ಗಣಿತ
MATHEMATICS

ಭಾಗ - 2

ತರಗತಿ

IX

ಕೇರಳ ಸರಕಾರ
ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ

ತಯಾರಿಸಿದವರು
ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಮಿತಿ (SCERT), ಕೇರಳ

2024

ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

ಜನಗಣ ಮನ ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ
ಪಂಜಾಬ ಸಿಂಧು ಗುಜರಾತ ಮರಾಠ
ದ್ರಾವಿಡ ಉತ್ಕಲ ವಂಗ
ವಿಂಧ್ಯ ಹಿಮಾಚಲ ಯಮುನಾ ಗಂಗಾ
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿತರಂಗ
ತವಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ
ತವಶುಭ ಆಶಿಷ ಮಾಗೇ
ಗಾಹೇ ತವಜಯ ಗಾಥಾ
ಜನಗಣ ಮಂಗಲದಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ
ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ
ಜಯ ಜಯ ಜಯ ಜಯಹೇ!

ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

ಭಾರತವು ನನ್ನ ದೇಶ. ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ ಸಹೋದರ, ಸಹೋದರಿಯರು.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ಅದರ ಸಂಪನ್ನ ಹಾಗೂ ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣವಾದ ಪರಂಪರೆಗೆ ನಾನು ಹೆಮ್ಮೆಪಡುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ತಂದೆ, ತಾಯಿ ಮತ್ತು ಗುರುಹಿರಿಯರನ್ನು ಗೌರವಿಸುತ್ತೇನೆ. ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರೊಡನೆ ಸೌಜನ್ಯದಿಂದ ವರ್ತಿಸುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶ ಮತ್ತು ದೇಶದ ಜನರಿಗೆ ನನ್ನ ಶ್ರದ್ಧೆಯನ್ನು ಮುಡಿಪಾಗಿಡುತ್ತೇನೆ. ಅವರ ಕ್ಷೇಮ ಮತ್ತು ಸಮೃದ್ಧಿಯಲ್ಲೇ ನನ್ನ ಆನಂದವಿದೆ.

ಗಣಿತ

9

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in
e-mail : scertkerala@gmail.com, Phone : 0471 - 2341883,
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2024
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of General Education, Government of Kerala

ಪ್ರೀತಿಯ ಮಕ್ಕಳೇ,

ಜಗತ್ತನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಮತ್ತು ವಿಶೇಷತೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಮಾನವನಿಗೆ ಹಲವು ರೀತಿಯ ಅಳತೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವು ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗಿತ್ತು. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ರೂಪುಗೊಳ್ಳುವುದು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿನ ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ತಿಳಿದಿರುವೆವು. ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೋ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೋ ಸೂಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಇರುವ ಹೊಸ ರೀತಿಗಳ ಕುರಿತು ಇಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯೋಣ. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕಲಿಕೆಯೂ ಇಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯುವುದು.

ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು, ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನೂ ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳ ಕುರಿತಾದ ಯೋಚನೆಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಒತ್ತು ನೀಡುವ ಗಣನೆ ಚಿಂತನೆಯಾಗಿದೆ ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆಯ ಹೊಸ ದೃಷ್ಟಿಕೋನ. ಹಲವು ತರದ ಕ್ರಿಯಾ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಕಲಿತು ಅವುಗಳನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ ಅವು ಹೇಗೆ ಕಾರ್ಯವೆಸಗುವುದು ಎಂಬುದಾಗಿ ತಿಳಿಯುವುದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಕಾರ್ಯಕ್ಷಮವಾಗಿಸಲು ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಪ್ರಧಾನವಾಗಿದೆ. ಗಣನೆ ಚಿಂತನೆ ಎಂಬುದರಿಂದ ಅರ್ಥವಾಗುವುದು ಇದಾಗಿದೆ. ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಚಲನಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೆಚ್ಚು ಆಶಯಗ್ರಹಣವನ್ನು ಸ್ವಾಯತ್ತಗೊಳಿಸಲು ಸೂಕ್ತವಾಗಿರುವ ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ಎಂಬ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂನ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಶುಭ ಹಾರೈಕೆಗಳೊಂದಿಗೆ,

ಡಾ. ಜಯಪ್ರಕಾಶ್ ಆರ್. ಕೆ.
ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ., ಕೇರಳ

TEXTBOOK DEVELOPMENT COMMITTEE

Advisor

Dr. E. Krishnan
Head of the Department, Mathematics (Rtd),
University College, Thiruvananthapuram

Chairman

Dr. P. Ramesh Kumar
Dept of Mathematics (Rtd), University of Kerala,
Karyavattam, Thiruvananthapuram

Experts

Dr. Shikhi M.
Associate Professor,
College of Engineering
Thiruvananthapuram

Madhu B.
Assistant Professor,
Regional Institute of
Education, Mysore

A. Sukesh
Assistant Professor,
Govt. College of Engineering,
Kannur

Members

R. Ramanujam
H.S.S.T. Mathematics,
M.N.K.M. Govt. Higher
Secondary School
Pulappatta, Palakkad

Vijaya Kumaran T. K.
H.S.S.T., (Rtd),
G.M.R.H.S.S. for Girls,
Paravanadukam, Kasaragod

C. T. Firos Babu
H.S.T. Mathematics,
GGVHSS Vandoor, Malappuram

Unnikrishnan M. V.
H.S.T. Mathematics,
G.H.S. Kuttiyeri,
P. O. Kuttiyeri, Kannur

Nandakumar C
H.S.T. Mathematics,
Chodavoor Higher Secondary
School Chambad, Kannur

Shrijith Muriyambath
H.S.T. Mathematics,
G.H.S.S. Chorod, Kurikkilad,
Vadakara, Kozhikode

Padmaprasad K
H.S.T. Mathematics,
Pandalloor H.S.S.,
Kadambod Post, Malappuaram

Ubaidulla K C
H.S.T. Mathematics,
S.O.H.S. Arikkode,
Malappuram

Firosa Moidu
H.S.T. Mathematics,
Calicut Girls V.H.S.S.
Kundungal, Kallayi, Kozhikode

Priya Raj
H.S.T. Mathematics,
M.G.D. Highschool
Pudusseri, Pudusseri South,
Pathanamthitta

Dhaneshan M. V.
H.S.S.T English,
G.F.H.S.S. Padannakadappuram,
Kasaragod

Geomy N. George
China Media,
Shornur

KANNADA VERSION

Subject Expert

Mahalingeshwar Raj D.
Rtd. DDE

Language Expert

Ramanna D., Rtd. HM

Participants

Harshakumara M., H.S.T., SGKHS Kudlu
Raghava A., HM, GHSS Edneer
Balakrishna P., H.S.T., BEMHSS, Kasaragod
Ratheesha D., H.S.T., GVHSS Karadka
Prapullachandra C H., HM, GVHSS Delampady

Academic Co-ordinator

Dr. Anil Kumar A. K.
Research Officer, S.C.E.R.T.

State Council of Educational Research and Technology (SCERT)
Vidyabhavan, Poojappura, Thiruvananthapuram 695 012

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

8	ವೃತ್ತಗಳ ಅಳತೆಗಳು	151
9	ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು	165
10	ಬಹುಪದಗಳು	177
11	ವೃತ್ತಭಾಗಗಳು	185
12	ಸ್ತಂಭಗಳು	195
13	ಬಹುಪದಚಿತ್ರಗಳು	209
14	ಅನುಪಾತ	223
15	ಸ್ಟಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್	233

ಈ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ನೋಡುವ

ಸಂಶೋಧನೆ

ಐ.ಸಿ.ಟಿ. ಸಾಧ್ಯತೆ

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ಭಾರತದ ಜನರಾದ ನಾವು ಭಾರತವನ್ನು ಒಂದು [1]**[ಸಾರ್ವಭೌಮ ಸಮಾಜವಾದೀ ಸರ್ವಧರ್ಮ ಸಮಭಾವದ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ಗಣರಾಜ್ಯವಾಗಿ]** ರಚಿಸಲು ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮಸ್ತ ನಾಗರಿಕರಿಗೆ:

ಸಾಮಾಜಿಕ, ಆರ್ಥಿಕ ಮತ್ತು ರಾಜಕೀಯ **ನ್ಯಾಯ** ;
ವಿಚಾರ, ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ, ವಿಶ್ವಾಸ, ಧರ್ಮಶ್ರದ್ಧೆ ಮತ್ತು ಉಪಾಸನಾ **ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ** ;
ಸ್ಥಾನಮಾನ ಹಾಗೂ ಅವಕಾಶ **ಸಮಾನತೆ**

ದೊರೆಯುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಮತ್ತು ವ್ಯಕ್ತಿ ಗೌರವವನ್ನು,[2][ರಾಷ್ಟ್ರದ ಏಕತೆಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಅಖಂಡತೆಯನ್ನು] ಸುನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸಿ ಅವರಲ್ಲಿ **ಭ್ರಾತೃಭಾವನೆಯನ್ನು** ವೃದ್ಧಿಸಲು ಶ್ರದ್ಧಾಪೂರ್ವಕ ಸಂಕಲ್ಪ ಮಾಡಿದವರಾಗಿ;

ನಮ್ಮ ಸಂವಿಧಾನ ಸಭೆಯಲ್ಲಿ 1949ನೆಯ ಇಸವಿ ನವೆಂಬರ್ ತಿಂಗಳ ಇಪ್ಪತ್ತಾರನೆಯ ತಾರೀಖಾದ ಈ ದಿವಸ **ಈ ಮೂಲಕ ಈ ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿ, ಅಧಿನಿಯಮಿಸಿ ಅರ್ಪಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.**

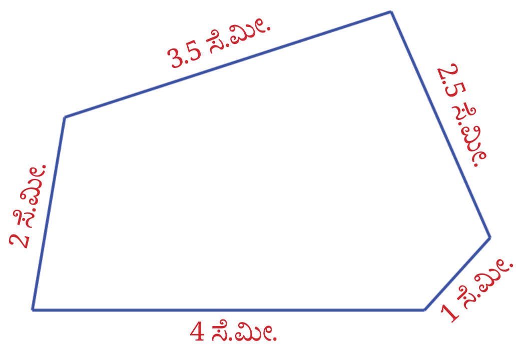
1. 1976ನೇ ಇಸವಿಯ ಭಾರತ ಸಂವಿಧಾನ (ನಲುವತ್ತೆರಡನೆಯ ತಿದ್ದುಪಡಿ) ಅಧಿನಿಯಮದ 2ನೇ ಪ್ರಕರಣದ ಮೇರೆಗೆ “ಸಂಪೂರ್ಣ ಪ್ರಭುತ್ವ ಸಂಪನ್ನ ಲೋಕತಂತ್ರಾತ್ಮಕ ಗಣರಾಜ್ಯವಾಗಿ" ಎಂಬ ಪದಗಳ ಬದಲಾಗಿ (3-1-1977 ರಿಂದ ಜಾರಿಗೆ ಬರುವಂತೆ) ಪ್ರತ್ಯಾಯೋಜಿಸಲಾಗಿದೆ.
2. ಮೇಲ್ಕಂಡ ಅಧಿನಿಯಮದ 2ನೇ ಪ್ರಕರಣದ ಮೇರೆಗೆ "ರಾಷ್ಟ್ರದ ಏಕತೆಯನ್ನೂ” ಎಂಬ ಪದಗಳ ಬದಲಾಗಿ (3 - 1 - 1977ರಿಂದ ಜಾರಿಗೆ ಬರುವಂತೆ) ಪ್ರತ್ಯಾಯೋಜಿಸಲಾಗಿದೆ.

8

ವೃತ್ತಗಳ ಅಳತೆಗಳು

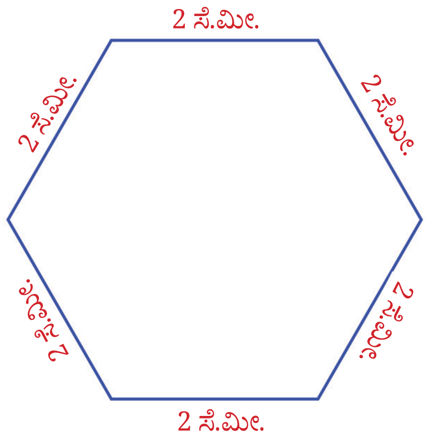
ವ್ಯಾಸವೂ ಸುತ್ತಳತೆಯೂ

ಒಂದು ಬಹುಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು:



ಸುತ್ತಳತೆ $4 + 1 + 2.5 + 3.5 + 2 = 13$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

ಸಮಬಹುಭುಜವಾದರೆ, ಇನ್ನೂ ಸುಲಭ:



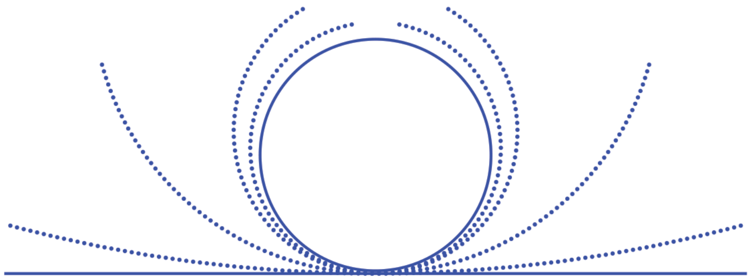
ಸುತ್ತಳತೆ $6 \times 2 = 12$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್

ವೃತ್ತವಾದರೇ?

ನೂಲು ಅಥವಾ ಹಗ್ಗದಿಂದ ಅಳೆದು ನೋಡಬಹುದು. ಆದರೆ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಾಗದ ಸಂದರ್ಭಗಳಿರುವುದಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಒಂದು ಸರಿಗೆಯನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ, 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವ್ಯಾಸವಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸರಿಗೆಯ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು ?

ಸರಿಗೆಯನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ ವೃತ್ತವನ್ನುಂಟುಮಾಡುವಾಗ, ಸರಿಗೆಯ ಉದ್ದವು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗುವುದಲ್ಲವೇ.



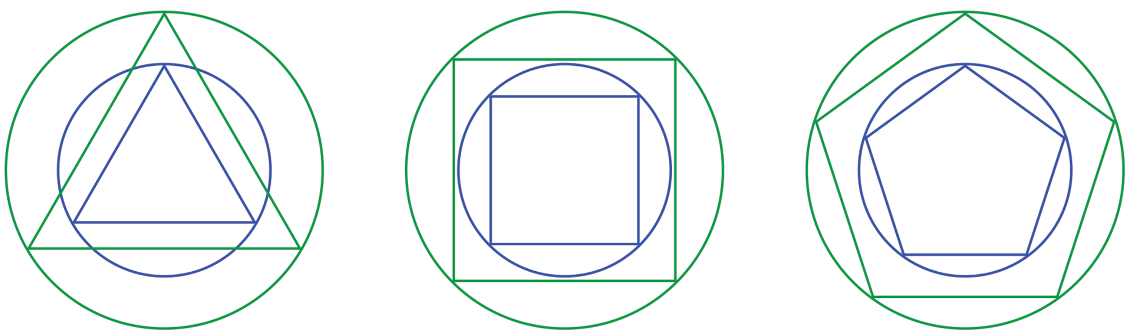
ಆಗ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡಲು, ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆಯ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕು.

ವ್ಯಾಸ ದೊಡ್ಡದಾದಂತೆ, ಸುತ್ತಳತೆಯು ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು; ಈ ಬದಲಾವಣೆಯು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿರುವುದೇ ಎಂದು ನೋಡಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಭಾಗ ಅಥವಾ ಮಡಿಯಾಗಿಸಿದರೆ, ಸುತ್ತಳತೆಯು ಅದೇ ಭಾಗ ಅಥವಾ ಮಡಿಯಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದೇ ?

ವ್ಯತ್ಯಸ್ತ ವ್ಯಾಸಗಳಿರುವ ವೃತ್ತಗಳೊಳಗೆ ಎಳೆಯುವ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಬದಲಾಗುವುದು, ವ್ಯಾಸವು ಬದಲಾಗುವ ದರದಲ್ಲೇ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯುವುದು.

ಇಂತಹ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಬದಲಾಗುವುದು, ತ್ರಿಜ್ಯವು ಬದಲಾಗುವ ಅದೇ ದರದಲ್ಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಒಂದು ವೃತ್ತದೊಳಗೂ ಅದರ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತದೊಳಗೂ ಹಲವು ಸಮಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲೂ ದೊಡ್ಡ ಬಹುಭುಜದ ಭುಜವು, ಸಣ್ಣ ಬಹುಭುಜದ ಭುಜದ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯೇ ಆಗಿರುವುದು.

ವ್ಯಾಸವು, ತ್ರಿಜ್ಯದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ ಬಹುಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ಭುಜದ ಉದ್ದದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೂರು ಮಡಿ, ನಾಲ್ಕು ಮಡಿ, ಐದು ಮಡಿಯೂ) ದೊಡ್ಡ ಬಹುಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ಸಣ್ಣ ಬಹುಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.

ಆಗ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಬದಲಾಗುವುದು, ವ್ಯಾಸವು ಬದಲಾಗುವ ದರದಲ್ಲೇ ಆಗಿದೆ.

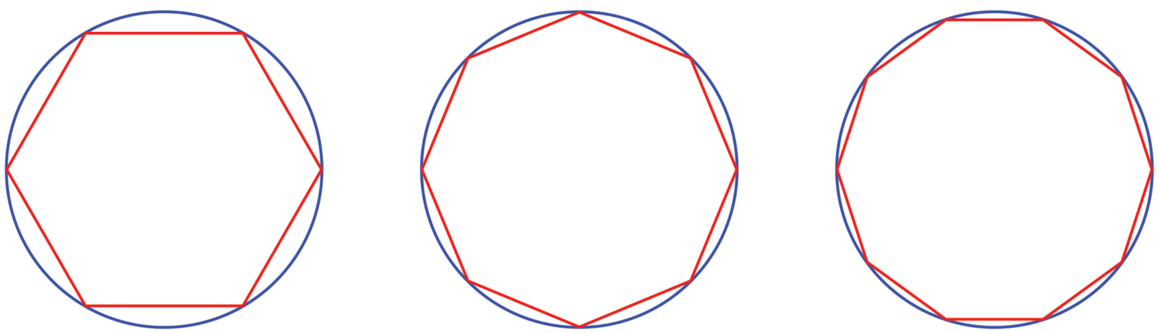
ಆದುದರಿಂದ, ವೃತ್ತಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ ಬದಲಾಗುವುದು, ವ್ಯಾಸದ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರದಲ್ಲೇ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದೇ ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಎರಡು ಮಡಿ ಮಾಡಿದಾಗ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯೂ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗುವುದೇ ?

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ *A* ಎಂಬ ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು *B* ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Min = 3, Max = 200 ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು *Integer slider 'n'* ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. *Angle with given size* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ *B* ಮತ್ತು *A* ಯಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ $(360/n)°$ ಎಂದು ನೀಡಬೇಕು. *Regular Polygon* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ *B* ಯಲ್ಲೂ, *B'* ನಲ್ಲೂ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಬಹುಭುಜದ ಶಿರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ *n* ಎಂದು ನೀಡಿದಾಗ ವೃತ್ತದೊಳಗೆ *n* ಭುಜಗಳಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಭುಜ ಲಭಿಸುವುದು. ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಬಹುಭುಜಕ್ಕೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು?

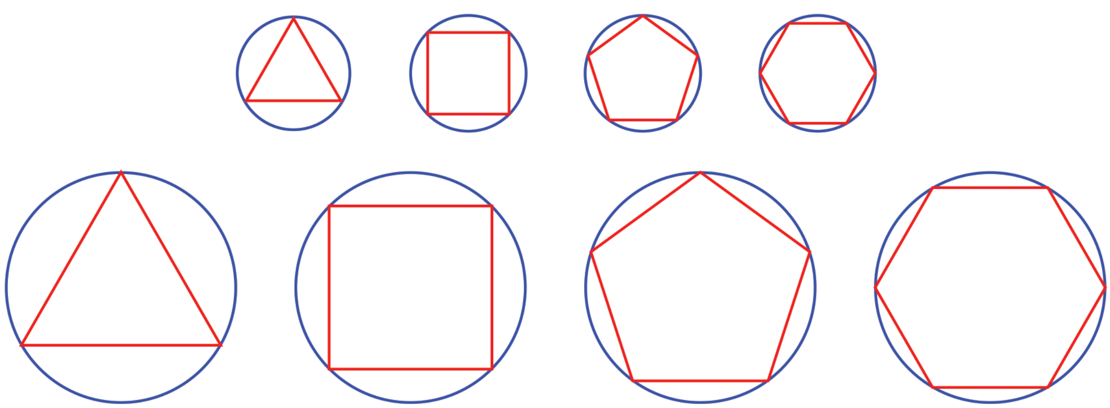
ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರವನ್ನೂ ಗಮನಿಸಬೇಕು: ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಎಳೆಯುವ ಬಹುಭುಜಗಳ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ, ಅದು ವೃತ್ತದ ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ಬರುವುದು.

ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



6 ಭುಜ 8 ಭುಜ 10 ಭುಜ

ಇನ್ನು ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೂ, ವ್ಯಾಸವು ಎರಡು ಮಡಿ ಆಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೂ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ.



ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವು ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು.

ಎರಡೂ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ಆಯಾ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು.

ಅಳತೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸ್ವಲ್ಪ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ.

- ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು.
  - ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದೊಳಗಿನ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ p_1, ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆ p_2, ಸಮಪಂಚಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ $p_3, \dots$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.
  - ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು $2p_1, 2p_2, 2p_3, \dots$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಾಗಿದೆ.
- ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು, ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು.
  - ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು c ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.
  - $p_1, p_2, p_3, \dots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು c ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು.
- ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಭುಜಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು.
  - ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು d ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.
  - $2p_1, 2p_2, 2p_3, \dots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು d ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು.

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ, ಕೆಂಪು ಆಯತದೊಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಎರಡು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಹೇಳಿರುವುದು $p_1, p_2, p_3, \dots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು c ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವುದು ಎಂದಾಗಿದೆ.

ಇದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, $2p_1, 2p_2, 2p_3, \dots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $2c$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಬರಬೇಕು.

ಆದರೆ, ಎರಡನೇ ಆಯತದೊಳಗೆ ಹೇಳಿರುವ ವಿಚಾರವು, $2p_1, 2p_2, 2p_3, \dots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು d ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವುದು ಎಂದಾಗಿದೆ.

ಆಗ $d = 2c$ ಆಗಬೇಕಲ್ಲವೇ.

ಅಂದರೆ, ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ, ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಎರಡನೇ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಎರಡು ಮಡಿಯ ಬದಲಾಗಿ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಮಡಿಯೋ ಭಾಗವೋ ಆಗಿರುವುದಾದರೂ, ಸುತ್ತಳತೆಯು ಅದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದೆಂದು ಇದರಂತೆ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ Min = 0, Max = 10 ಆಗುವಂತೆ d ಎಂಬ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇನ್ನು d ಯು ವ್ಯಾಸವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ *Circle : Centre & Radius* ಟೂಲನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಜ್ಯ $\frac{d}{2}$ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. *Distance or Length* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು *Algebra view* ನಲ್ಲಿಯೂ ನೋಡಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ *right click* ಮಾಡಿ *Rename* ಎಂಬ ಆಯ್ಕೆಯ ಮೂಲಕ *'c'* ಎಂದು ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕು. ಸ್ಲೈಡರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಸುತ್ತಳತೆಯ ಬದಲಾವಣೆಯು ವ್ಯಾಸದ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರದಲ್ಲೇ ಆಗಿದೆಯೇ? $\frac{c}{d}$ ಎಂದು *Input bar* ನಲ್ಲಿ ನೀಡಿದರೆ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಸದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು *Algebra view* ನಲ್ಲಿ ಲಭಿಸುವುದು. ವ್ಯಾಸವು ಬದಲಾಗುವಾಗ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬದಲಾಗುವುದೇ ?

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ವೃತ್ತಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು, ವ್ಯಾಸಗಳು ಬದಲಾಗುವ ಅದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುದು.

ಆಗ, ವ್ಯಾಸ 1 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ, ಯಾವುದೇ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ವ್ಯಾಸದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

ಇದನ್ನು ಮಾಡುವ ಮೊದಲು, ಈಗ ಕಂಡುಕೊಂಡ ವಿಚಾರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ:

(1) ವ್ಯಾಸ 2 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಸರಿಸುಮಾರು 6.28 ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಅಳೆದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಯಿತು.

(i) ವ್ಯಾಸ 4 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟಾಗಿದೆಯೆಂದು ಅಳೆಯದೇ ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ?

(ii) ವ್ಯಾಸ 1 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯೋ ?

(iii) ವ್ಯಾಸ 3 ಮೀಟರ್ ಆದರೇ ?

(2) ಒಂದು ಸರಳನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವ್ಯಾಸವಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಇದರ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಉದ್ದವಿರುವ ಸರಳನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದಾದ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ?

ಹೊಸತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ

ಭುಜದ ಉದ್ದ 1 ಆಗಿರುವ ಚೌಕದ ಕರ್ಣದ ಅಳತೆಯಂತೆ, ಭುಜದ ಅಳತೆ 2 ಆಗಿರುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರದಂತೆ, ವ್ಯಾಸ 1 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಇತರ ಅಳತೆಗಳಂತೆ ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ. ಇದರ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದಿರುವುದು ಹದಿನೆಂಟನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಾಗಿದೆ.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}+\sqrt{3}$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಒಂದು ಪ್ರಧಾನವಾದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ; ಇದನ್ನು ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಥವಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಗಳು (ವರ್ಗಮೂಲ, ಘನಮೂಲ ಇತ್ಯಾದಿ) ಅಥವಾ ಅವುಗಳ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಚಿಹ್ನೆಯಿದೆ: π

ಇದು ಗ್ರೀಕ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ "ಪೈ" (pi) ಎಂಬ ಅಕ್ಷರವಾಗಿದೆ.

ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲವಾದುದರಿಂದ π ಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಮಾತ್ರವೇ ಸಾಧ್ಯ. ನಾಲ್ಕು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$\pi \approx 3.1416$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ವ್ಯಾಸವು 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ π ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್; ವ್ಯಾಸ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ 2π ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್; ವ್ಯಾಸ $1\frac{1}{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ $\frac{3}{2}\pi$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಅದರ ವ್ಯಾಸದ π ಮಡಿಯಷ್ಟಾಗಿರುವುದು.

ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವರು:

ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯದ 2π ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.

ಬಿ.ಸಿ.ಇ. ಮೂರನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಸ್ ದೇಶದ ಆರ್ಕಿಮಿಡಿಸನು 96 ಭುಜಗಳಿರುವ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ವ್ಯಾಸದ $3\frac{10}{71}$ ಮಡಿಗಿಂತ ಅಧಿಕವೂ $3\frac{1}{7}$ ಮಡಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯೂ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದನು. ಇಂದಿನ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, ನಾಲ್ಕು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ

$$3.1408 < \pi < 3.1428$$

(ಆರ್ಕಿಮಿಡಿಸನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ ನ್ನು ಬಹಳಷ್ಟು ಕಾಲದ ವರೆಗೆ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು).

ಸಿ.ಇ. ಹದಿನಾಲ್ಕನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಕೇರಳದಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಮಾಧವನ್ ಎಂಬವರು, ಅತಿ ನಿಖರತೆಯಿಂದ π ಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಜ್ಯಾಮಿತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸದೆಯೇ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾದ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರು. ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ

$$\pi = 3.1415926535...$$

ಎಂದೆಲ್ಲಾ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಇಂದು ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಕೋಟಿಗಟ್ಟಲೆ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನದ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

ಚರಿತ್ರೆಯೊಂದಿಗೆ π

ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಿರುವ ವಿಧಾನಗಳ ಕುರಿತಾದ ಚಿಂತನೆಗಳು ನಾಲ್ಕು ಸಾವಿರ ವರ್ಷಗಳಷ್ಟು ಹಳೆಯದಾಗಿದೆ. ಇಂದಿನ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಇವುಗಳೆಲ್ಲವೂ π ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಪ್ರಯತ್ನಗಳಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಬಹುದು.

ಪುರಾತನ ಈಜಿಪ್ಟ್‌ನಲ್ಲಿದ್ದ ಅಹಮೋಸ್ ಪಪೈರಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ $\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3.16$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು, ಸರಿಸುಮಾರು ಇದೇ ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲಿ (ಬಿ.ಸಿ.ಇ. 1500) ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯಾದ ಆವೆ ಮಣ್ಣಿನ ಒಂದು ಹಲಗೆಯಿಂದ, $\pi \approx \frac{25}{8} = 3.125$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಬಿ.ಸಿ.ಇ. ಏಳನೇ ಶತಮಾನದ್ದೆಂದು ತಿಳಿಯಲಾದ ಭಾರತದ ಶತಪಥ ಬ್ರಾಹ್ಮಣ ಎಂಬ ಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಇದು $\frac{339}{108} \approx 3.139$ ಆಗಿದೆ.

ವೃತ್ತದೊಳಗೂ ಹೊರಗೂ 96 ಭುಜಗಳಿರುವ ಸಮಬಹುಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಆರ್ಕಿಮಿಡಿಸನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವುದು, $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ ಎಂದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ $3.1408 < \pi < 3.1428$

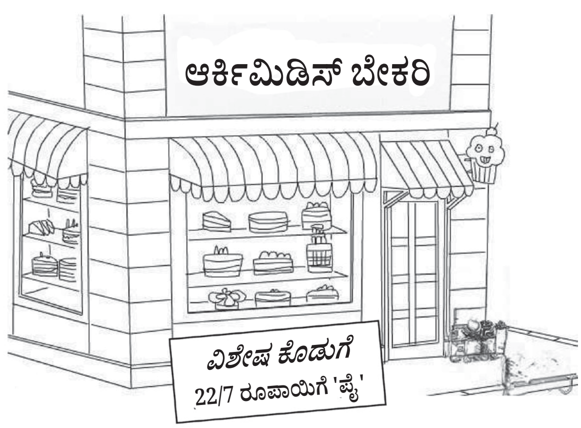
ಸಿ.ಇ. 180 ರಲ್ಲಿ ಚೈನಾದ ಸು ಚಾಂಗ್ಲಿ, ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 12288 ಭುಜಗಳಿರುವ ಸಮಬಹುಭುಜವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದನು.

ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಏಳು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನದವರೆಗೆ ಸರಿಯಾಗಿದೆ. ಸರಿಸುಮಾರು ಸಾವಿರ ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ನಿಖರವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಯಿತು.

ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾಲ್ಕು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ ಮಾತ್ರವೇ π ಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್ ವರೆಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ,

$$\pi \times 2 \times 5 = 10\pi = 10 \times 3.1416 = 31.416 \text{ ಮೀಟರ್}$$

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಸ 1 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು? Options → Rounding → 15 Decimal Places ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 15 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.

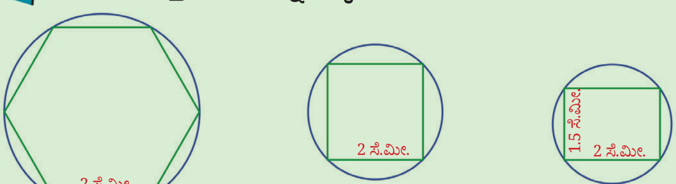


ವ್ಯಾಸ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲು, 5π ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಸರಳು ಬೇಕು; ಅಂದರೆ ಸರಿಸುಮಾರು $5 \times 3.14 = 15.7$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಈಗ ಪಾಠದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರ ಸಿಕ್ಕಿತಲ್ಲವೇ ?

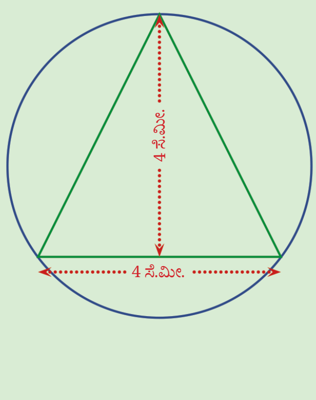
ಇನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳನ್ನು π ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೇ ಬರೆದರೆ ಸಾಕು. ದಶಮಾಂಶ ರೂಪವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

(1) ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.



(2) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.

(3) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗಿರುವ ಪಾದವೂ ಎತ್ತರವೂ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.



ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತ್ರಿಜ್ಯ $\frac{1}{2\pi}$ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ? ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲು *Circle : Centre & Radius* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಜ್ಯ 1/(2pi) ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕು. ಇನ್ನು ಸುತ್ತಳತೆ 25 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

π ಕೇರಳದಲ್ಲಿ

ಹದಿನಾಲ್ಕನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಕೇರಳದಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಖಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನೂ ಗಣಿತಜ್ಞನೂ ಆಗಿದ್ದ ಮಾಧವನ್ (ಇಂದು ಅವರು ಸಂಗಮಗ್ರಾಮ ಮಾಧವನ್ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲ್ಪಡುತ್ತಾರೆ) π ಯ ಬೆಲೆಗೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಿರುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವಿಧಾನವು ಗಣಿತ ಚರಿತ್ರೆಯ ಒಂದು ಮಹತ್ವದ ತಿರುವಾಗಿದೆ. ಅಷ್ಟರವರೆಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿ, ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾದ ರೀತಿಗಳನ್ನು ಇವರು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರು.

$1, \quad 1-\frac{1}{3}, \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}, \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಷಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದನ್ನೂ ಕಳೆಯುವುದನ್ನೂ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾ ಹೋದಾಗ $\frac{\pi}{4}$ ರ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವುದು ಎಂದು ಅವರು ಕಂಡುಹಿಡಿದರು.

