கணிதம்

பகுதி - 2

வகுப்பு

IX

Mathematics
Std IX
Part - 2
Tamil Medium

கேரள அரசு
பொதுக்கல்வித்துறை

தயாரிப்பு
மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT) கேரளம்

2024

ST-937-1-MATHS (T)-9-VOL-2

தேசிய கீதம்

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
பஞ்சாப சிந்து குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா
உச்சல ஜலதி தரங்கா
தவ சுப நாமே ஜாகே
தவ சுப ஆசிஸ் மாகே
காகே தவ ஜய காதா
ஜன கண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
ஜய ஹே! ஜய ஹே! ஜய ஹே!
ஜய ஜய ஜய ஜய ஹே!

உறுதிமொழி

இந்தியா எனது நாடு. இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன்பிறந்தோர். எனது நாட்டை நான் உயிரினும் மேலாக மதிக்கிறேன், அதன் வளம் வாய்ந்த பல்வகைப் பரம்பரைப் புகழில் நான் பெருமைகொள்கிறேன். அதற்குத்தக நான் என்றும் நடந்துகொள்வேன்.

என் பெற்றோர். ஆசிரியர். மூத்தோர் இவர்களை நான் நன்கு மதிப்பேன். எல்லாருடனும் நான் பண்புடன் பழகுவேன். எனது நாட்டினுடையவும் நாட்டு மக்களிடமும் பக்தியுடன் இருப்பேன் என உறுதி கூறுகிறேன். அவர்களின் நவத்திலும் வளத்திலும்தான் எனது இன்பமும் அடங்கியிருக்கிறது.

கணிதம்

9

Prepared by
State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in, e-mail : scertkerala@gmail.com
Typeset and design by : SCERT
First Edition : 2024
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of General Education, Government of Kerala

அன்பார்ந்த மாணவர்களே,

மனிதன் உலகத்தைப் புரிந்துகொள்வதற்கும் அதன் அம்சங்களை அடையாளம் காண்பதற்கும் பல்வேறு பரிமாணங்களும் அவற்றின் தொடர்புகளும் இன்றியமையாததாக இருந்தது. எண்ணல் எண்கள் மற்றும் பின்னங்களை உருவாக்கும் முறைகளையும் அவற்றைப் பயன்படுத்திய செயல்முறைகளின் சிறப்புக்களையும் முந்தைய வகுப்புகளில் கற்றுக்கொண்டோம். எண்களைக் கொண்டோ பின்னங்களைக் கொண்டோ குறிப்பிட முடியாத அளவுகளையும் அவற்றைப் பிரதிநிதித்துவப்படுத்துவதற்கானப் புதிய வழிமுறைகளையும் இங்கே நீங்கள் அறிந்து கொள்ளலாம். மேலும் வடிவியல் வடிவங்கள் பற்றிய பாடங்களும் இந்நூலில் இடம் பெற்றுள்ளன.

இணைகோடுகள், வடிவொத்த முக்கோணங்கள் பற்றியும் அவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பு பற்றியும் இந்நூல் விவாதிக்கிறது. கணக்கீட்டுச் சிந்தனை என்பது கணிதக் கல்விக்கான ஒரு புதிய அணுகுமுறையாகும், இது செயல்முறைகளைப் பற்றிய சிந்தனையை வலியுறுத்துகிறது. பலவிதமான செயல்முறைகளைக் கற்றுக்கொள்வதற்கும், குறிப்பிட்ட சூழல்களுக்கு அவற்றைப் பயன்படுத்துவதற்குப் பதிலாக, அவை எவ்வாறு செயல்படுகின்றன என்பதைப் புரிந்துகொண்டு அவற்றை மிகவும் பயனுள்ளதாக மாற்ற வெவ்வேறு முறைகளைப் பயன்படுத்துவதே கணக்கீட்டு சிந்தனையின் முக்கியநோக்கம். வடிவியலை இயக்கமுறையைப் பயன்படுத்தி, அதிக கருத்துகளை உட்கொள்ளுவதற்குப் பொருத்தமான ஜியோஜிப்ரா என்ற கணினி நிரலின் வாய்ப்புகளும் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

அன்புடன்,

முனைவர். ஜெயபிரகாஷ். ஆர்.கெ
இயக்குநர்
எஸ்.ஸி.இ.ஆர்.டி, திருவனந்தபுரம்

Textbook Development Team

Advisor

Dr. E. Krishnan
Head (Rtd.), Department of Mathematics, University College, Thiruvananthapuram

Chairperson

Dr. P. Ramesh Kumar
Head, Department of Mathematics, University of Kerala, Karyavattom, Thiruvananthapuram

Experts

Dr. Anilkumar. C.V.
Head, Department of Mathematics, Indian Institute of Space Science & Technology Valiyamala, Thiruvananthapuram

Madhu B.
Assistant Professor
Regional Institute of Education, Mysore

A. Sukesh
Assistant Professor,
Government College of Engineering, Kannur

Members

R. Ramanujam
HSST Mathematics,
M.N.K.M. Govt. Higher Secondary School, Pulapatta, Palakkad

Vijayakumaran T.K.
HSST (Rtd),
G.M.R.H.S.S. For Girls, Pravanadukkam, Kasaragod

C.T. Firoz Babu
HST Mathematics,
Govt. Higher Secondary School, Pookkottupadam, Malappuram

Unnikrishnan M.V.
HST Mathematics,
GHS, Kuttiyeri P.O, Kuttiyeri, Kannur

Nandakumar C.
HST Mathematics,
Chothavoor Higher Secondary School, Champad, Kannur

Sreejith Muriyampath
HST Mathematics, GHSS Chorode, Kurikkilad, Vadakara, Kozhikode

Padmaprasad K.
HST Mathematics, Pandallur HSS, Kadambode Post, Malappuram

Ubaidulla K.C.
HST Mathematics,
SOHS Areekode, Malappuram

Firoza Moidu
HST Mathematics, Calicut Girls VHSS, Kundungal, Kallayi, Kozhikode

Priya Raj
HST Mathematics,
MGD Highschool, Puthusserry, Pathanamthitta

Dhaneshan M.V.
HSST English,
GFHSS Padannakadappuram, Kasaragod

Geomy N George
China Media, Shornur

Tamil Version

Language Experts

Dr. K. Manickaraj
Associate Professor of Tamil, Govt. College, Munnar.

Dr. Hepsy Rose Mary A
Associate Professor Dept of Tamil, University of Kerala, Thiruvananthapruam.

Members

S.C Edwin Daniel, Rtd. HM, GHS Pambanar, Idukki
Little Linda T R., Rtd. HST Maths, GHSS Anakkara, Idukki.
Domanatha Sarath Kame, HST Maths, CPM GHSS Peermade, Idukki
Amirthaselvi S A, HST Maths, PHSS Vandiperiyar, Idukki.

Academic Co-ordinator

Dr. Anilkumar A.K.
Research Officer, SCERT

மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம் (SCERT)
வித்தியாபவன், பூஜப்புரை, திருவனந்தபுரம், 695 012

உள்ளடக்கம்

8	வட்டங்களின் அளவுகள்	151
9	மெய்யெண்கள்	165
10	பல்லுறுப்புகள்	177
11	வட்டப்பகுதிகள்	185
12	பட்டகங்கள்	195
13	பல்லுறுப்புப் படங்கள்	209
14	விகிதசமம்	223
15	புள்ளிவிவரக் கணக்கு	233

இந்தப் பாடபுத்தகத்தில் வசதிக்காக, சில அடையாளங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

கணக்கு செய்து பார்க்கலாம்

ஆராய்ச்சி

ஐ.சி.டி வாய்ப்பு

இந்திய அரசமைப்பு

முகப்புரை

இந்திய மக்களாகிய நாம். இந்திய நாட்டினை இறையாண்மையும் சமநலச்சமுதாயமும் சமயச்சார்பின்மையும் மக்களாட்சிமுறையும் அமைந்ததொரு குடியரசாக நிறுவவும்.

அதன் குடிமக்கள் அனைவரும்

சமுதாய, பொருளியல், அரசியல் நீதி,
எண்ணம், அதன் வெளியீடு, கோட்பாடு,
சமயநம்பிக்கை, வழிபாடு இவற்றில் தன்னுரிமை,

சமுதாயப்படிநிலை, வாய்ப்புநலம் இவற்றில் சமன்மை
ஆகியவற்றை எய்திடச் செய்யவும்.

அவர்கள் அனைவரிடையேயும்
தனிமனிதனின் மாண்பு, நாட்டுமக்களின் ஒற்றுமை,
ஒருமைப்பாடு இவற்றை உறுதிப்படுத்தும்
உடன்பிறப்புரிமையினை வளர்க்கவும்

உள்ளார்ந்த உறுதியுடையராய்,

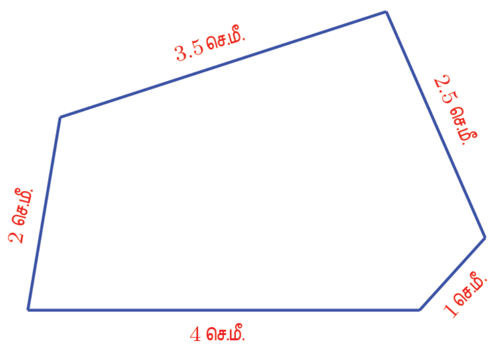
நம்முடைய அரசமைப்புப் பேரவையில், 1949 நவம்பர் இருபத்தாறாம் நாளாகிய இன்று, ஈங்கிதனால், இந்த அரசமைப்பினை ஏற்று, இயற்றி, நமக்கு நாமே வழங்கிக்கொள்கிறோம்.

8

வட்டங்களின் அளவுகள்

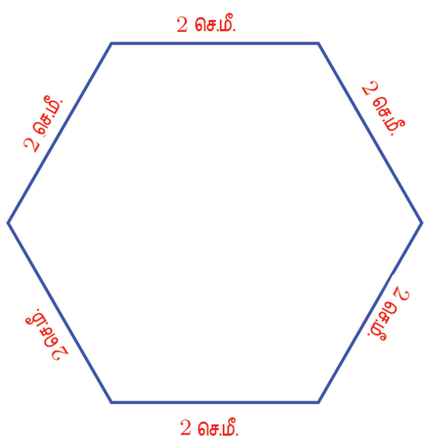
விட்டமும் சுற்றளவும்

ஒரு பலகோணத்தின் சுற்றளவைக் கணக்கிடுவது எளிது. அதன் பக்கங்களின் நீளங்களைக் கூட்டினால் போதும்.



சுற்றளவு $4+1+2.5+3.5+2=13$ சென்டிமீட்டர்.

ஒழுங்கு பலகோணம் எனில், மிகவும் எளிது.



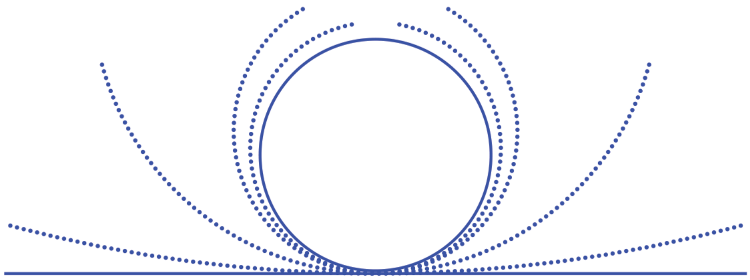
சுற்றளவு $6 \times 2 = 12$ சென்டிமீட்டர்.

வட்டமானால் ?

நூல் அல்லது கயிறு வைத்து அளந்து எடுக்கலாம். ஆனால் அவ்வாறு இயலாத சூழல்களும் உண்டல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்.

ஒரு கம்பியை வளைத்து, 5 சென்டிமீட்டர் விட்டமுள்ள வட்டம் உருவாக்க வேண்டும். அதற்கு எவ்வளவு நீளமுள்ள கம்பியை வளைக்க வேண்டும்?

கம்பியை வளைத்து வட்டம் உருவாக்கும் போது, கம்பியின் நீளம் என்பது வட்டத்தின் சுற்றளவு ஆகுமல்லவா.



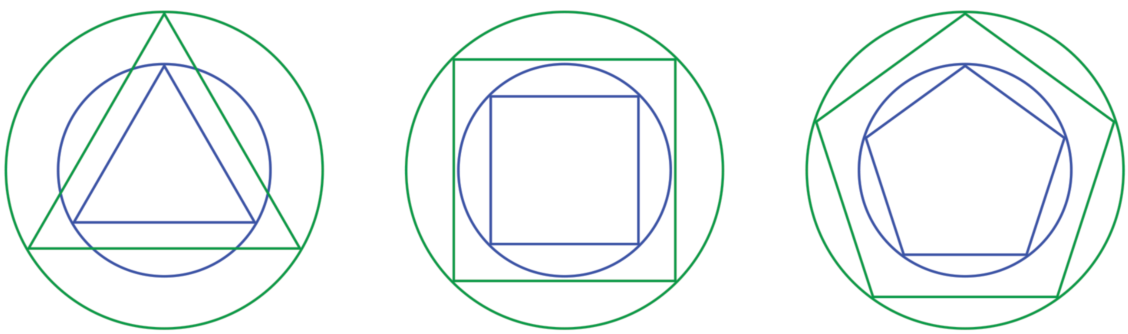
அப்போது மேற்கூறிய கணக்கைச் செய்வதற்கு, வட்டத்தின் விட்டத்திற்கும் சுற்றளவிற்கும் உள்ள தொடர்பை அறிய வேண்டும்.

விட்டம் பெரியதாகும் போது சுற்றளவும் பெரியதாகும். இந்தமாற்றம் ஒரே அளவு வீதத்திலா என்பதுதான் அடுத்த தேடல். அதாவது, விட்டத்தைக் குறிப்பிட்ட பாகம் அல்லது மடங்கு ஆக்கினால் சுற்றளவும் அதே பாகத்தில் அல்லது மடங்கிலா மாறுகிறது?

பல விட்டங்கள் உள்ள வட்டங்களுக்குள்ளே வரைகின்ற ஒழுங்கு பலகோணங்களின் சுற்றளவுகள் மாறுவது விட்டம் மாறுகின்ற அதே அளவு வீதத்தில் என்று காண்பது கடினம் அல்ல.

இத்தகைய ஒழுங்கு பலகோணங்களின் பக்கங்களின் நீளம் மாறுவது ஆரம் மாறுகின்ற அதே அளவு வீதத்தில் என்று **வடிவொத்த முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் கற்றிருக்கிறோம் அல்லவா?

எடுத்துக்காட்டாக இந்தப் படங்களைப் பார்க்கவும்.



ஒரு வட்டத்தின் உள்ளேயும், அதற்கு ஒன்றரை மடங்கு ஆரமுள்ள வட்டத்தின் உள்ளேயும் பல ஒழுங்கு பலகோணங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு படத்திலும் பெரிய பலகோணத்தின் பக்கம் சிறிய பலகோணத்தின் பக்கத்தின் ஒன்றரை மடங்கு ஆகும்.

விட்டம், ஆரத்தின் இரண்டு மடங்கு ஆனதனால் சிறிய வட்டத்தின் விட்டத்தின் ஒன்றரை மடங்குதான் பெரிய வட்டத்தின் விட்டம்.

இதுபோல பலகோணத்தின் சுற்றளவு பக்கத்தின் நீளத்தின் குறிப்பிட்ட மடங்கானதால் (படத்தில் மூன்று மடங்கும், நான்கு மடங்கும், ஐந்து மடங்கும்) சிறிய பலகோணங்களின் சுற்றளவின் ஒன்றரை மடங்கே பெரிய பலகோணங்களின் சுற்றளவு.

அப்போது பலகோணங்களின் சுற்றளவு மாறுவது விட்டம் மாறுகின்ற அளவு வீதத்தில் ஆகும்.

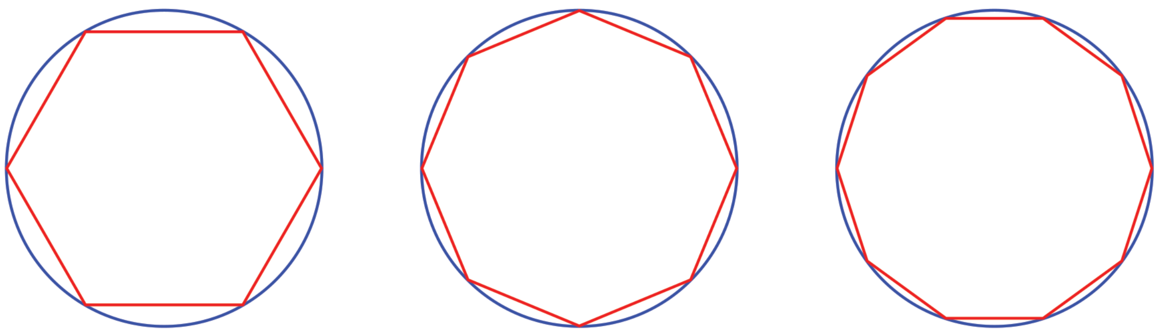
எனவே வட்டங்களின் சுற்றளவும் விட்டங்களின் அளவு வீதத்தில் மாறுகிறது எனக் கூறலாமா?

எடுத்துக்காட்டாக விட்டம் இரண்டு மடங்கானால் வட்டத்தின் சுற்றளவும் இரண்டு மடங்காகுமா?

அதற்கு வேறொரு கருத்தையும் கவனிக்க வேண்டும். வட்டத்திற்குள் வரையப்படும் ஒழுங்கு பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க அது வட்டத்துடன் மிகவும் நெருங்கும்.

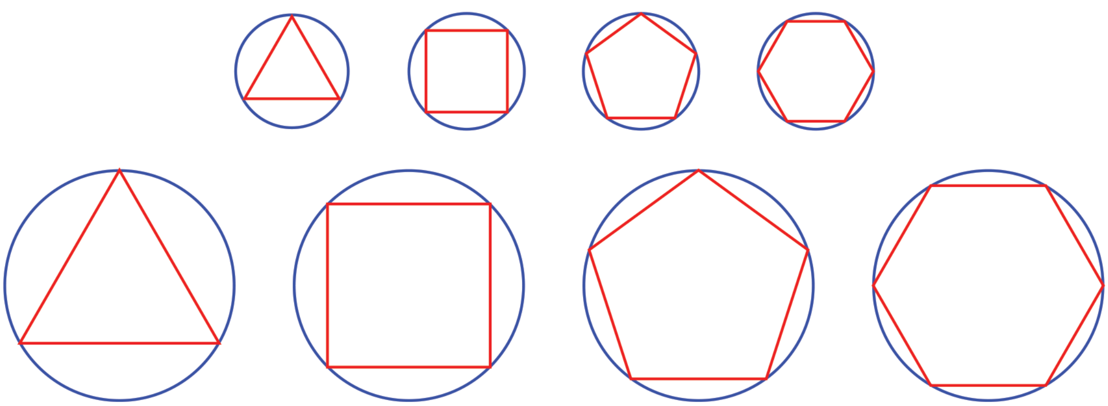
ஜியோஜிப்ராவில் *A* என்ற ஒரு புள்ளியை மையமாக வைத்து வட்டம் வரையவும். வட்டத்தில் வேறொரு புள்ளி *B* ஐ அடையாளப்படுத்தவும். Min = 3, Max = 200 ஆகும்படி ஒரு *Integer slider 'n'* உருவாக்கவும். *Angle with given size* கருவியைப் பயன்படுத்தி *B* யிலும் தொடர்ந்து *A* யிலும் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் கோண அளவு $(360/n)°$ என்று அளிக்கவும். *Regular Polygon* கருவியைப் பயன்படுத்தி *B* யிலும் *B′* யிலும் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் பல கோணத்தின் உச்சிகளின் எண்ணிக்கை *n* என்று கொடுத்தால் வட்டத்திற்குள் *n* பக்கங்கள் உள்ள ஒரு பலகோணம் கிடைக்கும். பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை அதிகரித்துப் பார்க்கவும். பலகோணத்தில் என்ன நிகழும்?

பின்வரும் படங்களைப் பார்க்கவும்.



6 பக்கம்   8 பக்கம்   10 பக்கம்

இனி ஒரு வட்டத்திலும், விட்டம் இரண்டு மடங்கான வட்டத்திலும், ஒழுங்கு பலகோணங்கள் வரைவதாகக் கருதலாம்.



பெரிய வட்டத்தின் விட்டம் இரண்டு மடங்கு ஆனதால் அதில் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணங்களின் சுற்றளவு சிறிய வட்டத்தில் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணங்களின் சுற்றளவின் இரண்டு மடங்காகும்.

இரண்டு வட்டங்களிலும் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணங்களின் சுற்றளவுகள், அந்தந்த வட்டங்களின் சுற்றளவிற்கு நெருங்குகிறது.

அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பை மேலும் தெளிவுபடுத்த இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

- பெரிய வட்டத்தில் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணங்களின் சுற்றளவுகள், சிறிய வட்டத்தில் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணங்களின் சுற்றளவுகளின் இரண்டு மடங்காகும்.
  - சிறிய வட்டத்தினுள் உள்ள சமபக்க முக்கோணத்தின் சுற்றளவு p_1, சதுரத்தின் சுற்றளவு p_2, ஒழுங்கு ஐங்கோணத்தின் சுற்றளவு $p_3, \ldots$ என்றிவ்வாறு எடுக்கலாம்.
  - பெரிய வட்டத்தில் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணங்களின் சுற்றளவுகள் $2p_1, 2p_2, 2p_3, \ldots$ என்றிவ்வாறு ஆகும்.
- சிறியவட்டத்திலுள்ள ஒழுங்கு பலகோணங்களின் சுற்றளவுகள் சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவுடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும்.
  - சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவை c என எடுக்கலாம்.
  - $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ஆகிய எண்கள் c என்ற எண்ணுடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகின்றன.
- பெரிய வட்டத்தில் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணங்களின் சுற்றளவுகள் பெரிய வட்டத்தின் சுற்றளவுடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும்.
  - பெரிய வட்டத்தின் சுற்றளவு d என எடுக்கலாம்.
  - $2p_1, 2p_2, 2p_3, \ldots$ ஆகிய எண்கள் d என்ற எண்ணுடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகின்றன.

மேலே கூறப்பட்டுள்ள கருத்துகளில் சிவப்புக் கட்டங்களில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள இரண்டு கருத்துக்களைப் பார்க்கவும்.

இதில் முதலில் உள்ள கருத்து $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ஆகிய எண்கள் c என்ற எண்ணுடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகின்றன என்பதாகும்.

அதன்படி $2p_1, 2p_2, 2p_3, \ldots$ ..ஆகிய எண்கள் $2c$ என்ற எண்ணுடன் நெருங்கி நெருங்கி வரவேண்டும்.

ஆனால் அடையாளப்படுத்தப்பட்ட இரண்டாவது கருத்து கூறுவது, $2p_1, 2p_2, 2p_3, \ldots$ ஆகிய எண்கள் d என்ற எண்ணுடன் நெருங்கி நெருங்கி வருகின்றன என்பதாகும்.

அப்படியானால் $d = 2c$ ஆக வேண்டும் அல்லவா.

அதாவது, பெரிய வட்டத்தின் சுற்றளவு, சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவின் இரண்டு மடங்காகும். இரண்டாவது வட்டத்தின் விட்டம் இரண்டு மடங்கிற்குப் பதில் வேறு ஏதேனும் மடங்கோ பாகமோ எனில் சுற்றளவு அதே அளவு வீதத்தில் மாறும் எனக் காணலாம்.

ஜியோஜிப்ராவில் Min = 0, Max = 10 ஆகுமாறு d என்ற பெயரில் ஒரு சிலைடர் உருவாக்கவும். இனி விட்டம் d ஆன ஒரு வட்டம் வரையவும். இதற்காக *Circle : Centre & Radius* கருவியைப் பயன்படுத்தி ஆரம் $\frac{d}{2}$ ஆன ஒரு வட்டம் வரைந்தால் போதும். *Distance or Length* கருவியைப் பயன்படுத்தி வட்டத்தில் கிளிக் செய்தால் அதன் சுற்றளவு காண இயலும். இதை *Algebra view* விலும் காணலாம். அங்கிருந்து அதில் *right click* செய்து *Rename* என்பதை எடுத்து பெயரை *'c'* என மாற்றவும். சிலைடரைப் பயன்படுத்தி வட்டத்தின் விட்டத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும். சுற்றளவு மாறுவது விட்டத்தின் அளவு வீதத்தில் தானா? $\frac{c}{d}$ என்று *Input bar* இல் அளித்தால் சுற்றளவை விட்டத்தால் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் எண் *Algebra view* வில் கிடைக்கும் விட்டத்தை மாற்றும்போது இந்த எண்ணிற்கு மாற்றம் வருகிறதா?

பொதுவாகக் கூறினால்,

வட்டங்களின் சுற்றளவுகள் மாறுவது, விட்டங்கள் மாறுகின்ற அதே அளவு வீதத்திலாகும்.

அப்போது விட்டம் 1 ஆன வட்டத்தின் சுற்றளவைக் கண்டுபிடித்தால், எந்த வட்டத்தின் சுற்றளவைக் கணக்கிடுவதற்கும், இந்த எண்ணை விட்டத்தால் பெருக்கினால் போதும்.

அதைச் செய்வதற்குமுன், இப்போது கற்ற கருத்துகளைப் பயன்படுத்திச் சில கணக்குகளைச் செய்யலாம்.

(1) 2 மீட்டர் விட்டம் உள்ள வட்டத்தின் சுற்றளவு தோராயமாக 6.28 மீட்டர் என அளந்து கண்டுபிடிக்கப்பட்டது.

(i) 4 மீட்டர் விட்டம் உள்ள வட்டத்தின் சுற்றளவு எவ்வளவு என அளக்காமல் எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

(ii) 1 மீட்டர் விட்டம் உள்ள வட்டத்தின் சுற்றளவு?

(iii) 3 மீட்டர் விட்டம் ஆனால்?

(2) ஒரு கம்பியை வளைத்து 4 சென்டிமீட்டர் விட்டம் உள்ள வட்டம் உருவாக்கப்பட்டது. இதன் பாதி நீளம் உள்ள கம்பியை வளைத்து உருவாக்கப்படும் வட்டத்தின் விட்டம் எவ்வளவு?

ஒரு புதிய எண்

பக்கத்தின் நீளம் 1 உள்ள சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளத்தைப் போல, பக்கத்தின் நீளம் 2 உள்ள சமபக்க முக்கோணத்தின் உயரத்தைப் போல, விட்டம் 1 உள்ள வட்டத்தின் சுற்றளவை ஒரு பின்ன எண்ணாக எழுத இயலாது.

பிற அளவுகளைப் போல இதைத் தெளிவுபடுத்துவது அவ்வளவு எளிதல்ல. பதினெட்டாம் நூற்றாண்டில்தான் ஒரு தெளிவு கண்டுபிடிக்கப்பட்டது.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}+\sqrt{3}$ போன்ற எண்களில் இருந்து, இந்த எண்ணிற்கு ஒரு முக்கிய வேறுபாடு உண்டு. இதை எண்ணல் எண்கள் அல்லது பின்ன எண்களின் மூலங்களாகவோ அவற்றின் செயல்களையோ பயன்படுத்தி எழுத இயலாது. கணிதத்தில் இந்த எண்ணைக் குறிப்பிட ஒரு தனி அடையாளம் உண்டு: π

இது கிரேக்க மொழியில் "பை" (pi) என்ற எழுத்தாகும்.

பின்ன எண் அல்லாததினால் π க்கு ஏறக்குறைய சமமான பின்ன எண்களைக் கணக்கிடத்தான் இயலும். நான்கு தசம இடங்கள் வரை எடுத்தால்,

$\pi \approx 3.1416$ எனக் கிடைக்கும்.

1 சென்டிமீட்டர் விட்டம் உள்ள வட்டத்தின் சுற்றளவு π சென்டிமீட்டர். 2 சென்டிமீட்டர் விட்டம் உள்ள வட்டத்தின் சுற்றளவு 2π சென்டிமீட்டர். $1\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர் விட்டம் உள்ள வட்டத்தின் சுற்றளவு $\frac{3}{2}\pi$ சென்டிமீட்டர் என்றிவ்வாறு ஆகும். சுருக்கமாகக் கூறினால்,

வட்டத்தின் சுற்றளவு, அதன் விட்டத்தின் π மடங்காகும்.

சாதாரணமாக வட்டம் வரைவது குறிப்பிட்ட ஆரத்தில் ஆனதால் இதை ஆரத்தின் கணக்காகவே கூறுகிறோம்.

வட்டத்தின் சுற்றளவு, அதன் ஆரத்தின் 2π மடங்காகும்.

B.C.E. மூன்றாம் நூற்றாண்டில், கிரேக்க நாட்டில் வாழ்ந்திருந்த ஆர்க்கிமிடிஸ் என்பவர் 96 பக்கங்கள் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணத்தைப் பயன்படுத்தி வட்டத்தின் சுற்றளவு விட்டத்தின் $3\frac{10}{71}$ ஐ விடக் கூடுதலாகவும், விட்டத்தின் $3\frac{1}{7}$ ஐ விடக் குறைவாகவும் இருக்கும் எனக் கணக்கிட்டார். இன்றைய முறையில் கூறினால், நான்கு தசம இடங்கள் வரை,

$$3.1408 < \pi < 3.1428$$

(ஆர்க்கிமிடிஸின் $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ என்பதே நீண்ட காலமாக வட்டத்தின் சுற்றளவைக் கண்டுபிடிக்க பயன்படுத்தப்பட்டது.)

C.E. 14 ஆம் நூற்றாண்டில் கேரளத்தில் வாழ்ந்த மாதவன் என்பவர் மிகத் துல்லியமாக π கணக்கிட வடிவியலைப் பயன்படுத்தாமல் எண்களை மட்டும் பயன்படுத்தி ஒரு வழிமுறையைக் கண்டுபிடித்தார். இதன்படி,

$$\pi = 3.1415926535...$$

எனக் கணக்கிடலாம்.

இன்று கணினியைப் பயன்படுத்திக் கோடிக்கணக்கான தசம இடங்கள் வரை துல்லியமாக π இன் மதிப்பைக் கணக்கிட இயலும்.

நடைமுறை பிரச்சனைகளில் சாதாரணமாக நான்கு தசம இடங்கள் வரை மட்டுமே π யைப் பயன்படுத்துகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, ஆரம் 5 மீட்டர் உள்ள வட்டத்தின் சுற்றளவை மில்லிமீட்டர் வரைத் துல்லியமாகக் கணக்கீடு செய்தால்,

$$\pi \times 2 \times 5 = 10\pi = 10 \times 3.1416 = 31.416 \text{ மீட்டர்}$$

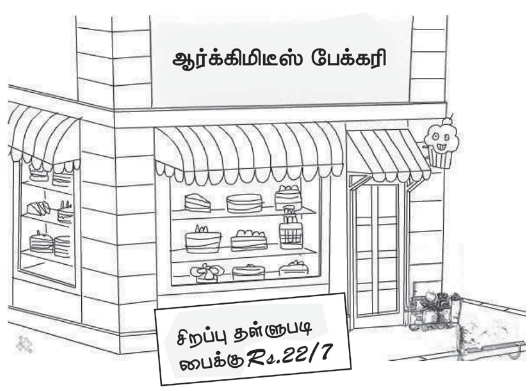
ஜியோஜிப்ராவில் விட்டம் 1 உள்ள வட்டம் வரையவும். வட்டத்தின் சுற்றளவு எவ்வளவு? Options → Rounding → 15 Decimal Places என்ற முறையில் 15 தசம இடங்கள் வரை π யைக் காண இயலும்.

சரித்திரம் வழியாக π

வட்டத்தின் சுற்றளவும் பரப்பளவும் கணக்கீடு செய்வதற்கான முறைகளைப் பற்றிய சிந்தனைக்கு 4000 ஆண்டுகளுக்கு மேலான பழமை உண்டு. இன்றைய மொழியில் கூறினால் இவையெல்லாம் π என்ற எண்ணுடன் தோராயமாகச் சமமான பின்ன எண்களைக் கண்டுபிடிப்பதற்கான முயற்சியாக விளக்கலாம்.

பழங்கால எகிப்தில் உள்ள ஆஹ்மஸ் பாப்பிரஸில் ஒரு கணக்கிற்கு தீர்வுகண்ட முறையைப் பார்த்தால் $\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3.16$ என்று கிடைக்கும், சுமார் இதே கால அளவில் உள்ள. (B.C.E. 1500) பாபிலோனிலுள்ள ஒரு களிமண் பலகையில் இருந்து, $\pi \approx \frac{25}{8} = 3.125$ எனக் கணக்கிடலாம். B.C.E. ஏழாம் நூற்றாண்டிலே நூல் என கருதப்படும், சதபதபிராமணம் என்ற நூலில் இது $\frac{339}{108} \approx 3.139$ ஆகும். வட்டத்தின் உள்ளேயும் வெளியேயும் 96 பக்கங்கள் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணம் வரைந்து ஆர்க்கிமிடிஸ் கண்டுபிடித்தது $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ எனப் பார்த்தோம் அல்லவா. அதாவது $3.1408 < \pi < 3.1428$ C.E. 180 இல் சீனாவில் உள்ள ஸா சோங்ழி இந்த முறையில் 12288 பக்கங்கள் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணங்களைப் பயன்படுத்தி $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ என்று கண்டுபிடித்தார்.

இதில் சிறிய எண் ஏழு இடங்கள் வரை சரியாகும். சுமார் 1000 வருடங்களுக்குப் பின்புதான் இதைவிட மேம்பட்ட மதிப்புகள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டன.

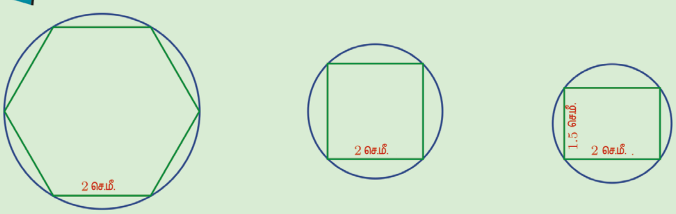


5 சென்டிமீட்டர் விட்டம் உள்ள வட்டம் உருவாக்க 5π சென்டிமீட்டர் நீளமுள்ள கம்பி வேண்டும். அதாவது தோராயமாக $5 \times 3.14 = 15.7$ சென்டிமீட்டர்.

இப்போது பாடத்தின் முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வினாவிற்கான விடை கிடைத்தது அல்லவா?

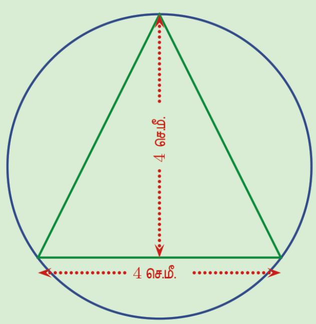
இனி கீழே தரப்பட்டுள்ள கணக்குகளைச் செய்து பார்க்கவும். இவற்றில் π யைப் பயன்படுத்தி எழுதினால் போதும். தசம வடிவம் எழுதி ஏறக்குறைய துல்லியமான அளவுகளைக் கணக்கீடு செய்ய வேண்டியது இல்லை.

(1) கீழே வரையப்பட்டுள்ள வட்டங்களின் சுற்றளவைக் கணக்கிடவும்



(2) ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 4 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் உள்ள நாணின் நீளம் 6 சென்டிமீட்டர் ஆகும். வட்டத்தின் சுற்றளவைக் கணக்கிடவும்.

(3) கீழே தரப்பட்டுள்ள படத்தில், வட்டத்தில் உள்ள மூன்று புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்டு அடிப்பக்கமும் உயரமும் 4 சென்டிமீட்டர் உள்ள இரு சமபக்க முக்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது.



வட்டத்தின் சுற்றளவைக் கணக்கிடவும்.

ஆரம் $\frac{1}{2\pi}$ உள்ள ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவு எவ்வளவு? இத்தகைய ஒரு வட்டம் ஜியோ ஜிப்ராவில் வரைய *Circle : Centre & Radius* என்ற கருவியைப் பயன்படுத்திக் கிளிக் செய்யும் போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் ஆரம் 1/(2pi) என்று அளித்தால் போதும். இனி சுற்றளவு 25 உள்ள ஒரு வட்டத்தையும் வரைந்து பார்க்கவும்.

π கேரளத்தில்

14 ஆம் நூற்றாண்டில் கேரளத்தில் வாழ்ந்த ஜோதிட வல்லுனரும் கணித வல்லுனருமான மாதவன் (இவரை, இன்று சங்கமகிராமமாதவன் என்று அழைக்கின்றனர்) π ஐ நெருங்கி வருகின்ற பின்ன எண்களைக் கண்டுபிடிக்க மாதவன் பயன்படுத்திய முறை கணித வரலாற்றில் ஒரு திருப்புமுனையாகும். அதுவரை பயன்படுத்தி வந்த வடிவியல் முறைகளிலிருந்து வேறுபட்டு, எண்கள் சார்ந்த முறையை அவர் பயன்படுத்தியுள்ளார்.

$1, \quad 1-\frac{1}{3}, \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}, \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$

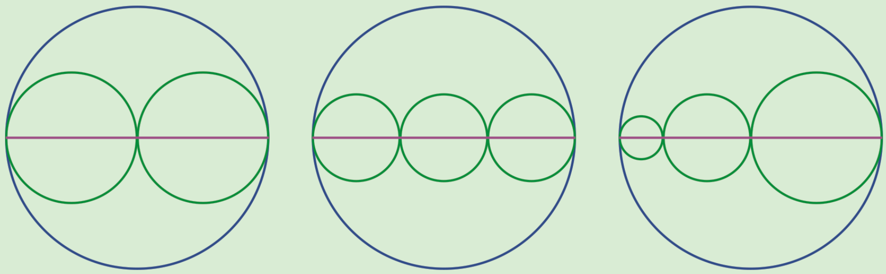
என்று இவ்வாறு ஒற்றை எண்களின் தலைகீழிகளைக் கழித்தும் கூட்டியும் தொடர்ந்தால் $\frac{\pi}{4}$ உடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும் என்று அவர் கண்டுபிடித்தார்.

17 ஆம் நூற்றாண்டில் ஸ்காட்லாந்தில் உள்ள கிரகரி மற்றும் ஜெர்மனியில் உள்ள லைப்பினீட்ஸ் என்பவர்கள் இதே உண்மையையே அவர்களுடைய முறையில் மீண்டும் கண்டுபிடித்தனர். இந்த முறையில் கிடைக்கும் எண்கள் மிகவும் மெதுவாக $\frac{\pi}{4}$ ஐ நெருங்குகிறது என்ற குறைபாடு உண்டு. ஆர்க்கிமிடிஸ் கண்டுபிடித்த எண் கிடைக்க சுமார் 4000 எண்களின் இத்தகைய தொகை தேவைப்படும். ஆனால் மாதவன் வேறொரு முறையைப் பயன்படுத்தி,

$$\pi \approx 3.14159265359$$

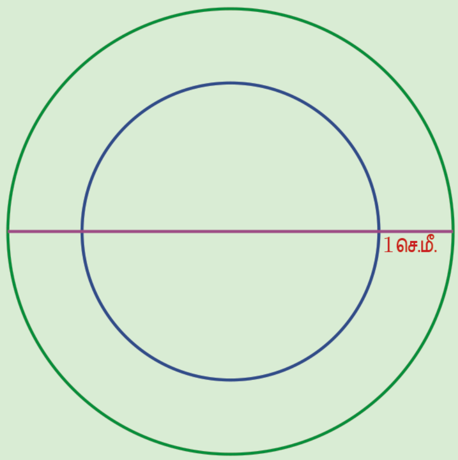
என்று கண்டுபிடித்தார்.

(4) கீழே தரப்பட்டுள்ள படங்களில் எல்லாம், வட்டங்களின் மையங்கள் ஒரே கோட்டிலாகும். முதல் இரண்டு படங்களில் சிறிய வட்டங்களுக்கு ஒரே விட்டமாகும்.



எல்லா படங்களிலும் சிறிய வட்டங்களின் சுற்றளவுகளின் தொகை பெரிய வட்டத்தின் சுற்றளவு என நிரூபிக்கவும்.

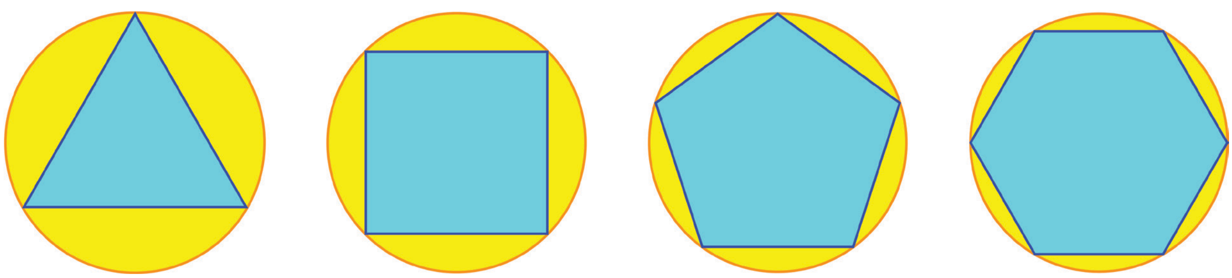
(5) கீழே தரப்பட்டுள்ள படத்தில் ஒரே மையம் கொண்ட இரண்டு வட்டங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன.



பெரிய வட்டத்தின் சுற்றளவு, சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவை விட எவ்வளவு அதிகம்?

