൾക്കിടയിലെ കോൺ എന്നത് അവയുടെ ലംബസദിശങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള (ലംബവരകൾക്കിടയിൽ) കോൺ ആയി നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. രണ്ട് തലങ്ങൾക്കിടയിലെ കോൺ θ ആണെങ്കിൽ $(180 - \theta)$ എന്നതും അതേ തലങ്ങൾക്കിടയിലെ കോൺ ആയിരിക്കും. ഇതിലെ 90^0 യിൽ കുറവുള്ള കോണിനെ (ന്യൂന കോൺ) യാണ് പൊതുവായി തലങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണായി കരുതുന്നത്.



(a) ചിത്രം 11.16 (b)

$\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$, $\vec{r}\,.\,\vec{n}_2 = d_2$ എന്നീ തലങ്ങളിൽ $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്ന തലങ്ങൾക്ക് ലംബമായ സദിശങ്ങളാണെന്നും, θ അവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ ആണെന്നും കരുതിയാൽ.

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}\right|$$

> **കുറിപ്പ്**
>
> രണ്ട് തലങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമാണെങ്കിൽ $\vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$ ആയിരിക്കും. തലങ്ങൾ സമാന്തരമാണെങ്കിൽ $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ ഇവ സമാന്തരമായിരിക്കും.

കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം

$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ എന്നീ രണ്ട് തലങ്ങൾക്കിടയിലെ കോൺ θ എങ്കിൽ

$$\cos\theta = \left|\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\;\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|$$

ഇവിടെ A_1, B_1, C_1 ; A_2, B_2, C_2 എന്നിവ ലംബമായ വരകളുടെ ദിശാനുപാതങ്ങൾ ആണ്.

കുറിപ്പ്

$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. ആണെങ്കിൽ $\cos\theta = 0$ ആവുകയും $\theta = 90^\circ$ ആവുകയും ചെയ്യും. അതുപോലെ ഈ രണ്ട് തലങ്ങളും സമാന്തരങ്ങളാണെങ്കിൽ

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 22

സദിശ രീതിയുപയോഗിച്ച് $2x + y - 2z = 5$, $3x - 6y - 2z = 7$ എന്നീ തലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള കോണളവ് കാണുക.

പരിഹാരം

തലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് അവയുടെ ലംബങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവിന് തുല്യമാണെന്ന് അറിയാം.

തന്നിരിക്കുന്ന തലങ്ങളുടെ ലംബസദിശങ്ങൾ $\vec{N}_1 = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{N}_2 = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$ ആണ്.

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|}\right| = \left|\frac{(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})\cdot(3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k})}{\sqrt{4+1+4}\ \sqrt{9+36+4}}\right| = \left(\frac{4}{21}\right)$$

ആയതിനാൽ, കോണളവ് $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$

ഉദാഹരണം: 23

$3x - 6y + 2z = 7$, $2x + 2y - 2z = 5$ എന്നീ തലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള കോണളവ് കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളെ $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ എന്നീ പൊതുവാക്യങ്ങളുമായി താരതമ്യം ചെയ്താൽ

$$A_1 = 3,\ B_1 = -6,\ C_1 = 2$$

$$A_2 = 2,\ B_2 = 2,\ C_2 = -2$$

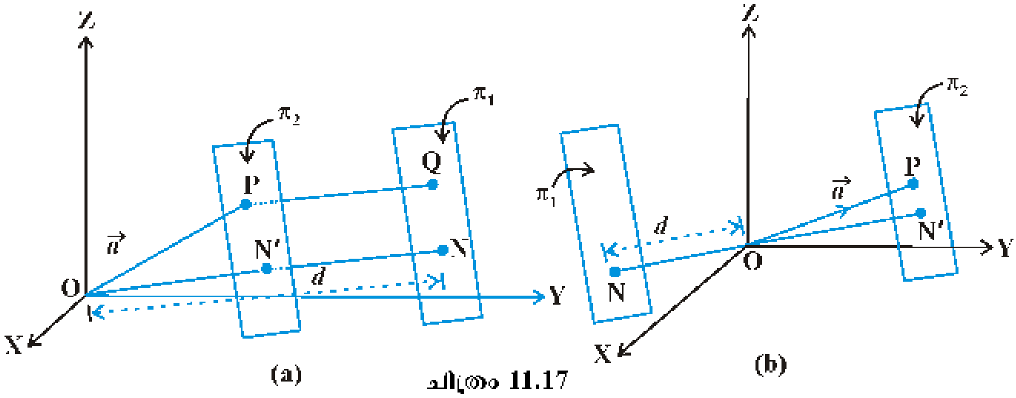
$$\cos\theta = \left|\frac{3\times 2 + (-6)(2) + (2)(-2)}{\sqrt{(3^2 + (-6)^2 + (2)^2)}\ \sqrt{(2^2 + 2^2 + (-2)^2)}}\right|$$

$$= \left| \frac{-10}{7 \times 2\sqrt{3}} \right| = \frac{5}{7\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{21}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{21}\right)$$

11.9 ഒരു തലത്തിൽ നിന്നും ഒരു ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം (Distance of a point from a plane)

$\vec{a}$ എന്ന സ്ഥാനസദിശമുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് P എന്ന് കരുതുക. സദിശരൂപം $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ എന്നത് π_1 എന്ന തലമാണെന്നും വിചാരിക്കുക. (ചിത്രം 11.19)



ചിത്രം 11.17

ഇനി π_2 എന്നത് π_1 എന്ന തലത്തിന് സമാന്തരമായ P എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോവുന്ന തലമാണ് എന്ന സങ്കല്പിച്ചാൽ $\hat{n}$ എന്ന ഏകകസദിശം π_2 എന്ന തലത്തിനും ലംബമായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് π_2 ന്റെ സമവാക്യം

$(\vec{r} - \vec{a})\cdot\hat{n} = 0$ എന്നെടുക്കാം.

അതായത്, $\vec{r}\cdot\hat{n} = \vec{a}\cdot\hat{n}$

ഏകക സദിശമായതിനാൽ $\vec{a}\cdot\hat{n}$ എന്നത് ഈ തലത്തിന് ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലമായിരിക്കും.

π_1 എന്ന തലത്തിലേക്ക് ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ദൂരം ചിത്രത്തിൽ ON ആണ്. അങ്ങനെയെങ്കിൽ ON ON′ എന്നത് ഈ രണ്ട് തലങ്ങളും തമ്മിലുള്ള അകലമായിരിക്കും.

സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും ON − d ആയിരിക്കും.

അതായത് π_1, π_2 എന്നീ തലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ദൂരം ON – ON′ = $d - \vec{a}\cdot\hat{n}$ ആവും. (ചിത്രം 11.19 (a))

ഇതുപോലെ ചിത്രം 11.19(b) ലെ സാഹചര്യത്തിലും സമാനമായ അകലം കണ്ടെത്തുന്ന സമവാക്യം ലഭിക്കും.

> **കുറിപ്പ്**
>
> π_2 എന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $\vec{r}\cdot\vec{N} = d$ ആണെങ്കിൽ ($\overline{N}$ തലത്തിന് ലംബമായ സദിശമാണ്, ഏകക സദിശമാകണമെന്നില്ല)
>
> ലംബദൂരം $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{N} - d|}{|\vec{N}|}$ ആയിരിക്കും
>
> ആധാര ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലമാവുമ്പോൾ ഇത് $\left|\dfrac{\vec{0}.\vec{N} - d}{|\vec{N}|}\right| = \left|\dfrac{d}{\vec{N}}\right|$ ആയിരിക്കും. ($\vec{a} = 0$ ആയതിനാൽ)

കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം

P യുടെ സൂചകസംഖ്യ (x_1, y_1, z_1) എന്നും തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $Ax + By + Cz = D$ എന്നും കരുതിയാൽ

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

$$\overline{N} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$$

അപ്പോൾ, മുകളിലെ കുറിപ്പ് പ്രകാരം P യിൽ നിന്നും തലത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം

$$\left|\frac{(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})\cdot(A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}) - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| \quad \text{ആയിരിക്കും.}$$

ഉദാഹരണം: 24

$\vec{r}\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$ എന്ന തലത്തിൽ നിന്നും (2, 5, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$, $\overline{N} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $d = 4$ ആകുന്നു.

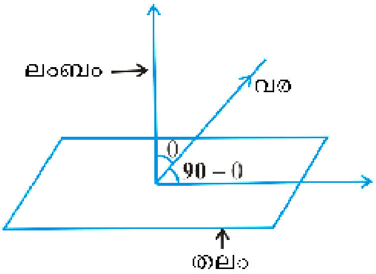
ആയതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന തലവും (2, 5, -3) എന്ന ബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം

$$= \frac{|(2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k})\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})-4|}{|6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}|} = \frac{|12-15-6-4|}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{13}{7}$$

11.10 ഒരു വരയ്ക്കും ഒരു തലത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോൺ (Angle between a Line and a Plane)

നിർവചനം: 3

ഒരു വരയ്ക്കും തലത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോൺ, ആ വരയ്ക്കും തലത്തിന്റെ ലംബത്തിനും ഇടയിലെ കോണിന്റെ പൂരകകോൺ ആയിരിക്കും. അതായത്, ചിത്രത്തിലേതുപോലെ, വരയുടെയും തലത്തിന്റെ ലംബത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോൺ θ ആണെങ്കിൽ തലത്തിനും വരയുടെയും ഇടയിലെ കോൺ $90 - \theta$ ആയിരിക്കും.



ചിത്രം 11.18

സദിശരൂപം

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ എന്ന വരയും $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$ എന്ന തലവും പരിഗണിക്കുക. വരയ്ക്കും തലത്തിന്റെ ലംബവരയ്ക്കും ഇടയിലെ കോൺ θ ആണെന്നു കരുതിയാൽ θ എന്നത് $\vec{b}, \vec{n}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾക്കിടയിലെ കോൺ ആവും.

അതായത്, $\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{n}|}\right|$

അപ്പോൾ, ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന തലത്തിനും വരയ്ക്കുമിടയിലെ കോണിനെ ϕ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിച്ചാൽ, $\phi = 90 - \theta$ ആണ്.

$$\Rightarrow \sin(90-\theta) = \cos\theta$$

അതായത്, $\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\,|\vec{n}|}\right|$ എന്നതിനെ $\sin(90-\theta) = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right|$ എന്നെഴുതാം.

അതായത്, $\sin\phi = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\,|\vec{n}|}\right|$

$$\Rightarrow \phi = \sin^{-1}\left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right|$$ എന്നെഴുതാം.

ഉദാഹരണം: 25

$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{6}$ എന്ന വരയും $10x + 2y - 11z = 3$ എന്ന തലവും തമ്മിലുള്ള കോണളവ് കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന വരയും തലത്തിലെ ലംബവും തമ്മിലുള്ള കോണളവ് ϕ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ സദിശരൂപത്തിലെഴുതിയാൽ

$\vec{r} = (-\hat{i} + 3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ യും $\vec{r}\cdot(10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k}) = 3$ ഉം ആകുന്നു.

ഇവിടെ, $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$, $\vec{n} = 10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k}$

$$\text{അതായത്, } \sin\phi = \left|\frac{(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})\cdot(10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k})}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}\sqrt{10^2 + 2^2 + 11^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-40}{7\times 15}\right| = \left|\frac{-8}{21}\right| = \frac{8}{21}$$

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{8}{21}\right) \text{ ആയിരിക്കും.}$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 11.3

1. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ തലത്തിന്റെയും, ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലവും, തലത്തിലെ ലംബത്തിന്റെ ദിശാകൊസൈനുകളും കാണുക.

   (a) $z = 2$ (b) $x + y + z = 1$

   (c) $2x + 3y - z = 5$ (d) $5y + 8 = 0$

2. ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്ന് 7 യൂണിറ്റ് അകലെയുള്ളതും, $3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$ എന്ന സദിശം ലംബമായിട്ടുള്ളതുമായ തലത്തിന്റെ സദിശസമവാക്യമെഴുതുക.

3. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന തലങ്ങളുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യം എഴുതുക.

   (a) $\vec{r}\cdot(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2$ (b) $\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) = 1$

   (c) $\vec{r}\cdot[(s - 2t)\hat{i} + (3 - t)\hat{j} + (2s + t)\hat{k}] = 15$

4. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതിൽ, ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും തലത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിലെ പാദത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

(a) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ (b) $3y + 4z - 6 = 0$

(c) $x + y + z = 1$ (d) $5y + 8 = 0$

5. ചുവടെ പ്രതിപാദിക്കുന്ന തലങ്ങളുടെ സദിശസമവാക്യവും, കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യവുമെഴുതുക.

(a) $(1, 0, -2)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നതും തലത്തിലേയ്ക്കുള്ള ലംബം $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ യും ആയ തലം

(b) $(1,4, 6)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും തലത്തിലേക്കുള്ള ലംബം $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ യും ആയ തലം.

6. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യമെഴുതുക.

(a) $(1, 1, -1)$, $(6, 4, -5)$, $(-4, -2, 3)$

(b) $(1, 1, 0), (1, 2, 1), (-2, 2, -1)$

7. $2x + y - z = 5$ എന്ന തലം അക്ഷങ്ങളുമായി രൂപീകരിക്കുന്ന ഇട അകലങ്ങൾ കാണുക.

8. ZOX തലത്തിന് സമാന്തരവും, y അക്ഷവുമായുള്ള ഇട അകലം 3 ആയ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

9. $3x - y + 2z - 4 = 0$, $x + y + z - 2 = 0$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ സംഗമത്തിലൂടെയും, $(2, 2, 1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയും കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യമെ ഴുതുക.

10. $\vec{r}\,.(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$, $\vec{r}\,.(2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ സംഗ മത്തിലൂടെയും, $(2, 1, 3)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയും കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യമെഴുതുക.

11. $x + y + z = 1$, $2x + 3y + 4z = 5$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ സംഗമരേഖയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും $x - y + z = 0$ എന്ന തലത്തിന് ലംബവുമായ തലത്തിന്റെ സമവാക്യമെഴുതുക.

12. സദിശസമവാക്യം $\vec{r}\cdot(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 5$, $\vec{r}\cdot(3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 3$ ആയ തല ങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് കാണുക.

13. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന തലങ്ങൾ പരസ്പരം സമാന്തരങ്ങളാണോ, ലംബമാണോ, എന്ന് പരിശോധിക്കുക. ഇത് രണ്ടുമല്ലെങ്കിൽ അവ തമ്മിലുള്ള കോണളവുകൾ കാണുക.

(a) $7x + 5y + 6z + 30 = 0,\ 3x - y - 10z + 4 = 0$

(b) $2x + y + 3z - 2 = 0,\ x - 2y + 5 = 0$

(c) $2x - 2y + 4z + 5 = 0,\ 3x - 3y + 6z - 1 = 0$

(d) $2x - y + 3z - 1 = 0,\ 2x - y + 3z + 3 = 0$

(e) $4x + 8y + z - 8 = 0,\ y + z - 4 = 0$

14. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും നിർദ്ദിഷ്ട തലത്തിലേക്കുള്ള അകലം കാണുക.

	ബിന്ദു	തലം
(a)	$(0, 0, 0)$	$3x - 4y + 12z = 3$
(b)	$(3, -2, 1)$	$2x - y + 2z + 3 = 0$
(c)	$(2, 3, -5)$	$x + 2y - 2z = 9$
(d)	$(-6, 0, 0)$	$2x - 3y + 6z - 2 = 0$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

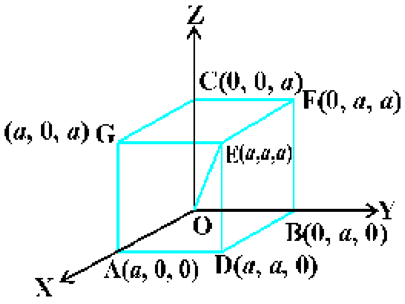
ഉദാഹരണം: 26

ഒരേ സമചതുരക്കട്ടയുടെ 4 വികർണങ്ങളുമായി ഒരു വര α, β, γ, δ എന്നീ കോണളവുകൾ രൂപീകരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

OADBFEGC യാണ് സമചതുരക്കട്ടയെന്നും അതിന്റെ വക്കുകളുടെ നീളം 'a' യൂണിറ്റും ആണെന്ന് സങ്കൽപിച്ചാൽ നാല് വികർണങ്ങൾ യഥാക്രമം OE, AF, BG, CD. എന്നിവയാകുന്നു.

O, E എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന വികർണമായ OE യുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ യഥാക്രമം,



ചിത്രം 11.19

$$\frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}$$

ആകുന്നു.

അതായത്, അവ $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$; ആയിരിക്കും

ഇതേ രീതിയിൽ, AF, BG, CD എന്നീ വികർണങ്ങളുടെ ദിശാകൊസൈനുകളും യഥാക്രമം, $\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$ എന്നിവയായിരിക്കും.

നാല് വികർണങ്ങളുമായി $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ കോണളവ് രൂപീകരിക്കുന്ന വരയുടെ ദിശാ sI nssk \ pÄ l, m, n എന്ന് സങ്കൽപിച്ചാൽ,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}(l + m + n);\ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}(-l + m + n);$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}(l - m + n);\ \cos\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}(l + m - n)$$ ആയിരിക്കും (എന്തുകൊണ്ട്?)

ഇവയുടെ വർഗങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$

$$= \frac{1}{3}\left[(l + m + n)^2 + (-l + m + n)^2\right] + (l - m + n)^2 + (l + m - n)^2]$$

$$= \frac{1}{3}\left[4(l^2 + m^2 + n^2)\right] = \frac{4}{3} \qquad (l^2 + m^2 + n^2 = 1)$$

ഉദാഹരണം: 27

$(1, -1, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും $2x + 3y - 2z = 5$, $x + 2y - 3z = 8$ എന്നീ തലങ്ങൾക്ക് ലംബവുമായ തലത്തിന്റെ സമവാക്യമെഴുതുക.

പരിഹാരം

$(1, -1, 2)$ എന്ന ബിന്ദു ഉൾക്കൊള്ളുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$A(x - 1) + B(y + 1) + C(z - 2) = 0 \quad .....(1)$$ ആയിരിക്കും.

തലം (1) $2x + 3y - 2z = 5$, $x + 2y - 3z = 8$, എന്നീ തലങ്ങൾക്ക് പരസ്പരം ലംബമായതിനാൽ

$$2A + 3B - 2C = 0, \quad A + 2B - 3C = 0$$ ആയിരിക്കും.

മേൽ സൂചിപ്പിച്ച സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും. $A = -5C$ എന്നും $B = 4C$ എന്നും ലഭിക്കും. ആയതിനാൽ, സമവാക്യം (1) അനുസരിച്ച്

$$-5C(x - 1) + 4C(y + 1) + C(z - 2) = 0$$

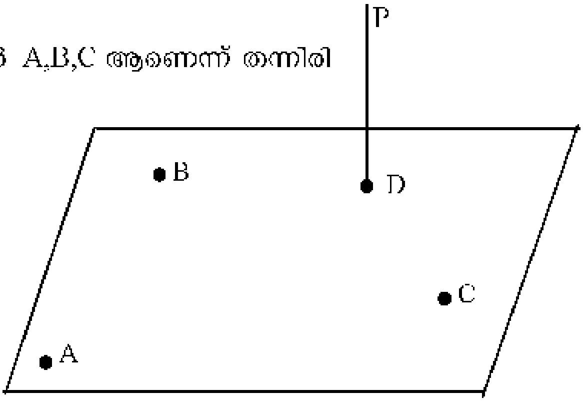
അതായത്, $5x - 4y - z = 7$ ആണ് നിർദ്ദിഷ്ട തലത്തിന്റെ സമവാക്യം.

ഉദാഹരണം: 28

A (3, – 1, 2), B (5, 2, 4), C(– 1, – 1, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന തലത്തിലേക്ക് P (6, 5, 9) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലം കാണുക.

പരിഹാരം

നിർദ്ദിഷ്ട തലത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ A,B,C ആണെന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു. കൂടാതെ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും തലത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബം തലത്തിൽ സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദു D എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ PD യുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കണം.



ചിത്രം 11.20

PD എന്നത് $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ എന്ന സദിശത്തിൽ മേൽ $\overrightarrow{AP}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ പ്രക്ഷേപമാണ്

അതായത്, $$PD = \overrightarrow{AP} \cdot \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|} \text{ ----------(1)}$$

ഇവിടെ; $$\overrightarrow{AP} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12\hat{i} - 16\hat{j} + 12\hat{k}$$

$$(1) \Rightarrow PD = (3i + 6j + 7k) \cdot \frac{12i - 16j + 12k}{12i - 16j + 12k}$$

$$PD = (3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}) \cdot \frac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{34}}$$

$$= \frac{3\sqrt{34}}{17}$$

മറ്റൊരു രീതി

A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യമെഴുതി, ഇതിൽ നിന്നും P എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം കാണുക.

ഉദാഹരണം: 29

$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta}$$

$\dfrac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \dfrac{y-b}{\beta} = \dfrac{z-b-c}{\beta+\gamma}$ എന്നീ വരകൾ സമതലീയങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന വരകളുടെ സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും.

$$\begin{aligned} x_1 &= a-d & x_2 &= b-c \\ y_1 &= a & y_2 &= b \\ z_1 &= a+d & z_2 &= b+c \\ a_1 &= \alpha-\delta & a_2 &= \beta-\gamma \\ b_1 &= \alpha & b_2 &= \beta \\ c_1 &= \alpha+\delta & c_2 &= \beta+\gamma \end{aligned}$$ ആയിരിക്കും.

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-c-a+d & b-a & b+c-a-d \\ \alpha-\delta & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta-\gamma & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix}$$

മൂന്നാം നിര, ഒന്നാം നിരയുടെയും മൂന്നാം നിരയുടെയും സങ്കലനമായി എഴുതിയാൽ

$$2\begin{vmatrix} b-a & b-a & b+c-a-d \\ \alpha & \alpha & \alpha+\delta \\ \beta & \beta & \beta+\gamma \end{vmatrix} = 0 \text{ (എന്തുകൊണ്ട്)}$$

(ഒന്നും രണ്ടും നിരകൾ സമാനമായതിനാൽ)

അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന വരകൾ സമതലീയങ്ങളാണ്.

ഉദാഹരണം: 30

A (3, 4, 1), B(5, 1, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര XY തലത്തിനെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളെഴുതുക.

പരിഹാരം

A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} + \lambda\,[(5-3)\hat{i} + (1-4)\hat{j} + (6-1)\hat{k}]$$

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} + \lambda\,(2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) \quad ..(1)$$

ഈ വര XY തലത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു P ആണെന്നു കരുതിയാൽ, P യുടെ സ്ഥാനസദിശം $x\hat{i}+y\hat{j}$ എന്ന മാതൃകയിലായിരിക്കും.

ഇത് സമവാക്യം (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ

$$x\hat{i}+y\hat{j} = (3+2\lambda)\hat{i}+(4-3\lambda)\hat{j}+(1+5\lambda)\hat{k}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ എന്നിവയുടെ ഗുണകങ്ങൾ തുല്യമായെഴുതിയാൽ,

$$x = 3 + 2\lambda$$
$$y = 4 - 3\lambda$$
$$0 = 1 + 5\lambda$$

ഇവയിൽ നിന്നും, $x=\frac{13}{5}, y=\frac{23}{5}, z = 0$ എന്നു ലഭിക്കും.

ആയതിനാൽ, നിർദിഷ്ട ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(\frac{13}{5}, \frac{23}{5}, 0\right)$ ആയിരിക്കും.

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. ആധാരബിന്ദുവിനെയും (2, 1, 1) എന്ന ബിന്ദുവിനേയും തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര (3, 5, – 1), (4, 3, – 1) എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയ്ക്ക് ലംബമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

2. പരസ്പര ലംബങ്ങളായ രണ്ടു വരകളുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ യഥാക്രമം l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2 ആകുന്നു. ഈ രണ്ടു വരകൾക്കും ലംബമായ വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ $m_1 n_2 - m_2 n_1$, $n_1 l_2 - n_2 l_1$, $l_1 m_2 - l_2 m_1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

3. ദിശാനുപാതങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b, c യും $b-c, c-a, a-b$ യും ആയ രണ്ടു വരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണളവ് കാണുക.

4. x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരവും, ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ വരയുടെ സമവാക്യമെഴുതുക.

5. A, B, C, D എന്നീ നാല് ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ യഥാക്രമം (1, 2, 3), (4, 5, 7), (– 4, 3, – 6), (2, 9, 2) ആയാൽ AB, CD എന്നീ വരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണളവ് കാണുക.

6. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2k}=\frac{z-3}{2}$, $\frac{x-1}{3k}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-5}$ എന്നീ വരകൾ പരസ്പരം ലംബമായാൽ k യുടെ വില കാണുക.

7. (1, 2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും, $\vec{r}.(\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k})+9=0$ എന്ന തലത്തിന് ലംബവുമായ വരയുടെ സദിശ സമവാക്യമെഴുതുക.

8. (a, b, c) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും, $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=2$ എന്ന തലത്തിന് സമാന്തരവുമായ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം എഴുതുക.

9. $\vec{r}=6\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$,

$\vec{r}=-4\hat{i}-\hat{k}+\mu(3\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})$ എന്നീ വരകൾ തമ്മിലുള്ള കുറഞ്ഞ അകലം കാണുക.

10. (5, 1, 6), (3, 4, 1) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വര *YZ* തലത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളെഴുതുക.

11. (5, 1, 6), (3, 4, 1) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വര *ZX* തലത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളെഴുതുക.

12. (3, –4, –5), (2, –3, 1) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വര $2x + y + z = 5$ എന്ന തലത്തിനെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളെഴുതുക.

13. (– 1, 3, 2) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും, $x + 2y + 3z = 5$, $3x + 3y + z = 0$ എന്നീ തലങ്ങൾക്ക് ലംബവുമായ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം എഴുതുക.

14. $\vec{r}\cdot(3\hat{i}+4\hat{j}-12\hat{k})+13=0$ എന്ന തലത്തിൽ നിന്നും (1, 1, *p*) , (– 3, 0, 1) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലേക്കുള്ള അകലം തുല്യമായാൽ *p* യുടെ വില കാണുക.

15. $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=1$, $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+4=0$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ സംഗമവരയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും, *x* അക്ഷത്തിന് സമാന്തരവുമായ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം എഴുതുക.

16. P(1, 2, – 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും OP എന്ന വരയ്ക്ക് ലംബവുമായ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം എഴുതുക, ഇവിടെ O ആധാരബിന്ദുവാകുന്നു.

17. $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})-4=0$, $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+5=0$ എന്നീ തലങ്ങളുടെ സംഗമവരയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതും, $\vec{r}\cdot(5\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})+8=0$ എന്ന തലത്തിന് ലംബവുമായ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം എഴുതുക.

18. $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ എന്ന വരയുടെയും $\vec{r}\cdot(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$ എന്ന തലത്തിന്റെയും സംഗമബിന്ദുവിൽ നിന്നും $(-1, -5, -10)$ എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം കാണുക.

19. $\vec{r}\cdot(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$, $\vec{r}\cdot(3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ എന്നീ തലങ്ങൾക്ക് സമാന്തരവും (1, 2, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ വരയുടെ സദിശസമവാക്യം എഴുതുക.

20. $\dfrac{x-8}{3} = \dfrac{y+19}{-16} = \dfrac{z-10}{7}$, $\dfrac{x-15}{3} = \dfrac{y-29}{8} = \dfrac{z-5}{-5}$ എന്നീ വരകൾക്ക് ലംബവും, $(1, 2, -4)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നതുമായ വരയുടെ സദിശ സമവാക്യമെഴുതുക.

21. ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നും 'p' യൂണിറ്റ് അകലെ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന തലം, അക്ഷങ്ങളുമായി a, b, c എന്നീ ഇട അകലങ്ങൾ പാലിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{p^2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

ചോദ്യങ്ങൾ 22, 23 എന്നിവയ്ക്ക് ശരിയുത്തരം എടുത്തെഴുതുക.

22. $2x + 3y + 4z = 4$, $4x + 6y + 8z = 12$ എന്നീ തലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

A) 2 യൂണിറ്റ് B) 4 യൂണിറ്റ് C) 8 യൂണിറ്റ് D) $\dfrac{2}{\sqrt{29}}$ യൂണിറ്റ്

23. $2x - y + 4z = 5$, $5x - 2.5y + 10z = 6$ എന്നീ തലങ്ങൾ

A) പരസ്പരം ലംബമായിരിക്കും

B) സമാന്തരമായിരിക്കും

C) y അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്നു

D) $\left(0, 0, \dfrac{5}{4}\right)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു

സംഗ്രഹം

- ഒരു വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ ആ വര സൂചക അക്ഷങ്ങളുടെ അധിദിശയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളുടെ കൊസൈനുകളാണ്.
- l, m, n ഒരു വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകളായാൽ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ആയിരിക്കും.
- $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ എന്നിവ യോജിപ്പിച്ച് വരക്കുന്ന വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ $\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ}$ ആണ്.

  ഇവിടെ, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- ഒരു വരയുടെ ദിശാനുപാതങ്ങൾ ആ വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾക്ക് ആനുപാതികമായി വരുന്ന സംഖ്യാത്രയമാണ്.
- ഒരു വരയുടെ ദിശാകൊസൈനുകൾ l, m, n, ദിശാനുപാതങ്ങൾ a, b, c എന്നിവ ആയാൽ

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\ ;\ m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\ ;\ n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- **അസമ വരകൾ :** ഒരു ത്രിമാനസ്ഥലത്തെ സമാന്തരമല്ലാത്തതും പരസ്പരം കൂട്ടിമുട്ടാത്തതുമായ വരകളാണ്. ഇവ വ്യത്യസ്ത തലങ്ങളിലായിരിക്കും ഉണ്ടാവുക.
- **അസമ വരകൾ തമ്മിലുള്ള കോൺ :** അസമവരകൾക്ക് ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് (ഉചിതം ആധാര ബിന്ദു) സമാന്തരമായി വരക്കുന്ന വരകൾക്കിടയിലെ കോൺ.
- $l_1, m_1, n_1;\ l_2, m_2, n_2$ എന്നിവ രണ്ടുവരകളുടെ ദിശാകൊസൈനുകളും θ അവയ്ക്കിടയിലുള്ള ന്യൂനകോണും ആയാൽ

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$$

- $a_1, b_1, c_1;\ a_2, b_2, c_2$ എന്നിവ രണ്ടു വരകളുടെ ദിശാനുപാതങ്ങളും θ അവയ്ക്കിടയിലെ ന്യൂനകോണും ആയാൽ

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$

- ഒരു വരയിലെ തന്നിട്ടുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $\vec{a}$ യും ആ വരയ്ക്ക് സമാന്തരമായ സദിശം $\vec{b}$ യും ആയാൽ ആ വരയുടെ സദിശസമവാക്യം $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\, \vec{b}$ ആണ്.
- (x_1, y_1, z_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി പോകുന്നതും l, m, n എന്നിവ ദിശാകൊസൈനുമായ വരയുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യം:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

- രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശം $\vec{a}$, $\vec{b}$ യും ആയ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരയുടെ സദിശസമവാക്യം $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\,(\vec{b} - \vec{a})$.
- (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ പോകുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.
- $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$, $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2$, എന്നീ വരകൾക്കിടയിലെ ന്യൂനകോൺ θ ആയാൽ, $\cos\theta = \left|\dfrac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1|\,|\vec{b}_2|}\right|$
- $\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$, $\dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$ എന്നീ വരകൾക്കിടയിലെ ന്യൂനകോൺ θ ആയാൽ, $\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$.
- രണ്ട് അസമവരകൾ തമ്മിലുള്ള കുറഞ്ഞ അകലം ആ വരകൾക്കിടയിലുള്ള ലംബവരയുടെ നീളമാണ്.
- $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$, $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ എന്നീ വരകൾ തമ്മിലുള്ള കുറഞ്ഞ അകലം

$$\left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$$

- $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1}$, $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2}$ എന്നീ വരകൾ തമ്മിലുള്ള കുറഞ്ഞ അകലം

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$

- $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}$, $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}$ എന്നീ സമാന്തരവരകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

  $$\left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|} \right|$$

- ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഒരു തലത്തിലേക്കുള്ള അകലം d യും ആ തലത്തിലെ ഒരു ലംബ ഏകകസദിശം $\hat{n}$ ഉം ആയാൽ ആ തലത്തിന്റെ സദിശസമവാക്യം $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$.

- ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഒരു തലത്തിലേക്കുള്ള അകലം d യും ആ തലത്തിലെ ഒരു ലംബസദിശത്തിന്റെ ദിശാകൊസൈനുകൾ l, m, n എന്നിവയുമായാൽ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $lx + my + nz = d$.

- ഒരു തലത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $\vec{a}$ യും അതിന്റെ ലംബസദിശം $\vec{N}$ നും ആയാൽ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം $(\vec{r} - \vec{a}) . \vec{N} = 0$.

- ഒരു തലത്തിന്റെ ലംബത്തിന്റെ ദിശാനുപാതങ്ങൾ A, B, C എന്നിവയും ലംബം (x_1, y_1, z_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നുപോകുന്നു. എങ്കിൽ തലത്തിന്റെ സമവാക്യം.

  $$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

- (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) എന്നീ നേർരേഖയിലല്ലാത്ത മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

  $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- ഒരു രേഖയിലല്ലാത്ത മൂന്നു ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാന സദിശങ്ങൾ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ആയാൽ, ഈ ബിന്ദുക്കൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന തലത്തിന്റെ സദിശസമവാക്യം

$$(\vec{r}-\vec{a}).[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})]=0$$

- സൂചക അക്ഷങ്ങളെ $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

- $\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1$, $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$ എന്നീ തലങ്ങൾ സംഗമിക്കുന്ന തലത്തിന്റെ സദിശ സമവാക്യം $\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2)=d_1+\lambda d_2$, λ എന്നത് പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു രേഖീയ സംഖ്യ.

- $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ എന്നീ തലങ്ങൾ സംഗമിക്കുന്ന ഭാഗത്തുകൂടി കടന്നുപോകുന്ന തലത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

- $\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$, $\vec{r}=\vec{a}_2+\mu\vec{b}_2$ എന്നീ വരകൾ സമതലീയമാകണമെങ്കിൽ $(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)=0$ ആകണം.

- $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$, $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$ എന്നീ വരകൾ സമതലീയമാകണമെങ്കിൽ $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0.$

- $\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1$, $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$ എന്നീ തലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ന്യൂനകോൺ θ ആയാൽ $\theta=\cos^{-1}\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$.

- $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ എന്ന തലവും $\vec{r}\cdot\hat{n}=d$ എന്ന വരയും തമ്മിലുള്ള കോൺ ϕ ആയാൽ, $\sin\phi=\left|\frac{\vec{b}\cdot\hat{n}}{|\vec{b}||\hat{n}|}\right|$

- $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ എന്നീ തലങ്ങൾ തമ്മിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ θ ആയാൽ,

$$\cos\theta = \left| \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|$$

- സ്ഥാനസദിശം $\vec{a}$ ആയ ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ യിലേക്കുള്ള അകലം $|d - \vec{a}\cdot\hat{n}|$.

- (x_1, y_1, z_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് $Ax + By + Cz + D = 0$ യിലേക്കുള്ള അകലം $\left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$.

V5Y9S2

അധ്യായം 12

രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് (LINEAR PROGRAMMING)

❖ *സ്വയം നിർമിച്ച ഒരു പ്രശ്നം പരിഹരിക്കാൻ അവസരം ലഭിക്കുന്നില്ലെങ്കിൽ ഒരു വിദ്യാർഥിയുടെ ഗണിത പരിചയം അപൂർണമാണ്- ജി. പോള്യ* ❖

12.1 ആമുഖം

എൽ. കാന്റ്റോവിച്ച്

രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളെക്കുറിച്ചും ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ അവയുടെ ഉപയോഗത്തെക്കുറിച്ചും മുൻ ക്ലാസ്സുകളിൽ നാം പഠിച്ചിട്ടുള്ളതാണല്ലോ. അതുപോലെ ഒന്നും രണ്ടും ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ അസമതകളെപ്പറ്റിയും അവയുടെ ഗ്രാഫിക്കൽ രീതിയിലുള്ള പരിഹാരങ്ങളെപ്പറ്റിയും പതിനൊന്നാം ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ചിട്ടുമുണ്ട്. രേഖീയ സമവാക്യങ്ങൾക്കും അസമതകൾക്കും ഗണിതത്തിൽ അനേകം പ്രയോഗങ്ങളുണ്ട്. നിത്യജീവിതത്തിലെ ചില പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുവാൻ രേഖീയ അസമതകളും സമവാക്യങ്ങളും ഉപയോഗിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നാണ് ഈ അധ്യായത്തിലൂടെ നാം മനസ്സിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്നത്. ചുവടെ കാണുന്ന ഒരു ഉദാഹരണം പരിശോധിക്കാം.

ഒരു ഫർണിച്ചർ വ്യാപാരി മേശ, കസേര എന്നീ രണ്ടു തരത്തിലുള്ള സാധനങ്ങളുടെ കച്ചവടം നടത്തിയിരുന്നു. അദ്ദേഹത്തിന് മേശയായാലും കസേരയായാലും ആകെ 60 എണ്ണം മാത്രം സൂക്ഷിക്കാനുള്ള സ്ഥലമേയുള്ളൂ. മുതൽമുടക്കാനായി 50,000/- രൂപയും അദ്ദേഹത്തിന്റെ പക്കലുണ്ട്. ഒരു മേശയ്ക്ക് 2500 രൂപയും ഒരു കസേരയ്ക്ക് 500 രൂപയും ചെലവാകും. ഒരു മേശ വിൽക്കുമ്പോൾ 250 രൂപയും കസേര വിൽക്കുമ്പോൾ 75 രൂപയും ലാഭം കിട്ടും. അദ്ദേഹം വാങ്ങിയ എല്ലാ സാധനങ്ങളും വിറ്റുപോകും എന്ന നിഗമനത്തിൽ, പരമാവധി ലാഭം കിട്ടുവാൻ അദ്ദേഹത്തിന് വാങ്ങാൻ കഴിയുന്ന മേശകളെത്ര? കസേരകളെത്ര?

ഇത്തരത്തിൽ പരമാവധി ലാഭം, ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചെലവ് മുതലായവ കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട പ്രശ്നങ്ങളെയാണ് **പരമമൂല്യപ്രശ്നങ്ങൾ (optimisation problems)** എന്നു പറയുന്നത്. ഇവയിൽ ഏറ്റവും പ്രധാനപ്പെട്ടതും പ്രത്യേകതയുള്ളതുമായ പ്രശ്നങ്ങളാണ് രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നങ്ങൾ. മുകളിൽ പരാമർശിച്ച പ്രശ്നം

ഒരു രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നമാണ്. വ്യവസായം, വാണിജ്യം, മാനേജ്മെന്റ് ശാസ്ത്രം എന്നിവയിൽ വിപുലമായ ഉപയോഗങ്ങളുള്ളവയാണ് രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ്.

രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നങ്ങളെപ്പറ്റിയും അവയുടെ പരിഹാരങ്ങളെപ്പറ്റിയുമാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ പഠിക്കുന്നത്. ഈ പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് വിവിധ രീതിയിൽ പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കാമെങ്കിലും ഗ്രാഫിക്കൽ രീതിയിലുള്ള പരിഹാരത്തെപ്പറ്റി മാത്രമാണ് ഇവിടെ പ്രതിപാദിക്കുന്നത്.

12.2 രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നവും അതിന്റെ ഗണിതരൂപം നിർമിക്കലും (Linear Programming Problems and its Mathematical Formulation)

മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള ഉദാഹരണം രണ്ട് ചരങ്ങൾ ഉള്ളതാണ്. അതിന്റെ ഗണിതരൂപം നിർമിക്കുന്നതെങ്ങനെ എന്ന് നോക്കാം.

ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്ന്, ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നിരീക്ഷണങ്ങൾ നടത്താം.

(i) വ്യാപാരിക്ക് തന്റെ മൂലധനം ഉപയോഗിച്ച് മേശകളോ കസേരകളോ അഥവാ രണ്ടും കൂടിയോ വാങ്ങാവുന്നതാണ്. വ്യത്യസ്തമായ നിക്ഷേപതന്ത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് വ്യത്യസ്ത രീതിയിൽ ലാഭമുണ്ടാക്കാൻ കഴിയും.

(ii) ചില നിബന്ധനകളും നിയന്ത്രണങ്ങളും അദ്ദേഹം പാലിക്കേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന്, അദ്ദേഹത്തിന് പരമാവധി 50,000 രൂപ മാത്രമേ വിനിയോഗിക്കുവാൻ കഴിയുകയുള്ളൂ. അതുപോലെ പരമാവധി 60 സാധനങ്ങൾ ശേഖരിക്കുന്നതിനുള്ള സ്ഥലം മാത്രമേ അദ്ദേഹത്തിനുള്ളൂ.

അദ്ദേഹം മേശകൾ മാത്രം വാങ്ങുവാൻ തീരുമാനിച്ചാൽ $50000 \div 2500 = 20$ മേശകൾ വാങ്ങാൻ കഴിയും. കിട്ടുന്ന ലാഭം $250 \times 20 = 5000$ രൂപ ആയിരിക്കും.

അദ്ദേഹം കസേരകൾ മാത്രമേ വാങ്ങുന്നുള്ളൂ എങ്കിൽ $50000 \div 500 = 100$ എണ്ണം വാങ്ങാം. പക്ഷേ ആകെ 60 എണ്ണം ശേഖരിക്കാനുള്ള സ്ഥലം മാത്രം ഉള്ളതിനാൽ ലാഭം $= 60 \times 75 = 4500$ രൂപ.

മറ്റ് സാധ്യതകളും ധാരാളമുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന് 10 മേശകളും 50 കസേരകളും വാങ്ങുവാൻ തീരുമാനിച്ചാൽ ലാഭം $10 \times 250 + 50 \times 75 = 6250$ രൂപ.

അതായത് വ്യത്യസ്തതന്ത്രങ്ങൾ സ്വീകരിച്ചുകൊണ്ട് വ്യത്യസ്തരീതിയിൽ തന്റെ പണം നിക്ഷേപിക്കുമ്പോൾ വ്യാപാരിക്ക് വ്യത്യസ്ത തുക ലാഭം കിട്ടുന്നു എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

അങ്ങനെയെങ്കിൽ പരമാവധി ലാഭം കിട്ടുന്നതിന് അദ്ദേഹത്തിന് ഏതു രീതിയിൽ പണം നിക്ഷേപിക്കുവാൻ കഴിയും? അതിനുവേണ്ടി നമുക്ക് ഈ പ്രശ്നത്തിന്റെ ഗണിതരൂപം നിർമിക്കാം.

12.2.1 പ്രശ്നത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം

വ്യാപാരി വാങ്ങിയ മേശകളുടെ എണ്ണം x എന്നും കസേരകളുടെ എണ്ണം y എന്നും സ്വീകരിച്ചാൽ, x ഉം y ഉം ന്യൂനസംഖ്യയാകാൻ കഴിയില്ല.

അതായത്, $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ (അന്യൂനസംഖ്യാ നിബന്ധനകൾ) ... (1)

വ്യാപാരിക്ക് നിക്ഷേപിക്കാൻ കഴിയുന്ന തുകയുടെ പരിധി 50000 രൂപ എന്ന് നിശ്ചയിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതുപോലെ സാധനങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ പരിധി 60 ആയി നിശ്ചയിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഇവയെ ഗണിതരൂപത്തിൽ എഴുതിയാൽ,

$2500x + 500y \leq 50000$ (നിക്ഷേപ നിബന്ധന) ... (2)

അതായത്, $5x + y \leq 100$ ... (3)

$x + y \leq 60$ (സ്ഥല നിബന്ധന) ... (4)

അതുപോലെ, വ്യാപാരിക്ക് പരമാവധി ലാഭം കിട്ടുന്ന വിധത്തിലാണ് തന്റെ പണം നിക്ഷേപിക്കേണ്ടത്. കിട്ടുന്ന ലാഭത്തെ x -ഉം y -ഉം ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു ഏകദമായി കണക്കാക്കിയാൽ

$Z = 250x + 75y$ എന്ന ഗണിതരൂപം ലഭിക്കും
(ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദം - Objective function) .... (5)

ഗണിതപരമായി, ഈ പ്രശ്നത്തെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം.