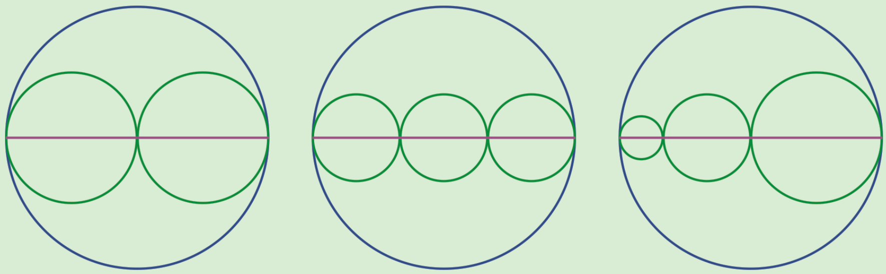
ಹದಿನೇಳನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಸ್ಕಾಟ್ಲೇಂಡ್‌ನ ಗ್ರಿಗರಿ, ಜರ್ಮನಿಯ ಲೈಬ್ನೀಟ್ಸ್ ಎಂಬವರು ಇದೇ ವಿಚಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅವರದ್ದೇ ಆದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪುನಃ ಕಂಡುಹಿಡಿದರು.

ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬಹಳ ನಿಧಾನವಾಗಿ $\frac{\pi}{4}$ ರ ಸರಿಸುಮಾರು ಬೆಲೆಗೆ ಹತ್ತಿರ ಬರುವುದು ಎಂಬ ಕೊರತೆಯಿದೆ. ಆರ್ಕಿಮಿಡಿಸನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗಲು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸುಮಾರು 4000 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಬೇಕಾಗುವುದು. ಆದರೆ ಮಾಧವನ್‌ರವರು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$$\pi \approx 3.14159265359$$

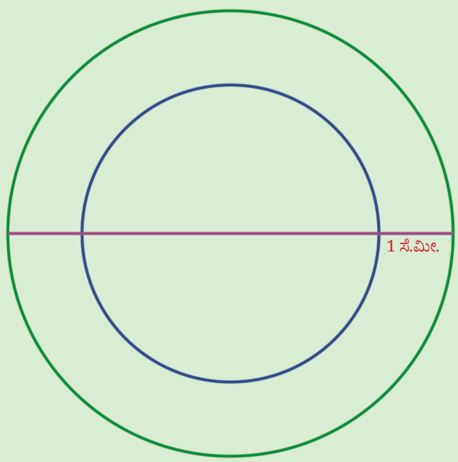
ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದರು.

(4) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲೂ, ವೃತ್ತಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿವೆ. ಮೊದಲ ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳು ಸಮಾನ.



ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

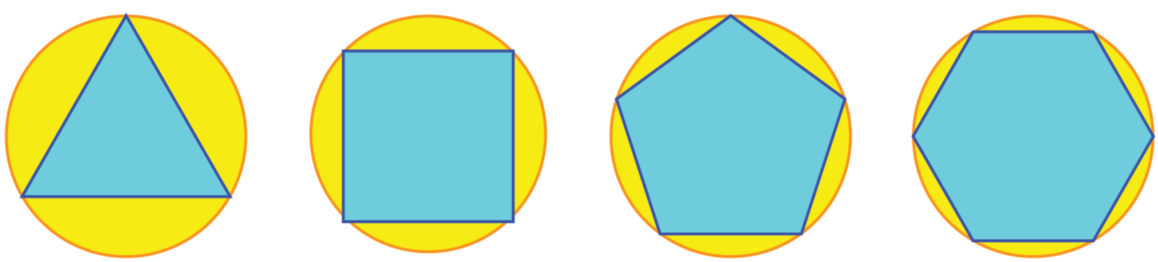
(5) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಒಂದೇ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಗಿಂತ ಎಷ್ಟು ಅಧಿಕ ?

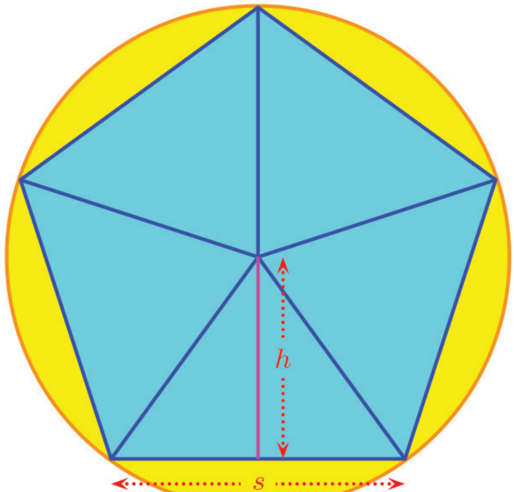
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ವೃತ್ತದೊಳಗಿನ ಸಮಬಹುಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುವಂತೆ, ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೂ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು:



ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು, ಅದರೊಳಗೆ ಇರುವ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೇಗೆ ಹೆಚ್ಚುವುದು ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ ಸಾಕು. ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನೂ ಬಹುಭುಜದ ಶಿರಗಳನ್ನೂ ಜೋಡಿಸಿ, ಬಹುಭುಜವನ್ನು ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು. ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಬಹುಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸಿಗುವುದು:

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವೃತ್ತದೊಳಗಿರುವ ಸಮಪಂಚಭುಜದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ s ಎಂದೂ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಪಂಚ ಭುಜದ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬದ ಉದ್ದ h ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2}sh$.

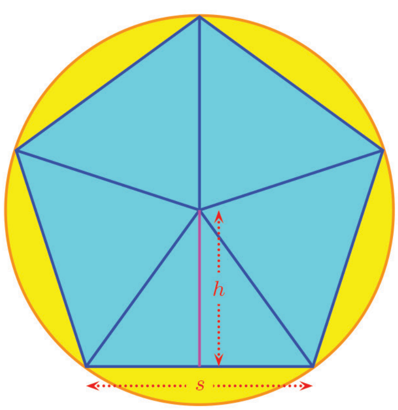


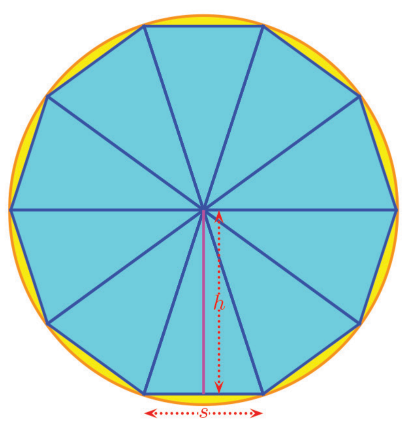
ಇಂತಹ ಐದು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸೇರಿರುವುದಾಗಿದೆ ಪಂಚಭುಜ; ಅದರ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$5 \times \frac{1}{2}sh = \frac{1}{2} \times 5s \times h$$

ಇದರಲ್ಲಿ s ಎಂಬುದು ಪಂಚಭುಜದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $5s$ ಎಂಬುದು ಪಂಚಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿದೆ; ಇದನ್ನು p ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಪಂಚಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\frac{1}{2}ph$.

ಪಂಚಭುಜದ ಬದಲು, ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ಲಂಬದೂರದ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ವೃತ್ತದೊಳಗಿರುವ ಬಹುಭುಜವು ಬದಲಾಗುವಾಗ ಸುತ್ತಳತೆಯೂ, ಈ ಲಂಬದೂರವೂ ಬದಲಾಗುವುದು:





ಸುತ್ತಳತೆಯ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ, ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆದು ನೋಡುವ:

- ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ, ಚೌಕ, ಸಮಪಂಚಭುಜ........ ಮುಂತಾದವುಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಯು $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ಎಂದೂ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕಿರುವ ಉನ್ನತಿಯನ್ನು $h_1, h_2, h_3, \ldots$ ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.

- ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು r ಎಂದೂ, ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು c ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.
  - $h_1, h_2, h_3, \ldots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು r ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವುದು.
  - $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು c ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವುದು.

- $\frac{1}{2}p_1h_1, \frac{1}{2}p_2h_2, \frac{1}{2}p_3h_3, \ldots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\frac{1}{2}cr$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವುದು.
  - $\frac{1}{2}p_1h_1, \frac{1}{2}p_2h_2, \frac{1}{2}p_3h_3, \ldots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬಹುಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳಾಗಿವೆ.
  - ಬಹುಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವುದು.
  - ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು a ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.

- $\frac{1}{2}p_1h_1, \frac{1}{2}p_2h_2, \frac{1}{2}p_3h_3, \ldots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು a ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವುದು.

ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವುದರಲ್ಲಿ, ಕೆಂಪು ಆಯತದೊಳಗೆ ಬರೆದಿರುವ ಎರಡು ವಿಷಯಗಳಿಂದ

$$a = \frac{1}{2}cr$$

ಎಂದಾಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ,

ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯದ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿರುವುದು.

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಸುತ್ತಳತೆ $2\pi r$, ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

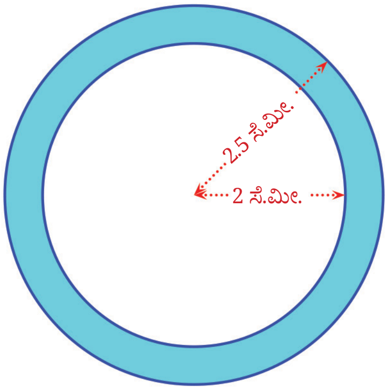
$$\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$$

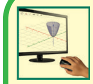
ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗದ π ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 25π ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

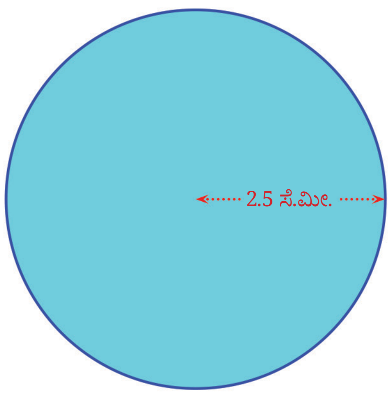
ಇನ್ನು ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಇತರ ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

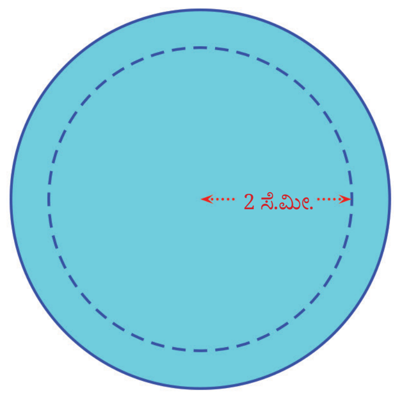
ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತಕಂಕಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು ?




ತ್ರಿಜ್ಯ $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ? ಹೀಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲು *Circle : Centre & Radius* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಜ್ಯ sqrt (10/pi) ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕು. Area ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು. ಇನ್ನು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 25 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದಿಂದ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತವನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿರುವ ಆಕೃತಿಯಾಗಿ ಇದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದಲ್ಲವೇ.

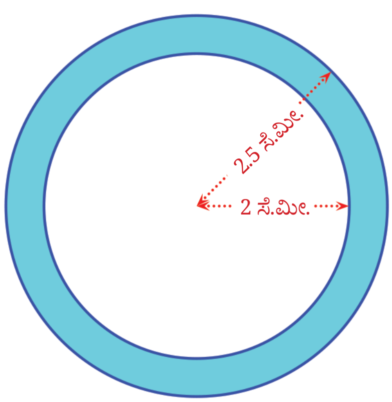


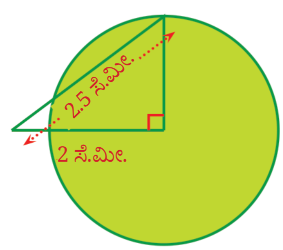


ಆಗ ಕಂಕಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$6.25\pi - 4\pi = 2.25\pi$$ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.

ಇನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೋ ?

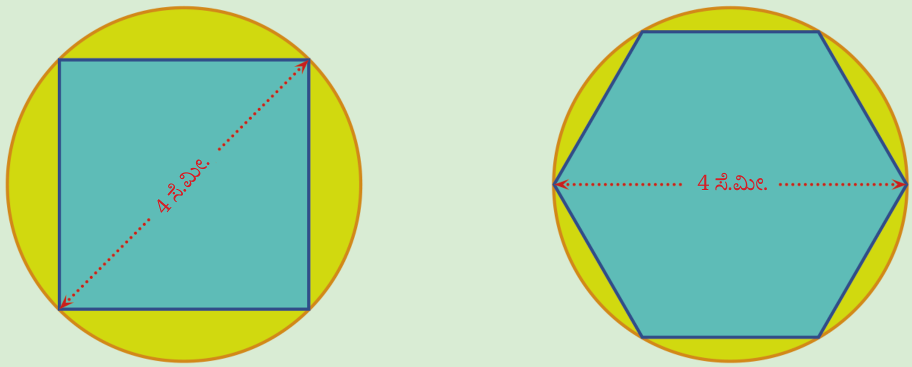




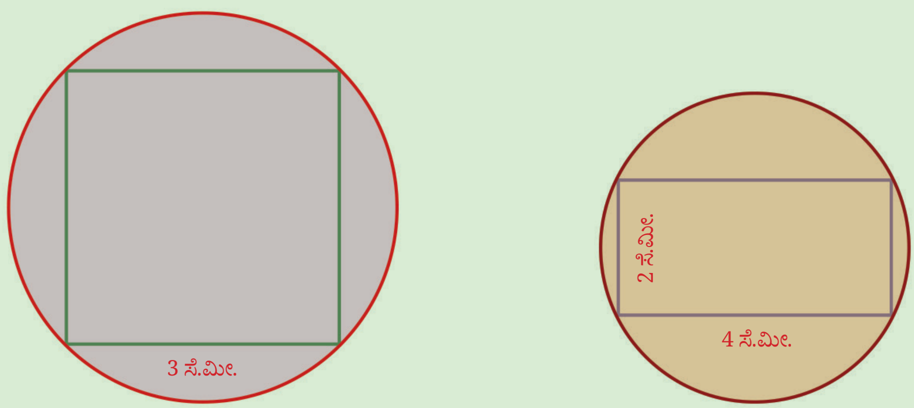
ಹಸಿರು ಬಣ್ಣದ ವೃತ್ತದ ಮತ್ತು ನೀಲ ಕಂಕಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು ?

(1) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

(2) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತದ ಮತ್ತು ಬಹುಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

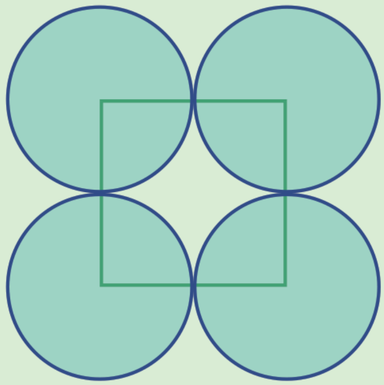


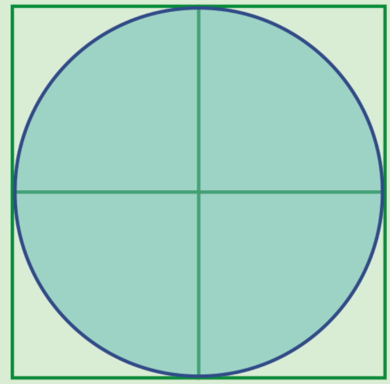
(3) ಒಂದು ಚೌಕದ ನಾಲ್ಕು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಮತ್ತು ಒಂದು ಆಯತದ ನಾಲ್ಕು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರುವುದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ:



ಎರಡೂ ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

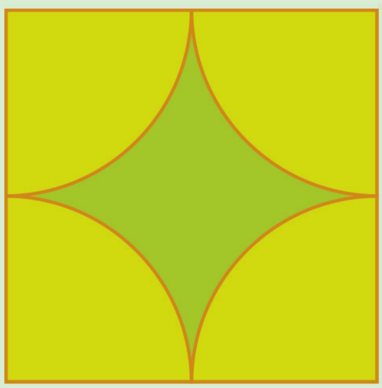
(4) ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ನಾಲ್ಕು ಶಿರಗಳು ಕೇಂದ್ರವಾಗುವಂತೆಯೂ ಭುಜದ ಅರ್ಧವು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗುವಂತೆಯೂ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಮೊದಲನೆ ಚೌಕದಷ್ಟೇ ಗಾತ್ರವಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಚೌಕಗಳು ಸೇರಿರುವಂತಹ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರೊಳಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಸೇರಿಕೊಂಡಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ:

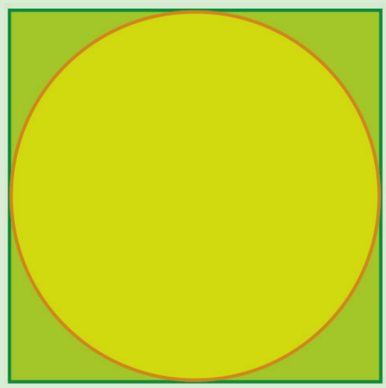




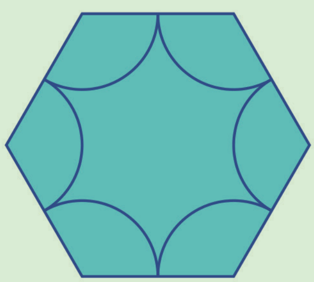
ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ನಾಲ್ಕು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(5) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿಯೂ, ಚೌಕಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಗಾತ್ರವಿದೆ. ಹಸುರು ಭಾಗಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸಮಾನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

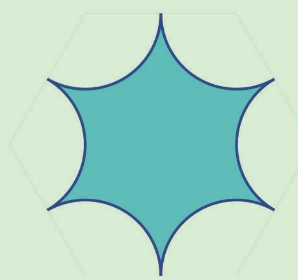




(6) ಒಂದು ಸಮಷಡ್ಭುಜದ ಶಿರಗಳು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ವೃತ್ತಭಾಗಗಳನ್ನೆಳೆದು, ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದಂತಿರುವ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು:

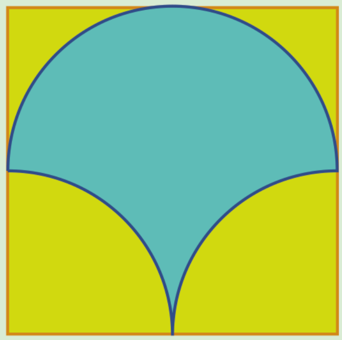


2 ಸೆ.ಮೀ.



ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಆಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(7) ಒಂದು ಚೌಕದೊಳಗೆ, ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತಭಾಗಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೀಲಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲಾಗಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9

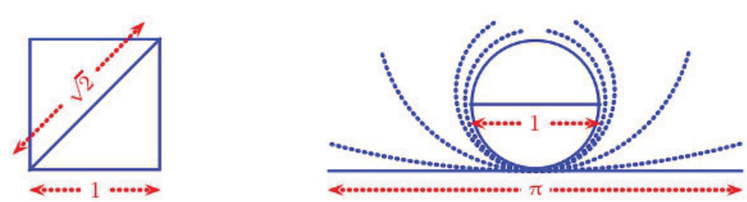
ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಅಳತೆಗಳೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ

ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಹೇಳುವುದು ಹೇಗೆ? ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಉದ್ದವನ್ನು 1 ಎಂಬುದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದರ ಎರಡು ಮಡಿ ಉದ್ದವು 2 ಎಂದೂ, ಅರ್ಧ ಉದ್ದವನ್ನು $\frac{1}{2}$ ಎಂದೂ, ಅದರ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿ ಉದ್ದವನ್ನು $1\frac{1}{2}$ ಎಂಬುದಾಗಿಯೂ ಹೇಳಬಹುದು:

ಹೀಗೆ 1 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಉದ್ದವನ್ನು, ಉದ್ದದ ಒಂದು ಏಕಕ (unit of length) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಇಂತಹ ಒಂದು ಏಕಕವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುವುದರಿಂದ, ಇತರ ಹಲವು ಉದ್ದಗಳನ್ನೂ ಈಗ ನೋಡಿದಂತೆ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಆದರೆ ಈ ಏಕಕದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೋ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿಯೋ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಉದ್ದಗಳೂ ಇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಈ ಏಕಕವಾದ ಚೌಕದ ಕರ್ಣ, ಈ ಏಕಕವು ವ್ಯಾಸವಾದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿಟ್ಟ ಗೆರೆಯ ಉದ್ದ:



ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳು ಮತ್ತು ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಿಯಾಸಂಬಂಧಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯ ಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವಾಗ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವರು. (**ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯ) ಆಗ $\sqrt{2}, \pi$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಋಣಗಳಾದ $-\sqrt{2}, -\pi$ ಎಂಬಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಋಣಗಳು ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ **ಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (rational numbers)** ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಭಿನ್ನರಾಶಿಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು **ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (irrational numbers)** ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ 5 ನ್ನು $\frac{5}{1}$ ಅಥವಾ $\frac{10}{2}$ ಎಂಬಂತೆ ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂಶ ಅಥವಾ ಛೇದವನ್ನು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿಕೊಂಡು, ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಋಣಗಳನ್ನೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ರೂಪದಲ್ಲಿ $\frac{0}{1}, \frac{0}{2}$ ಎಂಬಂತೆಲ್ಲಾ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಆಗ ಭಿನ್ನಕಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಒಂದು ರೂಪವಿದೆ: x, y ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳೋ ಅವುಗಳ ಋಣಗಳೋ ಆಗಿರುವ $\frac{x}{y}$; ಇದರಲ್ಲಿ x ಸೊನ್ನೆಯೂ ಆಗಬಹುದು.

ಆದರೆ ಅಭಿನ್ನಕಗಳಲ್ಲಿ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ, ವರ್ಗಮೂಲಗಳೂ ಭಿನ್ನಕಗಳ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ π ಹಾಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇವೆ; ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

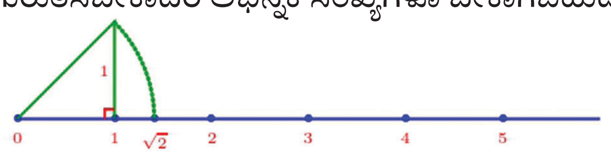
ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೂ

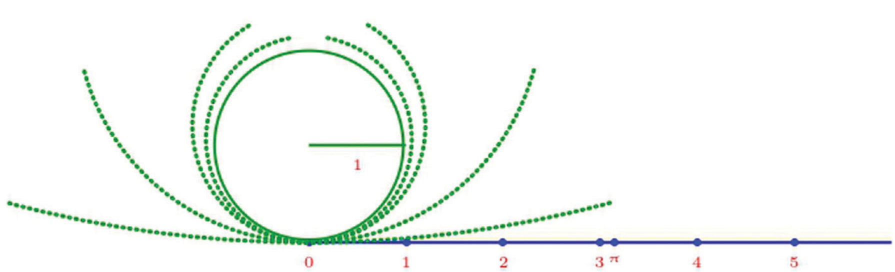
ಯಾವುದೇ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ಉದ್ದವಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಈ ಉದ್ದಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದು ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಆರಂಭಿಸುವುದಾಗಿ ಯೋಚಿಸಿದರೋ ?

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಲು ಒಂದು ಗೆರೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಎಡತುದಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಊಹಿಸುವ.

ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು 1 (ಏಕಕ) ಆಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಹಲವು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕಾದರೆ ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಬೇಕಾಗಬಹುದು.





ಈ ಗೆರೆಯನ್ನು 0 ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಡಭಾಗಕ್ಕೂ ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ; ಈ ಭಾಗದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು ?

ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಬಲಭಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಋಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. **ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದ **ಸ್ಥಾನವೂ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ:

ಎಲ್ಲಾ ಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಊಹಿಸುವ; ತಿರುಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ ಈ ಗೆರೆಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುರುತಿಸಿರುವುದಾಗಿಯೂ ಊಹಿಸಬಹುದು.

ಹೀಗೆ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಗುರುತಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದರಿಂದ, ಭಿನ್ನಕ ಹಾಗೂ ಅಭಿನ್ನಕಗಳಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ **ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (real numbers)** ಎಂಬುದಾಗಿ ಕರೆಯುವರು. ಬದಲಾಗಿ, ಬಿಂದುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದಿರುವ ದೂರಕ್ಕೆ ಅನುಸರಿಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುರುತಿಸಿದ ಗೆರೆಯನ್ನು **ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ (number line)** ಎಂದು ಕರೆಯುವರು.

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 0 ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿದಂತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತದೆಯಲ್ಲವೇ. ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೋದರೋ ?

−1, −2 ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು ಯಾವುದು ?

−1 ಅಂದರೆ ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ 1 ಕಡಿಮೆ. −2 ಆದರೋ? ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ 2 ಕಡಿಮೆ; ಅಂದರೆ −1 ರಿಂದ ಪುನಃ 1 ಕಡಿಮೆ. ಆದುದರಿಂದ −2 ಎಂಬುದು −1 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ

$$-2 < -1$$

ಆಗ ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೋದಂತೆ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಎಡಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೋದಂತೆ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಸೊನ್ನೆಯ ಬದಲಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿದರೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಲಭಿಸುವುದಲ್ಲವೇ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹಲವು ವಿಧ

ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆ ಆರಂಭವಾಗುವುದು 1, 2, 3,... ಎಂಬೀ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಕವಾಗಿದೆ. ಬಳಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಮತ್ತು ಇನ್ನಿತರ ಅಗತ್ಯಗಳಿಗಾಗಿ 0 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರು.

ಉದ್ದ, ಭಾರ, ಸಮಯ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಲು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಬಂದುವು. ಎಲ್ಲಾ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಏಕಕದ ಮಾತ್ರ ಭಾಗವೋ, ಮಡಿಯೋ ಆಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದರಿಂದಾಗಿ ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಬಂದುವು.

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವಾಗ ಕೆಲವು ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಋಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರು. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಹೆಸರಾಗಿದೆ ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವವುಗಳಿಗೆ ಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದೂ ಉಳಿದವುಗಳನ್ನು ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದೂ ಹೆಸರಿಸಲಾಯಿತು.

ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಅವುಗಳ ಋಣಗಳು ಹಾಗೂ ಸೊನ್ನೆ ಎಲ್ಲವೂ ಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (integers) ಎಂಬುದಾಗಿ ಕರೆಯುವರು.

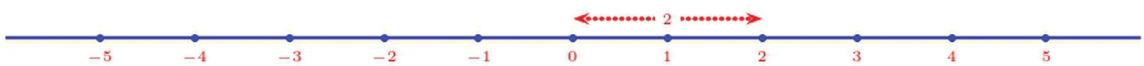
ಆಗ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಾನವು, ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಾನದ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವುದು.

ಹೀಗೆ ದೊಡ್ಡದು, ಸಣ್ಣದು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧವು, ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಬಲ, ಎಡ ಎಂಬ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸಂಬಂಧವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದು.

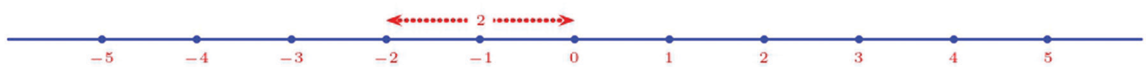
ಇನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ರೀತಿಯು, ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಮುನ್ನಡೆಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದಾಗಿ ನೋಡುವ.

ಕೇವಲ ಬೆಲೆ

ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಗುರುತಿಸುವುದು 0 ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದಿರುವ ದೂರವನ್ನನುಸರಿಸಿಯಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, 2 ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿದ ಬಿಂದು ಮತ್ತು 0 ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿದ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ 2 ಆಗಿದೆ.



ಇದೇ ದೂರದಲ್ಲಿ 0 ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವನ್ನು −2 ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಆಗ 0 ಮತ್ತು −2 ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು 2 ಆಗಿದೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

- ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆ.
- ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ ಸಿಗುವ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$0, 5\frac{1}{2}$ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ $5\frac{1}{2}$

$0, -5\frac{1}{2}$ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ $5\frac{1}{2}$

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, $0, x$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದು? (ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಕ್ಷರಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವಾಗ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಎಂಬುದಾಗಿ ನೋಡದೆ ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ x, y ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದಲ್ಲವೇ).

ಆಗ ಒಂದು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆ ತೆಗೆಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬೇಕು. ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯ ಋಣದ ಋಣವು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೆಂದು **ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕಂಡಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$$-(-2) = 2$$

ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯ ಋಣವನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು ಎಂಬುದರ ಬದಲು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಋಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು ಎಂದು ಹೇಳಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದು. ಆಗ x ಒಂದು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಋಣಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ತೆಗೆದ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಲಭಿಸಲು $-x$ ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದು; ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $x = -3$ ಆದರೆ

$$-x = -(-3) = 3$$

ಇನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ x ಎಂಬ ಋಣಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ $-x$ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಹೀಗೆ $x > 0$ ಆದರೆ (ಅಂದರೆ x ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ) x ಆಗಿಯೂ, $x < 0$ ಆದರೆ (ಅಂದರೆ x ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ) $-x$ ಆಗಿಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ $|x|$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು x ನ **ಕೇವಲಬೆಲೆ** (absolute value) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$|5| = 5 \qquad |-5| = 5$$

$$\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \qquad \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

$$|\pi| = \pi \qquad |-\pi| = \pi$$

ಸೊನ್ನೆಯ ಕೇವಲಬೆಲೆಯಾಗಿ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದಾಗಿದೆ.
ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

$x > 0$ ಆದರೆ $|x| = x$

$x < 0$ ಆದರೆ $|x| = -x$

$x = 0$ ಆದರೆ $|x| = 0$

ಇದನ್ನು ಒಂದೇ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ ಆದರೆ} \\ -x, & x < 0 \text{ ಆದರೆ} \\ 0, & x = 0 \text{ ಆದರೆ} \end{cases}$$

ಇದುವರೆಗೆ ಹೇಳಿರುವುದನ್ನೆಲ್ಲಾ ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೇವಲಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 0 ಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದು ಮತ್ತು x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು $|x|$ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೇವಲಬೆಲೆ ಎಂಬ ಈ ಆಶಯದ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷತೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ:

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಋಣದ ಕೇವಲಬೆಲೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು ?

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ,

$$|3| = 3 = |-3|$$

ಎಂದು ನೋಡಿದೆವು.

-3 ನ್ನು ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ತೆಗೆಯುತ್ತಿದ್ದರೋ ? $-(-3) = 3$ ಎಂದು ನಾವು ಮೊದಲೇ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ. ಆಗ -3 ರ ಮತ್ತು ಅದರ ಋಣದ ಕೇವಲಬೆಲೆಯು 3 ಆಗಿರುವುದು.

$$|-3| = |3| = |-(-3)|$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಋಣದ ಕೇವಲಬೆಲೆಯು ಒಂದೇ (ಧನ) ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು.

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೋ ?

x ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ, $|-x| = |x|$

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ:

ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ವರ್ಗವು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$
$$(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$$

ಇನ್ನು

$$|5| = |-5| = 5$$

ಆದುದರಿಂದ

$$|5|^2 = 5^2$$
$$|-5|^2 = 5^2 = (-5)^2$$

5, –5 ಎಂಬಿವುಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ

x ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ $|x|^2 = x^2$.

(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿರಿ.

x	y	xy	$\|x\|$	$\|y\|$	$\|xy\|$	$\|x\|\ \|y\|$
4	3	12	4	3	12	12
−4	3					
4	−3					
−4	−3					

(i) x, y ಆಗಿ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ. $|xy|$ ಮತ್ತು $|x|\ |y|$ ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ ?

(ii) x, y ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ $|xy| = |x|\ |y|$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(2) ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿರಿ.

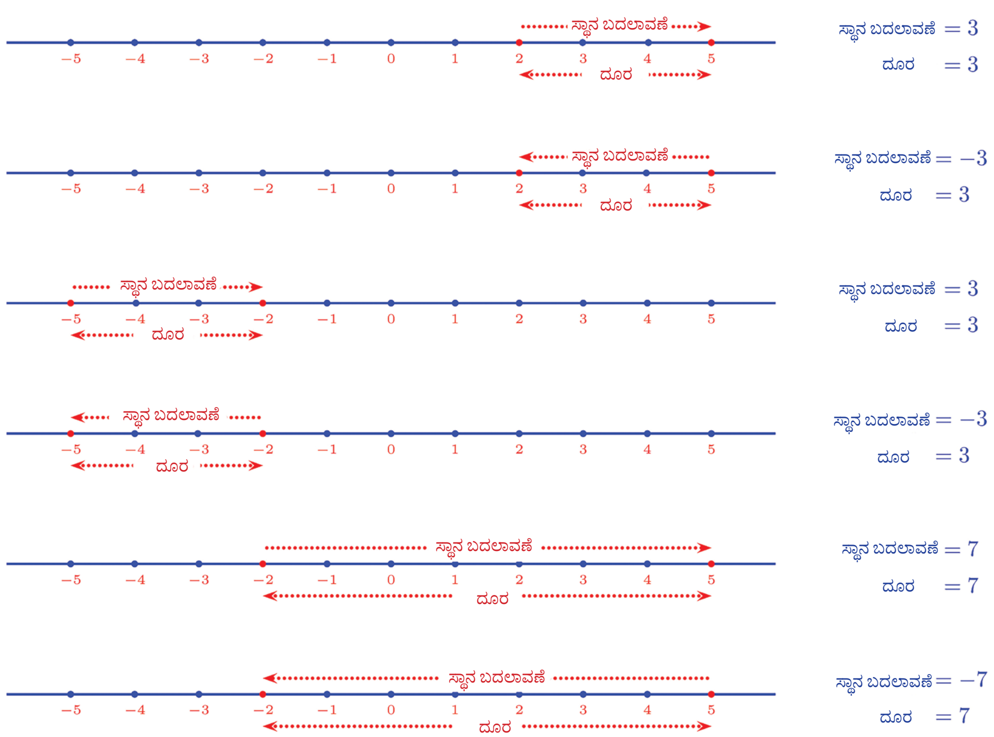
x	y	$x+y$	$\lvert x\rvert$	$\lvert y\rvert$	$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	$\lvert x+y\rvert$
3	5	8	3	5	8	8
–3	5	2	3	5	8	2
3	–5					
–3	–5					

x, y ಆಗಿ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ. $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ ಮತ್ತು $\lvert x+y\rvert$ ಗಳೊಳಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೇಳಬಹುದೇ ?