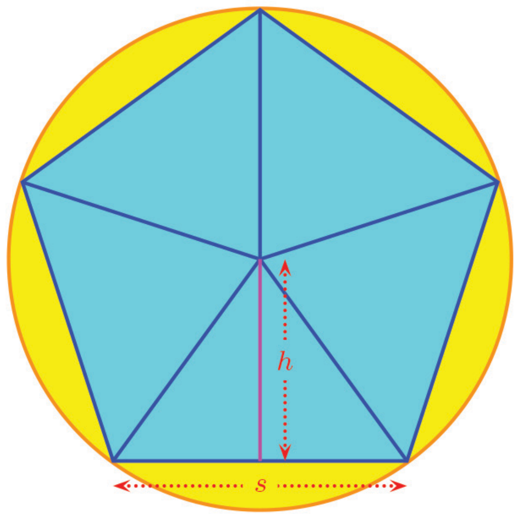
பரப்பளவு

வட்டத்தின் உள்ளே உள்ள ஒழுங்கு பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிப்பதைப் பொறுத்து அதன் சுற்றளவு வட்டத்தின் சுற்றளவுடன் நெருங்குவதைப் போல, அதன் பரப்பளவு வட்டத்தின் பரப்பளவுடன் நெருங்கும்.



வட்டத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிட, அதற்குள்ளே உள்ள ஒழுங்கு பலகோணங்களின் பரப்பளவு எவ்வாறு அதிகரிக்கிறது என்று கணக்கீடு செய்தால் போதும். வட்டத்தின் மையத்தையும் பல கோணங்களின் உச்சிகளையும் இணைத்து, பலகோணத்தைச் சம அளவுள்ள முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாம். இந்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளைக் கூட்டினால் பலகோணத்தின் பரப்பளவு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, வட்டத்திற்குள்ளே உள்ள பலகோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் s என்றும், வட்ட மையத்திலிருந்து பலகோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு உள்ள செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் h என்றும் எடுத்தால் ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}sh.$

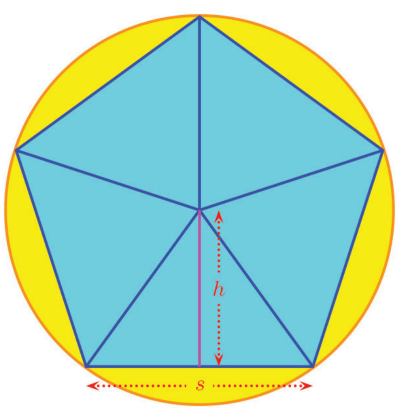


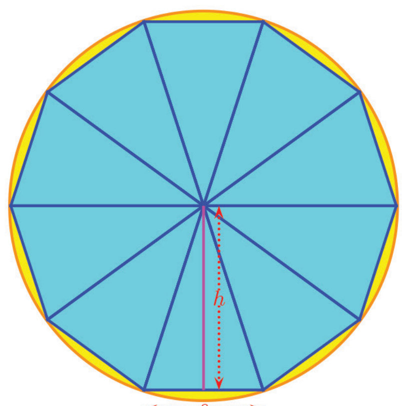
இத்தகைய ஐந்து முக்கோணங்கள் சேர்ந்ததுதான் ஐங்கோணம். அதன் மொத்த பரப்பளவு

$$5 \times \frac{1}{2}sh = \frac{1}{2} \times 5s \times h.$$

இதில் s என்பது ஐங்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளமானதால் $5s$ என்பது ஐங்கோணத்தின் சுற்றளவாகும். இதை p என எடுத்தால் ஐங்கோணத்தின் பரப்பளவு, $\frac{1}{2}ph.$

ஐங்கோணத்திற்குப் பதில் வட்டத்திற்குள்ளே எந்த ஒழுங்கு பலகோணத்தை எடுத்தாலும் அதன் பரப்பளவு, இதுபோல சுற்றளவினுடையவும் மையத்திலிருந்து உள்ள செங்குத்து நீளத்தினுடையவும் பெருக்கல் பலனின் பாதி என்று காணலாம். வட்டத்தினுள் உள்ள பலகோணம் மாறும்போது சுற்றளவும் இந்தச் செங்குத்து நீளமும் மாறும்.





சுற்றளவைக் கண்டுபிடித்தது போல இவற்றையெல்லாம் இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்திச் செய்து பார்க்கலாம்.

- வட்டத்தினுள் உள்ள சமபக்க முக்கோணம், சதுரம், ஒழுங்கு ஐங்கோணம் ... இவற்றின் சுற்றளவுகள் $p_1, p_2, p_3, \ldots$ என்றும் வட்ட மையத்திலிருந்து ஒரு பக்கத்திற்குள்ள செங்குத்து கோடுகளின் நீளங்கள் $h_1, h_2, h_3, \ldots$ என்றும் எடுக்கலாம்.

- வட்டத்தின் ஆரம் r என்றும் சுற்றளவு c என்றும் எடுக்கலாம்.
  - $h_1, h_2, h_3, \ldots$ என்ற எண்கள் r என்ற எண்ணை நெருங்கி நெருங்கி வருகின்றன.
  - $p_1, p_2, p_3, \ldots$ என்ற எண்கள் c என்ற எண்ணை நெருங்கி நெருங்கி வருகின்றன.

- $\frac{1}{2}p_1h_1, \frac{1}{2}p_2h_2, \frac{1}{2}p_3h_3, \ldots$ என்ற எண்கள் $\frac{1}{2}cr$ என்ற எண்ணை நெருங்கி நெருங்கி வருகின்றன.
  - $\frac{1}{2}p_1h_1, \frac{1}{2}p_2h_2, \frac{1}{2}p_3h_3, \ldots$ என்ற எண்கள் பலகோணங்களின் பரப்பளவாகும்.
  - பலகோணங்களின் பரப்பளவுகள் வட்டத்தின் பரப்பளவை நெருங்கி நெருங்கி வருகின்றன.
  - வட்டத்தின் பரப்பளவை a என எடுக்கலாம்.

- $\frac{1}{2}p_1h_1, \frac{1}{2}p_2h_2, \frac{1}{2}p_3h_3, \ldots$ என்ற எண்கள் a என்ற எண்ணை நெருங்கி நெருங்கி வருகின்றன.

மேலே கூறப்பட்டவற்றில், சிவப்புக் கட்டங்களில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள இரண்டு கருத்துக்களில் இருந்து

$$a = \frac{1}{2}cr$$

எனக் காணலாமல்லவா? அதாவது,

வட்டத்தின் பரப்பளவு, அதன் சுற்றளவினுடையவும் ஆரத்தினுடையவும் பெருக்கல் பலனின் பாதியாகும்.

வட்டத்தின் ஆரம் r என எடுத்தால் சுற்றளவு $2\pi r$, எனப் பார்த்தோம் அல்லவா. அப்போது வட்டத்தின் பரப்பளவு,

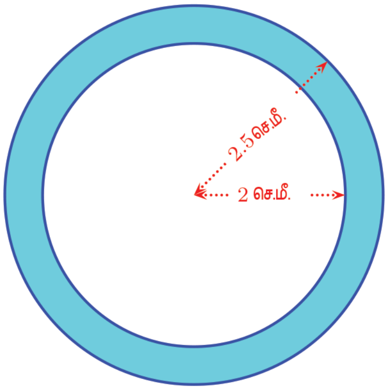
$$\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$$

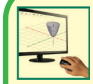
வட்டத்தின் பரப்பளவு, ஆரத்தின் வர்க்கத்தின் π மடங்காகும்.

எடுத்துக்காட்டாக ஆரம் 5 சென்டிமீட்டர் உள்ள வட்டத்தின் பரப்பளவு 25π சதுர சென்டிமீட்டர் ஆகும்.

இனி, இதைப் பயன்படுத்திச் செய்யும் சில கணக்குகளைப் பார்ப்போம்.

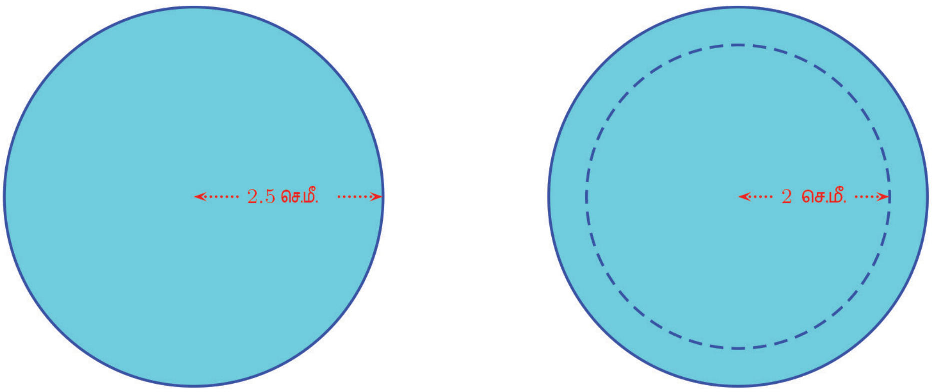
கீழே தரப்பட்டுள்ள வட்ட வளையத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?





ஆரம் $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$ உள்ள ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு என்ன? இத்தகைய ஒரு வட்டத்தை ஜியோஜிப்ராவில் வரைய *Circle : Centre & Radius* என்ற கருவியைப் பயன்படுத்திக் கிளிக் செய்தால் கிடைக்கும் சாளரத்தில் ஆரம் sqrt (10/pi) என்று அளித்தால் போதும் Area கருவியைப் பயன்படுத்தி வட்டத்தில் கிளிக் செய்தால் பரப்பளவைக் காண இயலும். இனி பரப்பளவு 25 உள்ள ஒரு வட்டத்தை வரைந்து பார்க்கவும்.

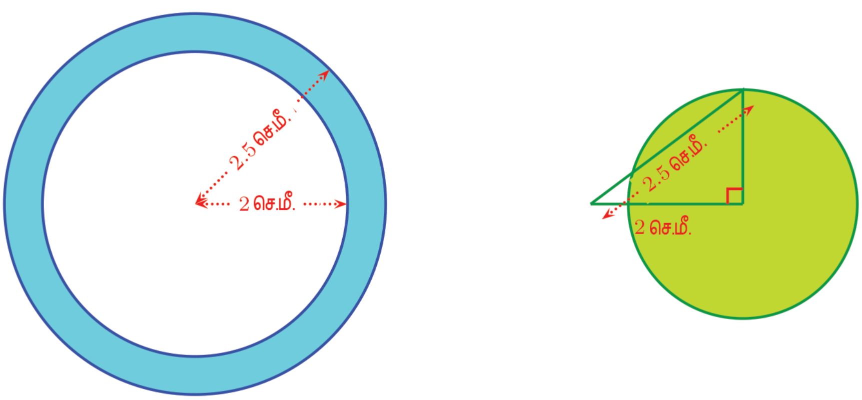
ஒரு பெரிய வட்டத்திலிருந்து சிறிய வட்டம் ஒன்று வெட்டி மாற்றியதாக இதைக் காணலாம் அல்லவா.



அப்படியானால் வளையத்தின் பரப்பளவு

$$6.25\pi - 4\pi = 2.25\pi$$ சதுர சென்டிமீட்டர்

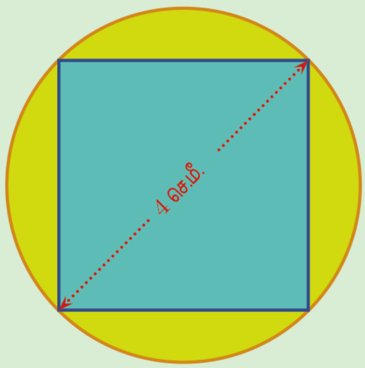
இனி கீழே தரப்பட்டுள்ளது போல ஒரு செங்கோண முக்கோணமும் ஒரு வட்டமும் வரைந்தால்?

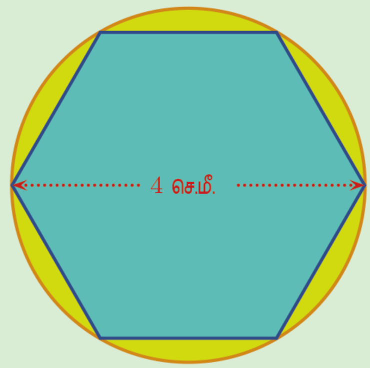


பச்சை வட்டத்தினுடையவும், நீல வளையத்தினுடையவும் பரப்பளவுகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு என்ன?

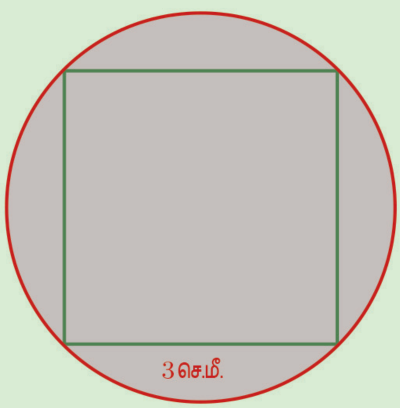
(1) ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 3 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் உள்ள நாணின் நீளம் 4 சென்டிமீட்டர். வட்டத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

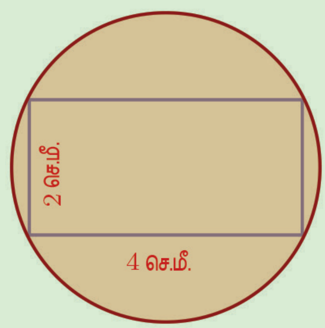
(2) கீழே தரப்பட்டுள்ள படங்களில் வட்டத்தினுடையவும் ஒழுங்கு பலகோணத்தினுடையவும் பரப்பளவுகளின் வித்தியாசத்தை இரண்டு தசம இடங்கள் வரை கணக்கிடுக.





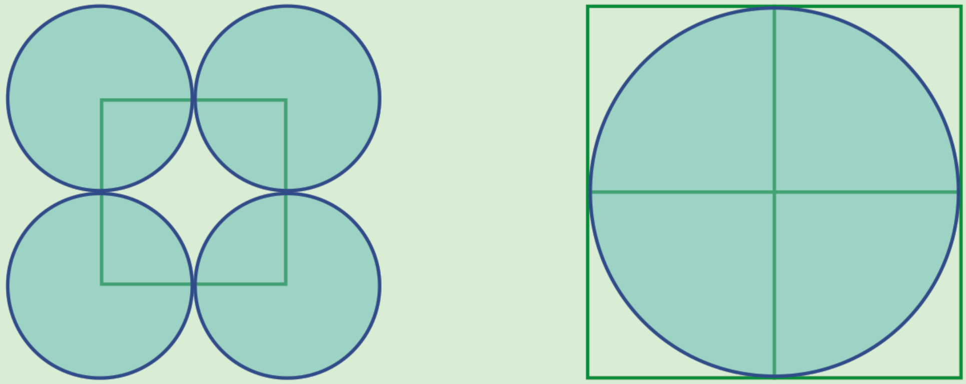
(3) கீழே ஒரு சதுரத்தின் நான்கு உச்சிகள் வழியாகவும் ஒரு செவ்வகத்தின் நான்கு உச்சிகள் வழியாகவும் உள்ள வட்டங்கள் வரைந்த படங்கள் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளன.





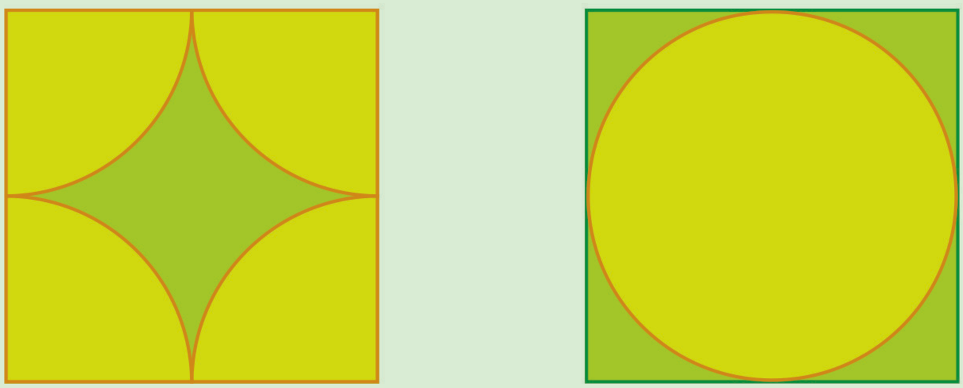
இரண்டு வட்டங்களின் பரப்பளவுகளைக் காண்க.

(4) ஒரு சதுரம் வரைந்து, அதன் நான்கு உச்சிகளை மையமாகவும், பக்கத்தின் பாதியை ஆரமாகவும் கொண்டு வட்டங்கள் வரையவும். முதல் சதுரத்தின் அதே அளவுள்ள நான்கு சதுரங்களைச் சேர்த்து சதுரம் வரைந்து, அதற்குள் சரியாகச் சேர்ந்திருக்கும் வட்டத்தை வரையவும்.

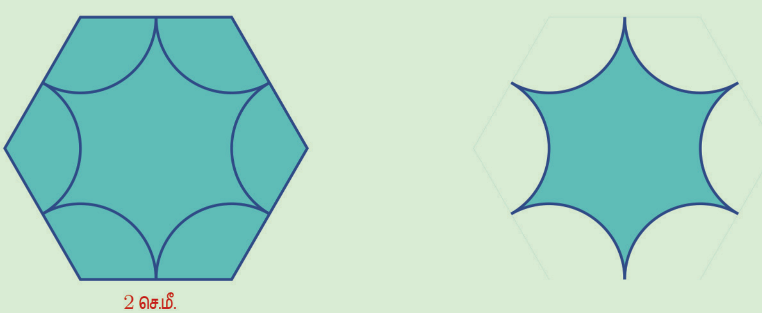


பெரிய வட்டத்தின் பரப்பளவு, நான்கு சிறிய வட்டங்களின் பரப்பளவுகளின் தொகை ஆகும் என நிரூபிக்கவும்.

(5) கீழே தரப்பட்டுள்ள இரண்டு படங்களிலும் சதுரங்கள் ஒரே அளவாகும். படங்களில் உள்ள பச்சைப் பகுதிகள் ஒரே பரப்பளவு உடையவை என நிரூபிக்கவும்.

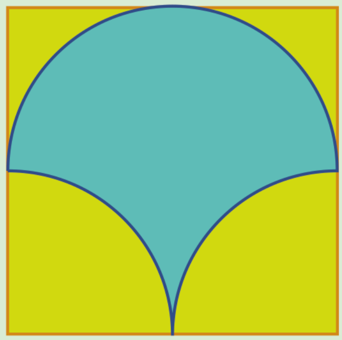


(6) ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் உச்சிகளை மையமாகக் கொண்டு வட்டப் பகுதிகள் வரைந்து கீழே காணும் வடிவம் வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது.



வெட்டியெடுத்த வடிவத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

(7) கீழே காண்பது போல ஒரு சதுரத்தின் உள்ளே வட்டப்பகுதிகள் வரையப்பட்டுள்ளன.



படத்தில் நீல நிறம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவு சதுரத்தின் பரப்பளவில் பாதி என நிரூபிக்கவும்.

9

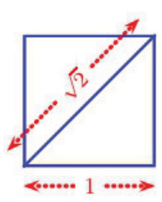
மெய்யெண்கள்

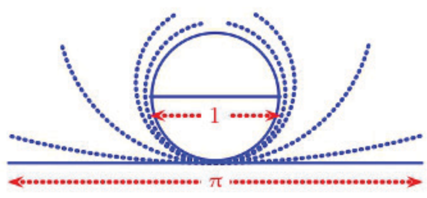
அளவுகளும் எண்களும்

கோடுகளின் நீளங்களை எண்களாகக் கூறுவது எவ்வாறு? ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட நீளத்தை 1 என எடுத்தால், அதன் இரண்டு மடங்கு நீளம் 2 என்றும், பாதி நீளத்தை $\frac{1}{2}$ என்றும், அதன் ஒன்றரை மடங்கு நீளத்தை $1\frac{1}{2}$ என்றெல்லாம் கூறலாம்.

இவ்வாறு 1 என எடுக்கும் நீளத்தை நீளத்தின் ஓர் அலகு (unit of length) என்று கூறலாம். இத்தகைய ஓர் அலகை உறுதிப்படுத்துவதுடன், வேறு பல நீளங்களையும் இப்போது பார்த்தது போல எண்ணல் எண்களாகவும் பின்ன எண்களாகவும் கூறலாம்.

ஆனால் இந்த அலகின் அடிப்படையில் எண்ணல் எண்களாகவோ, பின்ன எண்களாகவோ கூற இயலாத நீளங்களும் உள்ளன. எடுத்துக்காட்டாக, இந்த அலகைப் பக்கமாகக் கொண்ட சதுரத்தின் மூலைவிட்டம், இந்த அலகை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தை நிமிர்த்திய கோட்டின் நீளம்.





அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்புகளையும் எண்களின் கணிதச் செயல் தொடர்புகளையும் இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளாக்கும்போது வசதிக்காகக் குறை எண்களைப் பயன்படுத்துவதுண்டு. (**குறை எண்கள்** என்ற பாடம்) அப்போது, $\sqrt{2}, \pi$ போன்ற எண்களின் குறை எண்களான $-\sqrt{2}, -\pi$ என்ற எண்களும் தேவைப்படும்.

எண்ணல் எண்களுக்கும், பின்ன எண்களுக்கும் அவற்றின் குறைகளுக்கும் பூஜ்ஜியத்திற்கும் எல்லாம் பொதுவான பெயர் **விகிதமுறு எண்கள் (rational numbers)** என்பதாகும். விகிதமுறு எண்களாகக் கூற இயலாத எண்களை எல்லாம் **விகிதமுறா எண்கள் (irrational numbers)** என்றும் கூறலாம்.

எண்ணல் எண்களையும் பின்ன வடிவத்தில் எழுதலாம் அல்லவா? எடுத்துக்காட்டாக, 5 ஐ $\frac{5}{1}$ என்றோ, $\frac{10}{2}$ என்றோ பல விதங்களில் எழுதலாம். தொகுதியையோ பகுதியையோ குறை எண்ணல் எண்களாக எடுத்து, எண்ணல் எண்களின் குறைகளையும் பின்ன வடிவத்தில் எழுதலாம். பூஜ்ஜியத்தையும் பின்ன வடிவமாக $\frac{0}{1}, \frac{0}{2}$ என இவ்வாறு எல்லாம் எழுதலாம்.

அப்போது விகிதமுறு எண்களுக்கெல்லாம் பொதுவான ஒரு வடிவமுண்டு. x, y எண்ணல் எண்களோ அவற்றின் குறைகளோ ஆன $\frac{x}{y}$; இதில் x பூஜ்யமும் ஆகலாம். ஆனால், விகிதமுறா எண்களில் $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ போன்ற வர்க்க மூலங்களும் பின்னங்களின் செயல்களாகக் கூற இயலாத π போன்ற எண்களும் உள்ளன. பொருத்தமான எந்த பொது வடிவத்திலும் இதை எழுத இயலாது.

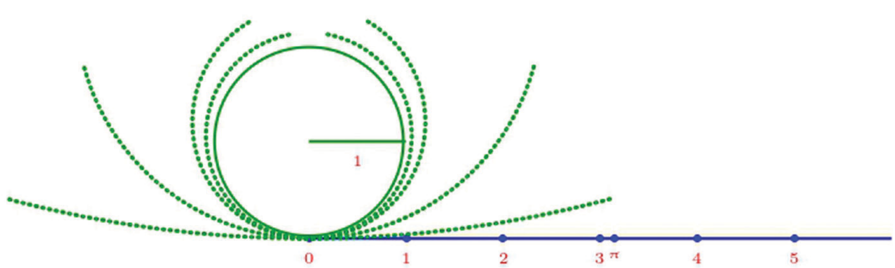
எண்களும் வடிவியலும்

எந்த மிகை எண்ணையும் நீளமாகக் கருதலாம் அல்லவா? இந்த நீளங்கள் எல்லாம் ஓர் இடத்தில் இருந்து தொடங்குவதாகக் கருதினால்?

இதைமேலும் தெளிவாக்க, ஒரு கோடும் அந்தக் கோட்டின் இடது பக்கத்தின் கடைசியில் ஒரு புள்ளியும் அப்புள்ளியின் வலது பக்கம் மற்றொரு புள்ளியும் கருதவும்.

இவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரம் 1 (அலகு) என எடுத்து, வலது பக்கத்தில் உள்ள பல புள்ளிகளின் தூரத்தை எண்களாக எழுதலாம் அல்லவா.

எல்லா புள்ளிகளுடையவும் தூரத்தை அடையாளப்படுத்த வேண்டுமெனில், விகிதமுறா எண்களும் தேவைப்படும்.



இந்தக் கோட்டை 0 என்ற புள்ளியிலிருந்து இடது பக்கத்திலும் நீட்டலாமல்லவா. அந்தப் பகுதியில் உள்ள புள்ளிகளை எவ்வாறு எண்களால் அடையாளப்படுத்தலாம்?

அதற்கு வலது பக்கம் உள்ள எண்களின் குறைகளைப் பயன்படுத்தலாம். **குறை எண்கள்** என்ற பாடத்தில் **இடங்களும் எண்களும்** என்ற பகுதியில் இவ்வாறு அடையாளப்படுத்தியதை நினைவு கூறவும்.

விகிதமுறு எண்களையும் விகித முறா எண்களையும் இந்தக் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளாகக் கருதலாம். மாறாக, இந்தக் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளை எல்லாம் இத்தகைய எண்களால் அடையாளப்படுத்தி இருப்பதாகவும் கருதலாம்.

இவ்வாறு ஒரு கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளாகக் காணலாம் என்பதால், விகிதமுறு எண்களும், விகிதமுறா எண்களுமான எல்லா எண்களுக்கும் பொதுவாக **மெய்யெண்கள் (real numbers)** என்று பெயர். மாறாக புள்ளிகளை எல்லாம் பூஜ்ஜியத்தில் இருந்து உள்ள தூரத்தைப் பொறுத்து எண்களால் அடையாளப்படுத்திய கோட்டை **எண் கோடு (number line)** என்றும் கூறுவர்.

எண் கோட்டில் 0 என்ற புள்ளியில் இருந்து வலது பக்கமாக நகரும்போது எண்கள் பெரியதாகின்றன அல்லவா. இடது பக்கமாக நகரும் போது?

$-1, -2$ இவற்றில் பெரியது எது?

-1 என்றால் பூஜ்ஜியத்தில் இருந்து 1 குறைவு, -2 ஆனால்? பூஜ்ஜியத்தில் இருந்து 2 குறைவு, அதாவது -1 இல் இருந்து மீண்டும் 1 குறைவு. எனவே -2 தான் -1 ஐ விடச் சிறிய எண்.

கணித மொழியில்,

$$-2 < -1$$

ஆகவே, எண் கோட்டில் பூஜ்ஜியத்தில் இருந்து வலது பக்கமாக நகரும்போது பெரிய எண்களும் இடது பக்கமாக நகரும்போது சிறிய எண்களும் காணப்படுகின்றன.

பூஜ்ஜியத்திற்குப் பதில், எந்த இடத்தில் இருந்து தொடங்கினாலும் இதுதான் நிகழ்கிறது.

எண்கள் பலவகை

1, 2, 3, . . . என்று இவ்வாறு உள்ள எண்ணல் எண்கள் வழியாகக் கணக்கு தொடங்குகிறது. தொடர்ந்து எண்கள் எழுதவும், பிற தேவைகளுக்காகவும் 0 என்ற எண்ணையும் பயன்படுத்தத் தொடங்கினர்.

நீளம், எடை, நேரம் ஆகியவற்றை அளப்பதற்குப் பின்ன எண்களும் தேவைப்பட்டது. எல்லா நீளங்களையும் ஓர் அலகின் மட்டும் பாகமாகவோ அல்லது மடங்காகவோ கூற இயலாது என்பதனால் தான் விகிதமுறா எண்கள் தேவைப்பட்டது.

இயற்கணிதம் பயன்படுத்தும் போதுள்ள சில வசதிகளுக்காக இந்த எல்லா எண்களுடையவும் குறையும் பயன்படுத்தத் தொடங்கினர். இத்தகைய எண்களுக்கும் பொதுவாக உள்ள பெயர்தான் மெய்யெண்கள்.

இவற்றில் பின்ன எண் வடிவத்தில் எழுத இயலும் எண்களுக்கு விகிதமுறு எண்கள் என்றும் இயலாதவற்றிற்கு விகிதமுறா எண்கள் என்றும் பெயரிட்டனர்.

எண்ணல் எண்களும் அவற்றின் குறைகளும், பூஜ்ஜியமும் எல்லாம் விகிதமுறு எண்களாகும். இவற்றை முழுக்கள் (integers) என்றும் கூறுவர்.

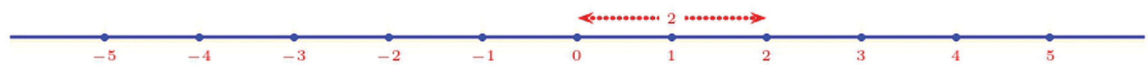
அப்போது எந்த இரண்டு மெய்யெண்களை எடுத்தாலும், எண் கோட்டில் இவற்றில் பெரிய எண்ணின் இடம், சிறிய எண்ணின் வலது பக்கத்தில் இருக்கும்.

அவ்வாறு பெரியது, சிறியது என்ற எண் தொடர்பு, எண் கோட்டில் வலது பக்கம் இடது பக்கம் என்ற வடிவியல் தொடர்பாக மாறுகிறது.

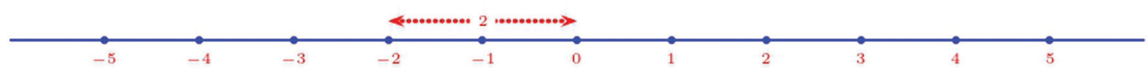
இனி எண்களைப் புள்ளிகளாக அடையாளப்படுத்திய வடிவியல் முறையை, ஒரு புதிய எண் செயலுக்குக் கொண்டு செல்வது எவ்வாறு எனப் பார்க்கலாம்.

மட்டளவு (சார்புவிலை)

புள்ளிகளை எண்களாக அடையாளப்படுத்துவது 0 என்ற புள்ளியில் இருந்து உள்ள தூரத்தைப் பொறுத்து அல்லவா? எடுத்துக்காட்டாக, 2 என்று அடையாளப்படுத்திய புள்ளிக்கும், 0 என்று அடையாளப்படுத்திய புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் 2.



இதே தூரத்தில் 0 என்ற புள்ளியின் இடது பக்கத்தில் உள்ள புள்ளியையே -2 என்று அடையாளப்படுத்துகிறோம்.



அப்போது 0 க்கும் -2 க்கும் இடையே உள்ள தூரமும் 2 ஆகும்.

பொதுவாகக் கூறினால்,

- எண் கோட்டில் பூஜ்ஜியத்திற்கும் ஒரு மிகை எண்ணிற்கும் இடையே உள்ள தூரம், அந்த எண்ணே ஆகும்.
- பூஜ்ஜியத்திற்கும் ஒரு குறை எண்ணிற்கும் இடையே உள்ள தூரம், அந்த எண்ணின் குறை அடையாளத்தை நீக்கி கிடைக்கும் மிகை எண்ணாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$0, 5\frac{1}{2} \text{ இவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரம் } 5\frac{1}{2}.$$

$$0, -5\frac{1}{2} \text{ இவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரம் } 5\frac{1}{2}.$$

இதை இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி $0, x$ ஆகிய எண்களுக்கிடையே உள்ள தூரமாக எவ்வாறு கூறலாம்? (எண்களை எழுத்துக்களாக எழுதும் போது, குறை எண்ணா? அல்லது மிகை எண்ணா? என்று பார்க்காமல் இருவகை எண்களையும் x, y என்று ஒன்று போல் அல்லவா எழுதுகிறோம்).

அப்போது ஒரு குறை எண்ணின் குறை அடையாளத்தை நீக்குதல் என்பதை வேறொரு முறையில் கூற வேண்டும். ஒரு மிகை எண்ணின் குறையின் குறை அதே எண் ஆகும் என்று **குறை எண்கள்** என்ற பாடத்தில் கற்றதை நினைவு கூறவும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$-(-2) = 2$$

அதாவது, ஒரு குறை எண்ணின் குறை அடையாளத்தை நீக்குதல் என்பதற்குப் பதில் அதன் குறையை எடுக்கவும் என்று கூறினால் போதும். அப்போது x ஒரு குறை எண் எனில், குறை அடையாளம் நீக்கிய மிகை எண் கிடைக்க $-x$ எடுத்தால் போதும், எடுத்துக்காட்டாக ,$x = -3$ எனில்,

$$-x = -(-3) = 3$$

இனி, எண் கோட்டில் x என்ற குறை எண்ணிற்கும் பூஜ்ஜியத்திற்கும் இடையே உள்ள தூரம் $-x$ என்று கூறலாம்.

இவ்வாறு $x > 0$ எனில் (x மிகை எண் ஆனால்) x ஆகும் $x < 0$ எனில் (x குறை எண் ஆனால்) $-x$ ஆக எடுக்கும் செயலைச் சுருக்கி $|x|$ என எழுதலாம். இதை x இன் மட்டளவு (சார்புவிலை) (absolute value) எனக் கூறுவர்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$|5| = 5 \qquad |-5| = 5$$

$$\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \qquad \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

$$|\pi| = \pi \qquad |-\pi| = \pi$$

பூஜ்ஜியத்தின் மட்டளவு பூஜ்ஜியம் என்றே எடுக்கிறோம்.

பொதுவாகக் கூறினால்,

$x > 0$ எனில் $|x| = x$

$x < 0$ எனில் $|x| = -x$

$x = 0$ எனில் $|x| = 0$

இதை ஒரே சமன்பாடாகப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ எனில்} \\ -x, & x < 0 \text{ எனில்} \\ 0, & x = 0 \text{ எனில்} \end{cases}$$

இதுவரைப் பார்த்தவற்றையெல்லாம் சுருக்கிப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

எண் கோட்டில் பூஜ்ஜியம் குறிப்பிடும் புள்ளிக்கும் வேறொரு எண் குறிப்பிடும் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம், அந்த எண்ணின் மட்டளவு ஆகும்.

இயற்கணிதம் பயன்படுத்திக் கூறினால்,

எண் கோட்டில் 0 குறிப்பிடும் புள்ளிக்கும், x என்ற எண் குறிப்பிடும் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் $|x|$.

இனி எண்களின் மட்டளவு என்ற கருத்தின் சில சிறப்பியல்புகளைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் எண்ணினுடையவும் அதன் குறையினுடையவும் மட்டளவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

எடுத்துக்காட்டாக,

$$|3| = 3 = |-3|$$

எனப் பார்த்தோம்.

-3 ஐ முதல் எண்ணாக எடுத்தால்? $-(-3) = 3$ என்று முன்பு பார்த்தோம் அல்லவா. அப்போது -3 னுடையவும் அதன் குறையினுடையவும் மட்டளவு 3 ஆகும்.

$$|-3| = |3| = |-(-3)|$$

பொதுவாகக் கூறினால்

எந்த எண்ணினுடையவும் அதன் குறையினுடையவும் மட்டளவு ஒரே (மிகை) எண்ணாகும்.

இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்திக் கூறினால் ?

x எந்த எண் ஆனாலும் $|-x| = |x|$.

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்.

மிகை எண் ஆனாலும் குறை எண் ஆனாலும் வர்க்கம் மிகை எண் அல்லவா.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$
$$(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$$

இனி

$$|5| = |-5| = 5$$

ஆனபடியால்

$$|5|^2 = 5^2$$
$$|-5|^2 = 5^2 = (-5)^2$$

$5, -5$ இவற்றிற்குப் பதில் எந்த எண்களை எடுத்தாலும் இது சரியாகும் அல்லவா?

பொதுவாகக் கூறினால்

x எந்த எண் ஆனாலும் $|x|^2 = x^2$.

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையை நிரப்புக.

x	y	xy	$\lvert x\rvert$	$\lvert y\rvert$	$\lvert xy\rvert$	$\lvert x\rvert\,\lvert y\rvert$
4	3	12	4	3	12	12
-4	3					
4	-3					
-4	-3					

(i) x, y ஆக அதிக எண்களை எடுத்து அட்டவணையைப் பெரியதாக்கவும். $|xy|$ க்கும் $|x|\,|y|$ க்கும் இடையே பொதுவான எதேனும் தொடர்பு உண்டா?

(ii) x, y எந்த இரண்டு எண்களானாலும் $|xy| = |x|\,|y|$ என நிரூபிக்கவும்.

(2) கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையை நிரப்புக.

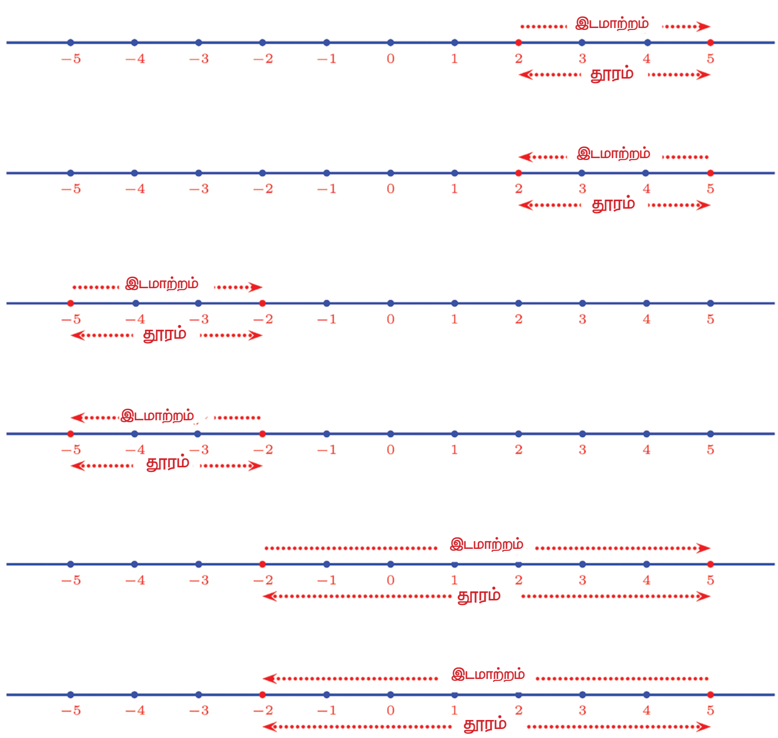
x	y	$x+y$	$\lvert x\rvert$	$\lvert y\rvert$	$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	$\lvert x+y\rvert$
3	5	8	3	5	8	8
–3	5	2	3	5	8	2
3	–5					
–3	–5					

x, y ஆக மேலும் சில எண்கள் எடுத்து அட்டவணையைப் பெரியதாக்கவும் $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ க்கும் $\lvert x+y\rvert$ க்கும் இடையே ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா?

தூரங்கள்

எண் கோட்டில் 0 என்ற எண்ணிற்கும் x என்ற எண்ணிற்கும் இடையே உள்ள தூரம் $\lvert x\rvert$ என்று பார்த்தோமல்லவா. இனி ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தை இயற்கணிதத்தில் எவ்வாறு எழுதலாம் எனப் பார்ப்போம்.

குறை எண்கள் என்ற பாடத்தில், ஒரு கோட்டின் வழியாக நகரும் புள்ளியின் இடமாற்றத்தைக் கணக்கீடு செய்தது நினைவு இருக்கிறதா? எண் கோட்டில் ஒரு புள்ளியில் இருந்து மற்றொரு புள்ளிக்கு உள்ள தூரத்தைப் பயன்படுத்தி அல்லவா இடமாற்றத்தை எழுதினோம்? வலது பக்கம் உள்ள இடமாற்றம் தூரமே ஆகும்; இடது பக்கம் உள்ளது, தூரத்தை குறை எண் ஆக்கியதும் ஆகும்.



இடமாற்றம் = 3
தூரம் = 3

இடமாற்றம் = -3
தூரம் = 3

இடமாற்றம் = 3
தூரம் = 3

இடமாற்றம் = -3
தூரம் = 3

இடமாற்றம் = 7
தூரம் = 7

இடமாற்றம் = -7
தூரம் = 7

அப்போது, இடமாற்றம் மிகை எண் எனில் அந்த எண்ணே இடங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம். இடமாற்றம் குறை எண் எனில், எண்ணில் குறை அடையாளம் மாற்றினால் கிடைக்கும் மிகை எண்ணே தூரம். அதாவது, இடமாற்றத்தின் மட்டளவு தான் தூரம்.

எண்கோட்டில் x என்ற எண்ணில் இருந்து y என்ற எண்ணிற்கு உள்ள இட மாற்றம் $y-x$ என்று **குறை எண்கள்** என்ற பாடத்தில் பார்த்தோமல்லவா.

அப்போது x, y என்ற எண்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் $|y-x|$

எந்த எண்ணிற்கும், அதன் குறை எண்ணிற்கும் ஒரே மட்டளவு எனப் பார்த்தோம் அல்லவா. $y-x$ இன் குறை,

$$-(y-x) = x-y$$

என்றும் பார்த்தோம். அதாவது $|y-x| = |x-y|$

அப்போது,

எண் கோட்டில் x, y என்ற எண்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் $|x-y|$

இதைச் சாதாரண மொழியில் வேறொரு முறையிலும் கூறலாம்

x, y ஆகிய எண்களில் x பெரிய எண் எனில் $x-y$ மிகை எண் அல்லவா. அப்போது $|x-y| = x-y$

இனி y பெரிய எண் எனில் $x-y$ குறை எண்ணாகும். எனவே,

$$|x-y| = -(x-y) = y-x$$

அப்போது பொதுவாக என்ன கூறலாம்?