$Z = 250x + 75y$ യുടെ പരമാവധി വില കാണുക

നിബന്ധനകൾ:

$$5x + y \leq 100$$

$$x + y \leq 60$$

$$x \geq 0, \ y \geq 0$$

അതായത്, അന്യൂനസംഖ്യകൾ ചരങ്ങളായുള്ള കുറേ രേഖീയ അസമതകളാൽ നിർണയിക്കപ്പെടുന്ന നിബന്ധനകൾക്ക് വിധേയമായി, Z എന്ന രേഖീയ ഏകദത്തിന്റെ പരമാവധി വില കണ്ടുപിടിക്കുകയാണ് നാം ചെയ്യുന്നത്. അതുപോലെ Z എന്ന രേഖീയ ഏകദത്തിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില കാണുന്ന പ്രശ്നങ്ങളും നാം പരിഗണിക്കേണ്ടതാണ്. ഇത്തരം പ്രശ്നങ്ങളെയാണ് രേഖീയപ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നത്.

അതായത്, ഒരു രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നം എന്നത് വിവിധ ചരങ്ങളുള്ള (x ഉം y ഉം) ഒരു രേഖീയ ഏകദത്തിന്റെ (ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദം എന്നുവിളിക്കുന്നു) പരമമായ വില (optimal value) (ഏറ്റവും കൂടിയ/ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ) കണ്ടുപിടിക്കുന്നതുമായി ബന്ധപ്പെട്ടുള്ളതാണ്. ഈ ഏകദത്തിന്റെ ചരങ്ങൾ അന്യൂന ചരങ്ങളായിരിക്കുകയും ചില രേഖീയ അസമതകൾ (രേഖീയ നിബന്ധനകൾ എന്നുവിളിക്കുന്നു) പാലിക്കപ്പെടുകയും ചെയ്യണം. 'രേഖീയ' എന്ന പദം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ഇവിടെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന ഗണിതബന്ധം (mathematical relation) രേഖീയമാണെന്നാണ്. അതുപോലെ 'പ്രോഗ്രാമിങ്' എന്ന പദം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ഏത് പ്രത്യേക പ്രവർത്തന പദ്ധതിക്ക് (പ്രോഗ്രാം) അനുസൃതമായിട്ടുള്ളതാണ്.

ഇനി രേഖീയപ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില പദങ്ങൾ നിർവചിക്കാം.

ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദം (Objective function): ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയോ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയോ കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട $Z = ax + by$ എന്ന രേഖീയ ഏകദത്തെ ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദം എന്നുപറയുന്നു. ഇവിടെ a, b എന്നിവ സ്ഥിരസംഖ്യകളാണ്.

മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണത്തിൽ, $Z = 250x + 75y$ രേഖീയ ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദമാണ്. x, y എന്നീ ചരങ്ങളെ നിർണയ ചരങ്ങൾ **(decision variables)** എന്നു വിളിക്കുന്നു.

നിബന്ധനകൾ (Constraints): ഒരു രേഖീയപ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നത്തിന്റെ ചരങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട രേഖീയ അസമതകളെയോ സമവാക്യങ്ങളെയോ അല്ലെങ്കിൽ വ്യവസ്ഥകളെയോ ആണ് നിബന്ധനകൾ എന്നുപറയുന്നത്. $x \geq 0$, $y \geq 0$ എന്നിവയെ അന്യൂന നിബന്ധനകൾ (Non-negative constraints) എന്നുവിളിക്കുന്നു. മുകളിലെ ഉദാഹരണത്തിൽ (1) മുതൽ (4) വരെയുള്ള അസമതകളാണ് നിബന്ധനകൾ.

പരമമൂല്യപ്രശ്നം (Optimisation problem) ചില രേഖീയ അസമതകളാൽ നിർണയിക്കപ്പെടുന്ന നിബന്ധനകളുള്ള ഏറ്റവും കൂടുതലോ കുറവോ വില കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട ഒരു രേഖീയ ഏകദവുമായി (x, y എന്നീ രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള) ബന്ധപ്പെട്ട പ്രശ്നത്തെയാണ് പരമമൂല്യപ്രശ്നം എന്നുപറയുന്നത്. രേഖീയപ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നങ്ങൾ പ്രത്യേക തരത്തിലുള്ള പരമമൂല്യപ്രശ്നങ്ങളാണ്. മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള ഉദാഹരണത്തിൽ നിശ്ചിത തുകയ്ക്ക് ഒരു വ്യാപാരി മേശകളും കസേരകളും വാങ്ങുന്ന പ്രശ്നമാണ് കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. ഇത് പരമമൂല്യപ്രശ്നത്തിന്റെയും രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നത്തിന്റെയും ഒരു ഉദാഹരണമാണ്.

ഒരു രേഖീയപ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാമെന്ന് ചർച്ചചെയ്യാം. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ ഗ്രാഫിക്കൽ രീതി ഉപയോഗിച്ചുള്ള പരിഹാരത്തെക്കുറിച്ചു മാത്രമേ പഠിക്കുന്നുള്ളൂ.

12.2.2 രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നതിനുള്ള ഗ്രാഫിക്കൽ രീതി

x, y എന്നീ രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള രേഖീയ അസമതകളുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുന്നതിനും അവയുടെ പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനും പതിനൊന്നാം ക്ലാസ്സിൽ നാം പഠിച്ചിട്ടുള്ളതാണല്ലോ. ഭാഗം 12.2. ൽ നാം ചർച്ചചെയ്ത മേശകളുടെയും കസേരകളുടെയും പ്രശ്നം പരിശോധിക്കാം. നമുക്ക് ഈ പ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരം ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

ആദ്യമായി ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രേഖീയ അസമതകളാൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകളുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാം.

$$5x + y \le 100 \ldots (1)$$

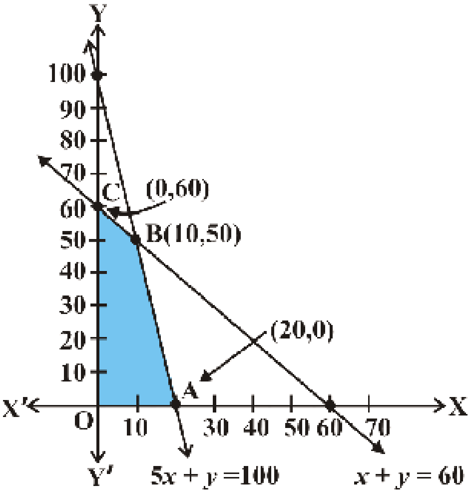
$$x + y \le 60 \ldots (2)$$

$$x \ge 0 \ldots (3)$$

$$y \ge 0 \ldots (4)$$

(1) മുതൽ (4) വരെയുള്ള അസമതകളുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുമ്പോൾ പൊതുവായ ഭാഗം ഷേയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്നത് ചിത്രം 12.1 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ഭാഗത്തെ ഓരോബിന്ദുവും വ്യാപാരിക്ക് വാങ്ങാൻ സാധ്യമായ മേശകളുടെയും കസേരകളുടെയും എണ്ണത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഈ ഭാഗത്തെ പ്രശ്നത്തിന്റെ സാധ്യതാഭാഗം (feasible region) എന്നുവിളിക്കുന്നു. ഈ ഭാഗത്തെ ഓരോ ബിന്ദുവിനെയും സാധ്യതാപരിഹാരം (feasible solution) എന്നുവിളിക്കുന്നു.

സാധ്യതാഭാഗം (Feasible region): അന്യൂനസംഖ്യാനിബന്ധനകൾ ($x \ge 0$, $y \ge 0$) ഉൾപ്പെടെ എല്ലാ നിബന്ധനകളും നിർണയിക്കുന്ന പൊതുവായ ഭാഗത്തെ സാധ്യതാഭാഗം അല്ലെങ്കിൽ പരിഹാരഭാഗം എന്നുവിളിക്കുന്നു.



ചിത്രം 12.1

ചിത്രം 12.1 ൽ ഭാഗം OABC (ഷെയ്ഡ് ചെയ്തിട്ടുള്ളത്) ഈ പ്രശ്നത്തിന്റെ സാധ്യതാഭാഗമാണ്. സാധ്യതാഭാഗം അല്ലാത്ത ഭാഗത്തെ അസാധ്യതാ ഭാഗം (infeasible region) എന്നു വിളിക്കുന്നു.

സാധ്യതാപരിഹാരങ്ങൾ (Feasible solutions): നിബന്ധനകളുടെ സാധ്യതാഭാഗത്തിന്റെ ഉള്ളിലോ വശങ്ങളിലോ ഉള്ള ബിന്ദുക്കളെയാണ് സാധ്യതാപരിഹാരങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കുന്നത്. ചിത്രം 12.1 ൽ OABC എന്ന സാധ്യതാ ഭാഗത്തിന്റെ അകത്തോ അതിരുകളിലോ ഉള്ള ഓരോ ബിന്ദുവും പ്രശ്നത്തിന്റെ സാധ്യതാപരിഹാരമാണ്. ഉദാഹരണത്തിന് (10, 50) ഒരു സാധ്യതാപരിഹാരമാണ്. അതുപോലെ (0, 60), (20, 0) എന്നിവയും സാധ്യതാപരിഹാരങ്ങളാണ്.

സാധ്യതാഭാഗത്തിന് വെളിയിലുള്ള ഓരോ ബിന്ദുവിനെയും അസാധ്യതാപരിഹാരം (infeasible solution) എന്നുവിളിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് (25, 40) ഒരു അസാധ്യത പരിഹാരമാണ്.

പരമസാധ്യതാപരിഹാരം (Optimal feasible solution): ഒരു പ്രശ്നത്തിന്റെ സാധ്യതാഭാഗത്തെ ഒരു ബിന്ദു ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദത്തിന്റെ പരമമൂല്യം (optimal value), അതായത്, ഏറ്റവും കൂടിയതോ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞതോ ആയ വില നൽകുന്നു എങ്കിൽ അതിനെ പരമമൂല്യപരിഹാരം (optimal solution) എന്നുപറയുന്നു.

OABC എന്ന സാധ്യതാഭാഗത്തെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും (1) മുതൽ (4) വരെയുള്ള എല്ലാ നിബന്ധനകളും പാലിക്കുന്നു എന്ന് കാണാം. പക്ഷേ സാധ്യതാഭാഗത്ത് അനന്തമായി ബിന്ദുക്കൾ ഉള്ളതിനാൽ $Z = 250x + 75y$ എന്ന ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദത്തിന്റെ പരമാവധി വില കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് അത്ര എളുപ്പമല്ല. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നങ്ങളുടെ പരിഹാരത്തിന് അടിസ്ഥാനമായി സ്വീകരിക്കാവുന്ന, ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സിദ്ധാന്തങ്ങൾ നമുക്ക് ഉപയോഗിക്കാം. (ഇവയുടെ തെളിവുകൾ ഈ ക്ലാസ്സിൽ പഠിക്കേണ്ടതില്ല).

സിദ്ധാന്തം 1: $Z = ax + by$ എന്നത് ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദവും R അതിന്റെ സാധ്യതാഭാഗവും (ഉത്തല ബഹുഭുജം–Convex Polygon) ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. x, y എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾ നിർണയിക്കുന്ന രേഖീയ അസമതകളിലെ ചരങ്ങളാണ്. Z ന് ഒരു പരമമൂല്യം (ഏറ്റവും കൂടിയതോ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞതോ) ഉണ്ടെങ്കിൽ ആ വില സാധ്യതാഭാഗത്തെ ഏതെങ്കിലും ഒരു മൂലബിന്ദുവിൽ (corner point) അല്ലെങ്കിൽ ശീർഷത്തിൽ (vertex) ആയിരിക്കും ലഭിക്കുന്നത്.

സിദ്ധാന്തം 2: $Z = ax + by$ ഒരു രേഖീയപ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നത്തിന്റെ ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദവും R അതിന്റെ സാധ്യതാഭാഗവും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. R പരിബദ്ധ (bounded)മാണെങ്കിൽ, Z ന് ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയും R ന്റെ ഏതെങ്കിലും മൂലബിന്ദുക്കളിൽ (ശീർഷങ്ങളിൽ) ആയിരിക്കും.

☛ കുറിപ്പ്

R പരിബദ്ധമല്ലെങ്കിൽ, ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദത്തിന്റെ ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയും ഉണ്ടാകണമെന്നില്ല. അഥവാ ഉണ്ടായാൽ അത് R ന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു മൂലബിന്ദുവിൽ ആയിരിക്കും.

മുകളിലെ ഉദാഹരണത്തിൽ, പരിബദ്ധമായ സാധ്യതാഭാഗത്തിലെ മൂലബിന്ദുക്കൾ (ശീർഷങ്ങൾ) O, A, B, C എന്നിവയാണ്. അവയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ യഥാക്രമം (0, 0), (20, 0), (10, 50) and (0, 60) എന്നിവയാണ്.

സാധ്യതാഭാഗത്തെ മൂലബിന്ദു	Z ന്റെ വില (രൂപയിൽ)
O(0,0)	0
C(0,60)	4500
B(10,50)	**6250** ← ഏറ്റവും കൂടിയ ലാഭം
A(20,0)	5000

ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ Z ന്റെ വിലകൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഇവിടെ വ്യാപാരിക്ക് ഏറ്റവും കൂടിയ ലാഭം കിട്ടുന്നത് (10, 50) എന്ന നിക്ഷേപതന്ത്രം സ്വീകരിക്കുമ്പോഴാണ് എന്നു കാണാം. അതായത്, 10 മേശകളും 50 കസേരകളും വാങ്ങുമ്പോഴാണ് അദ്ദേഹത്തിന് ഏറ്റവും കൂടുതൽ ലാഭം കിട്ടുന്നത്.

ഈ രീതിയിൽ രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നത്തിന് പരിഹാരം കാണുന്നതിനെ മൂലബിന്ദു രീതി (Corner Point Method) എന്നുപറയുന്നു. ഈ രീതിയുടെ വിവിധ ഘട്ടങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

1. രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നത്തിന്റെ സാധ്യതാഭാഗവും മൂലബിന്ദുക്കളും (ശീർഷങ്ങളും) കണ്ടുപിടിക്കുക. മൂലബിന്ദുക്കൾ പരിശോധനയിലൂടെയോ ബിന്ദുക്കൾ കടന്നുപോകുന്ന രേഖകളുടെ പരിഹാരം നിർണയിച്ചോ കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്.
2. ഓരോ മൂലബിന്ദുവിലുമുള്ള $Z = ax + by$ എന്ന ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദത്തിന്റെ വില കാണുക. ഏറ്റവും വലിയ വിലയെ M എന്നും ഏറ്റവും ചെറിയ വിലയെ m എന്നും രേഖപ്പെടുത്തുക.
3. (i) സാധ്യതാഭാഗം പരിബദ്ധമാണെങ്കിൽ M, m എന്നിവ യഥാക്രമം ഏറ്റവും വലിയ വിലയും ഏറ്റവും ചെറിയ വിലയും ആയിരിക്കും.

   (ii) സാധ്യതാഭാഗം പരിബദ്ധമല്ലെങ്കിൽ 4-ാം ഘട്ടത്തിലേയ്ക്കു കടക്കുക.
4. (a) $ax + by > M$ ന്റെ ഗ്രാഫും സാധ്യതാ ഭാഗവും തമ്മിൽ പൊതുബിന്ദുക്കൾ ഒന്നുമില്ലെങ്കിൽ Z ന്റെ പരമാവധി വില M ആയിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ Z ന് പരമാവധി വില ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതല്ല.

   (b) $ax + by < m$ ന്റെ ഗ്രാഫും സാധ്യതാഭാഗവും തമ്മിൽ പൊതുബിന്ദുക്കൾ ഒന്നുമില്ലെങ്കിൽ Z ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില m ആയിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ Z ന് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതല്ല.

ചില ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ മൂലബിന്ദുരീതിയുടെ ഘട്ടങ്ങൾ നമുക്ക് കൂടുതൽ പരിചയപ്പെടാം.

ഉദാഹരണം: 1

ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന രേഖീയപ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നത്തിന് ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് പരിഹാരം കാണുക.

$x + y \leq 50$ ... (1)

$3x + y \leq 90$ ... (2)

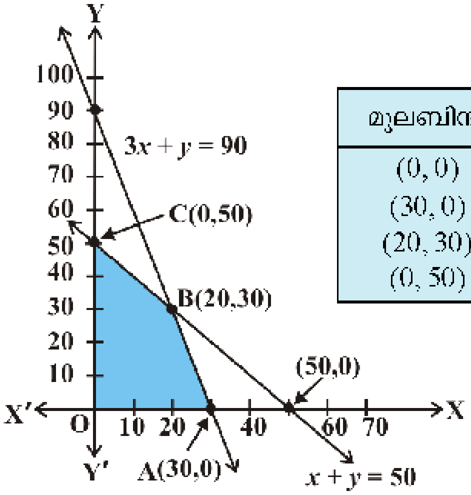
$x \geq 0, y \geq 0$ ... (3) എന്നീ നിബന്ധനകൾക്കു വിധേയമായി

$Z = 4x + y$ ... (4) എന്ന ഏകദത്തിന്റെ പരമാവധി വില കാണുക.

പരിഹാരം

ചിത്രം 12.2 ൽ ഷേയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്ന ഭാഗം തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനങ്ങളാൽ (1) മുതൽ (3) വരെ നിർണയിക്കപ്പെടുന്ന സാധ്യതാഭാഗം (feasible region) ആണ്. ഇവിടെ OABC എന്ന സാധ്യതാഭാഗം പരിബദ്ധ (bounded) മാണെന്ന് കാണാൻ കഴിയും. അതുകൊണ്ട് Z ന്റെ പരമാവധി വില കാണുന്നതിന് നമുക്ക് മൂലബിന്ദു രീതി ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

മൂലബിന്ദുക്കളായ O, A, B, C എന്നിവയുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ (0, 0), (30, 0), (20, 30), (0,50) എന്നിവയാണ്. ഇനി നമുക്ക് ഓരോ മൂലബിന്ദുവിലെയും Z - ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കാം.



മൂലബിന്ദു	Z – ന്റെ വില	
(0, 0)	0	
(30, 0)	**120** ←	പരമാവധി
(20, 30)	110	
(0, 50)	50	

ചിത്രം 12.2

അതുകൊണ്ട്, Z ന്റെ ഏറ്റവും കൂടിയ വില 120 ആണ്. (30, 0) എന്ന ബിന്ദുവിലാണ് പരമാവധി വില ലഭിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണം: 2

ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരം ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.

$$x + 2y \geq 10 \qquad \text{... (1)}$$

$$3x + 4y \leq 24 \qquad \text{... (2)}$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0 \qquad \text{... (3)}$$

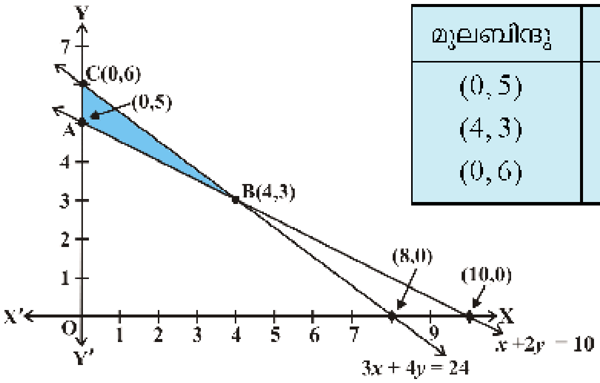
എന്നീ നിബന്ധനകൾക്കു വിധേയമായി

$$Z = 200\,x + 500\,y \qquad \text{... (4)}$$

എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില കാണുക.

പരിഹാരം

ചിത്രം 12.3 -ൽ ഷേയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്ന ഭാഗം തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകളാൽ (1 മുതൽ 3 വരെ) നിർണയിക്കപ്പെടുന്ന സാധ്യതാഭാഗമാണ്. ഇവിടെ ABC എന്ന സാധ്യതാഭാഗം പരിബദ്ധമാണ്.



ചിത്രം 12.3

മൂലബിന്ദു	Z - ന്റെ വില	
(0, 5)	2500	
(4, 3)	**2300** ←	കുറഞ്ഞ വില
(0, 6)	3000	

A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ (0,5), (4,3), (0,6). ഇനി $Z = 200x + 500y$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ വില ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ എത്രയാണെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാം. പട്ടികയിൽ നിന്ന് Zന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില 2300 ആണെന്ന് കാണാം ((4, 3) എന്ന ബിന്ദുവിൽ).

ഉദാഹരണം: 3

ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്ന പ്രശ്നത്തിൽ

$$x + 3y \leq 60 \qquad \text{... (1)}$$

$$x + y \geq 10 \qquad \text{... (2)}$$

$$x \leq y \qquad \text{... (3)}$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0 \qquad \text{... (4)}$$

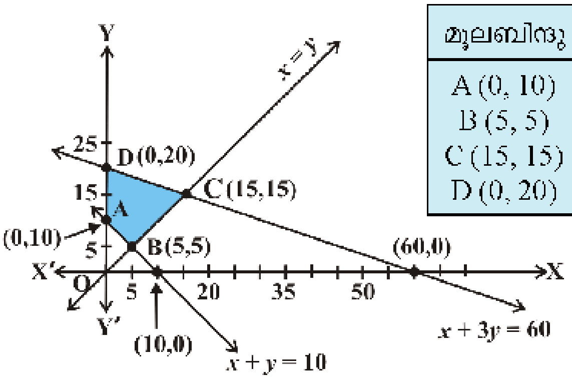
എന്നീ നിബന്ധനകൾക്ക് വിധേയമായി

$$Z = 3x + 9y \qquad ...(5)$$

എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയും കാണുക.

പരിഹാരം

ആദ്യമായി, (1) മുതൽ (4) വരെ തന്നിരിക്കുന്ന രേഖീയ അസമതകളുടെ സാധ്യതാഭാഗം കാണുക. ചിത്രം 12.4.ൽ സാധ്യതാഭാഗം ABCD കാണാവുന്നതാണ്. ഇവിടെ സാധ്യതഭാഗം പരിബദ്ധമാണെന്ന് കാണാൻ കഴിയും. അതുപോലെ A,B,C,D എന്നീ മൂലബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (0, 10), (5, 5), (15,15), (0, 20) എന്നിവയാണ്.



മൂലബിന്ദു	Z - ന്റെ വില
A (0, 10)	90
B (5, 5)	60 ← ഏറ്റവും കുറഞ്ഞവില
C (15, 15)	180 } ← പരമാവധി വില (ബഹുവിധ പരിഹാരങ്ങൾ)
D (0, 20)	180 }

ചിത്രം 12.4

Z ന്റെ പരമാവധി വിലയും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയും നാം കണ്ടു. Z ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില 60 ആണ്. അത് സാധ്യതാഭാഗത്തെ B (5, 5) എന്ന ബിന്ദുവിലാണ്.

അതുപോലെ Z ന്റെ പരമാവധി വിലയായ 180 സാധ്യതാഭാഗത്തെ C (15, 15), D (0, 20) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലാണ്.

> **കുറിപ്പ്**
>
> ഉദാഹരണം 3 പരിശോധിച്ചാൽ, പ്രശ്നത്തിന് ബഹുവിധ പരിഹാരങ്ങൾ C, D എന്നീ മൂലബിന്ദുക്കളിൽ ഉണ്ടെന്ന് കാണാവുന്നതാണ്. അതായത് രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും ഒരേ പരമാവധി വില (180) യാണ് നൽകുന്നത്. ഇത്തരം സാഹചര്യങ്ങളിൽ CD എന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലും ഇതേ പരമാവധി വില ലഭിക്കുന്നതായി കാണാം. രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില ലഭിച്ചാലും ഇതു ശരിയായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 4

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദത്തിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

$$Z = -50x + 20y \quad \text{... (1)}$$

നിബന്ധനകൾ

$$2x - y \geq -5 \quad \text{... (2)}$$

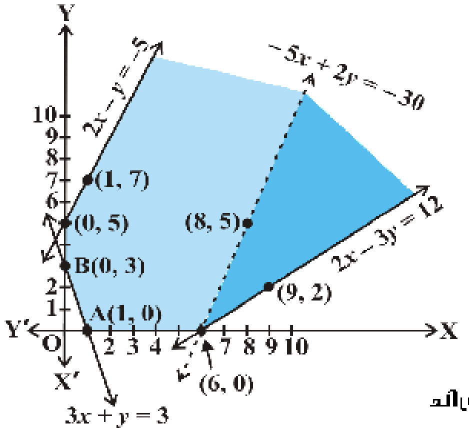
$$3x + y \geq 3 \quad \text{... (3)}$$

$$2x - 3y \leq 12 \quad \text{... (4)}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \text{... (5)}$$

പരിഹാരം

ആദ്യമായി, (2) മുതൽ (5) വരെയുള്ള രേഖീയ അസമതകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സാധ്യതാഭാഗം വരയ്ക്കാം. ചിത്രം 12.5 ൽ സാധ്യതാഭാഗം ഷെയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ സാധ്യതാഭാഗം അപരിബദ്ധം (unbounded) എന്ന് കാണാൻ കഴിയും.



മൂലബിന്ദു	$Z = -50x + 20y$
(0, 5)	100
(0, 3)	**60**
(1, 0)	**–50**
(6, 0)	**–300** ← ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില

ചിത്രം 12.5

പട്ടികയിൽ, (6, 0) എന്ന മൂലബിന്ദുവിൽ Z ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയായ -300 ലഭിക്കുന്നു എന്ന് കാണാം. എന്നാൽ, –300 ആണ് Z ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില എന്ന് പറയാൻ കഴിയുമോ? ഷേയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്ന ഭാഗം പരിബദ്ധമാണെങ്കിൽ Z ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില പട്ടികയിൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്ന Z ന്റെ ഏറ്റവും ചെറിയ വിലയാണെന്ന് പറയാമായിരുന്നു. പക്ഷെ ഇവിടെ സാധ്യതാഭാഗം പരിബദ്ധമല്ല. അതുകൊണ്ട് –300, Z ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില ആണോ അല്ലയോ എന്ന് പറയാൻ സാധ്യമല്ല. ഈ പ്രശ്നത്തിൽ തീരുമാനമെടുക്കുന്നതിനായി, ചുവടെ കൊടുക്കുന്ന അസമതയുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കേണ്ടത് ആവശ്യമാണ്.

$-50x + 20y < -300$ (മൂലബിന്ദു രീതിയുടെ സ്റ്റെപ്പ് 3 (ii) കാണുക)

അതായത്, $-5x + 2y < -30$ എന്ന അസമതയുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

അതിനുശേഷം ഈ അസമതയ്ക്കും സാധ്യതാഭാഗത്തിനും പൊതുവായി ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. പൊതുവായി ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ –300 Z-ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയല്ല, പൊതുബിന്ദുക്കൾ ഇല്ലെങ്കിൽ–300, Z ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയാണ്.

ചിത്രം 12.5 ശ്രദ്ധിച്ചാൽ പൊതുബിന്ദുക്കളുള്ളതായി കാണാം. അതുകൊണ്ട്, $Z = -50x + 20y$ എന്ന ഏകദത്തിന് തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾക്കു വിധേയമായി ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയില്ല.

മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണത്തിൽ $Z = -50x + 20y$ യുടെ പരമാവധി വില 100 ((0,5) എന്ന ബിന്ദുവിൽ) ആണെന്ന് പറയാൻ കഴിയുമോ? അതിനു വേണ്ടി $-50x + 20y > 100$ എന്ന അസമതയുടെ ഗ്രാഫിന് സാധ്യതാഭാഗവുമായി പൊതുബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ടോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

ഉദാഹരണം: 5

$$x - y \geq 8 \qquad \ldots(1)$$

$$3x + 5y \leq 15 \qquad \ldots(2)$$

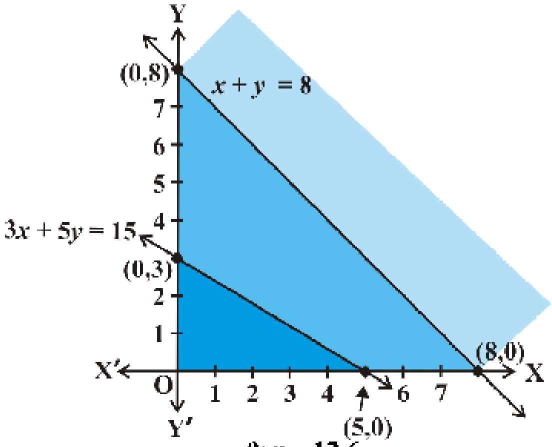
$$x \geq 0,\ y \geq 0 \qquad \ldots(3)$$

എന്നീ നിബന്ധനകൾക്കു വിധേയമായി $Z = 3x + 2y$ യുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില കാണുക.

പരിഹാരം

(1) മുതൽ (3) വരെയുള്ള അസമതകളുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാം. (ചിത്രം 12.6) ഇതിന് സാധ്യതാഭാഗം ഉണ്ടോ? എന്തുകൊണ്ട്?

ചിത്രം 12.6 ൽ, എല്ലാ നിബന്ധനകളും ഒരുമിച്ച് പാലിക്കപ്പെടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഒന്നും തന്നെയില്ലെന്നു കാണാവുന്നതാണ്. അതുകൊണ്ട്, ഈ പ്രശ്നത്തിന് സാധ്യതാഭാഗവും പരിഹാരവും ഇല്ല.



ചിത്രം 12.6

> ☛ **കുറിപ്പ്**
>
> മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്ന് രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നങ്ങളുടെ ചില പൊതുവായ സവിശേഷതകൾ നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം.
>
> (i) സാധ്യതാഭാഗം എല്ലായ്പ്പോഴും ഉത്തലഭാഗം (Convex region) ആയിരിക്കും.
>
> (ii) ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദത്തിന് (objective function) ഏറ്റവും കൂടിയ (കുറഞ്ഞ) പരിഹാരം ലഭിക്കുന്നത് സാധ്യതാഭാഗത്തെ ഏതെങ്കിലും ഒരു മൂലബിന്ദുവിലായിരിക്കും. രണ്ട് മൂലബിന്ദുക്കൾ ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദത്തിന് ഏറ്റവും കൂടിയ (കുറഞ്ഞ)വില നൽകുന്നുവെങ്കിൽ ഈ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലും ഇതേ വില ലഭിക്കുന്നതാണ്.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 12.1

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് പരിഹാരം കാണുക.

1. $x - y \le 4, x \ge 0, y \ge 0$ എന്നീ നിബന്ധനകൾക്കു വിധേയമായി $Z = 3x + 4y$ യുടെ ഏറ്റവും കൂടിയ വില കാണുക.
2. $x + 2y \le 8, 3x + 2y \le 12, x \ge 0, y \ge 0$ എന്നീ നിബന്ധനകൾക്കു വിധേയമായി $Z = -3x + 4y$ യുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില കാണുക.
3. $3x + 5y \le 15, 5x - 2y \le 10, x \ge 0, y \ge 0$ എന്നീ നിബന്ധനകൾക്കു വിധേയമായി $Z = 5x + 3y$ യുടെ ഏറ്റവും കൂടിയ വില കാണുക.
4. $x + 3y \ge 3, x + y \ge 2, x, y \ge 0$ ആണെങ്കിൽ $Z = 3x + 5y$ യുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില കാണുക.
5. $x + 2y \le 10, 3x + y \le 15, x, y \ge 0$ ആണെങ്കിൽ $Z = 3x + 2y$ യുടെ ഏറ്റവും കൂടിയ വില കാണുക
6. $2x + y \ge 3, x + 2y \ge 6, x, y \ge 0$ എന്നിവയ്ക്കു വിധേയമായി $Z = x + 2y$ യുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില കാണുക

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന (7, 8) ചോദ്യങ്ങൾക്ക് Z ന് ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ബിന്ദുക്കളിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില ലഭിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

7. $Z = 5x + 10y$ യുടെ ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയും കാണുക. നിബന്ധനകൾ: $x - 2y \le 120, x + y \ge 60, x - 2y \ge 0, x, y \ge 0$
8. $Z = x + 2y$ യുടെ ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയും കാണുക. നിബന്ധനകൾ : $x - 2y \ge 100, 2x - y \le 0, 2x - y \le 200; x, y \ge 0$.

9. $Z = -x + 2y$, യുടെ ഏറ്റവും കൂടിയ വില കാണുക.

നിബന്ധനകൾ : $x \geq 3, x + y \geq 5, x - 2y \geq 6, y \geq 0$

10. $Z = x + y$, യുടെ ഏറ്റവും കൂടിയ വില കാണുക

നിബന്ധനകൾ : $x - y \leq -1, -x + y \leq 0, x, y \geq 0$.

12.3 വിവിധതരത്തിലുള്ള രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നങ്ങൾ

പ്രധാനപ്പെട്ട ചില രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

1. **നിർമാണപ്രശ്നങ്ങൾ (Manufacturing problems):** ഇത്തരം പ്രശ്നങ്ങളിൽ, ഒരു സ്ഥാപനത്തിൽ നിർമിക്കുകയും വിൽക്കുകയും ചെയ്യുന്ന വ്യത്യസ്ത ഉൽപന്നങ്ങളിൽ ഓരോ ഉൽപന്നത്തിനും ആവശ്യമായ മനുഷ്യവിഭവം, യന്ത്രത്തിന്റെ പ്രവർത്തന സമയം, ഒരു യൂണിറ്റ് ഉത്പന്നം നിർമിക്കുന്നതിനാവശ്യമായ ജോലി, സമയം, സംഭരണസ്ഥലത്തിന്റെ അളവ് മുതലായവ നൽകിയാൽ, സ്ഥാപനത്തിന് പരമാവധി ലാഭം കിട്ടുന്നവിധത്തിൽ ഓരോ ഉൽപന്നവും എത്ര യൂണിറ്റ് വീതം നിർമിക്കണമെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുന്നു.

2. **ഭക്ഷണക്രമപ്രശ്നങ്ങൾ (Diet problems):** ഇത്തരം പ്രശ്നങ്ങളിൽ, ഒരു ആഹാരക്രമത്തിൽ ചേർക്കേണ്ട വ്യത്യസ്തതരത്തിലുള്ള പോഷകഘടകങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുത്തി ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം പരമാവധി കുറച്ച് ഭക്ഷണക്രമത്തിന്റെ ചെലവ് പരമാവധി കുറയുന്നവിധത്തിൽ ഓരോ ഘടകവും എത്ര യൂണിറ്റ് വീതം ഉൾപ്പെടുത്തണം എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുന്നു.

3. **ട്രാൻസ്പോർട്ടേഷൻപ്രശ്നങ്ങൾ (Transportation problems):** ഇത്തരം പ്രശ്നങ്ങളിൽ, വ്യത്യസ്തസ്ഥലങ്ങളിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഫാക്ടറികളിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്ത വിപണികളിലേക്ക് ഒരു ഉൽപന്നം അയയ്ക്കുന്നതിനുള്ള ഏറ്റവും ചെലവു കുറഞ്ഞ യാത്രാക്രമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുന്നു.

മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ചിട്ടുള്ള ചില രേഖീയപ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കണ്ടെത്താം.

ഉദാഹരണം: 6

(ഭക്ഷണക്രമവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടപ്രശ്നം): ഒരു ഭക്ഷണക്രമ നിർണയവിദഗ്ദ്ധൻ രണ്ടുതരത്തിലുള്ള പോഷകഘടകങ്ങൾ ചേർത്ത് ഒരു മിശ്രിതം ഉണ്ടാക്കുന്നു. മിശ്രിതത്തിൽ കുറഞ്ഞത് 8 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ A യും 10 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ C യും ഉണ്ടായിരിക്കണം. ഒന്നാമത്തെ പോഷകാരത്തിൽ കി.ഗ്രാമിന് 2 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ A യും 1 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ C യും അടങ്ങിയിട്ടുണ്ട്. രണ്ടാമത്തെ പോഷകാഹാരത്തിൽ കിലോഗ്രാമിന് 1 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൽ A യും 2 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൽ C യും അടങ്ങിയിട്ടു

ണ്ട്. ഒന്നാമത്തെ രീതിയിലുള്ള പോഷകാഹാരം വാങ്ങുന്നതിന് കി.ഗ്രാമിന് 50 രൂപയും രണ്ടാമത്തേതിന് 70 രൂപയും ചെലവാകുന്നു എങ്കിൽ ഒരു രേഖീയപ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നം രൂപവൽക്കരിക്കുക.

പരിഹാരം

പോഷകാഹാരം 'I', x കി.ഗ്രാമും പോഷകാഹാരം 'II', y കി.ഗ്രാമും മിശ്രിതത്തിൽ അടങ്ങിയിട്ടുണ്ടെന്ന് കരുതുക. അതുകൊണ്ട് $x \geq 0, y \geq 0$ എന്നുപറയാം.

തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കാം.

വിഭവങ്ങൾ	ഭക്ഷണഘടകം I (x)	II (y)	ആവശ്യം
വിറ്റാമിൻ A (യൂണിറ്റ്/കി.ഗ്രാം)	2	1	8
വിറ്റാമിൻ C (യൂണിറ്റ്/കി.ഗ്രാം)	1	2	10
ചെലവ് (രൂപ/കി.ഗ്രാം)	50	70	

മിശ്രിതത്തിൽ കുറഞ്ഞത് 8 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ A യും 10 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ C യും ആവശ്യമുള്ളതുകൊണ്ട്, താഴെപറയുന്ന നിബന്ധനകൾ കണ്ടെത്താം.

$$2x - y \geq 8$$

$$x + 2y \geq 10$$

ഭക്ഷണഘടകം 'I', x കി.ഗ്രാമും ഭക്ഷണഘടകം 'II', y കി.ഗ്രാമും വാങ്ങുന്നതിനുള്ള ആകെ ചെലവ് Z ആയാൽ,

$Z = 50x + 70y$ ആയിരിക്കും.

അതിനാൽ, ഈ പ്രശ്നത്തിന്റെ ഗണിതരൂപം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം.

$Z = 50x + 70y$ ... (1) എന്ന ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദത്തിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില കാണുക.

നിബന്ധനകൾ:

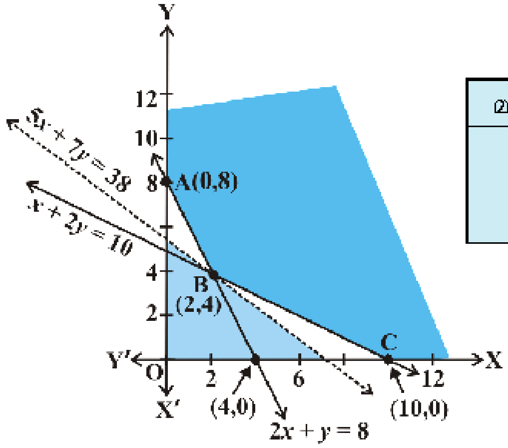
$$2x - y \geq 8 \quad \ldots (2)$$

$$x + 2y \geq 10 \quad \ldots (3)$$

$$x, y \geq 0 \quad \ldots (4)$$

(2) മുതൽ (4) വരെയുള്ള അസമതകളുടെ ഗ്രാഫ് വരച്ചാൽ ചിത്രം 12.7 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ സാധ്യതാഭാഗം കണ്ടെത്താൻ കഴിയും.

ഇവിടെയും സാധ്യതാഭാഗം പരിബദ്ധമല്ല. A(0,8), B(2,4), C(10,0) എന്നീ മൂലബിന്ദുക്കളിൽ Z ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കാം.



മൂലബിന്ദു	$Z = 50x + 70y$	
(0,8)	560	
(2,4)	**380**	← ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത്
(10,0)	500	

ചിത്രം 12.7

പട്ടികയിൽ Z ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില 380 ((2,4) എന്ന ബിന്ദുവിൽ) ആണെന്ന് കാണാം. എന്നാൽ Z ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില 380 ആണെന്ന് പറയാൻ കഴിയുമോ? ഇവിടെ സാധ്യതാഭാഗം പരിബദ്ധമല്ല എന്ന് ഓർക്കണം. അതുകൊണ്ട്

$50x \quad 70y < 380$ അല്ലെങ്കിൽ $5x \quad 7y < 38$ എന്ന അസമതയുടെ ഗ്രാഫ് കൂടി വരയ്ക്കണം.

പ്രസ്തുത അസമതയ്ക്ക് സാധ്യതാഭാഗവുമായി പൊതുബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ടോയെന്ന് പരിശോധിക്കേണ്ടതാണ്. ചിത്രം12.7 ൽ പൊതുവായ ബിന്ദുക്കൾ ഒന്നും തന്നെയില്ലെന്ന് മനസ്സിലാക്കാവുന്നതാണ്.

അതിനാൽ Z ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില (2, 4) എന്ന ബിന്ദുവിലാണെന്നും 380 ആണെന്നും പറയാൻ കഴിയും. അതുകൊണ്ട് ഒരു ഭക്ഷണക്രമ നിർണയ വിദഗ്ദ്ധന് ഏറ്റവും യുക്തമായ മിശ്രിതം തയാറാക്കുന്നതിന് ഭക്ഷണഘടകം 'I'. 2 കി.ഗ്രാമും ഭക്ഷണഘടകം 'II', 4 കി.ഗ്രാമും ചേർക്കണം. മിശ്രിതത്തിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില 380 രൂപയായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 7

വിഹിതപ്രശ്നം (Allocation problem): ഒരു കർഷക സഹകരണ സംഘത്തിന് X, Y എന്നീ വിളകളുടെ ഉൽപാദനത്തിനായി 50 ഹെക്ടർ സ്ഥലമുണ്ട്. X, Y എന്നീ വിളകൾക്ക് ഹെക്ടർ ഒന്നിന് യഥാക്രമം 10,500 രൂപയും 9,000 രൂപയും ലാഭം കിട്ടുമെന്ന്

കണക്കാക്കപ്പെടുന്നു. കീടങ്ങളെ നിയന്ത്രിക്കുന്നതിനായി X, Y വിളകൾക്ക് ഹെക്ടർ ഒന്നിന് യഥാക്രമം 20 ലിറ്ററും 10 ലിറ്ററും വീതം ദ്രവ കളനാശിനി തളിക്കണം. വിള ഭൂമിയിലേക്കുള്ള ജലസ്രോതസ്സായ കുളത്തിൽ നിന്നും ജലം ഉപയോഗിക്കുന്ന മത്സ്യങ്ങളെയും വന്യജീവികളെയും സംരക്ഷിക്കുന്നതിനായി 800 ലിറ്ററിൽ കൂടുതൽ കളനാശിനി ഉപയോഗിക്കാൻ പാടില്ല. അങ്ങനെയെങ്കിൽ സംഘത്തിന് പരമാവധി ലാഭം കിട്ടുന്നവിധത്തിൽ ഓരോ വിളയ്ക്കും എത്രമാത്രം ഭൂമി നീക്കി വയ്ക്കണം എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

X എന്ന വിളയ്ക്ക് x ഹെക്ടറും Y എന്ന വിളയ്ക്ക് y ഹെക്ടറും നീക്കിവയ്ക്കാം. തീർച്ചയായും $x \geq 0$, $y \geq 0$ ആയിരിക്കും.

X വിളയ്ക്ക് ഹെക്ടറൊന്നിന് കിട്ടുന്ന ലാഭം = 10500 രൂപ

Y വിളയ്ക്ക് ഹെക്ടറൊന്നിന് കിട്ടുന്ന ലാഭം = 9000 രൂപ

അതുകൊണ്ട്, ആകെ ലാഭം = $10500x + 9000y$ രൂപ

പ്രശ്നത്തിന്റെ ഗണിതരൂപം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു

$Z = 10500x + 9000y$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ പരമാവധി വില കാണുക

നിബന്ധനകൾ:

$$x + y \leq 50 \quad \text{(ഭൂമിയെ സംബന്ധിച്ച നിബന്ധന)} \qquad \ldots (1)$$

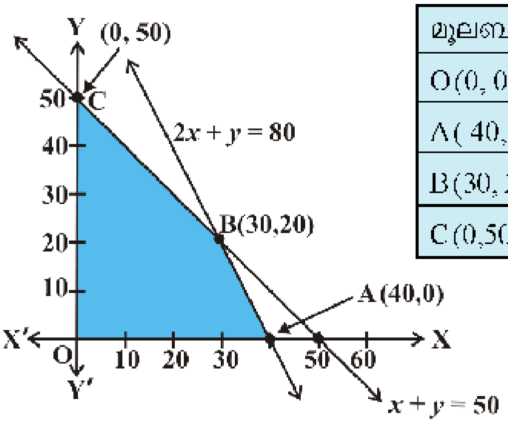
$$20x + 10y \leq 800 \quad \text{(കളനാശിനിയെ സംബന്ധിച്ച നിബന്ധന)}$$

അല്ലെങ്കിൽ, $$2x + y \leq 80 \qquad \ldots (2)$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0 \quad \text{(അന്യൂനസംഖ്യാ നിബന്ധന)} \qquad \ldots (3)$$

(1) മുതൽ (3) വരെയുള്ള അസമതകളുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക ചിത്രം 12.8 -ൽ സാധ്യതാഭാഗം OABC ഷെയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്നു. സാധ്യതാഭാഗം പരിബദ്ധമാണെന്ന് കാണാം.

O, A, B, C എന്നീ മൂലബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (0, 0), (40, 0), (30, 20), (0, 50) എന്നിവയാണ്. ഈ ശീർഷങ്ങളിൽ $Z = 10500x + 9000y$ എന്ന ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദത്തിന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കാം. അതിൽ നിന്നും Z ന്റെ പരമാവധി വില കണ്ടുപിടിക്കാം.