ದೂರಗಳು

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 0 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ $\lvert x\rvert$ ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಇನ್ನು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ನೋಡೋಣ.

ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ ಸಂಚರಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆ ಗಣನೆ ಮಾಡಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯೇ? ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿಯಲ್ಲವೇ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಬರೆದಿರುವುದು? ಬಲಭಾಗಕ್ಕಿರುವ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯು ದೂರವೇ ಆಗಿದೆ; ಎಡಬದಿಗಿರುವುದು, ದೂರವನ್ನು ಋಣಸಂಖ್ಯೆ ಮಾಡಿರುವುದು ಆಗಿದೆ.



ಆಗ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಸ್ಥಾನಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು; ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಋಣ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಲಭಿಸುವ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ ದೂರ. ಅಂದರೆ ದೂರವು ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯ ಕೇವಲ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ y ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಇರುವ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾವಣೆಯು $y - x$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು **ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ.

ಆಗ x, y ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ $|y-x|$ ಆಗಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಋಣಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ಕೇವಲಬೆಲೆಯಾಗಿರುವುದೆಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ; $y-x$ ನ ಋಣವು

$$-(y-x) = x-y$$

ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಅಂದರೆ, $|y-x| = |x-y|$

ಆಗ

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ x, y ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು $|x-y|$ ಆಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಸಾಧಾರಣ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಹೇಳಬಹುದು.

x, y ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ x ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $x - y$ ಎಂಬುದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

ಆಗ $|x-y| = x-y$

ಇನ್ನು y ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $x-y$ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ; ಆದುದರಿಂದ

$$|x-y| = -(x-y) = y-x$$

ಆಗ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಏನು ಹೇಳಬಹುದು ?

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದು ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $4\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{4}$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ,

$$6\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2} = 1\frac{3}{4}$$

$4\frac{1}{2}$, $-6\frac{1}{4}$ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವೋ ?

$$4\frac{1}{2} - \left(-6\frac{1}{4}\right) = 4\frac{1}{2} + 6\frac{1}{4} = 10\frac{3}{4}$$

ಇದರಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಮಾಹಿತಿಯೂ ಲಭಿಸುವುದು.

x, y ಎಂಬ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ, ದೊಡ್ಡದರಿಂದ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯುವುದು ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವು $|x-y|$ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ:

$|x-1| = 3$ ಆದರೆ x ಯಾವೆಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಬಹುದು ?

ಇದನ್ನು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ನೋಡಿದರೆ $|x-1|$ ಎಂಬುದು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ x, 1 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ದೂರವಾಗಿದೆ. ಈ ದೂರವು 3 ಆಗಬೇಕು.

1 ರ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ, ದೂರ 3 ಆಗಿರುವುದು $1 + 3 = 4$ ಆಗಿದೆ.

1 ರ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ, ದೂರ 3 ಆಗಿರುವುದು $1 - 3 = -2$ ಆಗಿದೆ.

ಆಗ $x = 4$ ಅಥವಾ $x = -2$

ಇನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಲೋಚಿಸಿದರೋ ?

$x > 1$ ಆದರೆ $|x - 1| = x - 1$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ, $x - 1 = 3$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ $x = 4$ ಆಗಬೇಕು.

$x < 1$ ಆದರೋ ? ಆಗ $|x - 1| = 1 - x$ ಆಗಿದೆ. $1 - x = 3$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ $x = 1 - 3 = -2$ ಆಗಬೇಕು.

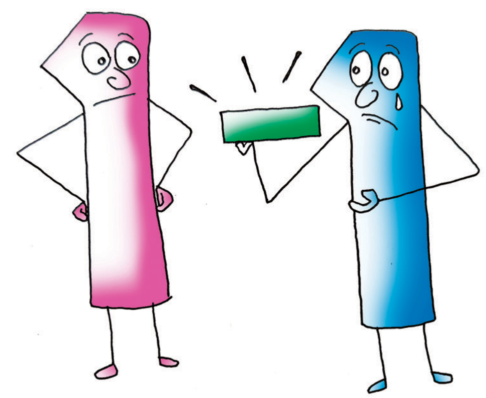
ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಮಾಡಿದರೋ ?

$|x + 1| = 3$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ x ಯಾವೆಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಬಹುದು ?

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಇದನ್ನು ಮಾಡಲು, $|x + 1|$ ನ್ನು ಒಂದು ದೂರವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಕೇವಲ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ ದೂರವಾಗಿ ಲಭಿಸುವುದು. ಆಗ ಮೊದಲು $x + 1$ ನ್ನು ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

$$x + 1 = x - (-1)$$

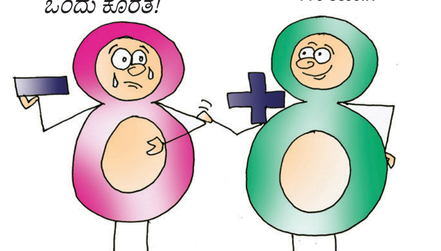
ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ $|x + 1| = |x - (-1)|$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ, $|x + 1|$ ಎಂಬುದು x ಮತ್ತು -1 ರೊಳಗಿನ ದೂರವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.



ಇನ್ನು ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ -1 ರ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ದೂರ 3 ಆಗಿರುವ ಬಿಂದು $-1 + 3 = 2$ ಎಂದೂ, ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ದೂರ 3 ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುವು $-1 - 3 = -4$ ಎಂದೂ ಲಭಿಸುವುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ.

$|x - 1| < 3$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ x ಯಾವೆಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಾಗಿರಬೇಕು ?

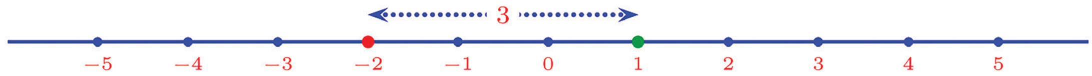


ಇದನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸುವುದು ಸುಲಭ:

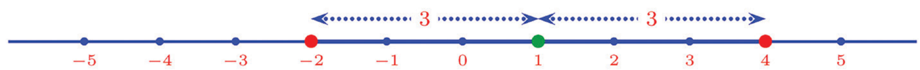
- $|x - 1| < 3$ ಎಂಬುದರ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅರ್ಥವು, x ಎಂಬ ಬಿಂದು ಮತ್ತು 1 ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ 3 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದಲ್ಲವೇ.
- x ಎಂಬ ಬಿಂದು, 1 ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲೋ, ಎಡಭಾಗದಲ್ಲೋ ಆಗಬಹುದು; 1 ರಿಂದಿರುವ ದೂರವು 3 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ಮಾತ್ರ.

★ 1 ರ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ, ದೂರ 3 ಆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ $1 + 3 = 4$ ಆಗಿದೆ.

★ 1 ರ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ದೂರ 3 ಆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ $1 - 3 = -2$



- $|x - 1| < 3$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು -2 ಮತ್ತು 4 ರ ಎಡೆಯಲ್ಲಾಗಿರಬೇಕು; ಅಂದರೆ $-2 < x < 4$



(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮವಾಕ್ಯವು ಸರಿಹೊಂದುವ x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $|x| = 5$ (ii) $|x - 3| = 2$

(iii) $|x - 2| = 3$ (iv) $|x + 2| = 3$

(2) ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಕ್ಯವು ಸರಿಹೊಂದಲು x ಯಾವೆಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಾಗಿರುವುದೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $|x| < 3$ (ii) $|x - 2| < 1$

(iii) $|x - 1| < 2$ (iv) $|x + 1| < 2$

(3) ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದ ವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಸರಿಹೊಂದುವ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಣ್ಣದೂ ದೊಡ್ಡದೂ

$|x - 3| < 5$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಸರಿಯಾಗಲು, x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ -2 ಮತ್ತು 8 ರ ಎಡೆಯಲ್ಲಾಗಿರಬೇಕು; ಅಂದರೆ $-2 < x < 8$

$|x - 3| > 5$ ಆಗಬೇಕಾದರೋ ?

x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ, 3 ರ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ, ದೂರ 5 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಾದರೆ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದು; ಅಲ್ಲವಾದರೆ 3 ರ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ದೂರ 5 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಾದರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಪಾಲಿಸಲು x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದೋ -2 ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿರಬೇಕು; ಅಲ್ಲವಾದರೆ 8 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ $x < -2$ ಅಥವಾ $x > 8$

ಮಧ್ಯಬಿಂದು

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ, 2, 4 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ ಬಿಂದುಗಳ ನಿಖರವಾಗಿ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಬಿಂದು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ?

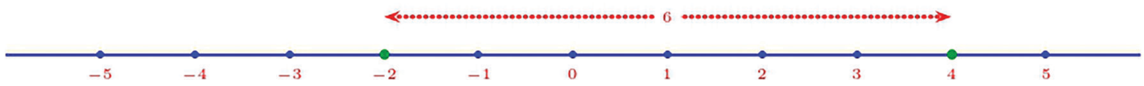
ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕಷ್ಟವಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ 3 ನ್ನು 2 ಮತ್ತು 4 ರ **ಮಧ್ಯಬಿಂದು (midpoint)** ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.

ಆಗ -2 ಮತ್ತು 4 ರ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಯಾವುದು ?

ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು -2 ರಿಂದ 4 ಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿರುವುದಲ್ಲವೇ.

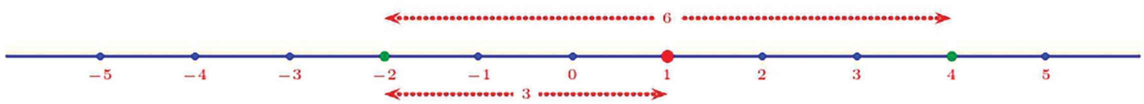
-2 ರಿಂದ 4 ಕ್ಕಿರುವ ದೂರ ಲಭಿಸಲು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸಣ್ಣಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು.

$$4 - (-2) = 6$$



ಈ ದೂರದ ಅರ್ಧ 3. ಆಗ −2 ರ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ, ದೂರ 3 ಆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ ಮಧ್ಯಬಿಂದು. ಅಂದರೆ

$$-2+3=1$$



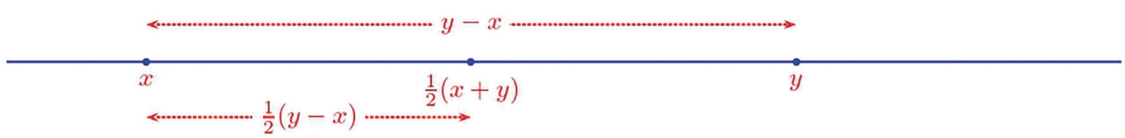
ಹೀಗೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಮಾಡಿ ನೋಡೋಣ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಚಿಕ್ಕದು x ಎಂದೂ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ y ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ x ನ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವುದು y; ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರ $y-x$

x ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $y-x$ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಾಗಿದೆ y ಎಂಬ ಬಿಂದು; ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಎಂಬುದು x ನಿಂದ ಇದರ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ದೂರ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಾಗಿದೆ:

ಅಂದರೆ, ಮಧ್ಯಬಿಂದು

$$x+\frac{1}{2}(y-x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}(x+y)$$



ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು ಅವುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ, $-2\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $4\frac{3}{4}$ ರ ಮಧ್ಯಬಿಂದು

$$\frac{1}{2}\times\left(-2\frac{1}{2}+4\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{4}=1\frac{1}{8}$$

−4.8 ಮತ್ತು 1.2 ರ ಮಧ್ಯಬಿಂದು

$$=\frac{1}{2}\times(-4.8+1.2)$$

$$=\frac{1}{2}\times(-3.6)=-1.8$$

(1) ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(i) 1, −5 (ii) −1, −5 (iii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

(iv) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ (v) −2.5, 3.5 (vi) 1.3, 8.7

(vii) $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}$ (viii) $-\sqrt{3}, \sqrt{7}$

(2) ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ 1 ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದು ಮತ್ತು 2 ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಭಾಗವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಂಖ್ಯಾ ಸಾಂದ್ರತೆ

ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟೇ ಹತ್ತಿರವಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೂ ಅವುಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಇತರ ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಅವುಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಈ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಮತ್ತು ಮೊದಲು ಗುರುತಿಸಿದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದರೆ ಪುನಃ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಯಿತು. ಹೀಗೆ ಎಷ್ಟು ಬೇಕಾದರೂ ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ x, y ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೂ $z_1 = \frac{1}{2}(x + y)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ x ಮತ್ತು y ಯ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಾಗಿದೆ; ಇನ್ನು

$$z_2 = \frac{1}{2}(x + z_1), \quad z_3 = \frac{1}{2}(y + z_1),$$

ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಎಂಬಿವುಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದುವು. ಹೀಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೇಕಾದರೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ:

x ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ, $|x - 1| = |x - 4|$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯ ಸರಿಯಾಗುವುದು ?

ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಆಲೋಚಿಸಿದರೆ,

$$|x - 1| = |x - 4|$$

ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಅರ್ಥವೇನು ?

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುವು, 1, 4 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ,

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು 1, 4 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಆಗ ಮೊದಲು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ,

$$x = \frac{1}{2} \times (1 + 4) = 2\frac{1}{2}$$

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೂ ಸರಿಹೊಂದುವ x ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $|x - 1| = |x - 3|$ (ii) $|x - 3| = |x - 4|$

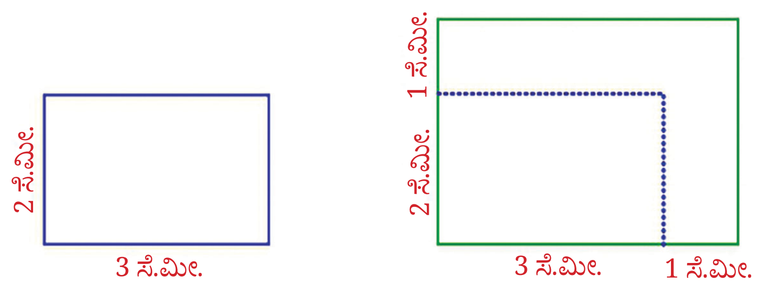
(iii) $|x + 2| = |x - 5|$ (iv) $|x| = |x + 1|$

10

ಬಹುಪದಗಳು

ಅಳತೆಗಳ ಬೀಜಗಣಿತ

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳನ್ನು 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ಸ್ವಲ್ಪ ದೊಡ್ಡ ಆಯತವನ್ನು ಮಾಡಲಾಯಿತು:



ಹೊಸ ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು?

ಈ ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್; ಸುತ್ತಳತೆ $2 \times (4 + 3) = 14$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಆಲೋಚಿಸಬಹುದು. ಮೊದಲಿನ ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು $2 \times (3 + 2) = 10$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ನಾಲ್ಕು ಭುಜಗಳಲ್ಲಿಯೂ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಲಾಯಿತು. ಒಟ್ಟು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಾಯಿತು. ಹೊಸ ಸುತ್ತಳತೆಯು $10 + 4 = 14$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ? ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಆಲೋಚಿಸಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದಲ್ಲಿಯೂ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ, ಹೆಚ್ಚಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ $2 \times 4 = 8$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಹೊಸ ಸುತ್ತಳತೆಯು $10 + 8 = 18$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಸುಲಭವಲ್ಲವೇ. ಕೂಡಿಸಿರುವ ಉದ್ದವು $2\frac{1}{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದರೆ, ದೊಡ್ಡ ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು,

$$\left(2\frac{1}{2} \times 4\right) + 10 = 20 \text{ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್}$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿರುವುದು ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದರೂ ಅದರ 4 ಮಡಿಯನ್ನು, 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ನೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಹೊಸ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗುವುದು.

ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿರುವುದು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ, ಹೊಸ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು p ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಬರೆದರೆ,

$$p = (x \times 4) + 10 = 4x + 10$$

ಇನ್ನು ಭುಜದ ಉದ್ದಗಳು ಹೆಚ್ಚುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಸುತ್ತಳತೆ ಬದಲಾಗುವುದನ್ನು ಕೂಡಲೇ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ:

3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸುತ್ತಳತೆಯು $(4 \times 3) + 10 = 22$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

$3\frac{1}{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸುತ್ತಳತೆಯು $\left(4 \times 3\frac{1}{2}\right) + 10 = 24$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

$3\frac{3}{4}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸುತ್ತಳತೆಯು $\left(4 \times 3\frac{3}{4}\right) + 10 = 25$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$x = 3$ ಎಂದಾದರೆ $p = 22$

$x = 3\frac{1}{2}$ ಎಂದಾದರೆ $p = 24$

$x = 3\frac{3}{4}$ ಎಂದಾದರೆ $p = 25$

ಇದನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಇನ್ನೊಂದು ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿ ಇದೆ.

$$p(3) = 22$$
$$p\left(3\frac{1}{2}\right) = 24$$
$$p\left(3\frac{3}{4}\right) = 25$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೀಗೂ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$p(x) = 4x + 10$$

ಹೀಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬರೆದಿರುವುದನ್ನು ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲು ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ ಎರಡು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಮೂರು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತದ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ದೊಡ್ಡ ಆಯತವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ, ಆ ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ಕೂಡಿಸಿರುವ ಉದ್ದದ ನಾಲ್ಕು ಮಡಿಯನ್ನು ಹತ್ತರೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದೂವರೆ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ, ಸುತ್ತಳತೆಯು ಹದಿನಾರು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗುವುದು.

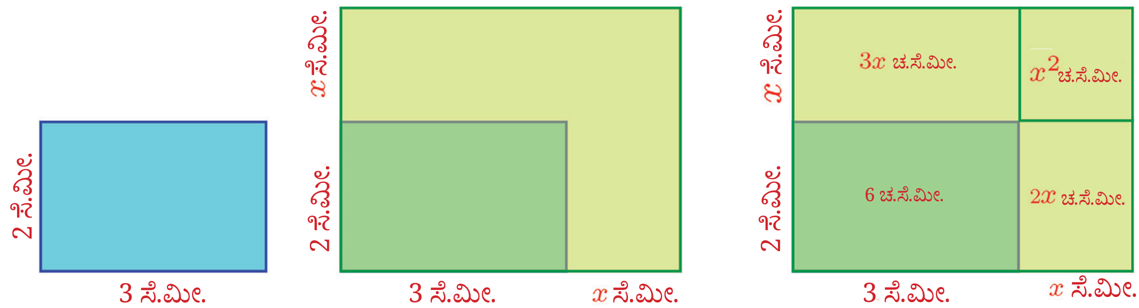
ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತದ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ದೊಡ್ಡ ಆಯತವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು p ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಬರೆದರೆ, $p = 4x + 10$. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x = 1\frac{1}{2}$ ಎಂದಾದರೆ, $p = 16$.

ಇದರಲ್ಲಿ x ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ p ಬದಲಾಗುವುದೆಂದು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಲು, p ಎಂದು ಮಾತ್ರ ಬರೆಯುವುದರ ಬದಲಾಗಿ $p(x)$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ, ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವುದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತದ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ದೊಡ್ಡ ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು $p(x)$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಬರೆದರೆ, $p(x) = 4x + 10$. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $p\left(1\frac{1}{2}\right) = 16$.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿಯೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಬದಲಾಗುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ನೋಡುವ. ಹಲವು ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಬದಲಾಗುವುದನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ನೋಡುವುದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ, ಹೆಚ್ಚಿಸುವ ಉದ್ದವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ:



ಚಿತ್ರದಿಂದ ಹೊಸ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು,

$$6 + 2x + 3x + x^2 = 6 + 5x + x^2$$

ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸದೆ, ನೇರವಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲಕವೂ ಇದನ್ನು ನೋಡಬಹುದು:

$$(3 + x)\,(2 + x) = 6 + 3x + 2x + x^2 = 6 + 5x + x^2$$

(**ಗುಣಾಕಾರ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ).

ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಚಕಗಳಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಬರೆಯುವುದು ಪದ್ಧತಿಯಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$(x + 3)\,(x + 2) = x^2 + 5x + 6$$

ಸುತ್ತಳತೆ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದಂತೆ, ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು $a(x)$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ

$$a(x) = x^2 + 5x + 6$$

ಇದರಿಂದ,

$$a(1) = 1^2 + (5 \times 1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$$

$$a\left(1\frac{1}{2}\right) = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(5 \times 1\frac{1}{2}\right) + 6 = 2\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2} + 6 = 15\frac{3}{4}$$

$$a(2) = 2^2 + (5 \times 2) + 6 = 4 + 10 + 6 = 20$$

ಎಂಬಂತೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 12 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ $1\frac{1}{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $15\frac{3}{4}$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಾಗ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 20 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ, ಅಂಚುಗಳ ಉದ್ದವು 1, 2, 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತಸ್ತಂಭದ ಅಂಚುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ದೊಡ್ಡ ಆಯತಸ್ತಂಭವನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಘನಫಲ ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುವುದೆಂದು ನೋಡುವ.

ಹೆಚ್ಚಿಸಿದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ದೊಡ್ಡ ಆಯತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$. ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಬರೆಯಲು, ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿರುವಂತೆ

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇನ್ನು ಇದನ್ನು $x + 1$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು; ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲ ಮೊತ್ತದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಎರಡನೇ ಮೊತ್ತದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಕೂಡಿಸಬೇಕು:

$$\begin{aligned}(x + 1)(x^2 + 5x + 6) &= \big(x \times (x^2 + 5x + 6)\big) + \big(1 \times (x^2 + 5x + 6)\big)\\ &= (x^3 + 5x^2 + 6x) + (x^2 + 5x + 6) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6\end{aligned}$$

ವಿವರವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ,

> ಅಂಚುಗಳ ಉದ್ದ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತಸ್ತಂಭದ ಅಂಚುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ x ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ದೊಡ್ಡ ಆಯತಸ್ತಂಭವನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು $v(x)$ ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಬರೆದರೆ, $v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

(1) ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದಕ್ಕಿಂತ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಆಯತಗಳಲ್ಲಿ, ಸಣ್ಣ ಭುಜದ ಉದ್ದ x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ.

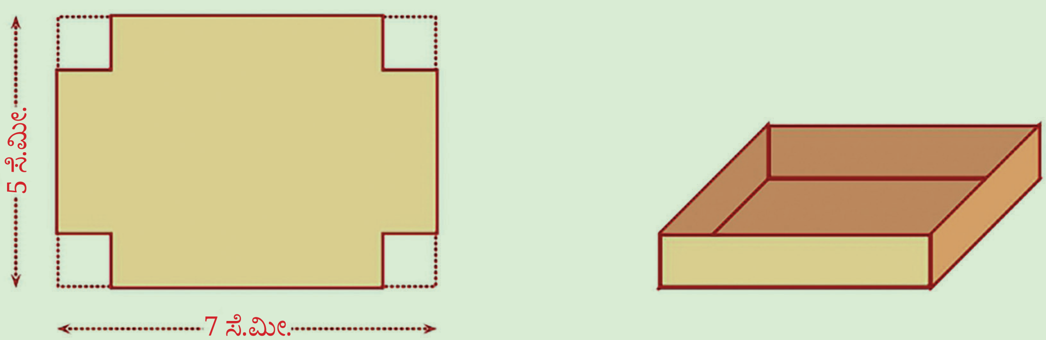
(i) ಇವುಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳನ್ನು $p(x)$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, x, $p(x)$ ಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) ಇವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು $a(x)$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, x, $a(x)$ ಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(iii) $p(1), p(2), p(3), p(4), p(5)$ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಯಾವುದಾದರೂ ಕ್ರಮ ಕಾಣುವುದೇ?

(iv) $a(1), a(2), a(3), a(4), a(5)$ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಯಾವುದಾದರೂ ಕ್ರಮ ಕಾಣುವುದೇ?

(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಒಂದು ಆಯತದ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲೆಗಳಿಂದಲೂ ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು, ಮೇಲಕ್ಕೆ ಮಡಚಿ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆ ಮಾಡಲಾಯಿತು.



(i) ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯುವ ಚೌಕದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಮೂರು ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಘನಫಲವನ್ನು $v(x)$ ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು x ಮತ್ತು $v(x)$ ಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(iii) $v\left(\frac{1}{2}\right)$, $v(1)$, $v\left(1\frac{1}{2}\right)$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಹಗ್ಗದಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ಆಯತದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ, ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು $a(x)$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ.

(i) x ಮತ್ತು $a(x)$ ಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) $a(10)$, $a(40)$ ಗಳು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದು ಯಾಕೆ?

(iii) x ಆಗಿ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವಾಗ $a(x)$ ಆಗಿ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗಲು, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನಾಗಿರಬೇಕು?

ವಿಶೇಷ ವಾಚಕಗಳು

ಹಲವು ರೀತಿಯ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವುದನ್ನು ನೋಡಿದಿರಲ್ಲವೆ. ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಇವುಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಪ್ರಾರಂಭದ ಆಯತ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, ಭುಜಗಳ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಹೊಸ ಸುತ್ತಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು

$$p(x) = 4x + 10$$

ಎಂದು ಬರೆದೆವು. ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಕ್ರಿಯೆ ಎಂಬುದರ ಬದಲಾಗಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 4 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ 10 ಕೂಡಿಸುವುದು ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿಯೂ ಇದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಿಂದ ಕಂಡುಕೊಂಡ ಇತರ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವ:

- $a(x) = x^2 + 5x + 6$
- $v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

ಇವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನಾಗಿ ನೋಡಿದರೆ, ಅವುಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಕೆಲವು ಸ್ವಭಾವಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಲವು ಘಾತಗಳನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಅಂತಹ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರುವುದು ಮಾತ್ರವೇ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವುದು. ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಂತಹ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಚಕದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಹೆಸರೇ **ಬಹುಪದ (polynomial).**

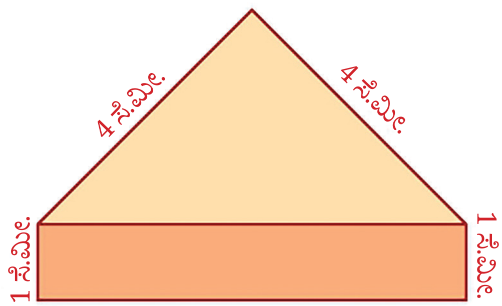
ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳೂ ಇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಭುಜವು ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜಕ್ಕಿಂತ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚು ಇರುವ ಆಯತಗಳಲ್ಲಿ ಕರ್ಣಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ.

ಸಣ್ಣ ಭುಜವನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನಲ್ಲಿ

$$\sqrt{x^2 + (x+1)^2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಾಣಬೇಕು ಎಂಬ ಕ್ರಿಯೆ ಇರುವುದರಿಂದ ನಮ್ಮ ನಿರ್ವಚನದ ಪ್ರಕಾರ ಇದೊಂದು ಬಹುಪದವಲ್ಲ.

ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಒಂದು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟಿರುವ ಈ ಆಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 8 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆಯತದ ದೊಡ್ಡ ಭುಜವು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಅಳತೆ $4\sqrt{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ (**ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠಭಾಗ); ಆಗ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $4\sqrt{2}$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಒಟ್ಟು $8 + 4\sqrt{2}$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ? ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x$$

ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ 2ರ ವರ್ಗಮೂಲವಿದ್ದರೂ ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ x ನ ಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಗ ಮಾಡುವುದು ಮತ್ತು $\frac{1}{2}, \sqrt{2}$ ಎಂಬೀ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಿರುವ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾತ್ರ ಇರುವುದಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇದು ಕೂಡಾ ಒಂದು ಬಹುಪದವೇ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡುವ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 25 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ x ಎಂದಾದರೆ ಸುತ್ತಳತೆಯು

$$2x + \frac{50}{x}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಿಯೆ ಇರುವುದರಿಂದ ಇದೊಂದು ಬಹುಪದವಲ್ಲ.

ಒಂದು ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘಾತಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಅತಿದೊಡ್ಡ ಘಾತಸೂಚಿಯನ್ನು **ಬಹುಪದದ ಘಾತಸೂಚಿ (degree of the polynomial)** ಎನ್ನುವರು.

ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿದ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$$p(x) = 4x + 10$$
$$a(x) = x^2 + 5x + 6$$
$$v(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಬಹುಪದಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಬಹುಪದದ ಘಾತಸೂಚಿಯು 1, ಎರಡನೆಯದರ ಘಾತಸೂಚಿಯು 2, ಮೂರನೆಯದರ ಘಾತಸೂಚಿ 3.

ಘಾತಸೂಚಿ 1 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದ ಎನ್ನುವುದರ ಬದಲು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ (first degree polynomial), ಘಾತಸೂಚಿಯು 2 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದ ಎನ್ನುವುದರ ಬದಲು ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ (second degree polynomial) ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಘಾತಸೂಚಿಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಬಹುಪದಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ಬರೆಯುವ:

ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ : $ax + b$

ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ : $ax^2 + bx + c$

ಮೂರನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ : $ax^3 + bx^2 + cx + d$

ಇಲ್ಲಿ a, b, c, d ಎಂಬೀ ಅಕ್ಷರಗಳು, ನಿಶ್ಚಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ; ಅಂದರೆ, x ನ ಬದಲು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ a, b, c, d ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬದಲಾವಣೆಯಿಲ್ಲ. ಇವುಗಳನ್ನು ಆಯಾಯ ಘಾತಗಳ ಸಂಖ್ಯಾಗುಣಕಗಳು (coefficients) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

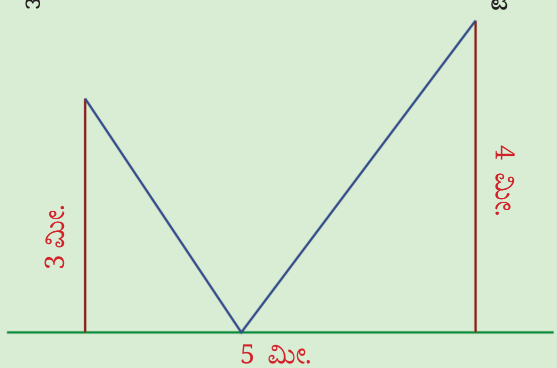
ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುದೇ ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಬಹುದು.

(1) ಕೆಳಗಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವು ಬಹುಪದವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ. ಯಾಕೆ ಎಂದು ಕಾರಣವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) ಚೌಕಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಮೈದಾನದ ಸುತ್ತಲೂ 1 ಮೀಟರ್ ಅಗಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಾಲುದಾರಿ ಇದೆ. ಮೈದಾನದ ಒಂದು ಬದಿಯ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ದಾರಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ.

(ii) 7 ಲೀಟರ್ ನೀರು ಮತ್ತು 3 ಲೀಟರ್ ಆಮ್ಲ ಸೇರಿರುವ ದ್ರಾವಣದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಸುರಿಯುವ ಆಮ್ಲದ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ದ್ರಾವಣದಲ್ಲಿರುವ ಆಮ್ಲದ ಶೇಕಡಾಮಾನದಲ್ಲುಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆ.

(iii) 3 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 4 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರವಿರುವ ಎರಡು ಕಂಬಗಳನ್ನು 5 ಮೀಟರ್ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ನೆಲದಲ್ಲಿ ನೆಟ್ಟಗೆ ನಾಟಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಕಂಬದ ತುದಿಯಿಂದ ಒಂದು ಹಗ್ಗವನ್ನು ಎಳೆದು ನೆಲಕ್ಕೆ ಬಿಗಿದು ಅಲ್ಲಿಂದ ಎರಡನೇ ಕಂಬದ ತುದಿಗೆ ಎಳೆದು ಕಟ್ಟಬೇಕು:



ಒಂದು ಕಂಬದ ಬುಡದಿಂದ ನೆಲಕ್ಕೆ ಹಗ್ಗವನ್ನು ಬಿಗಿದ ಸ್ಥಳಕ್ಕಿರುವ ದೂರ ಮತ್ತು ಹಗ್ಗದ ಉದ್ದಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧ.

(2) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಚಕವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಯಾವುದೆಲ್ಲ ಬಹುಪದವಾಗಿದೆ ಎಂದು ವಿವರಿಸಿರಿ.

(i) ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದ ಮೊತ್ತ.

(ii) ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವರ್ಗಮೂಲದ ಮೊತ್ತ.

(iii) ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಅದರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರುವುದು ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಳೆದಿರುವುದರೊಳಗಿರುವ ಗುಣಲಬ್ಧ.