எண் கோட்டில் இரண்டு எண்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம், பெரிய எண்ணில் இருந்து சிறிய எண்ணைக் கழித்துக் கிடைப்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக $4\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{4}$ என்ற எண்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம்,

$$6\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2} = 1\frac{3}{4}$$

$4\frac{1}{2}$, $-6\frac{1}{4}$ இவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரம்?

$$4\frac{1}{2} - \left(-6\frac{1}{4}\right) = 4\frac{1}{2} + 6\frac{1}{4} = 10\frac{3}{4}$$

இதிலிருந்து வேறொரு கருத்தும் கிடைக்கும்.

x, y என்ற இரண்டு எண்களில் பெரிய எண்ணில் இருந்து சிறிய எண்ணைக் கழிக்கவும் என்ற செயலின் இயற்கணித வடிவமே $|x-y|$.

இனி பின்வரும் கணக்கைப் பார்க்கவும்,

$|x-1| = 3$ ஆக வேண்டும் எனில் x எந்தெந்த எண்கள் ஆகலாம்?

இதைப் பல முறைகளில் செய்யலாம். வடிவியல் முறையில் பார்த்தால் $|x-1|$ என்பது, எண் கோட்டில் x, 1 என்ற எண்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம் ஆகும். இந்த தூரம் 3 ஆக வேண்டும்.

1 இன் வலது பக்கம், தூரம் 3 ஆக உள்ளது $1+3=4$ ஆகும்.

1 இன் இடது பக்கம், தூரம் 3 ஆக உள்ளது $1-3=-2$ ஆகும்.

அப்போது $x = 4$ அல்லது $x = -2$

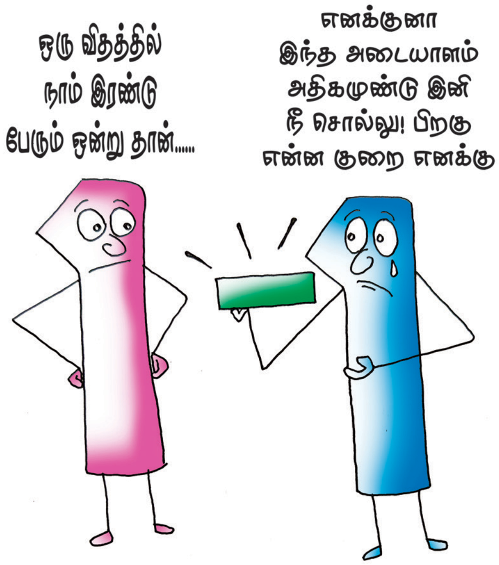
இனி இயற்கணித முறையில் சிந்தித்தால்?

$x > 1$ எனில் $|x - 1| = x - 1$ அல்லவா $x - 1 = 3$ ஆக வேண்டும் எனில் $x = 4$ ஆக வேண்டும்.

$x < 1$ ஆனால்? அப்போது $|x - 1| = 1 - x$ ஆகும் $1 - x = 3$ ஆக வேண்டுமெனில் $x = 1 - 3 = -2$ ஆக வேண்டும்.

வினாவைச் சற்று மாற்றிப் பின்வருமாறு ஆக்கினால்?

$|x + 1| = 3$ ஆக வேண்டும் எனில் x எந்த எண்கள் ஆகலாம்?



வடிவியல் முறையில் இதைச் செய்ய $|x + 1|$ ஐ ஒரு தூரமாகப் பார்க்க வேண்டும். எண்களுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசத்தின் மட்டளவு அல்லவா தூரமாகக் கிடைப்பது. அப்படியானால் முதலில் $x + 1$ ஐ தொகைக்குப் பதில் வித்தியாசமாக எழுத வேண்டும்.

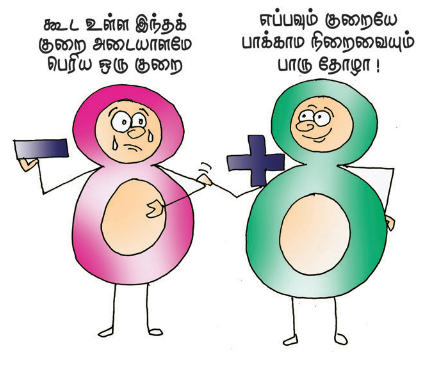
$$x + 1 = x - (-1)$$

இதைப் பயன்படுத்தி $|x + 1| = |x - (-1)|$ என எழுதினால் $|x + 1|$ என்பது x க்கும் -1 க்கும் இடையே உள்ள தூரமாகக் காணலாம்.

இனி முதல் கணக்கில் செய்தது போல -1 இன் வலது பக்கத்தில் 3 தூரத்தில் உள்ள புள்ளி $-1 + 3 = 2$ என்றும், இடது பக்கத்தில் உள்ள தூரம் 3 ஆன புள்ளி $-1 - 3 = -4$ என்றும் காணலாம்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்க்கவும்

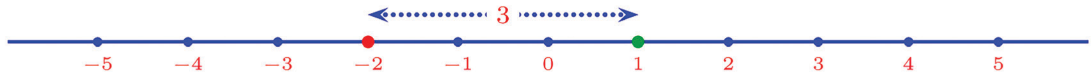
$|x - 1| < 3$ ஆக வேண்டுமெனில் x எந்தெந்த எண்களுக்கு இடையில் இருக்க வேண்டும்?



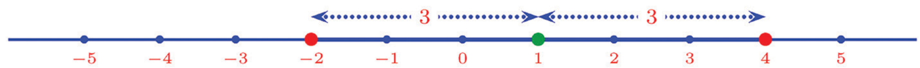
இதையும் வடிவியல் முறையில் சிந்திப்பதே எளிது.

- $|x - 1| < 3$ என்பதன் வடிவியல் சார்ந்த பொருள், x என்ற புள்ளிக்கும் 1 என்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் 3 ஐ விட குறைவு என்றல்லவா.
- x என்ற புள்ளி, 1 என்ற புள்ளி வலது பக்கமோ அல்லது இடது பக்கமோ ஆகலாம். 1 இல் இருந்து உள்ள தூரம் 3 ஐ விடக் குறைவாக இருக்க வேண்டும்.
  - ★ 1 இன் வலது பக்கத்தில், தூரம் 3 ஆன எண் $1 + 3 = 4$.

★ 1 இன் இடது பக்கம், தூரம் 3 ஆகும் எண் $1 - 3 = -2$



- $|x - 1| < 3$ ஆக வேண்டுமெனில், x என்ற எண் -2 க்கும் 4 க்கும் இடையில் இருக்க வேண்டும்: அதாவது $-2 < x < 4$



(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும் நிறைவு செய்யும் x ஐக் கணக்கிடவும்.

(i) $|x| = 5$ (ii) $|x - 3| = 2$

(iii) $|x - 2| = 3$ (iv) $|x + 2| = 3$

(2) கீழே கூறப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வாக்கியமும் நிறைவடையும் x எந்த எண்களுக்கு இடையில் இருக்க வேண்டும் எனக் கணக்கிடவும்.

(i) $|x| < 3$ (ii) $|x - 2| < 1$

(iii) $|x - 1| < 2$ (iv) $|x + 1| < 2$

(3) இரண்டாவது கணக்கில் உள்ள வாக்கியங்கள் ஒவ்வொன்றையும் நிறைவடையச் செய்யும் முழுக்கள் எவை எனக் கணக்கிடவும்?

சிறியதும் பெரியதும்

$|x - 3| < 5$ என்ற சமன்பாடு நிறைவடைய x என்ற எண் -2 க்கும் 8 க்கும் இடையிலாக வேண்டும். அதாவது $-2 < x < 8$

$|x - 3| > 5$ ஆக வேண்டும் எனில்? x என்ற எண், 3 இன் வலது பக்கத்தில், தூரம் 5 ஐ விடக் கூடிய இடத்தில் ஆனால் இது சரியாகும்; அல்லது 3 இன் இடது பக்க தூரம் 5 ஐ விடக்கூடிய இடத்தில் ஆனாலும் இது நிறைவடையும்.

அப்போது இந்த நிபந்தனையைச் சரியாக்க x என்ற எண் -2 ஐ விடச் சிறியதாக வேண்டும். அல்லது 8 ஐ விடப் பெரியதாக வேண்டும். அதாவது $x < -2$ அல்லது $x > 8$

மையப் புள்ளி

எண் கோட்டில் 2, 4 ஆகிய எண்களை அடையாளப்படுத்திய புள்ளிகளுக்கு சரியாக மையத்தில் வருகின்ற புள்ளி, எந்த எண்ணைக் குறிக்கும்?

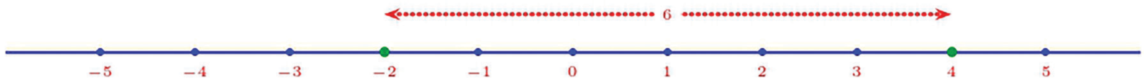
இந்தப் புள்ளி 3 எனக் கண்டுபிடிப்பது கடினம் அல்ல அல்லவா? அப்போது வடிவியல் முறையில் 3 ஐ 2 னுடையவும் 4 னுடையவும் **மையப்புள்ளி (midpoint)** எனக்கூறலாம்.

அப்போது -2 னுடையவும் 4 னுடையவும் மையப்புள்ளி என்ன?

-2 லிருந்து 4 க்கு உள்ள தூரத்தின் பாதி தூரத்தில் அல்லவா மையப்புள்ளி இருக்கும்.

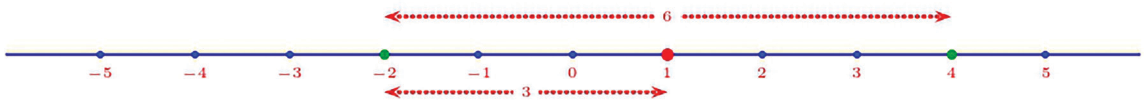
-2 லிருந்து 4 க்கு உள்ள தூரம் கிடைக்கப் பெரிய எண்ணில் இருந்து சிறிய எண்ணைக் கழிக்க வேண்டும்.

$$4 - (-2) = 6$$



இந்த தூரத்தின் பாதி 3. அப்போது −2 இல் இருந்து வலது பக்கம், தூரம் 3 ஆகும் எண்ணே மையப்புள்ளி. அதாவது

$$-2+3=1$$



இவ்வாறு எந்த இரண்டு எண்களுடையவும் மையப்புள்ளியைக் கணக்கிடலாமல்லவா.

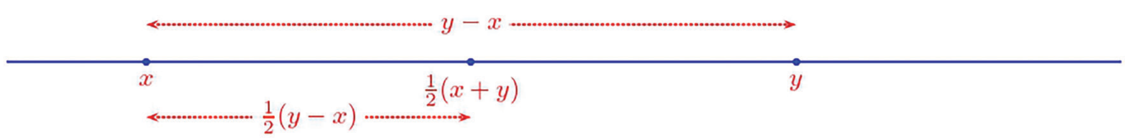
இந்த முறையை இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி எழுதலாம்.

எண்களில் சிறியதை x என்றும் பெரியதை y என்றும் எடுக்கலாம். அப்போது x இன் வலது பக்கத்தில் y இருக்கும், அவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரம் $y-x$

x என்ற புள்ளியிலிருந்து $y-x$ தூரத்தில் வலது பக்கமாக y என்ற புள்ளி இருக்கும். மையப்புள்ளி என்பது, x லிருந்து இதன் பாதி தூரம் வலது பக்கமாக இருக்கும்.

அதாவது, மையப்புள்ளி

$$x+\frac{1}{2}\left(y-x\right)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}(x+y)$$



எண் கோட்டில் எந்த இரண்டு புள்ளிகளுடையவும் மையப்புள்ளி, அவற்றைக் குறிப்பிடுகின்ற புள்ளிகளின் தொகையின் பாதியைக் குறிக்கும் புள்ளியாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $-2\frac{1}{2}$ னுடையவும் $4\frac{3}{4}$ னுடையவும் மையப்புள்ளி

$$\frac{1}{2}\times\left(-2\frac{1}{2}+4\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{4}=1\frac{1}{8}$$

−4.8 னுடையவும் 1.2 னுடையவும் மையப்புள்ளி

$$=\frac{1}{2}\times(-4.8+1.2)$$
$$=\frac{1}{2}\times(-3.6)=-1.8$$

(1) எண் கோட்டில் கீழே கூறப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு ஜோடி எண்களும் குறிப்பிடும் புள்ளிகளின் மையப்புள்ளியைக் குறிக்கும் எண்ணைக் கணக்கிடவும்.

(i) $1, -5$ (ii) $-1, -5$ (iii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

(iv) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ (v) $-2.5, 3.5$ (vi) $1.3, 8.7$

(vii) $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}$ (viii) $-\sqrt{3}, \sqrt{7}$

(2) எண் கோட்டில் 1 ஐ குறிக்கும் புள்ளிக்கும் 2 ஐ குறிக்கும் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள பகுதியை நான்கு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளியைக் குறிக்கும் எண்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

எண் கூட்டம்

ஒரே கோட்டில் எவ்வளவு அருகில் உள்ள இரண்டு புள்ளிகளை எடுத்தாலும் அவற்றிற்கிடையில் எண்ணற்ற புள்ளிகள் உண்டு. எடுத்துக்காட்டாக இந்த இரண்டு புள்ளிகளின் மையப்புள்ளியும் அவற்றிற்கு இடையில் அல்லவா? இந்த மையப்புள்ளியினுடையவும், முன்பு அடையாளப்படுத்திய ஒவ்வொரு புள்ளியினுடையவும் மையப்புள்ளி எடுத்தால் மீண்டும் இரண்டு புள்ளிகள் ஆகும். இவ்வாறு எத்தனை வேண்டுமானாலும் எடுக்கலாம்.

எண்கள் பயன்படுத்திக் கூறினால் x, y என எந்த இரண்டு எண்கள் எடுத்தாலும் $z_1 = \frac{1}{2}(x + y)$ என்ற எண் x னுடையவும், y னுடையவும் இடையிலாகும். இனி

$$z_2 = \frac{1}{2}(x + z_1), \quad z_3 = \frac{1}{2}(y + z_1),$$

என்று எடுத்தால், x, y இவற்றுக்கிடையில் வேறு இரண்டு எண்கள் ஆக, இவ்வாறு எத்தனை எண்கள் வேண்டுமானாலும் கணக்கிடலாம் அல்லவா.

இனி வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

x எந்த எண் ஆனால், $|x - 1| = |x - 4|$ என்ற சமன்பாடு நிறைவடையும்? வடிவியல் முறையில் சிந்தித்தால்,

$$|x - 1| = |x - 4|$$

என்ற சமன்பாட்டின் பொருள் என்ன?

எண் கோட்டில் x என்ற எண்ணைக் குறிக்கும் புள்ளி, 1, 4 ஆகிய எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளில் இருந்து ஒரே தூரத்தில் ஆகும்.

அதாவது,

எண் கோட்டில் 1, 4 என்ற எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளின் மையப்புள்ளியே x ஐ குறிக்கும்.

அப்போது முன்னர் பார்த்ததைப் பொறுத்து,

$$x = \frac{1}{2} \times (1 + 4) = 2\frac{1}{2}$$

கீழே தரப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும் நிறைவடையச் செய்யும் x ஐ கணக்கிடவும்.

(i) $|x - 1| = |x - 3|$ (ii) $|x - 3| = |x - 4|$

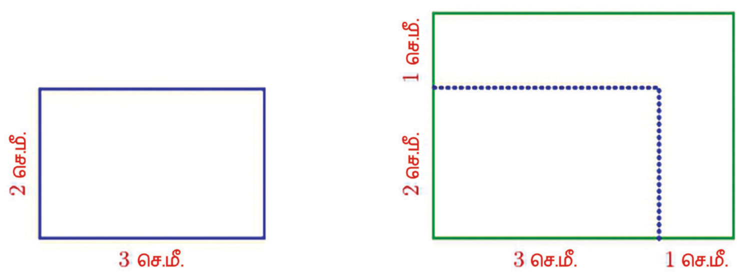
(iii) $|x + 2| = |x - 5|$ (iv) $|x| = |x + 1|$

10

பல்லுறுப்புகள்

அளவுகளின் இயற்கணிதம்

பக்கங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டர், 3 சென்டிமீட்டர் உள்ள ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் எல்லாம் 1 சென்டிமீட்டர் வீதம் அதிகரித்து, சற்று பெரிய செவ்வகமாக்கப்பட்டுள்ளது.



புதிய செவ்வகத்தின் சுற்றளவு என்ன?

இந்தச் செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளம் 3 சென்டிமீட்டர், 4 சென்டி மீட்டர் ஆகும். இதன் சுற்றளவு $2 \times (4 + 3) = 14$ சென்டிமீட்டர் ஆகும்.

வேறொரு முறையிலும் சிந்திக்கலாம். முதலில் சுற்றளவு $2 \times (3 + 2) = 10$ சென்டிமீட்டர். 4 பக்கங்களிலும் 1 சென்டிமீட்டர் வீதம் அதிகரித்து, மொத்தம் 4 சென்டிமீட்டர் அதிகரித்தது. புதிய சுற்றளவு $10 + 4 = 14$ சென்டிமீட்டர்.

பக்கங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டர் வீதம் அதிகரித்தது எனில்? இரண்டாவது முறையில் கூறியது போல சிந்தித்தால், ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் 2 சென்டிமீட்டர் வீதம் அதிகரித்து, மொத்தம் அதிகரித்த நீளம் $2 \times 4 = 8$ சென்டிமீட்டர். புதிய சுற்றளவு $10 + 8 = 18$ சென்டிமீட்டர்.

இவ்வாறு கணக்கீடு செய்வது எளிதல்லவா. அதிகரித்த நீளம் $2\frac{1}{2}$ சென்டி மீட்டர் எனில், பெரிய செவ்வகத்தின் சுற்றளவு

$$\left(2\frac{1}{2} \times 4\right) + 10 = 20 \text{ சென்டிமீட்டர்.}$$

பொதுவாகக் கூறினால், ஒவ்வொரு பக்கமும் எத்தனை சென்டிமீட்டர் அதிகரித்தாலும், அதன் 4 மடங்கை 10 சென்டிமீட்டருடன் கூட்டினால் புதிய சுற்றளவு கிடைக்கும்.

இதை இயற்கணிதத்தில் எழுதலாம். ஒவ்வொரு பக்கமும் அதிகரித்தது x சென்டிமீட்டர் என்றும், புதிய சுற்றளவு p சென்டிமீட்டர் என்றும் எழுதினால்,

$$p = (x \times 4) + 10 = 4x + 10$$

இனி பல நீளங்கள் அதிகரிப்பதைப் பொறுத்து மாறுகின்ற சுற்றளவுகளை எளிதில் எழுதலாம் அல்லவா.

3 சென்டிமீட்டர் வீதம் அதிகரித்தால், சுற்றளவு $(4 \times 3) + 10 = 22$ சென்டிமீட்டர்.

$3\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர் வீதம் அதிகரித்தால், சுற்றளவு $\left(4 \times 3\frac{1}{2}\right) + 10 = 24$ சென்டிமீட்டர்.

$3\frac{3}{4}$ சென்டிமீட்டர் வீதம் அதிகரித்தால், சுற்றளவு $\left(4 \times 3\frac{3}{4}\right) + 10 = 25$ சென்டிமீட்டர்.

இயற்கணித முறையில் இதை மேலும் சுருக்கி எழுதலாம்.

$x = 3$ என எடுத்தால் $p = 22$

$x = 3\frac{1}{2}$ என எடுத்தால் $p = 24$

$x = 3\frac{3}{4}$ என எடுத்தால் $p = 25$

இதை மேலும் சுருக்கி எழுத வேறொரு இயற்கணித முறையும் உண்டு.

$$p(3) = 22$$
$$p\left(3\frac{1}{2}\right) = 24$$
$$p\left(3\frac{3}{4}\right) = 25$$

பொதுவாக இவ்வாறு எழுதலாம்,

$$p(x) = 4x + 10$$

இவ்வாறு சுருக்கி எழுதியதை மேலும் ஒருமுறை பார்ப்போம். முதலில் நமது கணக்கைச் சாதாரண மொழியில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

> பக்கங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டரும், 3 சென்டிமீட்டரும் உள்ள ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்களையெல்லாம் ஒரே அளவில் நீட்டி பெரிய செவ்வகம் ஆக்கினால் அந்தச் செவ்வகத்தின் சுற்றளவு, அதிகரித்த நீளத்தின் நான்கு மடங்கைப் பத்துடன் கூட்டியதாகும். எடுத்துக்காட்டாகப் பக்கங்கள் எல்லாம் ஒன்றரை சென்டிமீட்டர் அதிகரித்தால், சுற்றளவு 16 சென்டிமீட்டர் ஆகும்.

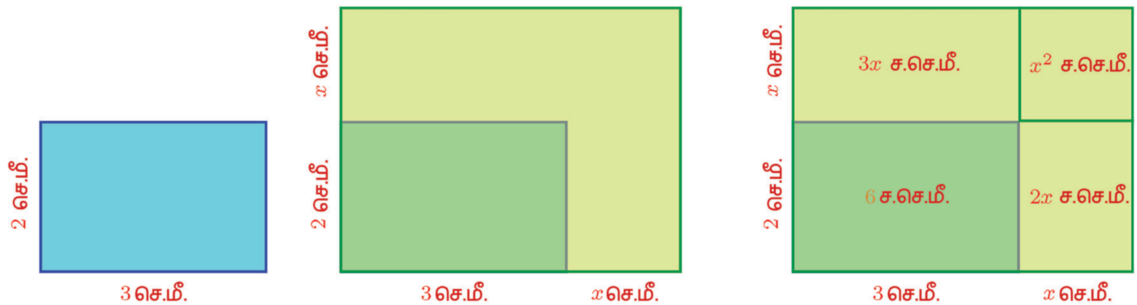
இதை இயற்கணித முறையில் பின்வருமாறு சுருக்கி எழுதலாம்.

> பக்கங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டரும், 3 சென்டிமீட்டரும் உள்ள ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்களை எல்லாம் x சென்டிமீட்டர் அதிகரித்து பெரிய செவ்வகம் ஆக்கி அதன் சுற்றளவு p சென்டிமீட்டர் என எழுதினால் $p = 4x + 10$ ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக $x = 1\frac{1}{2}$ என எடுத்தால், $p = 16$.

இதில் x மாறுவதைப் பொறுத்தே p யும் மாறுகிறது எனத் தெளிவாக்குவதற்கு, p என்று மட்டும் எழுதுவதற்குப் பதிலாக $p(x)$ என எழுதினால் மேலே எழுதியதைப் பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

பக்கங்களின் நீளம் 2 சென்டிமீட்டரும், 3 சென்டிமீட்டரும் உள்ள ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்களை எல்லாம் x சென்டிமீட்டர் அதிகரித்து பெரிய செவ்வகம் ஆக்கி அதன் சுற்றளவு $p(x)$ சென்டிமீட்டர் என எழுதினால், $p(x) = 4x + 10$. எடுத்துக்காட்டாக $p\left(1\frac{1}{2}\right) = 16$ ஆகும்.

இந்தக் கணக்கிலேயே பரப்பளவு மாறுவது எவ்வாறு எனப் பார்ப்போம். பல நீளங்களைக் கூட்டும் போது பரப்பளவு மாறுவதை ஒவ்வொன்றாகப் பார்ப்பதற்குப் பதில், பொதுவாக அதிகரிக்கும் நீளத்தை x சென்டிமீட்டர் என எடுத்துத் தொடங்கலாம்.



படத்திலிருந்து, புதிய பரப்பளவு

$$6 + 2x + 3x + x^2 = 6 + 5x + x^2$$

படம் ஒன்றும் வரையாமல், நேரடியாக இயற்கணிதம் வழியாகவும் இதைக் காணலாம்.

$$(3 + x)(2 + x) = 6 + 3x + 2x + x^2 = 6 + 5x + x^2$$

(**பெருக்கல் சமன்பாடுகள்** என்ற பாடம்).

இயற்கணித வாக்கியங்களில் எழுத்துக்களை முதலில் எழுதுவதுதான் வழக்கம். இதைப் பொறுத்து மேலே எழுதிய சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$$

சுற்றளவு கணக்கில் பார்த்தது போல், பக்கங்கள் எல்லாம் x சென்டிமீட்டர் அதிகரிக்கும்போது உள்ள பரப்பளவை $a(x)$ சதுர சென்டிமீட்டர் என்று எழுதினால்

$$a(x) = x^2 + 5x + 6$$

இதிலிருந்து

$$a(1) = 1^2 + (5 \times 1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$$

$$a\left(1\frac{1}{2}\right) = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(5 \times 1\frac{1}{2}\right) + 6 = 2\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2} + 6 = 15\frac{3}{4}$$

$$a(2) = 2^2 + (5 \times 2) + 6 = 4 + 10 + 6 = 20$$

என்றெல்லாம் கணக்கிடலாம். இவற்றையெல்லாம் சாதாரண மொழியில் இவ்வாறு எழுதலாம்.

பக்கங்கள் எல்லாம் 1 சென்டிமீட்டர் அதிகரித்தால் பரப்பளவு 12 சதுர சென்டிமீட்டர்.

பக்கங்கள் எல்லாம் $1\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர் அதிகரித்தால் பரப்பளவு $15\frac{3}{4}$ சதுர சென்டிமீட்டர்.

பக்கங்கள் எல்லாம் 2 சென்டிமீட்டர் அதிகரித்தால் பரப்பளவு 20 சதுர சென்டிமீட்டர்.

வேறொரு எடுத்துக்காட்டாக, விளிம்புகளின் நீளம் 1, 2, 3 செண்டிமீட்டர் உள்ள கன செவ்வக கட்டையின் பக்கங்களை எல்லாம் ஒரே அளவில் நீட்டி பெரிய கன செவ்வகக் கட்டை ஆக்கினால் கனஅளவு எவ்வாறு மாறும் எனப் பார்க்கலாம்.

அதிகரித்த நீளம் x செண்டிமீட்டர் என எடுத்தால், பெரிய கட்டையின் கனஅளவு $(x+1)(x+2)(x+3)$. இதை விரித்தெழுதினால், முன்பு பார்த்தது போல்

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$$

என எழுதலாம். இனி இதை $x+1$ ஆல் பெருக்க வேண்டும். அதற்கு முதல் தொகையில் உள்ள எண்கள் ஒவ்வொன்றையும், இரண்டாவது தொகையில் உள்ள ஒவ்வொன்றாலும் பெருக்கிக் கூட்ட வேண்டும்:

$$\begin{aligned}(x+1)(x^2+5x+6) &= \big(x \times (x^2+5x+6)\big) + \big(1 \times (x^2+5x+6)\big)\\ &= (x^3+5x^2+6x) + (x^2+5x+6) = x^3+6x^2+11x+6\end{aligned}$$

விளக்கமாகக் கூறினால்,

பக்கங்களின் நீளம் 1 செண்டிமீட்டர், 2 செண்டிமீட்டர், 3 செண்டிமீட்டர் உள்ள கன செவ்வகக் கட்டையின் பக்கங்களையெல்லாம் x செண்டி மீட்டர் அதிகரித்து பெரிய கன செவ்வகக் கட்டையாக்கி, அதன் கனஅளவை $v(x)$ கன செண்டிமீட்டர் என்று எழுதினால், $v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ஆகும்.

(1) ஒரு பக்கத்தின் நீளம் மற்ற பக்கத்தின் நீளத்தை விட 1 செண்டிமீட்டர் குறைவான செவ்வகங்களில், சிறிய பக்கத்தின் நீளத்தை x செண்டிமீட்டர் என எடுக்கவும்.

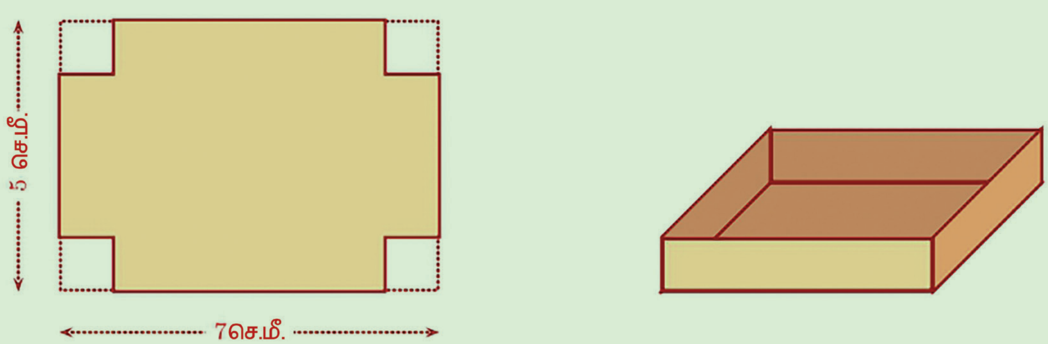
(i) இவற்றின் சுற்றளவுகளை $p(x)$ செண்டிமீட்டர் என எடுத்து, x, $p(x)$ இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள தொடர்பைச் சமன்பாடாக எழுதவும்.

(ii) இவற்றின் பரப்பளவுகளை $a(x)$ சதுர செண்டிமீட்டர் என எடுத்து, x, $a(x)$ இவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொடர்பைச் சமன்பாடாக எழுதவும்.

(iii) $p(1), p(2), p(3), p(4), p(5)$ என்பனவற்றைக் கணக்கிடவும். ஏதேனும் வரிசைமுறை காணப்படுகிறதா?

(iv) $a(1), a(2), a(3), a(4), a(5)$ என்பனவற்றைக் கணக்கிடவும். ஏதேனும் வரிசைமுறை காணப்படுகிறதா?

(2) படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது போல, ஒரு செவ்வகத்தின் நான்கு மூலைகளில் இருந்தும் ஒரே அளவுள்ள சிறிய சதுரங்களை வெட்டி மாற்றி, மீதமுள்ள பாகத்தை மேல்நோக்கி மடக்கி, ஒரு பெட்டி உருவாக்கப்படுகிறது.



(i) வெட்டி எடுக்கப்படும் சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் x சென்டிமீட்டர் என எடுத்து பெட்டியின் மூன்று அளவுகளையும் எழுதுக.

(ii) பெட்டியின் கனஅளவை $v(x)$ கன சென்டிமீட்டர் என எடுத்து, x க்கும் $v(x)$ க்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைச் சமன்பாடாக எழுதுக.

(iii) $v\left(\frac{1}{2}\right), v(1), v\left(1\frac{1}{2}\right)$ இவற்றைக் கணக்கிடவும்.

(3) ஒரு மீட்டர் நீளமுள்ள கயிற்றால் உருவாக்க இயலும் செவ்வகங்களின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் x சென்டிமீட்டர் என்றும் செவ்வகத்தின் உள்ளே உள்ள பரப்பளவு $a(x)$ சதுர சென்டிமீட்டர் என்றும் எடுக்கவும்.

(i) x க்கும் $a(x)$ க்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைச் சமன்பாடாக எழுதவும்..

(ii) $a(10), a(40)$ இவை ஒரே எண்ணாவது ஏன்?

(iii) x ஆக இரண்டு வேறுபட்ட எண்கள் எடுக்கும்போது $a(x)$ ஆக ஒரே எண் கிடைக்க, எண்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு எவ்வாறு இருக்க வேண்டும்?

சிறப்பு வாக்கியங்கள்

பல்வேறு அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்புகளை இயற்கணித சமன்பாடுகளாக எழுதுவது எவ்வாறு எனப் பார்த்தோம் அல்லவா. எண்களுக்கிடையுள்ள செயல்களாகவும் இவற்றைக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக முதல் செவ்வகக்கணக்கில், பக்கங்களின் நீளங்களை நீட்டியதற்கும் புதிய சுற்றளவிற்கும் உள்ள தொடர்பை,

$$p(x) = 4x + 10$$

என எழுதினோம். செவ்வகத்தின் சுற்றளவைக் கண்டுபிடிப்பதற்கான செயல் என்பதைவிடப் பொதுவாக எண்களை 4 ஆல் பெருக்கி 10 ஐ கூட்டும் செயலாகவும் இதைக் காணலாம்.

இதுபோல முன்பு பார்த்த பிற தொடர்புகளையும் பரிசோதனை செய்யலாம்.

- $a(x) = x^2 + 5x + 6$
- $v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

இவற்றையெல்லாம் எண்களின் செயல்களாகப் பார்த்தால் அவற்றிற்கெல்லாம் பொதுவான சில பண்புகளைக் காணலாம். x என்ற எண்ணின் பல அடுக்குகளைக் குறிப்பிட்ட எண்களால் பெருக்கவும், அத்தகைய பெருக்கல் பலன்களைக் கூட்டவும் மட்டுமே இதில் செய்யப்பட்டுள்ளது. ஒரு குறிப்பிட்ட எண் கூட்டவும் செய்யப்பட்டுள்ளது. இத்தகைய செயல்கள் மட்டும் உட்படுகின்ற இயற்கணித வாக்கியத்தின் பொதுவான பெயர்தான் **பல்லுறுப்புகள் (polynomial).**

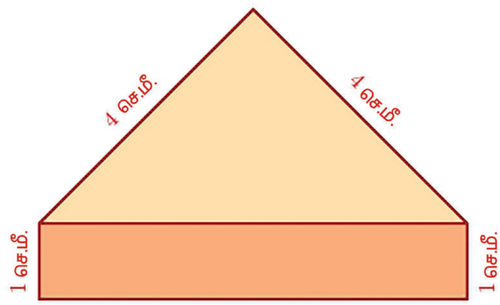
அளவுகளில் இவ்வாறு அல்லாத செயல்களைச் செய்கின்ற சூழல்களும் உண்டு. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு பக்கம் மற்றொரு பக்கத்தை விட 1 சென்டிமீட்டர் அதிகமான செவ்வகங்களின் மூலைவிட்டங்களின்

நீளத்தைப் பார்க்கலாம். சிறிய பக்கம் x சென்டிமீட்டர் என எடுத்தால், மூலைவிட்டத்தின் நீளம் சென்டிமீட்டரில்

$$\sqrt{x^2 + (x+1)^2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$ ஆகும்.

இதில் மாறுகின்ற எண்களின் வர்க்கமூலம் எடுக்கவும் என்ற செயல் உள்ளதால், நமது வரையறையின் படி இது ஒரு பல்லுறுப்பு அல்ல.

இனி கீழ்வரும் படத்தைப் பார்க்கவும்.



ஓர் இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தில், ஒரு செவ்வகம் சேர்த்து வைத்த இந்த வடிவத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 8 சதுர சென்டிமீட்டர் என எளிதாகக் காணலாம். செவ்வகத்தின் பெரிய பக்கம் இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணமானதனால் $4\sqrt{2}$ சென்டிமீட்டர் ஆகும்.

(**புதிய எண்கள்** என்ற பாடம்) : அப்போது செவ்வகத்தின் பரப்பளவு $4\sqrt{2}$ சதுர சென்டிமீட்டர்.

மொத்தம் $8 + 4\sqrt{2}$ சதுர சென்டிமீட்டர்.

செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்கோண பக்கங்களின் நீளம் வேறு ஏதேனும் எண்ணானால்? இந்த எண் x சென்டிமீட்டர் என எடுத்தால், இந்த வடிவத்தின் பரப்பளவு, $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x$

என்ற எண்ணாகும். இதில் 2 இன் வர்க்கமூலம் உள்ளது. ஆனால் மாறுகின்ற எண்ணான x இல், செய்யும் செயல்களில் வர்க்கம் எடுப்பதும், $\frac{1}{2}, \sqrt{2}$ என்ற குறிப்பிட்ட எண்களாலான பெருக்கலும் மட்டுமே உள்ளது. அப்போது இதுவும் ஒரு பல்லுறுப்புதான்.

வேறொரு எடுத்துக்காட்டைப் பார்ப்போம். பரப்பளவு 25 சதுர சென்டிமீட்டர் ஆன செவ்வகங்களில் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் x என எடுத்தால் சுற்றளவாகக் கிடைக்கும் எண்

$$2x + \frac{50}{x}$$

இதில் மாறுகின்ற எண்களின் (மாறி) தலைகீழி எடுக்கும் செயல் உள்ளதனால் இது ஒரு பல்லுறுப்பு அல்ல. ஒரு பல்லுறுப்பில், மாறுகின்ற எண்ணின் (மாறி) அடுக்குகளே எடுக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு வருகின்ற மிகப்பெரிய அடுக்கைப் **பல்லுறுப்பின் படி (degree of the polynomial)** எனக் கூறுவர்.

இதுவரை கண்டுபிடித்த சில பல்லுறுப்புகளைப் பார்ப்போம்:

$$p(x) = 4x + 10$$
$$a(x) = x^2 + 5x + 6$$
$$v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

மேலே உள்ள பல்லுறுப்புகளில் முதல் பல்லுறுப்பின் படி 1, இரண்டாவது பல்லுறுப்பின் படி 2, மூன்றாவது பல்லுறுப்பின் படி 3.

படி 1 ஆன பல்லுறுப்பு என்று கூறுவதற்குப் பதில் **ஒருபடி பல்லுறுப்பு** (first degree polynomial), படி 2 ஆன பல்லுறுப்பு என்று கூறுவதற்குப் பதில் **இருபடி பல்லுறுப்பு** (second degree polynomial) என்று கூறலாம்.

படிகளின் அடிப்படையில், பல்லுறுப்புகளின் பொதுவான வடிவம் எழுதலாம்.

ஒருபடி பல்லுறுப்பு : $ax + b$

இருபடி பல்லுறுப்பு : $ax^2 + bx + c$

மூன்றாம்படி பல்லுறுப்பு : $ax^3 + bx^2 + cx + d$

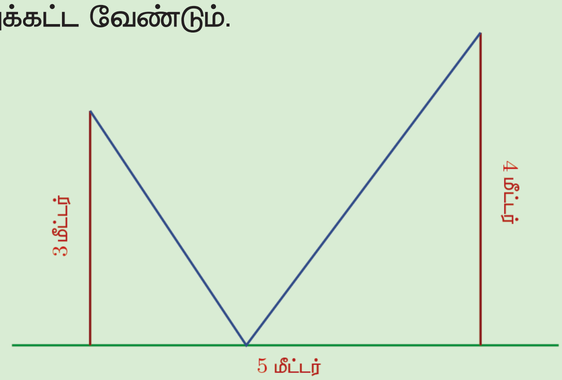
இங்கு a, b, c, d என்ற எழுத்துக்கள் நிலையான எண்களைக் குறிக்கும். அதாவது x ஆகப் பல எண்கள் எடுக்கும்போது a, b, c, d என எழுதப்பட்டுள்ள எண்களுக்கு மாற்றம் ஒன்றும் இல்லை. இவற்றை அந்தந்தப் **படிகளின் குணகங்கள் (கெழு)** (coefficients) என்று கூறுவர். இந்த எண்கள் எந்த மெய்யெண்களும் ஆகலாம்.

(1) கீழே தரப்பட்டுள்ள கணக்குகளில் கூறப்பட்டுள்ள அளவுகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு பல்லுறுப்பு தானா என்று பரிசோதனை செய்யவும். முடிவுகளின் காரணமும் எழுதுக.

(i) சதுர வடிவத்தில் உள்ள ஒரு மைதானத்தைச் சுற்றி 1 மீட்டர் அகலத்தில் ஒரு பாதை உள்ளது. மைதானத்தின் ஒரு பக்க நீளத்திற்கும் பாதையின் பரப்பளவிற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு.

(ii) 7 லிட்டர் தண்ணீரும் 3 லிட்டர் அமிலமும் சேர்ந்த திரவத்தில் மீண்டும் ஊற்றுகின்ற அமிலத்தின் அளவும், திரவத்தில் உள்ள அமிலத்தின் சதவீதத்தில் ஏற்படும் மாற்றமும்.

(iii) 3 மீட்டர், 4 மீட்டர் உயரமுள்ள இரண்டு கம்புகள் 5 மீட்டர் இடைவெளியில் தரையில் செங்குத்தாக நாட்டப்பட்டுள்ளன. ஒரு கம்பின் மேல் பகுதியில் இருந்து ஒரு கயிறு இழுத்து தரையில் கட்டப்பட்டுள்ளது. அங்கிருந்து இரண்டாவது கம்பிற்கு இழுத்துக்கட்ட வேண்டும்.



ஒரு கம்பின் அடியிலிருந்து தரையில் கயிறு கட்டப்பட்டுள்ள இடத்திற்கு உள்ள தூரத்திற்கும் கயிற்றின் நீளத்திற்கும் உள்ள தொடர்பு.

(2) கீழே கூறப்பட்டுள்ள செயல்கள் ஒவ்வொன்றையும் இயற்கணித முறையில் எழுதுக. பல்லுறுப்புகள் எவை? விளக்கவும்.

(i) எண்ணினுடையவும் அதன் தலைகீழியினுடையவும் தொகை.

(ii) எண்ணினுடையவும் அதன் வர்க்க மூலத்தினுடையவும் தொகை.

(iii) எண்ணுடன் அதன் வர்க்கமூலம் கூட்டியதற்கும், எண்ணில் இருந்து வர்க்கமூலம் கழித்ததற்கும் இடையே உள்ள பெருக்கல் பலன்.

(3) கீழே தரப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புகளில் $p(1)$, $p(10)$ கணக்கிடவும்.

(i) $p(x) = 2x + 5$ (ii) $p(x) = 3x^2 + 6x + 1$ (iii) $p(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 7$

(4) கீழே தரப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புகளில் $p(0), p(1), p(-1)$ கணக்கிடவும்.