മൂലബിന്ദു	$Z = 10500x + 9000y$	
O(0, 0)	0	
A(40, 0)	420000	
B(30, 20)	**495000**	← പരമാവധി വില
C (0,50)	450000	

ചിത്രം 12.8

അതിനാൽ X വിളയ്ക്ക് 30 ഹെക്ടറും Y വിളയ്ക്ക് 20 ഹെക്ടറും നീക്കി വച്ചാൽ സംഘത്തിന് പരമാവധി ലാഭമായ 4,95,000 രൂപ ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം: 8

നിർമാണപ്രശ്നം (Manufacturing problem): ഒരു നിർമാണ കമ്പനി ഒരു ഉൽപന്നത്തിന്റെ രണ്ടു മോഡലുകൾ A യും B യും നിർമിക്കുന്നു. മോഡൽ A ഓരോന്നും രൂപപ്പെടുത്തുന്നതിന് 9 മണിക്കൂറും പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് 3 മണിക്കൂറും ആവശ്യമാണ്. മോഡൽ B ഓരോന്നും രൂപപ്പെടുത്തുന്നതിന് 12 മണിക്കൂറും പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന് 3 മണിക്കൂറും ആവശ്യമാണ്. രൂപപ്പെടുത്തുന്നതിനും പൂർത്തിയാക്കുന്നതിനും പരമാവധി ജോലി യഥാക്രമം 180 ഉം 30 മണിക്കൂറാണ് ഉള്ളത്. മോഡൽ A ഒന്നിന് 8000 രൂപയും മോഡൽ B ഒന്നിന് 12000 രൂപയും വീതമാണ് ലാഭം കിട്ടുന്നത്. എങ്കിൽ പരമാവധി ലാഭം കിട്ടുന്നവിധത്തിൽ മോഡൽ Aയും മോഡൽ Bയും ആഴ്ചയിലെത്ര എണ്ണം വീതം നിർമിക്കണം? ഒരു ആഴ്ചയിലെ പരമാവധി ലാഭം എന്തായിരിക്കും?

പരിഹാരം

മോഡൽ A, x എണ്ണം വീതവും മോഡൽ B, y എണ്ണം വീതവും നിർമിക്കുന്നു എന്നു കരുതാം.

ആകെ ലാഭം (രൂപയിൽ) = $8000x + 12000y$ ആയിരിക്കും.

അതായത്, $Z = 8000x + 12000y$

തന്നിരിക്കുന്ന പ്രശ്നത്തിന്റെ ഗണിതരൂപം ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ എഴുതാം.

$Z = 8000x + 12000y$ യുടെ പരമാവധി വില കാണുക ... (1)

നിബന്ധനകൾ:

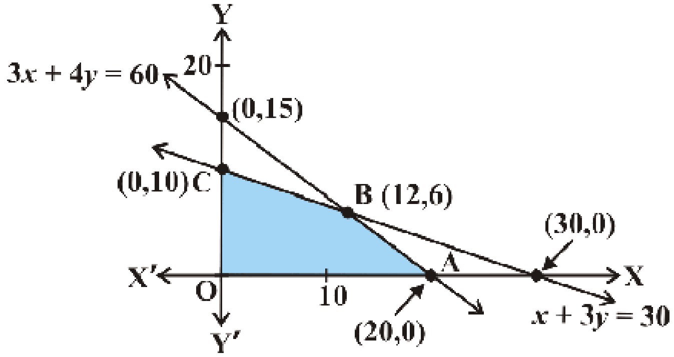
$9x + 12y \leq 180$ (രൂപപ്പെടുത്തുന്നതിന്റെ നിബന്ധന)

അല്ലെങ്കിൽ, $3x + 4y \leq 60$ ... (2)

$x + 3y \leq 30$ (പൂർത്തിയാക്കുന്നതിന്റെ നിബന്ധന) ... (3)

$x \geq 0, y \geq 0$ (അന്യൂന നിബന്ധന) ... (4)

(2) മുതൽ (4) വരെയുള്ള അസമതകൾ നിശ്ചയിക്കുന്ന സാധ്യതാഭാഗം ചിത്രം 12.9 ൽ ഷേയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ സാധ്യതാഭാഗം പരിബദ്ധമാണെന്ന് കാണാം.



ചിത്രം 12.9

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ ഓരോ മൂലബിന്ദുവിലെയും Z ന്റെ വില കണ്ടുപിടിച്ചിരിക്കുന്നത് കാണാം.

മൂലബിന്ദു	$Z = 8000x + 12000y$	
O (0, 0)	0	
A (20, 0)	160000	
B (12, 6)	**168000** ←	പരമാവധി വില
C (0, 10)	120000	

Z ന്റെ പരമാവധി വില 1,68,000 രൂപ (B (12, 6) എന്ന ബിന്ദുവിൽ) ആണെന്ന് കാണാം. അതുകൊണ്ട് കമ്പനി മോഡൽ A, 12 എണ്ണവും മോഡൽ B, 6 എണ്ണവും നിർമിച്ചാൽ പരമാവധി ലാഭമുണ്ടാക്കാം. പരമാവധി ലാഭം 1,68,000 രൂപയായിരിക്കും.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 12.2

1. രേഷ്മ P, Q എന്നീ ഭക്ഷണങ്ങൾ ചേർത്ത് ഒരു മിശ്രിതം ഉണ്ടാക്കാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. മിശ്രിതത്തിൽ കുറഞ്ഞത് 8 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ A യും 11 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ B യും ഉണ്ടായിരിക്കണം. ഭക്ഷണം P യ്ക്ക് കി.ഗ്രാമിന് 60 രൂപയും ഭക്ഷണം Qന് കി.ഗ്രാമിന് 80രൂപയും ചെലവാകും. ഭക്ഷണം P യിൽ കി.ഗ്രാമിന് 3 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ A യും 5 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ B യും ഉള്ളപ്പോൾ ഭക്ഷണം Q വിൽ കി. ഗ്രാമിന് 4 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ A യും 2 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ Bയും ഉണ്ട്. മിശ്രിതത്തിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചെലവ് കാണുക?

2. ഒരു തരം കേക്കുണ്ടാക്കുന്നതിന് 200 ഗ്രാം ധാന്യവും 25ഗ്രാം കൊഴുപ്പും ആവശ്യമാണ്. എന്നാൽ മറ്റൊരുതരം കേക്കുണ്ടാക്കാൻ 100 ഗ്രാം ധാന്യവും 50 ഗ്രാം കൊഴുപ്പും വേണം. കേക്കുണ്ടാക്കുന്നതിനാവശ്യമായ മറ്റ് വിഭവങ്ങൾക്ക് യാതൊരു കുറവുമില്ല എന്ന നിഗമനത്തിൽ 5കി.ഗ്രാം ധാന്യവും 1 കി.ഗ്രാം കൊഴുപ്പും ഉപയോഗിച്ച് നിർമിക്കാവുന്ന പരമാവധി കേക്കുകളുടെ എണ്ണം എത്ര?

3. ഒരു ഫാക്ടറിയിൽ ടെന്നീസ് റാക്കറ്റുകളും ക്രിക്കറ്റ് ബാറ്റുകളും ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഒരു ടെന്നീസ് റാക്കറ്റ് ഉണ്ടാക്കുന്നതിന് യന്ത്രസമയം 1.5 മണിക്കൂറും വിദഗ്ദ്ധന്റെ സമയം 3 മണിക്കൂറും ആവശ്യമുള്ളപ്പോൾ ഒരു ക്രിക്കറ്റ് ബാറ്റ് ഉണ്ടാക്കുവാൻ യന്ത്രസമയം 3 മണിക്കൂറും വിദഗ്ദ്ധന്റെ സമയം 1 മണിക്കൂറും ആവശ്യമാണ്. ഒരു ദിവസം,42 മണിക്കൂറിൽ കൂടുതൽ യന്ത്രസമയവും 24 മണിക്കൂറിൽ കൂടുതൽ വിദഗ്ദ്ധന്റെ സമയവും ഫാക്ടറിയിൽ ലഭ്യമല്ല.

   (i) ഫാക്ടറി പൂർണമായി പ്രവർത്തിപ്പിച്ചാൽ എത്ര റാക്കറ്റുകളും ബാറ്റുകളും നിർമിക്കാം?

   (ii) ഒരു റാക്കറ്റിന് 20 രൂപയും ഒരു ബാറ്റിന് 10 രൂപയും ലാഭം കിട്ടുമെങ്കിൽ ഫാക്ടറി പൂർണമായി പ്രവർത്തിച്ചാൽ, പരമാവധി ലാഭം എന്തുകിട്ടും?

4. ഒരു ഉൽപാദകൻ നട്ടും ബോൾട്ടും നിർമിക്കുന്നു. ഒരു സെറ്റ് നട്ട് നിർമിക്കാൻ യന്ത്രം A ഒരു മണിക്കൂറും യന്ത്രം B മൂന്നു മണിക്കൂറും പ്രവർത്തിപ്പിക്കണം. ഒരു സെറ്റ് ബോൾട്ട് നിർമിക്കാൻ യന്ത്രം A മൂന്നു മണിക്കൂറും യന്ത്രം B ഒരു മണിക്കൂറും പ്രവർത്തിപ്പിക്കണം. ഒരു സെറ്റ് നട്ടിന് 17.50 രൂപയും ഒരു സെറ്റ് ബോൾട്ടിന് 7 രൂപയും ലാഭം കിട്ടുന്നു. രണ്ട് യന്ത്രങ്ങളും ഒരു ദിവസം പരമാവധി പന്ത്രണ്ട് മണിക്കൂർ പ്രവർത്തിപ്പിക്കുന്നു എങ്കിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ ലാഭം കിട്ടുന്നതിന് അദ്ദേഹം ഒരു ദിവസം എത്ര സെറ്റ് വീതം നട്ടും ബോൾട്ടും നിർമിക്കണം?

5. ഒരു ഫാക്ടറി A, B എന്നീ രണ്ടു തരത്തിലുള്ള സ്ക്രൂ നിർമിക്കുന്നു. ഓരോ തരത്തിലുള്ള സ്ക്രൂ നിർമാണത്തിനും ഒരു ഓട്ടോമാറ്റിക് യന്ത്രവും കൈ കൊണ്ട് പ്രവർത്തിപ്പിക്കുന്ന യന്ത്രവും ഉപയോഗിക്കേണ്ടതുണ്ട്. സ്ക്രൂ A ഒരു സെറ്റ് നിർമിക്കുന്നതിന് ഓട്ടോമാറ്റിക് യന്ത്രം 4 മിനിറ്റും കൈകൊണ്ട് പ്രവർത്തിപ്പിക്കുന്ന യന്ത്രം 6 മിനിറ്റും ഉപയോഗിക്കണം. എന്നാൽ സ്ക്രൂ B ഒരു സെറ്റ് നിർമിക്കുന്നതിന് ഓട്ടോമാറ്റിക് യന്ത്രം 6 മിനിറ്റും കൈ കൊണ്ട് പ്രവർത്തിപ്പിക്കുന്ന യന്ത്രം 3 മിനിറ്റും പ്രവർത്തിപ്പിക്കണം. ഓരോ യന്ത്രവും ഏതു ദിവസവും പരമാവധി 4 മണിക്കൂർ മാത്രമേ പ്രവർത്തിക്കുകയുള്ളൂ. ഉത്പാദകന് ഒരു സെറ്റ് സ്ക്രൂ A വിൽക്കുമ്പോൾ 7 രൂപയും ഒരു സെറ്റ് സ്ക്രൂ B വിൽക്കുമ്പോൾ 10 രൂപയും ലാഭം കിട്ടുന്നു. നിർമിക്കുന്ന എല്ലാ സ്ക്രൂവും വിറ്റുപോകുന്നു എന്ന നിഗമനത്തിൽ, പരമാവധി ലാഭം കിട്ടുന്നതിന് ഫാക്ടറി ഉടമ ഓരോ തരത്തിലുള്ള സ്ക്രൂവും എത്ര സെറ്റ് വീതം ഉത്പാദിപ്പിക്കണം? പരമാവധി ലാഭം കണക്കാക്കുക.

6. ഒരു കുടിൽ വ്യവസായത്തിൽ പീഠ വിളക്കുകളും (pedestal lamps) അവയ്ക്ക് തടികൊണ്ടുള്ള കുടകളും (wooden shades) നിർമിക്കുന്നു. ഇവ ഓരോന്നും നിർമിക്കുന്നതിന് അരക്കൽ/മുറിക്കൽ യന്ത്രവും സ്പ്രേയറും (sprayer) ആവശ്യമാണ്. ഒരു പീഠവിളക്ക് നിർമിക്കുന്നതിന് 2 മണിക്കൂർ അരക്കൽ/മുറിക്കൽ യന്ത്രവും 3 മണിക്കൂർ സ്പ്രേയറും പ്രവർത്തിപ്പിക്കണം. ഒരു കുട നിർമിക്കുന്നതിന് 1 മണിക്കൂർ അരക്കൽ/മുറിക്കൽ യന്ത്രവും 2 മണിക്കൂർ സ്പ്രയറും പ്രവർത്തിപ്പിക്കണം. ഏത് ദിവസവും സ്പ്രേയർ പരമാവധി 20 മണിക്കൂറുകളും അരക്കൽ/മുറിക്കൽ യന്ത്രം പരമാവധി 12 മണിക്കൂറുകളും ലഭ്യമാണ്. ഒരു വിളക്ക് വിൽക്കുമ്പോൾ 5 രൂപയും ഒരു കുട വിൽക്കുമ്പോൾ 3 രൂപയും ലാഭം കിട്ടുന്നു. ഉത്പാദകൻ നിർമിക്കുന്ന എല്ലാ വിളക്കുകളും കുടകളും വിറ്റുപോകും എന്ന നിഗമനത്തിൽ, പരമാവധി ലാഭം കിട്ടുന്നതിന് ഒരു ദിവസത്തെ നിർമാണം അദ്ദേഹം എങ്ങനെ ക്രമീകരിക്കണം?

7. ഒരു കമ്പനി പ്ലൈവുഡ് കൊണ്ട് രണ്ട് തരത്തിലുള്ള നവീനമായ സ്മരണികകൾ (souvenirs) നിർമിക്കുന്നു. സ്മരണിക A ഓരോന്നും നിർമിക്കുമ്പോൾ മുറിക്കുന്നതിന് 5 മിനിറ്റും ക്രമീകരിക്കുന്നതിന് 10 മിനിറ്റും എടുക്കുന്നു. അതേസമയം സ്മരണിക B മുറിക്കുന്നതിനും ക്രമീകരിക്കുന്നതിനും 8 മിനിറ്റു വീതം എടുക്കുന്നു. മുറിക്കുന്നതിന് 3 മണിക്കൂർ 20 മിനിറ്റും ക്രമീകരിക്കുന്നതിന് 4 മണിക്കൂറും ലഭ്യമാണ്. സ്മരണിക A യ്ക്ക് 5 രൂപയും സ്മരണിക B യ്ക്ക് 6 രൂപയും ഓരോന്നിന് ലാഭം കിട്ടുന്നു. പരമാവധി ലാഭം കിട്ടുന്നതിനായി ഓരോ തരത്തിലുള്ള സ്മരണികയും എത്ര വീതം നിർമിക്കണം?

8. ഒരു വ്യാപാരി രണ്ടുതരത്തിലുള്ള കമ്പ്യൂട്ടറുകൾ വിൽക്കുവാൻ താത്പര്യപ്പെടുന്നു. ഒന്ന് ഡെസ്ക്ടോപ്പും മറ്റേത് ലാപ്ടോപ്പുമാണ്. അവയ്ക്ക് യഥാക്രമം 25000 രൂപയും 40000 രൂപയും ചെലവു വരും. കമ്പ്യൂട്ടറുകളുടെ ആകെ പ്രതിമാസ ആവശ്യം 250 എണ്ണമാണെന്ന് കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അദ്ദേഹത്തിന് 70 ലക്ഷം രൂപയിൽ കൂടുതൽ നീക്കിവയ്ക്കാൻ താൽപര്യമില്ല. ഡെസ്ക്ടോപ്പിന് 4500 രൂപയും ലാപ്പ് ടോപ്പിന് 5000 രൂപയും ലാഭം കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ പരമാവധി ലാഭം കിട്ടുന്നതിന് ഓരോ മാതൃകയിലുമുള്ള എത്ര വീതം കമ്പ്യൂട്ടറുകൾ അദ്ദേഹം ശേഖരിക്കണം?

9. ഒരു ഭക്ഷണക്രമത്തിൽ വിറ്റാമിൻ A 80 യൂണിറ്റും ധാതുക്കൾ 100 യൂണിറ്റും ഉണ്ടായിരിക്കണം. രണ്ടുതരത്തിലുള്ള ഭക്ഷണങ്ങൾ F_1, F_2 എന്നിവ ലഭ്യമാണ്. ഭക്ഷണം F_1ന് യൂണിറ്റിന് 4 രൂപയും ഭക്ഷണം F_2 ന് യൂണിറ്റിന് 6 രൂപയും ചെലവ് വരും. ഭക്ഷണം F_1ന്റെ ഒരു യൂണിറ്റിൽ വിറ്റാമിൻ A മൂന്നു യൂണിറ്റും ധാതുക്കൾ 4 യൂണിറ്റും ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. ഭക്ഷണം F_2 ന്റെ ഒരു യൂണിറ്റിൽ വിറ്റാമിൻ A. 6 യൂണിറ്റും ധാതുക്കൾ 4 യൂണിറ്റും ഉണ്ട്. ഇതിനെ ഒരു രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നമായി രൂപപ്പെടുത്തുക. ഈ രണ്ട് ഭക്ഷണങ്ങളുടെ മിശ്രിതത്തിന്റെ ചെലവ് ഏറ്റവും കുറയുന്നവിധത്തിൽ പരിഹാരം കണ്ടെത്തുക. ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചെലവും കണ്ടെത്തുക.

10. F_1, F_2 എന്നീ രണ്ടു തരത്തിലുള്ള വളങ്ങളുണ്ട്. F_1–ൽ 10% നൈട്രജനും 6% ഫോസ്ഫോറിക് ആസിഡും ഉണ്ട്. എന്നാൽ F_2–ൽ 5% നൈട്രജനും 10% ഫോസ്ഫോറിക് ആസിഡും ഉണ്ട്. മണ്ണ് പരിശോധിച്ചശേഷം ഒരു കർഷക സ്ത്രീയ്ക്ക് തന്റെ ഭൂമിയിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് 14 കി.ഗ്രാം നൈട്രജനും 14 കി.ഗ്രാം ഫോസ്ഫോറിക് ആസിഡും ആവശ്യമാണെന്ന് കണ്ടെത്തി. F_1 കി.ഗ്രാമിന് 6 രൂപയും F_2 കി.ഗ്രാമിന് 5 രൂപയും ചെലവാകും എങ്കിൽ ചെലവ് ഏറ്റവും കുറവു വരുന്നവിധത്തിൽ ഓരോ തരത്തിലുമുള്ള വളം എത്രമാത്രം ഉപയോഗിക്കണം? ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചെലവ് എത്ര?

11. $2x \quad y \le 10$, $x \quad 3y \le 15$. $x, y \ge 0$ എന്നീ രേഖീയ അസമതകളാൽ നിശ്ചയിക്കപ്പെടുന്ന സാധ്യതാഭാഗത്തിന്റെ മൂലബിന്ദുക്കൾ (0, 0), (5, 0), (3, 4), (0, 5) എന്നിവയാണ്. $Z = px + qy$. $p, q > 0$ ആയാൽ (3, 4). (0, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ Z ന്റെ പരമാവധിവില വരുന്നുവെങ്കിൽ p ഉം q ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്ത്?

(A) $p = q$ (B) $p = 2q$ (C) $p = 3q$ (D) $q = 3p$

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം: 9

(ഭക്ഷണക്രമവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടപ്രശ്നം (Diet problem)) ഒരു ഭക്ഷണനിർണയ വിദഗ്ദ്ധൻ രണ്ട് തരത്തിലുള്ള ഭക്ഷണങ്ങൾ (P, Q) ഉപയോഗിച്ച് ഒരു പ്രത്യേക ഭക്ഷണക്രമം ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഭക്ഷണം P യുടെ ഓരോ പാക്കറ്റിലും (30 ഗ്രാം) 12 യൂണിറ്റ് കാത്സ്യവും 4 യൂണിറ്റ് ഇരുമ്പും (iron) 6 യൂണിറ്റ് കൊളസ്ട്രോളും 6 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ A യും ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഭക്ഷണം Q വിന്റെ ഓരോ പാക്കറ്റിലും 3 യൂണിറ്റ് കാത്സ്യവും 20 യൂണിറ്റ് ഇരുമ്പും 4 യൂണിറ്റ് കൊളസ്ട്രോളും 3 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ A യും അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു. ഭക്ഷണക്രമത്തിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് 240 യൂണിറ്റ് കാത്സ്യവും, 460 യൂണിറ്റ് ഇരുമ്പും ഉണ്ടായിരിക്കണം. എന്നാൽ കൊളസ്ട്രോൾ പരമാവധി 300 യൂണിറ്റ് വരെ മാത്രമേ ആകാവൂ. വിറ്റാമിൻ A യുടെ അളവ് ഏറ്റവും കുറവു വരുന്നവിധത്തിൽ ഓരോ ഭക്ഷണവും (P യും Q വും) എത്ര പാക്കറ്റ് വീതം ഭക്ഷണക്രമത്തിൽ ഉണ്ടാകണം? വിറ്റാമിൻ A യുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ അളവ് എന്താണ്?

പരിഹാരം

ഭക്ഷണം P യുടെയും ഭക്ഷണം Q വിന്റെയും പാക്കറ്റുകളുടെ എണ്ണം യഥാക്രമം x ഉം y ഉം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. $x \geq 0, y \geq 0$. ആണെന്ന് തീർച്ചയായും പറയാം.

പ്രശ്നത്തിന്റെ ഗണിതരൂപം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതു പോലെ എഴുതാം.

ഇവിടെ $Z = 6x + 3y$ യുടെ (വിറ്റാമിൻ A) ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില കാണണം.

നിബന്ധനകൾ

$12x + 3y \geq 240$ (കാത്സ്യത്തിന്റെ നിബന്ധന)

അതായത്, $4x + y \geq 80$ ...(1)

$4x + 20y \geq 460$ (ഇരുമ്പിന്റെ നിബന്ധന)

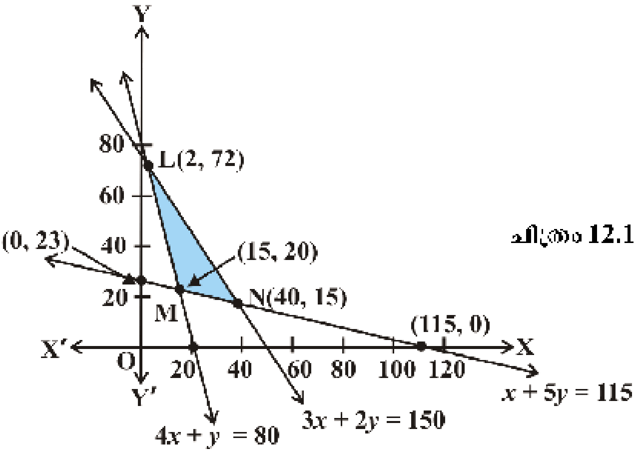
അതായത്, $x + 5y \geq 115$ ...(2)

$6x + 4y \leq 300$ (കൊളസ്ട്രോളിന്റെ നിബന്ധന)

$3x + 2y \leq 150$ ...(3)

$x \geq 0, y \geq 0$ ...(4)

(1) മുതൽ (4) വരെയുള്ള അസമതകളുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാം (1) മുതൽ (4) വരെയുള്ള നിബന്ധനകളുടെ സാധ്യതാ ഭാഗം ചിത്രം 12.10 ൽ ഷേയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്നു. സാധ്യതാഭാഗം പരിബദ്ധമാണ്.



ചിത്രം 12.10

മൂലബിന്ദുക്കളായ L, M, N എന്നിവയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (2, 72), (15, 20), (40, 15) എന്നിവയാണ്. ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ Z ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കാം.

മൂലബിന്ദു	$Z = 6x + 3y$	
(2, 72)	228	
(15, 20)	**150** ←	ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില
(40, 15)	285	

പട്ടികയിൽ നിന്ന്, (15, 20) എന്ന ബിന്ദുവിൽ Z ന് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില വരുന്നതായി കാണാം. അതുകൊണ്ട് ഭക്ഷണം P-15 പാക്കറ്റുകളും ഭക്ഷണം Q-20 പാക്കറ്റുകളും ഉൾപ്പെടുത്തിയാൽ ഈ ഭക്ഷണക്രമത്തിൽ വിറ്റാമിൻ A യുടെ അളവ് ഏറ്റവും കുറയ്ക്കുവാൻ കഴിയും. വിറ്റാമിൻ A യുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ അളവ് 150 യൂണിറ്റ് ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 10

(നിർമാണപ്രശ്നം (Manufacturing problem)) ഒരു ഉൽപാദകൻ തന്റെ ഫാക്ടറിയിൽ മൂന്ന് യന്ത്രങ്ങൾ (I, II, III) സ്ഥാപിച്ചു. യന്ത്രം I ഉം II ഉം ഒരു ദിവസം പരമാവധി 12 മണിക്കൂർ വരെ പ്രവർത്തിപ്പിക്കാം. എന്നാൽ യന്ത്രം III ഒരു ദിവസം കുറഞ്ഞത് 5 മണിക്കൂറെങ്കിലും പ്രവർത്തിപ്പിക്കണം. ഈ മൂന്ന് യന്ത്രങ്ങളും ആവശ്യമായി വരുന്ന രണ്ട് ഉൽപന്നങ്ങൾ (M, N) മാത്രമേ അവർ ഉത്പാദിപ്പിക്കുന്നുള്ളൂ. M, N എന്നീ ഉത്പന്നങ്ങളുടെ ഓരോ യൂണിറ്റും നിർമിക്കുന്നതിന് ഓരോ യന്ത്രവും എടുക്കുന്ന സമയം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഉത്പന്നങ്ങൾ	ഓരോ യന്ത്രത്തിനും ആവശ്യമായ മണിക്കൂറുകൾ		
	I	II	III
M	1	2	1
N	2	1	1.25

M, N എന്നീ ഉൽപന്നങ്ങളിൽ ഓരോന്നിനും യഥാക്രമം 600 രൂപ, 400 രൂപ എന്നിങ്ങനെ അവർക്ക് ലാഭം കിട്ടുന്നു. നിർമിക്കുന്ന എല്ലാ ഉൽപന്നങ്ങളും വിറ്റുപോകും എന്ന നിഗമനത്തിൽ, പരമാവധി ലാഭം കിട്ടുന്നതിന് M, N എന്നീ ഉത്പന്നങ്ങൾ എത്ര വീതം നിർമിക്കണം? പരമാവധി ലാഭം എത്രയായിരിക്കും?

പരിഹാരം

M, N എന്നീ ഉൽപന്നങ്ങൾ യഥാക്രമം x എണ്ണവും y എണ്ണവും ഉൽപാദിപ്പിക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ.

നിർമാണത്തിനുള്ള ആകെ ലാഭം $- 600\,x + 400\,y$ രൂപ

പ്രശ്നത്തിന്റെ ഗണിതരൂപം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

$Z - 600\,x - 400\,y$ യുടെ പരമാവധി വില കാണുക

നിബന്ധനകൾ

$x - 2y \leq 12$ (യന്ത്രം I ന്റെ നിബന്ധന) ... (1)

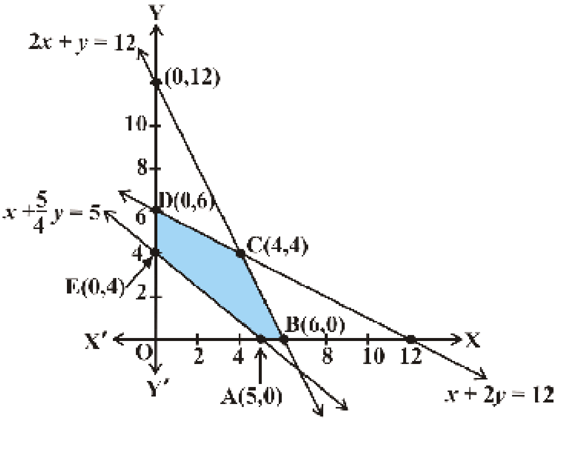
$2x - y \leq 12$ (യന്ത്രം II ന്റെ നിബന്ധന) ... (2)

$x + \frac{5}{4}y \geq 5$ (യന്ത്രം III ന്റെ നിബന്ധന) ... (3)

$x \geq 0,\ y \geq 0$ ... (4)

(1) മുതൽ (4) വരെയുള്ള നിബന്ധനകളുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കാം. ചിത്രം 12.11 ൽ സാധ്യതാഭാഗം ABCDE ഷേയ്ഡ് ചെയ്തത് കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ സാധ്യതാഭാഗം പരിബദ്ധമാണെന്ന് കാണാം. A, B, C, D, E എന്നീ മൂലബിന്ദുക്കളുടെ സൂചക സംഖ്യകൾ (5, 0) (6, 0), (4, 4), (0, 6), (0, 4) എന്നിവയാണ്.

ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ Z ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കാം.



ചിത്രം 12.11

മൂലബിന്ദു	$Z = 600x + 400y$	
(5, 0)	3000	
(6, 0)	3600	
(4, 4)	**4000** ←	പരമാവധിവില
(0, 6)	2400	
(0, 4)	1600	

ഇവിടെ (4. 4) എന്ന ബിന്ദുവിലാണ് Z -ന്റെ പരമാവധി വില എന്നു കാണാം. അതായത്, പരമാവധി ലാഭമായ 4000 രൂപ കിട്ടുന്നതിന് ഉൽപാദകൻ ഓരോ ഉൽപന്നവും (M,N) 4 എണ്ണം വീതം നിർമിക്കണം.

ഉദാഹരണം: 11

(ട്രാൻസ്പോർട്ടേഷൻ പ്രശ്നം (Transportation problem)) P എന്ന സ്ഥലത്തും Q എന്ന സ്ഥലത്തും ഓരോ ഫാക്ടറി സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. ഈ സ്ഥലങ്ങളിൽ നിന്നും ഒരു ഉത്പന്നം A. B, C എന്നീ സ്ഥലങ്ങളിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന മൂന്ന് ഡിപ്പോകളിലേയ്ക്ക് അയച്ചു കൊടുക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഓരോ ഡിപ്പോയിലും ഒരു ആഴ്ചയിൽ ആവശ്യമായ ഉത്പന്നത്തിന്റെ അളവ് 5 യൂണിറ്റ്, 5 യൂണിറ്റ്, 4 യൂണിറ്റ് എന്നീ ക്രമത്തിലാണ്. എന്നാൽ P, Q എന്നീ സ്ഥലങ്ങളിലെ ഫാക്ടറികളുടെ ഉത്പാദനശേഷി യഥാക്രമം 8 യൂണിറ്റും 6 യൂണിറ്റും ആണ്. ഒരു യൂണിറ്റ് ഉത്പന്നം കൊണ്ടു പോകുന്നതിനുള്ള ചെലവ് ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

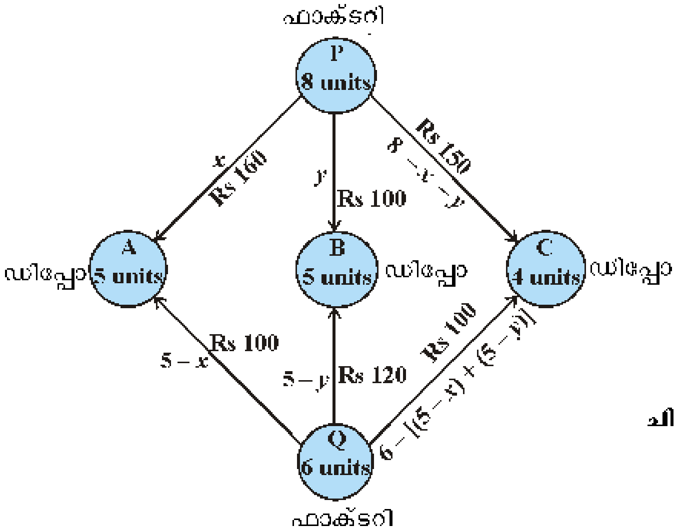
സ്ഥലങ്ങൾ	ചെലവ് (രൂപയിൽ)		
	A	B	C
P	160	100	150
Q	100	120	100

ഉത്പന്നം കൊണ്ടുപോകുന്നതിനുള്ള ചെലവ് ഏറ്റവും കുറവു വരുന്നവിധത്തിൽ ഓരോ ഫാക്ടറിയിൽ നിന്നും ഓരോ ഡിപ്പോയിലേക്കും അയയ്ക്കുന്നത് എത്ര യൂണിറ്റ് വീതമായിരിക്കും? കൊണ്ടുപോകുന്നതിനുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചെലവ് എത്ര?

പരിഹാരം

പ്രശ്നം ചിത്രത്തിന്റെ രൂപത്തിൽ ചുവടെ വിശദമാക്കിയിരിക്കുന്നു. (ചിത്രം12.12):

P യിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഫാക്ടറിയിൽ നിന്ന് A. B എന്നീ ഡിപ്പോകളിലേക്ക് യഥാക്രമം x യൂണിറ്റും y യൂണിറ്റും ഉൽപന്നം അയയ്ക്കുന്നു എന്നുകരുതുക. അപ്പോൾ $(8 - x - y)$ യൂണിറ്റ് ഉൽപന്നം C ഡിപ്പോയിലേക്ക് അയയ്ക്കും (എന്തുകൊണ്ട്?)



ചിത്രം 12.12

അതുകൊണ്ട്, $x \geq 0, y \geq 0, 8 - x - y \geq 0$ ആയിരിക്കും

അതായത്, $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 8$ ആയിരിക്കും

A ഡിപ്പോയിലെ ഉത്പന്നത്തിന്റെ ഒരാഴ്ചത്തേക്കുള്ള ആവശ്യകത 5 യൂണിറ്റാണെന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽ x യൂണിറ്റ് P യിൽ നിന്ന് അയയ്ക്കുന്നതുകൊണ്ട് ബാക്കി വരുന്ന $5 - x$ യൂണിറ്റ് Q വിൽ നിന്ന് അയയ്ക്കണം. അതുകൊണ്ട് $5 - x \geq 0$, അതായത് $x \leq 5$.

അതുപോലെ, $5 - y$ യൂണിറ്റുകളും $6 - (5 - x + 5 - y) = x + y - 4$ യൂണിറ്റുകളും യഥാക്രമം B,C എന്നീ ഡിപ്പോകളിലേക്ക് ഫാക്ടറി Q വിൽ നിന്ന് അയയ്ക്കേണ്ടതാണ്.

അതിനാൽ, $5 - y \geq 0$, $x + y - 4 \geq 0$ അതായത്, $y \leq 5$, $x + y \geq 4$

ഉൽപന്നം കൊണ്ടുപോകുന്നതിനുള്ള ആകെ ചെലവ്

$$Z = 160\,x + 100\,y + 100\,(5 - x) + 120\,(5 - y) + 100\,(x + y - 4) + 150\,(8 - x - y)$$

$$= 10\,(x - 7\,y + 190)$$

അതുകൊണ്ട്, ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നരീതിയിൽ പ്രശ്നത്തെ ചുരുക്കി എഴുതാം.

$Z = 10\,(x - 7y + 190)$ ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചെലവ് കാണുക.

നിബന്ധനകൾ: $x \geq 0, y \geq 0$ ... (1)

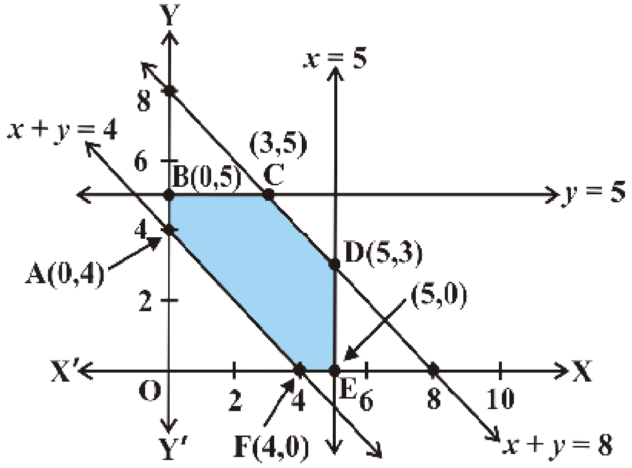
$x + y \leq 8$ ... (2)

$x \leq 5$ ... (3)

$y \leq 5$ ... (4)

$x + y \geq 4$ ... (5)

(1) മുതൽ (5) വരെയുള്ള നിബന്ധനകൾ ഉപയോഗിച്ച് പ്രശ്നത്തിന്റെ സാധ്യതാഭാഗം ABCDEF ചിത്രം 12.13ൽ ഷേയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 12.13

പ്രശ്നത്തിന്റെ സാധ്യതാഭാഗം പരിബദ്ധമാണെന്ന് കാണാം. സാധ്യതാഭാഗത്തിന്റെ മൂലബിന്ദുക്കൾ (0, 4), (0, 5), (3,5), (5, 3), (5, 0), (4, 0) എന്നിവയാണ്. ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ Z – ന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കാം.

മൂലബിന്ദു	$Z-10(x-7y\ \ 190)$
(0.4)	1620
(0.5)	**1550**
(3, 5)	1580
(5,3)	1740
(5,0)	1950
(4,0)	1940

← ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില

പട്ടികയിൽ നിന്ന് Z ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില 1550. (0. 5) എന്ന ബിന്ദുവിലാണെന്ന് കാണാം.

ഫാക്ടറി P യിൽ നിന്ന് A.B.C എന്നീ ഡിപ്പോകളിലേക്ക് യഥാക്രമം 0, 5, 3 യൂണിറ്റുകളും Q വിൽ നിന്ന് യഥാക്രമം 5, 0,1 യൂണിറ്റുകളും അയയ്ക്കാവുന്നതാണ്. ഈ തന്ത്രം ഉപയോഗിച്ചാൽ ചരക്കു നീക്കത്തിന്റെ ചെലവ് ഏറ്റവും കുറയ്ക്കാവുന്നതാണ്. അതായത് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചെലവ് 1550 രൂപയായിരിക്കും.

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. ഉദാഹരണം 9 –ൽ വിറ്റാമിൻ A യുടെ അളവ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ വരുന്നവിധത്തിൽ ഓരോ ഭക്ഷണവും എത്ര പാക്കറ്റ് വീതം ഉപയോഗിക്കണം? ഭക്ഷണക്രമത്തിൽ വിറ്റാമിൻ A യുടെ പരമാവധി അളവ് എന്തായിരിക്കും?

2. ഒരു കർഷകൻ P, Q എന്നീ ബ്രാന്റുകളിലുള്ള രണ്ട് കാലിത്തീറ്റകൾ ചേർത്ത് ഒരു മിശ്രിതമുണ്ടാക്കുന്നു. ഒരു ചാക്കിന് 250 രൂപ വിലയുള്ള P ബ്രാന്റിൽ A,B,C എന്നീ പോഷകഘടകങ്ങൾ യഥാക്രമം 3 യൂണിറ്റ്, 2.5 യൂണിറ്റ്, 2 യൂണിറ്റ്, എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഒരു ചാക്കിന് 200 രൂപ വിലയുള്ള Q ബ്രാന്റിൽ A,B,C എന്നീ പോഷക ഘടകങ്ങൾ 1.5 യൂണിറ്റ്, 11.25 യൂണിറ്റ്, 3 യൂണിറ്റ് എന്നീ ക്രമത്തിലാണ്. A, B, C എന്നീ പോഷകങ്ങളുടെ കുറഞ്ഞ ആവശ്യകത യഥാക്രമം 18 യൂണിറ്റ്, 45 യൂണിറ്റ്, 24 യൂണിറ്റ് എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഒരു ചാക്ക് മിശ്രിതത്തിന് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചെലവ് വരത്തക്കവിധത്തിൽ ഓരോ ബ്രാന്റും എത്ര ചാക്കുകൾ വീതം കൂട്ടിക്കലർത്തണം? ഒരു ചാക്ക് മിശ്രിതത്തിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില എന്തായിരിക്കും?

3. ഒരു ഭക്ഷണക്രമ നിർണ്ണയ വിദഗ്ദ്ധൻ X, Y എന്നീ രണ്ടുതരത്തിലുള്ള ഭക്ഷണങ്ങൾ കൂട്ടിക്കലർത്തി ഒരു ഭക്ഷണക്രമം ഉണ്ടാക്കുവാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. മിശ്രിതത്തിൽ കുറഞ്ഞത് 10 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ A, 12 യൂണിറ്റ് വിറ്റാമിൻ B, 8 യൂണിറ്റ് വിറ്റമിൻ C, എന്നിങ്ങനെ ഉണ്ടായിരിക്കണം. ഒരു കി.ഗ്രാം ഭക്ഷണത്തിലാവശ്യമായ വിറ്റാമിൻ ഘടകങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

ഭക്ഷണം	വിറ്റാമിൻ A	വിറ്റാമിൻ B	വിറ്റാമിൻ C
X	1	2	3
Y	2	2	1

ഒരു കി.ഗ്രാം ഭക്ഷണം X ന് 16 രൂപയും ഭക്ഷണം Y യ്ക്ക് 20 രൂപയും വില വരും. യുക്തമായ ഈ ഭക്ഷണക്രമത്തിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചെലവ് എന്തായിരിക്കും?

4. ഒരു ഉത്പാദകൻ A, B എന്നീ രണ്ടുതരം കളിപ്പാട്ടങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു. ഇതിനായി മൂന്നു യന്ത്രങ്ങൾ ആവശ്യമാണ്. ഓരോ കളിപ്പാട്ടവും നിർമിക്കുന്നതിന് ഓരോ യന്ത്രത്തിനും വേണ്ടിവരുന്ന സമയം (മിനിട്ടിൽ) ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

കളിപ്പാട്ടങ്ങൾ	യന്ത്രങ്ങൾ		
	I	II	III
A	12	18	6
B	6	0	9

ഓരോ യന്ത്രവും ഒരുദിവസം പരമാവധി 6 മണിക്കൂർ വരെ ലഭ്യമാണ്. A വിഭാഗത്തിലെ ഒരു കളിപ്പാട്ടത്തിന് 7.50 രൂപയും B വിഭാഗത്തിലെ ഒരു കളിപ്പാട്ടത്തിന് 5 രൂപയും ലാഭം കിട്ടും. പരമാവധി ലാഭം കിട്ടുന്നതിന് A വിഭാഗത്തിലെ 15 കളിപ്പാട്ടങ്ങളും B വിഭാഗത്തിലെ 30 കളിപ്പാട്ടങ്ങളും ഒരു ദിവസം നിർമിക്കണം എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. ഒരു വിമാനത്തിന് പരമാവധി 200 യാത്രക്കാരെ വഹിക്കാൻ കഴിയും. ഒരു എക്സിക്യൂട്ടീവ് ക്ലാസ്സ് ടിക്കറ്റിന് 1000 രൂപയും ഇക്കോണമി ക്ലാസ്സ് ടിക്കറ്റിന് 600 രൂപയും ലാഭം കിട്ടുന്നു. വിമാനകമ്പനി കുറഞ്ഞത് 20 സീറ്റെങ്കിലും എക്സിക്യൂട്ടീവ് ക്ലാസ്സിനായി കരുതി വയ്ക്കാറുണ്ട് (reserve). എങ്ങനെയായാലും എക്സിക്യൂട്ടീവ് ക്ലാസ്സിലുള്ളവരേക്കാൾ കുറഞ്ഞത് നാലിരട്ടിയെങ്കിലും യാത്രക്കാർ ഇക്കോണമി ക്ലാസ്സ് തെരഞ്ഞെടുക്കാറുണ്ട്. വിമാനക്കമ്പനിയ്ക്ക് പരമാവധി ലാഭം കിട്ടുന്നതിന് ഓരോ തരത്തിലുമുള്ള ടിക്കറ്റുകൾ എത്രയെണ്ണം വീതം വിൽക്കണം എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക. പരമാവധി ലാഭം എത്ര?

6. A, B എന്നീ ഗോഡൗണുകൾക്ക് യഥാക്രമം 100 ക്വിന്റൽ, 50 ക്വിന്റൽ, എന്നിങ്ങനെ ധാന്യസംഭരണശേഷിയുണ്ട്. ഈ ഗോഡൗണുകളിൽ നിന്ന് D, E, F എന്നീ റേഷൻകടകളിലേക്ക് സാധനങ്ങൾ വിതരണം ചെയ്യാറുണ്ട്. D, E, F എന്നീ റേഷൻകടകളുടെ ആവശ്യകത യഥാക്രമം 60 ക്വിന്റൽ, 50 ക്വിന്റൽ, 40 ക്വിന്റൽ എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഗോഡൗണുകളിൽ നിന്ന് ഓരോ കടയിലേക്കുമുള്ള ചരക്കുനീക്കച്ചെലവ് (ഒരു ക്വിന്റലിന്) ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഒരു ക്വിന്റലിന്റെ ചരക്കുനീക്ക ചെലവ് (രൂപയിൽ)			
ഗോഡൗൺ	D	E	F
A	6	3	2.5
B	4	2	3

ചരക്കുനീക്ക ചെലവ് ഏറ്റവും കുറയത്തക്കവിധത്തിൽ എങ്ങനെ വിതരണം നടത്താം? ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചെലവ് എന്ത്?