(3) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದಗಳಲ್ಲಿ $p(1)$ ಮತ್ತು $p(10)$ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $p(x) = 2x + 5$ (ii) $p(x) = 3x^2 + 6x + 1$ (iii) $p(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 7$

(4) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದಗಳಲ್ಲಿ $p(0), p(1), p(-1)$ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(i) $p(x) = 3x + 5$ (ii) $p(x) = 5x - 8$ (iii) $p(x) = 3x^2 + 6x + 1$

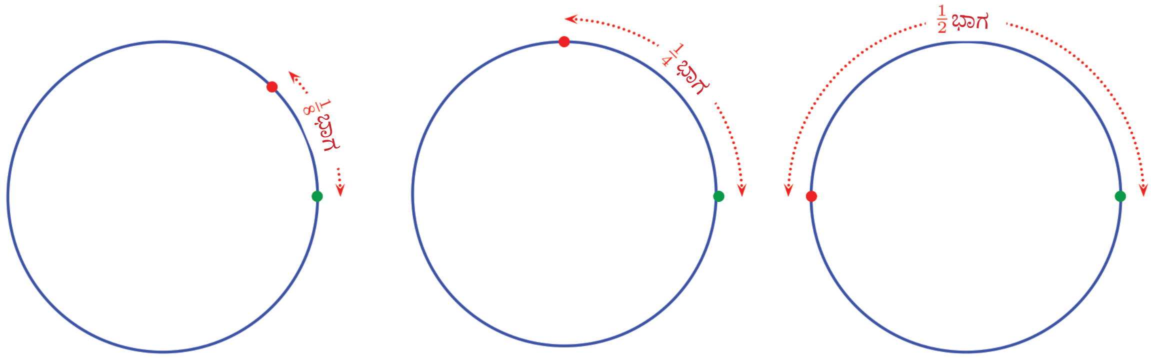
(iv) $p(x) = 2x^2 - 5x + 3$ (v) $p(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 7$ (vi) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

11 ವೃತ್ತಭಾಗಗಳು

ಉದ್ದವೂ ಕೋನವೂ

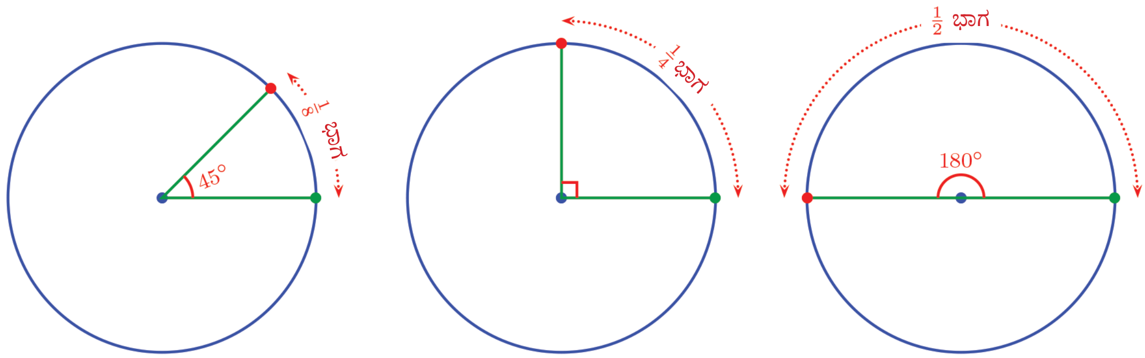
ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ. ಇನ್ನು ವೃತ್ತದ ಕೆಲವು ಭಾಗಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆಂದು ನೋಡುವ.

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಸಂಚರಿಸುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಊಹಿಸಿರಿ. ಸಂಚಾರದ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ :



ಈ ಸಂಚಾರವು ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಎಷ್ಟು ಚಲಿಸಿತು ಎನ್ನುವುದರ ಬದಲು, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ನೋಡುವಾಗ ಎಷ್ಟು ಡಿಗ್ರಿ ತಿರುಗಿತು ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು.

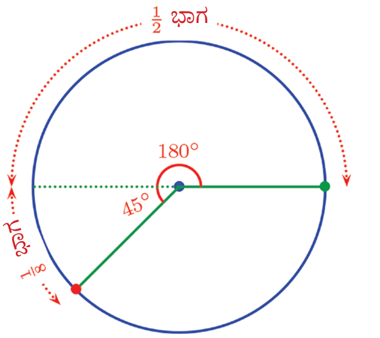
ವೃತ್ತದ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗ ಸಿಗಲು, ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ $360° \div 8 = 45°$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡದ್ದು ಮತ್ತು $\frac{1}{4}$ ಭಾಗ ಸಿಗಲು $360° \div 4 = 90°$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡದ್ದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೇ? (ಆರನೇ ತರಗತಿಯ **ಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ).

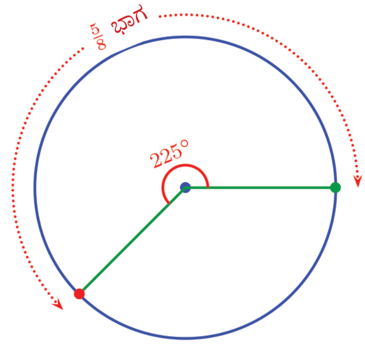


ಹಾಗೆ ಸಂಚಾರವನ್ನು ಉದ್ದವಾಗಿಯೂ ಕೋನವಾಗಿಯೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ : ವೃತ್ತದ ಅರ್ಧವನ್ನು ದಾಟಿ, ಪುನಃ ಎಂಟನೇ ಒಂದು ಭಾಗದಷ್ಟು ಸಂಚರಿಸಿದಾಗ ಸಂಚಾರದ ದೂರವು ವೃತ್ತದ $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು; ಈ ತಿರುಗುವಿಕೆಯನ್ನು ಕೋನ ಅಳತೆಯಾಗಿ ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದು?

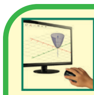
ವೃತ್ತದ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗ ಎಂದರೆ 45°; ಆಗ 180° ತಿರುಗಿದ ನಂತರ ಪುನಃ 45° ಗಳಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚು ತಿರುಗಿತು; ಒಟ್ಟು $180° + 45° = 225°$ ತಿರುಗಿತು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು:



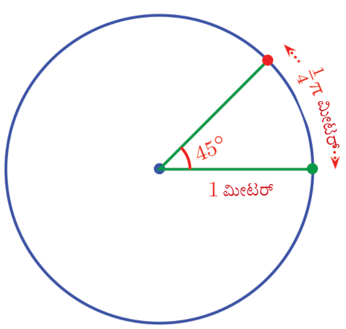


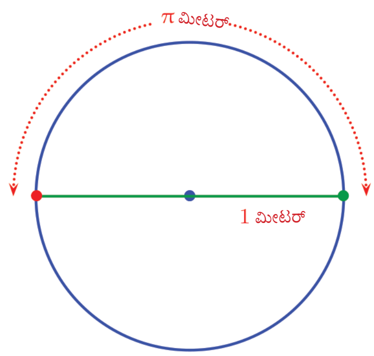
ಹೀಗೆ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಂಚರಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಪುನಃ ಅದೇ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವವರೆಗಿನ ಸಂಚಾರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಯದಲ್ಲೂ ಎಷ್ಟು ಸಂಚರಿಸಿತು ಎಂಬುದನ್ನು, ವೃತ್ತಭಾಗಗಳಾಗಿಯೋ, ತಿರುಗಿದ ಅಳತೆಯಾಗಿ 360° ವರೆಗಿನ ಕೋನಗಳಾಗಿಯೋ ಹೇಳಬಹುದು.

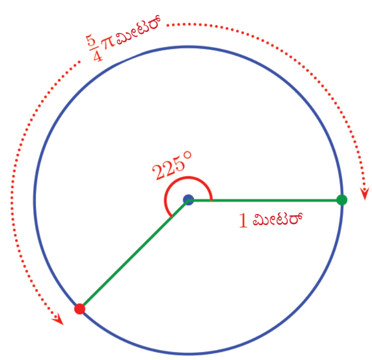
ಇದರಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 1 ಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ? ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ 2π ಮೀಟರ್; ಆಗ ದೂರಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ವೃತ್ತದ ಭಾಗಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಉದ್ದಗಳಾಗಿಯೇ ಹೇಳಬಹುದು:



ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ *A* ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ *B* ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಒಂದು Angle Slider *a* ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. *Angle with Given Size* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ *B*, *A* ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ *a* ಎಂದು ನೀಡಿರಿ. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಹೊಸ ಒಂದು ಬಿಂದು *B′* ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. Slider ನ್ನು ಚಲಿಸುವ ಮೂಲಕ *B′* ನ್ನು ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ತಿರುಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.



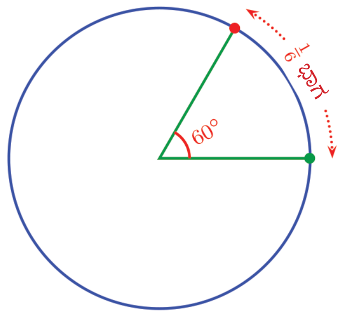


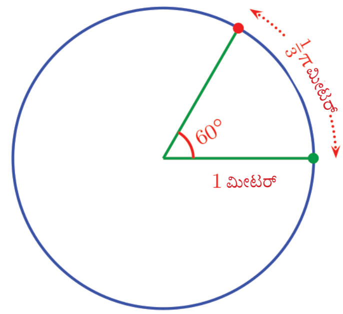


ಹಾಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ದೂರ ಚಲಿಸಿತೆಂಬುದನ್ನು ಮೀಟರಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು; ಅಥವಾ ಎಷ್ಟು ತಿರುಗಿತು ಎಂದು ಡಿಗ್ರಿಯಾಗಿಯೂ ಹೇಳಬಹುದು.

60° ತಿರುಗುವಾಗ, ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮೀಟರ್ ಚಲಿಸುವುದು ?

ವೃತ್ತದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗ ಚಲಿಸಿತು ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲು ನೋಡುವ. 1° ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದ $\frac{1}{360}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ? ಆಗ 60° ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದ $\frac{1}{360} \times 60 = \frac{1}{6}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ; ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ 2π ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇದು $2\pi \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\pi$ ಮೀಟರ್.

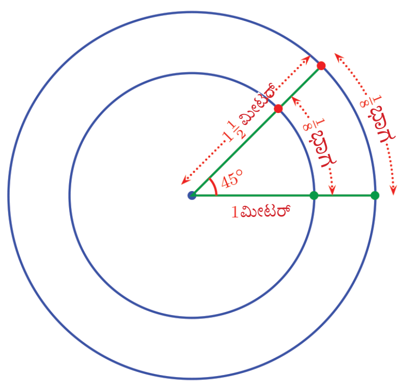


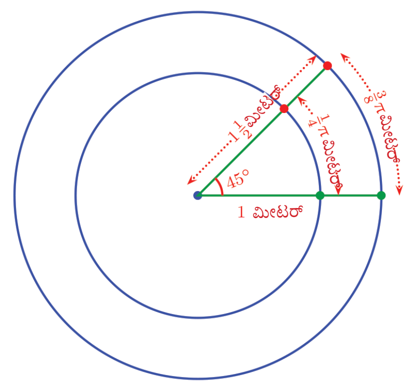


ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ತಿರುಗಿದ್ದು 360° ಯ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೋ, ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸಿರುವುದು 2π ಮೀಟರಿನ ಅಷ್ಟೇ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು.

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು $1\frac{1}{2}$ ಮೀಟರ್ ಆದರೆ ? ಸುತ್ತಳತೆ 3π ಮೀಟರ್ ಆಗುವುದು. ಆಗ ತಿರುಗಿರುವುದಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಸಂಚರಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು 3π ಮೀಟರಿನ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ ತಿರುಗುವುದಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವ ವೃತ್ತಭಾಗಗಳಿಗೆ ಬದಲಾವಣೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ವೃತ್ತಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಬದಲಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 45° ತಿರುಗುವಾಗ, ಈ ವೃತ್ತದ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗದಷ್ಟೇ ಸಂಚರಿಸುವುದು. ಆದರೆ ವೃತ್ತವು ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಂಚರಿಸಿದ ದೂರ $\frac{3}{8}\pi$ ಆಗುವುದು.





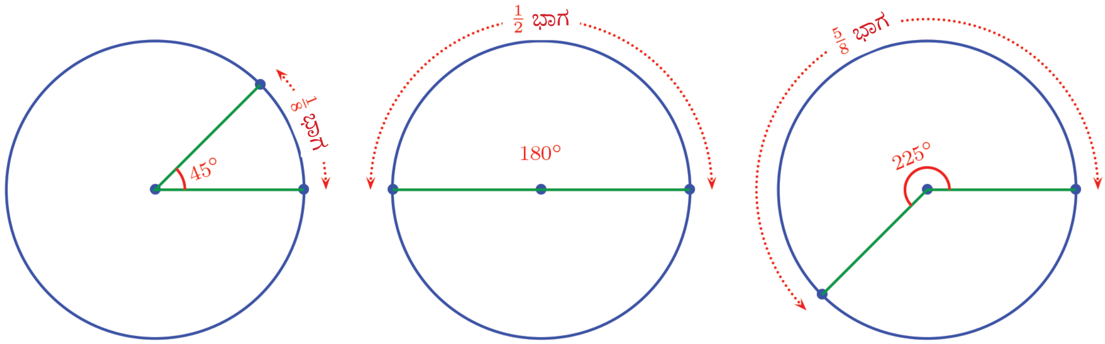
ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸಂಚಾರದಲ್ಲಿ, ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ $x°$ ತಿರುಗುವಾಗ, ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಸಂಚರಿಸಿದ ದೂರ $2\pi r \times \frac{x}{360}$.

ಇನ್ನು ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಗಣಿತಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದು ಹೇಗೆಂದು ನೋಡುವ. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಭಾಗಕ್ಕೆ **ಚಾಪ (arc)** ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಒಂದು ಚಾಪದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನವನ್ನು, ಚಾಪದ **ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ** (central angle) ಎನ್ನುವರು.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ A ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆದು ಅದರಲ್ಲಿ B, C ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತವನ್ನು ಮರೆ ಮಾಡಿದ ನಂತರ *Circular Arc* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ A, B, C ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ ಚಾಪವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. A, C, B ಎಂಬ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೂ ಚಾಪ ಸಿಗುವುದು. ಇವುಗಳೊಳಗಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನೆಂದು ನೋಡಿರಿ. AB, AC ಎಂಬ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನೆಳೆದು *Angle* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅವುಗಳೆಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನ (ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ)ವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.

ಆಗ ಈ ಮೊದಲೇ ಕಂಡುಕೊಂಡದ್ದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ವೃತ್ತದ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗ ಉದ್ದವಿರುವ ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 45°, ವೃತ್ತದ $\frac{1}{2}$ ಭಾಗ ಉದ್ದವಿರುವ ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 180°, ವೃತ್ತದ $\frac{5}{8}$ ಭಾಗ ಉದ್ದವಿರುವ ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 225°, ಎಂದೆಲ್ಲಾ ಹೇಳಬಹುದು:



ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಸಂಚಾರದ ತತ್ವವನ್ನು ವೃತ್ತದ್ದೇ ಆದ ಗಣಿತ ತತ್ವವಾಗಿಸಬಹುದು.:

ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $x°$ ಆಗಿರುವ ಚಾಪದ ಉದ್ದ $2\pi r \times \frac{x}{360}$ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು 360° ಯ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೋ, ಚಾಪದ ಉದ್ದವು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಅಷ್ಟೇ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 60° ಆಗಿರುವ ಚಾಪದ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು ?

ಇದನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಮಾಡಬಹುದು: 60° ಎಂಬುದು, 360° ಯ $\frac{1}{6}$ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಚಾಪದ ಉದ್ದವು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{1}{6}$ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು. ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು 6π ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಆಗ ಚಾಪದ ಉದ್ದವು π ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ತ್ರಿಜ್ಯ 2.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 50° ಆಗಿರುವ ಚಾಪದ ಉದ್ದವೋ ?

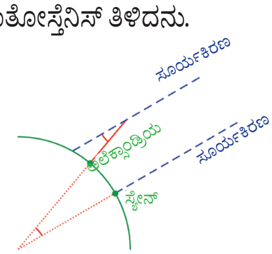
ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ 5π ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಅದರ $\frac{50}{360}$ ಭಾಗವು ಚಾಪದ ಉದ್ದವಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ,

$$5\pi \times \frac{50}{360} = \frac{25}{36}\pi \approx 2.2 \text{ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.}$$

ಭೂಮಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ

ಬಿ.ಸಿ.ಇ. ಎರಡನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಸ್ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ಇರಾತೋಸ್ತೆನಿಸ್ ಎಂಬ ವಿಜ್ಞಾನಿಯು ಭೂಮಿಯ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಮೊತ್ತಮೊದಲು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರುವುದು.

ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಿನ, ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಸ್ಯೇನ್ ಪಟ್ಟಣದಲ್ಲಿ ನಡುಮಧ್ಯಾಹ್ನದಲ್ಲಿ ಸೂರ್ಯನು ತಲೆಯ ನೇರ ಮೇಲಿರುವ ನೆಂದೂ, ಆದುದರಿಂದ ಈ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ನೆರಳು ಇರುವುದಿಲ್ಲವೆಂದೂ ಇರಾತೋಸ್ತೆನಿಸ್ ತಿಳಿದನು.



ಅವನು ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದ ಅಲೆಕ್ಸಾಂಡ್ರಿಯಾದಲ್ಲಿ ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಸೂರ್ಯಕಿರಣಗಳು ಬೀಳುವುದು ಎಷ್ಟು ಓರೆಯಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆಲಕ್ಕೆ ನೆಟ್ಟಗೆ ನಾಟಲಾದ ಒಂದು ಕೋಲಿನ ನೆರಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅವನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದನು.

ಸೂರ್ಯಕಿರಣಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿದರೆ, ಅಲೆಕ್ಸಾಂಡ್ರಿಯ ಮತ್ತು ಸ್ಯೇನನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಭೂಮಿಯ ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು ಇದುವೇ ಆಗಿರುವುದು. ಎರಡು ಪಟ್ಟಣಗಳ ನಡುವಣ ದೂರವು ಈ ಚಾಪದ ಉದ್ದವಾಗಿರುವುದು.

ಆಗ, ಅಲೆಕ್ಸಾಂಡ್ರಿಯಾದಲ್ಲಿನ ಸೂರ್ಯಕಿರಣದ ಬಾಗುವಿಕೆ ಯ ಕೋನವನ್ನು $a°$ ಎಂದೂ ಸ್ಯೇನ್‌ಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು d ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಭೂಮಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ $\frac{360}{a} \times d$ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ:

ತ್ರಿಜ್ಯ 9 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣದ ವೃತ್ತದಿಂದ, ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $30°$ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ತುಂಡನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು. ಇದನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ಸಣ್ಣದೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು?

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $30°$ ಆಗಿರುವ ಚಾಪದ ಉದ್ದವು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$ ಭಾಗ; ಅಂದರೆ, ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ತುಂಡಿನ ಉದ್ದ $18\pi \times \frac{1}{12} = \frac{3}{2}\pi$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಇದು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಆಗಿದೆ; ಆಗ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು $\frac{3}{2}\pi \div 2\pi = \frac{3}{4}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು: ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{1}{12}$ ಭಾಗವು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಆಗಿರುವುದು. ತ್ರಿಜ್ಯವೂ ಸುತ್ತಳತೆಯೂ ಬದಲಾಗುವುದು ಸಮಾನ ದರದಲ್ಲಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ $\frac{1}{12}$ ಭಾಗದಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ; ಅಂದರೆ,

$$9 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \text{ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್}$$

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $\frac{12}{\pi}$ ಆಗಿ ತೆಗೆದ ಮೊದಲ ಚಟುವಟಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿರುವ ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ಅಪ್ಲೇಟ್ ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. (ತ್ರಿಜ್ಯ 12/pi ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕು) ಈ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು ? Distance or Length ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಚಾಪದ ಉದ್ದವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $60°$ ಆಗುವಾಗ ಚಾಪದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗುವುದು? ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ನೋಡಿ. ಉದ್ದ 2 ಆಗಿರುವ ಚಾಪವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ? 3, 5, 15, 18, 19 ಎಂಬೀ ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಚಾಪಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

(1) ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $40°$ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಚಾಪದ ಉದ್ದವು 3π ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದು? ತ್ರಿಜ್ಯವೋ?

(2) ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $25°$ ಆಗಿರುವ ಚಾಪದ ಉದ್ದ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

(i) ಇದೇ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $75°$ ಆಗಿರುವ ಚಾಪದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

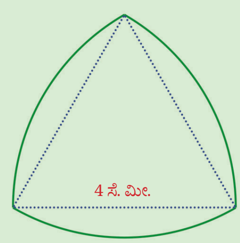
(ii) ತ್ರಿಜ್ಯವು ಇದರ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $75°$ ಆಗಿರುವ ಚಾಪದ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(3) ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಬಳೆಯಿಂದ ಒಂದು ತುಂಡನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ತ್ರಿಜ್ಯ $\frac{1}{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಉಂಗುರವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು.

(i) ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯುವ ತುಂಡಿನ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಎಷ್ಟು ಡಿಗ್ರಿಯಾಗಿರಬೇಕು?

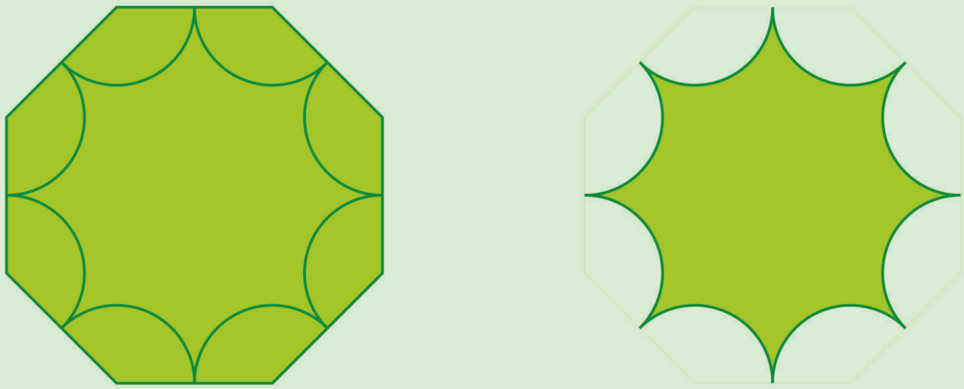
(ii) ಬಳೆಯಲ್ಲಿ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಸಣ್ಣ ಬಳೆಯನ್ನು ಮಾಡಲಾಯಿತು. ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದು?

(4) ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಉಳಿದ ಎರಡು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಚಾಪಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಇದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್?

(5) ಒಂದು ಸಮ ಅಷ್ಟಭುಜದ ಶಿರಗಳು ಕೇಂದ್ರವಾಗುವಂತೆ ಚಾಪಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾದ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು.

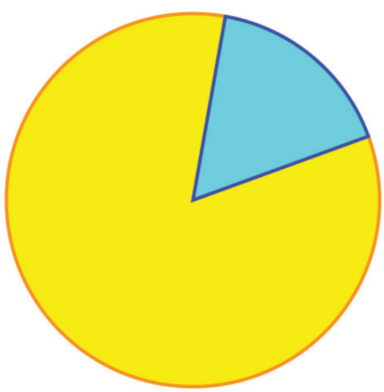


2 ಸೆ. ಮೀ.

ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ಆಕೃತಿಯ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

ಕೋನವೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ

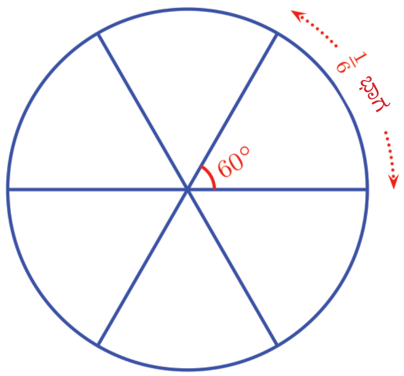
ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯ ಒಂದು ಭಾಗವು ಚಾಪ ಆಗಿದೆ. ಒಂದು ಚಾಪ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸೇರಿದರೆ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗುವುದು:

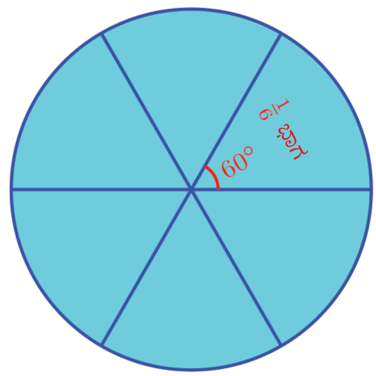


ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ A ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆದು ಅದರಲ್ಲಿ B, C ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. *Circular Sector* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ A, B, C ಎಂಬೀ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. *Area* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಒಳಗೆ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ನೋಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.

ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ವೃತ್ತಭಾಗವನ್ನು **ಸೆಕ್ಟರ್ (sector)** ಎನ್ನುವರು. ಇದರ ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವನ್ನು ಸೆಕ್ಟರಿನ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಎನ್ನುವರು.

ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ಚಾಪದ ಉದ್ದ ಬದಲಾಗುವಂತೆ, ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ಬದಲಾಗುವುದು. ಎರಡರ ಲೆಕ್ಕವೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $60°$ ಆಗಿರುವ ಚಾಪವು, ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{1}{6}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ; ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು $60°$ ಆಗಿರುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ $\frac{1}{6}$ ಭಾಗವೇ ಆಗಿದೆ:





ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು $1°$ ಆಗಿರುವ ಚಾಪವು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{1}{360}$ ಭಾಗ; ಹಾಗೂ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $1°$ ಆಗಿರುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ $\frac{1}{360}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ.

ಆಗ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಮತ್ತು ಚಾಪದ ಉದ್ದದ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧದಂತೆಯೇ, ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಮತ್ತು ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

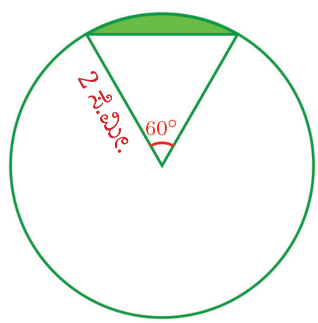
ಚಾಪದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು 360° ಯ ಎಷ್ಟು ಭಾಗ ವಾಗಿದೆಯೋ, ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅಷ್ಟೇ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ *A* ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ $\sqrt{\frac{240}{\pi}}$ ತ್ರಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. *Circle : Centre & Radius* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ *A* ಯಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ ತ್ರಿಜ್ಯ *sqrt (240/pi)* ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕು. ಈ ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು? ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು *B* ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ ನಿರ್ಮಿಸಿ ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಸಂಚರಿಸುವ ಬಿಂದು *B′* ಗುರುತಿಸಿರಿ. *Sector* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ *A*, *B*, *B′* ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $60°$ ಆಗುವಾಗ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಎಷ್ಟಾಗುವುದು? ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 20, 44, 100, 120, 194 ಆಗಿರುವ ಸೆಕ್ಟರ್‌ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಇವುಗಳ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೀಗೆಯೂ ಹೇಳಬಹುದು:

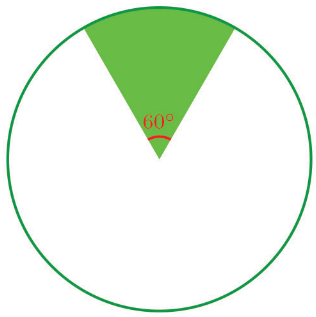
ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $x°$ ಆಗಿರುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\pi r^2 \times \frac{x}{360}$

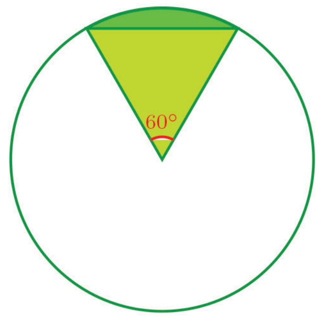
ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನ $40°$ ಆಗಿರುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ $\frac{40}{360} = \frac{1}{9}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ; ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 9π ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಆಗ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು π ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.



ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಸುರು ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲಾಗಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

ಸೆಕ್ಟರಿನಿಂದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬೇರ್ಪಡಿಸಿದರೆ ಈ ಭಾಗವು ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ.





ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ $\frac{1}{6}$ ಭಾಗ;

ಅಂದರೆ, $4\pi \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\pi$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

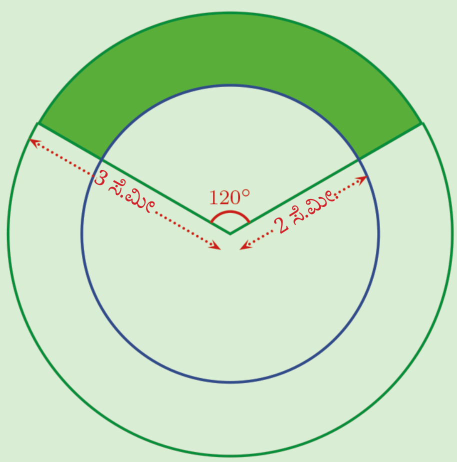
ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. (ಕಾರಣ ?) ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\sqrt{3}$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಆಗ ಮೊದಲ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

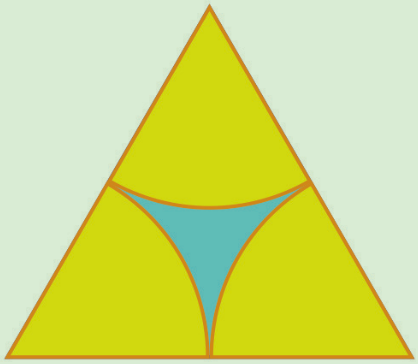
(1) (i) ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನ 120° ಆಗಿರುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

(ii) ತ್ರಿಜ್ಯ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನ ಇಷ್ಟೇ ಆಗಿರುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

(2) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಸುರು ಬಣ್ಣದಲ್ಲಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

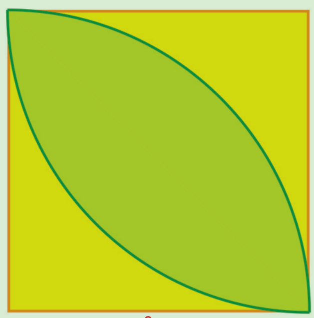


(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳು ಕೇಂದ್ರಗಳಾಗಿ, ಭುಜಗಳ ಅರ್ಧ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಚಾಪಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ:



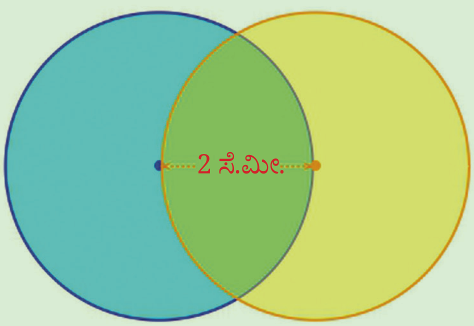
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೀಲಬಣ್ಣ ಇರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

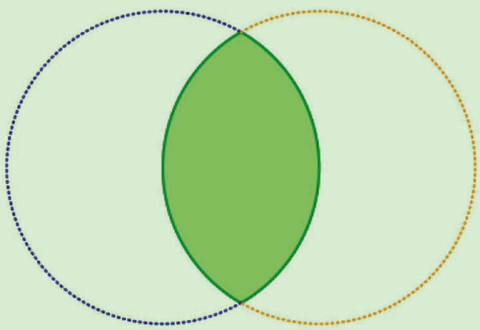
(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚೌಕದ ಎರಡು ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಗಳು ಕೇಂದ್ರಗಳಾಗಿ, ಉಳಿದೆರಡು ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಚಾಪಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ:



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಸಿರು ಬಣ್ಣ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

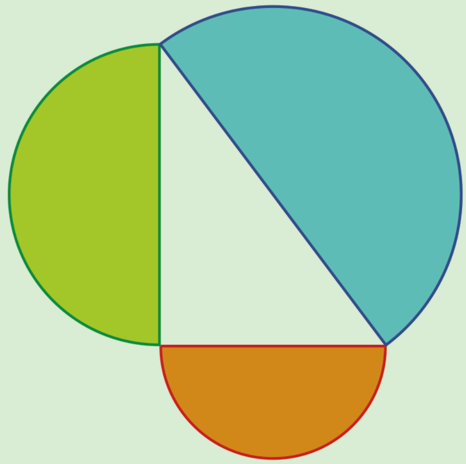
(5) ಸಮಾನ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ:





ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲೂ ಸೇರಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ವ್ಯಾಸವಾಗುವಂತೆ ಅರ್ಧವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ:

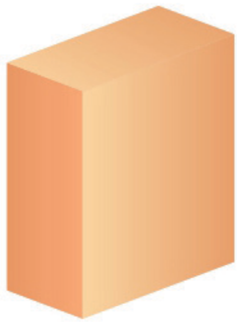


ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ಸಣ್ಣ ಎರಡು ಅರ್ಧವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

12 ಸ್ತಂಭಗಳು

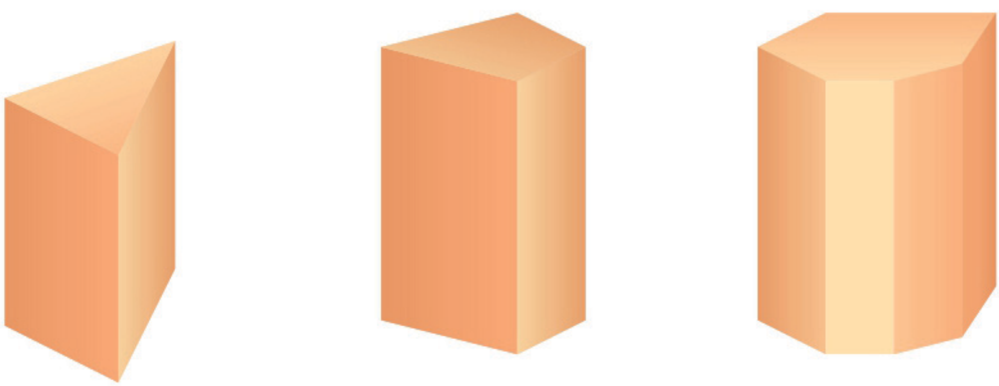
ಪಾದ ಹಲವು ವಿಧ

ಆಯತ ಗಟ್ಟಿಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಕುರಿತು ಆರನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವಿರಲ್ಲವೇ:



ಹಲವು ಆಯತಗಳು ಸೇರಿ ಇದರ ಹೊರ ಆವರಣ ಅಥವಾ ಹೊರಮೈ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ಕೆಳಗೂ ಮೇಲೆಯೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಎರಡು ಆಯತಗಳು, ಅದೇ ರೀತಿ ಎಡಕ್ಕೂ ಬಲಕ್ಕೂ ಎರಡು ಆಯತಗಳು, ಮುಂದೆಯೂ ಹಿಂದೆಯೂ ಮೂರನೇ ಜೋಡಿ; ಒಟ್ಟು ಆರು ಆಯತಗಳು.

ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಹೊರಮೈ, ಉನ್ನತಿ ಇರುವ ಇವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ **ತ್ರಿಮಾನ ರೂಪಗಳು** (three-dimensional shapes) ಅಥವಾ **ಘನಾಕೃತಿಗಳು** (solids) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಘನಾಕೃತಿಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಇತರ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷತೆಗಳಿವೆ.

ಮೊದಲ ಆಕೃತಿಯ ಹೊರಮೈಯು, ಕೆಳಗೂ ಮೇಲೆಯೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ಆಯತಗಳು ಸೇರಿದುದಾಗಿದೆ; ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಹಾಗೂ ನಾಲ್ಕು ಆಯತಗಳು, ಮೂರನೆಯದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಷಡ್ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಆರು ಆಯತಗಳು ಆಗಿವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಮಾನ ಭುಜಗಳು ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳಾಗಿ ಸಮಾನ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿರುವ ಆಯತಗಳಾಗಿವೆ ಇವುಗಳೆಲ್ಲದರ ಹೊರಮೈ. ಇಂತಹ ಆಕೃತಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಹೆಸರು **ಬಹುಭುಜ ಸ್ತಂಭ (prism)** ಎಂದಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಸ್ತಂಭದ ಕೆಳಗೂ ಮೇಲೆಯೂ ಇರುವ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಆಯತಗಳನ್ನೂ ಅದರ **ಮುಖಗಳು (faces)** ಎನ್ನುವರು. ಕೆಳಗೆ ಹಾಗೂ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಪಾದಮುಖಗಳೆಂದೂ ಆಯತಗಳನ್ನು ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳೆಂದೂ ಹೇಳುವರು. ಮುಖಗಳ ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ತಂಭದ **ಅಂಚುಗಳು (edges)** ಎನ್ನುವರು.

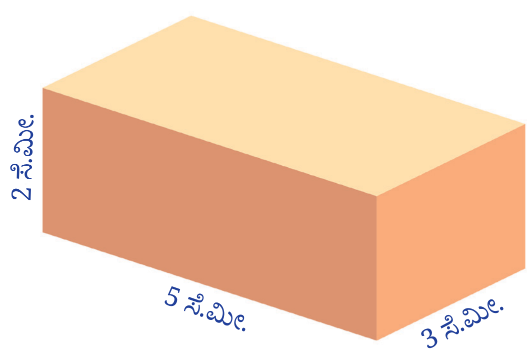
ಪಾದಮುಖಗಳ ಆಕೃತಿಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ, ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭ, ಚತುರ್ಭುಜಸ್ತಂಭ ಎಂಬೆಲ್ಲಾ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸುವರು. ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಾಣುವುದು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭ, ಒಂದು ಆಯತಸ್ತಂಭ ಹಾಗೂ ಒಂದು ಷಡ್ಭುಜಸ್ತಂಭವಾಗಿದೆ. ಇದುವರೆಗೆ ಆಯತ ಗಟ್ಟಿ ಎಂದು ಕರೆದಿರುವ ಆಕೃತಿಗೆ (ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ) ಆಯತಸ್ತಂಭ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಆಯತಗಳನ್ನು ಕಾರ್ಡ್ ಬೋರ್ಡ್‌ನಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು ಟೊಳ್ಳಾದ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

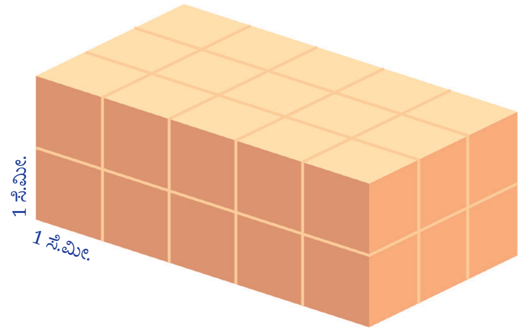
ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಬಹುಭುಜ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂದು ನೋಡೋಣ. ಸ್ತಂಭಗಳ ಪಾದಮುಖಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. Polygon ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಬಹುಭುಜವನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಾಕು. ಇನ್ನು 3D Graphics ತೆರೆಯಬೇಕು. (View → 3D Graphics) ನಾವು ನಿರ್ಮಿಸಿದ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ಅಲ್ಲಿಯೂ ಕಾಣಬಹುದು. 3D Graphics ನಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದಾಗ ತ್ರಿಮಾನ ರೂಪಗಳ ನಿರ್ಮಾಣದಲ್ಲಿ ಅಗತ್ಯವಾದ ಟೂಲ್ ಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ಕಾಣಬಹುದು. ಇದರಿಂದ Extrude to Prism ಎಂಬ ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ 3D Graphics ನಲ್ಲಿ ಕಾಣುವ ಬಹುಭುಜದಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದಾಗ ಕಾಣುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಸ್ತಂಭಕ್ಕೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ನೀಡಿ ok ಎಂದು ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದು. ಹೆಸರನ್ನು ನೀಡುವುದು ಬೇಡವೆಂದರೆ, ನಿರ್ಮಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲೇ Options → Labeling → No new objects ನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಿದರೆ ಸಾಕು.

ಘನಫಲ

ಆರನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಆಯತಸ್ತಂಭಗಳ (ಆಯತ ಗಟ್ಟಿಗಳ) ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದುದು ನೆನಪಿದೆಯೇ ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ಆಯತಸ್ತಂಭವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಕೆಳಗೆ ಕಾಣುವಂತೆ ಇದನ್ನು ಅಂಚುಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕಗಟ್ಟಿಗಳಾಗಿ ಭಾಗ ಮಾಡೋಣ:

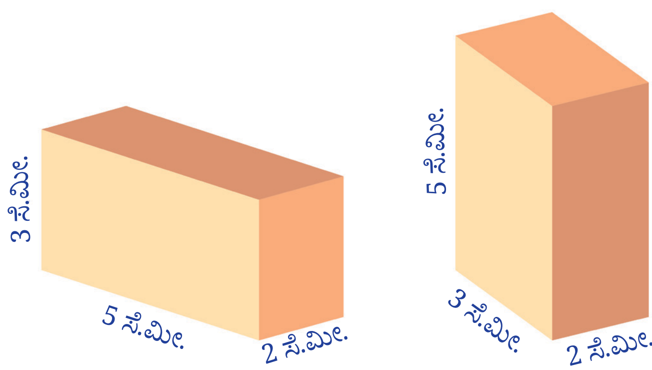


ಇದರಲ್ಲಿ $5 \times 3 \times 2 = 30$ ಚಿಕ್ಕ ಚೌಕಗಟ್ಟಿಗಳಿವೆ; ಆದುದರಿಂದ ಆಯತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲ 30 ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಭಿನ್ನರಾಶಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವಂತೆ, ಆಯತಸ್ತಂಭದ ಉದ್ದ, ಅಗಲ, ಎತ್ತರಗಳೆಲ್ಲಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ, ಘನಫಲವು ಈ ಅಳತೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. **ಅಭಿನ್ನಕ ಗುಣಾಕಾರ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಗುಣಾಕಾರ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ವಿವರಿಸಿದಂತೆ, ಆಯತ ಸ್ತಂಭದ ಅಳತೆಗಳು ಅಭಿನ್ನಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ, ಘನಫಲವು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

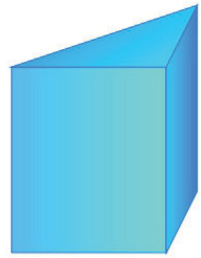
ಆಯತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಹೇಳಬಹುದು. ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಆಯತಸ್ತಂಭದ ಪಾದವು ಒಂದು ಆಯತವಾಗಿದೆ. ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್; ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 5×3 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್; ಆಗ ಘನಫಲವು ಈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿಯಾದ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಆಯತಸ್ತಂಭದ ಎಲ್ಲಾ ಮುಖಗಳೂ ಆಯತಗಳಾದುದರಿಂದ, ಯಾವುದೇ ಮುಖವನ್ನು ಪಾದವನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

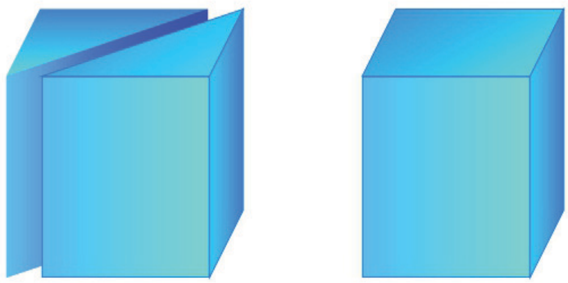


ಹೇಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ, ಘನಫಲವು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವೇ ಆಗಿದೆ ಅಲ್ಲವೇ?

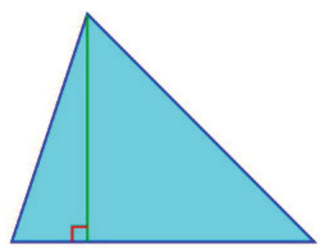
ಯಾವುದೇ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದೇ ಎಂದು ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲಿಗೆ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ:



ಇದೇ ರೀತಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಟ್ಟು ಒಂದು ಆಯತಸ್ತಂಭವನ್ನು ಮಾಡಬಹುದಲ್ಲವೇ.

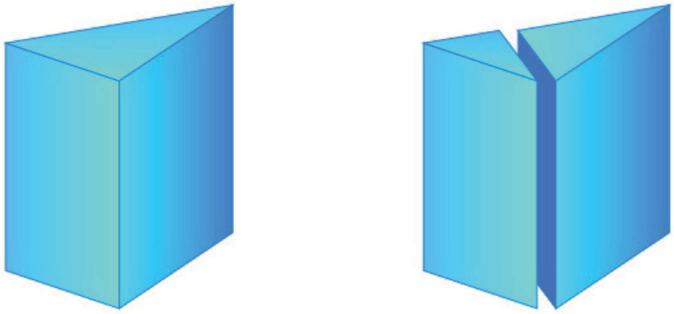


ಪಾದವಾಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು a ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಈ ರೀತಿಯ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟಿರುವ ಆಯತಸ್ತಂಭದ ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೇಳಿರುವುದು) $2a$; ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿಯೇ ಆಯತ ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿ, ಅದನ್ನು h ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆಯತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲ $2ah$. ಇದು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಿರುವ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭಗಳು ಸೇರಿದ ಘನಫಲವಾಗಿದೆ. ಆಗ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲ ah ಅಂದರೆ, ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹಾಗೂ ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.



ಇನ್ನು ಪಾದವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಲ್ಲದ ತ್ರಿಕೋನವಾದರೋ ? ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ, ಒಂದು ಶಿರದಿಂದ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆದು ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು:

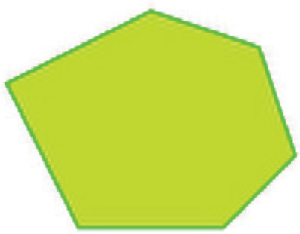
ಆಗ ಪಾದ ಲಂಬಕೋನವಲ್ಲದ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಂತೆ ಪಾದದ ಮೂಲಕ ನೀಟಕ್ಕೆ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭಗಳಾದೀತು.

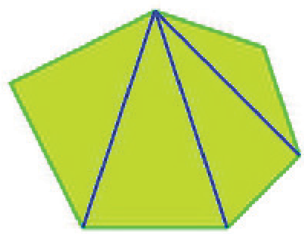


ತುಂಡರಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭಗಳ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಮೊದಲಿನ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲ ಲಭಿಸುವುದು. ತುಂಡರಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ ಮೊದಲಿನ ಸ್ತಂಭದ ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ a, ತುಂಡರಿಸಿ ಲಭಿಸಿದ ಸ್ತಂಭಗಳ ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ b, c ಆದರೆ $a = b + c$. ಈ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ತಂಭಗಳಿಗೂ ಉನ್ನತಿ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಇದು h ಆದರೆ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತ $bh + ch = (b + c)h = ah$. ಇದು ಮೊದಲಿನ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭದ ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಉನ್ನತಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದುದಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

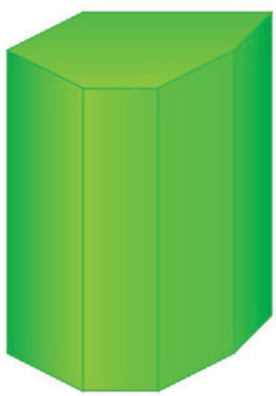
ಅಂದರೆ ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹಾಗೂ ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಿತು.

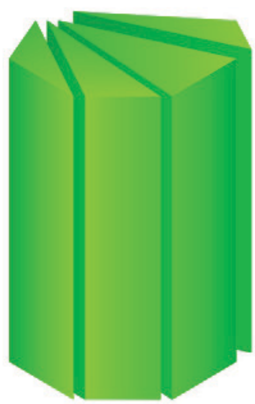
ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಶಿರವನ್ನು ಇತರ ಎಲ್ಲಾ ಶಿರಗಳೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿ, ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು; ಬಹುಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಹೀಗೆ ವಿಭಜಿಸಿ ಲಭಿಸುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ.





ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು:





ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ Polygon ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಬಹುಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. (ಶಿರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಆರೋ, ಏಳೋ ಆದೀತು) Area ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇದರೊಳಗೆ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಲಭಿಸುವುದು. ಈ ಬಹುಭುಜ ಪಾದವಾಗಿರುವಂತೆ ನಿಮಗಿಷ್ಟದ ಉನ್ನತಿಯ ಒಂದು ಸ್ತಂಭವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. Volume ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಇದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಸ್ತಂಭದ ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಉನ್ನತಿ ಹಾಗೂ ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು? ಸ್ತಂಭಗಳ ಶಿರಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಒಂದು ಶಿರದ ಸ್ಥಾನವು ಇನ್ನೊಂದು ಶಿರದ ಮೇಲೆ ಬರುವಂತೆ ಕ್ರಮೀಕರಿಸಿ ಬಹುಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಬಹುದು.

ಸ್ತಂಭದ ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ a ಎಂದೂ ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿ h ಎಂದೂ ತೆಗೆಯುವ. ಪಾದವನ್ನು n ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ; ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಸ್ತಂಭವನ್ನು n ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಬಹುದು. ಇವುಗಳ ಪಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $b_1, b_2, ..., b_n$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $b_1h, b_2h, ..., b_nh$ ಎಂಬುದು ಘನಫಲವಾಗುವುದು. ಆಗ ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲ

$$b_1h + b_2h + . . . + b_nh = (b_1 + b_2 + . . . + b_n)h = ah$$

ಅಂದರೆ,

ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಒಂದು ಸ್ತಂಭದ ಪಾದ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ; ಅದರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಅದರ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು ?

ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಭುಜದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗದ $\sqrt{3}$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಅಭಿನ್ನಕ ಗುಣಾಕಾರ ಎಂಬ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಂಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ತಂಭದ ಪಾದವಾದ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಆಗ ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$2^2 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಎತ್ತರ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದುದರಿಂದ ಘನಫಲ

$$4\sqrt{3} \times 10 = 40\sqrt{3} \text{ ಘ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿನೋಡಿರಿ.

ಪಾದಸುತ್ತಳತೆ 15, ಉನ್ನತಿ 5 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. (ಸಮಬಹುಭುಜಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು Regular Polygon ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು). ಈ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು?

ಅಂಚುಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲ $16\sqrt{3}$ ಆಗಿದೆ. ಈ ಸ್ತಂಭದ ಒಂದು ಅಂಚಿನ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು ? ಇಂತಹ ಒಂದು ಸ್ತಂಭವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ.

ಅಂಚುಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಸಮಷಡ್ಭುಜ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲ $12\sqrt{3}$ ಆಗಿದೆ. ಇಂತಹ ಒಂದು ಸ್ತಂಭವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ.

(1) ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭದ ಪಾದ ಸುತ್ತಳತೆ 18 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಉನ್ನತಿ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭದ ಪಾದ ಅಂಚುಗಳು 13 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 14 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ 20 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು ?

(3) ಮಳೆನೀರು ಸಂಗ್ರಹಕ್ಕಾಗಿ ಶಾಲಾ ಆವರಣದಲ್ಲಿ ಸಮಷಡ್ಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗುಂಡಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಒಂದು ಬದಿ 2 ಮೀಟರ್, ಗುಂಡಿಯ ಆಳ 3 ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ನೀರಿದೆ. ಅದು ಎಷ್ಟು ಲೀಟರಾಗಿದೆ ? ಈ ಗುಂಡಿಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೆಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ನೀರು ಹಿಡಿಯಬಹುದು ?

(4) ಚೌಕಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯ ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳೆಲ್ಲಾ 16 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿವೆ. ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನಷ್ಟು ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ನೀರಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಅಂಚುಗಳೆಲ್ಲಾ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕಗಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮುಳುಗಿಸಿದರೆ ನೀರಿನ ಮಟ್ಟ ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಏರಬಹುದು?

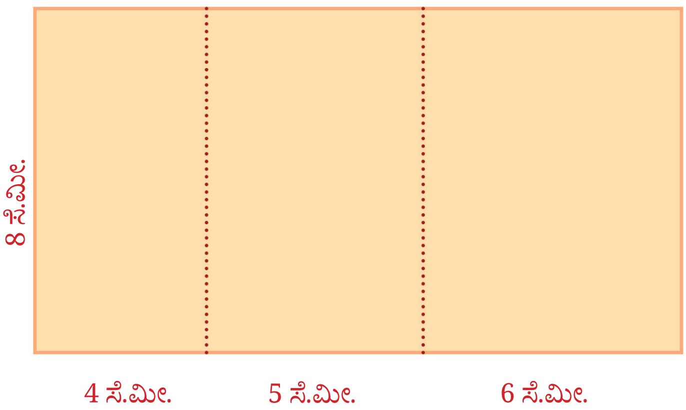
(5) ಲೋಹದಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಿರುವ ಒಂದು ಆಯತಸ್ತಂಭದ ಅಂಚುಗಳು 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 9 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹಾಗೂ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರುಗಳಾಗಿವೆ. ಇದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಅಂಚುಗಳು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಎಷ್ಟು ಚೌಕಗಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು?

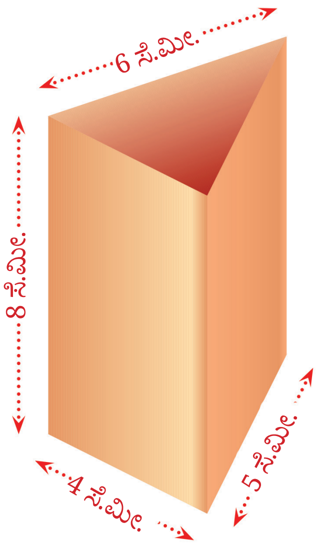
(6) ಮರದಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಿದ ಒಂದು ಚೌಕಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳು 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿವೆ. ಅದರ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟು? ಇದರಿಂದ ಗರಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರವಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭವನ್ನು ಕೆತ್ತಿ ತಯಾರಿಸಿದರೆ ಅದರ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು?

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ದಪ್ಪ ಕಾಗದವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೊಳವೆಯನ್ನುಂಟುಮಾಡಬೇಕು:

ಮೂರು ಆಯತಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಅಂಟಿಸಿ ತಯಾರಿಸಬಹುದು;
ಒಂದೇ ಆಯತವನ್ನು ಮಡಚಿ ಅಂಟಿಸಿಯೂ ತಯಾರಿಸಬಹುದು.





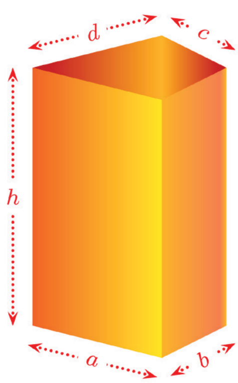
ಇದನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಕಾಗದ ಬೇಕು ? ಮೇಲಿನ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

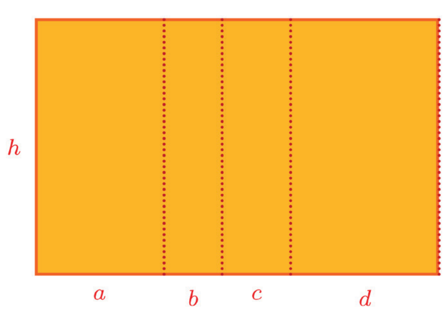
$$(4 + 5 + 6) \times 8 = 15 \times 8 = 120 \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಇದು ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಕೂಡಿಸಿರುವುದಲ್ಲವೇ? ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಸ್ತಂಭದ ಎಲ್ಲಾ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಅದರ **ಪಾರ್ಶ್ವಮೈವಿಸ್ತೀರ್ಣ (lateral surface area)** ಎನ್ನುವರು. ಇದನ್ನೇ ಚುಟುಕಾಗಿ **ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣ** ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, 15 ನ್ನು 8 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ; ಇಲ್ಲಿ $15 = 4 + 5 + 6$, ಪಾದವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆ, 8 ಎಂಬುದು ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವಲ್ಲವೇ? ಆಗ, ಈ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪಾದಸುತ್ತಳತೆ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರದ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ. ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಯೋಚಿಸಿದರೆ, ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಚತುರ್ಭುಜವಾದರೋ?





ದಪ್ಪ ಕಾಗದದಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ಒಂದು ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಇರಿಸಿದ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಊಹಿಸಿರಿ. ಈ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಪುನಃ ಮಡಚಿ ಸ್ತಂಭವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರುವ ಒಂದು ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಹೀಗೆ ಮಾಡಲು *Net* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಸಾಕು. ಬಹುಭುಜ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅವುಗಳ *Net* ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಈ ಚತುರ್ಭುಜಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಬಿಡಿಸಿ ಇಟ್ಟಾಗ ಲಭಿಸುವ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಅದು $(a+b+c+d)h$ ಆಗಿದೆ; ಅಂದರೆ, ಚತುರ್ಭುಜ ಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ ಹಾಗೂ ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧ.

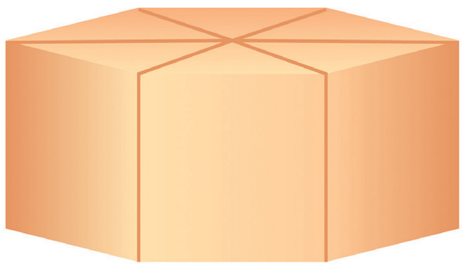
ಇದೇ ರೀತಿ ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:

ಯಾವುದೇ ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಮುಚ್ಚಿದ ಸ್ತಂಭವಾದರೆ, ಹೊರಮೈಯ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಎರಡು ಮಡಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ:

ಮರದಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಿದ ಒಂದು ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 48 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಅದರ ಎತ್ತರ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿದೆ. ಇಂತಹ ಆರು ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಟ್ಟು ಒಂದು ಷಡ್ಭುಜ ಸ್ತಂಭವನ್ನುಂಟುಮಾಡಲಾಯಿತು.



ಇದಕ್ಕೆ ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಬಣ್ಣದ ಕಾಗದವನ್ನು ಅಂಟಿಸಿ ಅಂದಗೊಳಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಕಾಗದ ಬೇಕು ?

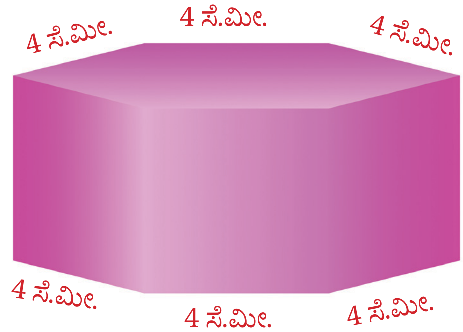
ಇಲ್ಲಿ ಷಡ್ಭುಜ ಸ್ತಂಭದ ಒಟ್ಟು ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬೇಕಾಗಿದೆ; ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪಾದಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಷಡ್ಭುಜಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ ಬೇಕು. ಅದಕ್ಕೆ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಯಾವುದೇ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಉನ್ನತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಪಾದಸುತ್ತಳತೆ ಲಭಿಸುವುದು. ಆಗ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭದ ಪಾದ ಸುತ್ತಳತೆ $48 \div 4 = 12$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಪಾದವು ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾದುದರಿಂದ, ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದದ ಮೂರುಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ $12 \div 3 = 4$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಷಡ್ಭುಜಸ್ತಂಭದ ಪಾದಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಇನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.



ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಾ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಷಡ್ಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ $6 \times 4 = 24$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿಯೂ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣ $24 \times 4 = 96$ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಎರಡೂ ಪಾದಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$2^2 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಇಂತಹ ಆರು ಪಾದಗಳು ಸೇರಿದ ಷಡ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

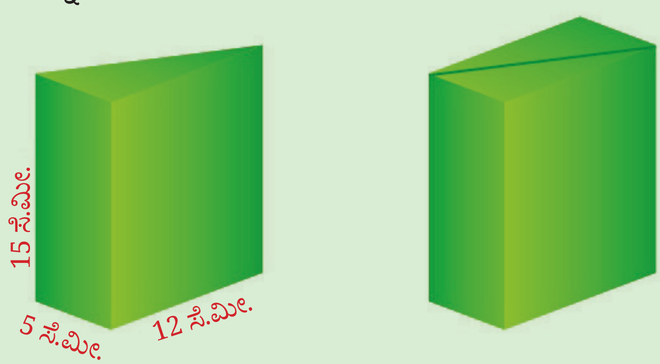
ಆಗ ಷಡ್ಭುಜಸ್ತಂಭದ ಹೊರಮೈಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$96 + (2 \times 24\sqrt{3}) = 96 + 48\sqrt{3} = 48\left(2 + \sqrt{3}\right) \text{ ಚ.ಸೆ.ಮೀ.}$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು 179 ಕ್ಕಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚೆಂದು, ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಹೇಗಿದ್ದರೂ 180 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನಷ್ಟು ಕಾಗದ ಸಾಕು.

(1) ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭದ ಪಾದಸುತ್ತಳತೆ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಅದರ ಹೊರಮೈಯ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಪಾದವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಟ್ಟು ಒಂದು ಆಯತಸ್ತಂಭವನ್ನು ಮಾಡಲಾಯಿತು.



ಈ ಆಯತಸ್ತಂಭದ ಒಟ್ಟು ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು ?

(3) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ 13 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹಾಗೂ ಒಟ್ಟು ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣ 120 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

(i) ಇಂತಹ ಎರಡು ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟು ಮಾಡುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(ii) ಇಂತಹ ಮೂರು ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ಸೇರಿಸಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ಸಮಲಂಬಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

(iii) ಇಂತಹ ಆರು ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿಟ್ಟು ಮಾಡುವ ಸಮಷಡ್ಭುಜಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

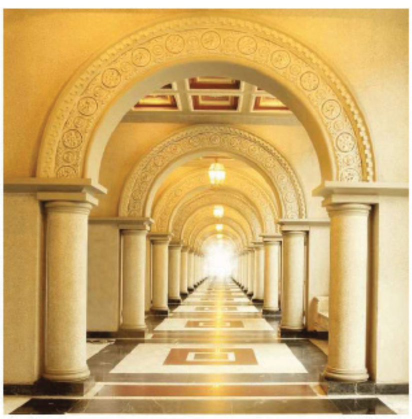
(5) ಭುಜಗಳೆಲ್ಲಾ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆರು ಚೌಕ ತಗಡುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಂದು ಚೌಕಸ್ತಂಭವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಾಯಿತು.

(i) ಈ ಸ್ತಂಭದ ಒಟ್ಟು ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

(ii) ಇದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ನೀರು ಹಿಡಿಯಬಹುದು?

ವೃತ್ತಸ್ತಂಭ

ಅಗ್ರಮುಖಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಬಹುಭುಜಗಳೂ ಬದಿಗಳು ಆಯತಗಳೂ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಮಾನ ಆಕೃತಿಗಳೇ ಬಹುಭುಜ ಸ್ತಂಭಗಳು. ಅಗ್ರಮುಖಗಳು ವೃತ್ತಗಳಾಗಿಯೂ ಬದಿಗಳು ಆಯತಗಳಾಗಿರದೇ ವಕ್ರವಾಗಿರುವ ಸ್ತಂಭಗಳಿವೆ; ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಹಾಗೂ ಟೊಳ್ಳಾದ ಇಂತಹ ಅನೇಕ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ನೋಡಿರುವಿರಲ್ಲವೇ.

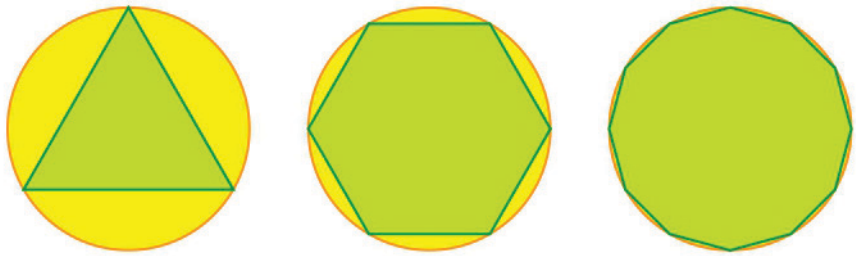


ಇಂತಹ ಘನಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭ (cylinder) ಎನ್ನುವರು.

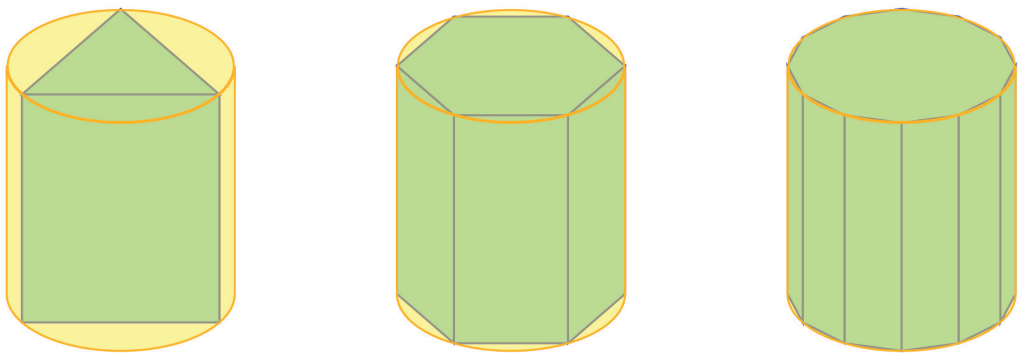
ವೃತ್ತಸ್ತಂಭಗಳ ಘನಫಲವು ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆಯೇ?

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದಂತೆ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಕೂಡಾ ರಚಿಸಬಹುದು. *Graphics* ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ *3D Graphics* ನಲ್ಲಿ *Extrude to Prism* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ, ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕು.

ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದುದು ಅದರೊಳಗೆ ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಸಮಬಹುಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುವುದರ ಮೂಲಕವಲ್ಲವೇ:



ಇದೇ ರೀತಿ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಅದರೊಳಗೆ ಅನೇಕ ಸಮಬಹುಭುಜ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಊಹಿಸುವ:



ಈ ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭಗಳ ಘನಫಲವು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದಲ್ಲವೇ ?

ಇನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹಾಗೂ ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ A ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಸಿ 3 ಯೂನಿಟ್ ತ್ರಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದು B ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. *Max-200* ಆಗುವಂತೆ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ n ನ್ನುನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. *Angle with Given Size* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ B ಯಲ್ಲಿಯೂ ನಂತರ A ಯಲ್ಲಿಯೂ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ $(360/n)^{\circ}$ ಎಂದು ಕೊಡಬೇಕು. ಒಂದು ಹೊಸ ಬಿಂದು B' ಲಭಿಸುವುದು. *Regular Polygon* ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ B ಯಲ್ಲಿಯೂ B' ನಲ್ಲಿಯೂ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ n ಎಂದು ನೀಡಿರಿ. n ಬದಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಮಬಹುಭುಜವು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಲಭಿಸುವುದು. ಇದು ಪಾದವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ಬಹುಭುಜ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. n ನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಬಹುಭುಜ ಸ್ತಂಭಕ್ಕೆ ಏನು ಬದಲಾವಣೆ ಉಂಟಾಗುವುದು?

- ಬಹುಭುಜ ಸ್ತಂಭಗಳ ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.
- ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ c ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ. ಆಗ $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು c ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು.
- ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿ h ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.
- $p_1h, p_2h, p_3h, \ldots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ch ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು.

* $p_1h, p_2h, p_3h, \ldots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭಗಳ ಘನಫಲವಾಗಿದೆ.

- ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭಗಳ ಘನಫಲಗಳು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು.
- ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವನ್ನು v ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.
- $p_1h, p_2h, p_3h, \ldots$ ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು v ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಹತ್ತಿರಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು.

ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಆಯತಗಳಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಎರಡು ವಿಚಾರಗಳಿಂದ

$$v = ch$$

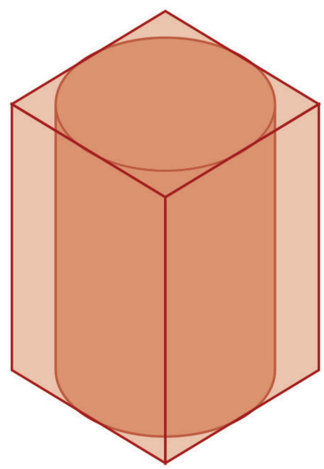
ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ,

ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗವನ್ನು π ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಒಂದು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಉನ್ನತಿ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲ $\pi \times 3^2 \times 5 = 45\pi$ ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ:

ಚೌಕಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಮರದ ತುಂಡಿನ ಪಾದದ ಭುಜಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿದೆ. ಸ್ತಂಭಕ್ಕೆ 20 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉನ್ನತಿಯಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಕೆತ್ತಿ ತಯಾರಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?