(i) $p(x) = 3x + 5$ (ii) $p(x) = 5x - 8$ (iii) $p(x) = 3x^2 + 6x + 1$

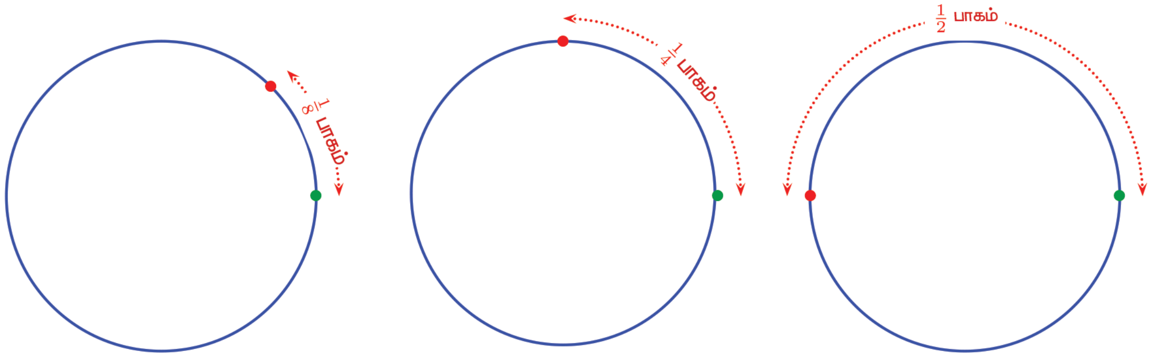
(iv) $p(x) = 2x^2 - 5x + 3$ (v) $p(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 7$ (vi) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

11 வட்டப்பகுதிகள்

நீளமும் கோணமும்

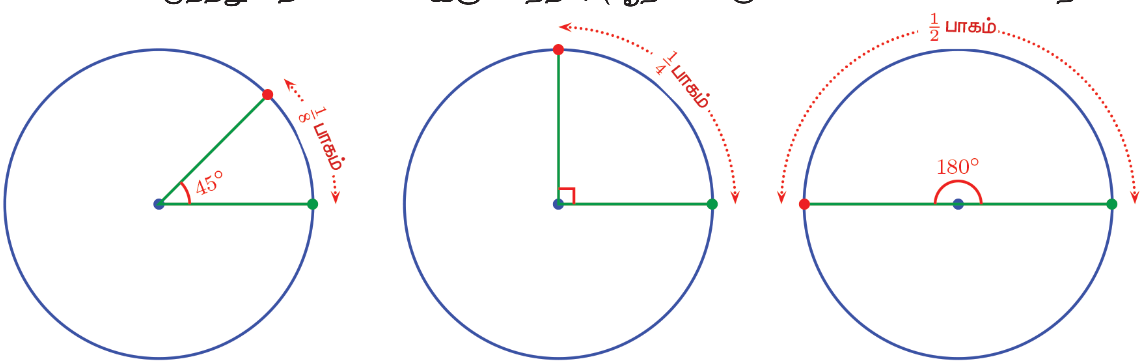
வட்டத்தின் சுற்றளவும் பரப்பளவும் கணக்கீடு செய்வது எவ்வாறு எனப் பார்த்தோம் அல்லவா. இனி வட்டத்தின் சில பாகங்களின் அளவுகளைக் கணக்கீடு செய்வது எவ்வாறு என்று பார்ப்போம்.

ஒரு வட்டத்தில் ஏதேனும் ஓர் இடத்திலிருந்து தொடங்கி வட்டத்தின் வழியாக இயங்கும் ஒரு புள்ளியைக் கருத்தில் கொள்ளவும். இயக்கத்தின் பல நேரங்களில் உள்ள படங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.



இந்த இயக்கம் ஒரு வட்டப்பாதையில் ஆனதால், வட்டத்தின் வழியாக எவ்வளவு தூரம் பயணித்தது என்பதற்குப் பதிலாக வட்ட மையத்திலிருந்து பார்க்கும் போது எத்தனை டிகிரி சுழன்றது என்று கூறலாம்.

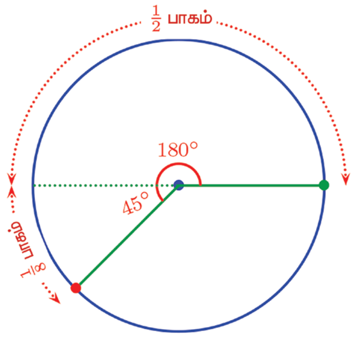
வட்டத்தின் $\frac{1}{8}$ பாகம் கிடைக்க, மையத்தில் $360° \div 8 = 45°$ எடுத்ததும், $\frac{1}{4}$ பாகம் கிடைக்க, மையத்தில் $360° \div 4 = 90°$ எடுத்ததும் நினைவில் இருக்கிறதா? (ஆறாம் வகுப்பில் **கோணங்கள்** என்ற பாடம்).

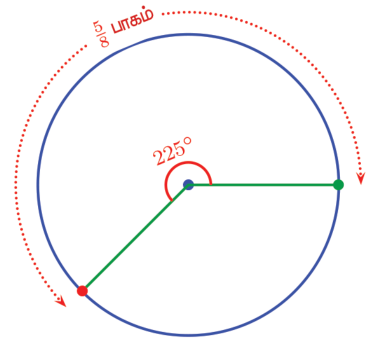


இவ்வாறு இயக்கத்தை நீளமாகவும் கோணமாகவும் கூறலாம்.

ஒரு வினா: வட்டத்தின் பாதி கடந்து, மீண்டும் ஓர் எட்டிலொரு பாகம் நகர்ந்தபோது பயணித்த தூரம், வட்டத்தின் $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$பாகம். இதைச் சுழற்சியாக எவ்வாறு கூறலாம்?

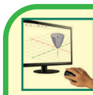
வட்டத்தின் $\frac{1}{8}$ பாகமென்றால் $45°$; அப்போது $180°$ சுழன்றபின், மேலும் $45°$ சுழன்று மொத்தம் $180° + 45° = 225°$ சுழன்றது எனக் கூறலாம்.



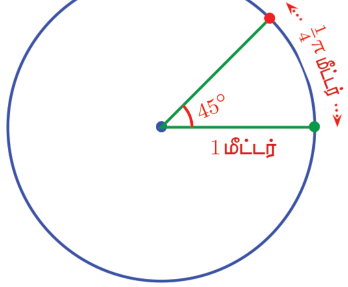


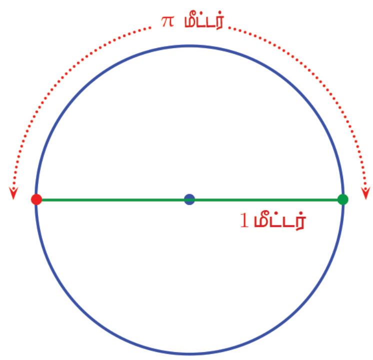
இவ்வாறு வட்டம் முழுவதும் சுற்றி, தொடங்கிய இடத்தை அடைவது வரையுள்ள பயணத்தின் ஒவ்வொரு நேரத்திலும் எவ்வளவு பயணம் செய்தது என்பதை, வட்டத்தின் பாகங்களாகவோ, சுழற்சியின் அளவான $360°$ வரை உள்ள கோணங்களாகவோ கூறலாம்.

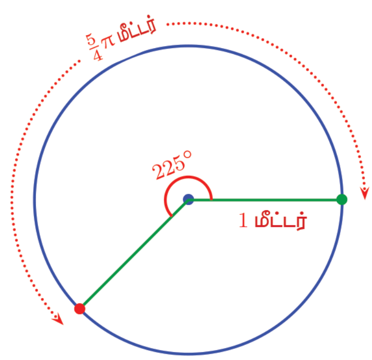
இதில், வட்டத்தின் ஆரம் 1 மீட்டர் என எடுத்தால், வட்டத்தின் சுற்றளவு 2π மீட்டர். அப்போது தூரங்களை எல்லாம் வட்டத்தின் பாகத்திற்குப் பதில் நீளமாகவே கூறலாம்.



ஜியோஜிப்ராவில் A ஐ மையமாகக் கொண்டு B வழியாகச் செல்லும் ஒரு வட்டம் வரையவும். ஒரு Angle Slider a உருவாக்கவும். *Angle with Given Size* கருவியைப் பயன்படுத்தி B, A ஆகிய புள்ளிகளில் வரிசையாகக் கிளிக் செய்யும் போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் கோண அளவு a என அளிக்கவும். வட்டத்தில் ஒரு புதிய புள்ளி B' கிடைக்கும். Slider ஐ மாற்றி B' வட்டத்தின் வழியாகச் சுழற்ற இயலும்.

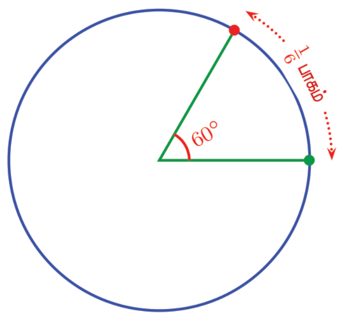


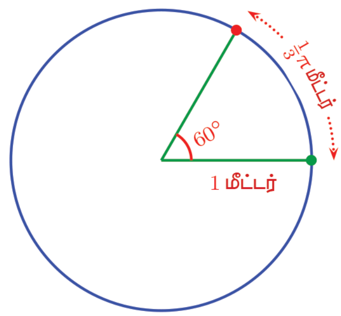




அவ்வாறு ஒவ்வொரு நேரத்திலும் எவ்வளவு தூரம் நகர்ந்தது என்பதை மீட்டராகவும் கூறலாம். அல்லது எவ்வளவு சுழன்றது என டிகிரியாகவும் கூறலாம். $60°$ சுழலும் போது, வட்டத்தின் வழியாக எத்தனை மீட்டர் நகரும்?

வட்டத்தின் எத்தனை பாகம் நகர்ந்தது என முதலில் பார்க்கலாம். $1°$ என்பது வட்டத்தின் $1/360$ பாகமல்லவா? அப்போது $60°$ என்பது, வட்டத்தின் $\frac{1}{360}\times 60=\frac{1}{6}$ பாகம்; வட்டத்தின் சுற்றளவு 2π மீட்டர் ஆனதால், இது $2\pi\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\pi$ மீட்டர் ஆகும்.

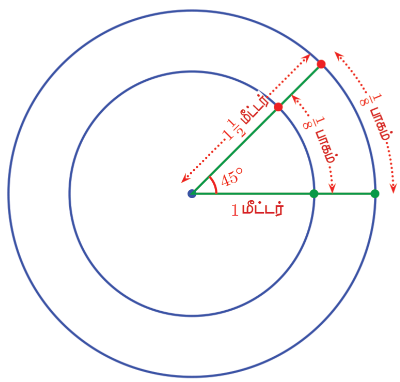


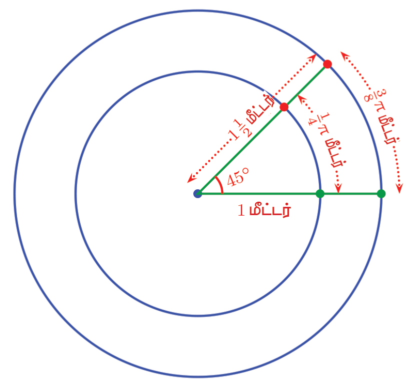


பொதுவாகக் கூறினால், $360°$ இன் எவ்வளவு பாகம் சுழன்றதோ 2π மீட்டரின் அவ்வளவு பாகமும் வட்டத்தின் வழியாக நகரும்.

வட்டத்தின் ஆரம் $1\frac{1}{2}$ மீட்டர் ஆனால் ? சுற்றளவு 3π மீட்டராகும். அப்போது சுழற்சியைப் பொறுத்து பயணித்த தூரம் கணக்கீடு செய்ய 3π மீட்டரின் பாகங்கள் எடுக்க வேண்டும். அதாவது, சுழல்கின்றதைப் பொறுத்து வட்ட பாகங்களுக்கு மாற்றமில்லை எனினும், நீளங்களின் மீட்டர் அளவில் மாற்றம் வரும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $45°$ சுழலும் போது இந்த வட்டத்தின் $\frac{1}{8}$ பாகம்தான் நகருகிறது. ஆனால் வட்டம் பெரியதானதால் நகர்ந்த தூரம் $\frac{3}{8}\pi$ ஆகும்.





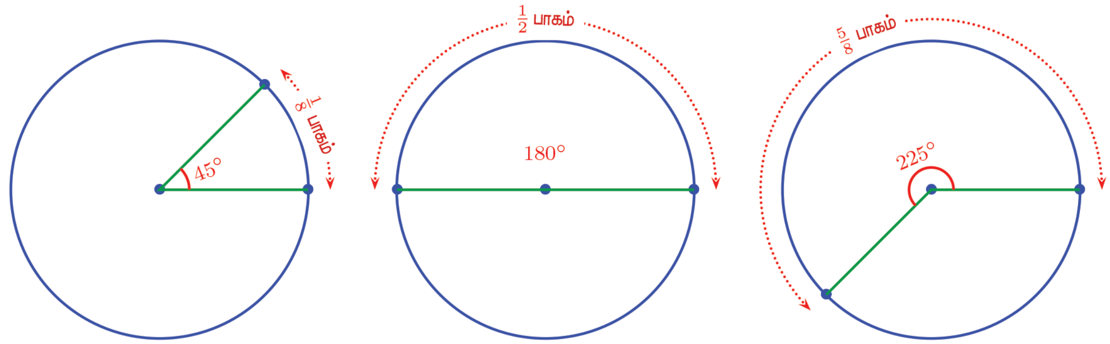
பொதுவாகக் கூறினால்,

ஆரம் r ஆன வட்டத்தின் வழியாக உள்ள பயணத்தில், மையத்திலிருந்து $x°$ சுழலும் போது வட்டத்தின் வழியாகப் பயணித்த தூரம் $2\pi r \times \frac{x}{360}$

இனி இந்தக் கருத்தைக் கணிதமொழியில் எவ்வாறு கூறலாம் எனப் பார்ப்போம். ஒரு வட்டத்தில் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள பகுதியை **வில் (arc)** என்று கூறுவர். ஒரு வில்லின் ஒரு முனையில் இருந்து மறுமுனையை அடைய வேண்டிய சுழற்சியின் அளவை, **வில்லின் மையக்கோணம்** (central angle) என்றும் கூறுவர்.

ஜியோஜிப்ராவில் A என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் B, C என இரண்டு புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். வட்டத்தை மறைத்து வைத்த பின் *Circular Arc* கருவியைப் பயன்படுத்தி A, B, C ஆகிய புள்ளிகளில் வரிசையாகக் கிளிக் செய்து வில் வரையவும். A, C, B என்ற வரிசையில் கிளிக் செய்தாலும் வில் கிடைக்கும். இவற்றுக்கிடையே என்ன வேறுபாடு எனப் பார்க்கவும். AB, AC என்னும் ஆரங்கள் வரைந்து *Angle tool* ஐப் பயன்படுத்தி அவற்றுக்கிடையில் உள்ள கோணத்தை (வில்லின் மையக் கோணம்) அடையாளப்படுத்த இயலும்.

அப்போது முன்பு பார்த்ததைப் பொறுத்து, வட்டத்தின் $\frac{1}{8}$ பாகம் நீளமுள்ள வில்லின் மையக் கோணம் $45°$, வட்டத்தின் $\frac{1}{2}$ பாகம் நீளமுள்ள வில்லின் மையக்கோணம் $180°$, வட்டத்தின் $\frac{5}{8}$ பாகம் நீளமுள்ள வில்லின் மையக் கோணம் $225°$, என்றெல்லாம் கூறலாம்.



வட்டத்தின் வழியாக உள்ள இயக்கத்தின் தத்துவத்தை வட்டத்தின் கணிதக் கருத்தாக்கலாம்.

ஆரம் r ஆன வட்டத்தில் மையக் கோணம் $x°$ எனில் வில்லின் நீளம் $2\pi r \times \frac{x}{360}$

வேறொருமுறையில் கூறினால்,

வில்லின் மையக்கோணம், $360°$ இன் எத்தனை பாகமோ, வட்டத்தின் சுற்றளவின் அத்தனை பாகமே வில்லின் நீளம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஆரம் 3 செண்டிமீட்டர் உள்ள வட்டத்தில், மையக் கோணம் $60°$ ஆன வில்லின் நீளம் எவ்வளவு?

இதை மனக்கணக்காகவும் செய்யலாம்: $60°$ என்பது $360°$ இன் $\frac{1}{6}$ பாகம் ஆனதால், வட்டத்தின் $\frac{1}{6}$ பாகமே வில். வட்டத்தின் சுற்றளவு, 6π செண்டிமீட்டர். இப்போது வில்லின் நீளம் π செண்டிமீட்டர்.

ஆரம் 2.5 செண்டிமீட்டர் உள்ள வட்டத்தில், மையக்கோணம் $50°$ ஆன வில்லின் நீளம் ?

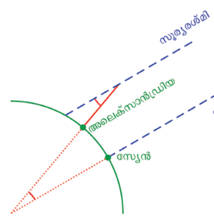
வட்டத்தின் சுற்றளவு 5π செண்டிமீட்டர், அதன் $\frac{50}{360}$ பாகமே வில்லின் நீளம் அதாவது,

$$5\pi \times \frac{50}{360} = \frac{25}{36}\pi \approx 2.2 \text{ செண்டிமீட்டர்.}$$

பூமியின் சுற்றளவு

BCE இரண்டாம் நூற்றாண்டில் கிரேக்கத்தில் வாழ்ந்த எரடோஸ்தீனஸ் தான் பூமியின் சுற்றளவை முதன்முதலாகக் கணக்கீடு செய்தார்.

வருடத்தில் ஒரு நாள் எகிப்தின் ஸ்தேன் பட்டணத்தில் நண்பகலில் சூரியன் தலைக்கு நேரே மேலிருக்கும் என்றும் அதனால் அந்த வேளையில் பொருட்களுக்கு நிழல் ஏற்படாது என்றும், எரடோஸ்தீனஸ் அறிந்தார். அவர் வேலை செய்து கொண்டிருந்த அலெக்சாண்டரியாவில் அதே



வேளையில், சூரியனின் கதிர்கள் இருக்கிறது எவ்வளவு சாய்வில் என, தரையில் செங்குத்தாக நடப்பட்டு இருந்த ஒரு கம்பியின் நிழலில் இருந்து அவர் கணக்கீடு செய்தார்.

சூரிய கதிர்கள் இணையானவை எனக் கருதினால் அலெக்ஸாண்ட்ரியாவையும் ஸ்தேனையும் இணைக்கும் பூமியில் உள்ள நாணின் மையக் கோணமும் இதுவே ஆகும். இரண்டு பட்டணங்களுக்குமிடையே உள்ள தூரமே நாணின் நீளம்.

அப்போது, அலெக்ஸாண்ட்ரியாவில் சூரிய கதிர்களின் சாய்வு $a°$ என்றும் ஸ்தேனுக்குள்ள தூரம் d என்றும் எடுத்தால் பூமியின் சுற்றளவு $\frac{360}{a} \times d$ என்றும் கணக்கிடலாம்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

ஆரம் 9 சென்டிமீட்டர் உள்ள ஓர் இரும்பு வட்டத்திலிருந்து மையக்கோணம் $30°$ உள்ள ஒரு துண்டு வெட்டி எடுக்கப்பட்டது. இதை வளைத்து ஒரு சிறிய வட்டம் உருவாக்கப்பட்டது. சிறிய வட்டத்தின் ஆரம் எவ்வளவு?

மையக்கோணம் $30°$ உள்ள வில்லின் நீளம், வட்டத்தின் சுற்றளவில் $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$; அதாவது, வெட்டி எடுத்த துண்டின் நீளம் $18\pi \times \frac{1}{12} = \frac{3}{2}\pi$ சென்டிமீட்டர். இதுவே சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவு . அப்போது அதன் ஆரம் $\frac{3}{2}\pi \div 2\pi = \frac{3}{4}$ சென்டிமீட்டர். மேலும் எளிதாக இதைக் கணக்கீடு செய்யலாம். பெரிய வட்டத்தின் சுற்றளவில் $\frac{1}{12}$ பாகமே சிறிய வட்டத்தின் சுற்றளவு. ஆரமும் சுற்றளவும் மாறுவது ஒரே அளவு வீதத்திலாகும். எனவே பெரிய வட்டத்தின் ஆரத்தின் $\frac{1}{12}$ பாகமே சிறிய வட்டத்தின் ஆரம். அதாவது,

$$9 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \text{ சென்டிமீட்டர்.}$$

வட்டத்தின் ஆரம் $\frac{12}{\pi}$ ஆக எடுத்து முன் செயல்பாடுகளில் கலந்துரையாடிய ஜியோஜிப்ரா ஆப்லெட் உருவாக்கவும். (ஆரம் 12/pi என்று அளித்தால் போதும்) இந்த வட்டத்தின் சுற்றளவு எவ்வளவு? Distance or Length கருவியைப் பயன்படுத்தி வில்லின் நீளத்தை அடையாளப்படுத்தவும். மையக் கோணம் $60°$ ஆகும்போது வில்லின் நீளம் எவ்வளவு ஆகும்? பரிசோதனை செய்து பார்க்கவும். நீளம் 2 உள்ள வில்லை எவ்வாறு வரையலாம். 3, 5, 15, 18, 19 ஆகிய நீளங்கள் உள்ள விற்கள் வரைந்து பார்க்கவும்.

(1) ஒரு வட்டத்தில், மையக்கோணம் $40°$ உள்ள ஒரு வில்லின் நீளம் 3π சென்டிமீட்டர். வட்டத்தின் சுற்றளவு எத்தனை சென்டிமீட்டர்? ஆரம் எவ்வளவு?

(2) ஒரு வட்டத்தில் மையக்கோணம் $25°$ உள்ள வில்லின் நீளம் 4 சென்டிமீட்டர்.

(i) இதே வட்டத்தில், மையக்கோணம் $75°$ ஆன வில்லின் நீளம் எவ்வளவு?

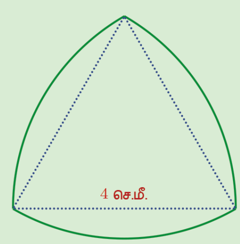
(ii) ஆரம் இதன் ஒன்றரை மடங்கான வட்டத்தில், மையக் கோணம் $75°$ ஆன வில்லின் நீளம் எவ்வளவு ?

(3) ஆரம் 3 சென்டிமீட்டர் உள்ள வளையலில் இருந்து ஒரு துண்டை வெட்டி எடுத்து ஆரம் $\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர் உள்ள மோதிரம் உருவாக்க வேண்டும்.

(i) வெட்டி எடுக்கின்ற துண்டின் மையக் கோணம் எத்தனை டிகிரியாக இருக்க வேண்டும்?

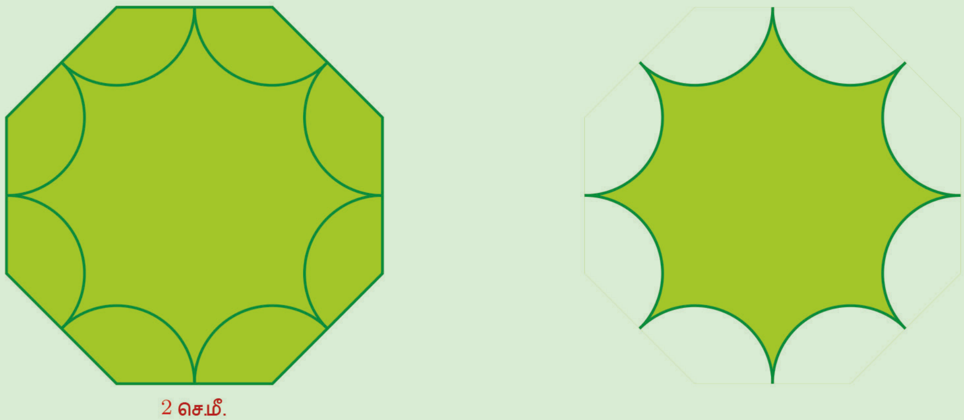
(ii) வளையலில் மீதியுள்ள பாகத்தைப் பயன்படுத்தி வேறொரு சிறிய வளையல் உருவாக்கப்பட்டது. அதன் ஆரம் எத்தனை சென்டிமீட்டர் ?

(4) ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு உச்சியையும் மையமாகக் கொண்டு மற்ற இரண்டு உச்சிகள் வழியாகக் கடந்து செல்லும் விற்கள் வரைந்த படம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



இதன் சுற்றளவு எத்தனை சென்டிமீட்டர் ?

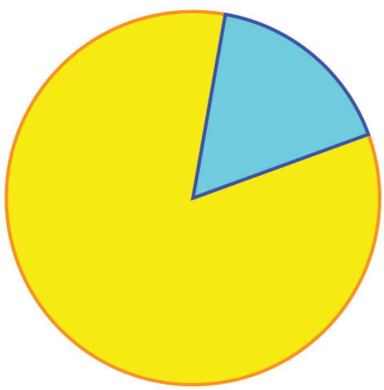
(5) ஓர் ஒழுங்கு எண் கோணத்தின் உச்சிகளை மையமாகக் கொண்டு விற்கள் வரைந்து வெட்டி எடுத்த வடிவம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



வெட்டி எடுத்த வடிவத்தின் சுற்றளவைக் கணக்கிடவும்.

கோணமும் பரப்பளவும்

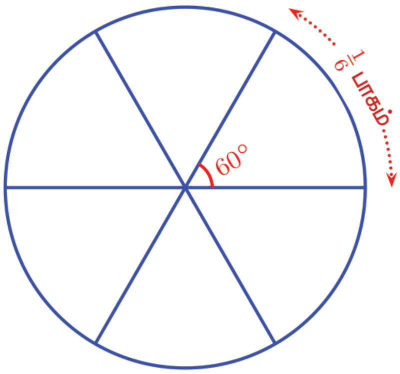
வட்டத்தின் பரிதியின் ஒரு பாகமே வில். ஒரு வில்லும் அதன் இரண்டு முனைகள் வழியாக உள்ள ஆரங்களும் சேர்ந்தால் வட்டப் பரப்பின் ஒரு பாகமாகும்.

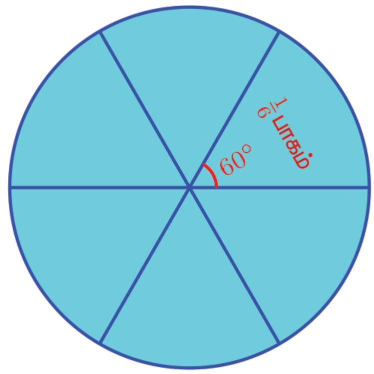


ஜியோஜிப்ரா வில் A யை மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைந்து அதில் B, C என்ற புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தவும். *Circular Sector* கருவியைப் பயன்படுத்தி A, B, C என்ற வரிசையில் புள்ளிகளில் கிளிக் செய்து வட்டப்பகுதியை வரையவும். *Area* கருவியைப் பயன்படுத்தி வட்டப் பகுதிக்குள் கிளிக் செய்தால் அதன் பரப்பளவைக் காண இயலும்.

இத்தகைய ஒரு வட்டப் பாகத்தை **வட்டப் பகுதி (sector)** என்று கூறுவர். இதில் வில்லின் மையக் கோணத்தை வட்டப்பகுதியின் மையக்கோணம் என்று கூறுவர்.

மையக்கோணம் மாறுவதைப் பொறுத்து, வில்லின் நீளம் மாறுவது போல, வட்டப் பகுதியின் பரப்பளவும் மாறும். இரண்டிற்கும் கணக்கு ஒன்றே ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, மையக்கோணம் $60°$ உள்ள வில் வட்டத்தின் சுற்றளவின் $\frac{1}{6}$ பாகமாகும் மையக்கோணம் $60°$ உள்ள வட்டப்பகுதி, வட்டத்தின் பரப்பளவின் $\frac{1}{6}$ பாகமாகும்.





இதுபோல, மையக் கோணம் 1° உள்ள வில் வட்டத்தின் சுற்றளவில் $\frac{1}{360}$ பாகமும், மையக்கோணம் 1° உள்ள வட்டப்பகுதி வட்டத்தின் பரப்பளவில் $\frac{1}{360}$ பாகமும் ஆகும்.

அப்போது, மையக் கோணத்திற்கும் வில்லின் நீளத்திற்கும் உள்ள தொடர்பு போல, மையக் கோணத்திற்கும் வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவிற்கும் உள்ள தொடர்பைப் பின்வருமாறு கூறலாம்.

வில்லின் மையக்கோணம் 360° இன் எவ்வளவு பாகமோ, வட்டத்தின் பரப்பளவில் அவ்வளவு பாகம் தான் வட்டப் பகுதியின் பரப்பளவு.

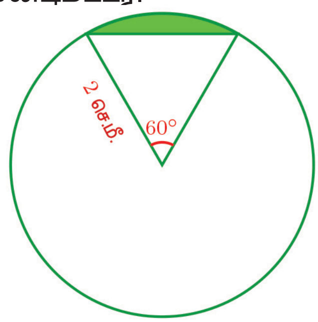
ஜியோஜிப்ராவில் A என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு $\sqrt{\frac{240}{\pi}}$ ஆரத்தில் ஒரு வட்டம் வரையவும். *Circle : Centre & Radius* கருவியைப் பயன்படுத்தி A யில் கிளிக் செய்து ஆரம் *sqrt* (*240/pi*) என்று கொடுத்தால் போதும். இந்த வட்டத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு? வட்டத்தில் வேறொரு புள்ளி B ஐ அடையாளப்படுத்தவும். முன்பு செய்தது போல ஒரு சிலேடர் உருவாக்கி வட்டம் வழியாகச் சுழற்றக் கூடிய ஒரு புள்ளி B' ஐ அடையாளப்படுத்தவும். *Sector* கருவியைப் பயன்படுத்தி A, B, B' ஆகிய புள்ளிகளில் கிளிக் செய்து வட்டப்பகுதி வரையவும். வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவை அடையாளப்படுத்தவும். மையக்கோணம் 60° ஆகும்போது வட்டப் பகுதியின் பரப்பளவு எவ்வளவு ஆகும்? பரப்பளவு 20, 44, 100, 120, 194 உள்ள வட்டப் பகுதிகளை வரைந்து பார்க்கவும். இவற்றின் மையக்கோணத்தைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி இவ்வாறும் கூறலாம்.

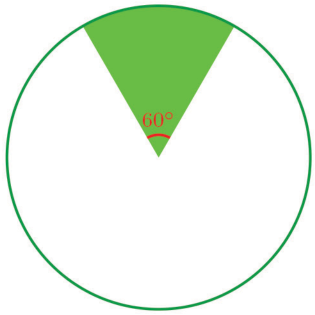
ஆரம் r ஆக உள்ள வட்டத்தில், மையக்கோணம் x° ஆக உள்ள வட்டப் பகுதியின் பரப்பளவு $\pi r^2 \times \frac{x}{360}$.

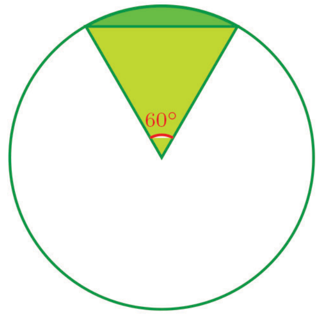
எடுத்துக்காட்டாக, வட்டத்தில் மையக் கோணம் 40° உள்ள வட்டப் பகுதியின் பரப்பளவு, வட்டத்தின் பரப்பளவில் $\frac{40}{360} = \frac{1}{9}$ பாகமாகும். வட்டத்தின் ஆரம் 3 சென்டிமீட்டர் எனில் பரப்பளவு 9π சதுரசென்டிமீட்டர். அப்போது வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவு π சதுரசென்டிமீட்டர்.

இனி இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும். படத்தில் பச்சை நிறம் உள்ள பகுதியின் பரப்பளவு எவ்வளவு?



வட்டப்பகுதியிலிருந்து ஒரு முக்கோணத்தை மாற்றினால் இந்தப் பாகம் கிடைக்கும் அல்லவா?





வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவு வட்டத்தின் பரப்பளவில் $\frac{1}{6}$ பாகம்.

அதாவது, $4\pi \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\pi$ சதுர செண்டிமீட்டர்.

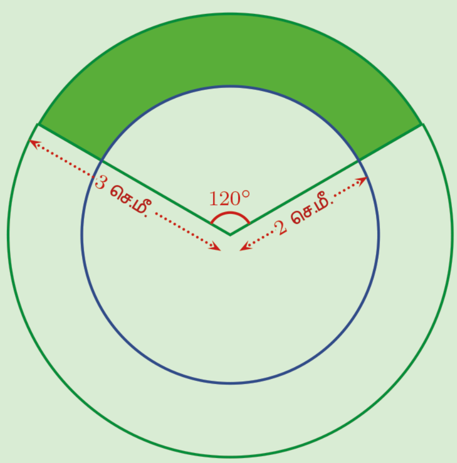
இது ஒரு சமபக்க முக்கோணம் ஆகும், (காரணம்?) அதன் பரப்பளவு $\sqrt{3}$ சதுர செண்டிமீட்டர்.

அப்போது முதல் படத்தில் உள்ள வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவு, $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$ சதுர செண்டிமீட்டர்.

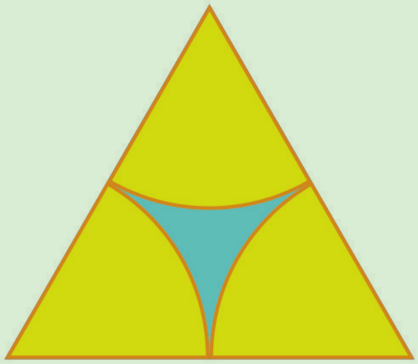
(1) (i) ஆரம் 3 செண்டிமீட்டர் உள்ள வட்டத்தில் மையக்கோணம் $120°$ உள்ள வட்டப் பகுதியின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

(ii) ஆரம் 6 செண்டிமீட்டர் உள்ள வட்டத்தில் மையக்கோணம் இதே அளவு உள்ள வட்டப்பகுதியின் பரப்பளவு ஆகுமா?

(2) கீழே தரப்பட்டுள்ள படத்தில் பச்சை நிறமுள்ள பகுதியின் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.



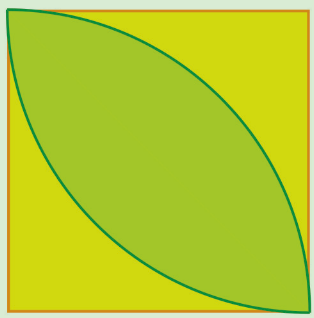
(3) படத்தில் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகளை மையமாகவும் பக்கங்களின் பாதியை ஆரமாகவும் கொண்டு விற்கள் வரையப்பட்டுள்ளன.



4 செ.மீ.

படத்தில் நீலநிற பாகத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுங்கள்.

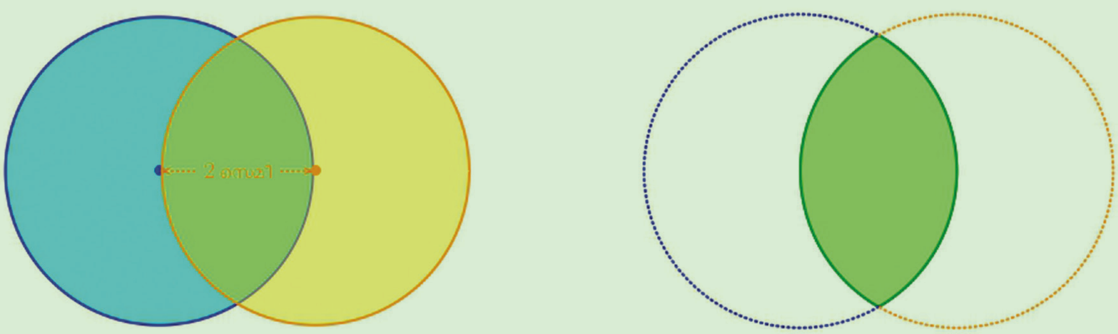
(4) படத்தில், ஒரு சதுரத்தின் இரண்டு எதிர் உச்சிகளை மையமாகக் கொண்டு, மற்ற இரண்டு உச்சிகள் வழிச் செல்லும் விற்கள் வரையப்பட்டுள்ளன.



4 செ.மீ.

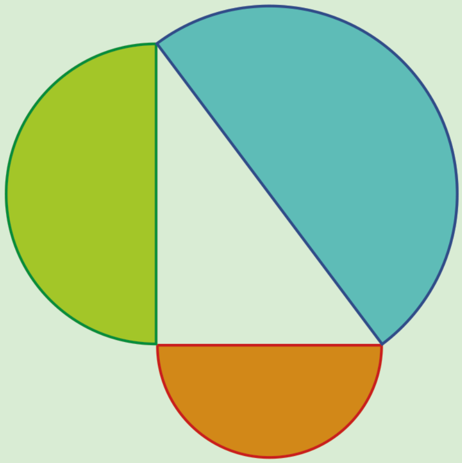
படத்தில் பச்சை நிறமுள்ள பாகத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

(5) ஒரே ஆரம் உள்ள இரண்டு வட்டங்களில் ஒவ்வொன்றும் மற்ற வட்டத்தின் மையம் வழியாகச் செல்லும் படம் கீழே வரையப்பட்டுள்ளது.



இரண்டு வட்டங்களிலும் அமையும் பகுதியின் பரப்பளவைக் கணக்கிடவும்.

(6) படத்தில் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களை விட்டமாகக் கொண்டு அரை வட்டங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன.



மிகப்பெரிய அரை வட்டத்தின் பரப்பளவு மற்ற இரண்டு அரை வட்டங்களின் பரப்பளவுகளின் தொகை என நிரூபிக்கவும்.

12

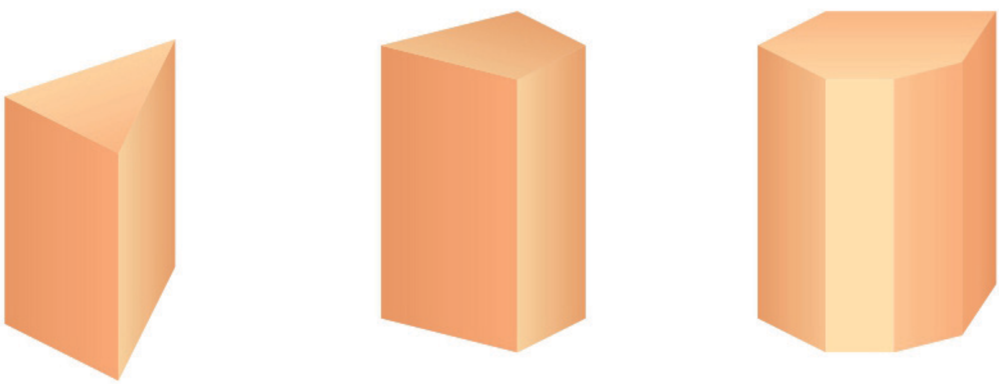
பட்டகங்கள்

அடிப்பக்கம் பலவகை

செவ்வக கட்டைகளைப் பற்றியும், அவற்றின் கனஅளவுகளைப் பற்றியும் ஆறாம் வகுப்பில் படித்தோமல்லவா.

இதன் வெளிப்பகுதி பல செவ்வகங்கள் சேர்ந்ததாகும். அதாவது மேற்பரப்பு: கீழேயும் மேலேயும் ஒரேபோலுள்ள இரண்டு செவ்வகங்கள், அதுபோல இடது பக்கமும் வலது பக்கமும் இரண்டு செவ்வகங்கள், முன்னிலும் பின்னிலும் மூன்றாவது ஜோடி ; மொத்தம் ஆறு செவ்வகங்கள்.

இந்தப் படத்தைப் பாருங்கள்:



பரப்பும், உயரமும் உள்ள இவை அனைத்தும் **முப்பரிமாண வடிவங்கள் (three-dimensional shapes)** அல்லது **கனவடிவங்கள் (solids)** எனக் கூறப்படுகின்றன. இங்கே காட்டப்பட்டுள்ள கன வடிவங்களுக்கெல்லாம் பொதுவானச் சில சிறப்புத் தன்மைகள் உள்ளன.

முதல் வடிவத்தின் மேற்பரப்பு, கீழேயும் மேலேயும் ஒரே போலுள்ள இரண்டு முக்கோணங்களும், பக்கங்களில் மூன்று செவ்வகங்களும் சேர்ந்ததாகும். இரண்டாவது வடிவத்தில் இரண்டு நாற்கரங்களும், நான்கு செவ்வகங்களும், மூன்றாவது வடிவத்தில் இரண்டு அறுகோணங்களும், ஆறு செவ்வகங்களும் சேர்ந்ததாகும்.

பொதுவாகக் கூறினால், ஒரே போல் உள்ள இரண்டு பலகோணங்கள், அவற்றின் சமமான பக்கங்கள் எதிர்பக்கங்களாக ஒரே உயரத்தில் உள்ள செவ்வகங்கள் எல்லாம் சேர்ந்ததே இவற்றின் மேற்பரப்பு ஆகும். இவ்வகை வடிவங்களின் பொதுவான பெயர், **பலகோணப்பட்டகம் (prism)** எனப்படும்.

ஒரு பட்டகத்தில் கீழேயும் மேலேயும் உள்ள பலகோணங்களையும் பக்கவாட்டில் உள்ள செவ்வகங்களையும் அதன் முகங்கள் **(faces)** எனக் கூறலாம். கீழேயும் மேலேயும் உள்ள பல கோணங்களை அடிப்பக்க முகங்கள் எனவும் செவ்வகங்களைப் பக்க முகங்கள் எனவும் கூறலாம். முகங்களின் பக்கங்களைப் பட்டகத்தின் விளிம்புகள் **(edges)** எனக் கூறலாம்.