7. ഒരു എണ്ണക്കമ്പനിയിലെ A, B എന്നീ ഡിപ്പോകളുടെ സംഭരണശേഷി 7000 ലിറ്റർ, 4000 ലിറ്റർ എന്നീ ക്രമത്തിലാണ്. കമ്പനിയ്ക്ക് D, E, F എന്നീ പെട്രോൾ പമ്പുകളിലേക്ക് യഥാക്രമം 4500 ലിറ്റർ, 3000 ലിറ്റർ, 3500 ലിറ്റർ എന്നിങ്ങനെ എണ്ണ വിതരണം നടത്തേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്. ഡിപ്പോകളും പെട്രോൾ പമ്പുകളും തമ്മിലുള്ള അകലം (കി.മീറ്ററിൽ) ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ദൂരം (കി.മീറ്ററിൽ)	പമ്പ്		
ഡിപ്പോ	D	E	F
A	7	6	3
B	3	4	2

10 ലിറ്റർ എണ്ണയുടെ ചരക്കുനീക്ക ചെലവ് കി.മീറ്ററിന് 1 രൂപയാണ് എന്ന നിഗമനത്തിൽ, ചരക്കു നീക്കച്ചെലവ് ഏറ്റവും കുറയുവാൻ ചരക്കുനീക്കം എങ്ങനെ ക്രമീകരിക്കണം? ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചെലവ് എത്ര?

8. ഫലവൃക്ഷങ്ങൾ നട്ടുവളർത്തുന്ന ഒരാൾ P, Q എന്നീ ബ്രാന്റുകളിലുള്ള രണ്ട് വളങ്ങൾ തന്റെ തോട്ടത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഓരോ ബ്രാന്റിലെയും ഒരു ചാക്കിലുള്ള നൈട്രജൻ, ഫോസ്ഫോറിക് ആസിഡ്, പൊട്ടാഷ്, ക്ലോറിൻ എന്നിവയുടെ അളവുകൾ (കി.ഗ്രാമിൽ) പട്ടികയിൽ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. തോട്ടത്തിൽ കുറഞ്ഞത് 240 കി.ഗ്രാം ഫോസ്ഫോറിക് ആസിഡും 270 കി.ഗ്രാം പൊട്ടാഷും ഉപയോഗിക്കണമെന്നും ക്ലോറിൻ കൂടിയാൽ 310 കി.ഗ്രാം വരെ മാത്രമേ ഉപയോഗിക്കാവൂ എന്നും പരിശോധനകളിൽ തെളിഞ്ഞിട്ടുള്ളതാണ്.

തോട്ടമുടമ തന്റെ തോട്ടത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന നൈട്രജന്റെ അളവ് പരമാവധി കുറയണമെന്ന് ആഗ്രഹിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഓരോ ബ്രാന്റും എത്ര ചാക്ക് വീതം ഉപയോഗിക്കണം? തോട്ടത്തിൽ ചേർക്കേണ്ട നൈട്രജന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ അളവ് എത്രയാണ്?

കി.ഗ്രാം (ചാക്കിന്)		
	ബ്രാന്റ് P	ബ്രാന്റ് Q
നൈട്രജൻ	3	3.5
ഫോസ്ഫോറിക് ആസിഡ്	1	2
പൊട്ടാഷ്	3	1.5
ക്ലോറിൻ	1.5	2

9. 8 -ാം ചോദ്യം പരിശോധിക്കുക. തോട്ടമുടമ തന്റെ തോട്ടത്തിലെ നൈട്രജന്റെ അളവ് പരമാവധി വർദ്ധിപ്പിക്കുവാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. എങ്കിൽ ഓരോ ബ്രാന്റിലെയും എത്ര ചാക്ക് വീതം ഉൾപ്പെടുത്തണം? ചേർക്കേണ്ട പരമാവധി നൈട്രജന്റെ അളവ് എത്രയായിരിക്കും?

10. ഒരു കളിപ്പാട്ടക്കമ്പനി A, B എന്നീ രണ്ടുതരത്തിലുള്ള പാവകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു. വിപണിയിലെ പരിശോധനകളും വിഭവങ്ങളുടെ ലഭ്യതയും അടിസ്ഥാനമാക്കി കമ്പനിയുടെ ഉത്പാദനം ആഴ്ചയിൽ 1200 പാവകളിൽ കൂടാൻ പാടില്ല. B വിഭാഗത്തിലെ പാവകളുടെ ആവശ്യകത A വിഭാഗത്തിലെ പാവകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ പകുതിയിൽ കൂടാൻ പാടില്ല. കൂടാതെ, A വിഭാഗത്തിലെ പാവകളുടെ ഉത്പാദനം B വിഭാഗത്തിലെ പാവകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ പരമാവധി മൂന്നിരട്ടിയേക്കാൾ 600 യൂണിറ്റ് വരെ കൂടാവുന്നതാണ്. കമ്പനിയ്ക്ക് A വിഭാഗത്തിലുള്ള ഒരു പാവയ്ക്ക് 12 രൂപയും B വിഭാഗത്തിലെ ഒരു പാവയ്ക്ക് 16 രൂപയും ലാഭം കിട്ടുന്നു എങ്കിൽ പരമാവധി ലാഭം കിട്ടുന്നതിന് ഓരോ വിഭാഗത്തിലെയും എത്ര പാവകൾ വീതം ആഴ്ചതോറും ഉത്പാദിപ്പിക്കണം?

സംഗ്രഹം

- വിവിധ ചരങ്ങളുള്ള ഒരു രേഖീയ ഏകദത്തിന്റെ (ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദം) പരമമൂല്യം (ഏറ്റവും കൂടിയതോ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞതോ) കാണുന്നതിനുള്ള ഒരു പ്രശ്നമാണ് രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നം. ഇതിലുൾപ്പെടുന്ന ചരങ്ങൾ അന്യൂനവും കുറേ രേഖീയ അസമതകൾ (രേഖീയ നിബന്ധനകൾ) പാലിക്കുന്നതുമാണ്. ഇവയെ നിശ്ചയ ചരങ്ങൾ (**decision variables**) എന്നുവിളിക്കുന്നു.

  (i) ഭക്ഷണക്രമപ്രശ്നങ്ങൾ (Diet problems)

  (ii) നിർമാണപ്രശ്നങ്ങൾ (Manufacturing problems)

  (iii) ചരക്കുനീക്കപ്രശ്നങ്ങൾ (Transportation problems) എന്നിവ ചില രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ്പ്രശ്നങ്ങളാണ്.

- അന്യൂനനിബന്ധന $x \geq 0, y \geq 0$ ഉൾപ്പെടെയുള്ള എല്ലാ നിബന്ധനകളും നിശ്ചയിക്കുന്ന പൊതുഭാഗത്തെ ഒരു രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നത്തിന്റെ സാധ്യതാഭാഗം (പരിഹാര ഭാഗം) എന്നുപറയുന്നു.
- സാധ്യതാഭാഗത്തിനുള്ളിലെയും അതിരുകളിലെയും വിലകൾ നിബന്ധനകളുടെ സാധ്യതാപരിഹാരങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. സാധ്യതാഭാഗത്തിന് വെളിയിലുള്ള ഏത് ബിന്ദുവും അസാധ്യത പരിഹാരമാണ്.
- പരമമൂല്യം (ഏറ്റവും കൂടിയതോ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞതോ) നൽകുന്ന സാധ്യതാഭാഗത്തെ ഏത് ബിന്ദുവിനെയും ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദത്തിന്റെ പരമമൂല്യ പരിഹാരം (Optimal solution) എന്നുപറയുന്നു.

- രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ്പ്രശ്നങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സിദ്ധാന്ത ങ്ങൾ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ് പരിഹരിക്കുന്നത്.

  സിദ്ധാന്തം 1. $Z - ax \quad by$ ഒരു രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നത്തിന്റെ ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദവും R അതിന്റെ സാധ്യതാഭാഗവും (ഉത്തലബഹുഭുജം Convex Polygon) ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. x, y എന്നീ ചരങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധ നകൾ നിർണ്ണയിക്കുന്ന രേഖീയ അസമതകളിലെ ചരങ്ങളാണ്. Z ന് ഒരു പരമമല്യം (ഏറ്റവും കൂടിയതോ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞതോ) ഉണ്ടെങ്കിൽ ആ വില സാധ്യതാഭാഗത്തെ ഏതെങ്കിലും ഒരു മൂലബിന്ദുവിൽ (corner point) അല്ലെങ്കിൽ ശീർഷത്തിൽ (vertex) ആയിരിക്കും ലഭിക്കുന്നത്.

  സിദ്ധാന്തം 2. $Z - ax \quad by$ ഒരു രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നത്തിന്റെ ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദവും R അതിന്റെ സാധ്യതാഭാഗവും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ R പരിബദ്ധ **(bounded)** മാണെങ്കിൽ Z ന് ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയും R ന്റെ ഏതെങ്കിലും മൂലബിന്ദുക്കളിൽ (ശീർഷങ്ങളിൽ) ഉണ്ടായി രിക്കും.

- സാധ്യതാഭാഗം പരിബദ്ധമല്ലെങ്കിൽ, പരമമൂല്യം (ഏറ്റവും കൂടിയ വില അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില) ഉണ്ടാകുകയോ ഉണ്ടാകാതിരിക്കുകയോ ചെയ്യാം. അഗ്രവില ഉണ്ടായാൽ അത് R ന്റെ മൂലബിന്ദുവിൽ തന്നെയായി രിക്കും.

- രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നത്തിന്റെ പരിഹാരം കണ്ടെത്തുന്ന മൂലബിന്ദു രീതിയ്ക്ക് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചട്ടങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

  (i) രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നത്തിന്റെ സാധ്യതാഭാഗവും അതിന്റെ മൂലബിന്ദുക്കളും (ശീർഷങ്ങളും) കണ്ടുപിടിക്കുക.

  (ii) ഓരോ മൂലബിന്ദുവിലുമുള്ള $Z - ax \quad by$ എന്ന ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദത്തിന്റെ വിലകൾ കാണുക. M, m എന്നിവ ഈ വിലകളിലെ ഏറ്റവും കൂടിയ തും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞതുമായ വിലകളാണ്.

  (iii) സാധ്യതാഭാഗം പരിബദ്ധമാണെങ്കിൽ, M, m എന്നിവ യഥാക്രമം ഉദ്ദിഷ്ട ഏകദത്തിന്റെ ഏറ്റവും കൂടിയ വിലയും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിലയും ആയിരിക്കും.

  സാധ്യതാഭാഗം പരിബദ്ധമല്ലെങ്കിൽ

(i) $ax + by > M$ ന്റെ ഗ്രാഫും സാധ്യതാഭാഗവും തമ്മിൽ പൊതുബിന്ദുക്കൾ ഒന്നുമില്ലെങ്കിൽ Z ന്റെ പരമാവധി വില M ആയിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ Z ന് പരമാവധി വില ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതല്ല.

(ii) $ax + by < m$ ന്റെ ഗ്രാഫും സാധ്യതാഭാഗവും തമ്മിൽ പൊതുബിന്ദുക്കൾ ഒന്നുമില്ലെങ്കിൽ Z ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില m ആയിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ Z ന് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതല്ല.

- ഒരു സാധ്യതാഭാഗത്തിന്റെ രണ്ട് മൂലബിന്ദുക്കളിൽ ഒരേ പരമമൂല്യപരിഹാരം (ഏറ്റവും കൂടിയതോ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞതോ ആയ വില) ലഭിക്കുന്നുവെങ്കിൽ മൂലബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് വരയ്ക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിലെ ഏത് ബിന്ദുവിലും അതേ പരമമൂല്യപരിഹാരം തന്നെ ലഭിക്കും.

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

രണ്ടാം ലോകമഹായുദ്ധത്തിൽ, യുദ്ധതന്ത്രങ്ങൾ ആസൂത്രണം ചെയ്തപ്പോൾ, ചെലവു കുറയ്ക്കുന്നതിനും, ശത്രുവിന് പരമാവധി നാശം വിതയ്ക്കുന്നതിനും വേണ്ടിയാണ് രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നങ്ങൾ ആദ്യമായി സൃഷ്ടിക്കപ്പെടുന്നത്.

രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ്ങിന്റെ ആദ്യത്തെ പ്രശ്നം 1941-ൽ റഷ്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ എൽ. കാന്റ്റോവിച്ചും അമേരിക്കൻ സാമ്പത്തിക വിദഗ്ദ്ധനായ എഫ്. എൽ. ഹിച്ച്കോക്കും ആണ് രൂപീകരിച്ചത്. രണ്ടുപേരും സ്വതന്ത്രമായാണ് പ്രവർത്തിച്ചത്. ഇതായിരുന്നു പ്രശസ്തമായ ചരക്കുനീക്ക പ്രശ്നം. 1945 –ൽ ഇംഗ്ലീഷ് സാമ്പത്തിക വിദഗ്ദ്ധനായി ജി. സ്റ്റിഗ്ളർ ഒരു ഭക്ഷണക്രമം കണ്ടുപിടിക്കുന്നുതിനുള്ള രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നം അവതരിപ്പിച്ചു.

1947-ൽ അമേരിക്കൻ സാമ്പത്തികവിദഗ്ദ്ധനായ ജി.ബി ഡാന്റ്സിഗ് പരിമിത എണ്ണം ഘട്ടങ്ങളിലൂടെ ഒരു രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ്പ്രശ്നം പരിഹരിക്കുന്നതിനുള്ള സിംപ്ലെക്സ് രീതി എന്ന ആവർത്തനപ്രക്രിയ നിർദ്ദേശിച്ചു.

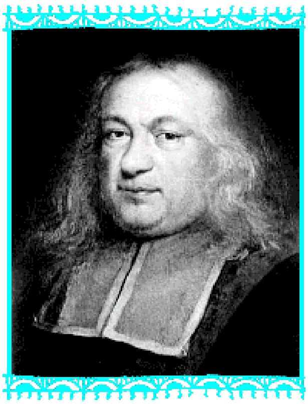
രേഖീയ പ്രോഗ്രാമിങ്ങിലെ മഹത്വപൂർണമായ പ്രവർത്തനത്തിന് എൽ. കാന്റ്റോവിച്ചിനും അമേരിക്കൻ ഗണിതശാസ്ത്ര സാമ്പത്തികവിദഗ്ദ്ധനായ റ്റി.സി. കൂപ്പ്മാനും 1975 ലെ സാമ്പത്തികശാസ്ത്രത്തിന്റെ നോബൽ സമ്മാനം ലഭിച്ചു. കമ്പ്യൂട്ടറിന്റെയും വിവരസാങ്കേതികവിദ്യയുടെയും സത്വരവളർച്ചയിലൂടെ പല മേഖലകളിലുള്ള, സങ്കീർണമായ പല രേഖീയപ്രോഗ്രാമിങ് പ്രശ്നങ്ങളുടെയും പരിഹാരം ഇന്ന് സാധ്യമാണ്.

അധ്യായം **13**

സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം
(PROBABILITY)

❖ *ലളിതമായി പറഞ്ഞാൽ സാധ്യതകളുടെ അളവുകളുടെ സിദ്ധാന്തം യുക്തിയുടെ ശാസ്ത്രമാണ്* ❖

13.1 ആമുഖം



പിയാരെ. ഡി. ഫെർമ
(1601-1665)

മുൻ ക്ലാസുകളിൽ സാധ്യത എന്നത് സംഭവങ്ങളുടെ അനശ്ചിതത്വത്തിന്റെ അളവാണെന്ന് നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. എ.എൻ. കോൾമോഗോറോവ് (1903-1987) എന്ന റഷ്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ സ്വയംപ്രമാണ സമീപനങ്ങളെക്കുറിച്ച് വിശദമായി പ്രതിപാദിക്കുകയും സാധ്യത എന്നത് ഒരു പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണത്തിന്റെ പരിണിതഫലങ്ങളുടെ ഒരു ഏകദമാണെന്നു പ്രസ്താവിക്കുകയും ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. അതുപോലെ തുല്യസാധ്യതയുള്ള പരിണതഫലങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ സ്വയംപ്രമാണ സാധ്യതാസിദ്ധാന്തത്തിനും ശ്രേഷ്ഠ സാധ്യതാസിദ്ധാന്തത്തിനുമുള്ള ബന്ധത്തെപ്പറ്റിയും ചർച്ച ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ഈ ബന്ധത്തിൽ നിന്നും വിവിക്ത സാധ്യതാഗണവുമായി (deserete sample space) ബന്ധപ്പെട്ടു നിൽക്കുന്ന സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യതയെപ്പറ്റിയും സാധ്യതയുടെ സങ്കലന സിദ്ധാന്തത്തെപ്പറ്റിയും പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഈ അധ്യായത്തിൽ സോപാധിക സാധ്യത (conditional probability) എന്ന ആശയത്തെക്കുറിച്ച് ചർച്ചചെയ്യുന്നു. ഒരു സംഭവത്തിന്റെ സോപാധികസാധ്യത എന്നതുകൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത്, ഒരു സംഭവം നടന്നു കഴിഞ്ഞു എന്ന ഉപാധിയോടെ മറ്റൊരു സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യത എന്താകും എന്നതാണ്. സോപാധികസാധ്യതാസംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യതകളുടെ ഗുണനത്തിന്റെ സിദ്ധാന്തവും, ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തവും (Bayes' theorem) സംഭവങ്ങളുടെ പരസ്പരാശ്രിതത്വവും മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കുന്നു. കൂടാതെ പ്രവചനാതീതചരങ്ങളെ (random variables) ക്കുറിച്ചും അതിന്റെ സാധ്യതാവിതരണത്തെ (probability distribution) കുറിച്ചും, സാധ്യതാവിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം, വേരിയൻസ് ഇവയെക്കുറിച്ചും മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയുന്നു. ഈ അധ്യാ

യത്തിൽ ഒരു പ്രധാന വിവിക്ത സാധ്യതാവിതരണമായ ദ്വിപദവിതരണത്തെ (Binomial distribution) ക്കുറിച്ചും നാം ചർച്ചചെയ്യും.

13.2 സോപാധിക സാധ്യത (Conditional Probability)

ഇതുവരെ സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യത കണ്ടെത്തുന്ന മാർഗങ്ങൾ നാം ചർച്ചചെയ്തു. ഒരേ സാധ്യതാഗണത്തിലെ രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ ഒരു സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യത രണ്ടാമത്തെ സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യതയെ ബാധിക്കുമോ എന്ന് ഉചിതമായ പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണങ്ങൾ എടുത്തുകൊണ്ട് ഇത്തരം ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിക്കാം.

3 നാണയങ്ങൾ എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

ഓരോ സാധ്യതാ ബിന്ദുവിനും $\frac{1}{8}$ എന്ന സാധ്യത നൽകാവുന്നതാണ്. കുറഞ്ഞത് രണ്ട് H കിട്ടുന്ന സംഭവത്തെ E എന്നും, ഒന്നാമത്തെ നാണയത്തിൽ T കാണിക്കുന്ന സംഭവത്തെ F എന്നും വിചാരിക്കുക.

എങ്കിൽ, $E = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$

$F = \{THH, THT, TTH, TTT\}$

അതിനാൽ, $P(E) = P(\{HHH\}) + P(\{HHT\}) + P(\{HTH\}) + P(\{THH\})$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2} \text{ (എന്തുകൊണ്ട്?)}$$

$$P(F) = P(\{THH\}) + P(\{THT\}) + P(\{TTH\}) + P(\{TTT\})$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

കൂടാതെ, $E \cap F = \{THH\}$

അതിനാൽ, $P(E \cap F) = P(\{THH\}) = \frac{1}{8}$

ഒന്നാമത്തെ നാണയം T കാണിക്കുന്നു എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ടെന്ന് വിചാരിക്കുക. അതായത് F എന്ന സംഭവം ലഭിക്കുന്നു. എങ്കിൽ E എന്ന സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യത എന്താണ്? ഇവിടെ F സംഭവിച്ചു കഴിഞ്ഞതുകൊണ്ട് E യുടെ സാധ്യത കണക്കാക്കുമ്പോൾ ഒന്നാ

മത്തെ നാണയത്തിൽ T വരാത്ത സാധ്യതാഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെ പരിഗണിക്കേണ്ട കാര്യമില്ല എന്ന് മനസിലാക്കാം. ഈ അറിവ് E യുടെ സാധ്യത കണക്കാക്കുമ്പോൾ സാധ്യതാഗണത്തെ S ൽ നിന്നും അതിന്റെ ഉപഗണമായ F ലേക്ക് ചുരുക്കുന്നു. മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ ഈ അറിവ് സംഭവം F ന് അനുകൂലമായ അംഗങ്ങൾ വരുന്ന സാധ്യതാഗണം ഉണ്ടാക്കുന്ന ഒരു പുതിയ പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണം സൃഷ്ടിക്കുന്ന സാഹചര്യം സംജാതമാക്കുന്നു. അങ്ങനെയെങ്കിൽ E ക്ക് അനുകൂലമായ F ലെ അംഗം THH ആണ്. F സാധ്യതാഗണമായി പരിഗണിച്ചാൽ E യുടെ സാധ്യത $= \frac{1}{4}$ അഥവാ F ആദ്യം സംഭവിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ E യുടെ സാധ്യത $= \frac{1}{4}$

P (F സംഭവിച്ചു കഴിഞ്ഞപ്പോൾ) $= \frac{1}{4}$

മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന സാധ്യതയെ E യുടെ സോപാധിക സാധ്യത എന്നു പറയുന്നു. അതിനെ P(E|F) എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

E എന്ന സംഭവത്തിന് അനുകൂലമായ F ലെ അംഗങ്ങൾ E, F എന്നിവയ്ക്ക് പൊതുവായി ഉള്ളതാണ്. അതായത് $E \cap F$ ലെ സാധ്യതാ ബിന്ദുക്കൾ.

$$P(E|F) = \frac{E \cap F \text{ ന് അനുകൂലമായ സംഭവങ്ങളുടെ എണ്ണം}}{F \text{ ന് അനുകൂലമായ സംഭവങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$

$$= \frac{n(E \cap F)}{n(F)}$$

കൂടാതെ,

$$P(E|F) = \frac{\frac{n(E \cap F)}{n(S)}}{\frac{n(F)}{n(S)}} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, \; P(F) \neq 0$$

നിർവചനം: 1

ഒരു പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടു നിൽക്കുന്ന രണ്ട് സംഭവങ്ങളാണ് E, F.

F സംഭവിച്ചു കഴിഞ്ഞ് E യുടെ സോപാധിക സാധ്യത,

അതായത്, $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$, $P(F) \neq 0$

13.2.1 സോപാധിക സാധ്യതയുടെ പ്രത്യേകതകൾ

S എന്ന സാധ്യതാഗണത്തിന്റെ രണ്ടു സംഭവങ്ങളാണ് E, F

പ്രത്യേകത: 1

$P(S|F) = P(F|F) = 1$

ഇവിടെ,
$$P(S|F) = \frac{P(S\cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

$$P(F|F) = \frac{P(F\cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

അതായത്, $P(S|F) = P(F|F) = 1$

പ്രത്യേകത: 2

S എന്ന സാധ്യതാഗണത്തിന്റെ രണ്ടു സംഭവങ്ങളാണ് A, B. കൂടാതെ F എന്ന സംഭവത്തിൽ, $P(F) \neq 0$ ആയാൽ $P((A\cup B)|F) = P(A|F) + P(B|F) - P((A\cap B)|F)$

കൂടാതെ A, B എന്നിവ വിയുക്ത സംഭവങ്ങളായാൽ, $P((A\cup B)|F) = P(A|F) + P(B|F)$

ഇവിടെ,
$$P((A\cup B)|F) = \frac{P[(A\cup B)\cap F]}{P(F)}$$

$$= \frac{P[(A\cap F)\cup(B\cap F)]}{P(F)}$$ (ഗണങ്ങളുടെ യോഗത്തിന് സംഗമത്തിനുമേലുള്ള വിതരണ നിയമം)

$$= \frac{P(A\cap F)+P(B\cap F)-P(A\cap B\cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(A\cap F)}{P(F)} + \frac{P(B\cap F)}{P(F)} - \frac{P[(A\cap B)\cap F]}{P(F)}$$

$$= P(A|F) + P(B|F) - P((A\cap B)|F)$$

പ്രത്യേകിച്ച് A, B ഇവ വിയുക്ത സംഭവങ്ങളായാൽ,

$$P((A\cap B)|F) = 0$$

അപ്പോൾ, $P((A\cup B)|F) = P(A|F) + P(B|F)$

പ്രത്യേകത: 3

$P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

$P(S|F) = 1$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$$\Rightarrow \qquad P(E \cup E'|F) = 1 \qquad (S = E \cup E')$$

$$\Rightarrow \qquad P(E|F) + P(E'|F) = 1 \qquad (E, E' \text{ ഇവ വിയുക്ത സംഭവങ്ങളാണ്})$$

$$P(E'|F) = 1 - P(E|F)$$

ഉദാഹരണം: 1

$P(A) = \frac{7}{13}, P(B) = \frac{9}{13}, P(A \cap B) = \frac{4}{13}$, എങ്കിൽ $P(A|B)$ കാണുക.

പരിഹാരം

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{13}}{\frac{9}{13}} = \frac{4}{9}$$

ഉദാഹരണം: 2

ഒരു കുടുംബത്തിൽ 2 കുട്ടികൾ ഉണ്ട്. കുറഞ്ഞത് ഒരാളെങ്കിലും ആൺകുട്ടിയാണ് എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. എങ്കിൽ 2 പേരും ആൺകുട്ടികളാകാനുള്ള സാധ്യത എന്ത്?

പരിഹാരം

ആൺകുട്ടിയെ b എന്നും പെൺകുട്ടിയെ g എന്നും സൂചിപ്പിക്കാം.

സാധ്യതാ ഗണം, $S = \{(b, b), (g, b), (b, g), (g, g)\}$

E : രണ്ടു കുട്ടികളും ആൺകുട്ടികൾ

F : കുറഞ്ഞത് ഒരു ആൺകുട്ടി.

$$E = \{(b,b)\}, F = \{(b,b), (g,b), (b,g)\}$$

$$E \cap F = \{(b,b)\}$$

അതിനാൽ, $P(F) = \frac{3}{4}, \; P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

അതുകൊണ്ട്, $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

ഉദാഹരണം: 3

ഒരു പെട്ടിയിൽ 1 മുതൽ 10 വരെ സംഖ്യകൾ എഴുതിയ കാർഡുകൾ ഉണ്ട്. ഇവ നല്ലതു പോലെ ഇടകലർത്തിയശേഷം ക്രമരഹിതമായി ഒരു കാർഡ് എടുക്കുന്നു. കാർഡിലെ സംഖ്യ 3 ൽ കൂടുതലാണെന്ന് അറിയാം. എങ്കിൽ ആ കാർഡ് ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

പരിഹാരം

'കാർഡിലെ സംഖ്യ ഇരട്ടസംഖ്യയാണ് എന്ന സംഭവത്തെ' A എന്നും 'കാർഡിലെ സംഖ്യ 3 ൽ കൂടുതൽ എന്ന സംഭവത്തെ' B എന്നും വിളിക്കാം. നമുക്ക് P(AB) യാണ് കണ്ടു പിടിക്കേണ്ടത്.

സാധ്യതാഗണം, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \quad B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A \cap B = \{4, 6, 8, 10\}$$

$$P(A) = \frac{5}{10}, \; P(B) = \frac{7}{10}; \; P(A \cap B) = \frac{4}{10}$$

$$P(AB) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}$$

ഉദാഹരണം: 4

ഒരു വിദ്യാലയത്തിൽ 1000 കുട്ടികൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ 430 പെൺകുട്ടികളാണ്. ഈ 430 പെൺകുട്ടികളിൽ 10% കുട്ടികൾ 12-ാം ക്ലാസ്സിലാണ് പഠിക്കുന്നത്. ഒരു കുട്ടിയെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഇത് ഒരു പെൺകുട്ടിയായാൽ ആ കുട്ടി 12-ാം ക്ലാസിൽ പഠിക്കുന്നതിനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

E: തിരഞ്ഞെടുത്ത കുട്ടി 12-ാം ക്ലാസ്സിൽ പഠിക്കുന്നു; F : തിരഞ്ഞെടുത്ത കുട്ടി ഒരു പെൺകുട്ടിയാണ് എന്നി സംഭവങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. P(E|F) കണ്ടുപിടിക്കണം.

$$P(F) = \frac{430}{1000} = 0.43 \text{ and } P(E \cap F) = \frac{43}{1000} = 0.043 \quad (\text{എന്തുകൊണ്ട്?})$$

അതുകൊണ്ട്, $P(EF) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0.043}{0.43} = 0.1$

ഉദാഹരണം: 5

ഒരു സമചതുരക്കട്ട മൂന്ന് പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു. A, B എന്നീ സംഭവങ്ങൾ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നു.

A: മൂന്നാമത്തെ പ്രാവശ്യം 4 എന്ന സംഖ്യ കിട്ടുന്നു.

B: ഒന്നാമത്തെ പ്രാവശ്യം 6 എന്ന സംഖ്യയും രണ്ടാമത്തെ പ്രാവശ്യം 5 എന്ന സംഖ്യയും കിട്ടുന്നു. P (A|B) കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

സാധ്യതാഗണത്തിൽ $6^3 = 216$ അംഗങ്ങൾ ഉണ്ട്.

$$A = \begin{Bmatrix} (1,1,4) & (1,2,4) & \ldots & (1,6,4) & (2,1,4) & (2,2,4) & \ldots & (2,6,4) \\ (3,1,4) & (3,2,4) & \ldots & (3,6,4) & (4,1,4) & (4,2,4) & \ldots & (4,6,4) \\ (5,1,4) & (5,2,4) & \ldots & (5,6,4) & (6,1,4) & (6,2,4) & \ldots & (6,6,4) \end{Bmatrix}$$

$$B = \{(6,5,1), (6,5,2), (6,5,3), (6,5,4), (6,5,5), (6,5,6)\}$$

$$A \cap B = \{(6,5,4)\}.$$

$$P(B) = \frac{6}{216}; \; P(A \cap B) = \frac{1}{216}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{216}}{\frac{6}{216}} = \frac{1}{6}$$

ഉദാഹരണം: 6

ഒരു സമചതുരക്കട്ട രണ്ട് പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു. അപ്പോൾ കിട്ടുന്ന രണ്ടു മുഖങ്ങളിലെയും സംഖ്യകളുടെ തുക 6 ആണ്. എങ്കിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു പ്രാവശ്യമെങ്കിലും 4 എന്ന സംഖ്യ കിട്ടാനുള്ള സോപാധിക സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

E: കുറഞ്ഞത് ഒരു പ്രാവശ്യമെങ്കിലും 4 കിട്ടുന്നു.

F: രണ്ട് പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന മുഖങ്ങളിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക 6.

$$E = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (1,4), (2,4), (3,4), (5,4), (6,4)\}$$

$$F = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

$$P(E) = \frac{11}{36} \quad P(F) = \frac{5}{36}$$

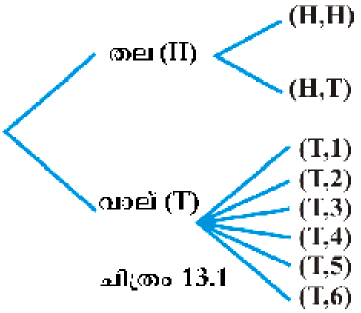
$$E \cap F = \{(2,4), (4,2)\}$$

$$P(E \cap F) = \frac{2}{36}$$

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

ഉദാഹരണം: 7

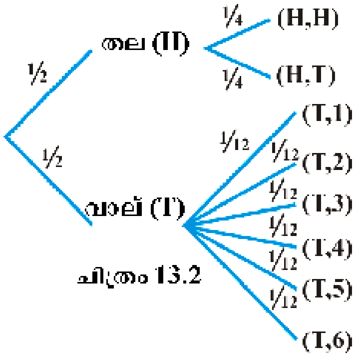
ഒരു നാണയം എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. നാണയം എറിയുമ്പോൾ തലയാണ് ലഭിക്കുന്നതെങ്കിൽ ആ നാണയം വീണ്ടും എറിയുന്നു. വാലാണ് ലഭിക്കുന്നതെങ്കിൽ ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു. എങ്കിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു വാല് ലഭിക്കുമ്പോൾ സമചതുരക്കട്ടയിലെ സംഖ്യ 4 ൽ കൂടാനുള്ള സോപാധിക സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.



ചിത്രം 13.1

പരിഹാരം

ഈ പരീക്ഷണത്തെ ഒരു ട്രീ ഡയഗ്രം ഉപയോഗിച്ച് മുകളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ സൂചിപ്പിക്കാം. ഈ പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണം $S = \{(H,H), (H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$ ആണ്.



ചിത്രം 13.2

ഇവിടെ (H, H) സൂചിപ്പിക്കുന്നത് രണ്ടു പ്രാവശ്യം H കിട്ടുന്നു എന്നും (T, i) സൂചിപ്പിക്കുന്നത് നാണയത്തിൽ T കിട്ടുമ്പോൾ സമചതുരക്കട്ടയിൽ i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) എന്ന സംഖ്യ കിട്ടുന്നു. ഇവിടെ ഈ 8 പരിണതഫലങ്ങളായ (H,H), (H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6) ഇവക്ക് യഥാക്രമം $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}$ എന്ന സാധ്യത നൽകാം. ഇത് ചിത്രം 13.2 ൽ നിന്നും വ്യക്തമാണ്.

F : കുറഞ്ഞത് ഒരു T, E : സമചതുരക്കട്ടയുടെ മുഖത്ത് 4 ൽ കൂടിയ സംഖ്യ എന്നീ സംഭവങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

$$F = \{(H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$$

$$E = \{(T,5), (T,6)\}; E \cap F = \{(T,5), (T,6)\}$$

$$P(F) = P(\{(H,T)\}) + P(\{(T,1)\}) + P(\{(T,2)\}) + P(\{(T,3)\}) + P(\{(T,4)\}) + P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\})$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

$$P(E \cap F) = P(\{(1,5)\}) + P(\{(1,6)\}) = \frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{9}$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 13.1

1. E, F എന്നീ രണ്ടു സംഭവങ്ങളിൽ, $P(E) = 0.6$, $P(F) = 0.3$, $P(E \cap F) = 0.2$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. $P(E|F)$, $P(F|E)$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

2. $P(B) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.32$ ആയാൽ $P(A|B)$ കണക്കാക്കുക.

3. $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.5$, $P(B|A) = 0.4$, ആയാൽ (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A|B)$ (iii) $P(A \cup B)$ എന്നിവ കാണുക.

4. $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$, $P(A|B) = \frac{2}{5}$ ആയാൽ $P(A \cup B)$ കാണുക.

5. $P(A) = \frac{6}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$ ആയാൽ

   (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A|B)$ (iii) $P(B|A)$ കാണുക.

6 മുതൽ 9 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ $P(E|F)$ കാണുക.

6. ഒരു നാണയം മൂന്ന് പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു.

   (i) E : മൂന്നാമത്തെ പ്രാവശ്യം നാണയത്തിൽ തല കിട്ടുന്നു.

   F : ആദ്യത്തെ രണ്ടുപ്രാവശ്യം തല കിട്ടുന്നു.

   (ii) E : കുറഞ്ഞത് രണ്ട് തല കിട്ടുന്നു. F : പരമാവധി രണ്ട് തല കിട്ടുന്നു.

   (iii) E : പരമാവധി രണ്ട് വാല് കിട്ടുന്നു. F : കുറഞ്ഞത് ഒരു വാല് കിട്ടുന്നു.

7. ഒരേ സമയം രണ്ട് നാണയങ്ങൾ എറിയുന്നു.

(i) E : ഒരു നാണയത്തിൽ വാല് കിട്ടുന്നു. F : ഒരു നാണയത്തിൽ തല കിട്ടുന്നു.

(ii) E : ഒരു നാണയത്തിലും വാല് ലഭിക്കുന്നില്ല

F : ഒരു നാണയത്തിലും തല ലഭിക്കുന്നില്ല

8. ഒരു ചതുരക്കട്ട 3 പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു.

E : മൂന്നാമത്തെ പ്രാവശ്യം 4 എന്ന മുഖം ലഭിക്കുന്നു

F : ആദ്യത്തെ പ്രാവശ്യം 6 എന്ന മുഖവും രണ്ടാമത്തെ പ്രാവശ്യം 5 എന്ന മുഖവും യഥാക്രമം ലഭിക്കുന്നു.

9. ഒരു കുടുംബ ചിത്രത്തിനുവേണ്ടി അമ്മ, അച്ഛൻ, മകൻ എന്നിവർ വരിയായി നിൽക്കുന്നു.

E : ഒരു അറ്റത്ത് മകൻ F : അച്ഛൻ നടുക്ക്

10. ഒരു കറുപ്പ് സമചതുരക്കട്ടയും ചുവപ്പ് സമചതുരക്കട്ടയും എറിയുന്നു.

(a) കറുപ്പ് സമചതുരക്കട്ടയിൽ 5 ലഭിക്കുമ്പോൾ, രണ്ടു സമചതുരക്കട്ടയിലെയും മുഖങ്ങളിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക 9 ൽ കൂടുതൽ ലഭിക്കാനുള്ള സോപാധിക സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

(b) ചുവപ്പ് സമചതുരക്കട്ടയിൽ 4 നേക്കാൾ വലിയ സംഖ്യ ലഭിക്കുമ്പോൾ രണ്ടു സമചതുരക്കട്ടയിലെയും മുഖങ്ങളിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക 8 കിട്ടാനുള്ള സോപാധിക സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

11. ഒരു ചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു $E = \{1,3,5\}$, $F = \{2,3\}$, $G = \{2,3,4,5\}$

ആയാൽ

(i) $P(E|F), P(F|E)$ (ii) $P(E|G), P(G|E)$

(iii) $P((E \cup F)|G), P((E \cap F)|G)$ എന്നിവ കാണുക.

12. ഒരു നവജാതശിശു ആണോ പെണ്ണോ ആകുന്നതിന് തുല്യ അവസരമാണുള്ളതെന്ന് വിചാരിക്കുക. ഒരു കുടുംബത്തിൽ രണ്ടു കുട്ടികൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ, മൂത്ത കുട്ടി പെൺകുട്ടിയായാൽ (i) രണ്ട് കുട്ടികളും പെൺകുട്ടികളാകാനുള്ള സോപാധികസാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക. (ii) കുറഞ്ഞത് ഒരാളെങ്കിലും പെൺകുട്ടിയായാൽ രണ്ടു കുട്ടികളും പെൺകുട്ടികളാകാനുള്ള സോപാധികസാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

13. ഒരു അധ്യാപകന്റെ കൈയ്യിലുള്ള ചോദ്യബാങ്കിൽ 300 ലളിതമായതും ശരിയോ/തെറ്റോ ആയ ചോദ്യങ്ങളും 200 പ്രയാസമുള്ളതും ശരിയോ/തെറ്റോ ആയ ചോദ്യങ്ങളും 500 ലളിതമായ ബഹുവിധ - ചോദ്യങ്ങളും 400 പ്രയാസമുള്ള ബഹുവിധ - ചോദ്യങ്ങളുണ്ട്. ഈ ചോദ്യബാങ്കിൽനിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു ചോദ്യം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ ചോദ്യം ഒരു ബഹുവിധ ചോദ്യമായാൽ അത് ലളിതമാകാനുള്ള സോപാധികസാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

14. രണ്ട് സമചതുരക്കട്ട എറിയുമ്പോൾ അവയുടെ മുഖങ്ങളിൽ വരുന്ന സംഖ്യകൾ വ്യത്യസ്തങ്ങളാണ്. ഇവയുടെ തുക 4 ആകാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

15. ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു. മൂന്നിന്റെ ഗുണിതമാണ് ലഭിക്കുന്നതെങ്കിൽ ഈ ചതുരക്കട്ട വീണ്ടും എറിയുന്നു. അപ്പോൾ മൂന്നിന്റെ ഗുണിതമല്ലാത്ത സംഖ്യയാണ് ലഭിക്കുന്നതെങ്കിൽ ഒരു നാണയം എറിയുന്നു. ഒരു പ്രാവശ്യമെങ്കിലും സമചതുരക്കട്ടയിൽ 3 എന്ന സംഖ്യ സൂചിപ്പിച്ചാൽ, നാണയത്തിൽ T വരാനുള്ള സോപാധിക സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

ചോദ്യം 16, 17 എന്നിവയിൽ ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

16. If $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 0$, ആയാൽ $P(A|B) =$

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$

(C) നിർവചിച്ചിട്ടില്ല (D) 1

17. A, B എന്നിവ രണ്ടു സംഭവങ്ങളാണ്. $P(A|B) = P(B|A)$ ആയാൽ

(A) $A \subset B, A \neq B$ (B) $A = B$

(C) $A \cap B = \phi$ (D) $P(A) = P(B)$

13.3 സാധ്യതയുടെ ഗുണന സിദ്ധാന്തം (Multiplication Theorem on Probability)

നിങ്ങളുടെ കൈവശമുള്ള ഒരു പെട്ടിയിൽ 3 നീല മാർബിളും 2 ചുവപ്പ് മാർബിളും 4 മഞ്ഞ മാർബിളും ഉണ്ടെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇതിൽ നിന്നും ഒരു മാർബിൾ എടുത്തതിനു ശേഷം അതിന്റെ നിറം രേഖപ്പെടുത്തുന്നു. ആ മാർബിൾ തിരികെ പെട്ടിയിൽ ഇട്ടതിനുശേഷം മറ്റൊരു മാർബിൾ എടുക്കുന്നു. എങ്കിൽ ഒരു നീല മാർബിളിനു ശേഷം ഒരു ചുവപ്പ് മാർബിൾ എടുക്കാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? ഇതേ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഇതുപോലെ ഒരു മാർബിൾ എടുക്കുന്നു. അത് തിരികെ പെട്ടിയിൽ ഇടുന്നില്ല. അതിനുശേഷം മറ്റൊരു മാർബിൾ എടുക്കുന്നു. എങ്കിൽ ഒരു നീല മാർബിളിനുശേഷം ഒരു ചുവപ്പ് മാർബിൾ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത പരിഗണിക്കുക.

E, F എന്നി രണ്ടു സംഭവങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, P(F) \neq 0$ എന്ന് നമുക്ക് അറിയാം.

$$P(E \cap F) = P(F) . P(E|F) \quad ...(1)$$

ഇതുപോലെ

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}, P(E) \neq 0$$

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \quad (E \cap F = F \cap E \text{ ആയതിനാൽ})$$

$$P(E \cap F) = P(E).\, P(F|E) \qquad \ldots(2)$$

(1) ഉം (2) ഉം ചേർന്ന്, $P(E \cap F) = P(E)P(F|E)$

$$= P(F)\, P(E|F);\ P(E) \neq 0;\ P(F) \neq 0.$$

മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഈ പ്രസ്താവനയെയാണ് സാധ്യതയുടെ ഗുണന സിദ്ധാന്തം എന്നു പറയുന്നത്.

രണ്ടിൽ കൂടുതൽ സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യതയുടെ ഗുണന സിദ്ധാന്തം.

E, F, G എന്നിവ ഒരു സാധ്യതാ ഗണത്തിന്റെ 3 സംഭവങ്ങളായാൽ

$$P(E \cap F \cap G) = P(E).\, P(F|E).\, P(G|E \cap F) = P(E).\, P(F|E).\, P(G|EF)$$

ഇതുപോലെ 4 സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യതയുടെ ഗുണനസിദ്ധാന്തവും നിർവചിക്കാൻ കഴിയും.