ಚೌಕಸ್ತಂಭದ ಪಾದದೊಳಗೆ ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತವೇ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಪಾದ; ಉನ್ನತಿಯು ಚೌಕಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಅಂದರೆ, ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸವು ಚೌಕಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಬೇಕು.

ಆಗ ಪಾದವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್; ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣ 25π ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ 20 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದುದರಿಂದ ಘನಫಲ $25\pi \times 20 = 500\pi$ ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

(1) ಪಾದವ್ಯಾಸ 1 ಮೀಟರ್, ಉನ್ನತಿ 2 ಮೀಟರಾಗಿರುವ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಟ್ಯಾಂಕಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಲೀಟರ್ ನೀರು ಹಿಡಿಯಬಹುದು?

(2) ಕಬ್ಬಿಣದಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ಒಂದು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಉನ್ನತಿ 32 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಪಾದತ್ರಿಜ್ಯ 20 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿರುವ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಾಯಿತು. ಈ ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು?

(3) ಸಮಾನ ಉನ್ನತಿಯಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭಗಳ ಪಾದತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 3 : 4 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಅವುಗಳ ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯೆಷ್ಟು?

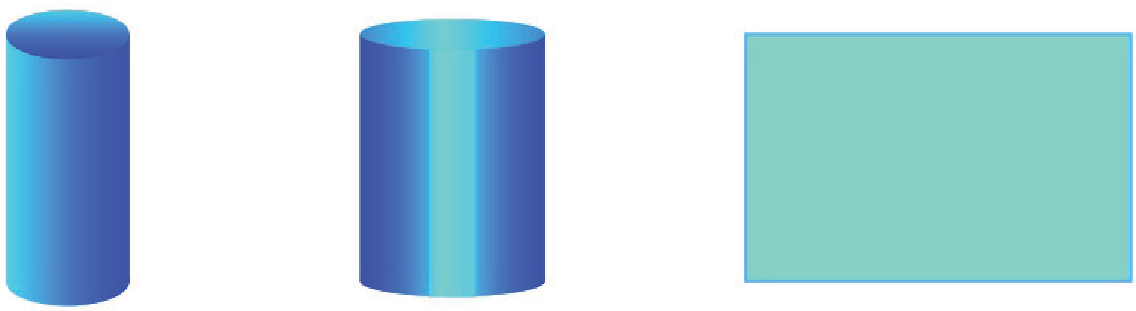
(4) ಎರಡು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭಗಳ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 2 : 3 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಉನ್ನತಿಗಳು 5 : 4 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಇವೆ.

(i) ಇವುಗಳ ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎಷ್ಟು?

(ii) ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲ 720 ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರಾದರೆ ದೊಡ್ಡ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವೆಷ್ಟು ?

ವಕ್ರಮೈ

ಆಯತಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕಾಗದವನ್ನೋ, ತಗಡನ್ನೋ ಬಾಗಿಸಿ, ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕೊಳವೆಗಳಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು; ಇದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಟೊಳ್ಳಾದ, ಎರಡೂ ತುದಿಗಳು ತೆರೆದಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಬಿಡಿಸಿ ಇರಿಸಿದರೆ ಒಂದು ಆಯತವಾದೀತು:



ಈ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (curved surface area) ಎನ್ನುವರು; ಚುಟುಕಾಗಿ ವಕ್ರವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎನ್ನಬಹುದು.

ಈ ಆಯತದ ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ, ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿಯೇ ಆಗಿದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜ, ಪಾದವೃತ್ತವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಇರಿಸಿದುದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಅದರ ಉದ್ದ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಉದ್ದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವೇ ವಕ್ರವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ವಕ್ರವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪಾದಸುತ್ತಳತೆಯ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ವ್ಯಾಸದ π ಮಡಿಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಒಂದು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಉನ್ನತಿ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದರೆ, ಅದರ ವಕ್ರವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\pi \times 6 \times 5 = 30\pi$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಇದು ಮುಚ್ಚಿದ ಸ್ತಂಭವಾಗಿದ್ದರೆ, ಹೊರಮೈಯ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಎರಡೂ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಅಂದರೆ $30\pi + (2 \times 3^2 \times \pi) = 48\pi$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

(1) ಒಂದು ಶಾಲಾ ಕಟ್ಟಡದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯ 12 ಕಂಬಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಪಾದವ್ಯಾಸ $\frac{1}{2}$ ಮೀಟರ್ ಹಾಗೂ ಎತ್ತರ 4 ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

(i) ಒಂದು ಕಂಬದ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

(ii) ಎಲ್ಲಾ ಕಂಬಗಳಿಗೂ ಬಣ್ಣ ಬಳಿಯಲು ಚದರಮೀಟರಿಗೆ 80 ರೂಪಾಯಿ ದರದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಖರ್ಚಾದೀತು?

(2) 1.20 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ರೋಲರಿನ ವ್ಯಾಸ 80 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಇದು ಒಂದು ಬಾರಿ ತಿರುಗುವಾಗ ಸಮತಟ್ಟಾಗುವ ನೆಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

(3) ಒಂದು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ವಕ್ರವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪಾದವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಹಾಗೂ ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿ ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?

(4) ಉದ್ದ 48 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಅಗಲ 25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತಾಕಾರದ ತಗಡನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ, 25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎತ್ತರವಿರುವ ಕೊಳವೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಲಾಯಿತು. ನಿಖರವಾದ ಅಳತೆಯಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಿದ ವೃತ್ತಗಳಿಂದ ಇದರ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳನ್ನು ಮುಚ್ಚಲಾಯಿತು. ಈ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

24 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವೂ 18 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಗಲವೂ ಇರುವ ದಪ್ಪ ಕಾಗದವನ್ನು ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಮಡಚಿ ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನಸ್ತಂಭ, ಚೌಕಸ್ತಂಭ, ಸಮಷಡ್ಭುಜಸ್ತಂಭ, ಸಮಅಷ್ಟಭುಜಸ್ತಂಭ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುವರು. ಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭಗಳೆಲ್ಲದರ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ವಕ್ರವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವಲ್ಲವೇ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಘನಫಲವೋ? ಯಾವ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆ ಲಭಿಸುವುದು?

ಇದೇ ಗಾತ್ರವಿರುವ ದಪ್ಪ ಕಾಗದವನ್ನು ಅಗಲಕ್ಕೆ ಮಡಚಿ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಸಮಬಹುಭುಜಸ್ತಂಭಗಳನ್ನೂ, ವೃತ್ತಸ್ತಂಭವನ್ನೂ ನಿರ್ಮಿಸಿದರೇ? ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸ್ತಂಭಗಳೊಳಗಿನ ಪಾರ್ಶ್ವವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ವಕ್ರವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಘನಫಲ ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಾಮ್ಯತೆ - ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13

ಬಹುಪದಚಿತ್ರಗಳು

ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳು

ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳಾಗಿ ಬರೆಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಆರನೇ ತರಗತಿಯಿಂದಲೇ ನೋಡಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ. ಇವುಗಳನ್ನು ಕೇವಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾಗಿ ಬಹುಪದಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. ಹೀಗೆ ನೋಡುವಾಗ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಿಯಮಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬದಲಾಗುವುದಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$p(x) = 2x + 1$$

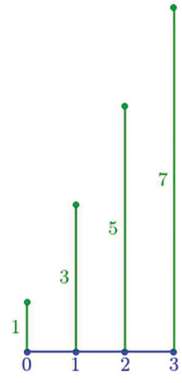
ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಇಲ್ಲಿರುವ ಕ್ರಿಯೆ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, 1 ಕೂಡಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ x ಆಗಿ 0, 1, 2, 3 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ $p(x)$ ಆಗಿ 1, 3, 5, 7 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುವುದು. (ವಿಷಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತದ್ದು ನೆನಪಿದೆಯೇ?)

x ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ $p(x)$ ಬದಲಾಗುವುದನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

x	0	1	2	3
$p(x)$	1	3	5	7

ಐದನೇ ತರಗತಿ ಮತ್ತು ಆರನೇ ತರಗತಿಯ ಸ್ಟಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್ ನಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಹಾಗೆ ಈ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಚಿತ್ರ ಮಾಡಿದರೇ?

ಮೊದಲು ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದರಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಅಂತರ ಇರುವ ಹಾಗೆ 0, 1, 2, 3 ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸುವ; ಇನ್ನು ಈ ಸ್ಥಾನಗಳಿಂದ, ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಇರುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದ ಅಂತರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, $p(0), p(1), p(2), p(3)$ ಎಂಬ ಎತ್ತರಗಳಿರುವ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವ.

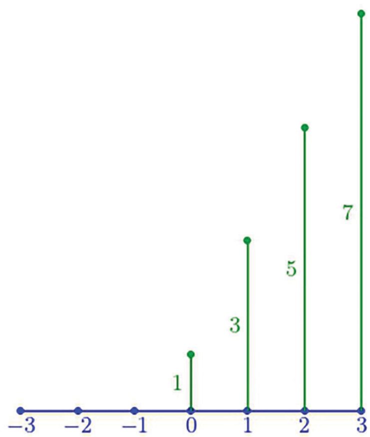


x ಆಗಿ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ತೆಗೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಎಡಕ್ಕೂ ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$p(x)$	−5	−3	−1	1	3	5	7

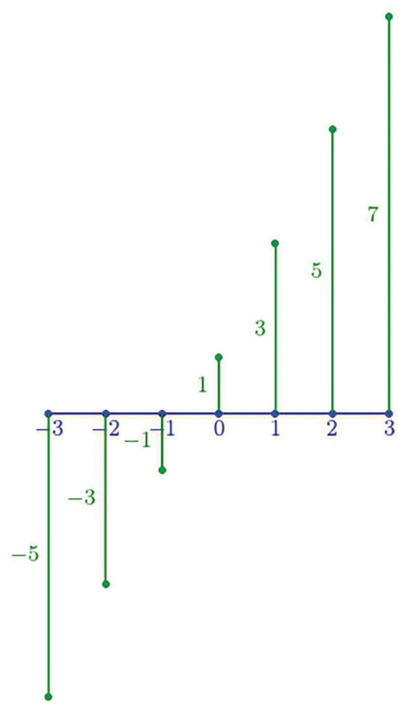
ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಎಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ?

ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಹಾಗೆ, ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಇರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಡಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಸಿ, x ಆಗಿ ತೆಗೆದ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು:



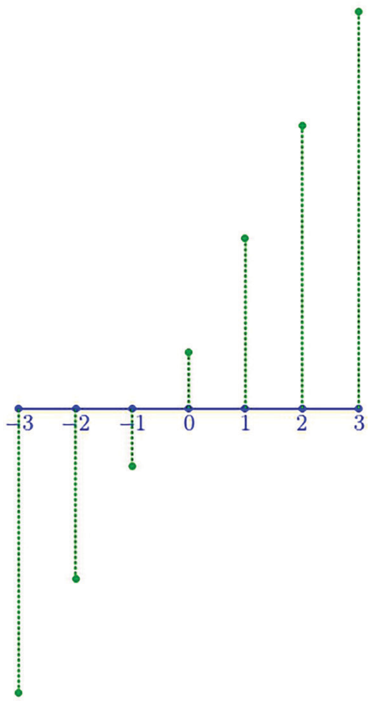
ಇನ್ನು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ $p(x)$ ನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

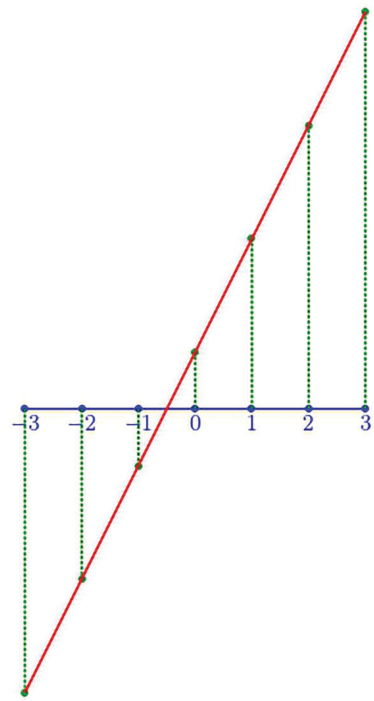
ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ $p(x)$ ನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಲಂಬಗಳನ್ನು ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಳೆದುದರಿಂದ, ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ $p(x)$ ನ್ನು ಕೆಳಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಬಹುದು.



ಇನ್ನು ಲಂಬಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ನೋಡಿ:

ಅವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿವೆಯೇ? ಸ್ಕೇಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎಳೆದು ನೋಡಿ:



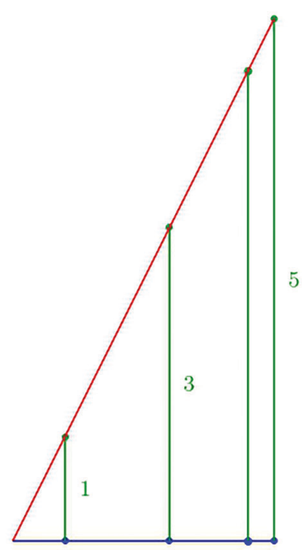


x ಆಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೂ, ಅಡ್ಡಕ್ಕಿರುವ ಗೆರೆಯ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ ಕೆಳಗೆ $p(x)$ ಆಗಿ ಎಳೆಯುವ ಲಂಬಗಳ ತುದಿಗಳು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲೇ ಇರಬಹುದೇ?

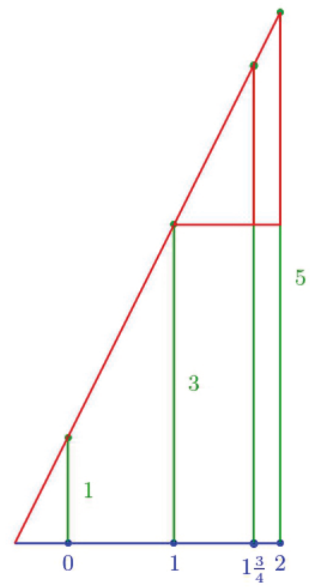
ಉದಾಹರಣೆಗೆ $x = 1\frac{3}{4}$ ಎಂದು ತೆಗೆದರೋ?

$$p\left(1\frac{3}{4}\right) = \left(2 \times 1\frac{3}{4}\right) + 1 = 4\frac{1}{2}$$

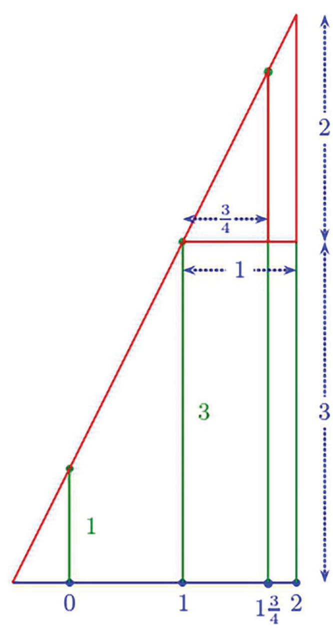
ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಇರುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ $1\frac{3}{4}$ ನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಲಂಬ ಎಳೆದು ಕೆಂಪು ಗೆರೆಗೆ ತಾಗಿಸುವ. ಈ ಲಂಬದ ಎತ್ತರ $4\frac{1}{2}$ ಆಗಿರುವುದೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಬೇಕು. ಅದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಭಾಗವನ್ನು ಮಾತ್ರ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ, ಎಳೆದಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಕೆಳಗೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಹಾಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಚಿತ್ರದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಕೆಂಪು ಬಣ್ಣದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ) ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ.

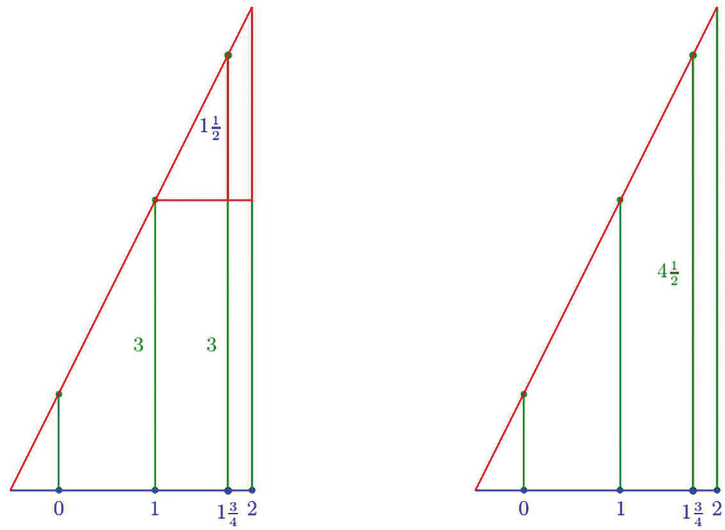


ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ (ಯಾಕೆ?) ಆದುದರಿಂದ, ಇವುಗಳ ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು. (ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠ). ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೆಲವು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:



ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ $\frac{3}{4}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಸಣ್ಣ

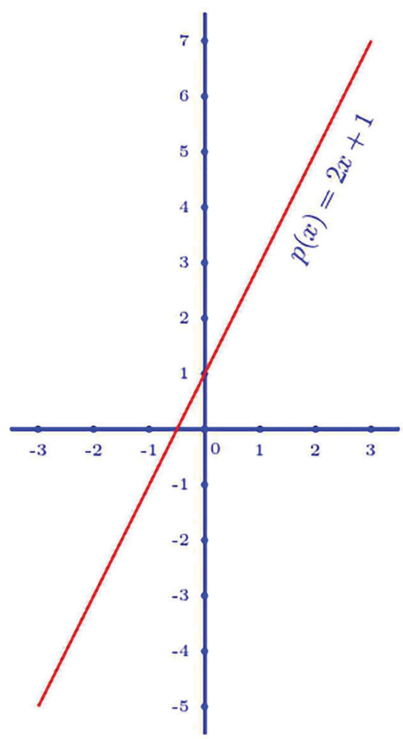
ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಭುಜವು, ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಇರುವ ಭುಜದ $\frac{3}{4}$ ಭಾಗ ಆಗಬೇಕಲ್ಲವೇ, ಅಂದರೆ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಇರುವ ಭುಜದ ಉದ್ದ $2 \times \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$



ಹಾಗಾದರೆ, $1\frac{3}{4}$ ಎಂಬ ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಕೆಂಪು ಗೆರೆಗೆ ಇರುವ ಲಂಬದ ಉದ್ದ $3 + 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$.
ತಿರುಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯ $x = 1\frac{3}{4}$ ಎಂಬ ಸ್ಥಾನದಿಂದ $p\left(1\frac{3}{4}\right) = 4\frac{1}{2}$ ಎಂಬ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ (ಅಥವಾ ಕೆಳಗೆ) ಎಳೆಯುವ ಲಂಬದ ತುದಿಯು ಕೆಂಪು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿಯೇ ಇರುವುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, x ಆಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ (ಭಿನ್ನಕ ಅಥವಾ ಅಭಿನ್ನಕ) ತೆಗೆದರೂ, ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಇರುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಆ ಸ್ಥಾನದಿಂದ $p(x)$ ಎಂಬ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ (ಅಥವಾ ಕೆಳಗೆ) ಎಳೆಯುವ ಲಂಬದ ತುದಿಯು ಈ ಕೆಂಪು ಗೆರೆಯಲ್ಲೇ ಇರುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಈ ಗೆರೆಯನ್ನು $p(x) = 2x + 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರರೂಪ (graph) ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಸಾಧಾರಣ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಚಿತ್ರರೂಪವನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯದೆ ಅವುಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಗುರುತಿಸಿ ಆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಎಳೆಯುವುದಾಗಿದೆ. ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು, ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ 0 ಎಂಬ ಸ್ಥಾನದ ಮೂಲಕ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದು, ಅದರಲ್ಲೂ ಅದೇ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲೂ ಬಹುದು.



ಒಂದು ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರರೂಪವನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲು Input Bar ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. $p(x) = 2x + 1$ ಎಂಬುದರ ಚಿತ್ರರೂಪವನ್ನು ಎಳೆಯಲು Input Bar ನಲ್ಲಿ $p(x) = 2x + 1$ ಎಂದು ಟೈಪ್ ಮಾಡಿ Enter ಒತ್ತಿದರೆ ಸಾಕು. ($2x + 1$ ಎಂದು ಮಾತ್ರ ಟೈಪ್ ಮಾಡಿದರೂ ಚಿತ್ರ ಲಭಿಸುವುದು. ಆದರೆ ಬಹುಪದದ ಹೆಸರು $p(x)$ ಎಂದು ಸಿಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ).

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರರೂಪವು ನೇರವಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಸಾಕಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ, ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಒಂದು ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರರೂಪವನ್ನು ಎಳೆಯಲು, x ಆಗಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು, ಬಹುಪದದಿಂದ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕು.

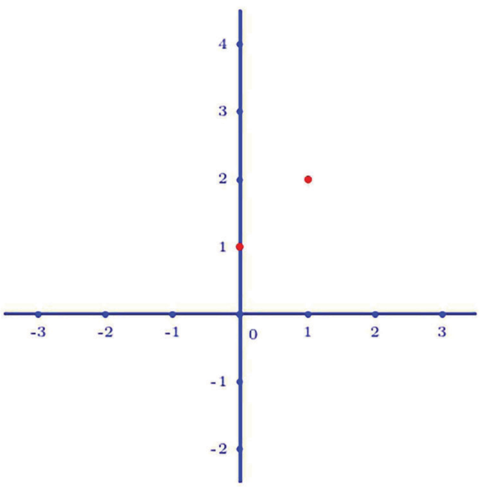
ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

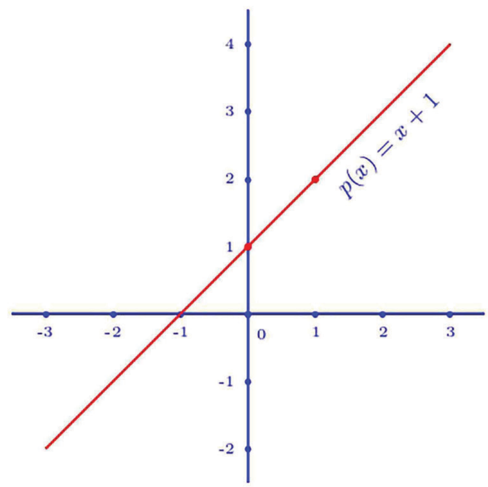
$p(x) = x + 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

x ಆಗಿ 0, 1 ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವ.

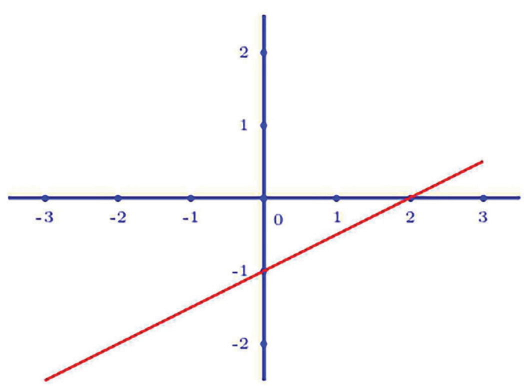
x	0	1
$p(x)$	1	2

ಇನ್ನು ಚಿತ್ರರೂಪವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ?





ಬದಲಾಗಿ, ಚಿತ್ರರೂಪದಿಂದ ಬಹುಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೂ ಸುಲಭವಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



ಇದರ ಬಹುಪದವನ್ನು $p(x)$ ಎಂದು ತೆಗೆಯುವ. ಹಾಗಾದರೆ $p(0) = -1$ ಮತ್ತು $p(2) = 0$ ಎಂದು ಚಿತ್ರದಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಇನ್ನು $p(x)$ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವಾದ ಕಾರಣ,

$$p(x) = ax + b$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುವುದು **(ಬಹುಪದಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ) ಇದರಲ್ಲಿರುವ a, b ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಅದಕ್ಕಾಗಿ $p(0) = -1$ ಎಂದೂ $p(2) = 0$ ಎಂದೂ ಚಿತ್ರದಿಂದ ಸಿಕ್ಕಿರುವುದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

> ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ Increment : 0.1 ಆಗುವ ಹಾಗೆ a, b ಎಂಬ ಎರಡು ಸ್ಲೈಡರ್‌ಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. $p(x) = ax + b$ ಎಂದು Input bar ನಲ್ಲಿ ಟೈಪ್ ಮಾಡಿ ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರರೂಪವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. b ಎಂಬ ಸ್ಲೈಡರ್ ಮಾತ್ರ ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಗೆರೆಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು? a ಮಾತ್ರ ಬದಲಿಸಿದರೇ? $p(0) = -1$ ಮತ್ತು $p(2) = 5$ ಆದರೆ $p(x)$ ಏನಾಗಿರಬಹುದೆಂದು ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ? ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿರಿ. $p(1) = 2, p(2) = 6$ ಆದರೇ?

$p(x) = ax + b$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$p(0) = (a \times 0) + b = b$$

$p(0) = -1$ ಆಗಿರುವ ಕಾರಣ, ಇದರಿಂದ

$$b = -1$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$$p(2) = (a \times 2) + b = 2a + b = 2a - 1$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಚಿತ್ರದಿಂದ $p(2) = 0$ ಎಂದೂ ಸಿಕ್ಕಿರುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ,

$$2a - 1 = 0$$

ಎಂದೂ ಇದರಿಂದ

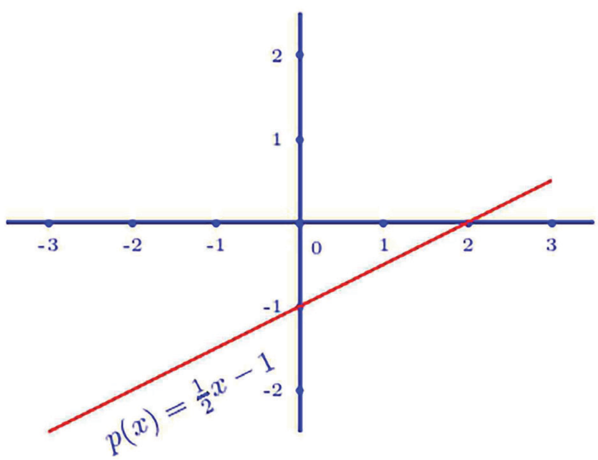
$$a = \frac{1}{2}$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಮೇಲೆ ನೋಡಿದ ಗೆರೆಯ ಬಹುಪದರೂಪ

$$p(x) = \frac{1}{2}x - 1$$

ಅಥವಾ ಈ ಗೆರೆಯು $p(x) = \frac{1}{2}x - 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರರೂಪವಾಗಿರುವುದು.

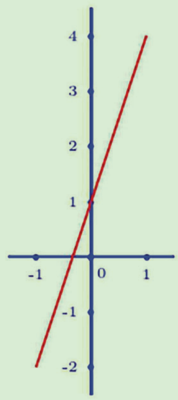


(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರರೂಪವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

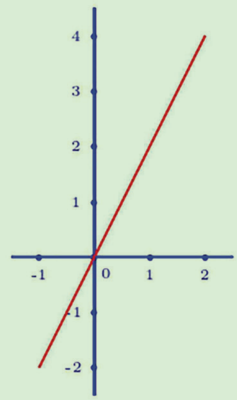
(i) $p(x) = 2x - 1$ (ii) $p(x) = x - 1$ (iii) $p(x) = 1 - x$

(iv) $p(x) = x$ (v) $p(x) = -x$

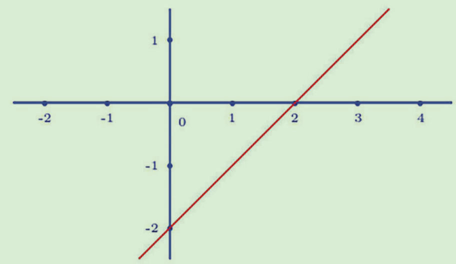
(2) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗೆರೆಯ ಬಹುಪದರೂಪವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:



(i)



(ii)



(iii)

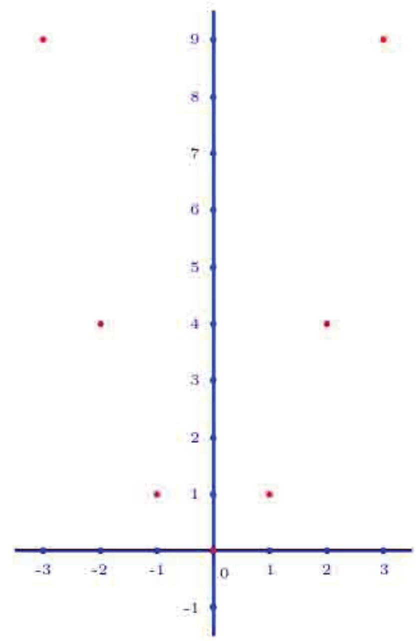
ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳು

ಇನ್ನು ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಚಿತ್ರರೂಪವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭವಾಗಿರುವ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದ ಯಾವುದು ?

$$p(x) = x^2$$

ಇದರ ಚಿತ್ರರೂಪವನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಮೊದಲು ಒಂದು ಸಣ್ಣ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮಾಡುವ:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	9	4	1	0	1	4	9



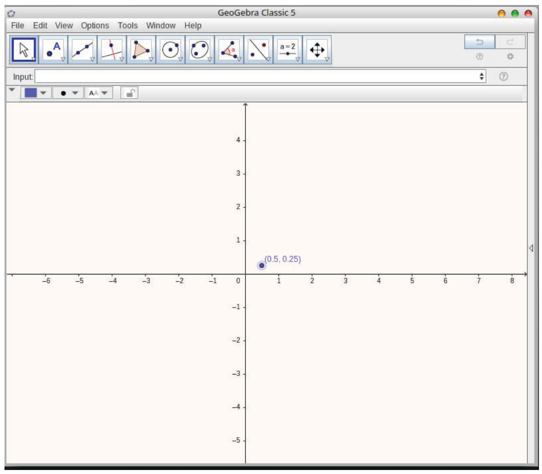
ಇನ್ನು ಈ ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದ ಹಾಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು, ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ; ನಂತರ ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಇರುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ x ಆಗಿ ತೆಗೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ $p(x)$ ಎಂಬ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಎಳೆಯುವ ಲಂಬಗಳ ಮೇಲಿನ ತುದಿಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ:

ಇಷ್ಟು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ನಿಖರವಾದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇವುಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ?

$x = 0.5$ ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ $p(0.5) = 0.25$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಈ ಎತ್ತರವನ್ನು ಸ್ಕೇಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ ?

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ.

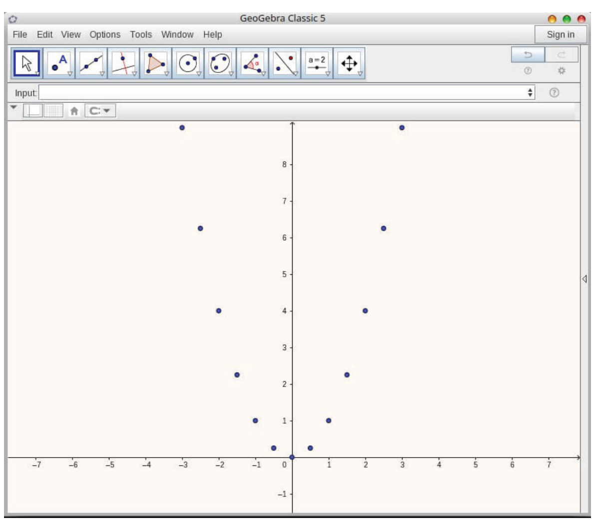
ಜಿಯೋಜಿಬ್ರವನ್ನು ತೆರೆದಾಗ ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ನೀಟಕ್ಕೆ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಇನ್ನು Input Bar ನಲ್ಲಿ (0.5, 0.25) ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ, ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರ 0.5 ಮತ್ತು ನೀಟಕ್ಕೆ ಇರುವ ಎತ್ತರ 0.25 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು:



ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಗುರುತಿಸುವುದರ ಬದಲು, ಹಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಗುರುತಿಸಲೂ ದಾರಿಯಿದೆ. Input Bar ನಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಟೈಪ್ ಮಾಡಿರಿ:

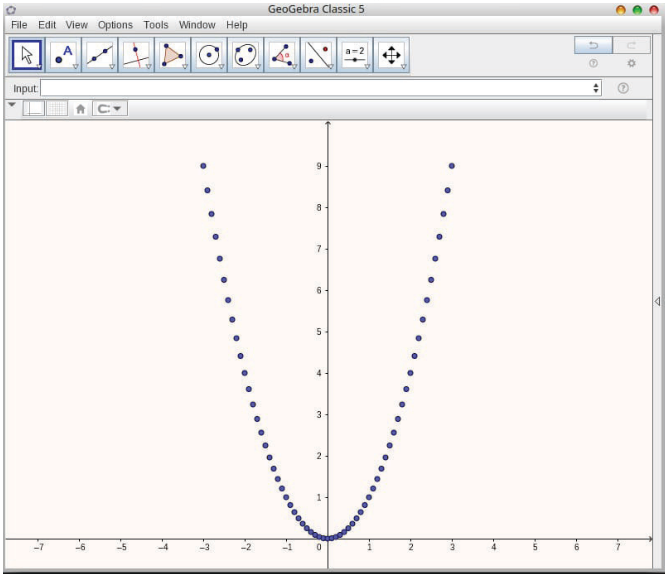
```
Sequence [(t, t^2), t, -3, 3, 0.5]
```

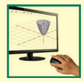
(–3 ರಿಂದ 3 ರ ವರೆಗೆ ಅಂತರ 0.5 ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು t ಎಂದು ತೆಗೆದು, t ಅಂತರದಲ್ಲಿ, t^2 ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದು ಇದರ ಅರ್ಥ). ಆಗ ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಚಿತ್ರ ಸಿಗುವುದು.



ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಬಿಂದುಗಳು ಸಿಗಲು t ಆಗಿ ತೆಗೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರ 0.5 ರ ಬದಲು 0.1 ಎಂದು ತೆಗೆಯಬಹುದು:

```
Sequence[(t,t^2),t,-3,3,0.1]
```

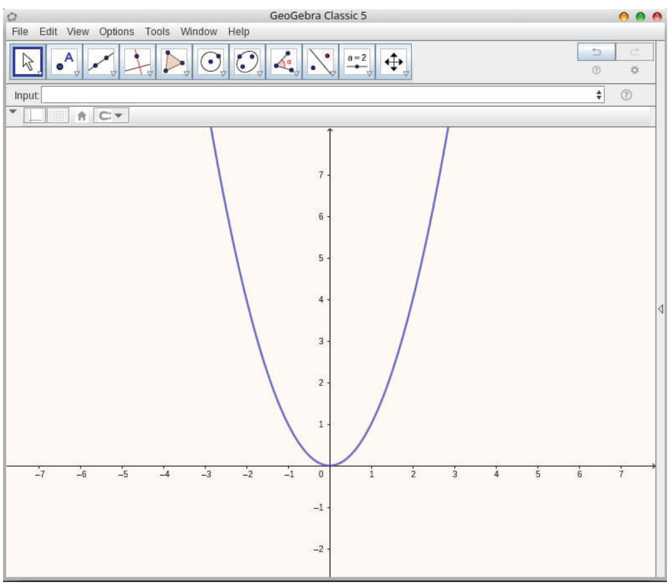




ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ Min = 0, Max = 1, Increment : 0.01 ಆಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ *a* ಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. Input bar ನಲ್ಲಿ Sequence[(*t*, *t*^2), t, −3, 3, *a*] ಎಂದು ಟೈಪ್ ಮಾಡಿರಿ. $p(x) = x^2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರದ ಬಿಂದುಗಳು ಸಿಗುವುದು. ಸ್ಲೈಡರ್‌ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. *a* ಯ ಬೆಲೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಹೆಚ್ಚು ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಬಿಂದುಗಳು ಸಿಗುವುದು.

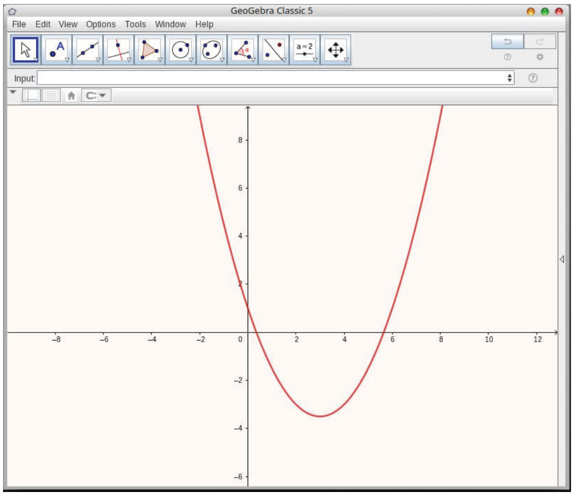
ಈಗ ಚಿತ್ರದ ಅಂದಾಜು ರೂಪ ಸಿಕ್ಕಿತಲ್ಲವೇ ?

ಇನ್ನು ಅಂತರವಿಲ್ಲದೆ ಈ ವಕ್ರವಾಗಿರುವ ಗೆರೆ (curve) ಯನ್ನು ಎಳೆಯಲು, Input Bar ನಲ್ಲಿ **x^2** ಎಂದು ಟೈಪ್ ಮಾಡಿದರೆ ಸಾಕು.

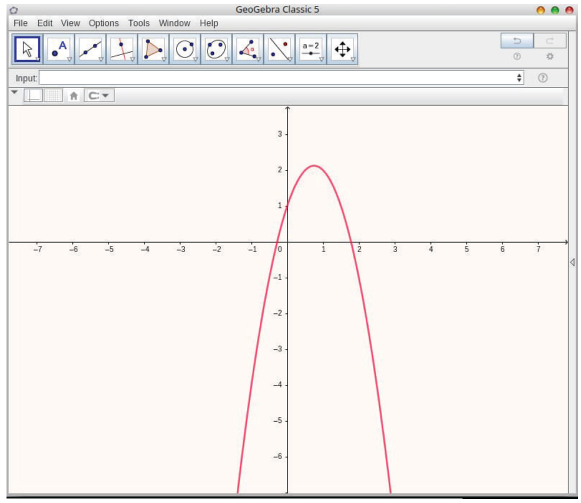


ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ Increment : 0.1 ಆಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ *a* ಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. Input Bar ನಲ್ಲಿ (*a*, *a* ^ 2) ಎಂದು ಟೈಪ್ ಮಾಡಿದರೆ ಒಂದು ಬಿಂದು ಲಭಿಸುವುದು. ಸ್ಲೈಡರ್ ನ ಬೆಲೆ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಈ ಬಿಂದು ಚಲಿಸುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದು ಸಂಚರಿಸುವ ಪಥ ಯಾವುದು ? ಅದು ಸಿಗಲು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ Right click ಮಾಡಿ Trace on ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕು. Increment : 0.1 ಎಂಬುದರ ಬದಲು 0.01 ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ ಬಿಂದುಗಳು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರ ಸಿಗುವುದು. (ಸ್ಲೈಡರಿನಲ್ಲಿ Right click ಮಾಡಿ Object properties → Slider → Increment ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ Increment ನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು) Locus ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸ್ಲೈಡರ್ ಮತ್ತು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೂ ಬಿಂದುವಿನ ಸಂಚಾರ ಪಥ ಸಿಗುವುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ Input Bar ನಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಟೈಪ್ ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ: ಉದಾಹರಣೆಗೆ, **(1/2)x^2 − 3x + 1** ಎಂದೂ **−2x^2 + 3x + 1** ಎಂದೂ ನೀಡಿದರೆ ಸಿಗುವ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.



$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$



$-2x^2 + 3x + 1$

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಚಿತ್ರರೂಪಗಳನ್ನು ನೋಡಿದರೆ, ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾಗುವುದು, ತೆರೆಯುವಿಕೆ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆ ಆಗುವುದು, ತಲೆಕೆಳಗಾಗಿ ಆಗುವುದು ಎಂಬೀ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲದೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವಕ್ರವಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯ ಆಕಾರ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ.

ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ನೋಡಿದರೆ, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ವಕ್ರವು

- ಒಂದೋ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಇಳಿದು, ಅತ್ಯಂತ ಕೆಳಗಿನ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತಲುಪಿ, ನಂತರ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಹೋಗುವುದು.

- ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ, ಅತ್ಯಂತ ಮೇಲಿನ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತಲುಪಿ, ನಂತರ ಕೆಳಕ್ಕೆ ಇಳಿಯುವುದು.

ಇದರ ಬೀಜಗಣಿತ ವಿವರಣೆ ಏನು ?

$p(x)$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿ, ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಕ್ರಮೇಣ ದೊಡ್ಡದಾಗಿ, ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವ x ನ್ನು ತೆಗೆದರೆ,

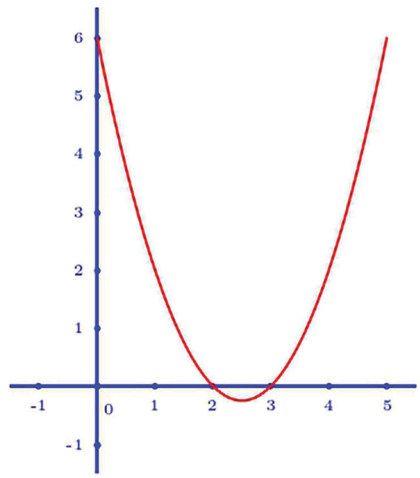
- ಒಂದೋ $p(x)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕ್ರಮೇಣ ಸಣ್ಣದಾಗಿ, ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ತಲುಪಿದ ನಂತರ ದೊಡ್ಡದಾಗುವುದು.

- ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ $p(x)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕ್ರಮೇಣ ದೊಡ್ಡದಾಗಿ, ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ತಲುಪಿದ ನಂತರ ಸಣ್ಣದಾಗುವುದು.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ a ಎಂಬ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. $p(x) = x^2+a$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರರೂಪವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. a ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಚಿತ್ರಕ್ಕೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು ? $q(x) = ax^2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರರೂಪವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. a ಬದಲಾದುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಚಿತ್ರಕ್ಕೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು ?

ಇನ್ನು ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಒಂದು ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರದಿಂದ, ಆ ಬಹುಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ನೋಡುವ:

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಒಂದು ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ:



ಇದರ ಬಹುಪದ ರೂಪವನ್ನು $p(x)$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಚಿತ್ರದಿಂದ

$$p(0) = 6$$

$$p(2) = 0$$

$$p(3) = 0$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

$p(x)$ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವಾದ ಕಾರಣ,

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು (**ಬಹುಪದಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ) .

ಹಾಗಾದರೆ,

$$p(0) = (a \times 0^2) + (b \times 0) + c = c$$

ಇನ್ನು $p(0) = 6$ ಎಂಬುದರಿಂದ

$$c = 6$$

ಎಂದೂ, ಅದರಿಂದ

$$p(x) = ax^2 + bx + 6$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

ಇನ್ನು $p(2) = 0$ ಎಂಬುದರಿಂದ

$$4a + 2b + 6 = 0$$

ಎಂದೂ $p(3) = 0$ ಎಂಬುದರಿಂದ

$$9a + 3b + 6 = 0$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಮೊದಲ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು

$$2a + b = -3 \qquad (1)$$

ಎಂದೂ ಎರಡನೇ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು

$$3a + b = -2 \qquad (2)$$

ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಸಮವಾಕ್ಯ (2) ರಿಂದ ಸಮವಾಕ್ಯ (1) ನ್ನು ಕಳೆದರೆ,

$$a = -2 -(-3) = -2 + 3 = 1$$

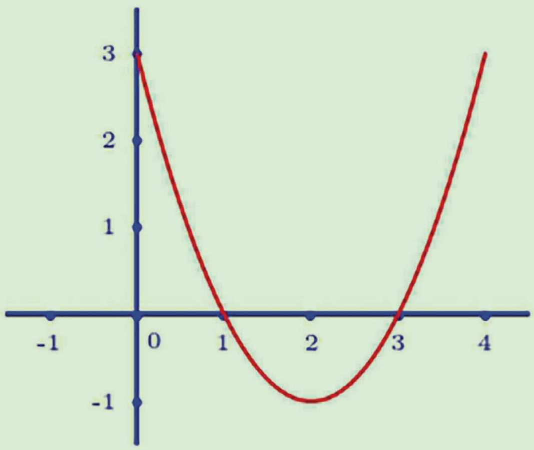
ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇನ್ನು ಸಮವಾಕ್ಯ (1) ರಿಂದ,

$$b = -3 - 2 = -5$$

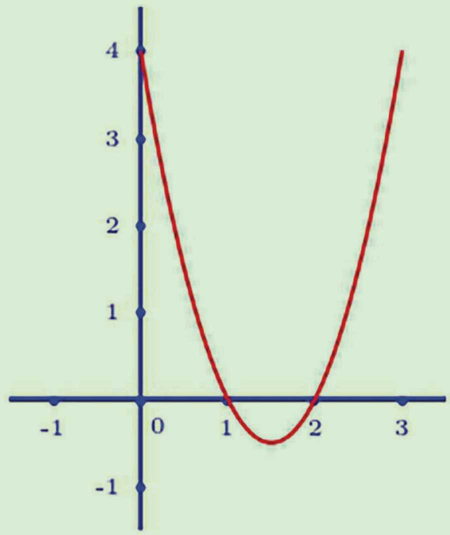
ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಹಾಗಾದರೆ ಚಿತ್ರದ ಬಹುಪದರೂಪ,

$$p(x) = x^2 - 5x + 6$$

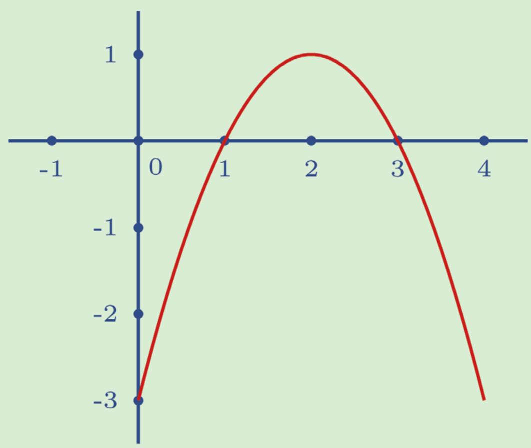
ಕೆಲವು ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



(i)



(ii)

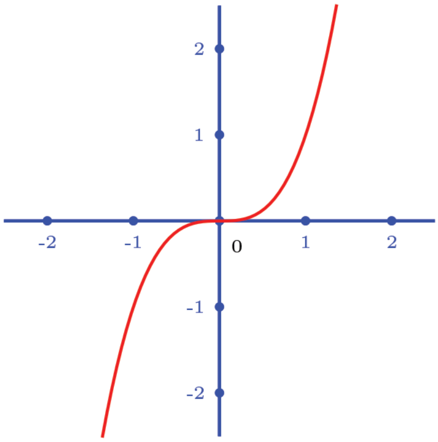


(iii)

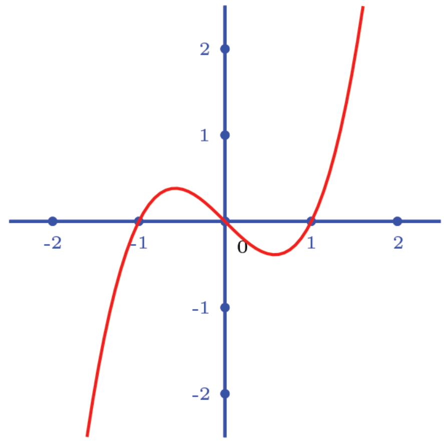
ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬಹುಪದರೂಪವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೂರನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಚಿತ್ರಗಳಿಗೆ ಈ ರೀತಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಒಂದು ರೂಪವಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ಬಹುಪದಗಳ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎಳೆದು ನೋಡಿರಿ.

- $p(x) = x^3$
- $p(x) = x^3 - x$



$p(x) = x^3$



$p(x) = x^3 - x$

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ:

(i) $p(x) = x$ (ii) $p(x) = 2x$ (iii) $p(x) = \frac{1}{2}x$ (iv) $p(x) = -x$ (v) $p(x) = -2x$

ಈ ಗೆರೆಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಯಾವುದಾದರೂ ವಿಶೇಷತೆಯಿದೆಯೇ ?

ಮೊದಲ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಹಾಗೆಯೇ, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ:

(i) $p(x) = x + 1$ (ii) $p(x) = x + 2$ (iii) $p(x) = x + \frac{1}{2}$

(iv) $p(x) = x - 1$ (v) $p(x) = x - 2$

ಈ ಗೆರೆಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಯಾವುದಾದರೂ ವಿಶೇಷತೆಯಿದೆಯೇ ?

14 ಅನುಪಾತ

ಅನುಪಾತಿಕ ಬದಲಾವಣೆ

ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಒಂದೇ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಹಲವು ಗಾತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಹೀಗೆ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಸಣ್ಣದು ಅಥವಾ ದೊಡ್ಡದು ಮಾಡುವಾಗ, ಆಯತದ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಬದಲಾಗಬಾರದು ಎಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ (ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎಂಬ ಪಾಠ).

ಇಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ $4 : 3$ ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಅಗಲವು ಉದ್ದದ $\frac{3}{4}$ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು; ಅಥವಾ ಉದ್ದವು ಅಗಲದ $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ ಮಡಿ ಆಗಿರುವುದು.

ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲವು $16 : 9$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಹಲವು ಗಾತ್ರದ ಚಿತ್ರಗಳು, ಅಂದರೆ ಎಲ್ಲದರಲ್ಲೂ ಅಗಲವು ಉದ್ದದ $\frac{9}{16}$ ಭಾಗ; ಅಥವಾ ಉದ್ದವು ಅಗಲದ $\frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$ ಮಡಿ.

ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರಗಳ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿಯೂ, ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲ ಬದಲಾಗುವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅಳತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಅಳತೆಯ ನಿಶ್ಚಿತ ಮಡಿಯೋ ಭಾಗವೋ ಆಗಿರುವುದು.

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೋ ?

ಮೊದಲು ನೋಡಿದ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದವನ್ನು w ಎಂದೂ, ಅಗಲವನ್ನು h ಎಂದೂ ತೆಗೆದರೆ,

$$h = \frac{3}{4}w$$

ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಇದೇ ರೀತಿ ತೆಗೆದರೋ ?

$$h = \frac{9}{16}w$$

ಬದಲಾಗುವ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಈ ರೀತಿ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವಿಭಿನ್ನ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಅವುಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು, ತ್ರಿಜ್ಯದ 2π ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ. ತ್ರಿಜ್ಯ r ಎಂದೂ ಸುತ್ತಳತೆ c ಎಂದೂ ತೆಗೆದರೆ,

$$c = 2\pi r$$

ಈ ಎಲ್ಲಾ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಉದ್ದಗಳ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿದೆವು. ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಯ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲೂ ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ 10 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ಸಮಾನ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಸ್ತು ಸಂಚರಿಸುವುದಾದರೆ, ಸಂಚರಿಸುವ ದೂರವು ಸಂಚರಿಸಲು ತೆಗೆದ ಸಮಯದ 10 ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ. ಸಂಚರಿಸಿದ ದೂರ (ಮೀಟರಿನಲ್ಲಿ) s ಎಂದೂ, ಸಂಚರಿಸಲು ತೆಗೆದ ಸಮಯ (ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ) t ಎಂದೂ ತೆಗೆದರೆ,

$$s = 10t$$

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳು ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಹೆಸರಿದೆ.

ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳು ಬದಲಾಗುವಾಗ ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದು ಅಳತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಡಿಯೋ ಭಾಗವೋ ಇನ್ನೊಂದು ಅಳತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುವುದಾದರೆ, ಈ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ (proportional) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

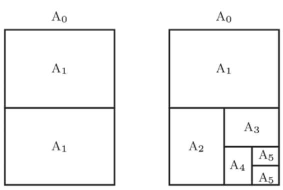
(ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು ಅನುಪಾತ (proportion) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು).

ಅನುಪಾತಿಕ ಬದಲಾವಣೆಗಳಲ್ಲಿ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಡಿಯೋ ಭಾಗವೋ ಆಗಿ ಬದಲಾಗದೇ ಉಳಿಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು **ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ (proportionality constant)** ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಕಾಗದದ ಅನುಪಾತ

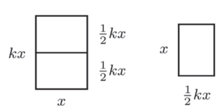
ಫೋಟೋಸ್ಟ್ಯಾಟ್ ಮತ್ತು ಇತರ ಕೆಲವು ಅಗತ್ಯಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ A_4 ಕಾಗದವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಅಲ್ಲವೇ. A_0, A_1, A_2 ಎಂಬೀ ಹೆಸರುಗಳಲ್ಲಿ ಗಾತ್ರ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತ ಬರುವ ಕಾಗದಗಳಿವೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಗಾತ್ರವು ಸಮೀಪದ ಹಿಂದಿನ ಕಾಗದದ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದು.



ಅಲ್ಲದೆ, ಈ ಎಲ್ಲಾ ಕಾಗದಗಳ ಅಗಲ ಮತ್ತು ಉದ್ದಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.

ಈ ರೀತಿಯ ಕಾಗದಗಳ ಅಗಲ x ಎಂದೂ ಉದ್ದ kx ಎಂದೂ ತೆಗೆಯಬಹುದು. ಸಮೀಪದ ನಂತರದ ಕಾಗದದ ಅಗಲ ಮತ್ತು ಉದ್ದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{1}{2}kx$ ಮತ್ತು x ಆಗುವುದು.



ಅಗಲ ಮತ್ತು ಉದ್ದಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಸಮಾನವಾದುದರಿಂದ,

$$\frac{1}{2}k = \frac{1}{k}$$

ಇದರಿಂದ $k^2 = 2$ ಎಂದೂ ಅದರಿಂದ

$$k = \sqrt{2}$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ A ಶ್ರೇಣಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ಉದ್ದವು ಅಗಲಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದು; ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ $\sqrt{2}$.

ಈ ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ನೋಡುವ.

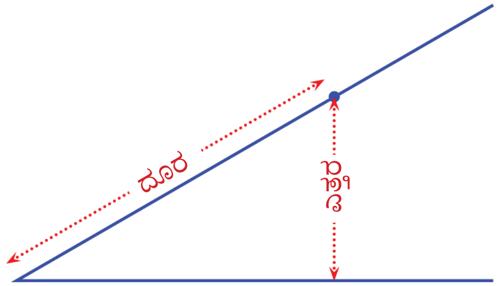
- GIMP ನ ಹಾಗೆ ಇರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮೊದಲು ನೋಡಿದ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಬದಲಿಸಲು, ಅಗಲ(width) ವನ್ನು ನಾವು ನೀಡಿದರೆ ಎತ್ತರ (height) ವನ್ನು ಅಗಲದ $\frac{3}{4}$ ಭಾಗವಾಗಿ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ ಸ್ವತಃ ಕಂಡುಹುಡುಕುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಎತ್ತರವು ಅಗಲಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದು; ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ $\frac{3}{4}$.
  ಬದಲಾಗಿ, ಎತ್ತರವನ್ನು ನಾವು ನೀಡಿದರೆ, ಅಗಲವು ಅದರ $\frac{4}{3}$ ಮಡಿ ಆಗುವುದು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಅಗಲವು ಬದಲಾಗುವುದು; ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ $\frac{4}{3}$.
- ಎರಡನೆಯದಾಗಿ ನೋಡಿದ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ಹಾಗೆ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 9 : 16 ಆದರೆ, ನೀಡುವ ಅಗಲಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ $\frac{9}{16}$.
  ಬದಲಾಗಿ, ನೀಡುವ ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಅಗಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಾದರೆ, ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ $\frac{16}{9}$.
- ಬೇರೆ ಬೇರೆ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅವುಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದು; ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ 2π.
  ಬದಲಾಗಿ, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಸರಿಗೆಗಳನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ, ಸರಿಗೆಯ ಉದ್ದವು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗಿರುವುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಬದಲಾಗುವುದು; ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ $\frac{1}{2\pi}$.
- 10 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ಒಂದೇ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ ಸಂಚರಿಸುವ ವಸ್ತುವು ಸಂಚರಿಸಿದ ದೂರ (ಮೀಟರಿನಲ್ಲಿ)ವನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ (ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ) ನೋಡಿದರೆ, ಅದು ಸಮಯಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದು; ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ 10.
  ಬದಲಾಗಿ, ಈ ವಸ್ತು ವಿಭಿನ್ನ ದೂರ (ಮೀಟರಿನಲ್ಲಿ) ಗಳನ್ನು ಸಂಚರಿಸಲು ತೆಗೆಯುವ ಸಮಯವನ್ನು ನೋಡಿದರೆ, ಅದು ದೂರಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದು; ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ $\frac{1}{10}$.

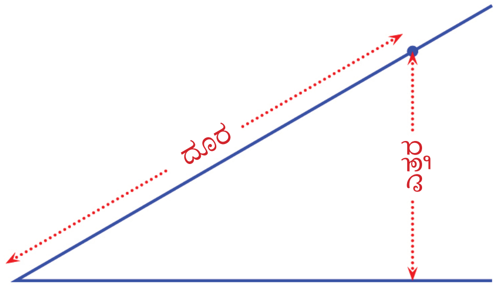
ಅನುಪಾತಿಕ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

> x, y ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ,
>
> $y = kx$ (k ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ)
>
> ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುವುದಾದರೆ, y ಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅಳತೆಯು x ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅಳತೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ k ಆಗಿರುವುದು.

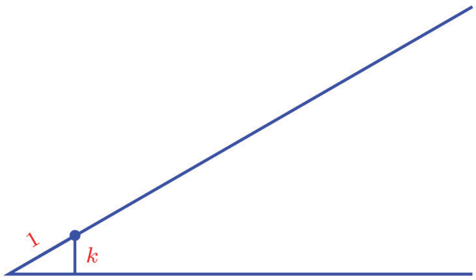
ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ:

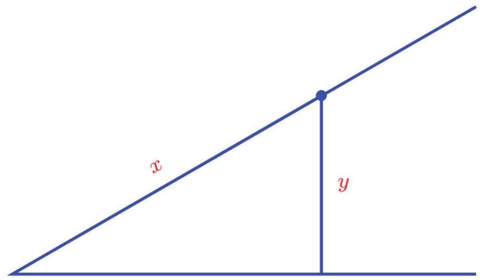
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಓರೆಯಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಕೋನದ ಶಿರದಿಂದಿರುವ ದೂರ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯಿಂದಿರುವ ಎತ್ತರವೂ ಬದಲಾಗುವುದು:





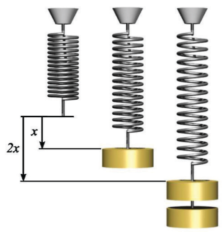
ಈ ಬದಲಾವಣೆಯು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು, ಶಿರದಿಂದ 1 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಕೆಳಗಿನಿಂದ ಇರುವ ಎತ್ತರ k ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆಯುವ:





ಭಾರ ಮತ್ತು ಉದ್ದ

ಒಂದು ಸ್ಪ್ರಿಂಗಿನಲ್ಲಿ ಭಾರವನ್ನು ನೇತಾಡಿಸುವಾಗ ಅದರ ಉದ್ದದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆ ಭಾರಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ :



ಹದಿನೇಳನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಜೀವಿಸಿದ್ದ ರೋಬರ್ಟ್ ಹುಕ್ ಎಂಬ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನು ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದನು.

ಸ್ಪ್ರಿಂಗ್ ತ್ರಾಸ್ ನಲ್ಲಿ ಭಾರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

1 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಭಾರ ತೂಗುವಾಗ, ಸ್ಪ್ರಿಂಗಿಗೆ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದಾದರೆ 100 ಗ್ರಾಂಗೆ $\frac{1}{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ 100 ಗ್ರಾಂನ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಅಳೆಯಲು $\frac{1}{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಂತರವಿಟ್ಟು ಗುರುತಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಇನ್ನೂ ಅಂತರ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿ ಗುರುತಿಸಿದರೆ, 100 ಗ್ರಾಂ ಗಿಂತ ಸಣ್ಣ ಭಾರಗಳನ್ನೂ, ಅವುಗಳ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನೂ ಅಳೆಯಬಹುದು.

ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಹಾಗೆ, x ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಎತ್ತರ y ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದೂ ತೆಗೆಯುವ.

ಎರಡೂ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿರುವ ಕಾರಣ, ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು. (**ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ) ಅಂದರೆ,

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{k}$$

ಇದರಿಂದ,

$$y = kx$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಎತ್ತರವು ದೂರಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದು.

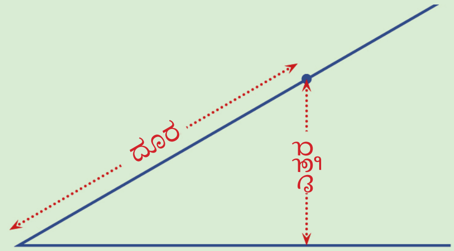
(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಮೊದಲ ಅಳತೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಎರಡನೇ ಅಳತೆಯು ಬದಲಾಗುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(i) ಭುಜಗಳ ಅಳತೆ ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿರುವ ಚೌಕಗಳ ಭುಜದ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆ.

(ii) ವಿಭಿನ್ನ ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಸರಿಗೆಗಳನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ ಮಾಡುವ ಚೌಕಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಗೆಯ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಭುಜದ ಅಳತೆ.

(iii) ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ ಉರುಳುವ ಚಕ್ರದ ಸುತ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸಿದ ದೂರ.

(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಓರೆಯಾಗಿರುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ, ಕೋನದ ಶಿರದಿಂದಿರುವ ದೂರಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ, ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯಿಂದಿರುವ ಎತ್ತರಗಳು ಬದಲಾಗುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ: $30°$, $45°$, $60°$ ಎಂಬೀ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.

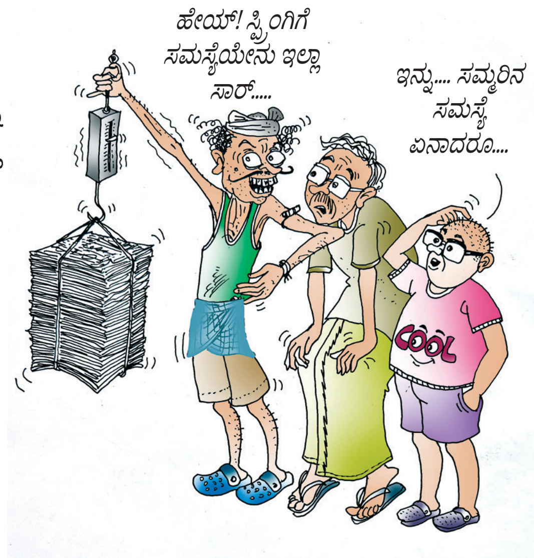


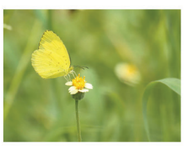
(3) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ರಚಿಸುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ ಭುಜಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ. ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇತರ ಸಮಬಹುಭುಜಗಳಲ್ಲಾದರೇ?

(4) ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವೃತ್ತದ ವಿಭಿನ್ನ ಚಾಪಗಳ ಉದ್ದಗಳು, ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಯಾವುದು ? ವಿಭಿನ್ನ ಸೆಕ್ಟರುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವಾದರೇ ?

ದರವೂ ಅನುಪಾತವೂ

ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯ ಒಂದು ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ನೋಡುವ. ಮೊದಲು ನೋಡಿದ ಫೋಟೋಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಸಹಾಯದಿಂದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿಸಿದರೆ ಎತ್ತರವು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುವುದು ?





ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಎತ್ತರ(ಅಗಲ) ವು ಉದ್ದದ $\frac{3}{4}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ

$$\text{ಬದಲಾದ ಎತ್ತರ} = \text{ಬದಲಾದ ಉದ್ದ} \times \frac{3}{4}$$

ಬದಲಾದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಮೊದಲಿನ ಉದ್ದಗಳೊಳಗೆ ಸಂಬಂಧವೇನು ?

$$\text{ಬದಲಾದ ಉದ್ದ} = \text{ಮೊದಲಿನ ಉದ್ದ} \times 2$$

ಆಗ

$$\text{ಬದಲಾದ ಎತ್ತರ} = \text{ಮೊದಲಿನ ಉದ್ದ} \times 2 \times \frac{3}{4}$$
$$= \text{ಮೊದಲಿನ ಉದ್ದ} \times \frac{3}{4} \times 2$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲಿನ ಉದ್ದದ $\frac{3}{4}$ ಭಾಗ ಎಂಬುದು, ಮೊದಲಿನ ಎತ್ತರವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ

$$\text{ಬದಲಾದ ಎತ್ತರ} = \text{ಮೊದಲಿನ ಎತ್ತರ} \times 2$$

ಅಂದರೆ, ಉದ್ದವು ಇಮ್ಮಡಿಯಾದರೆ, ಎತ್ತರವೂ ಇಮ್ಮಡಿಯಾಗುವುದು.

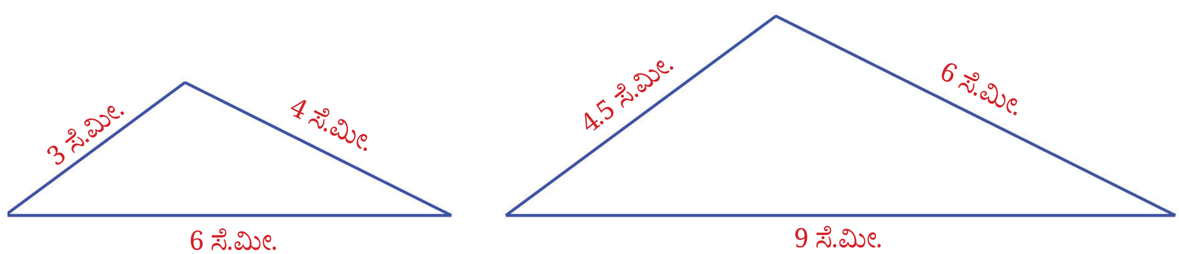
ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉದ್ದವು ಮೂರು ಮಡಿಯಾದರೆ, ಎತ್ತರವೂ ಮೂರು ಮಡಿಯಾಗುವುದೆಂದೂ, ಉದ್ದವನ್ನು ಅರ್ಧವಾಗಿಸಿದರೆ ಎತ್ತರವೂ ಅರ್ಧವಾಗುವುದೆಂದು ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಉದ್ದವನ್ನು ಎಷ್ಟೇ ಮಡಿ ಅಥವಾ ಭಾಗವಾಗಿಸಿದರೂ, ಎತ್ತರವೂ ಅದೇ ಮಡಿಯೋ ಭಾಗವೋ ಆಗುವುದು. ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ ಉದ್ದವು ಬದಲಾಗುವ ಅದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಎತ್ತರವೂ ಬದಲಾಗುವುದು (ಆದರೆ ಈ ಆಯತಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಎತ್ತರವು ಬದಲಾಗುವುದರ ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ $\frac{3}{4}$ ಎಂಬುದೇ ಆಗಿರುವುದು).