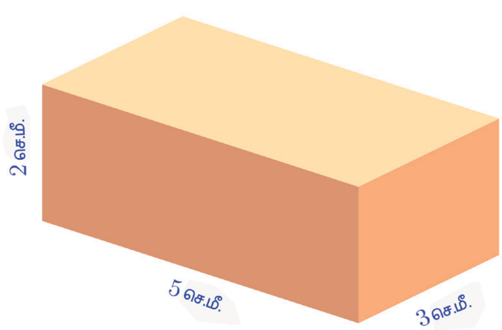
அடிப்பக்க முகங்களின் வடிவங்களின் அடிப்படையில் பட்டகங்களை, முக்கோணப்பட்டகம், நாற்கரப் பட்டகம் என வகைப்படுத்தலாம். மேலே உள்ள படத்தில் காண்பது, ஒரு முக்கோணப் பட்டகமும், ஒரு நாற்கரப் பட்டகமும், ஒரு அறுகோணப் பட்டகமும் ஆகும். இதுவரை கன செவ்வகக்கட்டை எனக் கூறப்பட்ட வடிவத்தைச் செவ்வகப்பட்டகம் எனக் கூறலாம்.

கட்டியான அட்டையில் இருந்து பலகோணங்களையும் செவ்வகங்களையும் வெட்டி எடுத்து உட்பகுதி காலியான (உள்ளீடற்ற) பலவகை பட்டகங்களை உருவாக்கிப் பாருங்கள்.

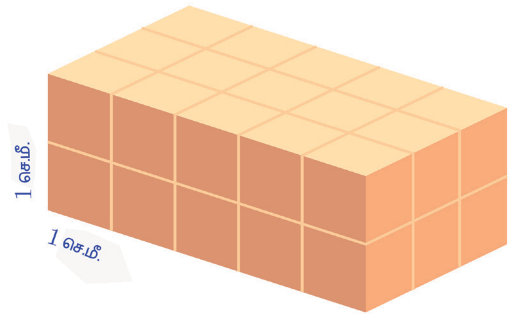
ஜியோஜிப்ராவில் பல கோண பட்டகங்கள் எவ்வாறு உருவாக்கலாம் எனப் பார்ப்போம். பட்டகத்தின் அடிப்பக்க முகம் தான் முதலில் உருவாக்க வேண்டும். Polygon கருவியைப் பயன்படுத்தி ஒரு பலகோணம் வரைந்தால் போதும். பின்னர் 3D Graphics திறக்கவும். (View → 3D Graphics) நாம் உருவாக்கிய பலகோணம் அங்கேயும் பார்க்க முடியும். 3D Graphics இல் கிளிக் செய்யும்போது வடிவியல் வடிவங்கள் உருவாக்க தேவையான கருவிகளை மேலே காணலாம். இதிலிருந்து Extrude to Prism என்ற கருவியை எடுத்து 3D Graphics ல் காண்கின்ற பல கோணத்தில் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கும் திரையில் பட்டகத்திற்கு தேவையான உயரம் அளித்து ok என்பதில் கிளிக் செய்து பட்டகம் வரையலாம். பெயர்கள் எழுதி காண்பிப்பது தவிர்க்க வேண்டும் எனில் பட்டகம் உருவாக்க தொடங்குவதற்கு முன்னே Options → Labeling → No new objects தேர்வு செய்தால் போதும்.

கனஅளவு

ஆறாம் வகுப்பில் செவ்வகப் பட்டகங்களின் (கன செவ்வகக்கட்டைகளின்) கனஅளவு கண்டுபிடித்தது நினைவில் இருக்கிறதா? எடுத்துக்காட்டாக, இந்தச் செவ்வகப்பட்டகத்தைப் பாருங்கள்.



கீழே காண்பது போல இதன் விளிம்புகளெல்லாம் ஒரு சென்டிமீட்டர் ஆன கன சதுரக் கட்டைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

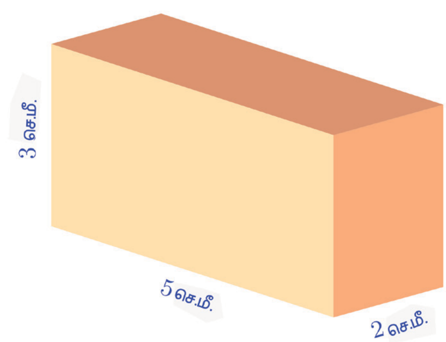


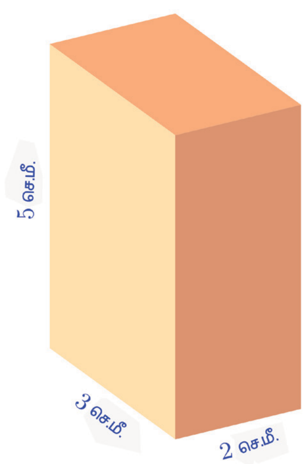
இதில் $5 \times 3 \times 2 = 30$ சிறிய கன சதுரக்கட்டைகள் உள்ளன. ஆதலால் செவ்வகப்பட்டகத்தின் கன அளவு 30 கன சென்டிமீட்டர் ஆகும்.

ஏழாம் வகுப்பில் **பின்ன எண்கள்** என்ற பாடத்தில் **பின்ன பரப்பு** என்ற பகுதியில் பார்த்தது போல, செவ்வகப் பட்டகத்தின் நீளம், அகலம், உயரம் எல்லாம் பின்ன எண்களானாலும் கன அளவு, அவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஆகும் எனக் காணலாம். **விகிதமுறா எண் பெருக்கல்** என்ற பாடத்தில் **பெருக்கல்** என்ற பகுதியில் செவ்வகத்தின் பரப்பளவை விளக்கிக் கூறியது போல, செவ்வகப்பட்டகத்தின் அளவுகள் விகிதமுறா எண்களானாலும், கனஅளவு அவற்றின் பெருக்கல் பலன் எனக் காணலாம்.

செவ்வகப்பட்டகத்தின் கனஅளவை, வேறொரு முறையிலும் கூறலாம். மேலேயுள்ள படத்தில், செவ்வகப்பட்டகத்தின் அடிப்பக்கம் ஒரு செவ்வகமாகும். பக்கங்களின் நீளங்கள் 5 சென்டிமீட்டர், 3சென்டிமீட்டர் ஆகும். இதன் பரப்பளவு 5×3 சதுர சென்டிமீட்டர். எனவே இந்தப் பரப்பளவும், பட்டகத்தின் உயரமான 2 சென்டிமீட்டரும் பெருக்கிக் கிடைப்பதே கனஅளவு ஆகும்.

செவ்வகப்பட்டகத்தின் எல்லா முகங்களும் செவ்வகமானதால், எந்த முகத்தையும் அடிப்பக்கமாக எடுக்கலாம்.

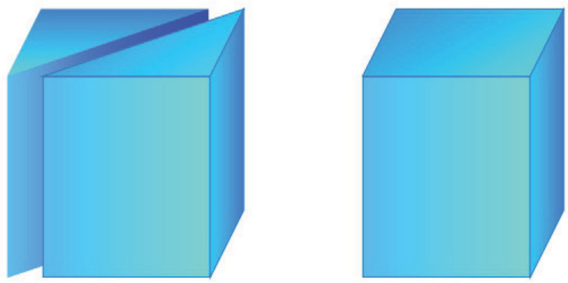




எவ்வாறாயினும், அடிப்பக்கத்தின் பரப்பளவு, உயரம் இவற்றின் பெருக்கல் பலனே கனஅளவு ஆகும்.

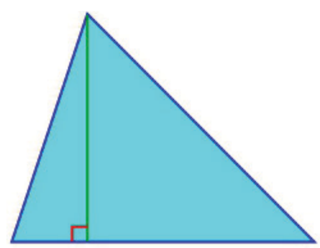
எந்தப் பட்டகத்தினுடையவும் கனஅளவை இவ்வாறு கணக்கிடலாமா எனப் பார்ப்போம். முதலில் ஒரு செங்கோண முக்கோணப் பட்டகத்தை எடுப்போம்.

இது போன்ற ஒரு செங்கோண முக்கோணப் பட்டகத்தையும் கூடச் சேர்த்து வைத்து ஒரு செவ்வகப் பட்டகம் உருவாக்கலாமா?

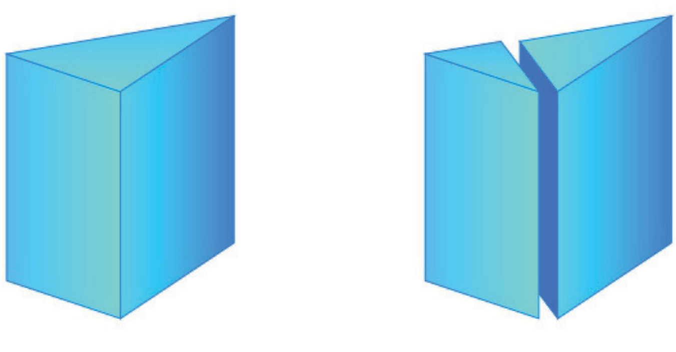


அடிப்பக்கத்தில் உள்ள செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவு a என எடுத்தால், இவ்வாறான இரண்டு முக்கோணங்கள் சேர்த்து உருவாக்கிய செவ்வகப் பட்டகத்தின் **அடிப்பக்க பரப்பு** (அடிப்பக்கப்பரப்பளவு என்பதை இவ்வாறு சுருக்கிக் கூறலாம்) $2a$; முக்கோண பட்டகத்தின் உயரமே செவ்வகப் பட்டகத்தின் உயரம் ஆகும். அதனை h என எடுத்தால் செவ்வகப் பட்டகத்தின் கன அளவு $2ah$. இது ஒரே போலுள்ள இரண்டு செங்கோண முக்கோணப் பட்டகங்கள் சேர்ந்துக் கிடைத்த கன அளவாகும். அப்போது ஒரு செங்கோண முக்கோணப் பட்டகத்தின் கனஅளவு ah அதாவது, அடிப்பக்க பரப்பினுடையவும் உயரத்தினுடையவும் பெருக்கற்பலன் .

இனி அடிப்பக்கம் செங்கோணம் அல்லாத முக்கோணம் ஆனால்? எந்த முக்கோணத்தினுடையவும் ஓர் உச்சியில் இருந்து செங்குத்துக்கோடு வரைந்து இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்கள் உருவாக்கலாம்.



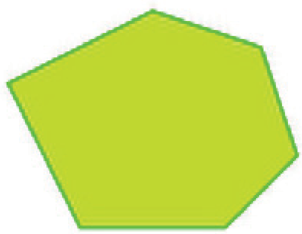
அப்போது அடிப்பக்கம் செங்கோணம் அல்லாத முக்கோணத்தைக் கொண்ட பட்டகத்தையும் கீழே உள்ள படத்தில் உள்ளது போல அடிப்பக்கம் வழியாக நெடுக்காக வெட்டினால் இரண்டு செங்கோண முக்கோண பட்டகங்கள் கிடைக்கும்.

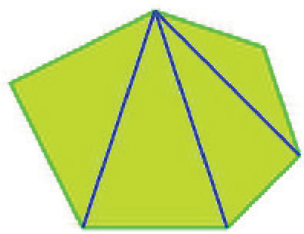


இரண்டாக வெட்டிய செங்கோண முக்கோண பட்டங்களின் கனஅளவுகளைக் கூட்டினால், முதல் பட்டகத்தின் கனஅளவு கிடைக்கும். வெட்டுவதற்கு முன்னே உள்ள பட்டகத்தின் அடிபக்கப்பரப்பளவு a, வெட்டிய பிறகு உள்ள பட்டகங்களின் அடிப்பக்க பரப்பளவுகள் b, c எனவும் எடுத்தால் $a = b + c$. எல்லா பட்டகங்களுக்கும் ஒரே உயரமாகும். இதை h என எடுத்தால் செங்கோண முக்கோண பட்டகங்களின் கன அளவுகளின் தொகை $bh + ch = (b + c)h = ah$. இது முதல் முக்கோண பட்டகத்தின் அடிப்பக்கப் பரப்பளவை உயரத்தால் பெருக்கி கிடைத்ததாகும் அல்லவா.

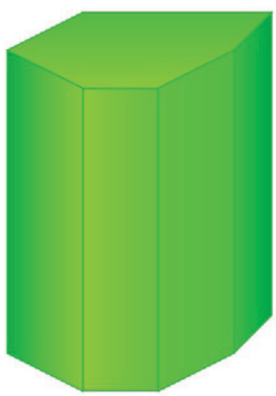
அவ்வாறு எந்த முக்கோண பட்டகத்தினுடையவும் கனஅளவு, அடிப்பக்க பரப்பளவு, உயரம் இவற்றின் பெருக்கல்பலன் எனக் கிடைத்தது.

எந்தப் பலகோணத்திலும் ஒரு குறிப்பிட்ட உச்சியை மற்ற அனைத்து உச்சிகளுடன் இணைத்து, முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கலாம். பலகோணத்தின் பரப்பளவு, இவ்வாறு பிரித்து உருவாக்கிய முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் தொகை ஆகும்.





அப்போது எந்தப் பலகோணப்பட்டகத்தையும், முக்கோணப்பட்டகங்களாகப் பிரிக்கலாம்.



பட்டகத்தின் அடிப்பக்கப் பரப்பு a எனவும், பட்டகத்தின் உயரம் h எனவும் எடுக்கலாம். அடிப்பக்கத்தை n முக்கோணங்களாக்கி வெட்டினால், படத்தில் பார்த்தது போல பட்டகத்தை n முக்கோண பட்டகங்களாக வெட்டலாம். இவற்றின் அடிப்பக்க பரப்பு $b_1, b_2, ..., b_n$ என எடுத்தால், கன அளவு $b_1h, b_2h, ..., b_nh$ ஆகும். அப்போது பலகோண பட்டகத்தின் கனஅளவு

$$b_1h + b_2h + . . . + b_nh = (b_1 + b_2 + . . . + b_n)h = ah$$

ஜியோஜிப்ராவில் Polygon கருவியைப் பயன்படுத்தி ஒரு பலகோணம் வரைக. மூலைகளின் எண்ணிக்கை ஆறு அல்லது ஏழு ஆகலாம் Area கருவியைப் பயன்படுத்தி இதற்கு உள்ளே கிளிக் செய்தால் பரப்பளவைக் காண முடியும். இந்தப் பலகோணம் கிடைக்கக்கூடிய முறையில் விருப்பமுள்ள உயரத்தில் ஒரு பட்டகம் வரைக. Volume கருவியைப் பயன்படுத்தி இந்தப் பட்டகத்தில் கிளிக் செய்தால் அதன் கனஅளவைக் காண முடியும். பட்டகத்தின் அடிப்பக்கப் பரப்பு, உயரம், கனஅளவு இவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? பட்டகத்தின் மூலைகளின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும். ஒரு மூலை அதன் அடுத்த மூலையின் மேலே வரும்விதம் ஒழுங்குபடுத்தினால் பல கோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை குறைக்க முடியும்.

அதாவது,

எந்தப் பலகோணப் பட்டகத்தினுடையவும் கனஅளவு, அடிப்பக்கப் பரப்பளவு, உயரம் இவற்றின் பெருக்கற் பலனாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, இந்தக் கணக்கைப் பாருங்கள்:

ஒரு பட்டகத்தின் அடிப்பக்கம் சமபக்க முக்கோணமாகும். அதன் பக்கங்களின் நீளம் 4 சென்டிமீட்டர், பட்டகத்தின் உயரம் 10 சென்டிமீட்டர். இதன் கனஅளவு எவ்வளவு?

சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு, பக்கத்தின் பாதி நீளத்தின் வர்க்கத்தின் $\sqrt{3}$ மடங்காகும் என **விகிதமுறா எண் பெருக்கல்** என்ற பாடத்தில் கற்றிருக்கின்றோம் அல்லவா?

இந்தக் கணக்கில் பட்டகத்தின் அடிப்பக்கமான சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் 4 சென்டிமீட்டர்.

அப்போது அடிப்பக்க பரப்பளவு,

$2^2 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ சதுர சென்டிமீட்டர்.

உயரம் 10 செண்டிமீட்டர் ஆனபடியால், கன அளவு

$4\sqrt{3} \times 10 = 40\sqrt{3}$ கன சென்டிமீட்டர்.

ஜியோஜிப்ராவைப் பயன்படுத்தி கீழே உள்ள செயல்பாடுகளைச் செய்து பாருங்கள்: அடிப்பக்க பரப்பளவு 15 உம் உயரம் 5 உம் ஆன ஒரு சமபக்க முக்கோணப் பட்டகம் உருவாக்கவும் (ஒழுங்கு பலகோணங்கள் உருவாக்க Regular Polygon கருவியைப் பயன்படுத்தலாம்) இந்தப் பட்டகத்தின் கன அளவு எவ்வளவு? விளிம்புகளின் நீளம் சமமான ஒரு முக்கோணப் பட்டகத்தின் கன அளவு $16\sqrt{3}$ ஆகும். இந்தப் பட்டகத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவு? இவ்வாறான ஒரு பட்டகம் உருவாக்கவும். விளிம்புகள் எல்லாம் சமமான ஒரு அறுகோணத்தின் கன அளவு $12\sqrt{3}$ இப்படிப்பட்ட ஒரு பட்டகத்தை உருவாக்கவும்.

(1) ஒரு சமபக்க முக்கோணப் பட்டகத்தின் அடிப்பக்கத்தின் சுற்றளவு 18 செண்டிமீட்டர், உயரம் 5 செண்டிமீட்டர், அதன் கனஅளவு காண்க ?

(2) ஒரு முக்கோணப் பட்டகத்தின் அடிப்பக்க விளிம்புகள் 13 செண்டிமீட்டர், 14 செண்டிமீட்டர், 15 செண்டிமீட்டர் என்பதாகும். பட்டகத்தின் உயரம் 20 செண்டிமீட்டர், அதன் கனஅளவு என்ன?

(3) மழைநீர் சேமிப்பதற்காகப் பள்ளிக்கூடத்தில் சமபக்க அறுகோண வடிவத்தில் ஒரு குழி உள்ளது. இதன் ஒரு பக்கம் 2 மீட்டர், குழியின் ஆழம் 3 மீட்டர். இதில் ஒரு மீட்டர் உயரத்திற்குத் தண்ணீர் உள்ளது. அது எத்தனை லிட்டர் ? இந்தக் குழியை நிரப்ப இன்னும் எத்தனை லிட்டர் தண்ணீர் தேவை?

(4) சதுரப் பட்டக வடிவில் உள்ள ஒரு பாத்திரத்தின் அடிபக்க விளிம்புகள் 16 செண்டிமீட்டர் ஆகும். பாத்திரத்தில் 10 செண்டிமீட்டர் உயரத்தில் தண்ணீர் உள்ளது. இதில், விளிம்புகள் எல்லாம் 8 செண்டிமீட்டர் ஆன கன சதுரக் கட்டையை அமிழ்த்தினால், தண்ணீரின் அளவு எத்தனை செண்டிமீட்டர் உயரும்?

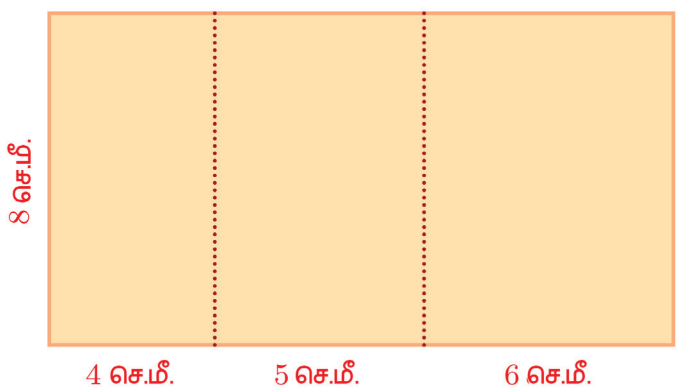
(5) உலோகத்தால் உருவாக்கப்பட்ட ஒரு செவ்வகப் பட்டகத்தின் விளிம்புகள் 6 செண்டிமீட்டர், 9 செண்டிமீட்டர், 15 செண்டிமீட்டர் ஆகும். இதை உருக்கி, விளிம்பு 3 செண்டிமீட்டர் ஆன எத்தனை கன சதுர கட்டைகளை உருவாக்கலாம்?

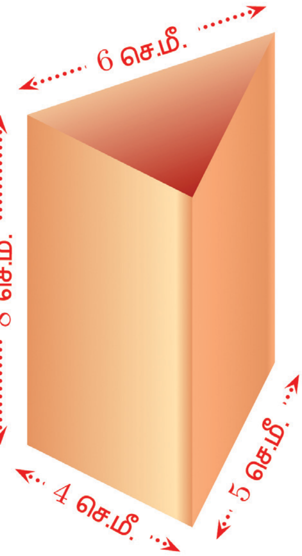
(6) மரத்தால் உருவாக்கிய ஒரு சதுர பட்டகத்தின் அடிப்பக்க விளிம்புகள் 6 சென்டி மீட்டர், உயரம் 10 செண்டிமீட்டர் ஆகும். அதன் கனஅளவு எவ்வளவு? இதிலிருந்து செதுக்கி எடுக்கக்கூடிய மிகப்பெரிய முக்கோணப் பட்டகத்தின் கனஅளவு எவ்வளவு?

பரப்பளவு

கட்டிக் காகிதத்தில் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள அளவுகளில் ஒரு குழல் உருவாக்க வேண்டும்.

மூன்று செவ்வகங்கள் வெட்டி எடுத்து ஒட்டி உருவாக்கலாம்.
ஒரு செவ்வகத்தை மடக்கி ஒட்டியும் உருவாக்கலாம்.





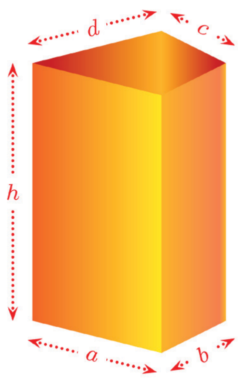
இதனை உருவாக்க எத்தனை சதுர சென்டிமீட்டர் காகிதம் தேவை? மேலேயுள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பளவு

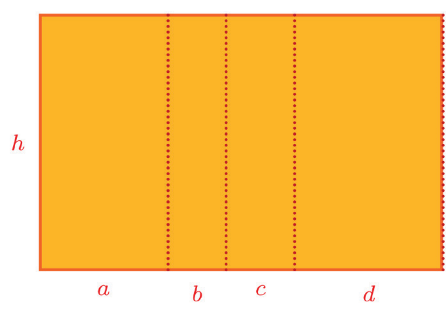
$(4 + 5 + 6) \times 8 = 15 \times 8 = 120$ சதுர சென்டிமீட்டர்.

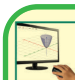
முக்கோண பட்டகத்தின் பக்க முகங்களின் பரப்பளவுகளைக் கூட்டியது தானே இது? பொதுவாக ஒரு பட்டகத்தின் எல்லா பக்க முகங்களுடைய பரப்பளவுகளின் தொகையை **பக்கமுகப்பரப்பளவு (lateral surface area)** எனக் கூறுவர். இதைச் சுருக்கிப் **பக்கமுகப்பரப்பு** எனவும் கூறலாம்.

படத்திலுள்ள முக்கோணப் பட்டகத்தின் பக்கமுகப்பரப்பு கணக்கிடுவதற்கு, 15 ஐ 8 ஆல் பெருக்கினோம். இதில் அடிப்பக்கமாகிய முக்கோணத்தின் சுற்றளவு $15 = 4 + 5 + 6$ உம், பட்டகத்தின் உயரம் 8 உம் அல்லவா? அப்போது, இந்தப் பட்டகத்தின் பக்கமுகப்பரப்பு, அடிப்பக்கச் சுற்றளவினுடையவும் உயரத்தினுடையவும் பெருக்கல் பலனாகும். இன்னும் சற்று சிந்தித்தால், எந்த முக்கோணப் பட்டகத்தினுடையவும் பக்கமுகப்பரப்பு இவ்வாறு கணக்கிடலாம் எனக் காணலாம்.

அடிப்பக்கம் முக்கோணத்திற்குப் பதில் நாற்கரம் ஆனால்?







கட்டிக்காகிதத்தில் உருவாக்கிய ஒரு பலகோண பட்டகத்தைப் பிரித்து நிமிர்த்து வைத்த ஒரு வடிவத்தை நினைத்துப் பாருங்கள். இந்த வடிவத்தை மடக்கி ஒட்டி மீண்டும் ஒரு பட்டகம் உருவாக்கலாம். ஜியோஜிப்ராவில் உருவாக்கிய ஒரு பலகோணப் பட்டகத்தை இப்படி செய்வதற்கு *Net* கருவியைப் பயன்படுத்திப் பட்டகத்தில் கிளிக் செய்தால் போதும். பல கோணப் பட்டகங்கள் உருவாக்கி அவற்றின் *Net* ஐ உருவாக்கிப் பாருங்கள்.

இந்த நாற்கரப் பட்டகத்தின் பக்கமுகப்பரப்பளவு, நிமிர்த்து வைத்தால் கிடைக்கின்ற செவ்வகத்தின் பரப்பளவே ஆகும். அது $(a+b+c+d)h$ ஆகும். அதாவது அடிப்பக்க நாற்கரத்தின் சுற்றளவினையும், பட்டகத்தின் உயரத்தினையும் பெருக்கினால் கிடைக்கும் பெருக்கல் பலனாகும்.

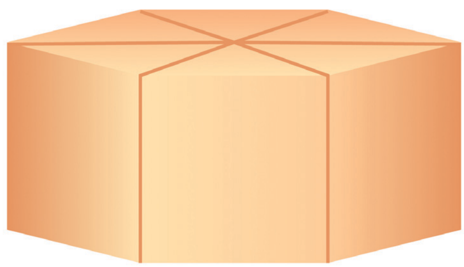
இதைப் போல எந்தப் பலகோணப் பட்டகத்தினுடையவும் பக்க முகப்பரப்பளவைக் கணக்கிடலாம்.

எந்தப் பலகோணப் பட்டத்தினுடையவும் பக்கமுகப் பரப்பளவு, அடிப்பக்கச் சுற்றளவையும் உயரத்தையும் பெருக்கினால் கிடைப்பதாகும்.

மூடிய பட்டகமெனில் மொத்தப் பரப்பளவைக் கணக்கிடுவதற்குப் பக்க முகப்பரப்பளவுடன் அடிப்பக்கப்பரப்பளவின் இரண்டு மடங்கைக் கூட்டினால் போதும்.

ஒரு கணக்கைப் பார்ப்போம்:

மரத்தினால் உருவாக்கிய ஒரு சமபக்க முக்கோணப் பட்டகத்தின் பக்க முகப்பரப்பு 48 சதுர சென்டிமீட்டர், அதன் உயரம் 4 சென்டிமீட்டர் ஆகும். இவ்வாறான ஆறு பட்டகங்கள் சேர்த்து வைத்து ஓர் அறுகோணப் பட்டகம் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது.



இது முழுவதும் வண்ணக் காகிதங்களால் ஒட்டி அழகுபடுத்த எத்தனை சதுர சென்டிமீட்டர் காகிதம் தேவை?

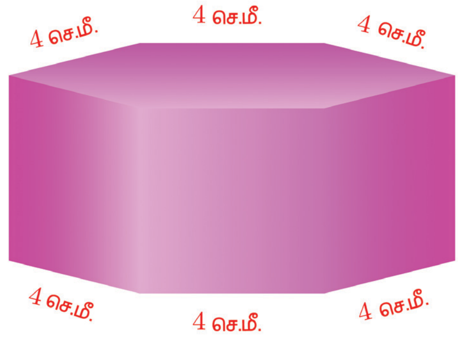
அறுகோணப் பட்டகத்தின் மொத்த பரப்பளவு தான் இங்கு தேவை. அதற்குப் பக்க முகப்பரப்பளவுகளையும், அடிப்பக்க பரப்பளவுகளையும் கூட்ட வேண்டும்.

பக்க முகப்பரப்பளவு கணக்கிடுவதற்கு, அறுகோணவடிவ அடிப்பக்கச் சுற்றளவு தேவை. அதற்காக, முக்கோணப்பட்டகங்களின் அடிப்பக்கங்களின் அளவுகளைக் கணக்கிட வேண்டும்.

எந்தப் பட்டகத்தினுடையவும் பக்க முகப்பரப்பளவை உயரத்தால் வகுத்தால், அடிப்பக்கச் சுற்றளவு கிடைக்கும். அப்போது, கணக்கில் கூறப்பட்ட முக்கோணப் பட்டகத்தின் அடிப்பக்கச் சுற்றளவு $48 \div 4 = 12$ சென்டிமீட்டர்.

இதன் அடிப்பக்கம் ஒரு சமபக்க முக்கோணம் ஆனதினால் இந்த முக்கோணத்தின் சுற்றளவு என்பது அதன் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தின் மூன்று மடங்காகும். ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $12 \div 3 = 4$ சென்டிமீட்டர்.

கணக்கில் அறுகோணப்பட்டகத்தின் அடிப்பக்கச் சுற்றளவை இனி கணக்கிடலாமல்லவா.



பக்கம் 4 சென்டிமீட்டரான அறுகோணத்தின் சுற்றளவு $6 \times 4 = 24$ சென்டிமீட்டர். பட்டகத்தின் உயரம் 4 சென்டிமீட்டர் ஆனதால், அதன் பக்க முகப்பரப்பு $24 \times 4 = 96$ சதுர சென்டிமீட்டர்.

இனி இரண்டு அடிப்பக்கங்களின் பரப்பளவுகள் கூட்ட வேண்டும். அடிப்பக்கத்தில் உள்ள ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$$2^2 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ சதுர சென்டிமீட்டர்.}$$

இதுபோன்ற, ஆறு முக்கோணங்கள் சேர்ந்த அறுகோணத்தின் பரப்பளவு $6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ சதுர சென்டிமீட்டர்.

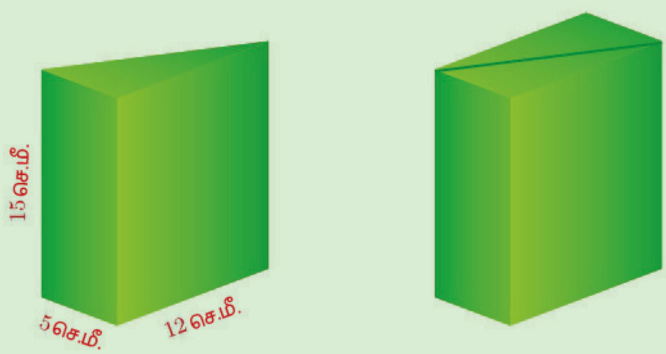
அப்போது அறுகோணப் பட்டகத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு

$$96 + (2 \times 24\sqrt{3}) = 96 + 48\sqrt{3} = 48(2+\sqrt{3}) \text{ சதுரசென்டிமீட்டர்}$$

இந்த எண் 179 யைவிட சற்று அதிகம் எனக் கால்குலேட்டரைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடலாம். எப்படியானாலும் 180 சதுர சென்டிமீட்டர் காகிதம் போதும்.

(1) ஒரு சமபக்க முக்கோணப் பட்டகத்தின் அடிப்பக்க சுற்றளவு 12 சென்டிமீட்டர், உயரம் 5 சென்டிமீட்டர் ஆகும். அதன் மொத்த பரப்பளவைக் காண்க.

(2) படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது போல, அடிப்பக்கம் செங்கோண முக்கோணமான இரண்டு பட்டகங்கள் சேர்த்து வைத்த ஒரு செவ்வகப் பட்டகம் உருவாக்கப்பட்டது.



இந்தச் செவ்வகப் பட்டகத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு எவ்வளவு?

(3) ஒரு முக்கோணப் பட்டகத்தின் அடிப்பக்க விளிம்புகள் 4 சென்டிமீட்டர், 13 சென்டிமீட்டர், 15 சென்டிமீட்டர், உயரம் 25 சென்டிமீட்டர் ஆகும். பக்க முகப்பரப்பளவையும் மொத்த பரப்பளவையும் காண்க.

(4) ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்க முகப்பரப்பளவு 120 சதுர செண்டிமீட்டர் ஆகும்.

   (i) இவ்வகை இரண்டு பட்டகங்கள் சேர்த்து உருவாக்கிய சாய்வு சதுரப்பட்டகத்தின் (சமபக்க இணைகரப் பட்டகம்) பக்க முகப்பரப்பளவு எவ்வளவு?

   (ii) இவ்வகை மூன்று பட்டகங்கள் சேர்த்து வைத்து உருவாக்கிய இரு சமபக்க சரிவக பட்டகத்தின் பக்கமுகப் பரப்பளவு எவ்வளவு?

   (iii) இவ்வகை ஆறுபட்டகங்கள் சேர்த்து வைத்து உருவாக்கிய ஒழுங்கு அறுகோண பட்டகத்தின் பக்க முகப்பரப்பளவு எவ்வளவு?

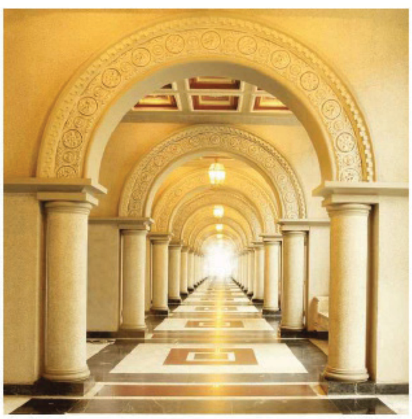
(5) பக்கங்கள் எல்லாம் 10 செண்டிமீட்டர் ஆன 6 சதுரத் தகடுகளைச் சேர்த்து வைத்து ஒரு சதுர பட்டகம் உருவாக்க வேண்டும்.

   (i) இந்தப் பட்டகத்தின் மொத்த பக்க முகப் பரப்பளவு எவ்வளவு?

   (ii) இதில் எத்தனை லிட்டர் தண்ணீர் நிரப்பலாம்?

உருளை

இரு அற்றங்களில் சமமான பலகோணங்களும், பக்கங்களில் செவ்வகங்களுமான முப்பரிமாண வடிவங்களே பலகோணப் பட்டகங்கள். அற்றங்களில் வட்டங்களும், பக்கங்கள் செவ்வகங்களாக மடங்காமல் உருளுவதற்கான வளைவுடைய பட்டகங்களும் உள்ளன. கடினமானதாகவும் உட்பகுதி காலியானதுமான (உள்ளீடற்ற) இதுபோன்ற உருவங்களை ஏராளம் பார்த்திருப்பீர்கள் அல்லவா?

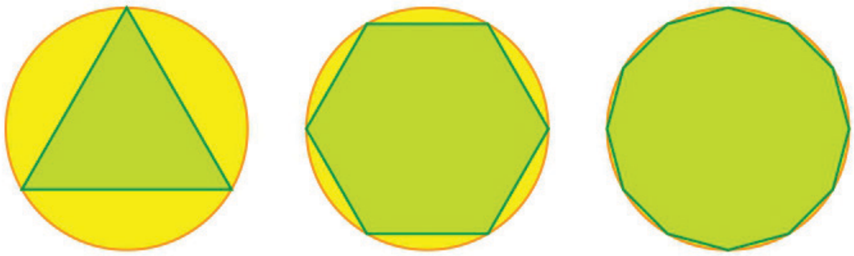


இதுபோன்ற கனவடிவங்களை உருளை (cylinder) எனக் கூறுவர்.

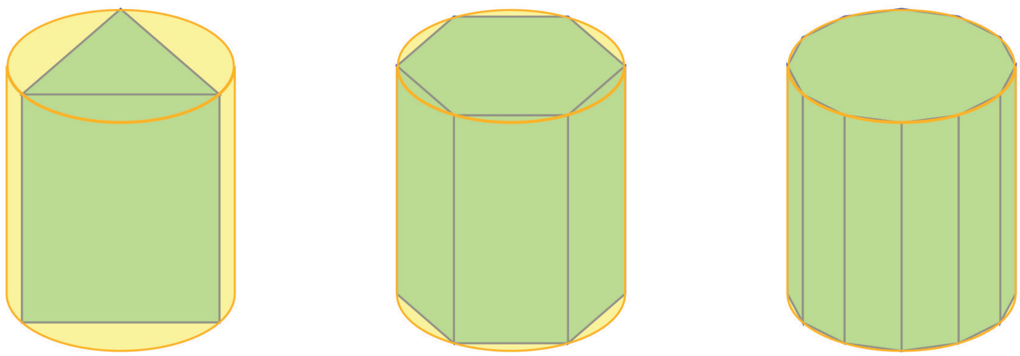
உருளையின் கனஅளவு, அடிப்பக்க பரப்பளவினுடையவும் உயரத்தினுடையவும் பெருக்கல் பலன்தானா?

ஜியோஜிப்ராவில் பலகோணப் பட்டகங்கள் உருவாக்கியது போல உருளைகளையும் ஜியோஜிப்ராவில் உருவாக்கலாம். *Graphics* இல் ஒரு வட்டம் வரைந்து *3D Graphics* லிருந்து *Extrude to Prism* கருவியைப் பயன்படுத்தி வட்டத்தில் கிளிக் செய்து, உயரம் எவ்வளவு எனக் கொடுத்தால் போதும்.

வட்டத்தின் பரப்பளவைக் கணக்கீடு செய்தது, அதனுள் வரையப்பட்டுள்ள ஒழுங்கு பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிப்பதனால் அல்லவா.

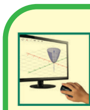


இதுபோல உருளையின் கன அளவைக் கணக்கிடுவதற்கு, அதனுள் பல ஒழுங்கு பலகோணப் பட்டகங்களை கற்பனை செய்து பார்க்கவும்.



இந்தப் பலகோணப் பட்டகங்களின் கன அளவு, உருளையின் கன அளவோடு நெருங்கி நெருங்கி வரும் அல்லவா?

இனி இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி உருளையின் கன அளவு, அடிப்பக்க பரப்பளவு, உயரம் இவற்றின் பெருக்கல் பலனாகும் எனக் காணலாம்.



ஜியோஜிப்ராவில் A என்ற புள்ளியை மையமாக்கி 3 அலகு ஆறத்தால் ஒரு வட்டம் வரைக. வட்டத்தில் ஒரு புள்ளி B ஐ அடையாளப்படுத்தவும். $Max\text{-}200$ ஆகுமாறு ஒரு சிலைடர் n உருவாக்கவும். *Angle with Given Size* ஐ பயன்படுத்தி B யிலும் தொடர்ந்து A யிலும் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கின்ற திரையில் கோண அளவு $(360/n)^{\circ}$ எனக் கொடுக்கவும். ஒரு புதிய புள்ளி B' கிடைக்கும் *Regular Polygon* ஐ பயன்படுத்தி B யிலும் B' லும் கிளிக் செய்யும்போது கிடைக்கின்ற திரையில் n எனக் குறிக்கவும் n பக்கங்கள் உள்ள ஒரு ஒழுங்கு பல கோணப் பட்டகத்திற்கு உள்ளே கிடைக்கும். இது அடிப்பக்கமாகக் கூடிய அளவில் ஒரு பலகோணப் பட்டகம் உருவாக்குக. n பெரிதாக்கிப் பார்க்கவும். பலகோணப் பட்டகத்திற்கு என்ன நடக்கும்.

- பலகோண பட்டகத்தின் அடிப்பக்க பரப்பளவு $p_1, p_2, p_3, \ldots$ என எடுக்கலாம்.
- உருளையின் அடிப்பக்கப் பரப்பளவு c என எடுக்கலாம். அப்போது $p_1, p_2, p_3, \ldots$ என்ற எண்கள் c என்ற எண்ணோடு நெருங்கி நெருங்கி வரும்.
- உருளையின் உயரம் h என எடுக்கலாம்.
- $p_1h, p_2h, p_3h, \ldots$ என்ற எண்கள் ch என்ற எண்ணுடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும்.

* $p_1h, p_2h, p_3h, \ldots$ என்ற எண்கள் பலகோண பட்டகத்தின் கனஅளவு ஆகும்.

* பலகோணப் பட்டகங்களின் கனஅளவுகள், உருளையின் கனஅளவுடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும்.

- உருளையின் கனஅளவு v என எடுக்கலாம்.
- $p_1h, p_2h, p_3h, \ldots$ என்ற எண்கள் v என்ற எண்ணுடன் நெருங்கி நெருங்கி வரும்.

மேலே எழுதப்பட்டுள்ளவற்றில், சிவப்பு கட்டத்தில் அடையாளப்படுத்திய இரண்டு கருத்துக்களிலிருந்து

$$v = ch$$

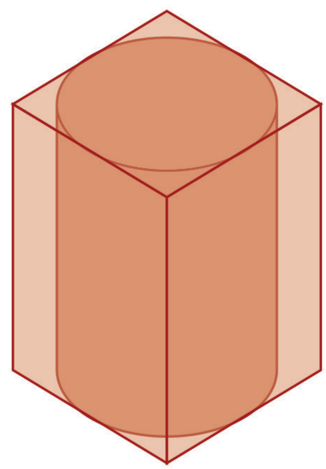
எனக் காணலாம் அல்லவா. அதாவது,

உருளையின் கனஅளவு, அடிப்பக்க பரப்பளவினுடையவும், உயரத்தினுடையவும் பெருக்கல் பலனாகும்.

வட்டத்தின் பரப்பளவு, ஆரத்தின் வர்க்கத்தை π கொண்டு பெருக்கினதல்லவா. அப்போது, ஓர் உருளையின் அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 3 சென்டிமீட்டர், உயரம் 5 சென்டிமீட்டர் எனில் அதன் கனஅளவு $\pi \times 3^2 \times 5 = 45\pi$ கன சென்டிமீட்டர்.

வேறொரு கணக்கு,

சதுரப் பட்டக வடிவிலுள்ள ஒரு மரத்துண்டின் அடிப்பக்கத்தின் பக்கங்களுக்கெல்லாம் 10 சென்டிமீட்டர் நீளம் உண்டு. பட்டகத்திற்கு 20 சென்டிமீட்டர் உயரமுண்டு. இதிலிருந்து செதுக்கி எடுக்கக்கூடிய மிகப்பெரிய உருளையின் கனஅளவு எவ்வளவு?