ഉദാഹരണം: 8

ഒരു ബാഗിൽ 10 കറുത്തപന്തുകളും 5 വെളുത്ത പന്തുകളും ഉണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും രണ്ട് പന്തുകൾ ഒന്നിനു പിറകേ ഒന്നായി എടുക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്ന പന്ത് തിരികെ ബാഗിൽ ഇടുന്നില്ല. എങ്കിൽ ഈ രണ്ടു പന്തുകളും കറുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

E, F എന്നീ സംഭവങ്ങൾ ആദ്യം എടുക്കുന്ന പന്ത് കറുപ്പ്, രണ്ടാമത് എടുക്കുന്ന പന്ത് കറുപ്പ് എന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $P(E \cap F)$ അല്ലെങ്കിൽ $P(EF)$ കണ്ടുപിടിക്കണം.

$$P(E) = P\,(\text{ആദ്യത്തെ പന്ത് കറുപ്പ്}) = \frac{10}{15}$$

E എന്ന സംഭവം ഇവിടെ ലഭിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഇപ്പോൾ 9 കറുത്ത പന്തുകളും 5 വെളുത്ത പന്തുകളുമാണ് ശേഷിക്കുന്നത്. ആദ്യത്തെ പന്ത് കറുത്തതാകുമ്പോൾ, രണ്ടാമത് തിരഞ്ഞെടുക്കുന്ന പന്ത് കറുത്തതാകാനുള്ള സോപാധിക സാധ്യത, $P(F|E) = \frac{9}{14}$

അതുകൊണ്ട്, $P(E \cap F) = P(E).\, P(F|E)$

$$= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$$

ഉദാഹരണം: 9

നന്നായി ഇടകലർത്തിയ 52 കാർഡുകളിൽ നിന്ന് ഒന്നിനുപിറകേ ഒന്നായി 3 കാർഡുകൾ എടുക്കുന്നു. ഈ കാർഡുകൾ തിരികെ വെയ്ക്കുന്നില്ല. എങ്കിൽ ആദ്യത്തെ രണ്ടു കാർഡുകൾ 'കിംഗ്' കാർഡുകളും മൂന്നാമത്തെ കാർഡ് ഒരു എയ്സും ആകാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

'K' എന്നത് ഒരു 'കിംഗ്' കാർഡ് ആകാനുള്ള സംഭവവും A എന്നത് കാർഡ് എയ്സ് ആകാനുള്ള സംഭവവും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ P(KKA) കണ്ടുപിടിക്കണം.

$$P(K) = \frac{4}{52}$$

P (K|K) എന്നത് ആദ്യം ഒരു കിംഗ് കാർഡ് കിട്ടിയാൽ രണ്ടാമത്തേതും കിംഗ് കാർഡ് ആകാനുള്ള സോപാധിക സാധ്യതയാണ്. ഇപ്പോൾ കിംഗ് കാർഡുകൾ 51 ൽ 3 എണ്ണമാണ്.

അതുകൊണ്ട്, $P(K|K) = \frac{3}{51}$

P(A|KK) എന്നത് ആദ്യരണ്ട് കാർഡുകളും കിംഗ് ആകുമ്പോൾ മൂന്നാമത്തെ കാർഡ് എയ്സ് ആകാനുള്ള സോപാധിക സാധ്യതയാണ്. ഇപ്പോൾ 4 എയ്സ് കാർഡുകളിൽ നിന്നും ഒന്ന് ശേഷിക്കുന്ന 50 കാർഡുകളിൽ നിന്നും എടുക്കണം.

അതുകൊണ്ട്, $P(A|KK) = \frac{4}{50}$

അതുകൊണ്ട്, സാധ്യതയുടെ ഗുണന സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച്,

$$P(KKA) = P(K).P(K|K).P(A|KK)$$
$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{4}{50} = \frac{2}{5525}$$

13.4 പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങൾ (Independent Events)

52 കാർഡുകളിൽ നിന്നും ഒരു കാർഡ് എടുക്കുന്ന പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ സാധ്യതാഗണത്തിലെ അടിസ്ഥാന സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യത ഒരുപോലെയാണെന്ന് കരുതാം. E, F എന്നീ സംഭവങ്ങൾ യഥാക്രമം ഒരു സ്പെയ്ഡ് കാർഡ്, ഒരു എയ്സ് കാർഡ് ലഭിക്കുന്നതായി പരിഗണിച്ചാൽ അവയുടെ സാധ്യതകൾ

$P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$; $P(F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ആണ്.

സ്പെയ്ഡിലെ ഏയ്സ് എന്ന സംഭവത്തെ $E \cap F$ എന്നതുകൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ, $P(E \cap F) = \frac{1}{52}$ ആണ്.

തുടർന്ന്, $P(E|F) = \dfrac{P(E\cap F)}{P(F)} = \dfrac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{13}} = \dfrac{1}{4}$

ഇവിടെ, $P(E|F) = \dfrac{1}{4} = P(E)$ ആണ്.

അതായത് E എന്ന സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യതയെ F ന്റെ സംഭാവ്യത ബാധിച്ചിട്ടില്ല എന്ന് മനസിലാക്കാം. ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ E, F എന്നീ സംഭവങ്ങളുടെ സംഭാവ്യത രണ്ടിനേയും ബാധിക്കുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് ഇവ രണ്ടും പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങളാണ് എന്ന് പറയാം.

നിർവചനം: 2

E, F എന്നീ സംഭവങ്ങൾ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങൾ ആകണമെങ്കിൽ $P(F|E) = P(F), P(E) \neq 0$

അതുപോലെ, $P(E|F) = P(E), P(F) \neq 0$ ആയിരിക്കും

ഈ നിർവചനത്തിൽ $P(E) \neq 0, P(F) \neq 0$ ആയിരിക്കും.

സാധ്യതയുടെ ഗുണന സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്, $P(E\cap F) = P(E) . P(F|E)$ എന്ന് പറയാം.

E, F എന്നീ സംഭവങ്ങൾ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലെങ്കിൽ $P(E\cap F) = P(E) . P(F)$ ആകും.

പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങളെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ നിർവചിക്കാം.

നിർവചനം: 3

ഒരേ പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണത്തിലെ രണ്ടു സംഭവങ്ങൾ E, F എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങൾ എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ

$$P(E\cap F) = P(E) . P(F) \text{ ആയിരിക്കണം.}$$

മുകളിൽ സൂചിപ്പിച്ചിരുന്ന ഉദാഹരണം പരിശോധിക്കാം. ഇവിടെ ഒരു പെട്ടിയിൽ 3 നീല മാർബിളും 2 ചുവന്ന മാർബിളും 4 മഞ്ഞ മാർബിളും ഉണ്ട്. ഇവിടെ ആദ്യം ഒരു മാർബിൾ എടുത്തതിനുശേഷം അതിന്റെ നിറം രേഖപ്പെടുത്തി തിരികെ പെട്ടിയിൽതന്നെ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. അതിനാൽ ഒന്നാമത് തിരഞ്ഞെടുത്ത മാർബിളിന്റെ സാധ്യത രണ്ടാമത് തിരഞ്ഞെടുത്ത മാർബിളിന്റെ സാധ്യതയെ ബാധിക്കുന്നില്ല.

$\therefore$ P (ചുവന്ന മാർബിൾ) $= \dfrac{2}{9}$

P (നീല മാർബിൾ) $= \dfrac{3}{9}$

അതിനാൽ P (ചുവന്ന മാർബിൾ, നീലമാർബിൾ) $= \dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{3}{9} = \dfrac{6}{81} = \dfrac{2}{27}$

ഇവിടെ ചുവന്ന മാർബിൾ ലഭിക്കുന്നു എന്ന സംഭവവും നീല മാർബിൾ ലഭിക്കുന്നു എന്ന സംഭവവും പരസ്പരാശ്രിത സംഭവങ്ങളല്ല.

എന്നാൽ ഇതേ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ആദ്യം തിരഞ്ഞെടുക്കുന്ന മാർബിളിന്റെ നിറം രേഖപ്പെടുത്തിയ ശേഷം ആ മാർബിൾ തിരികെ പെട്ടിയിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നില്ല. അതിനാൽ ഒന്നാമത് തിരഞ്ഞെടുത്ത മാർബിളിന്റെ സാധ്യത രണ്ടാമത് തിരഞ്ഞെടുത്ത മാർബിളിന്റെ സാധ്യതയെ സ്വാധീനിക്കുന്നുണ്ട്. കാരണം രണ്ടാമത് ഒരു മാർബിൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ മാർബിളുകളുടെ ആകെ എണ്ണത്തിൽ ഒരു മാർബിളിന്റെ കുറവുണ്ടാകുന്നു.

P (ചുവന്ന മാർബിൾ) $= \dfrac{2}{9}$

P (നീല മാർബിൾ) $= \dfrac{3}{8}$

P (ചുവന്ന മാർബിൾ, നീല മാർബിൾ) $= \dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{8} = \dfrac{6}{72}=\dfrac{1}{12}$

ഇവിടെ ചുവന്ന മാർബിൾ ലഭിക്കുന്നു എന്ന സംഭവവും നീല മാർബിൾ ലഭിക്കുന്നു എന്ന സംഭവവും പരസ്പരാശ്രിതങ്ങളാണ്.

കുറിപ്പ്

(i) E, F എന്നീ സംഭവങ്ങൾ പരസ്പരാശ്രിതമെന്നു പറയണമെങ്കിൽ $P(E\cap F)\neq P(E).P(F)$ ആയിരിക്കണം.

(ii) ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ പരസ്പരാശ്രിത സംഭവങ്ങൾ, പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങൾ എന്നിവ തമ്മിൽ ഒരു ആശയക്കുഴപ്പം ഉണ്ടാകാറുണ്ട്. പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങൾ സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യതയുമായി ബന്ധപ്പെട്ടാണ് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത്. പക്ഷേ പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങൾ എന്നത് സംഭവങ്ങളുമായി (സാധ്യതാഗണത്തിന്റെ ഉപഗണങ്ങൾ) ബന്ധപ്പെട്ടാണ് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത്. കൂടാതെ 'പരസ്പരം ഒഴിവാക്കുന്നത്' സംഭവങ്ങൾക്ക് പൊതുവായി ഒരു പരിണതഫലം പോലും ഉണ്ടാകാറില്ല. എന്നാൽ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങൾക്ക് പൊതുവായി പരിണതഫലം ഉണ്ടാകാം. അതിനാൽ പരസ്പരാശ്രിത സംഭവങ്ങൾ, പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങൾ ഇവ ഒരേ അർത്ഥത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുവാൻ കഴിയുകയില്ല. അതായത് പൂജ്യമല്ലാത്ത സാധ്യതയുള്ള രണ്ട് പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങൾ പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളല്ല. അതുപോലെ പൂജ്യമല്ലാത്ത സാധ്യതയുള്ള രണ്ട് ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങൾ പരസ്പരാശ്രിത സംഭവവുമല്ല.

(iii) രണ്ട് പരീക്ഷണങ്ങൾ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലെന്ന് പറയണമെങ്കിൽ ഈ പരീക്ഷണങ്ങൾ നടപ്പിലാക്കുമ്പോൾ E എന്നത് ആദ്യത്തെയും F രണ്ടാമത്തെയും പരീക്ഷണവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട സംഭവമായാൽ E, F ഒന്നിടവിട്ട് ഒന്ന് ലഭിക്കുന്ന സംഭവത്തിന്റെ സാധ്യത എന്നിവയുടെ പ്രത്യേകം പ്രത്യേകം സാധ്യതയുടെ ഗുണനഫലമായിരിക്കും. അതായത് $P(E\cap F)=P(E).P(F)$

(iv) A, B, C എന്നീ മൂന്ന് സംഭവങ്ങൾ പരസ്പരാശ്രിതങ്ങളല്ലെന്നു പറയണമെങ്കിൽ,

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A\cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B\cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

ആയിരിക്കണം. ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു നിബന്ധന പാലിക്കപ്പെടുന്നില്ലെങ്കിൽ ഇവ പരസ്പരാശ്രിതങ്ങളായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 10

ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു. E എന്ന സംഭവം സമചതുരക്കട്ടയിൽ 3 ന്റെ ഗുണിതം കിട്ടുന്നു എന്നും F എന്ന സംഭവം സമചതുരക്കട്ടയിൽ ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ കിട്ടുന്നു എന്നും ഇരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ E, F ഇവ പരസ്പരാശ്രിതമാണോ അല്ലയോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{3, 6\}, F = \{2, 4, 6\}, E\cap F = \{6\}$$

$$P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},\ P(E\cap F) = \frac{1}{6}$$

$$P(E).P(F) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(E\cap F)$$

∴ E, F എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങളാണ്.

ഉദാഹരണം: 11

ഒരു സമചതുരക്കട്ട രണ്ട് പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു. A എന്ന സംഭവം 'ഒന്നാമത്തെ പ്രാവശ്യം ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യ കിട്ടുന്നു' എന്നതും B എന്ന സംഭവം 'രണ്ടാമത്തെ പ്രാവശ്യം ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യ കിട്ടുന്നു' എന്നതുമാണ്. A, B എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതമാണോ അല്ലയോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

സാധ്യതാ ഗണത്തിൽ 36 അംഗങ്ങളാണുള്ളത്.

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$P(A\cap B) = P$ (രണ്ടു പ്രാവശ്യവും ഒറ്റസംഖ്യ)

$$= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{4}$$

അതുകൊണ്ട്, $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

അതുകൊണ്ട്, A, B എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങളാണ്.

ഉദാഹരണം: 12

ഒരേ സമയം 3 നാണയങ്ങൾ എറിയുന്നു. E എന്ന സംഭവം 'മൂന്ന് തല അല്ലെങ്കിൽ മൂന്ന് വാല്', F എന്ന സംഭവം 'കുറഞ്ഞത് രണ്ട് തല', G എന്ന സംഭവം 'പരമാവധി രണ്ട് തല' എന്നിങ്ങനെയാണ്. (E, F), (E, G), (F, G) എന്നീ ജോടികളിൽ ഏതൊക്കെയാണ് പരസ്പരാശ്രിതമായത്, പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്തത് എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

$$E = \{HHH, TTT\}, F = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$$

$$G = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

$$E \cap F = \{HHH\}, E \cap G = \{TTT\}, F \cap G = \{HHT, HTH, THH\}$$

$$P(E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, P(G) = \frac{7}{8}$$

$$P(E \cap F) = \frac{1}{8}, P(E \cap G) = \frac{1}{8}, P(F \cap G) = \frac{3}{8}$$

$$P(E).P(F) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, P(E) \cdot P(G) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{32}$$

$$P(F).P(G = \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{16}$$

അതുകൊണ്ട്, $P(E \cap F) = P(E).P(F)$

$$P(E \cap G \neq P(E).P(G)$$

$$P(F \cap G) \neq P(F).P(G)$$

അതുകൊണ്ട്, (E,F) എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്തതും (E, G) (F, G) എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതമായതും ആയ സംഭവങ്ങളാണ്.

ഉദാഹരണം: 13

E,F എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങളായാൽ E, F′ എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങളായിരിക്കും.

പരിഹാരം

E, F എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങളാണ്.

$$P(E\cap F) = P(E).P(F) \quad \ldots(1)$$

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും $E \cap F$, $E \cap F'$ എന്നിവ പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്ന സംഭവങ്ങളാണ്.

$$\therefore E = (E\cap F)\cap(E\cap F')$$

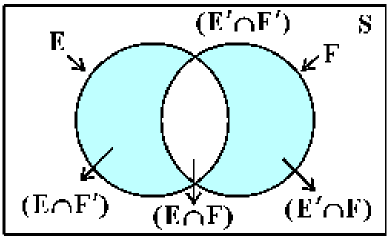
$$\therefore P(E) = P(E\cap F)+P(E\cap F')$$

$$P(E\cap F') = P(E)-P(E\cap F)$$

$$= P(E)-P(E).P(F)$$

$$= P(E)(1-P(F))$$

$$= P(E).P(F')$$



ചിത്രം 13.3

∴ E, F′ എന്നിവ പരിസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സാംഭവങ്ങളാണ്.

> **കുറിപ്പ്**
>
> ഇതുപോലെ E, F എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ ആയാൽ,
>
> (a) E', F എന്നിവ പരസ്പാരാശ്രിതങ്ങളല്ലാത്തവയായിരിക്കും
>
> (b) E', F' എന്നിവ പരസ്പാരാശ്രിതങ്ങളല്ലാത്തവയായിരിക്കും

ഉദാഹരണം: 14

A, B എന്നിവ രണ്ട് പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സാംഭവങ്ങളാണ്. A അല്ലെങ്കിൽ B ലഭിക്കാനുള്ള സാധ്യത $1 - P(A')P(B')$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

P(A അല്ലെങ്കിൽ B) $= P(A\cup B)$

$$= P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$= P(A) \quad P(B)-P(A)P(B)$$

$$= P(A) + P(B)[1 - P(A)]$$

$$= P(A) + P(B).P(A')$$

$$= 1 - P(A') + P(B)P(A')$$

$$= 1 - P(A')[1 - P(B)]$$

$$= 1 - P(A')P(B')$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 13.2

1. $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ ആയാൽ $P(A \cap B)$ കണക്കാക്കുക. A, B എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതങ്ങളല്ലാത്ത സംഭവങ്ങളാണ്.

2. 52 കാർഡുകളിൽ നിന്ന് മുൻവിധിയില്ലാതെ രണ്ട് കാർഡ് എടുക്കുന്നു. എടുക്കുന്ന കാർഡ് തിരികെ വെയ്ക്കുന്നില്ല. എങ്കിൽ ഈ രണ്ടു കാർഡുകളും കറുത്തത് ആകാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

3. ഒരു പെട്ടിയിലെ ഓറഞ്ചുകൾ പരിശോധിക്കുന്നതിനായി മുൻവിധിയില്ലാതെ 3 ഓറഞ്ചുകൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ ഓറഞ്ചുകൾ തിരികെ പെട്ടിയിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നില്ല. ഈ മൂന്ന് ഓറഞ്ചുകളും നല്ലതാണെങ്കിൽ ആ പെട്ടി വില്പനയ്ക്ക് അനുവാദം കൊടുക്കുന്നു. എങ്കിൽ 15 ഓറഞ്ചുകളുള്ള ഒരു പെട്ടിയിൽ 12 നല്ല ഓറഞ്ചും 3 കേടായ ഓറഞ്ചും ഉണ്ടെങ്കിൽ ആ പെട്ടി വിൽപ്പനയ്ക്ക് അനുവദിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

4. ഒരു നാണയവും ഒരു സമചതുരക്കട്ടയും എറിയുന്നു. A എന്ന സംഭവം 'നാണയത്തിൽ തല ലഭിക്കുന്നു' എന്നും B എന്ന സംഭവം സമചതുരക്കട്ടയിൽ 3 എന്ന സംഖ്യ ലഭിക്കുന്നു' എന്നും വിചാരിക്കുക. A,B എന്നിവ പരസ്പാശ്രിതമാണോ അല്ലയോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

5. ഒരു സമചതുരക്കട്ടയിൽ 1, 2, 3 എന്നീ സംഖ്യകൾ ചുവപ്പ് നിറത്തിലും 4, 5, 6 എന്നീ സംഖ്യകൾ പച്ചനിറത്തിലും അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഈ സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു. A എന്ന സംഭവം 'സമചതുരക്കട്ടയിലെ സംഖ്യ ഇരട്ടസംഖ്യ' എന്നും B എന്ന സംഭവം 'സംഖ്യ ചുവപ്പ്' എന്നും വിചാരിക്കുക. എങ്കിൽ A, B എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതങ്ങളാണോ അല്ലയോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

6. E, F എന്നീ രണ്ടു സംഭവങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക. $P(E) = \frac{3}{5}$, $P(F) = \frac{3}{10}$, $P(E \cap F) = \frac{1}{5}$. E, F എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതങ്ങളാണോ അല്ലയോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

7. A, B എന്നീ രണ്ടു സംഭവങ്ങളിൽ, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$, $P(B) = p$.

(i) A, B എന്നിവ പരസ്പരം ഒഴിവാക്കുന്ന സംഭവങ്ങളായാൽ p കാണുക.

(ii) A, B എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലെങ്കിൽ p കാണുക.

8. A, B എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത രണ്ടു സംഭവങ്ങളാണ്. $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$. ആയാൽ

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$

(iii) $P(A|B)$ (iv) $P(B|A)$ ഇവ കാണുക.

9. A, B എന്നിവ രണ്ട് സംഭവങ്ങളാണ്. $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ ആയാൽ $P(A' \cap B')$ കാണുക.

10. A, B എന്നിവ രണ്ട് സംഭവങ്ങളാണ്. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{7}{12}$, $P(A' \cup B') = \frac{1}{4}$. A, B എന്നിവ പരസ്പാശ്രിതമാണോ അല്ലയോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

11. A, B എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത രണ്ട് സംഭവങ്ങളാണ്. $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$. ആയാൽ

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cap B')$

(iii) $P(A \cup B)$ (iv) $P(A' \cap B')$ കാണുക.

12. ഒരു സമചതുരക്കട്ട മൂന്നു പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു. കുറഞ്ഞത് ഒരു പ്രാവശ്യമെങ്കിലും ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത കാണുക.

13. 10 കറുത്ത പന്തുകളും 8 ചുവന്ന പന്തുകളുമുള്ള ഒരു പെട്ടിയിൽ നിന്ന് രണ്ട് പന്തുകൾ എടുക്കുന്നു. ഇവ തിരികെ പെട്ടിയിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

(i) രണ്ടു പന്തുകളും ചുവന്നത്

(ii) ആദ്യത്തെ പന്ത് കറുത്തത് രണ്ടാമത്തെ പന്ത് ചുവന്നത്

(iii) ഒന്ന് കറുപ്പും മറ്റേത് ചുവപ്പും.

14. A, B എന്നീ രണ്ടു പേർ ഒരു ഗണിതപ്രശ്നത്തിന് സ്വതന്ത്രമായി പരിഹാരം കാണുന്നതിനുള്ള സാധ്യത $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ എന്നിങ്ങനെയാണ്. രണ്ടുപേരും സ്വതന്ത്രമായി ഇതിന്റെ പരിഹാരം കാണുന്നതിനു ശ്രമിക്കുന്നു. എങ്കിൽ

(i) ഈ പ്രശ്നത്തിനു പരിഹാരം കാണാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(ii) കൃത്യമായി ഒരാൾ മാത്രം പരിഹാരം കാണാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

15. 52 കാർഡുകളിൽ നിന്നും ക്രമരഹിതമായി ഒരു കാർഡ് എടുക്കുന്നു. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതെല്ലാം ചോദ്യത്തിലാണ് E, F എന്നിവ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്തത് എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) E : കാർഡ് ഒരു സ്പേഡാണ്
F : കാർഡ് ഒരു എയ്സ് ആണ്

(ii) E : കാർഡ് കറുപ്പാണ്
F : കാർഡ് കിംഗ് ആണ്

(iii) E : കാർഡ് കിംഗ് അല്ലെങ്കിൽ ക്യൂൻ ആണ്
F : കാർഡ് ക്യൂൻ അല്ലെങ്കിൽ ജാക്ക് ആണ്.

16. ഒരു ഹോസ്റ്റലിലെ 60% കുട്ടികൾ ഹിന്ദി പത്രം വായിക്കുന്നു. 40% കുട്ടികൾ ഇംഗ്ലീഷ് പത്രം വായിക്കുന്നു. 20% കുട്ടികൾ ഇംഗ്ലീഷും ഹിന്ദിയും പത്രങ്ങൾ വായിക്കുന്നു. ഒരു കുട്ടിയെ തിരഞ്ഞെടുത്താൽ,

(a) ഈ കുട്ടി ഇംഗ്ലീഷ് പത്രമോ ഹിന്ദി പത്രമോ വായിക്കാതിരിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക,

(b) ഈ കുട്ടി ഹിന്ദി പത്രം വായിക്കുമെങ്കിൽ ഇംഗ്ലീഷ് പത്രവും വായിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക,

(c) ഈ കുട്ടി ഇംഗ്ലീഷ് പത്രം വായിക്കുമെങ്കിൽ ഹിന്ദി പത്രം വായിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാകുക.

17, 18 എന്നീ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

17. രണ്ട് ചതുരക്കട്ടകൾ എറിയുമ്പോൾ ഓരോ ചതുരക്കട്ടയിലും ഒരു അഭാജ്യ സംഖ്യ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത.

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{36}$

18. A, B എന്നീ സംഭവങ്ങൾ പരസ്പരാശ്രിതങ്ങളല്ല എങ്കിൽ

(A) A, B പരസ്പരം ഒഴിവാക്കാനാവാത്ത സംഭവങ്ങളാണ്

(B) $P(A'B') = [1 - P(A)]\,[1 - P(B)]$

(C) $P(A) = P(B)$

(D) $P(A) + P(B) = 1$

13.5 ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തം (Baye's Theorem)

ബാഗ് I, ബാഗ് II, എന്നീ രണ്ടു ബാഗുകളിൽ ബാഗ് I ൽ 2 വെളുത്ത പന്തുകളും 3 ചുവന്ന പന്തുകളും ബാഗ് II ൽ 4 വെളുത്ത പന്തുകളും 5 ചുവന്ന പന്തുകളും ഉണ്ട്. ഒരു ബാഗിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് എടുക്കുന്നു. ഏതെങ്കിലും ഒരു ബാഗ് തിരഞ്ഞെടുക്കാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1}{2}$ ആണ്. നമുക്ക് ഒരു പ്രത്യേക നിറത്തിലുള്ള പന്ത് ബാഗ് I-ൽ നിന്നും ബാഗ് II -ൽ

നിന്നും ലഭിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കാം. എന്നാൽ ഒരു പ്രത്യേക നിറത്തിലുള്ള പന്ത് ഏത് ബാഗിൽ നിന്നാണ് എടുക്കുന്നത് എന്നതിന്റെ സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കുമോ? അതായത് ഒരു സംഭവം ലഭിച്ചു കഴിയുമ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ ബാഗ് തിരഞ്ഞെടുക്കാനുള്ള തിരിച്ചുള്ള സാധ്യത (reverse probability) കണ്ടുപിടിക്കണം. പ്രസിദ്ധഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ജോൺ ബേയ്സ്, സോപാധിക സാധ്യത ഉപയോഗിച്ച് 'തിരിച്ചുള്ള സാധ്യത' കണ്ടു പിടിച്ചു. ഈ സിദ്ധാന്തത്തെ ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തം എന്നു പറയുന്നു. ഇത് 1763 ലാണ് പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയത്.

13.5.1 ഒരു സാധ്യതാഗണത്തിന്റെ വിഭജനം (Partition of a sample space)

$E_1, E_2, ..., E_n$ എന്നീ സംഭവങ്ങൾ ഒരു സാധ്യതാഗണം S നെ വിഭജിക്കുന്നു എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ,

(a) $E_i \cap E_j = \phi, i \neq j, i, j = 1, 2, 3, ..., n$

(b) $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$

(c) $P(E_i) > 0$ എല്ലാ $i = 1, 2, ..., n$ നും

മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ $E_1, E_2, ..., E_n$ എന്നീ സംഭവങ്ങൾ സാധ്യതാഗണം S നെ വിഭജിക്കണമെങ്കിൽ അവ ജോടികളായി വിയുക്ത, സമഗ്ര ഗണം (mutually exclusive and exhaslive) ആയിരിക്കണം. കൂടാതെ ഒരു സംഭവത്തിന്റെയും സാധ്യത പൂജ്യം ആയിരിക്കരുത്.

E എന്ന സംഭവവും E′ എന്ന സംഭവവും സാധ്യതാഗണം S നെ വിഭജിക്കുന്നുണ്ട്. കാരണം $E \cap E' = \phi$, $E \cup E' = S$ ആണ്.

13.3 ൽ തന്നിരിക്കുന്ന വെൻചിത്രത്തിൽ, $\{E \cap F', E \cap F, E' \cap F, E' \cap F'\}$ എന്നത് സാധ്യതാ ഗണം S ന്റെ ഒരു വിഭജനമാണ്. ഒരു സാധ്യതാഗണം S ന് വിവിധ വിഭജനങ്ങളുണ്ടാവാം. എല്ലാ വിഭജനങ്ങളും ഒന്നു തന്നെയായിരിക്കണമെന്നില്ല.

13.5.2 മൊത്ത സാധ്യതാ സിദ്ധാന്തം (Theorem of total probability)

$\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ എന്നത് S എന്ന സാധ്യതഗണത്തിന്റെ ഒരു വിഭജനമാണ്. $E_1, E_2, ..., E_n$ എന്നീ സംഭവങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സാധ്യത പൂജ്യമല്ല എന്ന് വിചാരിക്കുക. S ന്റെ ഒരു സംഭവമാണ് A എന്ന് വിചാരിക്കുക, എങ്കിൽ

$$P(A) = P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) + ... + P(E_n)P(A|E_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)$$

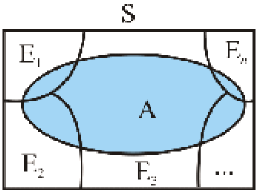
തെളിവ്:

$E_1, E_2, ..., E_n$ എന്നത് S ന്റെ വിഭജനമാണ് എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

$$S = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$$

$$E_i \cap E_j = \phi,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} A &= A \cap S \\ &= A \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) \\ &= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \ldots \cup (A \cap E_n) \end{aligned}$$



ചിത്രം 13.4

$A \cap E_i$, $A \cap E_j$ എന്നിവ E_i , E_j എന്നിവയുടെ ഉപഗണങ്ങളാണ്

E_i , E_j വിയുക്തങ്ങളാണ്, $i \neq j$. $\therefore A \cap E_i$. $A \cap E_j$ എന്നിവയും വിയുക്തങ്ങളാണ്. $i \neq j$. i. $j = 1, 2. \ldots, n$.

$$\text{അതുകൊണ്ട്, } P(A) = P[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \ldots \cup (A \cap E_n)]$$

$$= P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) \ \ldots + P(A \cap E_n)$$

$$P(A \cap E_i) = P(E_i)P(A|E_i),\ P(E_i) \neq 0\ \forall i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{(ഗുണന സിദ്ധാന്തം)}$$

$$\text{അതുകൊണ്ട്, } P(A) = P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) + \ldots + P(E_n)P(A|E_n)$$

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)$$

ഉദാഹരണം: 15

ഒരാൾ ഒരു നിർമാണപ്രവർത്തനം ഏറ്റെടുക്കുന്നു. ഒരു സമരം ഉണ്ടാകാനുള്ള സാധ്യത 0.65. സമരം ഇല്ലെങ്കിൽ ഇല്ലെങ്കിൽ നിശ്ചിത സമയത്തുതന്നെ ജോലി പൂർത്തിയാക്കാനുള്ള സാധ്യത 0.80 സമരം ഉണ്ടെങ്കിൽ ജോലി പൂർത്തിയാക്കാനുള്ള സാധ്യത 0.32 ആണ്. എങ്കിൽ നിശ്ചിത സമയത്തുതന്നെ ജോലി പൂർത്തിയാക്കാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

സമയത്തു തന്നെ ജോലി പൂർത്തിയാക്കാനുള്ള സംഭവം A എന്നിരിക്കട്ടെ. സമരം ഉണ്ടാകുന്നു എന്ന സംഭവം B യും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. നമുക്ക് P(A) കണ്ടുപിടിക്കണം.

$$P(B) = 0.65,\ P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35$$

$$P(A|B) = 0.32,\ P(A|B') = 0.80$$

B, B′ എന്നിവ S ന്റെ ഒരു വിഭജനമായതിനാൽ,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') \\ &= 0.65 \times 0.32 + 0.35 \times 0.8 \\ &= 0.208 + 0.28 = 0.488 \end{aligned}$$

അതായത്, പ്രസ്തുത നിർമാണപ്രവർത്തനം സമയത്തിന് പൂർത്തിയാക്കാനുള്ള സാധ്യത 0.488 ആണ്.

ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തം (Bayes' Theorem)

$E_1, E_2 \ldots\ldots E_n$ എന്നത് ശൂന്യമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങളും അവ S ന്റെ വിഭജനവുമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. അതായത് $E_1, E_2, \ldots, E_n$ പരസ്പരം വിയുക്തങ്ങളും $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = S$ എന്നുമാണ്. A എന്നത് സാധ്യത പൂജ്യമല്ലാത്ത ഒരു സംഭവമാണെങ്കിൽ

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

തെളിവ്

സോപാധിക സാധ്യത ഉപയോഗിച്ച്,

$$P(E_i|A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)}$$

കുറിപ്പ്

ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തത്തിൽ, $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ഇവയെ ഊഹങ്ങൾ *(hypotheses)* എന്നും

$P(E_i)$ *(priori probability)* എന്നും

$P(E_i|A)$: *(posteriori probability)* എന്നും വിളിക്കുന്നു.

ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തത്തെ 'കാരണങ്ങളുടെ' സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുന്ന സമവാക്യം എന്നും പറയാറുണ്ട്.

ഉദാഹരണം: 16

ബാഗ് I ൽ 3 ചുവന്ന പന്തുകളും 4 കറുത്ത പന്തുകളും ഉണ്ട്. ബാഗ് IIൽ 5 ചുവന്ന പന്തുകളും 6 കറുത്ത പന്തുകളും ഉണ്ട്. ഒരു ബാഗിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ തിരഞ്ഞെടുത്ത പന്ത് ചുവന്നതാണെങ്കിൽ ആയത് ബാഗ് II ൽ നിന്നും എടുത്തതാവാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

ഒന്നാമത്തെ ബാഗ് തെരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള സംഭവം E_1 എന്നും രണ്ടാമത്തെ ബാഗ് തെരഞ്ഞെടുക്കുവാനുള്ള സംഭവം E_2 എന്നും വിചാരിക്കുക. A എന്ന സംഭവം 'ഒരു ചുവന്ന പന്ത് എടുക്കുന്നു' എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|E_1) = P\,(\text{ഒന്നാമത്തെ ബാഗിൽ നിന്നും ഒരു ചുവന്ന പന്ത്}) = \frac{3}{7}$$

$$P(A|E_2) = P\,(\text{രണ്ടാമത്തെ ബാഗിൽ നിന്നും ഒരു ചുവന്ന പന്ത്}) = \frac{5}{11}$$

$P(E_2|A)$ ആണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്.

$$\text{അതുകൊണ്ട്, } P(E_2|A) = \frac{P(E_2)P(A|E_2)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}} = \frac{35}{68}$$

ഉദാഹരണം: 17

I, II, III എന്നിങ്ങനെ ഒരു പോലെയുള്ള മൂന്ന് പെട്ടികളുണ്ട്. ഇവയിൽ ഓരോന്നിലും രണ്ട് നാണയങ്ങൾ വീതം ഉണ്ട്. ഒന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽ രണ്ടും സ്വർണനാണയങ്ങളാണ്. രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ രണ്ടും വെള്ളി നാണയങ്ങളാണ്. മൂന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽ ഒരു സ്വർണനാണയവും ഒരു വെള്ളി നാണയവുമാണുള്ളത്. ഒരാൾ ഒരു പെട്ടി തെരഞ്ഞെടുത്തിനുശേഷം അതിൽ നിന്നും ഒരു നാണയം എടുക്കുന്നു. ഈ നാണയം സ്വർണ നാണയമായാൽ ആ പെട്ടിയിലെ മറ്റേ നാണയവും സ്വർണനാണയമാകാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

E_1, E_2, E_3 എന്നി സംഭവങ്ങൾ I, II, III എന്നി പെട്ടികൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതും, സംഭവം A 'എടുക്കുന്നത് സ്വർണനാണയം' എന്നുമിരിക്കട്ടെ.

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(A|E_1) = P(\text{ഒന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്നും സ്വർണനാണയം}) = \frac{2}{2} = 1$$

$$P(A|E_2) = P(\text{രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്നും സ്വർണനാണയം}) = 0$$

$$P(A|E_3) = P(\text{മൂന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്നും സ്വർണ്ണനാണയം}) = \frac{1}{2}$$

പെട്ടിയിലെ മറ്റേ നാണയവും സ്വർണമാവാനുള്ള സാധ്യത = സ്വർണ്ണനാണയം ഒന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്നും എടുക്കാനുള്ള സാധ്യത = $P(E_1|A)$.

$P(E_1|A)$ ആണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്.

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)P(A|E_1)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

ഉദാഹരണം: 18

ഒരു HIV ടെസ്റ്റിന്റെ വിവരങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. HIV ബാധിതരായ ആൾക്കാരിൽ, 90% പേർക്ക് രോഗമുള്ളതായി സ്ഥിരീകരിക്കുന്നു. 10% സ്ഥിരീകരിക്കപ്പെടുന്നില്ല. HIV ഇല്ലാത്ത ആൾക്കാരിൽ 99% HIV^{-ve} എന്നും പക്ഷെ 1% HIV^{+ve} എന്നും കണ്ടെത്തുന്നു. HIV ബാധിതരായ കുറേയധികം ജനങ്ങളിൽ നിന്നും ഒരാളെ യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. അതിനുശേഷം ടെസ്റ്റ് നടത്തുന്നു. ഈ ടെസ്റ്റിൽ HIV^{+ve} എന്ന് കണ്ടെത്തുന്നു എങ്കിൽ ഈ ആളിന് HIV ഉണ്ടാകാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന ആളിന് യതാർത്ഥത്തിൽ HIV ഉണ്ട് എന്ന സംഭവത്തെ E എന്നും ആളിന് HIV^{+ve} ആണ് എന്ന് ടെസ്റ്റിൽ സ്ഥിരീകരിക്കപ്പെടുന്ന സംഭവത്തെ A എന്നും വിളിക്കുക. നമുക്ക് $P(E|A)$ കണ്ടുപിടിക്കണം. E' എന്നത് തിരഞ്ഞെടുത്ത ആളിന് യഥാർത്ഥത്തിൽ HIV ഇല്ല എന്ന സംഭവത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$\{E, E'\}$ എന്നത് സാധ്യതാഗണത്തിന്റെ ഒരു വിഭജനം (partition) ആണ്.

$$P(E) = 0.1\% = \frac{0.1}{100} = 0.001$$

$$P(E') = 1 - P(E) = 0.999$$

$P(A|E)$ = P(പരിശോധിച്ച ആളിന് യഥാർത്ഥത്തിൽ HIV +ve/ആളിന് യഥാർത്ഥത്തിൽ HIV ഉണ്ട്)

$$= 90\% = \frac{90}{100} = 0.9$$

$P(A|E')$ = P(പരിശോധിച്ചയാളിന് HIV +ve/ആ ആളിന് യഥാർത്ഥത്തിൽ HIV ഇല്ല)

$$= 1\% = \frac{1}{100} = 0.01$$

അതുകൊണ്ട്, $P(E|A) = \dfrac{P(E)P(A|E)}{P(E)P(A|E)+P(E')P(A|E')}$

$$= \frac{0.001\times0.9}{0.001\times0.9+0.999\times0.01} = \frac{90}{1089}$$

$= 0.083$ (ഏകദേശം)

അതായത്, ക്രമരഹിതമായി ഒരാളെ തെരഞ്ഞെടുത്ത് അയാൾക്ക് ടെസ്റ്റ് ചെയ്യുമ്പോൾ HIV−ive ഉണ്ടാകാനുള്ള സാധ്യത 0.083 ആണ്.

ഉദാഹരണം: 19

ഒരു ഫാക്ടറിയിൽ ബോൾട്ടുകൾ നിർമിക്കുന്നു. A, B, C എന്നീ യന്ത്രങ്ങൾ യഥാക്രമം 25%, 35%, 40% ബോൾട്ടുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു. അവയിൽ 5%, 4%, 2% ബോൾട്ടുകൾ കേടായവയാണ്. ഇതിൽ നിന്നും മുൻവിധിയില്ലാതെ ഒരു ബോൾട്ട് എടുക്കുന്നു, ഈ ബോൾട്ട് കേടായതാണെങ്കിൽ അത് യന്ത്രം B യിൽ നിർമിച്ചതാകാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

B_1 : A എന്ന യന്ത്രത്തിൽ ബോൾട്ട് നിർമിക്കുന്നു.

B_2 : B എന്ന യന്ത്രത്തിൽ ബോൾട്ട് നിർമിക്കുന്നു.

B_3 : C എന്ന യന്ത്രത്തിൽ ബോൾട്ട് നിർമിക്കുന്നു.

B_1, B_2, B_3 എന്നിവ പരസ്പരം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്നവയും (mutually exclusive) സമഗ്രവും (exhaustive) ആയ സംഭവങ്ങളാണ്. ഇവ സാധ്യതാഗണത്തിന്റെ ഒരു വിഭജനം (partition) ആണ്.

E ക്രമരഹിതമായിഎന്ന സംഭവം 'ബോൾട്ട് കേടായതാണ്.'

അതുകൊണ്ട്, $P(B_1) = 25\% = 0.25$, $P(B_2) = 0.35$, $P(B_3) = 0.40$

$P(E|B_1) = 5\% = 0.05$ $P(E|B_2) = 0.04$, $P(E|B_3) = 0.02$.

ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്,

$$P(B_2|E) = \frac{P(B_2)P(E|B_2)}{P(B_1)P(E|B_1)+P(B_2)P(E|B_2)+P(B_3)P(E|B_3)}$$

$$= \frac{0.35 \times 0.04}{0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.40 \times 0.02}$$

$$= \frac{0.0140}{0.0345} = \frac{28}{69}$$

ഉദാഹരണം: 20

ഒരു ഡോക്ടർ ഒരു രോഗിയെ സന്ദർശിക്കുന്നു. മുൻകാല അനുഭവങ്ങളിൽ നിന്നും അദ്ദേഹം ട്രെയിൻ, ബസ്, സ്കൂട്ടർ, മറ്റേതെങ്കിലും മാർഗം, യാത്ര ചെയ്യാനുള്ള സാധ്യത യഥാക്രമം $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}$ എന്നിങ്ങനെയാണ്. ട്രെയിൻ, ബസ്, സ്കൂട്ടർ എന്നീ മാർഗങ്ങളിൽ വരുമ്പോൾ വൈകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}$ എന്നിങ്ങനെയാണ്. മറ്റേതെങ്കിലും മാർഗത്തിലാണ് വരുന്നതെങ്കിൽ അദ്ദേഹം വൈകുകയില്ല. അദ്ദേഹം വൈകിയാണ് എത്തുന്നതെങ്കിൽ ട്രെയിനിൽ വരാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

പരിഹാരം

ഡോക്ടർ രോഗിയെ പരിശോധിക്കാൻ വൈകി വരുന്നു എന്ന സംഭവം E എന്നും T_1, T_2, T_3, T_4 എന്നീ സംഭവങ്ങൾ, ഡോക്ടർ, ട്രെയിൻ, ബസ്, സ്കൂട്ടർ, മറ്റു മാർഗങ്ങൾ എന്നിവ ഉപയോഗിക്കുന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു എന്നും എടുത്താൽ,

$$P(T_1) = \frac{3}{10}, P(T_2) = \frac{1}{5}, P(T_3) = \frac{1}{10}, P(T_4) = \frac{2}{5}$$

$$P(E|T_1) = P\text{ (ട്രെയിനിൽ വരുമ്പോൾ ഡോക്ടർ വൈകുന്നു)} = \frac{1}{4}$$

$$P(E|T_2) = \frac{1}{3}, P(E|T_3) = \frac{1}{12}, P(E|T_4) = 0$$

$$P(T_1|E) = \frac{P(T_1)P(E|T_1)}{P(T_1)P(E|T_1)+P(T_2)P(E|T_2)+P(T_3)P(E|T_3)+P(T_4)P(E|T_4)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{12} + \frac{2}{5} \times 0} = \frac{3}{40} \times \frac{120}{18} = \frac{1}{2}$$

അതുകൊണ്ട്, നിർദിഷ്ട സാധ്യത $\frac{1}{2}$

ഉദാഹരണം: 21

ഒരാൾ 4 പ്രാവശ്യത്തിൽ 3 പ്രാവശ്യം മാത്രമാണ് സത്യം പറയുന്നത്. അയാൾ ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുമ്പോൾ 6 എന്ന മുഖം ലഭിക്കുന്നു എന്നു പറയുന്നുവെങ്കിൽ യഥാർഥത്തിൽ 6 കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

പരിഹാരം

E: ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുമ്പോൾ 6 കിട്ടുന്നു എന്ന് പറയുന്ന സംഭവം.

S_1: 6 കിട്ടുന്ന സംഭവം.

S_2: 6 കിട്ടാത്ത സംഭവം, എന്ന് കരുതുക.

$$P(S_1) = \frac{1}{6}$$

$$P(S_2) = \frac{5}{6}$$

$P(E|S_1) = P$ (സമചതുരക്കട്ടയിൽ യഥാർത്ഥത്തിൽ 6 കിട്ടുന്നതും അയാൾ പറയുന്നത് 6 കിട്ടുന്നു എന്നതുമാണ്)

$$= \frac{3}{4}$$

$P(E|S_2) =$ (സമചതുരക്കട്ടയിൽ യഥാർത്ഥത്തിൽ 6 കിട്ടുന്നില്ല, അയാൾ പറയുന്നത് 6 കിട്ടുന്നു എന്ന്)

$$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(S_1|E) = \frac{P(S_1)P(E|S_1)}{P(S_1)P(E|S_1) + P(S_2)P(E|S_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \times \frac{24}{8} = \frac{3}{8}$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 13.3

1. ഒരു ഭരണിയിൽ 5 ചുവന്ന പന്തുകളും 5 കറുത്ത പന്തുകളുമുണ്ട്. ക്രമരഹിതമായി ഒരു പന്ത് എടുക്കുന്നു. അതിന്റെ നിറം രേഖപ്പെടുത്തിയ ശേഷം പന്ത് തിരികെ ഭരണിയിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. കൂടാതെ അധികമായി 2 പന്തുകൾ ഭരണിയിൽ നിക്ഷേപിച്ച ശേഷം ഒരു പന്ത് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നുവെങ്കിൽ രണ്ടാമത്തെ പന്ത് ചുവന്നതാകാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

2. ഒരു ബാഗിൽ 4 ചുവന്ന പന്തുകളും 4 കറുത്ത പന്തുകളുമുണ്ട്. മറ്റൊരു ബാഗിൽ 2 ചുവന്ന പന്തുകളും 4 കറുത്ത പന്തുകളുമുണ്ട്. ഇതിൽ നിന്നും ക്രമരഹിതമായി ഒരു ബാഗ് തിരഞ്ഞെടുത്ത ശേഷം ഒരു പന്ത് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ഈ പന്ത് ചുവന്ന പന്താണ് എങ്കിൽ ഇത് ഒന്നാമത്തെ ബാഗിൽ നിന്നും ആവാനുള്ള സാധ്യത എന്ത്?

3. ഒരു കോളേജിലെ കുട്ടികളിൽ 60% കുട്ടികൾ ഹോസ്റ്റലിൽ താമസിക്കുന്നു. 40% കുട്ടികൾ ദിവസേന വീട്ടിൽ പോയി വരുന്നവരാണ്. മുൻവർഷങ്ങളിലെ കണക്കനുസരിച്ച് ഹോസ്റ്റലിൽ താമസിക്കുന്ന 30% കുട്ടികൾക്ക് വർഷാവസാന പരീക്ഷയിൽ A ഗ്രേഡ് കിട്ടിയിട്ടുണ്ട്. വീട്ടിൽ പോയി വരുന്ന 20% കുട്ടികൾക്ക് A ഗ്രേഡ് ലഭിച്ചിട്ടുണ്ട്. വർഷാവസാനം കോളേജിൽ നിന്നും ക്രമരഹിതമായി ഒരു കുട്ടിയെ തെരഞ്ഞെടുത്താൽ അയാൾക്ക് A ഗ്രേഡ് ഉണ്ടെങ്കിൽ ആ കുട്ടി ഹോസ്റ്റലിൽ താമസിച്ചതിനുള്ള സാധ്യത എന്ത്?

4. ഒരു ബഹുവികല്പ ചോദ്യപരീക്ഷയ്ക്ക് ഒരു കുട്ടിക്ക് ഒന്നുകിൽ ഉത്തരം അറിയാം അല്ലെങ്കിൽ ഉത്തരം ഊഹിച്ചെഴുതാം. ഉത്തരം അറിയാനുള്ള സാധ്യത $\frac{3}{4}$, ഊഹിച്ചെഴുതാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1}{4}$ ആണ്. എങ്കിൽ കുട്ടി ശരിയായി ഉത്തരം എഴുതുമ്പോൾ ഉത്തരം അറിയാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

5. ഒരു പ്രത്യേക അസുഖം ഉണ്ടെങ്കിൽ ഒരു ലബോറട്ടറി പരിശോധനയിൽ രക്തം പരിശോധിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള സാധ്യത 99% ആണ്. ആരോഗ്യമുള്ള ഒരാളുടെ രക്തം പരിശോധിക്കുമ്പോൾ അയാൾക്ക് ആ പ്രത്യേക അസുഖം ഉണ്ടാകാനുള്ള സാധ്യത 0.005 ആണ്. 0.1% ആൾക്കാർക്ക് യഥാർത്ഥത്തിൽ ആ അസുഖം ഉണ്ടെങ്കിൽ, പരിശോധനാ ഫലം പോസിറ്റീവ് ആയാൽ, ആ ആളിന് ആ പ്രത്യേക അസുഖം ഉണ്ടാകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

6. മൂന്ന് നാണയങ്ങളിൽ ഒരെണ്ണത്തിന്റെ രണ്ടു മുഖത്തും തല എന്ന് രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തേത് 75% പ്രാവശ്യവും തല കിട്ടുന്ന രീതിയിൽ നിർമിച്ചിരിക്കുന്നു. മൂന്നാമത്തേത് സാധാരണ നാണയവും ആണ്. ഇതിൽ നിന്നും

ക്രമരഹിതമായി ഒരു നാണയം എടുത്തതിനുശേഷം എറിയുന്നു. അപ്പോൾ തല ലഭിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അത് നാണയത്തിന്റെ രണ്ടു മുഖത്തും തലയാകനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. ഒരു ഇൻഷുറൻസ് കമ്പനി 2000 സ്കൂട്ടർ യാത്രക്കാരേയും 4000 കാർ ഡ്രൈവർ മാരേയും 6000 ട്രക്ക് ഡ്രൈവർമാരേയും യഥാക്രമം ഇൻഷ്വർ ചെയ്തിരിക്കുന്നു. ഒരു അപകടം സംഭവിക്കാനുള്ള സാധ്യത യഥാക്രമം 0.01, 0.03, 0.15 എന്നിങ്ങ നെയാണ് ഇൻഷ്വർ ചെയ്യപ്പെട്ടവരിൽ ഒരാൾക്ക് അപകടം സംഭവിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അയാൾ സ്കൂട്ടർ യാത്രക്കാരൻ ആകാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. ഒരു ഫാക്ടറിയിൽ A, B എന്നീ രണ്ട് യന്ത്രങ്ങളുണ്ട്. മുൻകാല രേഖകളിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്നത് ഉല്പാദനത്തിന്റെ 60% A എന്ന യന്ത്രത്തിൽ നിന്നും 40% B എന്ന യന്ത്രത്തിൽ നിന്നുമാണ് കിട്ടുന്നത്. A എന്ന യന്ത്രങ്ങളിലുണ്ടാക്കുന്ന 2% ഉൽപ്പന്ന ങ്ങളും B എന്ന യന്ത്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന 1% ഉൽപ്പന്നങ്ങളും കേടയാവയാണ്. ഈ ഉൽപ്പന്നങ്ങളെല്ലാം കൂട്ടിക്കലർത്തിയ ശേഷം ക്രമരഹിതമായി ഒരു ഉൽപ്പന്നം എടുക്കുന്നു. ഈ ഉൽപ്പന്നം കേടായതാണ് എന്ന് മനസ്സിലാക്കുന്നു. എങ്കിൽ ഈ ഉൽപ്പന്നം യന്ത്രം B യിൽ നിന്ന് ആകാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

9. ഒരു കോർപ്പറേഷന്റെ ബോർഡ് ഓഫ് ഡയറക്ടേഴ്സ് എന്ന സ്ഥാനത്തിനുവേണ്ടി രണ്ട് ഗ്രൂപ്പുകൾ തമ്മിൽ മത്സരിക്കുന്നു. ഒന്നാമത്തെ ഗ്രൂപ്പും രണ്ടാമത്തെ ഗ്രൂപ്പും ജയിക്കാനുള്ള സാധ്യത യഥാക്രമം 0.6, 0.4 എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഒന്നാമത്തെ ഗ്രൂപ്പ് വിജയിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഒരു പുതിയ ഉൽപ്പന്നം അവതരിപ്പിക്കാനുള്ള സാധ്യത 0.7, ഇത് രണ്ടാമത്തെ ഗ്രൂപ്പിന്റേത് 0.3 ആണ്. എങ്കിൽ പുതിയ ഉൽപ്പന്നം രണ്ടാമത്തെ ഗ്രൂപ്പ് അവതരിപ്പിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

10. ഒരു പെൺകുട്ടി ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു. സമചതുരക്കട്ടയിൽ അഞ്ചോ, ആറോ കിട്ടുകയാണെങ്കിൽ അവൾ ഒരു നാണയം 3 പ്രാവശ്യം എറിഞ്ഞതിനുശേഷം തലയുടെ എണ്ണം രേഖപ്പെടുത്തുന്നു. അവൾക്ക് 1, 2 3, 4 എന്നിവയാണ് കിട്ടുന്ന തെങ്കിൽ അവൾ ഒരു നാണയം ഒരു പ്രാവശ്യം എറിയുകയും തല അല്ലെങ്കിൽ വാല് രേഖപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യുന്നു. അവൾക്ക് കൃത്യമായി ഒരു തലയാണ് ലഭിക്കു ന്നതെങ്കിൽ ചതുരക്കട്ടയിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നീ മുഖങ്ങൾ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടു പിടിക്കുക.

11. ഒരു ഉൽപ്പാദകന് A, B, C എന്നിങ്ങനെ 3 മെഷീൻ ഓപ്പറേറ്റർമാർ ഉണ്ട്. ഒന്നാമത്തെ ഓപ്പറേറ്റർ A, 1% കേടായ ഉൽപ്പന്നം ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കുന്നു. B, C എന്നീ ഓപ്പറേറ്റർമാർ യഥാക്രമം 5%, 7% കേടായ ഉല്പന്നം ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കുന്നു. ജോലി സമയത്തിന്റെ 50% A യും 30% B യും 20% C യും ഏർപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ. കേടായ ഒരു ഉല്പന്നം ഉണ്ടാ ക്കുമ്പോൾ, അത് A എന്ന ഓപ്പറേറ്റർ ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

12. 52 കാർഡുള്ള ഒരു പായ്ക്കറ്റിൽ നിന്ന് 1 കാർഡ് നഷ്ടപ്പെടുന്നു. ശേഷിക്കുന്ന കാർഡുകളിൽ നിന്ന് 2 കാർഡ് എടുക്കുന്നു. ഈ കാർഡുകൾ രണ്ടും ഡയമണ്ടാണെങ്കിൽ നഷ്ടപ്പെട്ട കാർഡ് ഡയമണ്ടാകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

13. A സത്യം പറയാനുള്ള സാധ്യത $\frac{4}{5}$ ആണ്. ഒരു നാണയം എറിയുന്നതിനുശേഷം തലയാണ് കിട്ടിയതെന്ന് പറയുന്നു. എന്നാൽ യഥാർത്ഥത്തിൽ തല കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത.

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

14. A, B എന്നിവ രണ്ട് സംഭവങ്ങളാണ്. കൂടാതെ $A \subset B$, $P(B) \neq 0$. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ ശരി ഏത്?

(A) $P(A|B) = \frac{P(B)}{P(A)}$ (B) $P(A|B) < P(A)$

(C) $P(A|B) \geq P(A)$ (D) ഇതൊന്നുമല്ല

13.6 പ്രവചനാതീത ചരവും സാധ്യതാ വിതരണവും

(Random Variable and Probability Distribution)

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പരീക്ഷണങ്ങളുടെ സാധ്യതാ ഗണം പരിഗണിക്കുക.

(i) ഒരു നാണയം എറിയുന്നു.

(ii) രണ്ട് നാണയങ്ങൾ എറിയുന്നു.

(iii) മൂന്ന് നാണയങ്ങൾ എറിയുന്നു.

ഒന്നാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ സാധ്യതാഗണം {H,T} ആണ്.

രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ സാധ്യതാഗണം {HT, TH, TT, HH} ആണ്.

മൂന്നാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ സാധ്യതാഗണം {HHH, HHT, HTH, THH, TTT, TTH, THT, HTT} എന്നാണ്.

എങ്കിൽ ഈ മൂന്ന് പരീക്ഷണങ്ങളിലും ലഭിക്കാവുന്ന H ന്റെ എണ്ണത്തെപ്പറ്റി ആലോചിച്ചു നോക്കൂ? അതുപോലെ T യുടെ എണ്ണത്തെപ്പറ്റി ആലോചിക്കൂ.

ഒന്നാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ H ന്റെ എണ്ണം 0,1. രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ H ന്റെ എണ്ണം 0, 1, 2. മൂന്നാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ H ന്റെ എണ്ണം 0, 1, 2, 3. ഇതുപോലെ T യുടെ എണ്ണവും നമുക്ക് കണക്കാക്കാം.

H ന്റെ എണ്ണത്തെ X എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചാൽ ഒന്നാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ X ന് 0, 1 എന്നീ വിലകൾ സ്വീകരിക്കാം. രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ X ന് 0, 1, 2 എന്നീ വിലകളും മൂന്നാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ X ന് 0, 1, 2, 3 എന്നീ വിലകളും സ്വീകരിക്കുന്നതായി കാണാം. ഈ മൂന്ന് ഉദാഹരണത്തിലും X ന്റെ വിലകൾ മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നു. ഈ X ന്റെ വില പ്രവചനരഹിത പരീക്ഷണത്തിന്റെ പരിണത ഫലവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നു കാണാം. അതുകൊണ്ട് X നെ ഒരു പ്രവചനാതീത ചരം എന്നു പറയാം. സാധാരണയായി ഒരു പ്രവചനാതീത ചരത്തെ X കൊണ്ടാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഒരു ഏകദത്തിന്റെ നിർവചനം പരിശോധിച്ചാൽ, പ്രവചനരഹിത ചരം എന്നു പറയുന്നത് ഒരു ഏകദമായി പരിഗണിക്കാം. ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം (domain) സാധ്യതഗണവും സഹമണ്ഡലം (co-domain) രേഖീയ സംഖ്യാഗണവുമായിരിക്കും.

നിർവചനം: 4

ഒരു പ്രവചനാതീത ചരം എന്നത് മണ്ഡലം സാധ്യതാഗണമായ ഒരു രേഖീയ സംഖ്യാ ഏകദമാണ്.

രണ്ട് നാണയങ്ങൾ എറിയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. ഇതിന്റെ സാധ്യതാഗണം S = {HH, HT, TH, TT}.

Y എന്നത് H ന്റെ എണ്ണത്തിൽ നിന്നും T യുടെ എണ്ണം കുറയ്ക്കുന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന പ്രവചനരഹിത ചരം ആയാൽ

$$Y(HH) = 2,\ Y(HT) = 0,\ Y(TH) = 0,\ Y(TT) = -2. \text{ ആയിരിക്കും.}$$

ഉദാഹരണം: 22

ഒരാൾ ഒരു നാണയം 3 പ്രാവശ്യം എറിയുന്ന ഒരു കളിയിൽ ഏർപ്പെടുന്നു. ഓരോ H കിട്ടുമ്പോഴും ഈ കളിയുടെ സംഘാടകൻ അയാൾക്ക് 2 രൂപാ നൽകുന്നു. ഓരോ T കിട്ടുമ്പോഴും അയാൾ സംഘാടകന് 1.50 രൂപ നൽകുന്നു. X എന്നത് അയാൾക്ക് കിട്ടിയ തുക അല്ലെങ്കിൽ നഷ്ടപ്പെട്ട തുക സൂചിപ്പിക്കുന്നു. X എന്നത് ഒരു പ്രവചനാതീത ചരമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ X എന്നതിനെ ഈ പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണത്തിന്റെ ഒരു ഏകദമായി കാണിക്കുക.

പരിഹാരം

X സ്വീകരിക്കുന്ന വിലകൾ ഒരു പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യതാഗണത്തിൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. അതിനാൽ X എന്നത് ഒരു പ്രവചനാതീത ചരമാണ്. സാധ്യതാഗണം

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

അതുകൊണ്ട്, $X(HHH) = (2 \times 3) = 6$ രൂപ

$$X(HHT) = X(HTH) = X(THH) = (2 \times 2 - 1 \times 1.50) = 2.50 \text{ രൂപ}$$

$$X(HTT) = X(THT) = (TTH) = (1 \times 2) - (2 \times 1.50) = -1 \text{ രൂപ}$$

$$X(TTT) = -(3 \times 1.50) = -4.50 \text{ രൂപ}$$

ന്യൂനചിഹ്നം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് കളിക്കാരന് നഷ്ടമുണ്ടാകുന്നു എന്നാണ്. അതിനാൽ ഈ സാധ്യതാഗണത്തിലെ ഓരോ അംഗത്തിനും, X എന്ന ചരം ഒരു വിലമാത്രമേ സ്വീകരിക്കുന്നുള്ളൂ. അതിനാൽ X എന്നത് സാധ്യാതഗണത്തെ മണ്ഡലമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു ഏകദമാണ്. ഇതിന്റെ രംഗം { 1, 2.50, 4.50, 6} ആണ്.

ഉദാഹരണം: 23

ഒരു ബാഗിൽ രണ്ട് വെളുത്ത പന്തുകളും ഒരു ചുവന്ന പന്തുമുണ്ട്. പെട്ടിയിൽ നിന്നും പ്രവചാനാതീതാമായി ഒരു പന്ത് എടുത്ത് അതിന്റെ നിറം രേഖപ്പെടുത്തിയ ശേഷം തിരികെ ബാഗിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. ഈ പ്രക്രിയ തുടരുന്നു. X എന്നത് ഇങ്ങനെയുള്ള രണ്ട് നറുക്കെടുപ്പിലെ ചുവന്ന പന്തുകളുടെ എണ്ണമാണെങ്കിൽ X എഴുതുക.

പരിഹാരം

ബാഗിലെ പന്തുകളെ w_1, w_2, r എന്നിങ്ങനെ വിളിക്കാം. സാധ്യതാഗണം

$$S = \{w_1 w_1, w_1 w_2, w_2 w_2, w_2 w_1, w_1 r, w_2 r, r w_1, r w_2, r r\}$$

$\omega \in S$ എങ്കിൽ

$X(\omega)$ = ചുവപ്പു പന്തുകളുടെ എണ്ണം.

അതുകൊണ്ട്, $X(\{w_1 w_1\}) = X(\{w_1 w_2\}) = X(\{w_2 w_2\}) = X(\{w_2 w_1\}) = 0$

$$X(\{w_1 r\}) = X(\{w_2 r\}) = X(\{r w_1\}) = X(\{r w_2\}) = 1, X(\{r r\}) = 2$$

അതിനാൽ X എന്ന പ്രവചനരിഹതചരം 0, 1, 2 എന്നീ വിലകൾ സ്വീകരിക്കുന്നു.

13.6.1 പ്രവചനാതീത ചരത്തിന്റെ സാധ്യതാ വിതരണം

ചുവടെ പറയുന്ന പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. $f_1, f_2, \ldots, f_{10}$ എന്നീ പത്തു കുടുംബങ്ങളിൽ നിന്നും പ്രവചാനാതീതാമായി ഒരു കുടുംബത്തെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. f_1, f_2, $\ldots, f_{10}$ എന്നീ കുടുംബങ്ങളിൽ 3, 4, 3, 2, 5, 4, 3, 6, 4, 5 എന്നിങ്ങനെ അംഗങ്ങൾ ഉണ്ട്.

ഒരു കുടുംബത്തെ തിരഞ്ഞെടുത്ത ശേഷം അതിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം പരിഗണിക്കുന്നു. ഈ എണ്ണത്തെ X എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. X എന്നത് ഒരു പ്രവചനാതീത ചരം ആണെന്ന് കാണാം.

$$X(f_1) = 3, X(f_2) = 4, X(f_3) = 3, X(f_4) = 2, X(f_5) = 5,$$
$$X(f_6) = 4, X(f_7) = 3, X(f_8) = 6, X(f_9) = 4, X(f_{10}) = 5$$

X സ്വീകരിക്കുന്ന വിലകൾ 2.3,4.5,6 എന്നിവയാണ്.

f_4 തിരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ X സ്വീകരിക്കുന്ന വില 2 ആണ്. f_1, f_3, f_7 എന്നിവ തിരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ വില 3 ആണ്. ഇതുപോലെ

$X = 4$, f_2, f_6, f_9 തിരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ

$X = 5$, f_5, f_{10} തിരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ

$X = 6$, f_8 തിരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ

ഓരോ കുടുംബവും തിരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടാൻ തുല്യ സാധ്യതയുള്ളതിനാൽ f_4 തിരഞ്ഞെടുക്കാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1}{10}$ ആണ്.

ആയത് $X = 2$ സ്വീകരിക്കാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1}{10}$ ആണ്. ഇതിനെ $P(X = 2) = \frac{1}{10}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

$$P(\{f_1, f_3, f_7\}) = \frac{3}{10}$$

അതായത്, $X = 3$ സ്വീകരിക്കാനുള്ള സാധ്യത $\frac{3}{10}$ ആണ്.

$$\text{അതുകൊണ്ട്}, P(X = 3) = \frac{3}{10}$$

അതുപോലെ,

$$P(X=4) = P(\{f_2, f_6, f_9\}) = \frac{3}{10}$$

$$P(X=5) = P(\{f_5, f_{10}\}) = \frac{2}{10}$$

$$P(X=6) = P(\{f_8\}) = \frac{1}{10}$$

ഇങ്ങനെ X എന്ന പ്രവചനാതീത ചരം സ്വീകരിക്കുന്ന വിലകളും അവയുടെ സാധ്യതകളും ചേർന്നു കിട്ടുന്ന വിവരണത്തെ പ്രവചനാതീത ചരത്തിന്റെ (X) സാധ്യതാവിതരണം എന്നു പറയുന്നു.

നിർവചനം: 5

X എന്ന പ്രവചനരഹിതചരത്തിന്റെ സാധ്യതാ വിതരണം എന്നത്,

X	:	x_1	x_2	...	x_n
P(X)	:	p_1	p_2	...	p_n

$$p_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്നത് X എന്ന പ്രവചനാതീത ചരം സ്വീകരിക്കുന്ന വിലകളും $p_1, p_2, \ldots p_n$ എന്നിവ ഈ വിലകളുടെ സാധ്യതകളും ആണ്. അതായത് $P(X = x_i) = p_i$

> **കുറിപ്പ്**
>
> x_i എന്നത് X എന്ന പ്രവചനാതീത ചരം സ്വീകരിക്കുന്ന വിലകളാണ്. $X = x_i$ എന്ന പ്രസ്താവന സാധ്യതാഗണത്തിലെ ചില ബിന്ദുക്കളിൽ ശരിയാകുന്നു. അതുകൊണ്ട് X സ്വീകരിക്കുന്ന x_i എന്ന വിലകൾക്കുള്ള സാധ്യത പൂജ്യമാകുകയില്ല. അതായത്, $P(X = x_i) \neq 0$.

ഉദാഹരണം : 24

നല്ലതുപോലെ ഇടകലർത്തിയ 52 കാർഡുകളിൽ നിന്ന് തുടർച്ചയായി രണ്ട് കാർഡുകൾ എടുക്കുന്നു. എയ്സ് കാർഡുകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ സാധ്യതാ വിതരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

എയ്സുകളുടെ എണ്ണം ഒരു പ്രവചനാതീത ചരമാണ്. ഇതിനെ X കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം $X = 0, 1, 2$.

P(X = 0) = P (എയ്സ് അല്ലാത്ത കാർഡുകൾ)

= P (എയ്സ് അല്ലാത്ത കാർഡ്) × P (എയ്സ് അല്ലാത്ത കാർഡ്)

$$= \frac{48}{52} \times \frac{48}{52} = \frac{144}{169}$$

P(X = 1) = P (എയ്സ് കാർഡ്, എയ്സ് അല്ലാത്ത കാർഡ് അല്ലെങ്കിൽ എയ്സ് അല്ലാത്ത കാർഡ്, എയ്സ് കാർഡ്)

= P (എയ്സ് കാർഡ്, എയ്സ് അല്ലാത്ത കാർഡ്) + P(എയ്സ് അല്ലാത്ത കാർഡ്, എയ്സ് കാർഡ്)

$$= \frac{4}{52} \times \frac{48}{52} + \frac{48}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{24}{169}$$

P(X = 2) = P (എയ്സ്, എയ്സ്)

$$= \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

അതുകൊണ്ട്, സാധ്യതവിതരണം,

X	0	1	2
P(X)	$\frac{144}{169}$	$\frac{24}{169}$	$\frac{1}{169}$

ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം: 25

ഒരു ജോടി സമചതുരക്കട്ടകൾ മൂന്നു പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന സംഖ്യകളിൽ ഇരട്ടകളുടെ (doublets) എണ്ണത്തിന്റെ സാധ്യതാവിതരണം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

X ഇരട്ടകളുടെ എണ്ണം എന്നു വിചാരിക്കുക.

സാധ്യമായ ഇരട്ടകളുടെ ഗണം {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}

എന്നിവയാണ്. അതിനാൽ X ന് സ്വീകരിക്കാവുന്ന വിലകൾ 0, 1, 2, 3 ഇവയാണ്.

അതുകൊണ്ട്, P (ഇരട്ടകൾ ലഭിക്കുക) $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

P(ഇരട്ടകൾ ലഭിക്കാതിരിക്കുക) $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

P(X=0)=P(മൂന്നു പ്രാവശ്യവും ഇരട്ടകൾ ലഭിയ്ക്കാതിരിക്കുക)

$$= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$= 3\left(\frac{1}{6} \times \frac{5^2}{6^2}\right) = \frac{75}{216}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = 3\left(\frac{1}{6^2} \times \frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

അതുകൊണ്ട്, സാധ്യതയുടെ വിതരണം

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

പരിശോധന: സാധ്യതകളുടെ തുക $-\sum_{i=1}^{n} p_i - \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216}$

$$- \frac{125+75+15+1}{216} = \frac{216}{216} = 1$$

ഉദാഹരണം: 26

X എന്നത് ഒരു സ്കൂൾ പ്രവൃത്തി ദിവസം എത്ര മണിക്കൂർ നിങ്ങൾ പഠിച്ചു എന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. X എന്നത് x എന്ന വില സ്വീകരിക്കുന്നതിന്റെ സാധ്യത ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിലാണ്. k ഒരു സരിരസംഖ്യയാണ്.

$$P(X-x) - \begin{cases} 0.1, & x-0 \\ kx, & x = 1 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } 2 \\ k(5-x), & x = 3 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } 4 \\ 0, & \text{മറ്റേതുവിലയ്ക്കും} \end{cases}$$

(a) k യുടെ വില കാണുക.

(b) കുറഞ്ഞത് 2 മണിക്കൂർ പഠിക്കാനുള്ള സാധ്യത, കൃത്യം 2 മണിക്കൂർ പഠിക്കാനുള്ള സാധ്യത, പരമാവധി 2 മണിക്കൂർ പഠിക്കാനുള്ള സാധ്യത ഇവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

X ന്റെ സാധ്യതയുടെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.1	k	$2k$	$2k$	k

(a) $$\sum_{i=1}^{n} p_i - 1$$

അതിനാൽ, $0.1 + k - 2k + 2k - k - 1$

അതായത്, $k - 0.15$

(b) P(കുറഞ്ഞത് 2 മണിക്കൂർ പഠിക്കുന്നു) $- P(X \geq 2)$

$$- P(X-2) + P(X-3) + P(X-4)$$

$$- 2k - 2k - k - 5k - 5 \quad 0.15 - 0.75$$

P(കൃത്യം രണ്ട് മണിക്കൂർ പഠിക്കുന്നു) $= P(X = 2)$

$= 2k = 2 \times 0.15 = 0.3$

P(പരമാവധി 2 മണിക്കൂർ പഠിക്കുന്നു) $= P(X \leq 2)$

$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= 0.1 + k + 2k = 0.1 + 3k = 0.1 + 3 \times 0.15$

$= 0.55$

13.6.2 ഒരു പ്രവചനാതീതചരത്തിന്റെ മാധ്യം

പലകണക്കുകൂട്ടലുകളിലും ഒരു പ്രവചനാതീത ചരത്തിന്റെ ശരാശരി സംഖ്യ സാധ്യതാ വിതരണം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തുന്നതിലൂടെ പ്രവചനാതീത ചരത്തിന്റെ പല സവിശേഷതകളും അറിയാൻ കഴിയും. ഇങ്ങനെയുള്ള ചില സംഖ്യകളാണ് മാധ്യം, മധ്യമം. ഇവിടെ മാധ്യം കണക്കാക്കുന്ന വിധം പരിചയപ്പെടുത്തുന്നു. ഇത് ഒരു പ്രവചനാതീത ചരത്തിന്റെ ശരാശരി വിലയാണ് മാധ്യം.

നിർവചനം: 6

X എന്ന ഒരു പ്രവചനാതീത ചരം സ്വീകരിക്കുന്ന വിലകളാണ് $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ എന്നിവ. x ഈ വിലകൾ സ്വീകരിക്കുവാനുള്ള സാധ്യതകൾ $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$, എന്നിങ്ങനെയാണ്. Xന്റെ മാധ്യത്തെ μ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ എന്നാണ്.

X എന്ന പ്രവചനാതീത ചരത്തിന്റെ മാധ്യത്തെ പ്രതീക്ഷിത ശരാശരി (expectation) എന്നും പറയാറുണ്ട്. ഇതിനെ E(X) എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n.$$

അതായത്, X എന്ന പ്രവചനാതീത ചരത്തിന്റെ മാധ്യം എന്നത് X സ്വീകരിക്കുന്ന വിലകളുടെയും അവയുടെ സാധ്യതയുടെയും ഗുണനഫലങ്ങളുടെ തുകയാണ്.

ഉദാഹരണം: 27

ഒരു ജോടി സമചതുരക്കട്ട എറിയുന്നു. X എന്ന പ്രവചനാതീത ചരം രണ്ടു ചതുരക്കട്ടകളിലും ലഭിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുകയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു എങ്കിൽ X ന്റെ മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

സാധ്യതാഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം $6^2 = 36$ ആണ്. ഇവ (x_i, y_i), എന്ന ക്രമജോടി കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം. $x_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ $y_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

X ന് സ്വീകരിക്കാവുന്ന വിലകൾ 2, 3. 4, 5. 6. 7, 8. 9, 10, 11. 12 എന്നിവയാണ്.

$$P(X=2)=P(\{(1,1)\})=\frac{1}{36}$$

$$P(X=3)=P(\{(1,2),(2,1)\})=\frac{2}{36}$$

$$P(X=4)=P(\{(1,3),(2,2),(3,1)\})=\frac{3}{36}$$

$$P(X=5)=P(\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\})=\frac{4}{36}$$

$$P(X=6)=P(\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\})=\frac{5}{36}$$

$$P(X=7)=P(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\})=\frac{6}{36}$$

$$P(X=8)=P(\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\})=\frac{5}{36}$$

$$P(X=9)=P(\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\})=\frac{4}{36}$$

$$P(X=10)=P(\{(4,6),(5,5),(6,4)\})=\frac{3}{36}$$

$$P(X=11)=P(\{(5,6),(6,5)\})=\frac{2}{36}$$

$$P(X=12)=P(\{(6,6)\})=\frac{1}{36}$$

X ന്റെ സാധ്യത വിതരണം

X or x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X) or p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\therefore \mu=E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \;=2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}$$

$$+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}$$

$$=\frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36}=7$$

$$\therefore \text{ X ന്റെ മാധ്യം } = 7$$

13.6.3 ഒരു പ്രവചനാതീത ചരത്തിന്റെ വേരിയൻസ് (Variance of a random variable)

ഒരു പ്രവചനാതീത ചരത്തിന്റെ മാധ്യത്തിൽ നിന്ന് വ്യതിയാനത്തെക്കുറിച്ച് പറയാൻ സാധിക്കുകയില്ല. ഈ വ്യതിയാനങ്ങൾ വളരെ കുറവായാൽ വിലകൾ മാധ്യത്തിനടുത്തേക്ക് നീങ്ങുന്നതായി കാണാം. കൂടാതെ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത പ്രവചനാതീത ചരങ്ങൾക്ക് വ്യത്യസ്ത സാധ്യതാ വിതരണമാണെങ്കിൽ അവയ്ക്ക് തുല്യമാധ്യം ഉണ്ടാകാം. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണം പരിശോധിക്കുക.

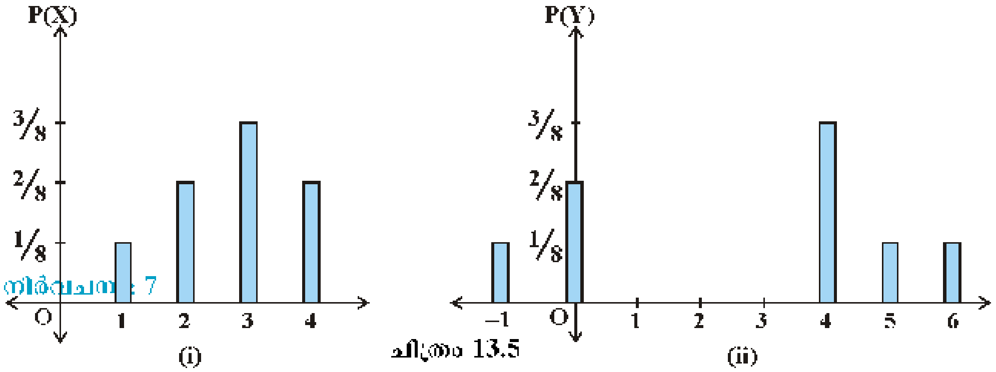
X	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

Y	–1	0	4	5	6
P(Y)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X)=1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{2}{8}+3\times\frac{3}{8}+4\times\frac{2}{8}=\frac{22}{8}=2.75$$

$$E(Y)=-1\times\frac{1}{8}+0\times\frac{2}{8}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{1}{8}=6\times\frac{1}{8}=\frac{22}{8}=2.75$$

X, Y എന്നി പ്രവചനാതീത ചരങ്ങൾ വ്യത്യസ്തങ്ങളാണ് പക്ഷേ അവയുടെ മാധ്യങ്ങൾ തുല്യമാണ്. ഇതിനെ ഗ്രാഫിൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.



നിർവചനം : 7

ചിത്രം 13.5

X എന്ന പ്രവചനാതീതചരം സ്വീകരിക്കുന്ന വിലകളാണ് $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ഇവയുടെ സാധ്യതകൾ യഥാക്രമം $p(x_1), p(x_2), \ldots p(x_n)$ എന്നിങ്ങനെയാണ്.

$\mu = E(X)$ എന്നത് X ന്റെ മാധ്യം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. X, ന്റെ വേരിയൻസിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് V(X) അല്ലെങ്കിൽ σ_x^2 എന്നാണ്.

$$\sigma_x^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p(x_i)$$

അതായത്, $$\sigma_x^2 = E(X - \mu)^2$$

അതുകൊണ്ട്, $$\sigma_x = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p(x_i)}$$ എന്നത് X ന്റെ മാനകവ്യതിയാനം (standard deviation) ആണ്.

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + \mu^2 - 2\mu x_i) \, p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \mu^2 \, p(x_i) - \sum_{i=1}^{n} 2\mu x_i p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p(x_i) + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} p(x_i) - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p(x_i) + \mu^2 - 2\mu^2 \left[\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1, \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p(x_i) - \mu^2$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p(x_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i) \right)^2$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \; E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p(x_i)$$

ഉദാഹരണം : 28

ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന സംഖ്യയുടെ വേരിയൻസ് കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

സാധ്യതാഗണം $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

സമചതുരക്കട്ട എറിയുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന സംഖ്യ X എന്നു വിചാരിക്കുക. X ഒരു പ്രവചനരഹിതചരമാണ്. X സ്വീകരിക്കുന്ന വിലകൾ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ഇവയാണ്.

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

അതുകൊണ്ട് X ന്റെ സാധ്യതാവിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$$

$$= 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}$$

$$E(X^2) = 1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2)-(E(X))^2$$

$$= \frac{91}{6}-\left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6}-\frac{441}{36} = \frac{35}{12}$$

ഉദാഹരണം: 29

52 കാർഡുകളുള്ള ഒരു പായ്ക്കറ്റിൽ നിന്നും രണ്ട് കാർഡുകൾ ഒരേസമയം എടുക്കുന്നു. (കാർഡുകൾ തിരികെ വെയ്ക്കുന്നില്ല) എങ്കിൽ കിംഗ് കാർഡുകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യം, വേരിയൻസ്, മാനകവ്യതിയാനം എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

X എന്നത് രണ്ടു കാർഡുകൾ എടുക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന കിംഗ് കാർഡുകളുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. X എന്ന പ്രവചനരഹിത ചരം സ്വീകരിക്കുന്ന വിലകളാണ് 0, 1, 2.

$$P(X=0)=P\ (\text{കിംഗ് കാർഡ് അല്ല})\ =\frac{{}^{48}C_2}{{}^{52}C_2}=\frac{\dfrac{48!}{2!(48-2)!}}{\dfrac{52!}{2!(52-2)!}}=\frac{48\times 47}{52\times 51}=\frac{188}{221}$$

$$P(X=1)=P\ (\text{ഒരു കിംഗ് കാർഡ് മറ്റേത് കിംഗ് കാർഡല്ല})$$

$$=\frac{{}^{4}C_1\ {}^{48}C_1}{{}^{52}C_2}$$

$$=\frac{4\times 48\times 2}{52\times 51}=\frac{32}{221}$$

$$P(X=2)=P\ (\text{രണ്ട് കിംഗ് കാർഡുകൾ})\qquad =\frac{{}^{4}C_2}{{}^{52}C_2}=\frac{4\times 3}{52\times 51}=\frac{1}{221}$$

X എന്ന പ്രവചനാതീത ചരത്തിന്റെ സാധ്യതാ വിതരണം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

X	0	1	2
P(X)	$\frac{188}{221}$	$\frac{32}{221}$	$\frac{1}{221}$

X ന്റെ മാധ്യം $\qquad = E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$

$$=0\times\frac{188}{221}+1\times\frac{32}{221}+2\times\frac{1}{221}=\frac{34}{221}$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x_i)$$

$$=0^2\times\frac{188}{221}+1^2\times\frac{32}{221}+2^2\times\frac{1}{221}=\frac{36}{221}$$

$$\text{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{36}{221}-\left(\frac{34}{221}\right)^2=\frac{6800}{(221)^2}$$

$$\therefore\qquad \sigma_x=\sqrt{\text{Var}(X)}=\frac{\sqrt{6800}}{221}=0.37$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 13.4

1. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ഏതൊക്കെയാണ് X എന്ന പ്രവചനാതീത ചരത്തിന്റെ സാധ്യതാവിതരണം അല്ലാത്തത് എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക. ഉത്തരം സാധൂകരിക്കുക.

(i)

X	0	1	2
P(X)	0.4	0.4	0.2

(ii)

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.1	0.5	0.2	–0.1	0.3

(iii)

Y	1	0	1
P(Y)	0.6	0.1	0.2

(iv)

Z	3	2	1	0	–1
P(Z)	0.3	0.2	0.4	0.1	0.05

2. ഒരു ഭരണിയിൽ 5 ചുവന്ന പന്തുകളും 2 കറുത്ത പന്തുകളുമുണ്ട്. രണ്ടു പന്തുകൾ എടുക്കുന്നു. X എന്നത് കറുത്ത പന്തുകളുടെ എണ്ണമാണ്. X ന്റെ സാധ്യമായ വിലകൾ ഏതൊക്കെയാണ്? X ഒരു പ്രവചനാതീത ചരം ആണോ?

3. ഒരു നാണയം 6 പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു. X എന്നത് തലകളുടെ എണ്ണവും വാലുകളുടെ എണ്ണവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ്. Xന്റെ സാധ്യമായ വിലകൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

4. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ സാധ്യതാവിതരണം എഴുതുക.

(i) ഒരു നാണയം രണ്ടു പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന തലകളുടെ എണ്ണം.

(ii) മൂന്നു നാണയം എറിയുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന വാലുകളുടെ എണ്ണം

(iii) ഒരു നാണയം നാലു പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന തലകളുടെ എണ്ണം.

5. ഒരു സമചതുരക്കട്ട രണ്ടു പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന വിജയങ്ങളുടെ (successes) എണ്ണം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത്, ഇപ്രകാരമാണ്.

(i) 4 നേക്കാൾ വലിയ സംഖ്യ

(ii) കുറഞ്ഞത് ഒരു സമചതുരക്കട്ടയിലെങ്കിലും 6 എന്ന മുഖം ലഭിക്കണം.

ഇതിന്റെ സാധ്യതാവിതരണം എഴുതുക.

6. 30 ബൾബുകളിൽ 6 എണ്ണം കേടായ ബൾബുകളാണ്. ഇതിൽ നിന്നും 4 ബൾബുകൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. എടുക്കുന്ന ബൾബ് തിരികെ വെയ്ക്കുന്നുണ്ട്. എങ്കിൽ കേടായ ബൾബുകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ സാധ്യതയുടെ വിതരണം എഴുതുക.

7. ഒരു നാണയത്തിൽ ഒരു വാല് കിട്ടുക എന്നത് 3 തല കിട്ടുന്നതിന് തുല്യമാണ്. നാണയം രണ്ടു പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു. എങ്കിൽ വാലുകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ സാധ്യതാ വിതരണം എഴുതുക.

8. ഒരു പ്രവചനാതീത ചരത്തിന്റെ (X) സാധ്യതാ വിതരണം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2+k$

(i) k കണ്ടുപിടിക്കുക (ii) $P(X < 3)$ കാണുക

(iii) $P(X > 6)$ കാണുക (iv) $P(0 < X < 3)$ കാണുക

9. X എന്ന പ്രവചനാതീത ചരത്തിന്റെ സാധ്യതാ വിതരണം ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. k എന്നത് ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയാണ്.

$$P(X) = \begin{cases} k, & x = 0 \text{ ആയാൽ} \\ 2k, & x = 1 \text{ ആയാൽ} \\ 3k, & x = 2 \text{ ആയാൽ} \\ 0, & x \text{ ന്റെ മറ്റ് ഏത് വിലകൾക്കും} \end{cases}$$

(a) k യുടെ വില കണക്കാക്കുക.

(b) $P(X < 2)$, $P(X \leq 2)$, $P(X \geq 2)$ എന്നിവ കാണുക.

10. ഒരു നാണയം 3 പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന തലകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

11. ഒരേ സമയം രണ്ട് സമചതുരക്കട്ടകൾ എറിയുന്നു. X എന്നത് 6 എന്ന സംഖ്യയുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. എങ്കിൽ E(X) കണ്ടുപിടിക്കുക.

12. ആദ്യത്തെ 6 പൂർണ അധിസംഖ്യകളിൽ നിന്നും രണ്ടു സംഖ്യകൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. X എന്നത് ഈ സംഖ്യകളിൽ വലുതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. E(X) കണ്ടുപിടിക്കുക.

13. X എന്നത് രണ്ട് സമചതുരക്കട്ട എറിയുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുകയാണ്. X ന്റെ വേരിയൻസും മാനകവ്യതിയാനവും കാണുക.

14. ഒരു ക്ലാസ്സിലെ 15 കുട്ടികളുടെ വയസ്സ് കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. 14, 17, 15, 14, 21, 17, 19, 20, 16. 18, 20. 17, 16, 19. 20. ഒരു കുട്ടിയെ ത്രിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. അതിനുശേഷം ആ കുട്ടിയുടെ വയസ്സ് X രേഖപ്പെടുത്തുന്നു. എങ്കിൽ X ന്റെ സാധ്യത വിതരണം എഴുതുക. മാധ്യം, വേരിയൻസ്, മാനക വ്യതിയാനം എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

15. ഒരു മീറ്റിംഗിൽ 70% അംഗങ്ങൾ ഒരു നിർദേശത്തെ അനുകൂലിക്കുകയും 30% എതിർക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഒരു അംഗത്തെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. അയാൾ നിർദ്ദേശത്തെ എതിർക്കുന്നു എങ്കിൽ X= 0 എന്നും അനുകൂലിക്കുന്നു എങ്കിൽ X = 1 എന്നും വിചാരിക്കുക. എങ്കിൽ E(X), V(X) എന്നിവ കാണുക.

16, 17 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ശരിയായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

16. ഒരു സമചതുരക്കട്ടയുടെ 3 മുഖങ്ങളിൽ 1 എന്നും രണ്ട് മുഖങ്ങളിൽ 2 എന്നും ഒരു മുഖത്ത് 5 എന്നും രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ സമചതുരക്കട്ടയിൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) $\frac{8}{3}$

17. 52 കാർഡുകളുള്ള ഒരു പായ്ക്കറ്റിൽ നിന്നും 2 കാർഡുകൾ ക്രമാതീതമായി എടുക്കുന്നു. X എന്നത് എയ്സുകളുടെ എണ്ണമാണ്. എങ്കിൽ E(X)

(A) $\frac{37}{221}$ (B) $\frac{5}{13}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{2}{13}$

13.7 ബർണൂളി ട്രയലും ദ്വിപദ വിതരണവും (Bernoulli Trials and Binomial Distribution)

13.7.1 ബർണൂളി ട്രയൽ

നമ്മുടെ നിത്യജീവിതത്തിൽ പല പരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെയും നാം കടന്നുപോകാറുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന് നിങ്ങൾ ഒരു മത്സരപരീക്ഷ എഴുതുന്നു എന്ന് വിചാരിക്കുക. ആ പരീക്ഷയിൽ നിങ്ങൾ ജയിക്കാം അല്ലെങ്കിൽ ജയിക്കാതിരിക്കാം. അതുപോലെ കാലാവസ്ഥാപ്രവചനം നിങ്ങൾ ശ്രദ്ധിച്ചിട്ടുണ്ടാവാം. പ്രവചന പ്രകാരം മഴ പെയ്യാം അല്ലെങ്കിൽ മഴ പെയ്യാതിരിക്കാം. ഒരു നാണയം എറിയുമ്പോൾ ഒന്നുകിൽ തല ലഭിക്കും അല്ലെങ്കിൽ വാൽ ലഭിക്കാം. ശരിയോ തെറ്റോ എന്നെഴുതുന്ന ചോദ്യം പരിഗണിച്ചാൽ രണ്ടു സാധ്യതയാണുള്ളത്. ഒന്നുകിൽ ഉത്തരം ശരിയായിരിക്കാം അല്ലെങ്കിൽ തെറ്റായിരിക്കാം. ഒരു ഫാക്ടറിയിൽ ഉല്പാദിപ്പിക്കുന്ന ഉല്പന്നം പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ ആ ഉല്പന്നം നല്ലതായിരിക്കാം അല്ലെങ്കിൽ കേടായതായിരിക്കാം. മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിലെല്ലാം രണ്ട് പരിണതഫലങ്ങൾ മാത്രമാണുള്ളത്. അതിൽ ഒന്നിനെ 'വിജയം' (success) എന്നും മറ്റേതിനെ പരാജയം (failure) എന്നും വിളിക്കാം. ഒരു നാണയം എറിയുന്ന പരീക്ഷണ

ത്തിൽ തല എന്നത് വിജയം (successes) ആയാൽ വാല് എന്നത് പരാജയം (failure) എന്ന് കരുതാം.