சதுரப் பட்டகத்தின் அடிப்பக்கத்திற்குள் வரையக்கூடிய மிகப்பெரிய வட்டமே மிகப்பெரிய உருளையின் அடிப்பக்கம்; உயரம், சதுரப் பட்டகத்தின் உயரமே ஆகும்.

அதாவது, உருளையின் அடிப்பக்கத்தின் விட்டம், சதுர பட்டகத்தின் அடிப்பக்கத்தின் ஒரு பக்கத்திற்குச் சமமாகும்.

அப்போது, அடிப்பக்க வட்டத்தின் ஆரம் 5 சென்டிமீட்டர், அடிப்பக்க பரப்பளவு 25π சதுர சென்டிமீட்டர், பட்டகத்தின் உயரம் 20 சென்டிமீட்டர் எனில் கனஅளவு $25\pi \times 20 = 500\pi$ கன சென்டிமீட்டர்.

(1) அடிப்பக்க விட்டம் 1 மீட்டரும், உயரம் 2 மீட்டருமான உருளை வடிவத்தில் உள்ள தண்ணீர்த் தொட்டியில் எத்தனை லிட்டர் தண்ணீர் நிரப்பலாம்?

(2) இரும்பால் உருவாக்கப்பட்ட ஓர் உருளையின் அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 15 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 32 சென்டி மீட்டருமாகும். இதை உருக்கி, அடிப்பக்க ஆரம் 20 சென்டிமீட்டர் ஆன உருளை உருவாக்கினால், இந்த உருளையின் உயரம் எவ்வளவு?

(3) ஒரே உயரமுள்ள இரண்டு உருளைகளின் அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 3 : 4 என்ற விகிதத்திலாகும். இவற்றின் கனஅளவுகளுக்கிடையே உள்ள விகிதம் என்ன?

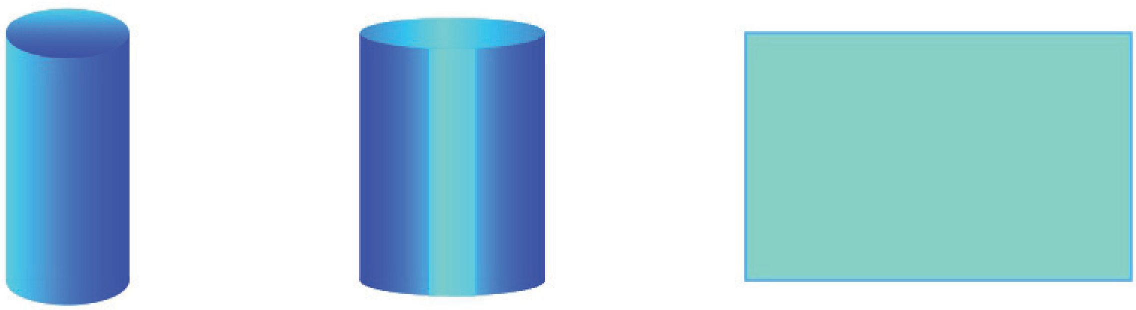
(4) இரண்டு உருளைகளின் அடிப்பக்க ஆரங்கள் 2 : 3 என்ற விகிதத்திலும், உயரம் 5 : 4 என்ற விகிதத்திலும் ஆகும்.

 (i) இவற்றின் கனஅளவுகளுக்கிடையே உள்ள விகிதம் என்ன?

 (ii) சிறிய உருளையின் கனஅளவு 720 கன சென்டிமீட்டர். பெரிய உருளையின் கன அளவு என்ன?

வளைதளம்

செவ்வக வடிவில் உள்ள காகிதத்தையோ, தகடையோ வளைத்து, உருளை வடிவில் உள்ள குழல் உருவாக்கலாம். மாறாக, உட்பகுதிகாலியான (உள்ளீடற்ற) இரண்டு பக்கமும் திறந்த ஓர் உருளையை வெட்டி, அதன் வளைவை நிமிர்த்தினால் ஒரு செவ்வகமாகும்.



இந்தச் செவ்வகத்தின் பரப்பளவை உருளையின் **வளைதளப் பரப்பளவு** (Curred surface area) எனக் கூறலாம். இதனைச் சுருக்கி **வளைபரப்பு** எனவும் கூறலாம்.

இந்தச் செவ்வகத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம், உருளையின் உயரமே ஆகும். அடுத்த பக்கம், அடிப்பக்க வட்டத்தை நிமிர்த்து எடுத்ததாகும். அதாவது, அதன் நீளம், வட்டத்தின் சுற்றளவாகும். இந்த நீளங்களின் பெருக்கல் பலன் **வளைபரப்பு**.

உருளையின் வளைதளப்பரப்பளவு, பாதச் சுற்றளவினுடையவும், உயரத்தினுடையவும் பெருக்கல் பலனாகும்.

வட்டத்தின் சுற்றளவு, விட்டத்தின் π மடங்கல்லவா. அப்போது, ஓர் உருளையின் அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் 3 சென்டிமீட்டர், உயரம் 5 சென்டிமீட்டர் எனில் அதன் வளைதளப் பரப்பளவு $\pi \times 6 \times 5 = 30\pi$ சதுர சென்டிமீட்டர்.

இது கன உருளையெனில், மொத்த பரப்பளவு கிடைக்க இரண்டு அற்றங்களிலும் உள்ள வட்டங்களின் பரப்பளவுகளையும் கூட கூட்ட வேண்டும். அதாவது, $30\pi + (2 \times 3^2 \times \pi) = 48\pi$ சதுர சென்டிமீட்டர்.

(1) ஒரு பள்ளிக்கூட கட்டிடத்தில் உருளை வடிவத்தில் உள்ள 12 தூண்கள் உள்ளன. ஒவ்வொன்றினுடையவும் அடிப்பக்க விட்டம் $\frac{1}{2}$ மீட்டரும் உயரம் 4 மீட்டருமாகும்.

(i) ஒரு தூணின் வளைதளப் பரப்பளவு எவ்வளவு?

(ii) எல்லா தூண்களுக்கும் வண்ணம் தீட்ட சதுர மீட்டருக்கு 80 ரூபாய் வீதம் எத்தனை ரூபாய் செலவாகும்?

(2) 1.20 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு ரோளரின் விட்டம் 80 சென்டிமீட்டர் ஆகும்.

இது ஒரு தடவை சுற்றும் போது, சமன்படுத்தப்பட்ட இடத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

(3) ஓர் உருளையின் வளைதளப்பரப்பளவும், அடிப்பக்கபரப்பளவும் சமமாகும். அடிப்பக்கத்தின் ஆரம், உருளையின் உயரம் இவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

(4) நீளம் 48 சென்டிமீட்டர், அகலம் 25 சென்டிமீட்டர் உள்ள செவ்வகத் தகடினை வளைத்து, 25 சென்டிமீட்டர் உயரமுள்ள குழலை உருவாக்கி, சரியான அளவில் வெட்டி எடுத்த வட்டங்களைக் கொண்டு இதன் இரு அற்றங்களையும் அடைத்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த உருளையின் வளைதள பரப்பு எவ்வளவு?

24 சென்டிமீட்டர் நீளமும் 18 சென்டிமீட்டர் அகலமும் உள்ள கட்டி காகிதத்தை நீளத்தில் மடக்கி சமபக்க முக்கோணப் பட்டகம், சதுரப்பட்டகம், ஒழுங்கு அறுகோணப்பட்டகம், ஒழுங்கு எண்கோணப்பட்டகம், உருளை என்பவற்றை உருவாக்கப்படுகிறது. இந்தப் பல கோண பட்டகங்களின் பக்கமுகப்பரப்பளவும், உருளையின் வளைதளப்பரப்பளவும் சமமாக இருக்கும் அல்லவா? ஒவ்வொன்றினுடையவும் கன அளவோ? இதிலுள்ள சிறப்பம்சம் என்ன?

இதே அளவிலுள்ள கட்டிக்காகிதத்தை அகலத்தில் மடக்கி மேலே கூறப்பட்ட ஒழுங்கு பல கோணங்களையும், உருளையையும் உருவாக்கினால்? இவ்விரண்டுவகைப் பட்டகங்களுக்கும் இடையேயுள்ள பக்கமுகப் பரப்பளவு, வளைதளப்பரப்பளவு, கனஅளவு என்பவற்றின் ஒற்றுமை வேற்றுமைகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

13

பல்லுறுப்புப் படங்கள்

ஒன்றாம்படி பல்லுறுப்புகள்

அளவுகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகளை இயற்கணித சமன்பாடாக எழுதுகின்ற முறையை ஆறாம் வகுப்பு முதல் கற்றிருக்கிறோம் அல்லவா? இவற்றை எண்களைப் பயன்படுத்தி செய்கின்ற செயல்களாகப் **பல்லுறுப்புகள்** என்ற பாடத்தில் கண்டோம். இவ்வாறு பார்க்கும்போது, ஒவ்வொரு பல்லுறுப்பும் ஒரு குறிப்பிட்ட விதியின் படி எண்களை மாற்றுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$p(x) = 2x + 1$$

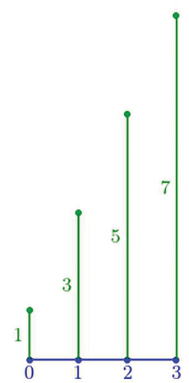
என்ற ஒருபடி பல்லுறுப்பை எடுப்போம். எந்த எண்ணையும் இரண்டால் பெருக்கி, 1 ஐக் கூட்டியதை அல்லவா இங்கே எழுதப்பட்டுள்ளது. அப்போது x ஆக $0, 1, 2, 3$ என்ற எண்களை எடுத்தால் $p(x)$ ஆக $1, 3, 5, 7$ என்ற எண்கள் கிடைக்கும். (ஒற்றை எண்களின் பொது வடிவம் ஏழாம் வகுப்பில் கற்றது நினைவில் இருக்கிறதா?).

x மாறுகின்ற அடிப்படையில் $p(x)$ மாறுவதை இப்படி ஓர் அட்டவணையில் காட்டலாம்.

x	0	1	2	3
$p(x)$	1	3	5	7

ஐந்தாம் வகுப்பிலும் ஆறாம் வகுப்பிலும் உள்ள புள்ளிவிவரக் கணக்குகளில் செய்தது போல இந்த அட்டவணையைப் படம் ஆக்கினால்?

முதலில் கிடைமட்டமாக ஒரு கோடு வரைக. அதில் சம இடைவெளியில் $0, 1, 2, 3$ என்றிவ்வாறு அடையாளப்படுத்தவும். இனி இந்த இடங்களில் இருந்து கிடைமட்டமான கோட்டில் எடுத்த இடைவெளியைப் பயன்படுத்தி, $p(0), p(1), p(2), p(3)$ என்ற உயரங்களில் செங்குத்துக் கோடுகள் வரையலாம்.

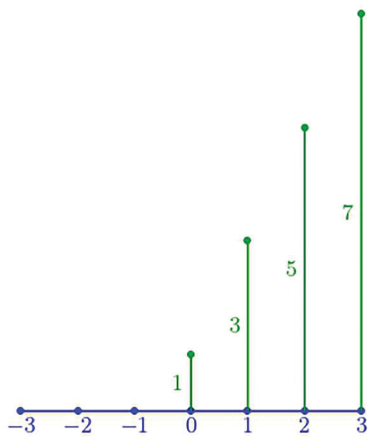


x ஆக குறை எண்களையும் எடுக்கலாம் அல்லவா? அப்போது அட்டவணையை இடப்பக்கமும் நீட்டலாம்.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	-5	-3	-1	1	3	5	7

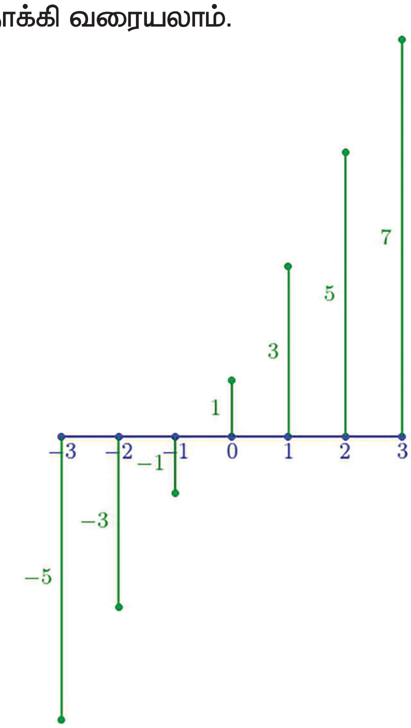
இந்த எண்களையும் அடையாளப்படுத்தி படம் வரைவது எவ்வாறு?

மெய்யெண்கள் என்ற பாடத்தில் செய்தது போல, கிடைமட்டமான கோட்டை இடது பக்கம் நீட்டி x ஆக எடுக்கப்பட்ட குறை எண்களை அடையாளப்படுத்தவும்.



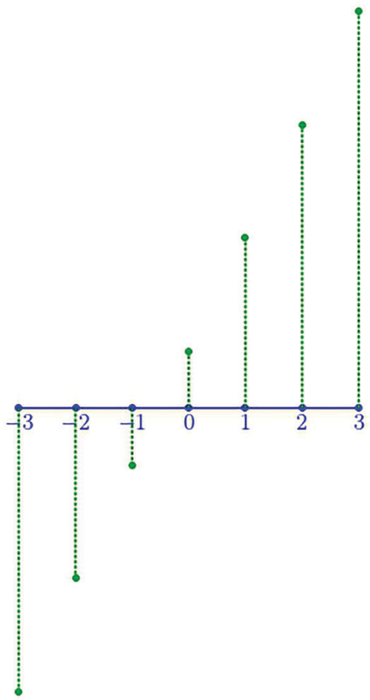
இனி குறை எண்களான $p(x)$ ஐ அடையாளப்படுத்துவது எவ்வாறு?

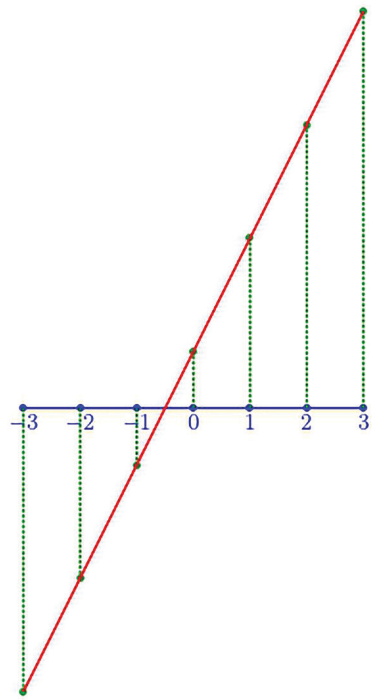
மிகை எண்களான $p(x)$ ஐ குறிக்க செங்குத்துக்கோடுகள் வரைந்தது மேல்நோக்கி ஆனபடியால், குறை எண்களான $p(x)$ ஐ கீழ்நோக்கி வரையலாம்.



இந்தச் செங்குத்துக் கோடுகளின் அற்றங்களை மட்டும் பார்க்கவும்:

அவையெல்லாம் ஒரே கோட்டிலா? அளவுகோலை வைத்து வரைந்து பார்க்கவும்.



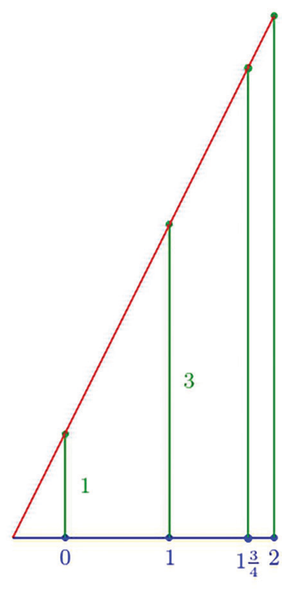


x ஆக மற்ற எண்களை எடுத்தாலும், $p(x)$ என்ற உயரத்தில் (அல்லது கீழாக) வரைகின்ற செங்குத்துக் கோடுகளின் அற்றங்கள் இந்தக் கோட்டில் தான் இருக்குமா?

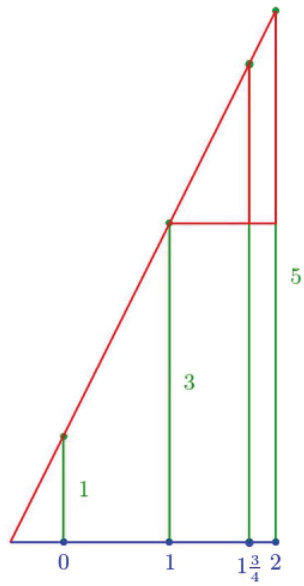
எடுத்துக்காட்டாக, $x = 1\frac{3}{4}$ என எடுத்தால்?

$$p\left(1\frac{3}{4}\right) = \left(2 \times 1\frac{3}{4}\right) + 1 = 4\frac{1}{2}$$

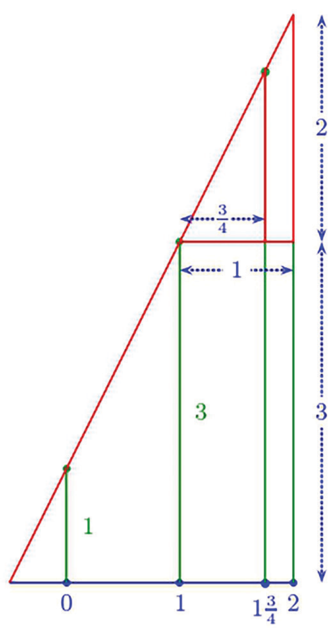
கிடைமட்டமாக உள்ள கோட்டில் $1\frac{3}{4}$ ஐ அடையாளப்படுத்தி, செங்குத்துக்கோடு வரைந்து சிவப்புக் கோட்டுடன் இணைக்கவும். இந்தச் செங்குத்துக் கோட்டின் உயரம் $4\frac{1}{2}$ தானா எனப் பரிசோதிக்க வேண்டும். அதைக் காண்பதற்குப் படத்தில் தேவையுள்ள பகுதியை மட்டும், எண்களுக்கிடையே உள்ள அகலத்தை அதிகரித்து வரைந்ததைப் பாருங்கள்.



கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் உள்ளது போல ஒரு செங்குத்துக் கோடு கூட வரைந்தால் படத்தின் மேல் பகுதியில் (சிவப்பு நிறத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள) இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்கள் கிடைக்கும் அல்லவா?

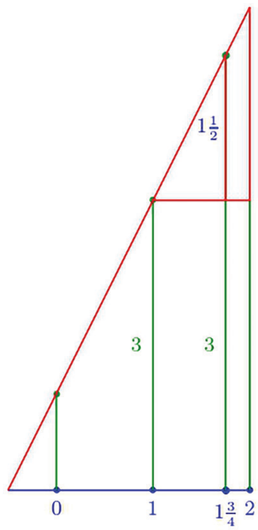


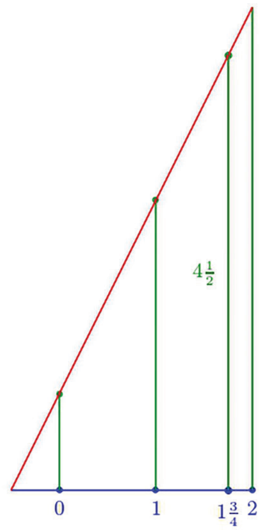
இந்த முக்கோணங்களுக்கு ஒரே கோணங்கள் அல்லவா. (ஏன்?) அதனால், இவற்றின் பக்கங்களின் மாற்றம் ஒரே அளவுவீதத்திலாகும் (**வடிவொத்த முக்கோணங்கள்** என்ற பாடம்) இரண்டு முக்கோணங்களுடையவும் சில பக்கங்களின் நீளத்தை எளிதாகக் காணலாம்.



பெரிய முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தின் $\frac{3}{4}$ பாகமே, சிறிய முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம். அப்பொழுது சிறிய முக்கோணத்தின் செங்குத்து பக்கமும், பெரிய முக்கோணத்தின் செங்குத்து பக்கத்தின் $\frac{3}{4}$ பாகம்

ஆக வேண்டுமல்லவா? அதாவது சிறிய முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கத்தின் நீளம் $2 \times \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$

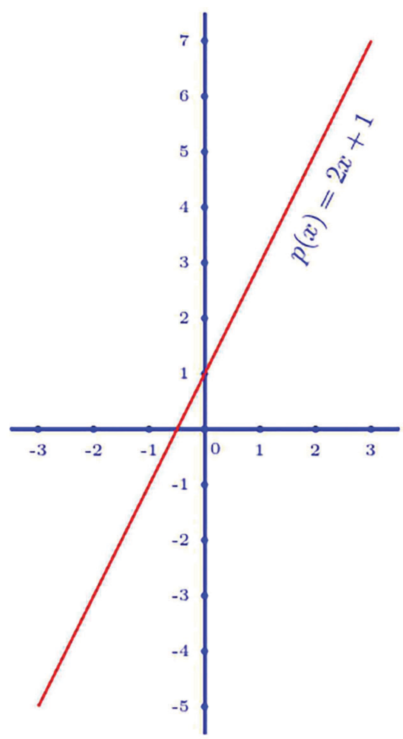


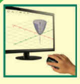


அப்போது, $1\frac{3}{4}$ என்ற இடத்திலிருந்து சிவப்புக் கோட்டிற்கு உள்ள செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $3 + 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$. மாறாகக் கூறினால் கீழே உள்ள கோட்டில் $x = 1\frac{3}{4}$ என்ற இடத்திலிருந்து $p\left(1\frac{3}{4}\right) = 4\frac{1}{2}$ என்ற உயரத்தில் (அல்லது கீழாக) வரையும் செங்குத்து கோட்டின் மேல் முனை சிவப்புக் கோட்டில் தான் உள்ளது.

இதுபோல, x ஆக எந்த எண்ணை (விகிதமுறு எண்களோ, விகிதமுறா எண்களோ) எடுத்தாலும், கிடைமட்டமாக உள்ள கோட்டில் அந்த இடத்தில் இருந்து $p(x)$ உயரத்தில் (அல்லது கீழாக) வரைகின்ற செங்குத்துக் கோட்டின் மேல் முனை சிவப்புக்கோட்டில்தான் இருக்கும் எனக் காணலாம்.

இந்தக் கோட்டை $p(x) = 2x + 1$ என்ற பல்லுறுப்பின் வரைபடம் (graph) என்று கூறலாம். சாதாரணமாக இப்படி வரைபடம் வரையும் போது செங்குத்துக் கோடுகள் வரையாமல் அவற்றின் அற்றங்கள் மட்டுமே அடையாளப்படுத்தி அவற்றை இணைத்து வரைவது தான் வழக்கம். உயரங்களைப் புரிந்து கொள்ள, கிடைமட்டமாக எண்கள் அடையாளப்படுத்திய கோட்டில் 0 என்ற இடத்தின் வழியாகச் செங்குத்துக் கோடு வரைந்து, அதிலும் அதே இடைவெளியில் எண்களை அடையாளப்படுத்தலாம்.





ஒரு பல்லுறுப்பின் வரைபடம் ஜியோஜிப்ராவில் வரைவதற்கு Input Bar ஐ பயன்படுத்தலாம். $p(x) = 2x + 1$ என்பதன் வரைபடம் வரைய Input Bar இல் $p(x) = 2x + 1$ என Type செய்து Enter கொடுத்தால் போதும். $(2x + 1)$ என்றும் Type செய்தாலும் படம் கிடைக்கும் என்றாலும் பல்லுறுப்பின் பெயர் $p(x)$ என்று கிடைக்க வேண்டும் என்பதில்லை)

இதே முறையில் தான், எந்த ஒருபடி பல்லுறுப்பினுடையவும் வரைபடம் நேர்கோடு எனக்காணலாம்.

ஒரு கோடு வரைய இரண்டு புள்ளிகள் போதும் அல்லவா? அப்போது ஓர் ஒருபடி பலுறுப்பின் வரைபடம் வரைய, x ஆக ஏதாவது இரண்டு எண்களை எடுத்து, பல்லுறுப்பில் இருந்து கிடைக்கும் எண்கள் கணக்கிட்டால் போதும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

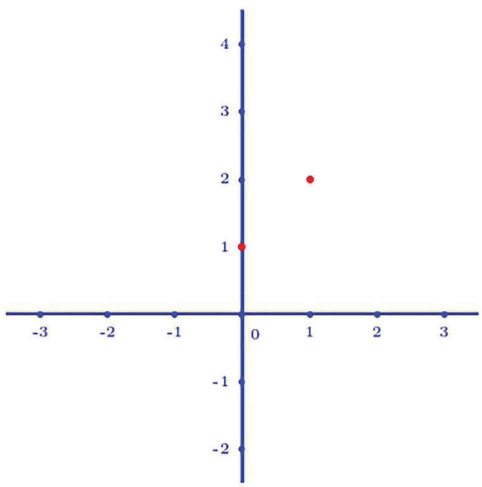
$$p(x) = x + 1$$

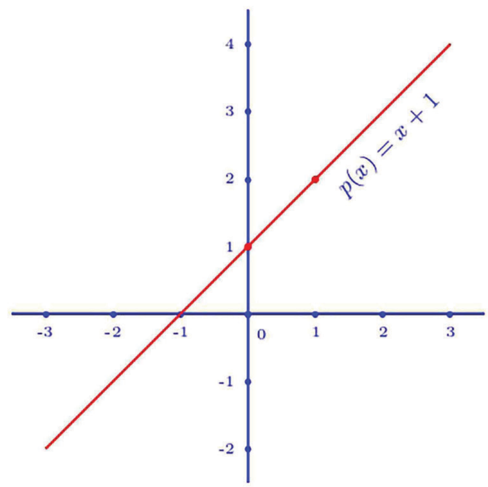
என்ற பல்லுறுப்பைப் பாருங்கள்.

x ஆக 0, 1 என்ற எண்களை எடுக்கவும்

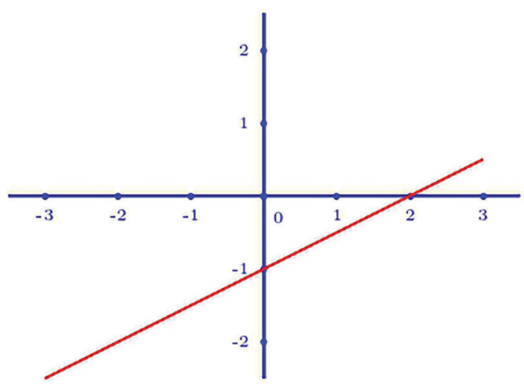
x	0	1
$p(x)$	1	2

இனி வரைபடம் வரையலாமல்லவா?





மாறாக, வரைபடத்தில் இருந்து பல்லுறுப்பு கண்டுபிடிப்பதும் எளிதாகும். எடுத்துக்காட்டாக, இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.



இதன் பல்லுறுப்பு $p(x)$ என எடுக்கலாம். அப்போது, $p(0) = -1$ என்றும் $p(2) = 0$ என்றும் படத்திலிருந்து காணலாம் அல்லவா?

இனி $p(x)$ ஒன்றாம்படி பல்லுறுப்பு ஆனதால்,

$$p(x) = ax + b$$

என்ற வடிவத்தில் இருக்கும். (**பல்லுறுப்புகள்** என்ற பாடம்). இதில் a, b என்ற எண்களைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

அதற்கு $p(0) = -1$ என்றும் $p(2) = 0$ என்றும் படத்தில் இருந்து கிடைத்த தகவல்களைப் பயன்படுத்தலாம்.

ஜியோஜிப்ராவில் Increment : 0.1 ஆக a, b என இரண்டு சிலைடர்கள் உருவாக்கவும். $p(x) = ax + b$ என்ற Input bar இல் தட்டச்சு செய்து பல்லுறுப்பின் வரைபடம் வரையவும். b என்ற சிலைடரை மட்டும் மாற்றிப் பார்க்கவும். கோட்டிற்கு என்ன நிகழும்? a மட்டும் மாற்றினால்? $p(0) = -1$ உம் $p(2) = 5$ உம் ஆனால் $p(x)$ என்னவாக இருக்குமென இதைப்பயன்படுத்திக் கணக்கிட இயலுமா? முயற்சிக்கவும். $p(1) = 2, p(2) = 6$ ஆனால்?

$p(x) = ax + b$ ஆனதால்,

$$p(0) = (a \times 0) + b = b$$

$p(0) = -1$ ஆனதால், இதிலிருந்து

$$b = -1$$

என்று கிடைக்கும்.

இதைப் பயன்படுத்தி,

$$p(2) = (a \times 2) + b = 2a + b = 2a - 1$$

என்று காணலாம். படத்திலிருந்து $p(2) = 0$ என்றும் கிடைத்திருக்கிறது. அப்போது

$$2a - 1 = 0$$

என்றும் இதிலிருந்து

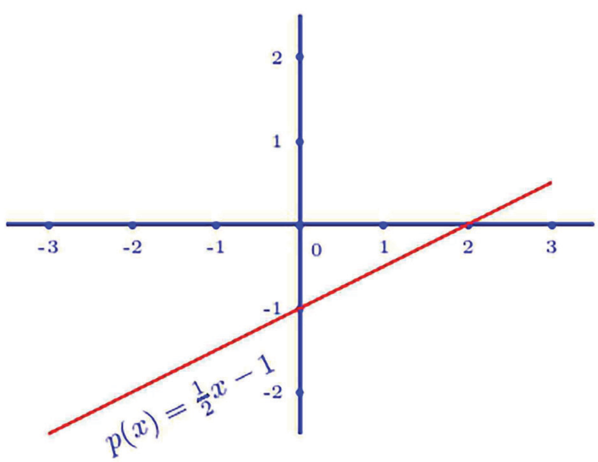
$$a = \frac{1}{2}$$

என்றும் கிடைக்கும்.

அப்போது மேலே பார்த்த கோட்டின் பல்லுறுப்பு வடிவம்,

$$p(x) = \frac{1}{2}x - 1$$

அதாவது, $p(x) = \frac{1}{2}x - 1$ என்ற பல்லுறுப்பின் வரைபடம் தான் இந்தக் கோடு.

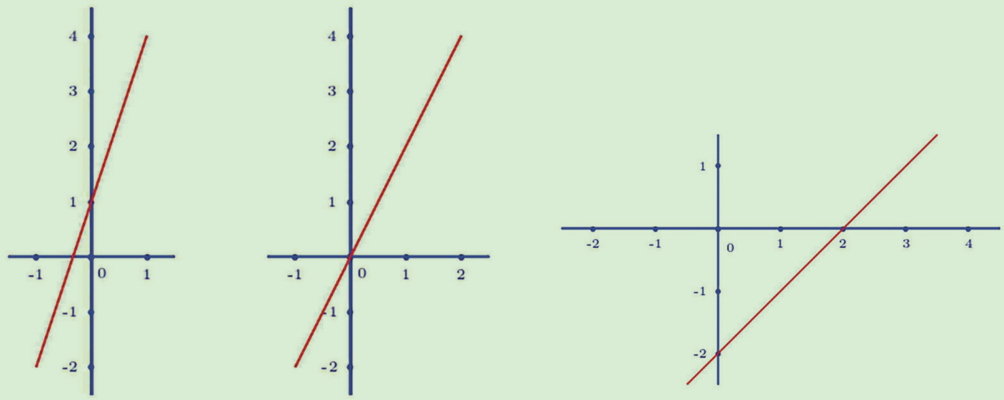


(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புகளின் வரைபடம் வரையவும்.

(i) $p(x) = 2x - 1$ (ii) $p(x) = x - 1$ (iii) $p(x) = 1 - x$

(iv) $p(x) = x$ (v) $p(x) = -x$

(2) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகளின் பல்லுறுப்பு வடிவம் கண்டுபிடிக்கவும்.



(i) (ii) (iii)

இருபடி பல்லுறுப்புகள்

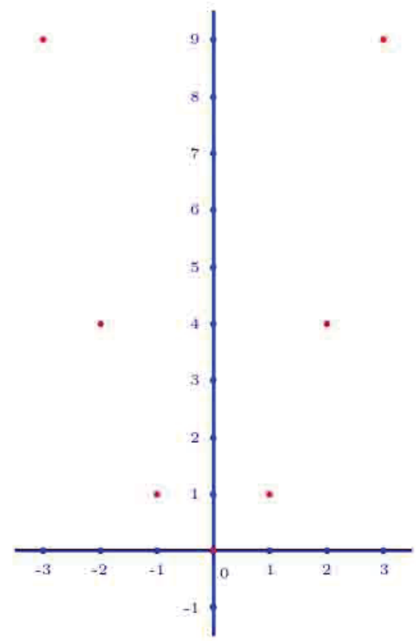
இனி இருபடி பல்லுறுப்புகளின் வரைபடத்தைப் பார்க்கலாம். மிக எளிதான இருபடி பல்லுறுப்பு எது?

$$p(x) = x^2$$

இதன் வரைபடம் வரைய முதலில் ஒரு சிறிய அட்டவணையை உருவாக்கலாம்.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	9	4	1	0	1	4	9

இனி முன்பு செய்தது போல் செங்குத்தாக இரண்டு கோடுகள் வரைந்து, சம இடைவெளியில் எண்களை அடையாளப்படுத்தலாம். தொடர்ந்து கிடைமட்ட கோட்டில் x ஆக எடுக்கின்ற எண்களிலிருந்து $p(x)$ என்ற உயரத்தில் வரைகின்ற செங்குத்துகோடுகளின் மேல் முனைகளை அடையாளப்படுத்தலாம்.

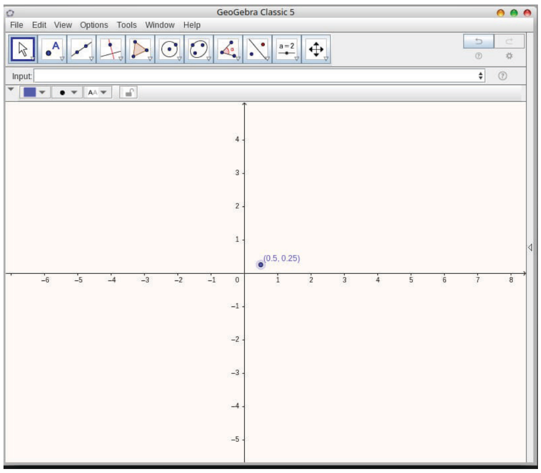


இத்தனை புள்ளிகளை மட்டும் பயன்படுத்தித் துல்லியமான படத்தை வரைய முடியாது. இவற்றிற்கு இடையில் உள்ள சில புள்ளிகள் கிடைக்க என்ன செய்யலாம்?

$x = 0.5$ என எடுத்தால் $p(0.5) = 0.25$ எனக் கிடைக்கும். இந்த உயரத்தை அளவுகோல் வைத்து வரைய இயலாதல்லவா?

இந்தப் படம் வரைய ஜியோஜிப்ராவைப் பயன்படுத்தலாம்.

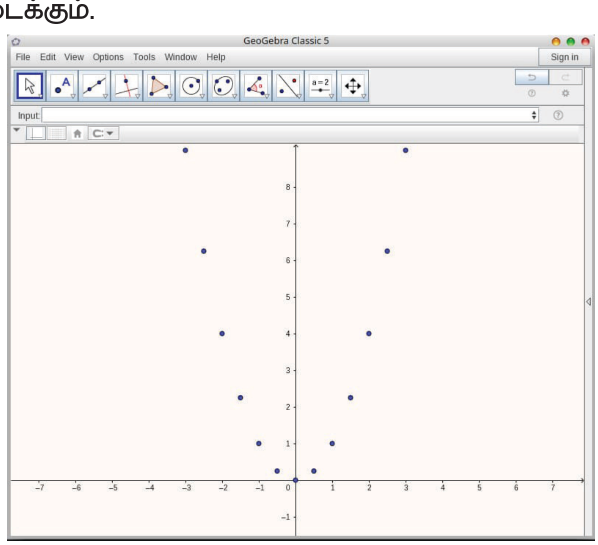
ஜியோஜிப்ரா திறந்தால் கிடைமட்டமாகவும் செங்குத்தாகவும் ஒரே தூரத்தில் எண்கள் அடையாளப்படுத்திய கோடுகளைக் காணலாம். இனி Input Bar இல் (0.5, 0.25) என அளித்தால், கிடைமட்டமான தூரம் 0.5 உம், செங்குத்தாக உள்ள உயரம் 0.25 உம் உடைய புள்ளியைக் காணலாம்.



இப்படி நமக்குத் தேவையான அனைத்து புள்ளிகளின் தூரமும் உயரமும் வெவ்வேறாகக் கணக்கீடு செய்து, ஒவ்வொன்றாக அடையாளப்படுத்துவதற்குப் பதில், ஒரே வேளையில் அதிக புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்துவதற்கும் வழிமுறை உண்டு. Input Bar இல் இப்படி Type செய்யவும்.

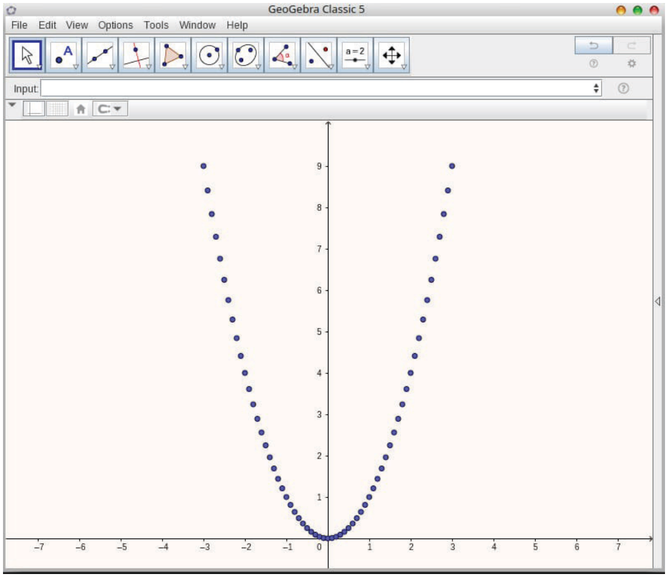
```
Sequence [(t, t^2), t, −3, 3, 0.5]
```

(-3 முதல் 3 வரை 0.5 இடைவெளியிலுள்ள எண்களை t ஆக எடுத்து, t தூரத்தில், t^2 உயரத்தில் புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்த வேண்டும் என்பதுதான் இந்த கட்டளையின் பொருள்). அப்போது இவ்வாறு ஒரு படம் கிடைக்கும்.



மேலும் சில புள்ளிகள் கிடைக்க, t ஆக எடுக்கின்ற எண்களுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் 0.5 க்குப் பதில், 0.1 ஆகலாம்.

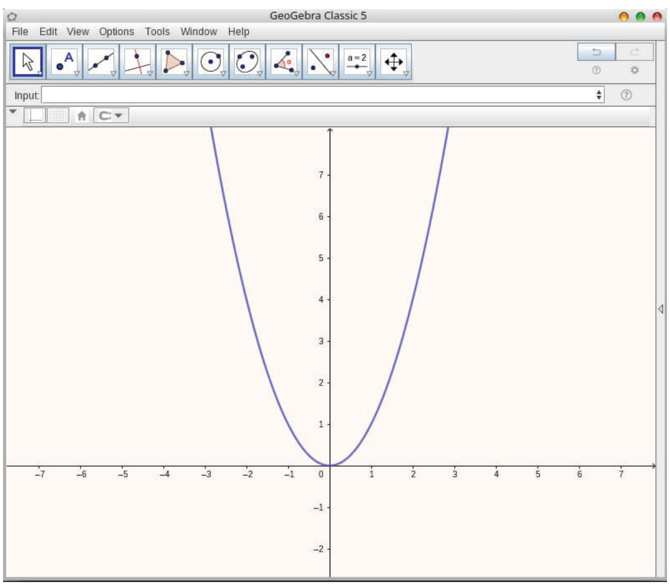
```
Sequence[(t,t^2),t,-3,3,0.1]
```



ஜியோஜிப்ராவில் Min = 0, Max = 1, Increment : 0.01 ஆகும் விதம் ஒரு Slider a உருவாக்கவும். Input bar இல் Sequence [(t, t^2), t, –3, 3, a] என Type செய்யவும். $p(x) = x^2$ என்ற பல்லுறுப்பின் படத்திலுள்ள புள்ளிகள் கிடைக்கும். Slider ஐ மாற்றிப் பார்க்கவும். a இன் விலை குறைகின்ற முறையில் கூடுதல் அடுத்தடுத்த புள்ளிகள் கிடைக்கும்.

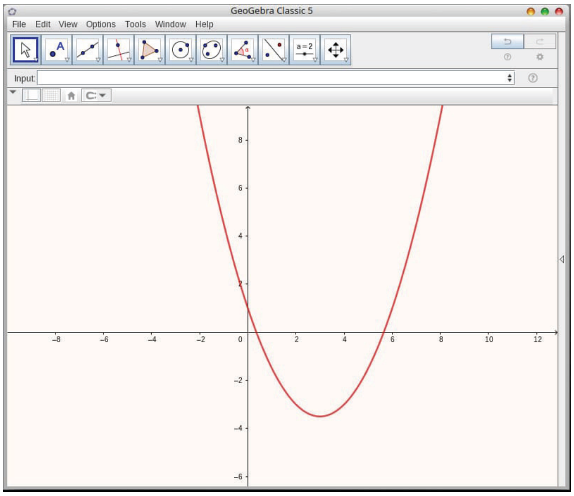
இப்போது படத்தின் ஏகதேச வடிவம் கிடைத்ததல்லவா?

இனி இடைவெளி இல்லாமல் இந்த வளைவு (curve) வரைய, Input Bar இல் `x^2` என Type செய்தால் போதும்.