ഓരോ പ്രാവശ്യവും നമ്മൾ ഒരു നാണയം അല്ലെങ്കിൽ സമചതുരക്കട്ട എറിയുമ്പോൾ, നമുക്ക് അതിനെ ഓരോ ട്രയൽ (trial) എന്നുവിളിക്കാം. ഒരു നാണയം 4 പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോൾ ട്രയലുകളുടെ എണ്ണം 4 ആയിരിക്കും. ഓരോ ട്രയലിനും രണ്ട് പരിണതഫലങ്ങളാണുള്ളത് വിജയവും പരാജയവും. ഒരു ട്രയലിൽ ലഭിക്കുന്ന പരിണതഫലവും മറ്റേതൊരു ട്രയലിൽ ലഭിക്കുന്ന പരിണതഫലവുമായി പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്തതായിരിക്കും. ഓരോ ട്രയലിലും വിജയത്തിന്റെ അല്ലെങ്കിൽ പരാജയത്തിന്റെ സാധ്യത ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായിരിക്കും. ഇങ്ങനെ രണ്ട് പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത പരിണതഫലങ്ങളുടെ (വിജയം, പരാജയം) ട്രയലുകളെ 'ബർണൂളി ട്രയലുകൾ' (Bernoulli Trials) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

നിർവചനം: 8

ഒരു പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണത്തിന്റെ ട്രയലുകളെ ബർണൂളി ട്രയലുകൾ എന്നു പറയണമെങ്കിൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾ പാലിച്ചിരിക്കണം.

(i) ട്രയലുകളുടെ എണ്ണം പരിമിതമായിരിക്കണം.

(ii) ട്രയലുകൾ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്തവയായിരിക്കണം.

(iii) ഓരോ ട്രയലിനും 2 പരിണതഫലങ്ങൾ മാത്രമേ ഉണ്ടായിരിക്കുവാൻ പാടുള്ളൂ. അതായത് വിജയവും പരാജയവും

(iv) ഓരോ ട്രയലിലും വിജയത്തിന്റെ സാധ്യത സ്ഥിരമായിരിക്കണം.

ഉദാഹരണമായി ഒരു സമചതുരക്കട്ട 50 പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോൾ, 50 ബർണൂളി ട്രയലുകളാണുണ്ടാകുന്നത്. ഇതിന്റെ പരിണതഫലങ്ങൾ വിജയം (ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യ കിട്ടുന്നത്) അല്ലെങ്കിൽ പരാജയം (ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ കിട്ടുന്നത്) ആയിരിക്കും. ഇതിൽ വിജയം കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത (p) എല്ലായ്പോഴും (50 ട്രയലിലും) തുല്യമായിരിക്കും. ഇവിടെ വിജയത്തിന്റെ സാധ്യത $p = \frac{1}{2}$ ആയിരിക്കും പരാജയത്തിന്റെ സാധ്യത $q = 1 - p = \frac{1}{2}$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 30

7 ചുവന്ന പന്തുകളും 9 കറുത്ത പന്തുകളും ഉള്ള ഒരു ഭരണിയിൽ നിന്നും തുടർച്ചയായി ആറ് പന്തുകൾ എടുക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ പന്തുകളെടുക്കുന്ന ട്രയലുകൾ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകൾക്ക് വിധേയമായി ബർണൂളി ട്രയലുകളാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

ഓരോ ട്രയൽ കഴിയുമ്പോഴും എടുക്കുന്ന പന്തുകൾ

(i) തിരികെ ബാഗിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നു; (ii) തിരികെ ബാഗിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നില്ല.

പരിഹാരം

(i) ഈ ട്രയലുകൾ പരിമിതമാണ്. എടുക്കുന്ന പന്തുകൾ തിരിച്ചിടുകയാണെങ്കിൽ, വിജയത്തിന്റെ (ചുവന്ന പന്ത് എടുക്കുന്നു എന്നു വിചാരിക്കുക) സാധ്യത, $p = \frac{7}{16}$ ആണ്. ഇത് ഓരോ ട്രയലിലും തുല്യമായിരിക്കും. അതിനാൽ ട്രയലുകൾ ബർണൂളി ട്രയലുകളായിരിക്കും.

(ii) ഈ ട്രയലുകളിൽ എടുക്കുന്ന പന്തുകൾ തിരിച്ചിടുന്നില്ലെങ്കിൽ വിജയത്തിന്റെ (ചുവന്ന പന്ത് എടുക്കുന്നു) സാധ്യത ആദ്യ ട്രയലിൽ $\frac{7}{16}$ ആയിരിക്കും. രണ്ടാമത്തെ ട്രയലിൽ $\frac{6}{15}$ ആയിരിക്കും ഇങ്ങനെ തുടർന്നു പോകുന്നു. ഇവിടെ വിജയത്തിന്റെ സാധ്യത ഓരോ ട്രയലിലും തുല്യമല്ല. അതിനാൽ ഈ ട്രയലുകൾ ബർണൂളി ട്രയലുകൾ അല്ല.

13.7.2 ദ്വിപദവിതരണം (Binomial distribution)

ഒരു നാണയം എറിയുന്ന പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ ഓരോ ട്രയലിലും വിജയം (H) പരാജയം (T) എന്നീ പരിണതഫലങ്ങളാണുള്ളത്. വിജയത്തെ S എന്നും പരാജയത്തെ F എന്നും സൂചിപ്പിക്കാം. എങ്കിൽ 6 ട്രയലുകളിൽ ഒരു വിജയം ഏതൊക്കെ രീതിയിൽ സാധ്യമാകുന്നു എന്ന് നോക്കാം.

$$SFFFFF,\ FSFFFF,\ FFSFFF,\ FFFSFF,\ FFFFSF,\ FFFFFS.$$

ഇതേപോലെ 2 വിജയങ്ങൾക്കും 4 പരാജയങ്ങൾക്കും ഉള്ള സാധ്യതകളുടെ എണ്ണം $\frac{6!}{4! \times 2!}$ ആണ്. ട്രയലുകളുടെ എണ്ണം കൂടുന്തോറും ഇങ്ങനെ സാധ്യതകളെ എഴുതി കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് കൂടുതൽ സമയം ചിലവഴിക്കുന്ന രീതിയാണ്. അതിനാൽ ഇതിനായി നമുക്ക് ഒരു സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടതായുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന് 3 ട്രയലുകളുള്ള ഒരു ബർണൂളി പരീക്ഷണം പരിഗണിക്കുക.

$$S = \{SSS, SSF, SFS, FSS, SFF, FSF, FFS, FFF\}$$

വിജയങ്ങളുടെ എണ്ണം X എന്നു വിചാരിക്കുക. X എന്നത് ഒരു പ്രവചനാതീതചരമാണ്. X സ്വീകരിക്കുന്ന വിലകൾ 0, 1, 2, 3 ഇവയാണ്. X ന്റെ സാധ്യതാ വിതരണം ചുവടെ വിവരിക്കുന്നു.

$$P(X = 0) = P(\text{വിജയം കിട്ടുന്നില്ല})$$

$$= P(\{FFF\}) = P(F)\,P(F)\,P(F)$$

$$= q \,.\, q \,.\, q = q^3 \ (\text{ട്രയലുകൾ പരസ്പരാശ്രിതങ്ങളല്ല})$$

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= P(\text{ഒരു വിജയം}) \\
&= P(\{SFF, FSF, FFS\}) \\
&= P(\{SFF\})+P(\{FSF\})+P(\{FFS\}) \\
&= P(S)P(F)P(F)+P(F)P(S)P(F)+P(F)P(F)P(S) \\
&= p.q.q + q.p.q + q.q.p = 3pq^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= P(\text{രണ്ട് വിജയം}) \\
&= P(\{SSF, SFS, FSS\}) \\
&= P(\{SSF\})+P(\{SFS\})+P(\{FSS\}) \\
&= P(S)P(S)P(F)+P(S)P(F)P(S)+P(F)P(S)P(S) \\
&= p.p.q. + p.q.p + q.p.p = 3p^2q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X=3) &= P(\text{മൂന്ന് വിജയം}) = P(\{SSS\}) \\
&= P(S).P(S).P(S) = p^3
\end{aligned}
$$

അതുകൊണ്ട്, X ന്റെ സാധ്യതാ വിതരണം

X	0	1	2	3
P(X)	q^3	$3q^2p$	$3qp^2$	p^3

$(q+p)^3$ ന്റെ ദ്വിപദവിപുലീകരണം $q^3+3q^2p+3qp^2+p^3$ എന്നാണ്. വിജയങ്ങളുടെ എണ്ണമായ 0, 1, 2, 3 എന്നിവയുടെ സാധ്യത യഥാക്രമം $(q+p)^3$ എന്ന വിപുലീകരണത്തിന്റെ ഒന്നാം പദം, രണ്ടാം പദം, മൂന്നാം പദം, നാലാം പദം എന്നിങ്ങനെയാണ്. കൂടാതെ $q+p=1$ ആയതുകൊണ്ട് സാധ്യതകളുടെ തുകയും 1 ആയിരിക്കും.

അതായത് ഒരു ബർണൂളി ട്രയലിൽ 'n' ട്രയലുകൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ വിജയങ്ങളുടെ എണ്ണമായ 0, 1, 2, 3, ..., n എന്നിവയുടെ സാധ്യത യഥാക്രമം $(q+p)^n$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിലെ ഒന്നാം പദം, രണ്ടാം പദം, ..., $(n+1)$-ാം പദം ഇങ്ങനെയായിരിക്കും. n ട്രയലുകളുള്ള ഒരു ബർണൂളി പരീക്ഷണത്തിൽ x വിജയങ്ങളുടെ സാധ്യത ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ കണക്കാക്കാം.

x വിജയങ്ങൾ ഉണ്ടാകുമ്പോൾ $n-x$ പരാജയങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

x വിജയങ്ങളും $n-x$ പരാജയങ്ങളും $\frac{n!}{x!(n-x)!}$ രീതിയിൽ സാധ്യമാണ്.

ഈ ഓരോ രീതിയിലും x വിജയങ്ങളുടെയും $n-x$ പരാജയങ്ങളുടെയും സാധ്യത

$$= P(x \text{ വിജയങ്ങൾ}) \,.\, P(n-x \text{ പരാജയങ്ങൾ})$$

$$= \underbrace{P(S).P(S)...P(S)}_{x\text{ പ്രാവശ്യം}} \cdot \underbrace{P(F).P(F)...P(F)}_{(n-x)\text{ പ്രാവശ്യം}} = p^x q^{n-x}$$

അതുകൊണ്ട്, n ട്രയലുകളുള്ള ഒരു ബർണൂളി പരീക്ഷണത്തിൽ x വിജയങ്ങളുടെ സാധ്യത $\dfrac{n!}{x!(n-x)!}\, q^{n-x} p^x$ അല്ലെങ്കിൽ ${}^nC_x\, p^x\, q^{n-x}$ ആയിരിക്കും.

$$P(x \text{ വിജയങ്ങൾ}) = {}^nC_x p^x q^{n-x}\,, \quad x = 0, 1, 2, ..., n. \ (q = 1-p)$$

$P(x$ വിജയങ്ങൾ$) = {}^nC_x p^x q^{n-x}$ എന്നത് $(q+p)^n$ എന്ന വിപുലീകരണത്തിന്റെ $(x+1)$ -ാമത്തെ പദമാണ്.

'n' ട്രയലുകളുള്ള ഒരു ബർണൂളി പരീക്ഷണത്തിൽ വിജയങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ സാധ്യതാ വിതരണം $(q+p)^n$ എന്ന ദ്വിപദ വിപുലീകരണം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം.

X	0	1	2	...	x	...	n
P(X)	${}^nC_0 q^n$	${}^nC_1 q^{n-1} p^1$	${}^nC_2 q^{n-2} p^2$		${}^nC_x q^{n-x} p^x$		${}^nC_n p^n$

മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന സാധ്യതാ വിതരണത്തെ ബൈനോമിയൽ വിതരണം എന്നാണ് പറയുന്നത്.

അതുകൊണ്ട്, x വിജയങ്ങളുടെ സാധ്യത $P(X = x)$ എന്നത് $P(x)$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

$P(x) = {}^nC_x q^{n-x} p^x, \quad x = 0, 1, ..., n. \ (q = 1-p)$

$P(x)$ എന്നത് ദ്വിപദ വിതരണത്തിന്റെ സാധ്യതാഏകദം എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഒരു ദ്വിപദ വിതരണത്തെ $B(n, p)$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

ഉദാഹരണം: 31

ഒരു നാണയം 10 പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

(i) കൃത്യം 6 തല

(ii) കുറഞ്ഞത് 6 തല

(iii) പരമാവധി 6 തല

പരിഹാരം

X എന്നത് തലയുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$n = 10, \quad p = \frac{1}{2}$$

$$P(X = x) = {}^{n}C_{x}\, q^{n-x} p^{x}, \; x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$n = 10, \; p = \frac{1}{2}, \; q = 1 - p = \frac{1}{2}$$

$$P(X = x) = {}^{10}C_{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = {}^{10}C_{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

(i) $P(X = 6) = {}^{10}C_{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{10!}{6! \times 4!} \frac{1}{2^{10}} = \frac{105}{512}$

(ii) P(കുറഞ്ഞത് 6 തല) $= P(X \geq 6)$

$$= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$= {}^{10}C_{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \left[\left(\frac{10!}{6! \times 4!}\right) + \left(\frac{10!}{7! \times 3!}\right) + \left(\frac{10!}{8! \times 2!}\right) + \left(\frac{10!}{9! \times 1!}\right) + \left(\frac{10!}{10!}\right)\right] \frac{1}{2^{10}} = \frac{193}{512}$$

(iii) P(പരമാവധി 6 തല) $= P(X \leq 6)$

$$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$
$$+ P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$+ {}^{10}C_{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \frac{848}{1024} = \frac{53}{64}$$

ഉദാഹരണം: 32

10% കേടായ മുട്ടകളുള്ള ഒരു കുട്ടയിൽ നിന്നും 10 മുട്ടകൾ തുടർച്ചയായി എടുക്കുന്നു. ഓരോ പ്രാവശ്യവും എടുക്കുന്ന മുട്ടകൾ തിരികെ കുട്ടയിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. കുറഞ്ഞത് ഒരു മുട്ടയെങ്കിലും കേടാവാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

എടുക്കുന്ന 10 മുട്ടകളിൽ കേടായ മുട്ടകളുടെ എണ്ണം X എന്ന് കരുതാം. മുട്ടകൾ തിരികെ നിക്ഷേപിക്കുന്നതിനനാൽ ഇത് ഒരു ബർണൌളി ട്രയൽ ആണ്. X ന് ഒരു ദ്വിപദവിതരണ മാണുള്ളത്. $n = 10$. $p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

$$q = 1 - p = \frac{9}{10}$$

$\therefore$ P(കുറഞ്ഞത് ഒരു കേടായ മുട്ട) $= P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$$= 1 - {}^{10}C_0 \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = 1 - \frac{9^{10}}{10^{10}}$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 13.5

1. ഒരു സമചതുരക്കട്ട 6 പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു. 'ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യ കിട്ടുന്നു' എന്നത് ഒരു വിജയത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

   (i) 5 വിജയങ്ങൾ (ii) കുറഞ്ഞത് 5 വിജയങ്ങൾ

   (iii) പരമാവധി 5 വിജയങ്ങൾ

2. ഒരു ജോഡി സമചതുരക്കട്ട 4 പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു. ഒരു ഇരട്ട (doublet) കിട്ടുന്നത് ഒരു വിജയം എന്ന് വിചാരിക്കുക. എങ്കിൽ രണ്ട് വിജയങ്ങളുടെ സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

3. എണ്ണത്തിൽ വളരെ കൂടുതലുള്ള കുറേ ഇനങ്ങളിൽ 5% കേടായവയാണ്. എങ്കിൽ 10 ഇനങ്ങൾ എടുക്കുമ്പോൾ അതിൽ ഒരു കേടായ ഇനത്തിൽ കൂടുതൽ ഉണ്ടാവാതിരിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

4. 52 കാർഡുകളുള്ള ഒരു പായ്ക്കറ്റിൽ നിന്നും 5 കാർഡുകൾ തുടർച്ചയായി എടുക്കുന്നു. കാർഡ് എടുത്തതിനുശേഷം ഈ കാർഡുകൾ തിരികെ പായ്ക്കറ്റിൽ തന്നെ വെയ്ക്കുന്നു. എങ്കിൽ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

   (i) എല്ലാ കാർഡുകളും സ്പേഡ്

   (ii) 3 കാർഡുകൾ മാത്രം സ്പേഡ്

   (iii) ഒരെണ്ണം പോലും സ്പേഡ് അല്ല.

5. ഒരു കമ്പനി ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കുന്ന ബൾബ് 150 ദിവസം ഉപയോഗിച്ചു കഴിയുമ്പോൾ ഫ്യൂസാകാനുള്ള സാധ്യത 0.05 ആണ്. എങ്കിൽ 5 ബൾബുകൾ പരിഗണിക്കുമ്പോൾ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

    (i) ഒരെണ്ണം പോലും 150 ദിവസം കഴിയുമ്പോൾ ഫ്യൂസാകുന്നില്ല.

    (ii) 150 ദിവസം കഴിയുമ്പോൾ ഫ്യൂസാകുന്ന ബൾബുകളുടെ എണ്ണം 1 ൽ കൂടുന്നില്ല.

    (iii) 150 ദിവസം കഴിയുമ്പോൾ ഫ്യൂസാകുന്ന ബൾബുകളുടെ എണ്ണം 1 ൽ കൂടുന്നില്ല.

    (iv) 150 ദിവസം കഴിയുമ്പോൾ കുറഞ്ഞത് ഒരെണ്ണമെങ്കിലും ഫ്യൂസാകുന്നു.

6. ഒരു ബാഗിൽ 0 മുതൽ 9 വരെ രേഖപ്പെടുത്തിയ 10 പന്തുകൾ ഉണ്ട്. 4 പന്തുകൾ തുടർച്ചയായി ബാഗിൽ നിന്നും എടുക്കുന്നു. ഇവ ബാഗിൽ തിരികെ നിക്ഷേപിക്കുന്നുണ്ട്. എങ്കിൽ ഒന്നിൽ പോലും '0' രേഖപ്പെടുത്താതിരിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

7. ഒരു പരീക്ഷയ്ക്ക്, ശരിയോ തെറ്റോ എന്ന രീതിയിലുള്ള 20 ചോദ്യങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഒരു ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരമെഴുതുന്നതിനായി ഒരു കുട്ടി ഒരു നാണയം എറിയുന്നു. നാണയത്തിൽ തല ആണ് ലഭിക്കുന്നതെങ്കിൽ ഉത്തരം ശരി എന്നും, വാല് ആണ് ലഭിക്കുന്നതെങ്കിൽ ഉത്തരം തെറ്റ് എന്നും എഴുതുന്നു. എങ്കിൽ കുറഞ്ഞത് 12 എണ്ണം ശരിയാകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

8. X എന്നത് ദ്വിപദ വിതരണം $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$ അനുസരിക്കുന്ന ഒരു പ്രവചനാതീത ചരമാണ്. X = 3 എന്നത് *ഏറ്റവും കൂടുതൽ സാധ്യതയുള്ള വിലയാണെന്ന്* തെളിയിക്കുക. [സൂചന : $p(x = 3)$ ന്റെ വില $p(x_i, x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ വിലയെക്കാൾ കൂടുതൽ]

9. ഒരു ബഹുവികല്പ ചോദ്യ പരീക്ഷയിൽ 5 ചോദ്യങ്ങൾക്ക് സാധ്യമായ മൂന്ന് ഉത്തരങ്ങൾ നൽകിയിരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ ഉദ്യോഗാർത്ഥിക്ക് നാലോ നാലിൽ കൂടുതലോ ഉത്തരങ്ങൾ ഊഹങ്ങളിലൂടെ ശരിയാവാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

10. ഒരാൾ 50 ലോട്ടറി ടിക്കറ്റുകളിൽ നിന്നും ഒരു ലോട്ടറി ടിക്കറ്റ് വാങ്ങുന്നു. ഓരോന്നിനും സമ്മാനം ലഭിക്കാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1}{100}$ ആണ്. എങ്കിൽ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ സമ്മാനം ലഭിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

    (a) കുറഞ്ഞത് ഒരു പ്രാവശ്യം

    (b) കൃത്യം ഒരു പ്രാവശ്യം

    (c) കുറഞ്ഞത് രണ്ട് പ്രാവശ്യം

11. ഒരു സമചതുരക്കട്ട 7 പ്രാവശ്യം എറിയുന്നു. എങ്കിൽ 5 എന്ന സംഖ്യ കൃത്യം 2 പ്രാവശ്യം ലഭിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

12. ഒരു സമചതുരക്കട്ട 6 പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോൾ പരമാവധി രണ്ട് 6 എന്ന മുഖം കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

13. ഒരു കമ്പനിയിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഉല്പന്നങ്ങളിൽ 10% കേടായവയാണ്. എങ്കിൽ പ്രവചനാതീതമായി 12 ഉല്പന്നങ്ങൾ എടുത്താൽ 9 എണ്ണം കേടായത് ആവാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയിൽ നിന്നും ശരിയായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

14. 100 ബൾബുകളുള്ള ഒരു പെട്ടിയിൽ 10 എണ്ണം കേടായവയാണ്. 5 ബൾബ് എടുത്താൽ അതിൽ ഒരെണ്ണം പോലും കേടാവാതിരിക്കാനുള്ള സാധ്യത

(A) 10^{-1} (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (C) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (D) $\frac{9}{10}$

15. ഒരു വിദ്യാർത്ഥി നീന്തൽക്കാരനാകാതിരിക്കാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1}{5}$. ആണ്. എങ്കിൽ 5 കുട്ടികളെ പരിഗണിച്ചാൽ 4 പേരും നീന്തൽക്കാരനാകാനുള്ള സാധ്യത

(A) ${}^5C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5}$ (B) $\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5}$

(C) ${}^5C_1\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4$ (D) ഇവയൊന്നുമല്ല

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം: 33

നാല് പെട്ടികളിലുള്ള നിറമുള്ള പന്തുകളെക്കുറിച്ച് ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു.

പെട്ടി	നിറങ്ങൾ			
	കറുപ്പ്	വെളുപ്പ്	ചുവപ്പ്	നീല
I	3	4	5	6
II	2	2	2	2
III	1	2	3	1
IV	4	3	1	5

നോക്കാതെ ഒരു പെട്ടി എടുത്തതിനുശേഷം പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് എടുക്കു

ന്നു. എടുത്ത പന്ത് കറുത്തത് ആണെങ്കിൽ ആ പന്ത് III -ാമത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്നാകാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

A. E_1, E_2, E_3, E_4 എന്നീ സംഭവങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

A : ഒരു കറുത്ത പന്ത് തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. E_1 : ഒന്നാമത്തെ പെട്ടി തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു.

E_2 : രണ്ടാമത്തെ പെട്ടി തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. E_3 : മൂന്നാമത്തെ പെട്ടി തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു.

E_4 : നാലാമത്തെ പെട്ടി തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{4}$

$$P(A|E_1) = \frac{3}{18}, P(A|E_2) = \frac{2}{8}, P(A|E_3) = \frac{1}{7}. \qquad P(A|E_4) = \frac{4}{13}$$

P (കറുത്ത പന്ത് ലഭിച്ചപ്പോൾ അത് മൂന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ആയാൽ)

$$= P(E_3|A)$$

ബെയ്സ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച്

$$P(E_3|A) = \frac{P(E_3)\cdot P(A|E_3)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)+P(E_4)P(A|E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}}{\frac{1}{4}\times\frac{3}{18}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{13}} = 0.165$$

ഉദാഹരണം : 34

ദ്വിപദവിതരണം $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ യുടെ മാധ്യം കാണുക.

പരിഹാരം

$$n = 4, p = \frac{1}{3}, \quad q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(X = x) = {}^4C_x \left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}\left(\frac{1}{3}\right)^x, x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

x_i	$P(x)$	$x_i P(x_i)$
0	${}^4C_0\left(\frac{2}{3}\right)^4$	0
1	${}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$	${}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$
2	${}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$2\left({}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$
3	${}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$3\left({}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)$
4	${}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$4\left({}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)$

$$\text{മാധ്യം}\,(\mu) = \sum_{i=1}^{4} x_i\, p(x_i)$$

$$= 0 + {}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) + 2\cdot{}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\cdot{}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 4\cdot{}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$= 4\times\frac{2^3}{3^4} + 2\times 6\times\frac{2^2}{3^4} + 3\times 4\times\frac{2}{3^4} + 4\times 1\times\frac{1}{3^4}$$

$$= \frac{32+48+24+4}{3^4} = \frac{108}{81} = \frac{4}{3}$$

ഉദാഹരണം : 35

ഒരു ഷൂട്ടർ ലക്ഷ്യസ്ഥാനം കാണുന്നതിനുള്ള സാധ്യത $\frac{3}{4}$ ആണ്. കുറഞ്ഞത് ഒരു പ്രാവശ്യം ലക്ഷ്യസ്ഥാനത്ത് ഷൂട്ട് ചെയ്യാനുള്ള സാധ്യത 0.99 നേക്കാൾ കൂടണമെങ്കിൽ കുറഞ്ഞത് എത്രപ്രാവശ്യം ഷൂട്ട് ചെയ്യണം?

പരിഹാരം

ഷൂട്ടർ 'n' പ്രാവശ്യം ഷൂട്ട് ചെയ്യുന്നു എന്ന് വിചാരിക്കുക. ഈ 'n' ട്രയലുകൾ ബർണൂളി ട്രയലുകളാണ് $p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4}$

$$P(X=x) = {}^nC_x\, q^{n-x} p^x = {}^nC_x \left(\frac{1}{4}\right)^{n-x}\left(\frac{3}{4}\right)^x = {}^nC_x \frac{3^x}{4^n}.$$

P(കുറഞ്ഞത് ഒരു പ്രാവശ്യം ലക്ഷ്യത്തിൽ ഷൂട്ട് ചെയ്യുന്നു) > 0.99

$$P(x \geq 1) > 0.99$$

$$1 - P(x = 0) > 0.99$$

$$1 - {}^nC_0 \frac{1}{4^n} > 0.99$$

$${}^nC_0 \frac{1}{4^n} < 0.01, \quad \frac{1}{4^n} < 0.01$$

$$4^n > \frac{1}{0.01} = 100 \qquad \ldots(1)$$

അതുകൊണ്ട്, n ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില = 4.

ഉദാഹരണം: 36

A, B എന്നിവർ ഒരു സമചതുരക്കട്ട ഒരാൾ 6 കിട്ടുന്നതുവരെ എറിയുന്നു. അങ്ങനെ 6 കിട്ടുന്നയാൾ ജയിക്കുന്നു. എങ്കിൽ 'A' ആദ്യം എറിയുമ്പോൾ ഓരോരുത്തരും ജയിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

പരിഹാരം

'S' എന്നത് വിജയത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. F എന്നത് പരാജയത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$$P(S) = \frac{1}{6},\ P(F) = \frac{5}{6}$$

P(A ആദ്യപ്രാവശ്യം ജയിക്കുന്നു) $= P(S) = \frac{1}{6}$

A, B എന്നിവർ ആദ്യ രണ്ടു പ്രാവശ്യവും പരാജയപ്പെട്ടാൽ മൂന്നാം പ്രാവശ്യം അവസരം Aയ്ക്ക് ലഭിക്കുന്നു.

P(3-ാം പ്രാവശ്യം A ജയിക്കുന്നു) $= P(FFS) = P(F)P(F)P(S) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$$

$$P(5\text{-ാം പ്രാവശ്യം A ജയിക്കുന്നു}) = P(FFFFS) = \left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$P(\text{A ജയിക്കുന്നു}) = \frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)+\ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$

$$P(\text{B ജയിക്കുന്നു}) = 1 - P(\text{A ജയിക്കുന്നു}) = 1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$$

കുറിപ്പ്

$a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n}+\ldots$, $|r|<1$ എന്ന അനന്ത ജ്യാമിതീയശ്രേണിയുടെ തുക $\frac{a}{1-r}$ ആണ്.

(ക്ലാസ് XI ലെ പാഠപുസ്തകത്തിലെ A.1.3 എന്ന ഭാഗം പരിശോധിക്കുക.

ഉദാഹരണം: 37

ഒരു യന്ത്രം ശരിയായി പ്രവർത്തിപ്പിച്ചാൽ 90% സ്വീകാര്യമായ ഉല്പന്നങ്ങൾ നിർമിക്കുന്നു. ശരിയായി അല്ല പ്രവർത്തിപ്പിക്കുന്നതെങ്കിൽ 40% സ്വീകാര്യമായ ഉല്പന്നങ്ങൾ നിർമിക്കുന്നു. മുൻ അനുഭവം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് 80% വും ശരിയായി പ്രവർത്തിപ്പിക്കുന്നു എന്നാണ്. ശരിയായി പ്രവർത്തിപ്പിക്കുമ്പോൾ, സ്വീകാര്യമായ രണ്ട് ഉല്പന്നങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു. എങ്കിൽ ശരിയായി പ്രവർത്തിപ്പിക്കുവാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

A എന്ന സംഭവം രണ്ടും സ്വീകാര്യമായ ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ നിർമിക്കുന്നു എന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. B_1 എന്നത് ശരിയായി പ്രവർത്തിപ്പിക്കുന്നു എന്ന സംഭവവും B_2 എന്നത് ശരിയായി പ്രവർത്തിപ്പിക്കാത്ത സംഭവവും ആണ്.

$$P(B_1) = 0.8,\ P(B_2) = 0.2$$

$$P(A|B_1) = 0.9 \times 0.9$$

$$P(A|B_2) = 0.4 \times 0.4$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)\,P(A|B_1)}{P(B_1)\,P(A|B_1)+P(B_2)\,P(A|B_2)}$$

$$= \frac{0.8\times0.9\times0.9}{0.8\times0.9\times0.9+0.2\times0.4\times0.4} = \frac{648}{680} = 0.95$$

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. A, B എന്നീ രണ്ടു സംഭവങ്ങളിൽ, $P(A) \neq 0$.

   (i) A, B യുടെ ഉപഗണമായാൽ $P(B|A)$ കാണുക

   (ii) $A \cap B = \phi$ ആയാൽ $P(B|A)$ കാണുക.

2. ഒരു ദമ്പതികൾക്ക് രണ്ടു കുട്ടികളുണ്ട്.

   (i) ഒരു കുട്ടിയെങ്കിലും ആൺകുട്ടിയാണെന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട് എങ്കിൽ രണ്ടു കുട്ടികളും ആൺകുട്ടികളാകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

   (ii) മൂത്ത കുട്ടി പെൺകുട്ടിയാണെന്ന് തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ രണ്ടു കുട്ടികളും പെൺകുട്ടികളാകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

3. 5% പുരുഷന്മാരുടേയും 0.25% സ്ത്രീകളുടേയും മുടി ചാരനിറത്തിലുള്ളതാണ്. ചാരനിറമുള്ള മുടിയുള്ള ഒരാളെ പ്രവചനാതീതമായി തിരഞ്ഞെടുത്താൽ, പുരുഷനാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? പുരുഷന്മാരുടേയും സ്ത്രീകളുടേയും എണ്ണം തുല്യമാണ് എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക.

4. 90% ആൾക്കാർ വലതുകൈ ഉപയോഗിക്കുന്നവരാണ്. 10 ആൾക്കാരിൽ പരമാവധി 6 ആൾക്കാർ വലതുകൈ ഉപയോഗിക്കുന്നതിന്റെ സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

5. ഒരു ഭരണിയിൽ 25 പന്തുകൾ ഉണ്ട്. ഇതിൽ 10 എണ്ണം X എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. 15 എണ്ണം Y എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഭരണിയിൽ നിന്നും പ്രവചനാതീതമായി ഒരു പന്ത് എടുക്കുന്നു. അതിന്റെ അടയാളം രേഖപ്പെടുത്തിയതിനുശേഷം തിരികെ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. ഇതുപോലെ 6 പന്തുകൾ എടുക്കുന്നു. എങ്കിൽ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

   (i) എല്ലാം X അടയാളമുള്ളവ.

   (ii) 2 ൽ കൂടുതൽ Y അടയാളമില്ലാത്തവ

   (iii) കുറഞ്ഞത് ഒരു പന്ത് Y അടയാളമുള്ളത്

   (iv) X അടയാളങ്ങളും Y അടയാളങ്ങളും തുല്യമായുള്ള പന്തുകളുടെ എണ്ണം.

6. ഒരു ഹർഡിൽസ് മത്സരത്തിൽ ഒരു താരത്തിന് 10 ഹർഡിലുകൾ മറികടക്കണം. ഓരോ ഹർഡിലും മറികടക്കാനുള്ള സാധ്യത $\frac{5}{6}$ ആണ്. എങ്കിൽ രണ്ടിൽ കുറവ് ഹർഡിലുകളിൽ തട്ടാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. മൂന്ന് 6 കിട്ടുന്നതുവരെ ഒരു സമചതുരക്കട്ട തുടർച്ചയായി എറിയുന്നു എങ്കിൽ 6-ാമത്തെ പ്രാവശ്യം മൂന്നാമത്തെ '6' കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. ഒരു അധിവർഷത്തിൽ 53 ചൊവ്വാഴ്ചകൾ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

9. ഒരു പരീക്ഷണം പരാജയപ്പെടുമ്പോൾ അത് രണ്ട് പ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കുന്നു എങ്കിൽ അടുത്ത 6 ട്രയലുകളിൽ കുറഞ്ഞത് 4 വിജയങ്ങൾ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

10. ഒരാൾ ഒരു നാണയം കുറഞ്ഞത് എത്രപ്രാവശ്യം എറിഞ്ഞാലാണ് കുറഞ്ഞത് ഒരു തല കിട്ടുന്നതിനുള്ള സാധ്യത 90% ൽ കൂടുതലാകുന്നത്?

11. ഒരു കളിയിൽ, ഒരു സമചതുരക്കട്ട എറിയുമ്പോൾ '6' എന്ന സംഖ്യ വന്നാൽ ആ ആളിന് 1 രൂപ ലഭിക്കുന്നു. മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യയാണ് വരുന്നതെങ്കിൽ 1 രൂപ നഷ്ടപ്പെടുന്നു. അയാൾ സമചതുരക്കട്ട മൂന്ന് പ്രാവശ്യം എറിയാനും ഒരു '6' ലഭിക്കുമ്പോൾ കളി മതിയാക്കാനും തീരുമാനിക്കുന്നു. അയാൾക്കു കളിയിൽ ലഭിച്ചതോ അല്ലെങ്കിൽ നഷ്ടപ്പെട്ടതോ ആയ തുകയുടെ പ്രതീക്ഷിത വില (expected value) കണക്കാക്കുക.

12. A,B,C,D എന്നീ നാലു പെട്ടികളിൽ പലനിറങ്ങളിലുള്ള മാർബിൾ കഷണങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഇവ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

പെട്ടി	മാർബിൾ നിറങ്ങൾ		
	ചുവപ്പ്	വെളുപ്പ്	കറുപ്പ്
A	1	6	3
B	6	2	2
C	8	1	1
D	0	6	4

ഇതിൽ നിന്നും ഒരു പെട്ടി തിരഞ്ഞെടുത്ത ശേഷം ഒരു മാർബിൾ എടുക്കുന്നു. ഈ മാർബിളിന്റെ നിറം ചുവപ്പായാൽ ഇത് A, B, C എന്നീ പെട്ടിയിൽ നിന്നും എടുക്കാനുള്ള സാധ്യതകൾ പ്രത്യേകം കണ്ടുപിടിക്കുക.

13. ഒരു രോഗിക്ക് ഹൃദയസ്തംഭനം ഉണ്ടാകാനുള്ള സാധ്യത 40% ആണ്. ധ്യാനവും യോഗയും വഴി ഇത് കുറയ്ക്കാനുള്ള സാധ്യത 30% ആണ്. മരുന്ന് ഉപയോഗിക്കുക വഴി ഇത് കുറയ്ക്കാനുള്ള സാധ്യത 25% ആണ്. ഒരേ സമയത്ത് ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു മാർഗ്ഗം സ്വീകരിക്കുന്നതിനുള്ള സാധ്യത തുല്യമാണ്. ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു മാർഗ്ഗം സ്വീകരിക്കുന്ന ഒരു രോഗിക്ക് ഹൃദയസ്തംഭനം ഉണ്ടാകുന്നു. എങ്കിൽ ഈ രോഗി ധ്യാനവും അതിനുശേഷം യോഗയും ചെയ്യാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കുക.

14. ഒരു രണ്ടാം ക്രമമുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ അംഗങ്ങൾ ഒന്നുകിൽ 0 അല്ലെങ്കിൽ 1 ആണ്. എങ്കിൽ ഈ ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വില അധിസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്? (ഇതിലെ അംഗങ്ങളെ പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാതെയാണ് തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നത്. ഓരോ വിലയും എടുക്കാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1}{2}$ ആണ്).

15. ഒരു ഇലക്ട്രോണിക് സംവിധാനത്തിൽ രണ്ട് ഉപസംവിധാനങ്ങളുണ്ട്. A, B എന്നിവ. മുൻപരീക്ഷണങ്ങളിൽ നിന്നും ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സാധ്യതകൾ ലഭിക്കുന്നു.

$$P(A \text{ പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല}) = 0.2$$

$$P(B \text{ മാത്രം പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല}) = 0.15$$

$$P(A \text{ യും } B \text{ യും പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല}) = 0.15$$

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സാധ്യതകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $P(A \text{ പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല } | B \text{ പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല})$

(ii) $P(A \text{ മാത്രം പ്രവർത്തിക്കുന്നില്ല})$

16. ബാഗ് I ൽ 3 ചുവന്ന പന്തുകളും 4 കറുത്ത പന്തുകളും ബാഗ് II ൽ 4 ചുവന്ന പന്തുകളും 5 കറുത്ത പന്തുകളും ഉണ്ട്. I-ാമത്തെ ബാഗിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് രണ്ടാമത്തെ ബാഗിലേക്ക് മാറ്റിയതിനുശേഷം രണ്ടാമത്തെ ബാഗിൽ നിന്നും ഒരു പന്ത് എടുക്കുന്നു. ഈ പന്ത് ചുവപ്പ് നിറമുള്ളതായാൽ ഒന്നാമത്തെ ബാഗിൽ നിന്നും രണ്ടാമത്തെ ബാഗിലേക്ക് മാറ്റിയ പന്ത് കറുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ നിന്നും ശരിയായവ തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

17. A, B എന്നിവ രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ ആയാൽ, $P(A) \neq 0$ $P(B|A) = 1$, എങ്കിൽ

(A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$ (C) $B = \phi$ (D) $A = \phi$

18. $P(AB) > P(A)$, എങ്കിൽ

(A) $P(B|A) < P(B)$ (B) $P(A \cap B) < P(A) . P(B)$

(C) $P(B|A) > P(B)$ (D) $P(B|A) = P(B)$

19. A, B എന്നീ രണ്ടു സംഭവങ്ങളിൽ $P(A) = P(B)$ $P(A \cap B) = P(A)$ എങ്കിൽ

(A) $P(B|A) = 1$ (B) $P(A|B) = 1$

(C) $P(B|A) = 0$ (D) $P(A|B) = 0$

സംഗ്രഹം

- E എന്ന സംഭവത്തിന്റെ സോപാധിക സാധ്യത F സംഭവിച്ചു കഴിയുമ്പോൾ

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, P(F) \neq 0$$

- $0 \leq P(EF) \leq 1,$ $P(E'F) = 1 \quad P(E|F)$

$P((E \cup F)G) = P(E|G) - P(FG) \quad P((E \cap F)|G)$

- $P(E \cap F) = P(E)\,P(F|E),\ P(E) \neq 0$

  $P(E \cap F) = P(F)\,P(E|F),\ P(F) \neq 0$

- E യും F യും പരസ്പരാശ്രിതമല്ലാത്ത സംഭവങ്ങളായാൽ

  $P(E \cap F) = P(E)\,P(F)$

  $P(E|F) = P(E),\ P(F) \neq 0$

  $P(F|E) = P(F),\ P(E) \neq 0$

- **മൊത്ത സാധ്യതാസിദ്ധാന്തം**

  $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ എന്നത് S എന്ന സാധ്യതാഗണത്തിന്റെ ഒരു വിഭജനമാണ്. E_1, E_2, ... E_n എന്നീ സംഭവങ്ങളുടെ സാധ്യത പൂജ്യമല്ല എങ്കിൽ

  $P(A) = P(E_1)\,P(A|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2) + \ldots + P(E_n)\,P(A|E_n)$

- **ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തം**

  $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ എന്നത് S എന്ന സാധ്യതാഗണത്തിന്റെ ഒരു വിഭജനമാണെങ്കിൽ, അതായത്, $E_1, E_2, \ldots, E_n$ എന്നിവ പരസ്പരം വിയുക്തങ്ങളായ സംഭവങ്ങൾ, $E_1 \cup E_2 \cup E_n = S$, A പൂജ്യമല്ലാത്ത സാധ്യതയുള്ള ഒരു സംഭവം എങ്കിൽ

$$P(E_i | A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)};\ i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

- പ്രവചനാതീതചരം എന്നത് മണ്ഡലം സാധ്യതാഗണമായ ഒരു രേഖീയ സംഖ്യാമൂല്യ ഏകദമാണ്.

- X എന്ന പ്രവചനാതീതചരത്തിന്റെ സാധ്യത വിതരണം എന്നത്

X	:	x_1	x_2	...	x_n
P(X)	:	p_1	p_2	...	p_n

$$p_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

- X എന്ന ഒരു പ്രവചനാതീതചരത്തിന്റെ വിലകളാണ് $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ഇവയുടെ സാധ്യത യഥാക്രമം $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ എങ്കിൽ ഇവയുടെ മാധ്യം

$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. മാധ്യത്തെ X ന്റെ പ്രതീക്ഷിതശരാശരി (expectation) E(X) കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

- കൂടാതെ, വേരിയൻസ് $\sigma_x^2 = \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p(x_i)$

$$= E(X - \mu)^2$$

മാനകവ്യതിയാനം, $\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p(x_i)}$

- $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

- ഒരു പ്രവചനാതീത പരീക്ഷണം ബർണൂളിയൻ ട്രയൽ ആകുന്നത് താഴെ പറയുന്ന നിബന്ധനകൾ അനുസരിക്കുമ്പോഴാണ്

  (i) ട്രയലുകളുടെ എണ്ണം പരിമിതമാകണം

  (ii) ട്രയലുകൾ പരസ്പര ആശ്രിതമാകരുത്

  (iii) ഓരോ ട്രയലിനും രണ്ട് പരിണതഫലങ്ങൾ മാത്രം ആകണം: വിജയം, പരാജയം

  (iv) ഓരോ ട്രയലിന്റെയും വിജയത്തിന്റെ സാധ്യത തുല്യമാകണം

  ഒരു ദ്വിപദവിതരണത്തിന് B (n, p), $P(X = x) = {}^nC_x \, q^{n-x} p^x$, $x = 0, 1, \ldots, n$ $(q = 1 - p)$

ചരിത്രക്കുറിപ്പ്

സാധ്യതയുടെ അളവിനെക്കുറിച്ച് ആദ്യ സൂചനകൾ കണ്ടത് 1477 ൽ പുറത്തിറങ്ങിയ ഡാന്റെയുടെ ഡിവൈൻ കോമഡിയുടെ വ്യാഖ്യാനത്തിൽ ചീട്ട് ഉപയോഗിച്ചുള്ള കളികളുടെ പരാമർശത്തിലാണ്. ജറോനിമോ കാർഡാനോ (1501 – 1576) യുടെ മരണാനന്തരം 1663 ൽ ചൂതുകളിയെക്കുറിച്ച് 'Liber de Ludo Alcae' എന്ന അദ്ദേഹത്തിന്റെ പ്രബന്ധം പ്രസിദ്ധീകരിക്കുകയുണ്ടായി. ഈ പ്രബന്ധത്തിൽ അദ്ദേഹം രണ്ട് സമചതുരക്കട്ട എറിയുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന അനുകൂല പരിണിതഫലങ്ങളെക്കുറിച്ച് പരാമർശിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഗലീലിയോ (1564– 1642) മൂന്ന് സമചതുരക്കട്ട ഉപയോഗിച്ചുള്ള കളികളിലെ സാധ്യതകളെക്കുറിച്ച് ഏക

ദേശം കൃത്യമായി കണക്കാക്കുകയുണ്ടായി. മൂന്ന് സമചതുരകട്ട എറിയുമ്പോൾ വരുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുക 10 വരാനുള്ള സാധ്യത 9 നേക്കാൾ കൂടുതലാണ്. കാരണം തുക 10 വരുന്ന അനുകൂല പരിണിതഫലങ്ങൾ 9 നേക്കാൾ കൂടുതലാണ് എന്ന് അദ്ദേഹം വിശകലനം ചെയ്യുകയുണ്ടായി.