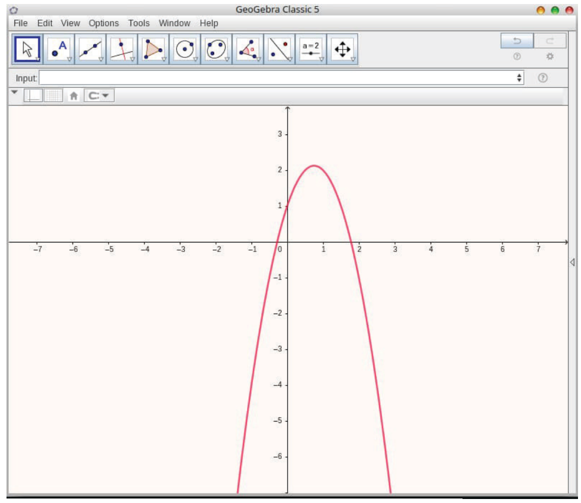


ஜியோஜிப்ராவில் Increment : 0.1 ஆகும் விதத்தில் ஒரு சிலைடர் a உருவாக்கவும். Input Bar இல் (a, a ^ 2) என Type செய்யும்போது ஒரு புள்ளி கிடைக்கும். Slider மாறுகின்ற விதத்தில் இந்தப் புள்ளி அசைவதைக் காணலாம். இது பயணிக்கின்ற பாதை எது? அது கிடைக்கப் புள்ளியில் Right click செய்து Trace on கொடுத்தால் போதும் Increment : 0.1 என்பதற்குப் பதில் 0.01 எனக்கொடுத்தால் சிறிது கூட அடுத்தடுத்த புள்ளிகள் கிடைக்கும். (Slider இல் Right click செய்து Object properties → Slider → Increment என்ற முறையில் Increment ஐ மாற்ற முடியும்). Locus கருவியைப் பயன்படுத்தி Slider லும், புள்ளியிலும் Click செய்தாலும், புள்ளியின் பயணிக்கும் பாதை கிடைக்கும்.

இதுபோல Input Bar-இல் வேறு இருபடி பல்லுறுப்புகள் Type செய்து பாருங்கள். எடுத்துக்காட்டாக, `(1/2)x^2 – 3x + 1` என்றும் `–2x^2 + 3x + 1` என்றும் கொடுத்தால் கிடைக்கின்ற படங்களை அடுத்த பக்கத்தில் பார்க்கலாம்.



$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$



$-2x^2 + 3x + 1$

வேறுபட்ட இருபடி பல்லுறுப்புகளின் வரைபடங்களைப் பார்த்தால், இடம்மாறுதல், விரிவு கூடவோ, குறையவோ செய்தல், மேல், கீழாக மாறுவது என்றிவ்வாறு அல்லாமல், பொதுவாக வளைவின் வடிவம் மாறுவதில்லை.

இடப்பக்கத்திலிருந்து வலப்பக்கம் பார்க்கும் போது, படத்தில் உள்ள வளைவு

- சிறிது தூரம் கீழ்நோக்கி இறங்கி, மிக தாழ்வான புள்ளியை அடைந்து, தொடர்ந்து மேல்நோக்கி உயர்கிறது.
- அல்லது சிறிது தூரம் மேல்நோக்கி உயர்ந்து, மிக உயர்ந்த புள்ளியை அடைந்து, தொடர்ந்து கீழ் நோக்கி இறங்குகிறது.

ஜியோஜிப்ராவில் a என்ற ஒரு சிலைடர் உருவாக்கவும். $p(x) = x^2 + a$ என்ற பல்லுறுப்பின் படம் வரையவும். a என்ற எண்ணை மாற்றிப் பார்க்கவும் படத்திற்கு என்ன நிகழ்கிறது. $q(x) = ax^2$ என்ற பல்லுறுப்பின் படம் வரையவும். a மாறுவதைப் பொறுத்து படத்திற்கு என்ன நிகழ்கிறது.

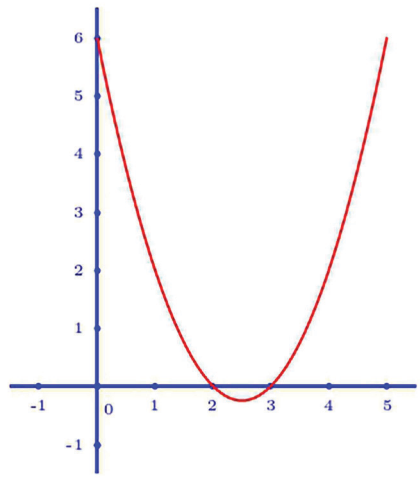
இதற்கு இயற்கணித விளக்கம் என்ன?

$p(x)$ என்ற எந்த இருபடி பல்லுறுப்பிலும், குறை எண்களில் இருந்து தொடங்கி, படிப்படியாகப் பெரியதாகி, மிகை எண்களாகின்ற x ஐ எடுத்தால்,

- $p(x)$ என்ற எண்கள் படிப்படியாகச் சிறியதாகி, மிகச் சிறிய எண்ணை அடைந்தபின் பெரியதாகிறது
- அல்லது $p(x)$ என்ற எண்கள் படிப்படியாகப் பெரியதாகி, மிகப் பெரிய எண்ணை அடைந்த பின் சிறியதாகின்றன.

இனி ஓர் இருபடி பல்லுறுப்பின் படத்திலிருந்து, அந்தப் பல்லுறுப்பை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது என்று பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் இருபடி பலுறுப்பின் வரைபடம் தரப்பட்டுள்ளது.



இதன் பல்லுறுப்பு வடிவம் $p(x)$ என எடுத்தால், படத்திலிருந்து

$$p(0) = 6$$

$$p(2) = 0$$

$$p(3) = 0$$

என்று காணலாம்..

$p(x)$ இருபடி பல்லுறுப்பு ஆனதால்,

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

என எழுதலாம். (**பல்லுறுப்புகள் என்ற பாடம்**)

அப்போது,

$$p(0) = (a \times 0^2) + (b \times 0) + c = c$$

இனி $p(0) = 6$ என்பதிலிருந்து

$$c = 6$$

என்றும், அதனால்

$$p(x) = ax^2 + bx + 6$$

என்றும் கிடைக்கும்.

அடுத்ததாக $p(2) = 0$ என்பதிலிருந்து

$$4a + 2b + 6 = 0$$

என்றும், $p(3) = 0$ என்பதிலிருந்து

$$9a + 3b + 6 = 0$$

என்றும் காணலாம். முதல் சமன்பாட்டை

$$2a + b = -3 \qquad (1)$$

என்றும், இரண்டாவது சமன்பாட்டை

$$3a + b = -2 \qquad (2)$$

என்றும் மாற்றி எழுதலாமல்லவா.

சமன்பாடு (2) லிருந்து சமன்பாடு (1) ஐக் கழித்தால்

$$a = -2 -(-3) = -2 + 3 = 1$$

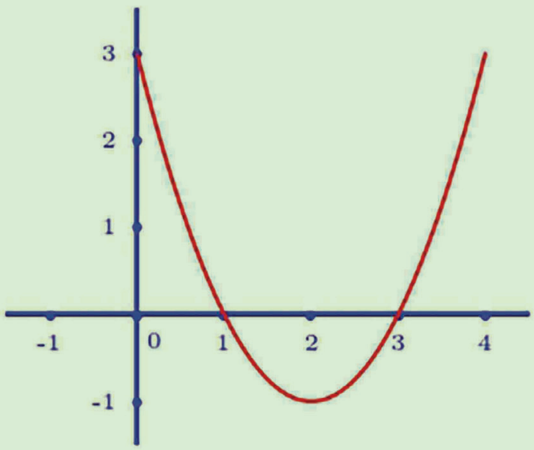
எனக் கிடைக்கும். இனி சமன்பாடு (1) லிருந்து

$$b = -3 - 2 = -5$$

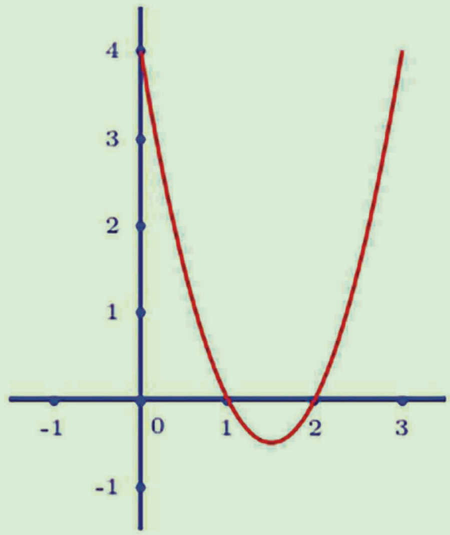
என்றும் கணக்கிடலாம். அப்போது படத்தின் பல்லுறுப்பு

$$p(x) = x^2 - 5x + 6$$

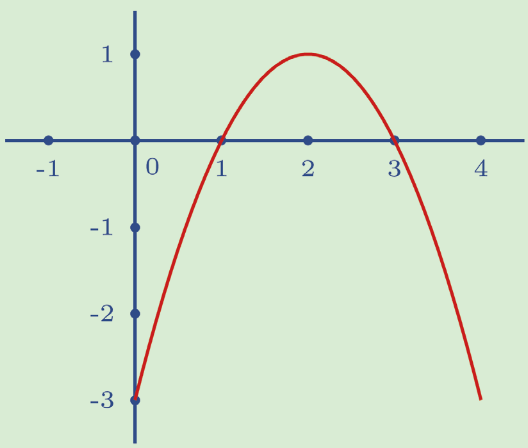
சில இருபடி பல்லுறுப்புகளின் வரைபடங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



(i)



(ii)

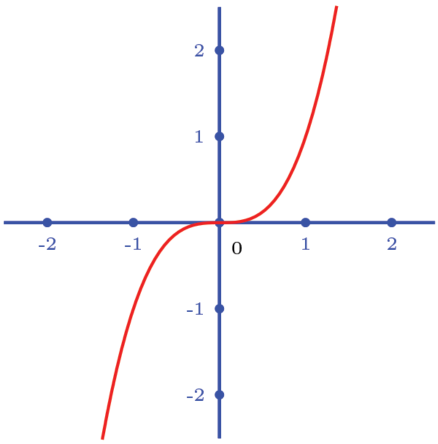


(iii)

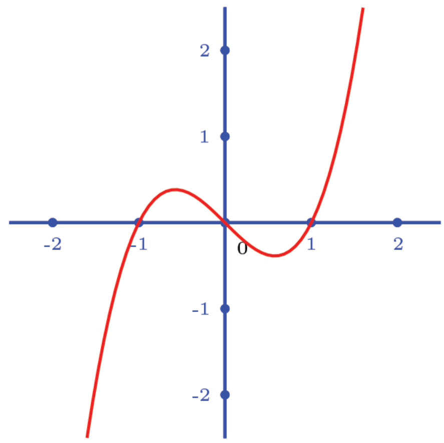
ஒவ்வொன்றினுடையவும் பல்லுறுப்புகளைக் காண்க.

மூன்றாம்படி பல்லுறுப்புகளுடைய வரைபடங்களுக்கெல்லாம் இவ்வாறு ஒரு பொதுவான வடிவம் இல்லை. எடுத்துக்காட்டாக, இந்தப் பல்லுறுப்புகளின் படம் ஜியோஜிப்ராவைப் பயன்படுத்தி வரைந்து பாருங்கள்.

- $p(x) = x^3$
- $p(x) = x^3 - x$



$p(x) = x^3$



$p(x) = x^3 - x$

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புகளின் வரைபடம் வரைக.

(i) $p(x) = x$ (ii) $p(x) = 2x$ (iii) $p(x) = \frac{1}{2}x$ (iv) $p(x) = -x$ (v) $p(x) = -2x$

இந்தக் கோடுகளுக்கெல்லாம் பொதுவான ஏதேனும் சிறப்புகள் உள்ளனவா?

இதைப் போன்று கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புகளின் வரைபடம் வரைக.

(i) $p(x) = x + 1$ (ii) $p(x) = x + 2$ (iii) $p(x) = x + \frac{1}{2}$

(iv) $p(x) = x - 1$ (v) $p(x) = x - 2$

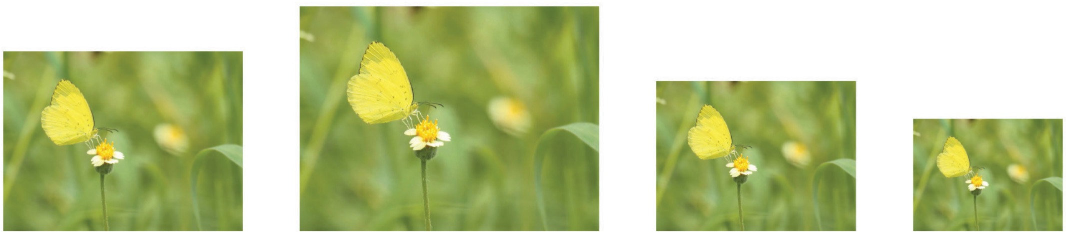
இந்தக் கோடுகளுக்கெல்லாம் பொதுவான ஏதேனும் சிறப்புகள் உள்ளனவா?

14

விகிதசமம்

விகிதசம மாற்றம்

இந்தப் படங்களைப் பாருங்கள்



ஒரு புகைப்படம் பல அளவுகளில்.

இவ்வாறு ஒரு புகைப்படத்தைச் சிறியதாகவோ, பெரியதாகவோ ஆக்கும்போது, செவ்வகத்தின் பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் மாறக்கூடாது என்பதை ஏழாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறீர்கள் அல்லவா? (ஏழாம் வகுப்பில் **விகிதம்** என்ற பாடம்)

இங்கு காட்டப்பட்டுள்ள படங்களில் எல்லாம் நீளம், உயரம் இவற்றிற்க்கிடையே உள்ள விகிதம் $4 : 3$ ஆகும். அதாவது, நீளத்தின் $\frac{3}{4}$ பாகம் உயரமாகும். மாறாகக் கூறினால் உயரத்தின் $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ மடங்கு நீளமாகும்.

இனி, இந்தப் படங்களைப் பாருங்கள்.

நீளமும் உயரமும் $16 : 9$ என்ற விகிதத்தில் எடுத்த ஒரு புகைப்படம் பல அளவுகளில்; அதாவது அனைத்திலும் நீளத்தின் $\frac{9}{16}$ பாகம் உயரம்; மாறாகக் கூறினால் உயரத்தின் $\frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$ மடங்கு நீளம்.

அப்போது ஒவ்வொரு படத்தொகுப்பிலும், நீளமும் உயரமும் மாறுகிறது எனினும் அதன் ஓர் அளவு மற்றொரு அளவின் குறிப்பிட்ட மடங்கோ பாகமோ ஆகும்.

இதனை இயற்கணிதம் பயன்படுத்திக் கூறினால் ?

முதலில் பார்த்த படங்களில் ஒரு செவ்வகத்தின் நீளம் w எனவும், உயரம் h எனவும் எடுத்தால்,

$$h = \frac{3}{4}w$$

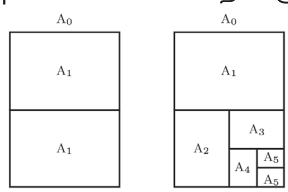
இரண்டாவது படங்களிலும் இதைப் போல் எடுத்தால்?

$$h = \frac{9}{16}w$$

காகிதத்தில் விகிதசமம்

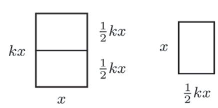
சாதரணமாக நகல் எடுப்பது போன்றவற்றிற்குப் பயன்படுத்துவது A_4 காகிதம் அல்லவா. A_0, A_1, A_2 என்ற பெயரில் அளவு குறைந்து வருகின்ற காகிதங்களும் உண்டு.

இதில் ஒவ்வொன்றின் அளவும் இதற்கு முன்பு உள்ள அளவில் பாதியாகும்.



அதுமட்டுமல்லாமல், இந்தக் காகிதங்களில் எல்லாம் அகலத்திற்கும் உயரத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதங்கள் சமமாகும்.

இப்படிப்பட்ட காகிதங்களின் அகலம் x என்றும் உயரம் kx என்றும் எடுக்கலாம். அப்பொழுது இதன் அடுத்த அளவு காகிதத்தின், அகலம் $\frac{1}{2}kx$ உம், உயரம் x உம் ஆகும்.



அகலத்திற்கும் உயரத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் சமமானதால்,

$$\frac{1}{2}k = \frac{1}{k}$$

இதிலிருந்து $k^2 = 2$ என்றும் அதனால்

$$k = \sqrt{2}$$

என்றும் காணலாம். அதாவது A தொடரில் உள்ள காகிதங்களின் உயரம், அகலத்திற்கு விகித சமமாக மாறுகிறது. விகிதசம மாறிலி $\sqrt{2}$.

மாறுகின்ற இரண்டு அளவுகள் இந்த வகையில் தொடர்புடைய அதிகமான சூழல்கள் உள்ளன. எடுத்துக்காட்டாக, வேறுபட்ட ஆரங்களுள்ள வட்டங்கள் வரைந்தால், அவற்றின் சுற்றளவு , ஆரத்தின் 2π மடங்கல்லவா. ஆரம் r எனவும், சுற்றளவு c எனவும் எடுத்தால்,

$$c = 2\pi r$$

இந்த எடுத்துக்காட்டுகளில் எல்லாம் நீளங்களின் மாற்றங்களைக் கண்டோம். வேறுபட்ட அளவுகளுக்கு இடையிலும் இத்தகைய தொடர்பு காணப்படலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கோட்டின் வழியாக 10 மீட்டர் / வினாடி என்ற ஒரே வேகத்தில் ஒரு பொருள் பயணிக்கிறது எனில், பயணிக்கின்ற தூரம், பயணிக்க எடுத்த நேரத்தின் 10 மடங்கல்லவா? பயணித்த தூரம் (மீட்டரில்) s என்றும், பயணிக்க எடுத்த நேரம் (வினாடியில்) t என்றும் எடுத்தால்,

$$s = 10t$$

இவ்வாறு இரண்டு அளவுகள் மாறுவதற்குப் பொதுவாக ஒரு பெயர் உண்டு.

ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய இரண்டு அளவுகள் மாறும்போது, எப்போதும் ஓர் அளவைக் குறிப்பிடுகின்ற எண்ணின் குறிப்பிட்ட மடங்கோ, பாகமோதான் பிற அளவினைக் குறிப்பிடுகின்ற எண் எனில், இந்த மாற்றத்தை விகிதசமம் (proportional) என்று கூறலாம்.

(விகிதங்களின் சமம்தான் விகிதசமம் (proportion) எனக் கூறப்படுகிறது).

விகிதசம மாற்றங்களில் குறிப்பிட்ட மடங்கோ, பாகமோ ஆக மாறாமல் இருக்கின்ற எண்ணை **விகிதசம மாறிலி (proportionality constant)** எனக் கூறுவர்.

முன்பு பார்த்த எடுத்துக்காட்டுகளை மீண்டும் ஒரு முறையைப் பார்க்கலாம்.

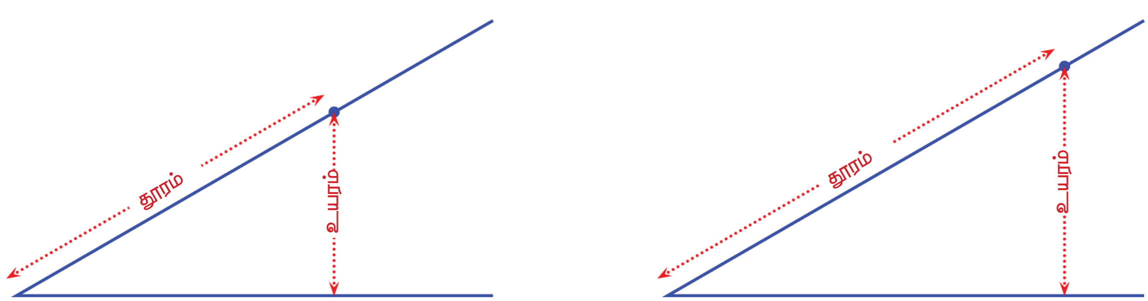
- GIMP போன்ற ஏதாவதுகணினி நிரல் (Program) பயன்படுத்தி முதலில் பார்த்த படங்களில் ஏதேனும் ஒன்றின் அளவை மாற்றுவதற்கு, நாம் நீளம் கொடுத்தால், உயரம் நீளத்தின் $\frac{3}{4}$ பாகமாக நிரல் (Program) தானாகக் கணக்கிட்டு மாற்றும். இங்கு நீளத்திற்கு விகிதசமமாக உயரம் மாறுகிறது. விகிதசம மாறிலி $\frac{3}{4}$.
  மாறாக, நாம் கொடுத்தது உயரம் எனில், அதன் $\frac{4}{3}$ மடங்கு ஆகும் நீளம். இந்தச் சூழ்நிலையில், உயரத்திற்கு விகிதசமமாக நீளம் மாறுகிறது. விகிதசம மாறிலி $\frac{4}{3}$.
- இரண்டாவது பார்த்த படங்களில் உள்ளது போல், படங்களின் உயரத்திற்கும் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $9 : 16$ ஆனால், கொடுக்கின்ற நீளத்திற்கு விகித சமமாக உயரம் கணக்கிடும். விகிதசம மாறிலி $\frac{9}{16}$.
  மாறாக, கொடுக்கின்ற உயரத்திற்கு விகிதசமமாக நீளம் கணக்கிடும். விகிதசம மாறிலி $\frac{16}{9}$.
- பல ஆரங்கள் எடுத்து வட்டங்கள் வரைந்தால் அவற்றின் சுற்றளவு, ஆரத்திற்கு விகித சமமாக மாறுகிறது. விகிதசம மாறிலி 2π.
  மாறாகப் பல நீளமுள்ள கம்பிகளை வளைத்து வட்டங்கள் உருவாக்கினால், கம்பிகளின் நீளம் தான் வட்டங்களின் சுற்றளவு. இதற்கு விகித சமமாக வட்டங்களின் ஆரம் மாறுகிறது. விகிதசம மாறிலி $\frac{1}{2\pi}$.
- 10 மீட்டர் / வினாடி என்ற ஒரே வேகத்தில் ஒரு கோட்டின் வழியாகப் பயணிக்கின்ற பொருள், பயணித்த தூரம் (மீட்டரில்) வேறுபட்ட நேரங்களில் (வினாடியில்) பார்த்தால், அது நேரத்திற்கு விகிதசமமாக இருக்கும். விகிதசம மாறிலி 10.
  மாறாக, இந்தப் பொருள் வேறுபட்ட தூரம் (மீட்டரில்) பயணிக்க எடுக்கின்ற நேரத்தைப் (வினாடியில்) பார்த்தால், அது தூரத்திற்கு விகிதசமமாக இருக்கும். விகிதசம மாறிலி $\frac{1}{10}$.

விகிதசமமாற்றத்தை இயற்கணிதம் பயன்படுத்தி இவ்வாறு கூறலாம்.

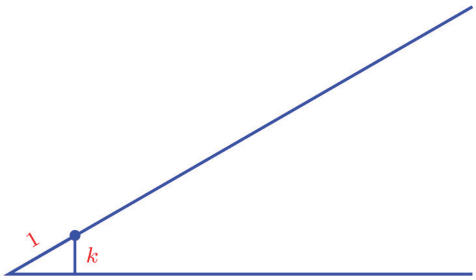
> x, y என்ற எண்களால் கொண்டு குறிப்பிடுகின்ற இரண்டு அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு
>
> $y = kx$ (k ஒரு மாறாத எண்)
>
> என்ற வடிவத்தில் எனில், y குறிப்பிடுகின்ற அளவு, x குறிப்பிடுகின்ற அளவிற்கு விகிதசமமாக மாறுகிறது. இதில் k என்பது விகிதசம மாறிலி.

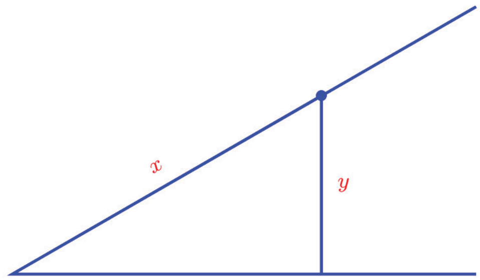
வேறொரு எடுத்துக்காட்டைப் பாருங்கள்.

படத்தில் சரிவான கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளையெல்லாம் எடுத்தால், கோணத்தின் உச்சியிலிருந்து உள்ள தூரம் மாறுகின்ற முறையில், கீழே உள்ள கோட்டில் இருந்துள்ள உயரமும் மாறும்.



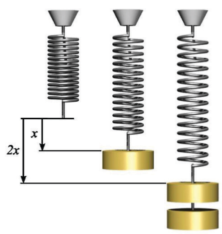
இந்த மாற்றம் விகிதசமம் ஆகுமா எனப் பரிசோதிக்க, உச்சியிலிருந்து 1 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் உள்ள புள்ளிக்குக் கீழிருந்துள்ள உயரம் k சென்டிமீட்டர் என எடுக்கலாம்.





எடையும் நீளமும்

ஒரு ஸ்பிரிங்கில் எடை தூக்கும்போது அதன் நீளத்தில் ஏற்படுகின்ற மாற்றம் எடைக்கு விகித சமத்திலாகும்.



பதினேழாம் நூற்றாண்டில் இங்கிலாந்தில் வாழ்ந்த ரோபாட் ஹுக் என்ற அறிவியல் அறிஞர் இதைக் கண்டுபிடித்தார்.

வில் தராசில் எடைகள் அடையாளப்படுத்த இதைப் பயன்படுத்தலாம்.

1 கிலோ கிராம் தூக்கும்போது ஸ்பிரிங் 5 சென்டிமீட்டர் நீளம் கூடுகிறது எனில், 100 கிராமிற்கு $\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர் தானேகூட வேண்டும். அப்போது $\frac{1}{2}$ சென்டிமீட்டர் இடைவெளியில் அடையாளப்படுத்தினால், 100 கிராமின் மடங்குகளை அளக்கலாம். மேலும் சிறிய தூரங்களை அடையாளப்படுத்தினால், 100 கிராமைவிடச் சிறிய எடைகளையும் அவற்றின் மடங்குகளையும் அளக்கலாம்.

இரண்டாவது படத்தில் உள்ளது போல, x சென்டிமீட்டர் தூரத்திலுள்ள புள்ளியின் உயரம் y சென்டிமீட்டர் எனவும் எடுக்கலாம்.

இரண்டு படங்களிலும் செங்கோண முக்கோணங்களுக்கு ஒரே கோணங்கள் ஆனதினால், அவற்றின் பக்கங்களின் நீளம் ஒரே வீதத்தில் மாறுகிறது. (**வடிவொத்த முக்கோணங்கள்** என்ற பாடம்) அதாவது,

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{k}$$

இதிலிருந்து,

$$y = kx$$

எனக் காணலாம் அல்லவா. அப்போது உயரம் மாறுவது, தூரத்தின் விகிதசமத்தில் ஆகும்.

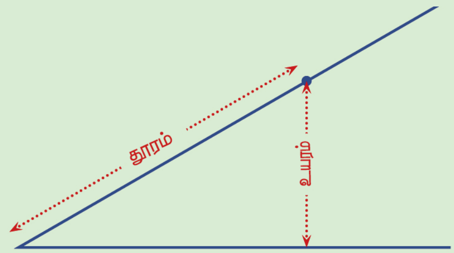
(1) கீழே கூறப்படுகின்ற ஒவ்வொரு சூழல்களிலும் முதல் அளவிற்கு விகித சமமாக இரண்டாவது அளவு மாறுகிறது எனத் தெளிவுபடுத்தவும். ஒவ்வொன்றிலும் விகிதசம மாறிலியைக் கணக்கிடுக.

(i) பக்கங்களின் நீளம், வெவ்வேறாக வரைகின்ற சதுரங்களினுடைய பக்கங்களின் நீளமும், சுற்றளவும் .

(ii) பல நீளங்கள் உள்ள கம்பிகளை வளைத்து உருவாக்குகின்ற சதுரங்களில், கம்பியின் நீளமும் பக்கங்களின் நீளமும்.

(iii) ஒரு கோட்டின் வழியாக உருளுகின்ற வட்டத்தின் சுற்றுகளின் எண்ணிக்கையும், கோட்டின் வழியாக நகர்ந்த தூரமும்

(2) படத்தில் சாய்ந்த கோட்டில் உள்ள புள்ளிகள் எல்லாம் எடுத்தால், கோணத்தின் உச்சியிலிருந்துள்ள தூரத்திற்கு விகிதசமமாகக் கீழே உள்ள கோட்டிலிருந்துள்ள உயரம் மாறுகிறது எனப் பார்த்தோம் அல்லவா?



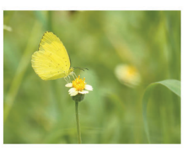
30°, 45°, 60° என்ற கோணங்களின் விகிதசம மாறிலியைக் கணக்கிடுக.

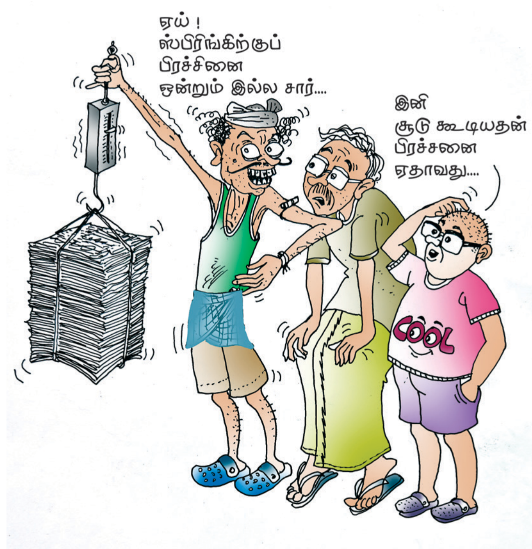
(3) பக்கங்களின் நீளங்கள் வேறுபட்டவையாக வரையப்படுகின்ற சமபக்க முக்கோணங்களின் சுற்றளவு பக்கத்திற்கு விகிதசமமாகும் என நிறுவுக. விகித சம மாறிலியைக் கணக்கிடுக. மற்ற ஒழுங்கு பலகோணங்களில்?

(4) ஒரு குறிப்பிட்ட வட்டத்தில் வேறுபட்ட நாண்களின் நீளம், அவற்றின் மையக் கோணத்திற்கு விகிதசமமாகும் எனத் தெளிவுபடுத்தவும். விகிதசம மாறிலி எது? வேறுபட்ட வட்டங்களின் பரப்பளவிற்கும் மையகோணத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

அளவுவீதமும் விகிதசமமும்

விகித சமத்தின் ஒரு தனித்தன்மையைப் பார்ப்போம். முதலில் பார்த்த புகைப்படங்களில் ஒன்றின் நீளத்தை கணினியைப் பயன்படுத்தி இரண்டு மடங்காக்கினால் உயரம் எவ்வாறு மாறும்?





இரண்டு படங்களிலும் நீளத்தின் $\frac{3}{4}$ பாகம்தானே உயரம்.

$$\text{அப்போது புதிய உயரம்} = \text{புதிய நீளம்} \times \frac{3}{4}$$

புதிய நீளத்திற்கும், பழைய நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

$$\text{புதிய நீளம்} = \text{பழைய நீளம்} \times 2$$

அப்போது,

$$\text{புதிய உயரம்} = \text{பழைய நீளம்} \times 2 \times \frac{3}{4}$$
$$= \text{பழைய நீளம்} \times \frac{3}{4} \times 2$$

இதில் பழைய நீளத்தின் $\frac{3}{4}$ பாகம் என்பது, பழைய உயரம் அல்லவா? அப்போது,

$$\text{புதிய உயரம்} = \text{பழைய உயரம்} \times 2$$

அதாவது, நீளத்தை இரண்டு மடங்காக்கினால் உயரமும் இரண்டு மடங்காகும்.

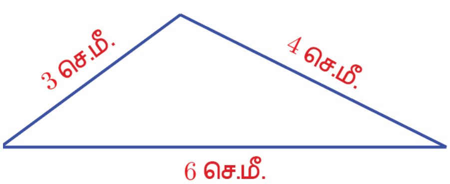
இதுபோல், நீளத்தை மூன்று மடங்காக்கினால், உயரமும் மூன்று மடங்காகும் எனவும், நீளம் பாதியானால் உயரமும் பாதியாகும் எனவும் காணலாம் அல்லவா? நீளத்தை எத்தனை மடங்கு அல்லது பாகம் ஆக்கினாலும், உயரமும் அதே மடங்கு அல்லது பாகம் ஆகும். சுருங்கக் கூறின், நீளம் மாறுகின்ற அதே வீதத்தில் உயரமும் மாறும். (ஆனால் இந்தச் செவ்வகங்களில் எல்லாம் நீளத்திற்கு ஏற்ப உயரமும் மாறுவதன் விகிதசம மாறிலி $\frac{3}{4}$ ஆகும்)

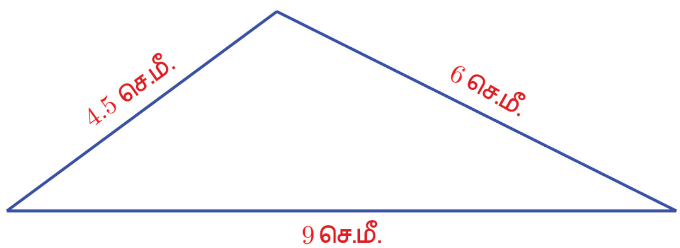
வேறு எடுத்துக்காட்டுகளிலும் இது சரியாகும் எனக் காண்பது கடினம் இல்லை அல்லவா. பொதுவாகக் கூறினால்,

இரண்டு அளவுகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு விகிதசமமெனில், ஓர் அளவு மாறுகின்ற அதே அளவு வீதத்தில் அடுத்த அளவும் மாறும்.

சில மாற்றங்கள் விகிதசமம் ஆகுமா எனப் பரிசோதிக்க இந்த முறையைப் பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக, உயரத்திலிருந்து கீழ்நோக்கிச் செல்கின்ற ஒரு பொருள், ஒரு வினாடியில் 4.9 மீட்டரும் இரண்டு வினாடியில் 19.6 மீட்டரும் பயணிக்கிறது. அதாவது, நேரம் இரண்டு மடங்காகும் போது, தூரம் நான்கு மடங்காகின்றது. அப்பொழுது இந்தப் பயணத்தில், தூரம் மாறுவது நேரத்தின் விகித சமத்திலல்ல.

ஒரே கோணங்களுள்ள இரண்டு முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் மாறுவது ஒரே அளவு வீதத்தில் ஆகுமென்றும், மாறாக ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் எல்லாம் ஒரே அளவு வீதத்தில் மாற்றினால் கோணங்கள் மாறுவதில்லை என்றும் **சர்வசம முக்கோணங்கள்** என்ற பாடத்தில் கண்டோம் அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணங்களைப் பார்க்கவும்.



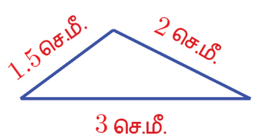


சிறிய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் $1\frac{1}{2}$ மடங்கே பெரிய முக்கோணத்தின் பக்கங்கள். அதாவது, சிறிய முக்கோணத்தில் இருந்து பெரிய முக்கோணத்திற்கு உள்ள மாற்றங்களின் அளவுவீதம் $1\frac{1}{2}$. இரண்டு முக்கோணங்களுக்கும் ஒரே கோணங்கள்.

இங்கு வேறொரு செயலையும் காணலாம். இரண்டு முக்கோணங்களிலும்

- மிகச் சிறிய பக்கத்தின் 2 மடங்கே, மிகப்பெரிய பக்கம்.
- மிகச் சிறிய பக்கத்தின் $1\frac{1}{3}$ மடங்கே, இடைப்பட்ட பக்கம்.
- இடைப்பட்ட பக்கத்தின் $1\frac{1}{2}$ மடங்கே, மிகப்பெரிய பக்கம்.

இந்த முக்கோணங்களை வேறொரு அளவுவீதத்தில் மாற்றி வரைந்தாலும் பக்கங்களுக்கிடையே உள்ள இந்தத் தொடர்பிற்கு மாற்றமில்லை அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக, இந்தப் படத்தைப் பாருங்கள்.



முதல் முக்கோணத்தின் பக்கங்களையெல்லாம் பாதியாக்கி வரைந்த படம் இரண்டாவது முக்கோணத்தின் பக்கங்களையெல்லாம் மூன்றில் ஒரு பாகம் ஆக்கியது என்றும் கூறலாம்.

அப்போது, முதல் முக்கோணத்தில் இருந்து மூன்றாவது முக்கோணத்திற்கு உள்ள மாற்றத்தின் அளவுவீதம் $\frac{1}{2}$ உம், இரண்டாவது முக்கோணத்தில் இருந்து மூன்றாவது முக்கோணத்திற்கு உள்ள மாற்றத்தின் அளவுவீதம் $\frac{1}{3}$ உம் ஆகும். ஆனால் இந்த முக்கோணத்திலும் பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதசமம் முன்பு கூறியதுதான். மிகச் சிறிய பக்கத்தின் இரண்டு மடங்கே மிகப்பெரிய பக்கம், மிகச் சிறிய பக்கத்தின் $1\frac{1}{3}$ மடங்காகும் இடைப்பட்ட பக்கம் (எனவேதான் இடைப்பட்ட பக்கத்தின் $1\frac{1}{2}$ மடங்கே மிகவும் பெரிய பக்கம்).

அதாவது, முதல் முக்கோணத்தை ஒரே அளவு வீதத்தில் மாற்றி வரைவதற்குப் பயன்படுகின்ற அளவு வீதம் பல ஆகும். ஆனால் இவ்வாறு கிடைக்கின்ற ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் அதன் பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள விகிதம் மாறவில்லை.

பொதுவாகக் கூறினால்,

ஒரே கோணங்களுள்ள முக்கோணங்களை எடுத்தால், எந்த இரண்டு பக்கங்களினுடையவும் நீளம் மாறுவது விகிதசமத்திலாகும்.

மழைக்கணக்கு

ஒரு திறந்தவெளியில் மழை பெய்யும் போது, ஒவ்வொரு சதுர சென்டிமீட்டரிலும் வீழும் தண்ணீரின் அளவு சமமாக இருக்கும், அதாவது, கிடைக்கின்ற மழை நீரின் கன அளவு, பரப்பளவுக்கு விகித சமமாக இருக்கும்.

அப்போது இந்த இடத்தில் அடுத்தடுத்ததாகப் பட்டக வடிவில் உள்ள பல பாத்திரங்களை வைத்து, ஒவ்வொன்றிலும் நிறைகின்ற மழை நீரின் கன அளவை, பாத்திரங்களின் அடிப்பக்கப் பரப்பளவு கொண்டு வகுத்தால் கிடைப்பது ஒரே எண்ணாக இருக்கும். எந்தப் பட்டகத்திலும் உள்ள நீரின் கன அளவை அடிப்பக்கப் பரப்பளவு கொண்டு வகுத்தால் கிடைப்பது, நீர்மட்டத்தின் உயரம் அல்லவா? அப்போது பாத்திரத்தின் அளவை மாறினாலும் அதில் மழை நீரின் உயரம் ஒன்றுபோல் இருக்கும். இதைத்தான் மழையின் அளவாகக் கூறுகின்றனர். இதன்படி ஓர் இடத்தில் ஒரு மில்லி மீட்டர் மழை பெய்தது எனில், ஒரு சதுர மீட்டர் அடிப்பக்க பரப்பளவு உள்ள ஒரு டேங்கில் ஒரு மில்லி மீட்டர் உயரத்தில் மழை நீர் நிறையும். இந்த நீரின் கன அளவு கன சென்டிமீட்டரில் கணக்காக்கினால்,

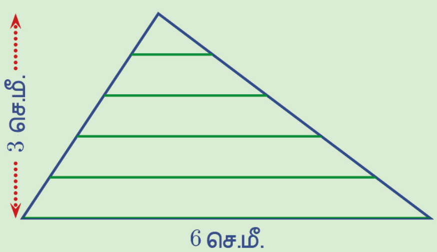
$$100 \times 100 \times 0.1 = 1000$$

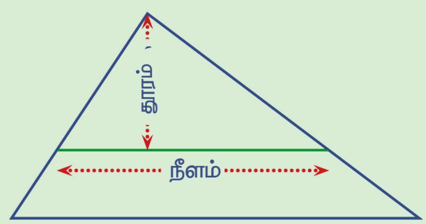
அதாவது ஒரு லிட்டர்.
அப்பொழுது ஓர் இடத்தில் 1 மில்லி மீட்டர் மழை என்பதன் பொருள், ஒவ்வொரு சதுர மீட்டரிலும் 1 லிட்டர் நீர் என்பதாகும்.

(1) (i) ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் தொகை என்ன? ஒரு அறுகோணத்தின்?

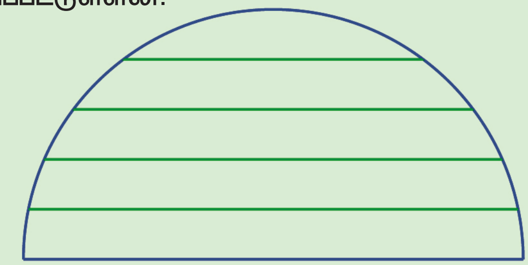
(ii) பலகோணங்களின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை மாறும் விகிதசமத்திலா கோணங்களின் தொகை மாறுவது? காரணத்தை விளக்கவும்.

(2) அடிப்பக்கம் 6 சென்டிமீட்டரும், உயரம் 3 சென்டிமீட்டருமான முக்கோணத்தின் உள்ளே அடிப்பக்கத்திற்கு இணையாகக் கோடுகள் வரையப்படுகிறது. இந்தக் கோடுகளின் நீளம் மேல் உச்சியிலிருந்துள்ள தூரங்களுக்கு விகிதசமத்திலாகும் எனத் தெளிவிக்கவும். விகிதசம மாறிலி என்ன?

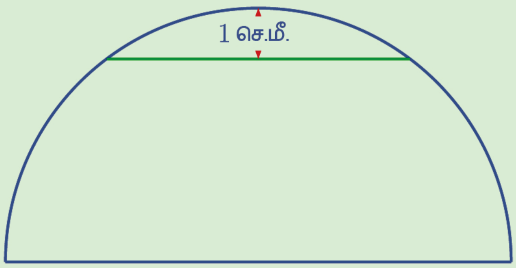


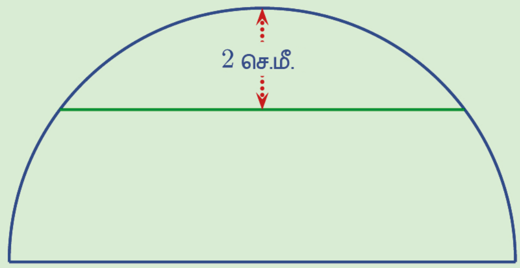


(3) விட்டம் 10 சென்டிமீட்டர் ஆன அரை வட்டத்திற்கு உள்ளே விட்டத்திற்கு இணையாகக் கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன.



(i) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு படத்திலும், விட்டத்திற்கு இணையான கோடுகளின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக.





(ii) கோடுகளின் நீளம் அரை வட்டத்தில் மிகவும் மேலிருந்துள்ள தூரங்களுக்கு விகித சமமாகுமா? காரணத்தை விளக்கவும்.

பலவகை விகிதசமம்

ஒரு பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை மாறும்போது, அதன் உட்கோணங்களின் தொகை மாறுவது விகிதசமத்திலா?

முக்கோணத்தின் உட்கோணங்களின் தொகை $180°$, அறுகோணத்தின் உட்கோணங்களின் தொகை $720°$. பக்கங்களின் எண்ணிக்கை இரண்டு மடங்காகும்போது, கோணங்களின் தொகை இரண்டு மடங்கைவிடக் கூடுதலாகிறது. அப்போது இந்தத தொடர்பு விகிதசமம் அல்ல.

பக்கங்களின் எண்ணிக்கையில் இருந்து 2 ஐக் கழித்த எண்ணால் $180°$ ஐப் பெருக்கியதே, உட் கோணங்களின் தொகை எனத் தெரியும். (எட்டாம் வகுப்பில் **பலகோணங்கள்** என்ற பாடம்) அதாவது, பக்கங்களின் எண்ணிக்கை n எனவும், கோணங்களின் தொகை $s°$ எனவும் எடுத்தால்,

$$s = 180(n-2)$$

இதில் $n-2$ என்ற எண்ணை m என எழுதினால் ?

சமன்பாடு இவ்வாறாகும்,

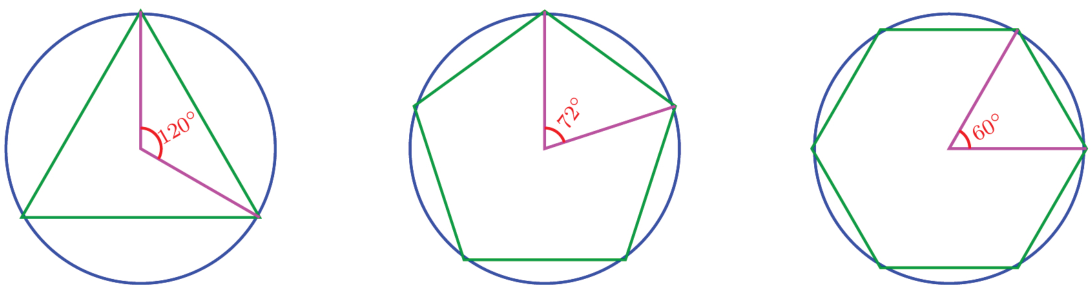
$$s = 180m$$

அப்போது s என்ற அளவு, m என்ற அளவிற்கு விகிதசமத்தில் ஆகும். சாதாரண மொழியில் கூறினால், எல்லா பல கோணங்களிலும், உட்கோணங்களின் தொகை, பக்கங்களின் எண்ணிக்கையில் இருந்து இரண்டைக் கழித்ததின் விகிதசமத்திலாகும்.

இவ்வாறு ஓர் அளவு மற்றொரு அளவுக்கு விகிதசமம் இல்லை எனினும், முதல் அளவினைச் சிறிது மாற்றியதோடு விகிதசமமாகின்ற பல சூழ்நிலைகளும் உண்டு. எடுத்துக்காட்டாக, வட்டத்தின் பரப்பளவு, ஆரத்தின் வர்க்கத்தினுடைய குறிப்பிட்ட (π யினுடைய) மடங்கானதால் பரப்பளவு, ஆரத்தின் விகிதசமம் அல்ல. ஆனால், ஆரத்தின் வர்க்கத்திற்கு விகிதசமம் ஆகும். இதுபோல் உயரத்திலிருந்து பூமியில் விழுகின்ற பொருள் பயணம் செய்கின்ற தூரம், நேரத்திற்கு விகிதசமத்தில் இல்லையெனினும், நேரத்தின் வர்க்கத்திற்கு விகிதசமமாகும்.

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்,

எந்த ஒழுங்கு பலகோணத்தினுடையவும் எல்லா உச்சிகளின் வழியாகவும் கடந்து செல்கின்ற ஒரு வட்டம் வரையலாம் அல்லவா? அடுத்தடுத்த உச்சிகள் இந்த வட்டத்தின் மையத்தில் உருவாக்குகின்ற கோணங்களைப் பற்றி என்ன கூறலாம்?



n பக்கங்கள் உள்ள ஒழுங்கு பலகோணத்தில் இந்த மையக் கோணம் $d°$ என எடுத்தால் இவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பை $d = \frac{360}{n}$ என எழுதலாம்.
அதாவது, இங்கு n இன் தலைகீழ் மதிப்பிற்கு விகிதசமமாக d மாறுகிறது.
இவ்வாறான மாற்றங்களுக்குப் பொதுவான ஒரு பெயர் உண்டு.

ஒரே தொடர்புடைய இரண்டு அளவுகள் மாறும்போது, எப்போதும் ஓர் அளவைக் குறிப்பிடுகின்ற எண்ணின் தலைகீழியின் குறிப்பிட்ட மடங்கோ, பாகமோதான் மற்ற அளவினைக் குறிப்பிடுகின்ற எண் எனில், இந்த மாற்றம் **எதிர் விகிதத்தில்** ஆகும் (inversely proportional) எனக் கூறலாம்.

இதனை இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி இவ்வாறு எழுதலாம்.

x, y என்ற எண்கள் கொண்டு குறிப்பிடுகின்ற இரண்டு அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு

$$y = \frac{k}{x} \quad (k \text{ ஒரு மாறாத எண்})$$

என்ற வடிவத்தில் ஆகும் எனில், இந்த அளவுகளுடைய மாற்றம் எதிர் விகிதத்தில் ஆகும், விகிதசம மாறிலி k.

இப்படிப்பட்ட மாற்றங்களால் வேறுபடுத்திக் கூறுவதற்கு வசதியாக, $y = kx$ என்ற வடிவத்தில் உள்ள மாற்றத்தை **நேர்விகிதம்** (Direct proportion) என்றும் கூறலாம். எதிர் விகிதத்திலுள்ள மாற்றத்தின் வேறொரு எடுத்துக்காட்டைப் பார்ப்போம்.

ஒரு புள்ளியிலிருந்து 100 மீட்டர் தூரத்தில் உள்ள வேறொரு புள்ளிக்கு நேர்கோட்டின் வழியாக ஒரே வேகத்தில் பயணிக்கின்ற ஒரு பொருளை மனதில் நினைக்கவும்.

பயணிக்கின்ற வேகம் 10 மீட்டர் /வினாடி எனில், இரண்டாவது புள்ளியை அடைய 10 வினாடிகள் வேண்டும். வேகம் கூட்டி 25 மீட்டர் / வினாடி என மாற்றினால் 4 வினாடிகள் போதும். பொதுவாக, வேகம் x மீட்டர் / வினாடி என்றும், இலக்கினை அடைவதற்கு எடுக்கின்ற நேரம் y வினாடி எனவும் எடுத்தால் இவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$y = \frac{100}{x}$$

அதாவது, x ற்கு எதிர் விகிதத்தில் y மாறுகிறது.

(1) (i) சமபக்க முக்கோணங்களின் பரப்பளவு, பக்கத்தின் வர்க்கத்திற்கு விகிதசமம் என்று தெளிவுபடுத்துக. விகிதசம மாறிலி என்ன?

(ii) சதுரங்களின் பரப்பளவு பக்கங்களின் வர்க்கத்திற்கு விகித சமமா? அப்படியெனில் விகிதசம மாறிலி என்ன?

(2) பரப்பளவு ஒரு சதுர சென்டிமீட்டர் ஆன செவ்வகங்களில், ஒரு பக்கத்தின் நீளம் மாறுகின்ற முறையில் மற்ற பக்கத்தின் நீளமும் மாற வேண்டும். இந்தத் தொடர்பை இயற்கணித மொழியில் எழுதுக. விகித சமத்தின் மொழியில் இந்தத் தொடர்பை எவ்வாறு கூறலாம்?

(3) ஒரே பரப்பளவு உள்ள முக்கோணங்களில், மிகப்பெரிய பக்கத்தின் நீளத்திற்கும், எதிர் உச்சியிலிருந்து அந்தப் பக்கத்தில் உள்ள செங்குத்து கோட்டின் நீளத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை விகிதசமமாக எவ்வாறு கூறலாம். மிகப்பெரிய பக்கத்திற்குப் பதிலாக, மிகச் சிறிய பக்கத்தை எடுத்தால்?

(4) ஒழுங்கு பலகோணங்களில் பக்கங்களின் எண்ணிக்கைக்கும், ஒரு வெளி கோணத்தின் அளவிற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பின் சமன்பாடு என்ன? இந்தத் தொடர்பை விகித சமமாக்கிக் கூற இயலுமா? விகிதசம மாறிலி என்ன?

கனஅளவும் எடையும்

ஒரே பொருளால் உருவாக்கிய பல பொருட்களின் கன அளவு கூடும்போது எடையும் கூடும் அல்லவா? இந்த மாற்றம் விகித சமமா?

எடுத்துக்காட்டாக, இரும்பினால் உருவாக்கிய எந்தப் பொருளிலும் கன அளவு கன சென்டிமீட்டராகவும், எடை கிராமாகவும் அளந்து எடுத்தால் கன அளவை குறிப்பிடுகின்ற எண்ணின் 7.87 மடங்காக இருக்கும் எடையைக் குறிப்பிடுகின்ற எண் அதாவது இந்த மாற்றத்தின் விகித சம மாறிலி 7.87 ஆகும். செம்பால் உருவாக்கிய பொருட்களில் இந்த விகித சம மாறிலி 8.96 ஆகும்.

இரும்பின் அடர்த்தி கன சென்டிமீட்டருக்கு 7.87 கிராம் செம்பின் அடர்த்தி கன சென்டிமீட்டருக்கு 8.96 கிராம். என்றெல்லாம் இந்தக் கருத்து கூறுகின்றது.

15

புள்ளிவிவரக் கணக்கு

சராசரி

இது ஒருநாள் கிரிக்கெட் போட்டியில் முதல் 10 ஓவர்களில் கிடைத்த ரன்களின் கணக்கு கீழே அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

ஓவர் \ பந்து	1	2	3	4	5	6
1	2	1	0	2	0	0
2	1	4	0	1	0	0
3	0	0	4	0	0	1
4	4	0	2	0	1	0
5	0	0	4	1	0	3
6	2	0	2	2	0	0
7	1	0	4	0	2	1
8	2	0	2	0	3	0
9	0	0	6	2	2	0
10	2	0	0	4	0	2

இதில் ஒவ்வொரு பந்திலும் கிடைத்த ரன்களின் கணக்குகளெல்லாம் உள்ளன. ஆனால் முதல் பத்து ஓவர்களில் என்ன நடந்தது என்பது பற்றிய பொதுவான தகவல்கள் கிடைக்கவில்லை அல்லவா.

அதற்கு அட்டவணையைச் சற்று சுருக்கி, ஒவ்வொரு ஓவரிலும் கிடைத்த மொத்த ரன்களை மட்டும் எழுதுவது நல்லது.

ஓவர்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ரன்	5	6	5	7	8	6	8	7	10	8

முதல் அட்டவணையில் உள்ள எல்லா விவரங்களும் இந்த அட்டவணையில் இல்லாவிட்டாலும் இதிலிருந்து ஒரே பார்வையில் சில தகவல்களைக் காணலாம் அல்லவா?

- ஒவ்வொரு ஓவரிலும் 5 அல்லது அதற்கு அதிகம் ரன்கள் கிடைத்துள்ளன.
- 8 ஓவர்களில் 5 ஐ விட அதிகம் ரன்கள் கிடைத்துள்ளன.

இனி மொத்த ரன்களைக் கூட்டி அட்டவணையே இல்லாமல், இப்படியும் கூறலாம்.

முதல் 10 ஓவர்களில் 70 ரன்கள் கிடைத்தன.

இப்போது மொத்தம் இரண்டு எண்கள் மட்டுமே கூறப்பட்டுள்ளன. ஆனால் இதிலிருந்தே பொதுவான சில கருத்துக்களைக் கூறலாம் அல்லவா?

- திருப்திகரமான ரன் ரேட் ஆகும்.
- இவ்வாறு ஒவ்வொரு பத்து ஓவர்களிலும் 70 ரன்கள் வீதம் எடுப்பது தொடர்ந்தால், 50 ஓவர்களில் ஏறக்குறைய 350 ரன்களை எதிர்பார்க்கலாம்.

இங்கே கிடைத்த 70 ஐ 10 ஆல் வகுத்து, ஓர் எண்ணாக மட்டும் இவ்வாறு கூறலாம்.

ஒரு ஓவரில் ரன் வீதம் 7 ரன்கள் ஆகும்.

இனி முதல் அட்டவணையிலுள்ள விவரங்கள் ஒன்றும் தெரியாமல் இந்த ரன் வீதத்தை மட்டுமே அறிய முடியும் என்றால்?

ஒவ்வொரு ஓவரிலும் சரியாக 7 ரன்கள் வீதம் எடுக்கப்பட்டன எனக் கூற முடியாது. அதற்குப் பதிலாக இவ்வாறெல்லாம் கூறலாம்.

- எல்லா ஓவர்களிலும் கிடைத்தது ஒரே ரன் வீதத்தில் எனில் அது 7 ரன்கள் ஆகும்.
- எல்லா ஓவர்களிலும் 7 ஐவிடக் குறைந்த ரன் வீதம் ஆகாது.

  * அப்படியானால், மொத்தம் 70–ஐ விடக் குறைவாகத் தானே கிடைத்திருக்கும்?

- எல்லா ஓவர்களிலும் 7 ஐ விடக் கூடிய ரன் வீதமும் ஆகாது.

  * அப்படியானால், மொத்தம் 70 ஐ விடக் கூடுதல் ஆகவேண்டுமல்லவா.

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்: ஒரு வகுப்பில் 40 மாணவர்கள் உள்ளனர். ஒரு மருத்துவ உதவி நிதிக்கு, இந்த வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் அனைவரும் நன்கொடை அளித்தனர். ஒவ்வொருவரும் கொடுத்த தொகையை எழுதியிருப்பதைப் பார்த்தால் 40 எண்கள் இருக்கும். இதிலிருந்து மொத்தம் எத்தனை ரூபாய் கிடைத்தது என்றோ, ஒவ்வொருவரும் ஏறக்குறைய எவ்வளவு கொடுத்தார்கள் என்றோ எளிதாகக் கூற முடியாதல்லவா. மாறாக இவ்வாறு கூறினால்?

40 மாணவர்களிடமிருந்து மொத்தம் 2000 ரூபாய் நன்கொடையாகக் கிடைத்தது.

எல்லா மாணவர்களும் கொடுத்தது ஒரே தொகை ஆக வேண்டுமென்பதில்லை. அதனால் ஒவ்வொரு மாணவனும் $2000 \div 40 = 50$ ரூபாய் கொடுத்தார்கள் எனக் கூற இயலாது.

எனினும் முதல் கணக்கைப் போல சில கருத்துக்களைக் கூறலாம்.

- எல்லா மாணவர்களும் ஒரே தொகையைக் கொடுத்தார்கள் எனில், ஒவ்வொருவரும் 50 ரூபாய் கொடுத்திருப்பார்கள்.
- ஒரு மாணவனாவது ஐம்பது ரூபாயோ அதற்கு அதிகமாகவோ கொடுத்திருக்கலாம். (அனைவரும் 50 ரூபாயை விடக் குறைவாகக் கொடுத்தார்கள் எனில், மொத்தம் 2000 ரூபாயை விடக் குறைவாகும் அல்லவா).
- ஒரு மாணவனாவது 50 ரூபாயோ அதற்குக் குறைவாகவோ கொடுத்திருக்கலாம். (அனைவரும் 50 ரூபாயை விடக் கூடுதலாகக் கொடுத்தார்கள் எனில், மொத்தம் 2000 ரூபாயைவிடக் கூடுதலாகும் அல்லவா)
- அனைவரும் கொடுத்தது ஒரே தொகை அல்ல எனில், சிலர் 50 ரூபாயைவிடக் குறைவாகவும், சிலர் 50 ரூபாயைவிடக் கூடுதலாகவும் கொடுத்திருக்கலாம்.

இரண்டு கணக்கிலும் எண் சார்ந்த ஏராளம் தகவல்களிலிருந்து மொத்தத்தில் உள்ள ஏறக்குறைய வடிவம் கிடைப்பதற்கு, அவற்றை ஒரே எண்ணாகச் சுருக்கினோமல்லவா. இரண்டிலும் செய்தது ஒரே கணிதச் செயல்பாடு அல்லவா?

- முதல் கணக்கில் மொத்த ரன்களான 70 ஐ, ஓவர்களின் எண்ணிக்கையான 10 ஆல் வகுத்து, 7 என்ற எண்ணைக் கணக்கிட்டோம்.
- இரண்டாவது கணக்கில் மொத்தம் கிடைத்த தொகை 2000 ரூபாய் இதனைக் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையான 40 ஆல் வகுத்து, 50 என்ற எண்ணைக் கணக்கிட்டோம்.

இவ்வாறு தொகையை எண்ணிக்கையால் வகுத்து கிடைக்கின்ற எண்ணைச் சாதாரண மொழியில் **சராசரி (average)** என்றும், கணித மொழியில் **கூட்டு சராசரி (arithmetic mean)** என்றும் கூறுகிறோம்.

அப்பொழுது மேலே உள்ள இரண்டு கணக்குகளிலும் பார்த்ததை இவ்வாறு கூறலாம்.

- முதல் 10 ஓவர்களில் கிடைத்த ரன்களின் கூட்டு சராசரி 7 (முதல் 10 ஓவர்கள் ஒவ்வொன்றிலும் சராசரி 7 ரன்கள் வீதம் கிடைத்தன).
- 40 குழந்தைகளின் நன்கொடையின் கூட்டு சராசரி 50 ரூபாய் (40 குழந்தைகள் சராசரி 50 ரூபாய் வீதம் நன்கொடை கொடுத்தனர்.)

சமமல்லாத சில எண்களின் கூட்டு சராசரி, அவற்றில் சில எண்களைவிட அதிகமாகவும், சில எண்களைவிடக் குறைவாகவும் இருக்கும் எனக்கண்டோமல்லவா இதனைச் சற்றுகூட விளக்கமாகப் பார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாகக் கிரிக்கெட் கணக்கில் கூட்டு சராசரி 7 ரன்கள் அல்லவா. இதனைக் கணக்கிடுவதற்குப் பயன்படுத்திய அட்டவணையை ஒரு முறைகூடப் பார்க்கலாம்.

ஓவர்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ரன்	5	6	5	7	8	6	8	7	10	8

ஒவ்வொரு ஓவரிலும் கிடைத்த ரன்கள் கூட்டு சராசரியைவிட எவ்வளவு கூடுதல் அல்லது எவ்வளவு குறைவு என்பதையும்கூடக் கணக்கிட்டுப் பார்க்கலாம்.

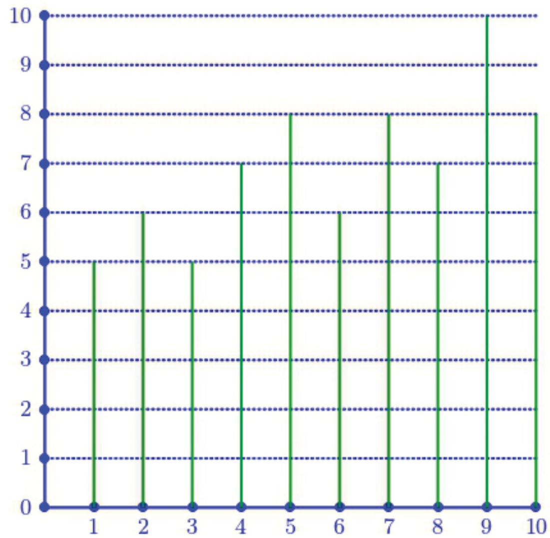
ஓவர்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ரன்	5	6	5	7	8	6	8	7	10	8
சராசரியைவிடக் கூடுதல்					1		1		3	1
சராசரியைவிடக் குறைவு	2	1	2			1				

கூடிய ரன்களையும், குறைந்த ரன்களையும் வெவ்வேறாகக் கூட்டிப் பாருங்கள்.

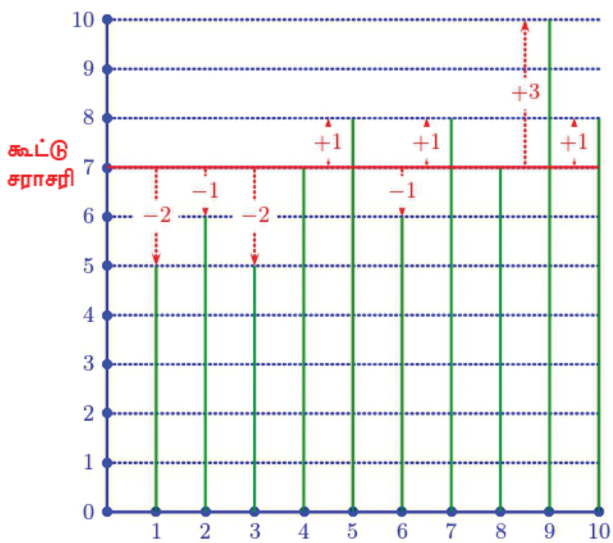
கூடியது $= 1 + 1 + 3 + 1 = 6$

குறைந்தது $= 2 + 1 + 2 + 1 = 6$

ஒவ்வொரு ஓவரிலும் கிடைத்த ரன்களை ஐந்தாம் வகுப்பிலும் ஆறாம் வகுப்பிலும் பார்த்தது போல வரைபட வடிவத்திலும் காண்பிக்கலாம்.



இதில் கூட்டு சராசரியான 7 இன் வழியாக கிடைமட்டமாக ஒரு கோடு வரைந்து, கூட்டு சராசரியைவிடக் கூடியதையும் குறைந்ததையும் அடையாளப்படுத்திப் பார்க்கலாம்.



ஏதேனும் சில எண்களை எடுத்து கூட்டு சராசரியைக் கணக்கிடுக. ஒவ்வொரு எண்ணும் கூட்டுசராசரியைவிட எவ்வளவு கூடுதல் அல்லது எவ்வளவு குறைவு எனக் கணக்கிட்டு, கூடியதையும் குறைந்ததையும் வெவ்வேறாகக் கூட்டிப் பார்க்கவும். இது ஒரே தொகையாகுமா?

இது ஏன் என்று விளக்கமளிக்கலாமா?

அட்டவணைகள்

எண் சாரந்த விவரங்களை அட்டவணைப்படுத்தும் போது, மீண்டும் மீண்டும் வரும் எண்களை ஒரு தொகுப்பாகச் சேர்த்து வைப்பதுதான் வழக்கம். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு வேலை செய்யும் இடத்தில், ஒரே கூலி கிடைப்பவர்களின் எண்ணிக்கையை ஒன்றாகக் காட்டுதல்.

இனி இந்தக் கணக்கைப் பாருங்கள்,

ஓர் அலுவலகத்தில் பலவகை வேலை செய்பவர்களின் எண்ணிக்கையும் ஒரு நாள் கூலியும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

ஒருநாள்கூலி (ரூபாய்)	வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை
675	8
730	4
755	4
780	3
840	1

இவர்களின் ஒருநாள் வருமானத்தின் கூட்டு சராசரி எத்தனை ரூபாய் ?

முதலில் வேலையாட்களின் எண்ணிக்கையையும், அவர்களுக்கு ஒருநாள் கிடைக்கின்ற மொத்தக் கூலியையும் கணக்கிட வேண்டும்.

ஒரே கூலி கிடைக்கின்றவர்களின் மொத்தக் கூலியைப் பெருக்கிக் கணக்கிடலாம் அல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக, 675 ரூபாய் கிடைக்கின்ற 8 ஆட்களின் மொத்தக் கூலி

$$675 \times 8 = 5400 \text{ ரூபாய்}$$

இவ்வாறு ஒரே கூலி கிடைக்கின்றவர்களை ஒன்றாகச் சேர்த்து மொத்தக் கூலியை வெவ்வேறாகக் கணக்கிடலாம்.

ஒருநாள் கூலி (ரூபாய்)	வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை	மொத்தக் கூலி (ரூபாய்)
675	8	5400
730	4	2920
755	4	3020
780	3	2340
840	1	840
மொத்தம்	20	14520

இனி கூட்டு சராசரியைக் கணக்கிடலாம் அல்லவா.

$$\text{சராசரி கூலி} = 14520 \div 20 = 726 \text{ ரூபாய்}$$

இந்தக் கணக்கில் மிகவும் குறைந்த கூலி 675 ரூபாயும், மிகவும் கூடிய கூலி 840 ரூபாயும் அல்லவா? சராசரி கூலியான 726 ரூபாய், 675 ரூபாயைவிடக் கூடுதலும், 840 ரூபாயைவிடக் குறைவும் ஆகும். இது எப்போதும் சரியாகுமா?

இந்த எடுத்துக்காட்டைப் பாருங்கள்:

- 8 எண்களில் மிகச் சிறியது 100 உம், மிகப்பெரியது 200 உம் ஆகும் எனக் கருதுக.
- அவற்றின் தொகை $100 \times 8 = 800$ ஐவிடக் கூடுதலும், $200 \times 8 = 1600$ ஐவிடக் குறைவும் ஆகும்.
- தொகையை 8 ஆல் வகுத்து கிடைக்கும் கூட்டு சராசரி, $800 \div 8 = 100$ ஐவிடக் கூடுதலும், $1600 \div 8 = 200$ ஐவிடக் குறைவும் ஆகும்.

100, 200, 8 என்பதற்குப் பதிலாக வேறு எண்களை எடுத்தாலும் இதே முறையில் சிந்திக்கலாம்.

பொதுவாகக் கூறினால்,

எந்த எண்களினுடையவும் கூட்டு சராசரி, அவற்றில் மிகச் சிறிய எண்ணிற்கும் மிகப்பெரிய எண்ணிற்கும் இடையில் இருக்கும்.

(1) T 20 கிரிக்கெட்டில் ஓர் அணி முதல் 5 ஓவர்களில் 51 ரன்களை எடுத்தது.

(i) அப்போது உள்ள ரன் வீதம் எவ்வளவு?

(ii) இதே ரன் வீதம் தொடர்ந்தால் 20 ஓவர்களில் எத்தனை ரன்களை எதிர்பார்க்கலாம்?

(2) வகுப்பில் ஒரு கணிதத் தேர்வு நடத்தப்பட்டது. மதிப்பெண்களின் அடிப்படையில் மாணவர்களை வகைப்படுத்திய அட்டவணை கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.

மதிப்பெண்	மாணவர்கள்
2	1
3	2
4	5
5	4
6	6
7	11
8	10
9	4
10	2

(i) மாணவர்களுக்குக் கிடைத்த மதிப்பெண்களின் கூட்டு சராசரியைக் கணக்கிடுக.

(ii) கூட்டு சராசரியைவிடக் குறைவான மதிப்பெண்கள் கிடைத்தவர்கள் எத்தனை பேர்?

(iii) கூட்டு சராசரியைவிடக் கூடுதல் மதிப்பெண்கள் கிடைத்தவர்கள் எத்தனை பேர்?

(3) ஒரு விவசாயிக்கு ஒரு மாதம் கிடைத்த இரப்பர் ஷீட்டின் விவரங்கள் கீழே அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

இரப்பர் (கிராம்)	நாட்கள்
9	3
10	4
11	3
12	3
13	5
14	6
16	6

(i) இந்த மாதத்தில் கிடைத்த இரப்பர் ஷீட்டின் சராசரி எடை எவ்வளவு?

(ii) இரப்பரின் விலை ஒரு கிலோ கிராமிற்கு 175 ரூபாயாகும். இந்த மாதத்தில் இரப்பரில் இருந்து கிடைத்த சராசரி வருமானம் எத்தனை ரூபாய் ?

(4) ஒரு பகுதியில் பெய்த மழையின் அளவைப் பொறுத்து ஒரு மாதத்தின் நாட்களை வகைப்படுத்திய அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மழை (மி.மீ)	நாட்கள்
54	3
56	5
58	6
55	3
50	2
47	4
44	5
41	2

அந்த மாதத்தில் அப்பகுதியில் ஒரு நாள் பெய்த மழையின் சராசரி அளவு எவ்வளவு?

பிரிவு அட்டவணைகள்

விவரங்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும்போது பிரிவுகளாகப் பிரித்து அட்டவணைப்படுத்துகின்ற முறையை எட்டாம் வகுப்பில் கற்றிருக்கிறீர்கள் அல்லவா? அத்தகைய ஒரு கணக்கைப் பார்ப்போம்.

50 மதிப்பெண்களுக்கான ஒரு தேர்வை 40 மாணவர்கள் எழுதினார்கள். இது அவர்களுக்குக் கிடைத்த மதிப்பெண்களின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்திய அட்டவணை. மாணவர்களுக்குக் கிடைத்த மதிப்பெண்களின் சராசரி என்ன?

மதிப்பெண்	எண்ணிக்கை
0 - 10	4
10 - 20	6
20 - 30	16
30 - 40	8
40 - 50	6

சராசரியைக் கண்டுபிடிக்க, மதிப்பெண்களின் தொகையைத் தேர்வு எழுதியவர்களின் எண்ணிக்கையால் வகுக்க வேண்டும்.
மதிப்பெண்களின் தொகையைக் கண்டுபிடிப்பது எவ்வாறு?

அட்டவணையின் முதல் வரிசையிலிருந்து, 4 பேருக்குக் கிடைத்த மதிப்பெண்கள் 0 விற்கும் 10 க்கும் இடையில் என்பது மட்டுமே அறிய முடியும். இவர்கள் ஒவ்வொருவருக்கும் கிடைத்த மதிப்பெண்களைத் துல்லியமாக அறியாமல், இவர்களின் மொத்த மதிப்பெண்களைக் கணக்கிட முடியாது அல்லவா. அட்டவணையின் மற்ற வரிசைகளிலும் இந்தப் பிரச்சினை உள்ளது.

இவ்வாறான சூழல்களில் தெரியாத விவரங்களைப் பற்றிச் சில அனுமானங்கள் தேவைப்படும்.

அட்டவணையின் முதல் வரிசையில் கூறப்பட்டுள்ள 4 பேரின் மதிப்பெண்கள் தனித்தனியாகத் தெரியாது எனினும், அவை 0 விற்கும் 10 க்கும் இடையில் எனத் தெரியும். அப்பொழுது, இந்த 4 பேர்களின் மதிப்பெண்களின் சராசரியும் 0 விற்கும் 10 க்கும் இடையில் ஆகும். (எண்களின் சராசரி, அவற்றில் மிகச் சிறியதற்கும் மிகப்பெரியதற்கும் இடையில் இருக்கும் எனக் கண்டிருக்கின்றோம்)

மட்டுமல்லாமல், சாதாரணமாக இந்த சராசரி 0 மதிப்பெண்ணிற்கும் 10 மதிப்பெண்ணிற்கும் ஏறக்குறைய நடுவில் இருக்கும்.

அதனால் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ளவர்களின் மதிப்பெண்களின் சராசரி, அந்தப் பிரிவின் சரியான மையத்தில் வருகின்ற எண் (பிரிவு மையம்) என்ற அனுமானத்தில் இத்தகைய அட்டவணைகளிலிருந்து மொத்தத்தொகை கணக்கிடப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, அட்டவணையின் முதல் வரிசையில் கூறப்பட்ட 4 பேரின் மதிப்பெண்களின் சராசரி, 0 மதிப்பெண்ணிற்கும் 10 மதிப்பெண்ணிற்கும் சரியாக மையத்தில் வருகின்ற 5 எனக் கருதினால், அவர்களின் மொத்த மதிப்பெண்களை $5 \times 4 = 20$ எனக் கணக்கிடலாம்.

இதுபோல ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள மாணவர்களின் மதிப்பெண்களைக் கணக்கிட்டு, அட்டவணையை இவ்வாறு பெரியதாக்கலாம்.

மதிப்பெண்	எண்ணிக்கை	பிரிவு மையம்	மொத்த மதிப்பெண்
0 - 10	4	5	20
10 - 20	6	15	90
20 - 30	16	25	400
30 - 40	8	35	280
40 - 50	6	45	270
மொத்தம்	40		1060

இனி கூட்டு சராசரியைக் கணக்கிடலாம் அல்லவா?

$$1060 \div 40 = 26.5$$

(1) ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களை உயரத்தின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்திய அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது,

உயரம் (செ.மீ)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
148 - 152	8
152 - 156	10
156 - 160	15
160 - 164	10
164 - 168	7

இந்த வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் சராசரி உயரம் எவ்வளவு?

(2) ஒரு பல்கலைக்கழகத்தில் உள்ள ஆசிரியர்களின் எண்ணிக்கையை வயதின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்திய அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது,

வயது	ஆசிரியர்களின் எண்ணிக்கை
25 - 30	6
30 - 35	14
35 - 40	18
40 - 45	20
45 - 50	5
50 - 55	4
55 - 60	3

ஆசிரியர்களின் சராசரி வயதைக் கணக்கிடுக.

(3) ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் எடைகளின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்திய அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எடை (கிராம்)	21 - 23	23 - 25	25 - 27	27 - 29	29 - 31	31 - 33
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	7	8	6	3	1

மாணவர்களின் சராசரி எடையைக் கணக்கிடுக.

குறிப்புகள்

குறிப்புகள்

குறிப்புகள்

குறிப்புகள்

இந்திய அரசியலமைப்புச் சட்டம்

பாகம் 4 அ

இந்தியக் குடிமக்களின் அடிப்படைக் கடமைகள்

51 அ   பிரிவுக்கூறு

(அ) இந்திய அரசியலமைப்புச் சட்டத்துக்கு இணங்கி ஒழுகுதலும், அதன் உயரிய நோக்கங்களையும் நிறுவனங்களையும் மற்றும் தேசியக் கொடியையும் தேசிய கீதத்தையும் மதித்தலும்;

(ஆ) நம் நாட்டின் விடுதலைப் போராட்டத்திற்கு எழுச்சியூட்டிய உயர்ந்த எண்ணங்களை நெஞ்சில் நிறுத்திப் பின்பற்றுதல்;

(இ) இந்தியாவின் இறையாண்மையையும் ஒற்றுமையையும் நேர்மையையும் நிலைநிறுத்திக் காப்பாற்றுதல்;

(ஈ) இந்திய அரசு வேண்டும்போது நாட்டைப் பாதுகாக்கவும் நாட்டுக்காகத் தொண்டு புரியவும் தயாராயிருத்தல்;

(உ) சமயம், மொழி, வட்டாரம், இன வேற்றுமைகள் வரம்பு மீறுகிற நிலையில் அதற்கு எதிராக எல்லா இந்திய மக்களிடையேயும் நல்லிணக்கத்தையும், பொதுவான உடன்பிறப்பு உணர்வையும் வளர்த்தல்; பெண்மையின் மதிப்புக்கு இழிவு ஏற்படுத்தும் செயல்களை விட்டொழித்தல்;

(ஊ) நமது கலவைப் பண்பாட்டின் உயர்ந்த மரபை மதித்துப் பேணுதல்;

(எ) காடுகள், ஏரிகள், ஆறுகள், வனவிலங்குகள் உள்ளிட்ட இயற்கையான சுற்றுப்புறச் சூழலைப் பாதுகாத்து மேம்படுத்தலும், வாழும் உயிர்கள் மீது இரக்கம் கொள்ளுதலும்;

(ஏ) அறிவியல் சார்ந்த மனப்பாங்கு, மனிதநேயம், விசாரித்து அறியும் உள்ளறிவுத்திறம், சீர்திருத்தத்திறம் ஆகியவற்றை வளர்த்தல்.

(ஐ) பொது உடைமைகளைப் பாதுகாத்தலும் வன்முறையை விட்டொழித்தலும்;

(ஒ) பெரும் முயற்சிகள் சாதனைகளின் உயர்ந்த படிகளை நோக்கி இடைவிடாமல் முன்னேறத்தக்க வகையில் தனிமனித கூட்டு நடவடிக்கையின் எல்லாப் பரப்புகளிலும் முதன்மை நிலை எய்த முயலுதல்;

(ஓ) ஆறு வயதிற்கும் பதிநான்கு வயதிற்கும் இடைப்பட்ட பருவமுள்ள தன் குழந்தைக்கு, அதன் பெற்றோர் அல்லது பாதுகாவலர் கல்விக்கான வாய்ப்புகளை ஏற்படுத்திக் கொடுத்தல்;

ஆகிய இவையனைத்தும் ஒவ்வொரு இந்தியக் குடிமகனின் அடிப்படைக் கடமைகளாகும்.

குழந்தைகளின் உரிமைகள்

அன்பார்ந்த குழந்தைகளே,

உங்கள் உரிமைகள் எவையென்று தெரியவேண்டாமா? உங்கள் உரிமைகளைப் பாதுகாக்கத் தற்போது ஓர் ஆணையம் செயல்பட்டு வருகிறது. அதன் பெயர் கேரள மாநிலப் பாலர் உரிமைப் பாதுகாப்பு ஆணையம் என்பதாகும். உரிமைகள் பற்றிய அறிவு, உங்கள் பங்கேற்பு, பாதுகாப்பு, சமூகநீதி போன்றவற்றை உறுதிப்படுத்த ஆக்கமும் ஊக்கமும் அளிக்கிறது இவ்வாணையம். உங்கள் உரிமைகள் எவையென்று பார்ப்போம்.

- பேசுவதற்கும்கருத்து வெளியீட்டிற்குமான சுதந்திரம்.
- தனிநபர் சுதந்திரம் மற்றும் உயிர் பாதுகாப்பு உரிமை.
- வாழ்வதற்கும் வளர்வதற்குமான உரிமை.
- ஜாதி-மத-இன-நிற சிந்தனைகளுக்கு அப்பாற்பட்டு மதிப்பதற்கும் அங்கீகரிப் பதற்குமான உரிமை.
- உடல், உள, பால் பலாத்காரங்களிலிருந்து பாதுகாத்துக்கொள்வதற்கும் பராமரிப்பதற் குமான உரிமை.
- பங்கேற்பிற்கான உரிமை.
- குழந்தைத் தொழில் மற்றும் ஆபத்தான தொழில்களிலிருந்து விடுதலை.
- குழந்தைத்திருமணத்திலிருந்து பாதுகாப்பு.
- தமது பண்பாட்டை அறிந்து அதற்கேற்ப வாழ் வதற்கான உரிமை.
- புறக்கணிப்புகளிலிருந்து பாதுகாப்பு.
- இலவச - கட்டாயக் கல்விக்கான உரிமை.
- விளையாடுவதற்கும் கற்பதற்குமான உரிமை.
- அன்பும் பாதுகாப்பும் நிறைந்த குடும்பத்தையும் சமூகத்தையும் பெறுவதற்கான உரிமை

சில கடமைகள்

- பள்ளிக்கூடம், பொதுஇடங்கள் ஆகியவற்றை அழியாமல் பாதுகாக்க வேண்டும்.
- பள்ளிக்கூடத்திலும் கற்றல் செயல்பாடு களிலும் ஒழுக்கத்தைக் கடைபிடிக்க வேண்டும்.
- பள்ளிக்கூட அதிகாரிகள், ஆசிரியர், பெற்றோர், உடன் பயில்வோரை மதிக்கவும் அங்கீகரிக் கவும் வேண்டும்.
- ஜாதி-மத-இன-நிறச் சிந்தனைகளுக்கு அப்பாற் பட்டு எல்லோரையும் மதித்து அங்கீகரிப்பதற் கான மன நிலையை அடையவேண்டும்

தொடர்புகொள்ள வேண்டிய முகவரி:

கேரளமாநிலக் குழந்தைகள் உரிமைப் பாதுகாப்பு மையம்

ஸ்ரீ கணேஷ், TC. 14/2036, வான்ரோஸ் ஜங்ஷன்,

கேரளா பல்கலைகழகம் P.O, திருவனந்தபுரம்–34, தொலைபேசி : 0471–2326603

இ-மெயில் : childrights.cpcr@kerala.gov.in, rte.cpcr@kerala.gov.in

www.kescpcr.kerala.gov.in

சைல்டு ஹெல்ப் லைன்–1098, கிரைம் ஸ்டோப்பர்–1090, நிர்பயா–1800 425 1400

கேரள போலீஸ் ஹெல்ப் லைன் – 0471–324300/44000/45000

*Online **R. T. E Monitoring : www.nireekshana.org.in***