ഇത്തരത്തിലുള്ള ആദ്യകാല സംഭാവനകൾ ഒഴിച്ചു നിർത്തിയാൽ പൊതുവായി സാധ്യതയുടെ ഗണിതം എന്ന ശാഖയുടെ ഉത്ഭവം പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിലെ പ്രശസ്ത ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻമാരായ പാസ്കൽ (1623 - 1662), ഫെർമ (1601 - 1665) എന്നിവരുടെ എഴുത്തുകുത്തുകളിൽ നിന്നാണ്. ഫ്രഞ്ച് ചൂതാട്ടക്കാരൻ ഷവലിയർ ദെ മെത്രെ പാസ്കലിനെ സമീപിക്കുകയും ചൂതാട്ടകളിയിലെ സൈദ്ധാന്തിക അനുമാനവും നിരീക്ഷണ അനുമാനവും തമ്മിലുള്ള വൈരുദ്ധ്യത്തെ കുറിച്ച് വിശദീകരിക്കാൻ ആവശ്യപ്പെടുകയുമുണ്ടായി. ഇതിനെ തുടർന്ന് 1654 ൽ പാസ്കലും ഫെർമയും തമ്മിൽ നടത്തിയ തുടർച്ചയായ കത്തിടപാടുകളാണ് ഈ ശാസ്ത്രശാഖയുടെ അടിസ്ഥാനശിലകൾ. പാസ്കൽ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചപ്പോൾ ഫെർമ സഞ്ചയം (combination) ഉപയോഗിച്ചാണ് പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കണ്ടത്.

പ്രശസ്തനായ ഡച്ച് ശാസ്ത്രജ്ഞൻ ഹൈഗൻ (1629 - 1695), പാസ്കലും ഫെർമയും തമ്മിൽ നടത്തിയ എഴുത്തുകുത്തുകളിലെ ആശയങ്ങളിൽ ആകൃഷ്ടനാകുകയും സാധ്യത എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രശാഖയുടെ ആദ്യത്തെ പുസ്തകം പുറത്തിറക്കുകയും ചെയ്തു. 'De Ratiocrisis in Ludo Aleae' എന്ന ഈ പുസ്തകത്തിൽ സാധ്യതയുടെ അളവ് കണ്ടെത്തുന്നത് ആവശ്യമായി വരുന്ന കളികളിലെ പ്രയാസമുള്ളതിനെക്കാൾ താൽപര്യമുണർത്തുന്ന ഒട്ടേറെ പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം നിർദ്ദേശിക്കുന്നുണ്ട്.

സാധ്യതാ സിദ്ധാന്തത്തിലെ അടുത്ത പ്രധാനപ്പെട്ട കൃതി ജേക്കബ് ബർണൂളിയുടെ (1654 - 1705) പേരിൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ മരണാന്തരം 1713 ൽ സഹോദരപുത്രൻ നിക്കോളസ് ബർണോളി പ്രസിദ്ധീകരിച്ച 'Ars Conjectendi' എന്ന പുസ്തകമാണ്. പ്രധാനപ്പെട്ട സാധ്യതാവിതരണമായ ദ്വിപദവിതരണം കണ്ടെത്തിയതിന്റെ ഖ്യാതി അദ്ദേഹത്തിന്റെ പേരിലാണ്. തുടർന്ന് സാധ്യതാ സിദ്ധാന്തത്തിലെ പ്രമുഖമായ കൃതി വന്നത് 1993 ലാണ്. എ.എൻ. കൊൽമോഗ്രോവ് (1903 - 1984) ആണ് സാധ്യതയുടെ സ്വയംപ്രമാണ രീതി (Axiomatic Theory) കൊണ്ടുവന്നത്. 1933 ലെ 'Foundation of Probability എന്ന പുസ്തകത്തിൽ സാധ്യതയെ ഒരു ഗണത്തിലെ ഏകദമായി അവതരിപ്പിക്കുകയും അത് ഉത്കൃഷ്ടമായി നിരൂപിക്കപ്പെടുകയും ചെയ്യുന്നു.

ഉത്തരസൂചിക

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.1

1. $-\frac{1}{2}\cos 2x$
2. $\frac{1}{3}\sin 3x$
3. $\frac{1}{2}e^{2x}$
4. $\frac{1}{3a}(ax+b)^3$
5. $-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{4}{3}e^{3x}$
6. $\frac{4}{3}e^{3x}+x+C$
7. $\frac{x^3}{3}-x+C$
8. $\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+C$
9. $\frac{2}{3}x^3+e^x+C$
10. $\frac{x^2}{2}+\log|x|-2x+C$
11. $\frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$
12. $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+8\sqrt{x}+C$
13. $\frac{x^3}{3}+x+C$
14. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$
15. $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+C$
16. $x^2-3\sin x+e^x+C$
17. $\frac{2}{3}x^3+3\cos x+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$
18. $\tan x + \sec x + C$
19. $\tan x - x + C$
20. $2\tan x - 3\sec x + C$
21. C
22. A

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.2

1. $\log(1+x^2)+C$
2. $\frac{1}{3}(\log|x|)^3+C$
3. $\log|1+\log x|+C$
4. $\cos(\cos x)+C$
5. $-\frac{1}{4a}\cos 2(ax+b)+C$
6. $\frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}+C$
7. $\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+C$

8. $\frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ **9.** $\frac{4}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}+C$ **10.** $2\log\left|\sqrt{x}-1\right|+C$

11. $\frac{2}{3}\sqrt{x+4}(x-8)+C$

12. $\frac{1}{7}(x^3-1)^{\frac{7}{3}}+\frac{1}{4}(x^3-1)^{\frac{4}{3}}+C$ **13.** $-\frac{1}{18(2+3x^3)^2}+C$

14. $\frac{(\log x)^{1-m}}{1-m}+C$ **15.** $-\frac{1}{8}\log|9-4x^2|+C$ **16.** $\frac{1}{2}e^{2x-3}+C$

17. $-\frac{1}{2e^{x^2}}+C$ **18.** $e^{\tan^{-1}x}+C$ **19.** $\log(e^x+e^{-x})+C$

20. $\frac{1}{2}\log(e^{2x}+e^{-2x})+C$ **21.** $\frac{1}{2}\tan(2x-3)-x+C$

22. $-\frac{1}{4}\tan(7-4x)+C$ **23.** $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2+C$

24. $\frac{1}{2}\log|2\sin x+3\cos x|+C$ **25.** $\frac{1}{(1-\tan x)}+C$

26. $2\sin\sqrt{x}+C$ **27.** $\frac{1}{3}(\sin 2x)^{\frac{3}{2}}+C$ **28.** $2\sqrt{1+\sin x}+C$

29. $\frac{1}{2}(\log\sin x)^2+C$ **30.** $-\log|1+\cos x|+C$ **31.** $\frac{1}{1+\cos x}+C$

32. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+C$ **33.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x-\sin x|+C$

34. $2\sqrt{\tan x}+C$ **35.** $\frac{1}{3}(1+\log x)^3+C$ **36.** $\frac{1}{3}(x+\log x)^3+C$

37. $-\frac{1}{4}\cos(\tan^{-1}x^4)+C$ **38.** D

39. B

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.3

1. $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin(4x+10)+C$

2. $-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{2}\cos x+C$

3. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{12}\sin 12x+x+\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]+C$

4. $-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{6}\cos^3(2x+1)+C$

5. $\frac{1}{6}\cos^6 x-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

6. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]+C$

7. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 12x\right]+C$

8. $2\tan\frac{x}{2}-x+C$

9. $x-\tan\frac{x}{2}+C$

10. $\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

11. $\frac{3x}{8}+\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 8x+C$

12. $x-\sin x+C$

13. $2(\sin x+x\cos\alpha)+C$

14. $-\frac{1}{\cos x+\sin x}+C$

15. $\frac{1}{6}\sec^3 2x-\frac{1}{2}\sec 2x+C$

16. $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$

17. $\sec x-\operatorname{cosec} x+C$

18. $\tan x+C$

19. $\log|\tan x|+\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

20. $\log|\cos x+\sin x|+C$

21. $\frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{2}+C$

22. $\frac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\frac{\cos(x-a)}{\cos(x-b)}\right|+C$

23. A

24. B

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.4

1. $\tan^{-1}x^3+C$

2. $\frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|+C$

3. $\log\left|\dfrac{1}{2-x+\sqrt{x^2-4x+5}}\right|+C$

4. $\dfrac{1}{5}\sin^{-1}\dfrac{5x}{3}+C$

5. $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{2}\,x^2+C$

6. $\dfrac{1}{6}\log\left|\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right|+C$

7. $\sqrt{x^2-1}-\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

8. $\dfrac{1}{3}\log\left|x^3+\sqrt{x^6+a^6}\right|+C$

9. $\log\left|\tan x+\sqrt{\tan^2 x+4}\right|+C$

10. $\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$

11. $\dfrac{1}{6}\tan^{-1}\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)+C$

12. $\sin^{-1}\left(\dfrac{x+3}{4}\right)+C$

13. $\log\left|x-\dfrac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+C$

14. $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x-3}{\sqrt{41}}\right)+C$

15. $\log\left|x-\dfrac{a+b}{2}+\sqrt{(x-a)(x-b)}\right|+C$

16. $2\sqrt{2x^2+x-3}+C$

17. $\sqrt{x^2-1}+2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

18. $\dfrac{5}{6}\log\left|3x^2+2x+1\right|-\dfrac{11}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\dfrac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$

19. $6\sqrt{x^2-9x+20}+34\log\left|x-\dfrac{9}{2}+\sqrt{x^2-9x+20}\right|+C$

20. $\sqrt{4x-x^2}+4\sin^{-1}\left(\dfrac{x-2}{2}\right)+C$

21. $\sqrt{x^2+2x+3}+\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$

22. $\dfrac{1}{2}\log\left|x^2-2x-5\right|+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\log\left|\dfrac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C$

23. $5\sqrt{x^2+4x+10}-7\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C$

24. B **25.** B

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.5

1. $\log\frac{(x+2)^2}{|x+1|}+C$ **2.** $\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$

3. $\log|x-1|-5\log|x-2|+4\log|x-3|+C$

4. $\frac{1}{2}\log|x-1|-2\log|x-2|+\frac{3}{2}\log|x-3|+C$

5. $4\log|x+2|-2\log|x+1|+C$ **6.** $\frac{x}{2}+\log|x|-\frac{3}{4}\log|1-2x|+C$

7. $\frac{1}{2}\log|x-1|-\frac{1}{4}\log(x^2+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

8. $\frac{2}{9}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+C$ **9.** $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C$

10. $\frac{5}{2}\log|x+1|-\frac{1}{10}\log|x-1|-\frac{12}{5}\log|2x+3|+C$

11. $\frac{5}{3}\log|x+1|-\frac{5}{2}\log|x+2|+\frac{5}{6}\log|x-2|+C$

12. $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{3}{2}\log|x-1|+C$

13. $-\log|x-1|+\frac{1}{2}\log(1+x^2)+\tan^{-1}x+C$

14. $3\log|x+2|+\frac{7}{x+2}+C$ **15.** $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

16. $\frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+C$ **17.** $\log\left|\frac{2-\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

18. $x+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}-3\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$ **19.** $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)+C$

20. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x^4-1}{x^4}\right|+C$

21. $\log\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)+C$

22. B

23. A

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.6

1. $-x\cos x+\sin x+C$

2. $-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$

3. $e^x(x^2-2x+2)+C$

4. $\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C$

5. $\frac{x^2}{2}\log 2x-\frac{x^2}{4}+C$

6. $\frac{x^3}{3}\log x-\frac{x^3}{9}+C$

7. $\frac{1}{4}(2x^2-1)\sin^{-1}x+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}+C$

8. $\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

9. $(2x^2-1)\frac{\cos^{-1}x}{4}-\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$

10. $(\sin^{-1}x)^2 x+2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x-2x+C$

11. $-\left[\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x+x\right]+C$

12. $x\tan x+\log|\cos x|+C$

13. $x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+C$

14. $\frac{x^2}{2}(\log x)^2-\frac{x^2}{2}\log x+\frac{x^2}{4}+C$

15. $\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\log x-\frac{x^3}{9}-x+C$

16. $e^x\sin x+C$

17. $\frac{e^x}{1+x}+C$

18. $e^x\tan\frac{x}{2}+C$

19. $\frac{e^x}{x}+C$

20. $\frac{e^x}{(x-1)^2}+C$

21. $\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x-\cos x)+C$

22. $2x\tan^{-1}x-\log(1+x^2)+C$

23. A

24. B

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.7

1. $\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\sin^{-1}\frac{x}{2}+C$

2. $\frac{1}{4}\sin^{-1}2x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2}+C$

3. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+6}+\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right|+C$

4. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+1}-\frac{3}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right|+C$

5. $\frac{5}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2}+C$

6. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x-5}-\frac{9}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right|+C$

7. $\frac{(2x-3)}{4}\sqrt{1+3x-x^2}+\frac{13}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{13}}\right)+C$

8. $\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2+3x}-\frac{9}{8}\log\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x}\right|+C$

9. $\frac{x}{6}\sqrt{x^2+9}+\frac{3}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$

10. A

11. D

12. $\frac{1}{3}(x^2+x)^{\frac{3}{2}}-\frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}{8}+\frac{1}{16}\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$

13. $\frac{1}{6}(2x^2+3)^{\frac{3}{2}}+\frac{x}{2}\sqrt{2x^2+3}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}\right|+C$

14. $-\frac{1}{3}(3-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{7}}\right)+\frac{(x+2)\sqrt{3-4x-x^2}}{2}+C$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.8

1. $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ 2. $\frac{35}{2}$ 3. $\frac{19}{3}$

4. $\frac{27}{2}$ 5. $e-\frac{1}{e}$ 6. $\frac{15+e^8}{2}$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.9

1. 2 2. $\log\frac{3}{2}$ 3. $\frac{64}{3}$

4. $\frac{1}{2}$ 5. 0 6. $e^4\,(e-1)$

7. $\frac{1}{2}\log 2$ 8. $\log\left(\frac{\sqrt{2}\quad 1}{2\quad \sqrt{3}}\right)$ 9. $\frac{\pi}{2}$

10. $\frac{\pi}{4}$ 11. $\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$ 12. $\frac{\pi}{4}$

13. $\frac{1}{2}\log 2$ 14. $\frac{1}{5}\log 6+\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{\ 1}\sqrt{5}$

15. $\frac{1}{2}(e-1)$ 16. $5\quad\frac{5}{2}\left(9\log\frac{5}{4}\quad\log\frac{3}{2}\right)$

17. $\frac{\pi^4}{1024}+\frac{\pi}{2}+2$ 18. 0 19. $3\log 2+\frac{3\pi}{8}$

20. $1+\frac{4}{\pi}-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ 21. D 22. C

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.10

1. $\frac{1}{2}\log 2$ 2. $\frac{64}{231}$ 3. $\frac{\pi}{2}-\log 2$

4. $\frac{16\sqrt{2}}{15}(\sqrt{2}+1)$ 5. $\frac{\pi}{4}$ 6. $\frac{1}{\sqrt{17}}\log\frac{21+5\sqrt{17}}{4}$

7. $\frac{\pi}{8}$ **8.** $\frac{e^2(e^2-2)}{4}$ **9.** A

10. B

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 7.11

1. $\frac{\pi}{4}$ **2.** $\frac{\pi}{4}$ **3.** $\frac{\pi}{4}$ **4.** $\frac{\pi}{4}$

5. 29 **6.** 9 **7.** $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

8. $\frac{\pi}{8}\log 2$ **9.** $\frac{16\sqrt{2}}{15}$ **10.** $\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$ **11.** $\frac{\pi}{2}$

12. π **13.** 0 **14.** 0 **15.** 0

16. $-\pi\log 2$ **17.** $\frac{a}{2}$ **18.** 5 **20.** C

21. C

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2}{1-x^2}\right|+C$ **2.** $\frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right]+C$

3. $-\frac{2}{a}\sqrt{\frac{(a-x)}{x}}+C$ **4.** $-\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}+C$

5. $2\sqrt{x}-3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}-6\log(1+x^{\frac{1}{6}})+C$

6. $-\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{1}{4}\log(x^2+9)+\frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{3}+C$

7. $\sin a\log|\sin(x-a)|+x\cos a+C$ **8.** $\frac{x^3}{3}+C$

9. $\sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C$ **10.** $-\frac{1}{2}\sin 2x+C$

11. $\dfrac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\dfrac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C$

12. $\dfrac{1}{4}\sin^{-1}(x^4)+C$

13. $\log\left(\dfrac{1+e^x}{2+e^x}\right)+C$

14. $\dfrac{1}{3}\tan^{-1}x-\dfrac{1}{6}\tan^{-1}\dfrac{x}{2}+C$

15. $-\dfrac{1}{4}\cos^4 x+C$

16. $\dfrac{1}{4}\log(x^4+1)+C$

17. $\dfrac{[f(ax+b)]^{n+1}}{a(n+1)}+C$

18. $\dfrac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{\sin(x+\alpha)}{\sin x}}+C$

19. $\dfrac{2(2x-1)}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{x}+\dfrac{2\sqrt{x-x^2}}{\pi}-x+C$

20. $-2\sqrt{1-x}+\cos^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}+C$

21. $e^x\tan x+C$

22. $-2\log|x+1|-\dfrac{1}{x+1}+3\log|x+2|+C$

23. $\dfrac{1}{2}\left[x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}\right]+C$

24. $\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\log\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{2}{3}\right]+C$

25. $e^{\frac{\pi}{2}}$

26. $\dfrac{\pi}{8}$

27. $\dfrac{\pi}{6}$

28. $2\sin^{-1}\dfrac{(\sqrt{3}-1)}{2}$

29. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

30. $\dfrac{1}{40}\log 9$

31. $\dfrac{\pi}{2}-1$

32. $\dfrac{\pi}{2}(\pi-2)$

33. $\dfrac{19}{2}$

40. $\dfrac{1}{3}\left(e^2-\dfrac{1}{e}\right)$

41. A

42. B

43. D

44. B

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 8.1

1. $\frac{14}{3}$ **2.** $16-4\sqrt{2}$ **3.** $\frac{32-8\sqrt{2}}{3}$

4. 12π **5.** 6π **6.** $\frac{\pi}{3}$

7. $\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ **8.** $(4)^{\frac{2}{3}}$ **9.** $\frac{1}{3}$

10. $\frac{9}{8}$ **11.** $8\sqrt{3}$ **12.** A **13.** B

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 8.2

1. $\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **2.** $\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. $\frac{21}{2}$ **4.** 4 **5.** 8

6. B **7.** B

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. (i) $\frac{7}{3}$ (ii) 624.8

2. $\frac{1}{6}$ **3.** $\frac{7}{3}$ **4.** 9 **5.** 4

6. $\frac{8}{3}\frac{a^2}{m^3}$ **7.** 27 **8.** $\frac{3}{2}(\pi-2)$

9. $\frac{ab}{4}(\pi-2)$ **10.** $\frac{5}{6}$ **11.** 2 **12.** $\frac{1}{3}$

13. 7 **14.** $\frac{7}{2}$ **15.** $\frac{9\pi}{8}-\frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3\sqrt{2}}$

16. D **17.** C **18.** C **19.** B

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.1

1. ക്രമം 4; കൃതി നിർവചിച്ചിട്ടില്ല
2. ക്രമം 1; കൃതി 1
3. ക്രമം 2; കൃതി 1
4. ക്രമം 2; കൃതി നിർവചിച്ചിട്ടില്ല
5. ക്രമം 2; കൃതി 1
6. ക്രമം 3; കൃതി 2
7. ക്രമം 3; കൃതി 1
8. ക്രമം 1; കൃതി 1
9. ക്രമം 2; കൃതി 1
10. ക്രമം 2; കൃതി 1
11. D
12. A

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.2

11. D
12. D

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.3

1. $y'' = 0$
2. $xy\, y'' + x\,(y')^2 - y\, y' = 0$
3. $y'' - y' - 6y = 0$
4. $y'' - 4y' + 4y = 0$
5. $y'' - 2y' + 2y = 0$
6. $2xyy' + x^2 = y^2$
7. $xy' - 2y = 0$
8. $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$
9. $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$
10. $(x^2 - 9)\,(y')^2 + x^2 = 0$
11. B
12. C

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.4

1. $y = 2\tan\frac{x}{2} - x + C$
2. $y = 2\sin(x + C)$
3. $y = 1 + Ae^{-x}$
4. $\tan x \tan y = C$
5. $y = \log(e^x + e^{-x}) + C$
6. $\tan^{-1} y = x + \frac{x^3}{3} + C$
7. $y = e^{cx}$
8. $x^{-1} + y^{-1} = C$
9. $y = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$
10. $\tan y = C\,(1 - e^x)$
11. $y = \frac{1}{4}\log\left[(x+1)^2(x^2+1)^3\right] - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + 1$

12. $y=\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)-\frac{1}{2}\log\frac{3}{4}$

13. $\cos\left(\frac{y-2}{x}\right)=a$

14. $y = \sec x$

15. $2y - 1 = e^x(\sin x - \cos x)$

16. $y - x + 2 = \log(x^2(y+2)^2)$

17. $y^2 - x^2 = 4$

18. $(x+4)^2 = y + 3$

19. $(63t+27)^{\frac{1}{3}}$

20. 6.93%

21. Rs 1648

22. $\dfrac{2\log 2}{\log\left(\frac{11}{10}\right)}$

23. A

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.5

1. $(x-y)^2 = Cx\, e^{\frac{-y}{x}}$

2. $y = x\log|x| + Cx$

3. $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+C$

4. $x^2 + y^2 = Cx$

5. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+\sqrt{2}y}{x-\sqrt{2}y}\right| = \log|x|+C$

6. $y+\sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$

7. $xy\cos\left|\frac{y}{x}\right| = C$

8. $x\left[1-\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]=C\sin\left(\frac{y}{x}\right)$

9. $cy = \log\left|\frac{y}{x}\right|-1$

10. $ye^{\frac{x}{y}} + x = C$

11. $\log(x^2+y^2) + 2\tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}+\log 2$

12. $y + 2x = 3x^2 y$

13. $\cot\left(\frac{y}{x}\right)=\log|ex|$

14. $\cos\left(\frac{y}{x}\right)=\log|ex|$

15. $y=\frac{2x}{1-\log|x|}(x\neq 0, x\neq e)$

16. C

17. D

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 9.6

1. $y = \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x) + C\, e^{-2x}$
2. $y = e^{-2x} + Ce^{-3x}$
3. $xy = \frac{x^4}{4} + C$
4. $y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + C$
5. $y = (\tan x - 1) + C\, e^{-\tan x}$
6. $y = \frac{x^2}{16}(4\log|x| - 1) + Cx^{-2}$
7. $y\log x = \frac{-2}{x}(1 + \log|x|) + C$
8. $y = (1+x)^{-1}\log|\sin x| + C(1+x^2)^{-1}$
9. $y = \frac{1}{x} - \cot x + \frac{C}{x\sin x}$
10. $(x + y + 1) = C\, e^{y}$
11. $x = \frac{y^2}{3} + \frac{C}{y}$
12. $x = 3y^2 + Cy$
13. $y = \cos x - 2\cos^2 x$
14. $y(1 + x^2) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}$
15. $y = 4\sin^3 x - 2\sin^2 x$
16. $x + y + 1 = e^x$
17. $y = 4 - x - 2\, e^x$
18. C
19. D

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. (i) ക്രമം 2; കൃതി 1 (ii) ക്രമം 1; കൃതി 3
   (iii) ക്രമം 4; കൃതി നിർവചിച്ചിട്ടില്ല
3. $y' = \frac{2y^2 - x^2}{4xy}$
5. $(x + yy')^2 = (x - y)^2\,(1 + (y')^2)$
6. $\sin^{-1}y + \sin^{-1}x = C$
8. $\cos y = \frac{\sec x}{\sqrt{2}}$
9. $\tan^{-1} y + \tan^{-1}(e^x) = \frac{\pi}{2}$
10. $e^{\frac{x}{y}} = y + C$
11. $\log|x - y| = x + y + 1$
12. $ye^{2\sqrt{x}} = (2\sqrt{x} + C)$
13. $y\sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}\ (\sin x \neq 0)$
14. $y = \log\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|,\ x \neq -1$

15. 31250

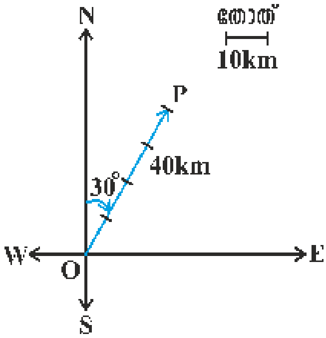
16. C

17. C

18. C

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 10.1

1. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ $\overline{OP}$ എന്ന സദിശം സ്ഥാനാന്തരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.



2. (i) അദിശം (ii) സദിശം (iii) അദിശം (iv) അദിശം (v) അദിശം (vi) സദിശം

3. (i) അദിശം (ii) അദിശം (iii) സദിശം (iv) സദിശം (v) അദിശം

4. (i) $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ ആരംഭബിന്ദു ഒന്നായ സദിശങ്ങളാണ്.
   (ii) $\vec{b}, \vec{d}$ എന്നിവ തുല്യമാണ്.
   (iii) $\vec{a}, \vec{c}$ എന്നിവ സമരേഖീയവും തുല്യമല്ലാത്തവയുമാണ്.

5. (i) ശരി (ii) തെറ്റ് (iii) തെറ്റ് (iv) തെറ്റ്

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 10.2

1. $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=\sqrt{62}, |\vec{c}|=1$

2. അനേകം ഉത്തരങ്ങൾ സാധ്യമാണ്.

3. അനേകം ഉത്തരങ്ങൾ സാധ്യമാണ്.

4. $x = 2, y = 3$

5. $-7, 6;\ -7\hat{i},\ 6\hat{j}$

6. $-4\hat{j}-\hat{k}$

7. $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$

8. $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$

9. $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$

എടുക്കുക

10. $\frac{40}{\sqrt{30}}\hat{i}-\frac{8}{\sqrt{30}}\hat{j}+\frac{16}{\sqrt{30}}\hat{k}$ **12.** $\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}$

13. $-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}$ **15.** (i) $-\frac{1}{3}\hat{i}+\frac{4}{3}\hat{j}+\frac{1}{3}\hat{k}$ (ii) $-3\hat{i}+3\hat{k}$

16. $3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ **18.** (C) **19.** (D)

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 10.3

1. $\frac{\pi}{4}$ **2.** $\cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$ **3.** 0

4. $\frac{60}{\sqrt{114}}$ **6.** $\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{7}},\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$ **7.** $6|\vec{a}|^2+11\vec{a}\cdot\vec{b}-35|\vec{b}|^2$

8. $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=1$ **9.** $\sqrt{13}$ **10.** 8

12. $\vec{b}$ എന്നത് ഏത് സദിശവുമാകാം. **13.** $\frac{-3}{2}$

14. പൂജ്യമല്ലാത്തതും പരസ്പരം ലംബമായതുമായ $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നീ രണ്ട് സദിശങ്ങൾ എടുക്കുക.

15. $\cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{102}}\right)$ **18.** (D)

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 10.4

1. $19\sqrt{2}$ **2.** $\pm\frac{2}{3}\hat{i}\mp\frac{2}{3}\hat{j}\mp\frac{1}{3}\hat{k}$ **3.** $\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}$

5. $3, \frac{27}{2}$ **6.** ഒന്നുകിൽ $|\vec{a}|=0$ അല്ലെങ്കിൽ $|\vec{b}|=0$

8. അല്ല. പൂജ്യമല്ലാത്തതും സമരേഖീയവുമായ ഏത് സദിശങ്ങളും എടുക്കാം.

9. $\frac{\sqrt{61}}{2}$ **10.** $15\sqrt{2}$ **11.** (B) **12.** (C)

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 10.5

1. 24 **3.** $\lambda = 15$ **6.** $x = 5$

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}$

2. $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1; \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

3. $\frac{-5}{2}\hat{i}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

4. അല്ല. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ എന്നിവ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങളായി എടുക്കുക.

5. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

6. $\frac{3}{2}\sqrt{10}\,\hat{i}+\frac{\sqrt{10}}{2}\hat{j}$

7. $\frac{3}{\sqrt{22}}\hat{i}-\frac{3}{\sqrt{22}}\hat{j}+\frac{2}{\sqrt{22}}\hat{k}$

8. $2:3$

9. $3\vec{a}+5\vec{b}$

10. $\frac{1}{7}(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}); \ 11\sqrt{5}$

12. $\frac{1}{3}(160\hat{i}-5\hat{j}+70\hat{k})$

13. $\lambda = 1$

16. (B)

17. (D)

18. (C)

19. (B)

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 11.1

1. $0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. $\frac{-9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{-2}{11}$

5. $\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{17}; \ \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}; \ \frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 11.2

4. $\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})$, λ എന്നത് ഒരു രേഖീയ സംഖ്യയാണ്

5. $\vec{r} = 2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}+\lambda(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ കാർട്ടീഷ്യൻ രൂപം $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-1}$ എന്നാണ്.

6. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+5}{6}$

7. $\vec{r}=(5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k})+\lambda(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k})$

8. വരയുടെ സദിശ സമവാക്യം: $\vec{r} = \lambda(5\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$;

വരയുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യം: $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{3}$

9. വരയുടെ സദിശ സമവാക്യം: $\vec{r} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k} + \lambda(11\hat{k})$

വരയുടെ കാർട്ടീഷ്യൻ സമവാക്യം: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z+5}{11}$

10. (i) $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{19}{21}\right)$ (ii) $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{8}{5\sqrt{3}}\right)$

11. (i) $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{26}{9\sqrt{38}}\right)$ (ii) $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$

12. $p = \dfrac{70}{11}$ **14.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ **15.** $2\sqrt{29}$

16. $\dfrac{3}{\sqrt{19}}$ **17.** $\dfrac{8}{\sqrt{29}}$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 11.3

1. (a) 0, 0, 1; 2 (b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $\dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{-1}{\sqrt{14}}; \dfrac{5}{\sqrt{14}}$ (d) $0, 1, 0; \dfrac{8}{5}$

2. $\vec{r}\cdot\left(\dfrac{3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{70}}\right) = 7$

3. (a) $x + y - z = 2$ (b) $2x + 3y - 4z = 1$
(c) $(s - 2t)x + (3 - t)y + (2s + t)z = 15$

4. (a) $\left(\dfrac{24}{29}, \dfrac{36}{29}, \dfrac{48}{29}\right)$ (b) $\left(0, \dfrac{18}{25}, \dfrac{24}{25}\right)$

(c) $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ (d) $\left(0, \dfrac{-8}{5}, 0\right)$

5. (a) $[\vec{r} - (\hat{i} - 2\hat{k})]\cdot(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 0;\quad x + y - z = 3$

(b) $[\vec{r} - (\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})]\cdot(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 0;\quad x - 2y + z + 1 = 0$

6. (a) ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണ്. തന്നിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന അനേകം തലങ്ങൾ ഉണ്ട്.

(b) $2x + 3y - 3z = 5$

7. $\frac{5}{2}, 5, -5$ **8.** $y = 3$ **9.** $7x - 5y + 4z - 8 = 0$

10. $\vec{r}\cdot\left(38\hat{i} + 68\hat{j} + 3\hat{k}\right) = 153$ $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ **11.** $x - z + 2 = 0$

12. $\cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{731}}\right)$

13. (a) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$ (b) തലങ്ങൾ ലംബങ്ങളാണ്

(c) തലങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളാണ് (d) തലങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളാണ്.

(e) 45°

14. (a) $\frac{3}{13}$ (b) $\frac{13}{3}$

(c) 3 (d) 2

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

3. 90° **4.** $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$ **5.** 0°

6. $k = \frac{-10}{7}$ **7.**

8. $x + y + z = a + b + c$ **9.** 9

10. $\left(0, \frac{17}{2}, \frac{-13}{2}\right)$ **11.** $\left(\frac{17}{3}, 0, \frac{23}{3}\right)$ **12.** $(1, -2, 7)$

13. $7x - 8y + 3z + 25 = 0$ **14.** $p = \frac{3}{2}$ or $\frac{11}{6}$ or $\frac{7}{3}$

15. $y - 3z + 6 = 0$ **16.** $x + 2y - 3z - 14 = 0$

17. $33x + 45y + 50z - 41 = 0$ **18.** 13

19. $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(-3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k})$

20. $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ **22.** D

23. B

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 12.1

1. പരമാവധി വില $Z = 16$, $(0, 4)$ ൽ
2. കുറഞ്ഞ വില $Z = -12$, $(4, 0)$ ൽ
3. പരമാവധി വില $Z = \dfrac{235}{19}$, $\left(\dfrac{20}{19}, \dfrac{45}{19}\right)$ ൽ
4. കുറഞ്ഞ വില $Z = 7$, $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ ൽ
5. പരമാവധി വില $Z = 18$, $(4, 3)$ ൽ
6. $Z = 6$ എന്ന കുറഞ്ഞ വില $(6, 0)$, $(0, 3)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന വരയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും ലഭിക്കുന്നുണ്ട്.
7. $Z = 300$ എന്ന കുറഞ്ഞ വില $(60, 0)$ ൽ ലഭിക്കുന്നു.

   പരമാവധി വില $Z = 600$ എന്ന പരമാവധി വില $(120, 0)$, $(60, 30)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന വരയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും ലഭിക്കുന്നുണ്ട്.
8. $Z = 100$ എന്ന കുറഞ്ഞ വില $(0, 50)$, $(20, 40)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന വരയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും ലഭിക്കുന്നുണ്ട്.

   $Z = 400$ എന്ന പരമാവധി വില $(0, 200)$ ൽ ലഭിക്കുന്നു.
9. Z ന് പരമാവധി വിലയില്ല.
10. സാധ്യതാ ഭാഗമില്ല, അതിനാൽ Z ന് പരമാവധി വിലയില്ല.

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 12.2

1. $\left(\dfrac{8}{3}, 0\right)$, $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിലെ ബിന്ദുക്കളിലാണ് കുറഞ്ഞ വിലയായ 160 രൂപ ലഭിക്കുന്നത്.
2. ഒരു തരത്തിലുള്ള കേക്കുകളുടെ പരമാവധി എണ്ണം = 30, മറ്റൊരു തരത്തിലുള്ള കേക്കുകളുടെ പരമാവധി എണ്ണം = 10.
3. (i) 4 ടെന്നീസ് റാക്കറ്റുകൾ, 12 ക്രിക്കറ്റ് ബാറ്റുകൾ

   (ii) പരമാവധി ലാഭം = 200 രൂപ
4. 3 സെറ്റ് നട്ടുകളും, 3 സെറ്റ് ബോൾട്ടുകളും; പരമാവധി ലാഭം = 73.50 രൂപ
5. 30 സെറ്റ് സ്ക്രൂ A, 20 സെറ്റ് സ്ക്രൂ B; പരമാവധി ലാഭം = 410 രൂപ

6. 4 പീഠ വിളക്കും, 4 തടികൊണ്ടുള്ള കുടകളും; പരമാവധി ലാഭം = 32 രൂപ

7. 8 സ്മരണിക A യും, 20 സ്മരണിക B യും; പരമാവധി ലാഭം = 160 രൂപ

8. 200 ഡെസ്ക് ടോപ്പും, 50 ലാപ്ടോപ്പുകളും; പരമാവധി ലാഭം = 1150000 രൂപ

9. $Z = 4x + 6y$ യുടെ പരമാവധി വില

നിബന്ധനകൾ $3x + 6y \geq 80$, $4x + 3y \geq 100$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, ഇവിടെ F_1, F_2 എന്നിവയുടെ എണ്ണം യഥാക്രമം x, y യൂണിറ്റുകളാണ്; പരമാവധി വില = 104 രൂപ

10. 100 കി.ഗ്രാം വളം F_1, 80 കി.ഗ്രാം വളം F_2; കുറഞ്ഞ വില = 1000 രൂപ

11. (D)

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. 40 യൂണിറ്റ് ഭക്ഷണം P, 15 യൂണിറ്റ് ഭക്ഷണം Q; വിറ്റാമിൻ A യുടെ പരമാവധി അളവ് = 285 യൂണിറ്റ്

2. ബ്രാൻഡ് P - 3 ബാഗുകൾ, ബ്രാൻഡ് Q - 6 ബാഗുകൾ; മിശ്രിതത്തിന്റെ കുറഞ്ഞ ചെലവ് = 1950 രൂപ

3. മിശ്രിതത്തിന്റെ കുറഞ്ഞ ചെലവ് = 112 രൂപ (2 കി.ഗ്രാം ഭക്ഷണം X, 4 കി.ഗ്രാം ഭക്ഷണം Y).

5. എക്സിക്യൂട്ടീവ് ക്ലാസ് ടിക്കറ്റുകളുടെ എണ്ണം = 40, എക്ണോമി ക്ലാസ് ടിക്കറ്റുകളുടെ എണ്ണം = 160; പരമാവധി ലാഭം = 136000 രൂപ

6. A യിൽ നിന്ന് : 10,50,40 യൂണിറ്റുകൾ D, E, F ലേക്ക്; B യിൽ നിന്ന്: 50,0,0 യൂണിറ്റുകൾ D, E, F ലേക്ക്; കുറഞ്ഞ ചിലവ് = 510 രൂപ

7. A യിൽ നിന്ന് : 500,3000,3500 ലിറ്റർ D, E, F ലേക്ക്; B യിൽ നിന്ന്: 4000,0,0 ലിറ്റർ D, E, F ലേക്ക്; കുറഞ്ഞ ചിലവ് = 4400 രൂപ

8. ബ്രാൻഡ് P = 40 ബാഗുകൾ, ബ്രാൻഡ് Q = 100 ബാഗുകൾ; നൈട്രജന്റെ കുറഞ്ഞ അളവ് = 470 കി.ഗ്രാം.

9. P എന്ന ബ്രാൻഡ് = 140 ബാഗുകൾ, Q എന്ന ബ്രാൻഡ് = 50 ബാഗുകൾ; നൈട്രജന്റെ കുറഞ്ഞ അളവ് = 595 കി.ഗ്രാം.

10. A തരത്തിലുള്ള പാവകൾ = 800, B തരത്തിലുള്ള പാവകൾ = 400, പരമാവധി ലാഭം = 16000 രൂപ

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 13.1

1. $P(E|F) = \frac{2}{3}, P(F|E) = \frac{1}{3}$

2. $P(A|B) = \frac{16}{25}$

3. (i) 0.32 (ii) 0.64 (iii) 0.98

4. $\frac{11}{26}$

5. (i) $\frac{4}{11}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{2}{3}$

6. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $\frac{6}{7}$

7. (i) 1 (ii) 0

8. $\frac{1}{6}$ **9.** 1 **10.** (a) $\frac{1}{3}$, (b) $\frac{1}{9}$

11. (i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$

12. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{3}$ **13.** $\frac{5}{9}$

14. $\frac{1}{15}$ **15.** 0 **16.** C **17.** D

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 13.2

1. $\frac{3}{25}$ **2.** $\frac{25}{102}$ **3.** $\frac{44}{91}$

4. A, B ഇവ പരസ്പരാശ്രിതമല്ല **5.** A, B ഇവ പരസ്പരാശ്രിതമാണ്.

6. E, F ഇവ പരസ്പരാശ്രിതമാണ്.

7. (i) $p=\frac{1}{10}$ (ii) $p=\frac{1}{5}$

8. (i) 0.12 (ii) 0.58 (iii) 0.3 (iv) 0.4

9. $\frac{3}{8}$ **10.** A, B ഇവ പരസ്പരാശ്രിതമാണ്.

11. (i) 0.18 (ii) 0.12 (iii) 0.72 (iv) 0.28

12. $\frac{7}{8}$ **13.** (i) $\frac{16}{81}$, (ii) $\frac{20}{81}$, (iii) $\frac{40}{81}$

14. (i) $\frac{2}{3}$, (ii) $\frac{1}{2}$ **15.** (i), (ii) **16.** (a) $\frac{1}{5}$, (b) $\frac{1}{3}$, (c) $\frac{1}{2}$

17. D **18.** B

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 13.3

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{9}{13}$
4. $\frac{12}{13}$
5. $\frac{22}{133}$
6. $\frac{4}{9}$
7. $\frac{1}{52}$
8. $\frac{1}{4}$
9. $\frac{2}{9}$
10. $\frac{8}{11}$
11. $\frac{5}{34}$
12. $\frac{11}{50}$
13. A
14. C

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 13.4

1. (ii), (iii), (iv)

2. X = 0, 1, 2; അതെ

3. X = 6, 4, 2, 0

4. (i)

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(ii)

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(iii)

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

5. (i)

X	0	1	2
P(X)	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

(ii)

X	0	1
P(X)	$\frac{25}{36}$	$\frac{11}{36}$

6.

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{1}{625}$

7.

X	0	1	2
P(X)	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

8. (i) $k = \frac{1}{10}$ (ii) $P(X < 3) = \frac{3}{10}$ (iii) $P(X > 6) = \frac{17}{100}$

(iv) $P(0 < X < 3) = \frac{3}{10}$

9. (a) $k = \frac{1}{6}$ (b) $P(X < 2) = \frac{1}{2}, P(X \le 2) = 1, P(X \ge 2) = \frac{1}{2}$

10. 1.5 11. $\frac{1}{3}$ 12. $\frac{14}{3}$

13. Var(X) = 5.833, S.D = 2.415

14.

X	14	15	16	17	18	19	20	21
P(X)	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$

മാധ്യം = 17.53, Var(X) = 4.78, S.D(X) = 2.19

15. E(X) = 0.7 and Var (X) = 0.21 16. B 17. D

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 13.5

1. (i) $\frac{3}{32}$ (ii) $\frac{7}{64}$ (iii) $\frac{63}{64}$

2. $\frac{25}{216}$ 3. $\left(\frac{29}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^9$

4. (i) $\frac{1}{1024}$ (ii) $\frac{45}{512}$ (iii) $\frac{243}{1024}$

5. (i) $(0.95)^5$ (ii) $(0.95)^4 \times 1.2$ (iii) $1 - (0.95)^4 \times 1.2$

(iv) $1 - (0.95)^5$

6. $\left(\frac{9}{10}\right)^4$ 7. $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left[20C_{12} + {}^{20}C_{13} + \ldots + {}^{20}C_{20}\right]$

9. $\frac{11}{243}$

10. (a) $1-\left(\frac{99}{100}\right)^{50}$ (b) $\frac{1}{2}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$ (c) $1-\frac{149}{100}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$

11. $\frac{7}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^{5}$ **12.** $\frac{35}{18}\left(\frac{5}{6}\right)^{4}$ **13.** $\frac{22\times 9^{3}}{10^{11}}$

14. C **15.** A

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

1. (i) 1 (ii) 0

2. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}$

3. $\frac{20}{21}$

4. $1-\sum_{r=7}^{10} {}^{10}C_r (0.9)^r (0.1)^{10-r}$

5. (i) $\left(\frac{2}{5}\right)^{6}$ (ii) $7\left(\frac{2}{5}\right)^{4}$ (iii) $1-\left(\frac{2}{5}\right)^{6}$ (iv) $\frac{864}{3125}$

6. $\frac{5^{10}}{2\times 6^{9}}$ **7.** $\frac{625}{23328}$ **8.** $\frac{2}{7}$

9. $\frac{31}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}$ **10.** $n \geq 4$ **11.** $\frac{-91}{54}$

12. $\frac{1}{15}, \frac{2}{5}, \frac{8}{15}$ **13.** $\frac{14}{29}$ **14.** $\frac{3}{16}$

15. (i) 0.5 (ii) 0.05 **16.** $\frac{16}{31}$

17. A **18.** C **19.** B