ಇತರ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಕಷ್ಟವಿಲ್ಲ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ಎರಡು ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವು ಅನುಪಾತಿಕ ಆಗಿರುವುದಾದರೆ, ಒಂದು ಅಳತೆ ಬದಲಾಗುವ ಅದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಅಳತೆಯೂ ಬದಲಾಗುವುದು.

ಕೆಲವು ಬದಲಾವಣೆಗಳು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಎತ್ತರದಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಬೀಳುವ ಒಂದು ವಸ್ತು, ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 4.9 ಮೀಟರ್, ಎರಡು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 19.6 ಮೀಟರ್ ಸಂಚರಿಸುವುದು. ಅಂದರೆ ಸಮಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾದಾಗ ದೂರ ನಾಲ್ಕು ಮಡಿಯಾಗುವುದು. ಆಗ ಈ ಸಂಚಾರದಲ್ಲಿ, ದೂರವು ಸಮಯಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಭುಜಗಳು ಬದಲಾಗುವುದು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಾಗಿರುವುದು ಎಂದೂ ಬದಲಾಗಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ ಕೋನಗಳು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂದೂ **ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವೆವು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

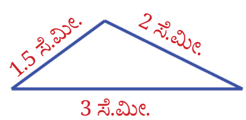


ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ $1\frac{1}{2}$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು. ಅಂದರೆ, ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರ $1\frac{1}{2}$ ಮಡಿ. ಆದರೆ ಎರಡೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನ.

ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ನೋಡಬಹುದು. ಎರಡು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ

- ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜದ 2 ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.
- ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜದ $1\frac{1}{3}$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.
- ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಭುಜದ $1\frac{1}{2}$ ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.

ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸಿದರೂ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ಈ ಸಂಬಂಧವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಮೊದಲನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಅರ್ಧವಾಗಿಸಿ ರಚಿಸಿದ ಚಿತ್ರ ಅಥವಾ ಎರಡನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿಸಿರುವುದು ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಆಗ, ಮೊದಲನೇ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ ಮೂರನೇ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವು $\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ ಮೂರನೇ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವು $\frac{1}{3}$ ಆಗಿರುವುದು.

ಆದರೆ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲೂ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು ಈ ಮೊದಲು ಹೇಳಿರುವಂತೆಯೇ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜದ 2 ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭುಜ, ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜದ $1\frac{1}{3}$ ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಉದ್ದದ ಭುಜ (ಆದುದರಿಂದಲೇ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಉದ್ದದ ಭುಜದ $1\frac{1}{2}$ ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭುಜ).

ಅಂದರೆ, ಮೊದಲನೇ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ದರವು ಹಲವು ಆಗಬಹುದು. ಆದರೆ ಹೀಗೆ ಸಿಗುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಅದರ ಭುಜಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ಸಮಾನ ಕೋನಗಳಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಬದಲಾಗುವುದು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಆಗಿರುವುದು.

ಮಳೆ ಲೆಕ್ಕ

ತೆರೆದಿರುವ ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಮಳೆ ಸುರಿಯುವಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನಲ್ಲಿ ಬೀಳುವ ನೀರಿನ ಅಳತೆ ಸಮಾನ ಆಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ ಸಿಗುವ ಮಳೆನೀರಿನ ಘನಫಲವು, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕ ಆಗಿರುವುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದಲ್ಲಾಗಿ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ಪಾತ್ರೆಗಳನ್ನು ಇರಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ಬೀಳುವ ಮಳೆನೀರಿನ ಘನಫಲವನ್ನು, ಪಾತ್ರೆಗಳ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುವುದು. ಯಾವುದೇ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವುದು. ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ಎತ್ತರವಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಪಾತ್ರೆಗಳ ಗಾತ್ರ ಬದಲಾದರೂ ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಮಳೆನೀರಿನ ಎತ್ತರವು ಸಮಾನ ಆಗಿರುವುದು. ಇದನ್ನೇ ಮಳೆಯ ಅಳತೆಯಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ 1 ಮಿಲ್ಲೀಮೀಟರ್ ಮಳೆ ಸುರಿದರೆ ಒಂದು ಚದರ ಮೀಟರ್ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಟಾಂಕಿಯಲ್ಲಿ 1 ಮಿಲ್ಲೀಮೀಟರ್ ಎತ್ತರದ ವರೆಗೆ ನೀರು ತುಂಬುವುದು. ಈ ನೀರಿನ ಘನಫಲವು ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದರೆ,

$$100 \times 100 \times 0.1 = 1000$$

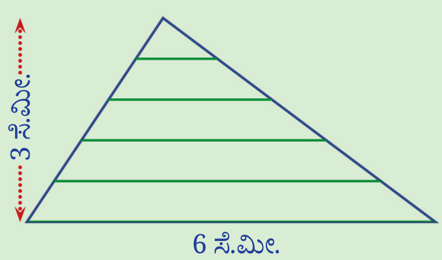
ಅಂದರೆ ಒಂದು ಲೀಟರ್.

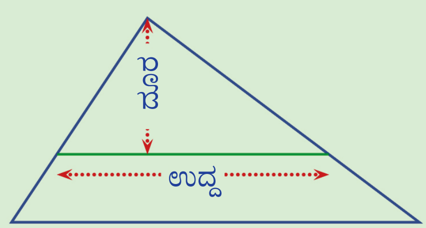
ಆಗ ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ 1 ಮಿಲ್ಲಿಮೀಟರ್ ಮಳೆ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚದರ ಮೀಟರಿನಲ್ಲಿ 1 ಲೀಟರ್ ನೀರು ಎಂದಾಗಿದೆ.

(1) (i) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು? ಒಂದು ಷಡ್ಭುಜದ್ದಾದರೇ ?

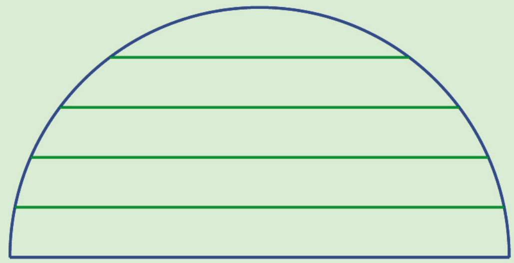
(ii) ಬಹುಭುಜಗಳ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಅದರ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಬದಲಾಗುವುದೇ ? ಕಾರಣವನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ.

(2) ಪಾದವು 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಎತ್ತರ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದೊಳಗೆ ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಮೇಲಿನ ಶಿರದಿಂದ ಇರುವ ದೂರಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಎಷ್ಟು?

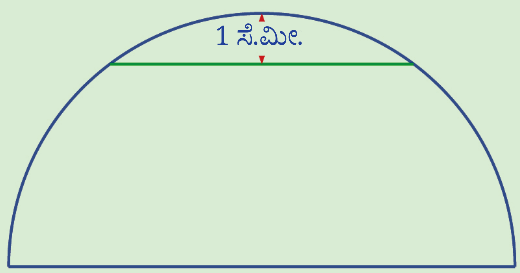


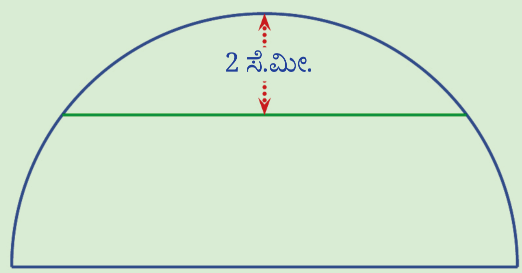


(3) ವ್ಯಾಸ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಅರ್ಧವೃತ್ತದೊಳಗೆ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.



(i) ಈ ಕೆಳಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲೂ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.





(ii) ಗೆರೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಅರ್ಧವೃತ್ತದ ಅತ್ಯಂತ ಮೇಲ್ಭಾಗದಿಂದ ಇರುವ ದೂರಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದೇ ? ಕಾರಣವನ್ನು ವಿವರಿಸಿರಿ.

ಹಲವು ವಿಧದ ಅನುಪಾತ

ಒಂದು ಸಮಬಹುಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬದಲಾಗುವಾಗ, ಅದರ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಬದಲಾಗುವುದು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಆಗಿರುವುದೇ ?

ತ್ರಿಕೋನದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $180°$; ಷಡ್ಭುಜದ ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ $720°$. ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎರಡು ಮಡಿಯಾದಾಗ, ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಎರಡು ಮಡಿಗಿಂತಲೂ ಅಧಿಕವಾಯಿತು. ಆಗ ಈ ಸಂಬಂಧವು ಅನುಪಾತಿಕವಲ್ಲ.

ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 2 ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ $180°$ ಯನ್ನು ಗುಣಿಸಿರುವುದು, ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವೆಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಬಹುಭುಜಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠ). ಅಂದರೆ, ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು n ಎಂದೂ, ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು $s°$ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ,

$$s = 180(n - 2)$$

ಇದರಲ್ಲಿರುವ $n - 2$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು m ಎಂದು ಬರೆದರೇ ?

ಸಮವಾಕ್ಯವು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗುವುದು

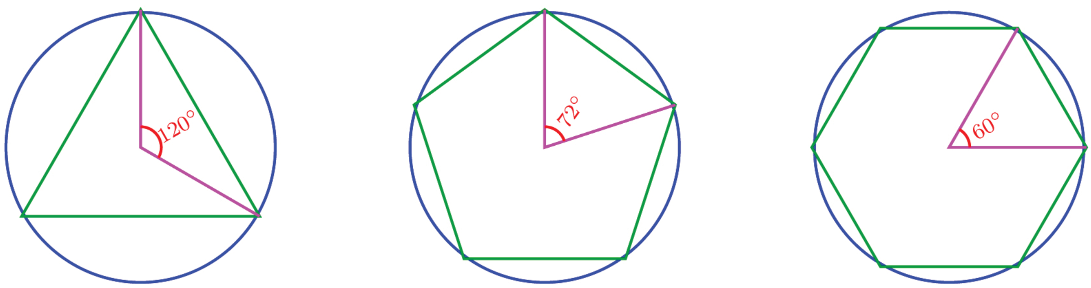
$$s = 180m$$

ಈಗ s ಎಂಬ ಅಳತೆ, m ಎಂಬ ಅಳತೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ ಬಹುಭುಜಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ, ಒಳಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಎರಡು ಕಳೆದುದಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದು.

ಹೀಗೆ ಒಂದು ಅಳತೆಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಅಳತೆಯು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರದಿದ್ದರೂ, ಮೊದಲನೇ ಅಳತೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿದುದಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗುವ ಹಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ (π ಯಿಂದಿರುವ) ಅಪವರ್ತ್ಯ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಲ್ಲ, ಆದರೆ, ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನಿಂದ ಭೂಮಿಗೆ ಬೀಳುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ವಸ್ತು ಸಂಚರಿಸುವ ದೂರವು ಸಮಯಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಸಮಯದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ.

ಯಾವುದೇ ಸಮಬಹುಭುಜದ ಎಲ್ಲಾ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದ ಶಿರಗಳು ಈ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲುಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಲೆಕ್ಕವಾದರೇ?



n ಭುಜಗಳಿರುವ ಸಮಬಹುಭುಜದಲ್ಲಿ ಈ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $d°$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$d = \frac{360}{n}$$

ಅಂದರೆ, ಇಲ್ಲಿ n ನ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ d ಬದಲಾಗುವುದು.
ಇಂತಹ ಬದಲಾವಣೆಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಹೆಸರಿದೆ.

ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವಿರುವ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳು ಬದಲಾಗುವಾಗ, ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದು ಅಳತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಡಿ ಅಥವಾ ಭಾಗವು ಇನ್ನೊಂದು ಅಳತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುವುದಾದರೆ ಈ ಬದಲಾವಣೆಯು **ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವುದು** (inversely proportional) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

x, y ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಎರಡು ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ,

$$y = \frac{k}{x} \quad (k \text{ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆ})$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ಈ ಅಳತೆಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವುದು, ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕವು k ಆಗಿದೆ.

ಇಂತಹ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿ ಹೇಳಲಿರುವ ಸೌಕರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ $y = kx$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು **ಸಮಾನುಪಾತ (direct proportion)** ಎಂದೂ ಹೇಳುವರು.

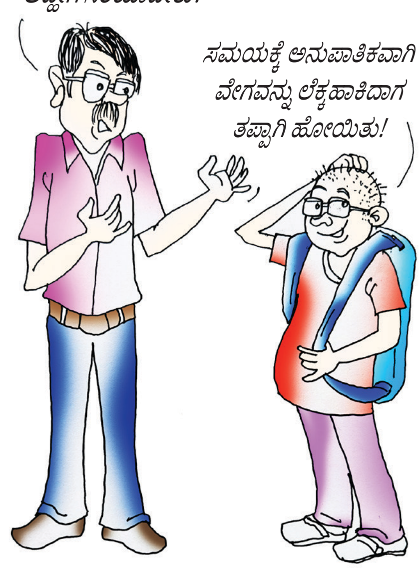
ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡುವ.

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 100 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಕಡೆಗೆ ನೇರ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಂಚರಿಸುವ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಊಹಿಸಿರಿ.

ಸಂಚರಿಸುವ ವೇಗ 10 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಆಗಿರುವುದಾದರೆ, ಎರಡನೇ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪಲು 10 ಸೆಕೆಂಡು ಬೇಕಾಗುವುದು. ವೇಗವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿ 25 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಮಾಡಿದರೆ 4 ಸೆಕೆಂಡು ಸಾಕಾಗುವುದು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವೇಗ x ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂದೂ ಉದ್ದೇಶಿತ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯ y ಸೆಕೆಂಡು ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ ಹೀಗಾಗುವುದು:

$$y = \frac{100}{x}$$

ಅಂದರೆ, x ಗೆ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ y ಬದಲಾಗುವುದು.



(1) (i) ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಭುಜದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಯಾವುದು?

(ii) ಚೌಕಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಭುಜದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆಯೇ? ಆಗಿರುವುದಾದರೆ, ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಯಾವುದು?

(2) ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಒಂದು ಚದರ ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಬದಲಾಗುವುದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಉಳಿದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳೂ ಬದಲಾಗಬೇಕು. ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಅನುಪಾತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದು?

(3) ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ, ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಉದ್ದವೂ, ವಿರುದ್ಧ ಶಿರದಿಂದ ಆ ಭುಜಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬದ ಉದ್ದವೂ ತಮ್ಮೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದು? ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಬದಲು, ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಭುಜವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೇ?

(4) ಸಮಬಹುಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ, ಒಂದು ಹೊರಕೋನದ ಅಳತೆಗೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ? ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಯಾವುದು?

ಘನಫಲವೂ ಭಾರವೂ

ಒಂದೇ ವಸ್ತುವಿನಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ಹಲವು ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ, ಘನಫಲವು ಹೆಚ್ಚುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಭಾರವೂ ಹೆಚ್ಚುವುದಲ್ಲವೇ. ಈ ಬದಲಾವಣೆಯು ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕಬ್ಬಿಣದಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ಯಾವುದೇ ವಸ್ತುವಿನಲ್ಲೂ ಘನಫಲವನ್ನು ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿಯೂ, ಭಾರವನ್ನು ಗ್ರಾಂಗಳಲ್ಲಿ ಅಳೆದರೆ, ಘನಫಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ 7.87 ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು ಅದರ ಭಾರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ. ಅಂದರೆ, ಈ ಬದಲಾವಣೆಯ ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕ 7.87 ಆಗಿದೆ. ತಾಮ್ರದಿಂದ ತಯಾರಿಸಲಾದ ವಸ್ತುಗಳಾಗಿರುವುದಾದರೆ, ಈ ಅನುಪಾತಿಕ ಸ್ಥಿರಾಂಕವು 8.96 ಆಗಿದೆ.

ಕಬ್ಬಿಣದ ಸಾಂದ್ರತೆ (density), ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರಿಗೆ 7.87 ಗ್ರಾಂ. ತಾಮ್ರದ ಸಾಂದ್ರತೆ, ಘನ ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿಗೆ 8.96 ಗ್ರಾಂ ಎಂಬಂತೆ ಈ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಲಾಗುವುದು.

15

ಸ್ಟಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್

ಸರಾಸರಿ

ಒಂದು ಏಕದಿನ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಪಂದ್ಯದ ಮೊದಲ 10 ಓವರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಗಳಿಸಿದ ಓಟಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ.

ಓವರ್ \ ಎಸೆತ	1	2	3	4	5	6
1	2	1	0	2	0	0
2	1	4	0	1	0	0
3	0	0	4	0	0	1
4	4	0	2	0	1	0
5	0	0	4	1	0	3
6	2	0	2	2	0	0
7	1	0	4	0	2	1
8	2	0	2	0	3	0
9	0	0	6	2	2	0
10	2	0	0	4	0	2

ಇದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಎಸೆತದಲ್ಲೂ ಗಳಿಸಿದ ಓಟಗಳ ಲೆಕ್ಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಇವೆ. ಆದರೆ ಇದರಿಂದ ಮೊದಲ ಹತ್ತು ಓವರುಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಒಟ್ಟು ಚಿತ್ರಣ ಲಭಿಸುವುದಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ.

ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಚುಟುಕಾಗಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಓವರಿನಲ್ಲೂ ಒಟ್ಟು ಗಳಿಸಿದ ಓಟಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬರೆಯುವುದು ಉತ್ತಮ.

ಓವರ್	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ಓಟ	5	6	5	7	8	6	8	7	10	8

ಮೊದಲನೇ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಮಾಹಿತಿಗಳೂ ಈ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ಇದರಿಂದ ಒಂದೇ ನೋಟದಲ್ಲಿಯೇ ಹಲವು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

- ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಓವರಿನಲ್ಲೂ 5 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ಓಟಗಳು ಸಿಕ್ಕಿವೆ.
- 8 ಓವರುಗಳಲ್ಲಿ 5 ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ಓಟಗಳು ಸಿಕ್ಕಿವೆ.

ಇನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಓಟಗಳನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿ, ಯಾವುದೇ ಪಟ್ಟಿ ಇಲ್ಲದೇ ಹೀಗೆಯೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಮೊದಲ 10 ಓವರುಗಳಲ್ಲಿ 70 ಓಟಗಳು ಲಭಿಸಿವೆ.

ಈಗ ಒಟ್ಟು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಇದರಿಂದಲೇ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಕೆಲವು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಬಹುದಲ್ಲವೇ.

- ಸಾಧಾರಣ ಉತ್ತಮವಾಗಿ ಓಟಗಳ ದರ (run rate) ವಿದೆ.
- ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ 10 ಓವರುಗಳಲ್ಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆ 70 ಓಟಗಳಂತೆ ಗಳಿಸುವುದನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ, 50 ಓವರುಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆ 350 ಓಟಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ಗಳಿಸಲಾದ 70 ನ್ನು 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಕೇವಲ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಓಟಗಳ ದರ ಒಂದು ಓವರಿನಲ್ಲಿ 7 ಓಟ.

ಇನ್ನು ಮೊದಲ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಮಾಹಿತಿ ತಿಳಿಯದೇ, ಈ ದರವು ಮಾತ್ರ ತಿಳಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು ಎಂದಾದರೇ?

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಓವರಿನಲ್ಲೂ ನಿಖರವಾಗಿ 7 ಓಟಗಳಂತೆ ಲಭಿಸಿತ್ತು ಎಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಬದಲಾಗಿ ಹೀಗೆಲ್ಲಾ ಹೇಳಬಹುದು.

- ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಓವರಿನಲ್ಲೂ ಸಮಾನವಾದ ಓಟಗಳು ಲಭಿಸಿರುವುದಾದರೆ, ಅದು 7 ಓಟಗಳು ಆಗಿವೆ.
- ಎಲ್ಲಾ ಓವರುಗಳಲ್ಲೂ 7 ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಓಟಗಳಂತೆ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.
  - ಹಾಗಾದರೆ, ಒಟ್ಟು 70 ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಆಗುವುದಲ್ಲವೇ?
- ಎಲ್ಲಾ ಓವರುಗಳಲ್ಲೂ 7 ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ಓಟಗಳು ಆಗಲೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.
  - ಹಾಗಾದರೆ, ಒಟ್ಟು 70 ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ಆಗ ಬೇಕಲ್ಲವೇ?

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 40 ಮಕ್ಕಳಿರುವರು. ಒಂದು ಚಿಕಿತ್ಸಾಸಹಾಯ ನಿಧಿಗೆ ಈ ತರಗತಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಮಕ್ಕಳೂ ಸಹಾಯಧನವನ್ನು ನೀಡಿದರು. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ನೀಡಿದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಬರೆದಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಿದರೆ, 40 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುವುದು. ಇದರಿಂದ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಸಿಕ್ಕಿತೆಂದೋ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ಸರಿಸುಮಾರು ಎಷ್ಟು ನೀಡಿದರೆಂದೋ ಸುಲಭದಲ್ಲಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ. ಬದಲಾಗಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಿದರೇ?

40 ಮಕ್ಕಳಿಂದ ಒಟ್ಟು 2000 ರೂಪಾಯಿ ಸಂಗ್ರಹವಾಯಿತು.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಗುವೂ ನೀಡಿರುವುದು ಒಂದೇ ಮೊತ್ತ ಆಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಗುವೂ $2000 \div 40 = 50$ ಕೊಟ್ಟಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಆದರೂ ಮೊದಲನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಕೆಲವು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು.

- ಎಲ್ಲಾ ಮಕ್ಕಳೂ ಒಂದೇ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನೀಡಿರುವುದಾದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ 50 ರೂಪಾಯಿ ನೀಡಿದರು.
- ಒಂದು ಮಗುವಾದರೂ 50 ರೂಪಾಯಿ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ಕೊಟ್ಟಿರುವನು. (ಎಲ್ಲರೂ 50 ರೂಪಾಯಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ನೀಡಿರುವುದಾದರೆ, ಒಟ್ಟು 2000 ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಆಗಬೇಕಲ್ಲವೇ.)
- ಒಂದು ಮಗುವಾದರೂ 50 ರೂಪಾಯಿ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವನು. (ಎಲ್ಲರೂ 50 ರೂಪಾಯಿಗಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ನೀಡಿರುವುದಾದರೆ, ಒಟ್ಟು 2000 ರೂಪಾಯಿಗಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ಆಗುವುದಲ್ಲವೇ)
- ಎಲ್ಲರೂ ನೀಡಿರುವುದು ಸಮಾನ ಮೊತ್ತ ಆಗಿಲ್ಲವಾದರೆ, ಕೆಲವರು 50 ರೂಪಾಯಿಗಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆಯೂ ಉಳಿದವರು 50 ರೂಪಾಯಿಗಿಂತ ಅಧಿಕವೂ ನೀಡಿರುವರು.

ಎರಡು ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲೂ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾದ ಹಲವು ಮಾಹಿತಿಗಳಿಂದ ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿರುವ ಸರಿಸುಮಾರು ಚಿತ್ರಣ ಲಭಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಚುಟುಕಾಗಿಸಿರುವುದಲ್ಲವೇ
ಎರಡರಲ್ಲೂ ಮಾಡಿರುವುದು ಒಂದೇ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನಲ್ಲವೇ?

- ಮೊದಲನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಓಟವಾದ 70 ನ್ನು, ಓವರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, 7 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಯಿತು.
- ನಂತರದ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಸಿಕ್ಕಿದ ಮೊತ್ತ 2000. ಇದನ್ನು ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ 40 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, 50 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಯಿತು.

ಹೀಗೆ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ **ಸರಾಸರಿ (average)** ಎಂದೂ, ಗಣಿತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ **ಮಧ್ಯಮಾನ (arithmetic mean)** ಎಂದೂ ಹೇಳುವರು.
ಆಗ ಈ ಮೇಲೆ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಎರಡು ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವುದನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು.

- ಮೊದಲ 10 ಓವರುಗಳಲ್ಲಿ ಲಭಿಸಿದ ಓಟಗಳ ಮಧ್ಯಮಾನ 7 (ಮೊದಲ 10 ಓವರುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ ಸರಾಸರಿ 7 ಓಟಗಳಂತೆ ಲಭಿಸಿತು)
- 40 ಮಕ್ಕಳು ನೀಡಿರುವ ಸಹಾಯಧನದ ಮಧ್ಯಮಾನ 50 ರೂಪಾಯಿ (40 ಮಕ್ಕಳು ಸರಾಸರಿ 50 ರೂಪಾಯಿಯಂತೆ ಸಹಾಯಧನ ನೀಡಿದರು).

ಸಮಾನವಲ್ಲದ ಹಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯಮಾನವು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿಂತ ಅಧಿಕವೂ, ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯೂ ಆಗಿರುವುದು ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವರವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸುವ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಮಾನ 7 ಓಟ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ನೋಡೋಣ.

ಓವರ್	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ಓಟ	5	6	5	7	8	6	8	7	10	8

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಓವರಿನಲ್ಲೂ ಲಭಿಸಿದ ಓಟವು ಮಧ್ಯಮಾನಕ್ಕಿಂತಲೂ ಎಷ್ಟು ಅಧಿಕ, ಅಲ್ಲವಾದರೆ ಎಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ ನೋಡೋಣ.

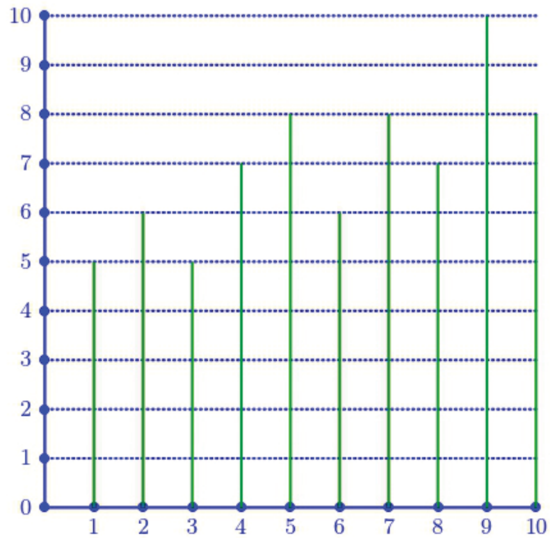
ಓವರ್	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ಓಟ	5	6	5	7	8	6	8	7	10	8
ಮಧ್ಯಮಾನಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ					1		1		3	1
ಮಧ್ಯಮಾನಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ	2	1	2			1				

ಅಧಿಕವಾಗಿರುವುದನ್ನೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದನ್ನೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಕೂಡಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

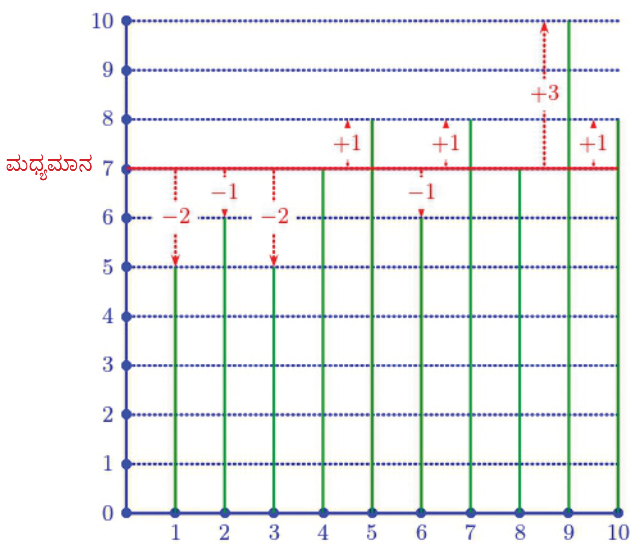
ಅಧಿಕ $= 1 + 1 + 3 + 1 = 6$

ಕಡಿಮೆ $= 2 + 1 + 2 + 1 = 6$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಓವರಿನಲ್ಲೂ ಲಭಿಸಿದ ಓಟಗಳನ್ನು ಐದನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲೂ ಆರನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲೂ ನೋಡಿರುವಂತೆ ಚಿತ್ರರೂಪದಲ್ಲೂ ತೋರಿಸಬಹುದು.



ಇದರಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಮಾನವಾಗಿರುವ 7 ರ ಮೂಲಕ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಮಧ್ಯಮಾನಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವುದನ್ನೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದನ್ನೂ ಗುರುತಿಸಿ ನೋಡೋಣ.



ಯಾವುದಾದರೂ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯಮಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಮಧ್ಯಮಾನಕ್ಕಿಂತಲೂ ಎಷ್ಟು ಅಧಿಕ, ಅಥವಾ ಎಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಎಂದು ಗಣನೆ ಮಾಡಿ, ಅಧಿಕವಾಗಿರುವುದನ್ನೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವುದನ್ನೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಕೂಡಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಮೊತ್ತ ಸಮಾನವಾಗಿದೆಯೇ?

ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವೇನೆಂದು ವಿವರಿಸಬಹುದೇ?

ಪಟ್ಟಿಗಳು

ಸಂಖ್ಯಾಪರವಾದ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವಾಗ, ಆವರ್ತಿಸಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಗುಂಪಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುವುದಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ದುಡಿಯುತ್ತಿರುವವರಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ವೇತನ ಲಭಿಸುವವರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೋರಿಸುವರು.

ಇನ್ನು ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಒಂದು ಆಫೀಸಿನಲ್ಲಿ ಹಲವು ವಿಧದ ಕೆಲಸಗಳನ್ನು ಮಾಡುವವರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಅವರ ಒಂದು ದಿನದ ವೇತನವನ್ನೂ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ದಿನವೇತನ (ರೂಪಾಯಿ)	ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
675	8
730	4
755	4
780	3
840	1

ಇವರ ದೈನಂದಿನ ಆದಾಯದ ಮಧ್ಯಮಾನ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿರುವುದು?

ಮೊದಲು ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಅವರಿಗೆಲ್ಲಾ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಲಭಿಸುವ ವೇತನವನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕು.

ಸಮಾನ ವೇತನ ಸಿಗುವವರ ಒಟ್ಟು ವೇತನವನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 675 ರೂಪಾಯಿ ಸಿಗುವ 8 ಮಂದಿಯ ಒಟ್ಟು ವೇತನ

$$675 \times 8 = 5400 \text{ ರೂಪಾಯಿ}$$

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ವೇತನ ಸಿಗುವವರನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿಕೊಂಡು ಒಟ್ಟು ವೇತನವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ದೈನಂದಿನ ವೇತನ (ರೂಪಾಯಿ)	ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ	ಒಟ್ಟು ವೇತನ (ರೂಪಾಯಿ)
675	8	5400
730	4	2920
755	4	3020
780	3	2340
840	1	840
ಒಟ್ಟು	20	14520

ಇನ್ನು ಮಧ್ಯಮಾನವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ,

ಮಧ್ಯಮಾನ ವೇತನ $= 14520 \div 20 = 726$ ರೂಪಾಯಿ.

ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ವೇತನ 675 ರೂಪಾಯಿ ಮತ್ತು ಅತಿ ಹೆಚ್ಚು ವೇತನ 840 ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಮಧ್ಯಮಾನ ವೇತನವಾದ 726 ರೂಪಾಯಿ ಎಂಬುದು 675 ರೂಪಾಯಿಗಿಂತ ಅಧಿಕವೂ 840 ರೂಪಾಯಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯೂ ಆಗಿರುವುದು. ಇದು ಯಾವಾಗಲೂ ಸರಿಯಾಗಿರುವುದೇ?

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

- 8 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಸಣ್ಣದು 100 ಮತ್ತು ಅತಿ ದೊಡ್ಡದು 200 ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ.
- ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ $100 \times 8 = 800$ ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವೂ, $200 \times 8 = 1600$ ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯೂ ಆಗಿರುವುದು.
- ಮೊತ್ತವನ್ನು 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಮಧ್ಯಮಾನವು $800 \div 8 = 100$ ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವೂ $1600 \div 8 = 200$ ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯೂ ಆಗಿರುವುದು.

100, 200, 8 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಯೋಚಿಸಬಹುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯಮಾನವು, ಅವುಗಳ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಮತ್ತು ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವುದು.

(1) ಟ್ವೆಂಟಿ-ಟ್ವೆಂಟಿ ಕ್ರಿಕೆಟಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ತಂಡವು ಮೊದಲ 5 ಓವರುಗಳಲ್ಲಿ 51 ಓಟಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿತು.

(i) ಹಾಗಾದರೆ ಅಲ್ಲಿಯವರೆಗಿನ ಓಟಗಳ ದರ ಎಷ್ಟು?

(ii) ಇದೇ ದರದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ 20 ಓವರುಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಓಟಗಳನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು?

(2) ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ನಡೆಸಿ, ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಮಾರ್ಕಿನ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲಾದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಮಾರ್ಕು	ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ
2	1
3	2
4	5
5	4
6	6
7	11
8	10
9	4
10	2

(i) ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಲಭಿಸಿದ ಮಾರ್ಕುಗಳ ಮಧ್ಯಮಾನವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.

(ii) ಮಧ್ಯಮಾನಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಮಾರ್ಕು ಸಿಕ್ಕಿದ ಎಷ್ಟು ಮಕ್ಕಳು ಇರುವರು?

(iii) ಮಧ್ಯಮಾನಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ಮಾರ್ಕು ಸಿಕ್ಕಿದ ಮಕ್ಕಳೆಷ್ಟು?

(3) ಒಬ್ಬ ಕೃಷಿಕನಿಗೆ ಒಂದು ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಲಭಿಸಿದ ರಬ್ಬರ್ ಶೀಟುಗಳ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ:

ರಬ್ಬರ್ (ಕಿ.ಗ್ರಾಂ.)	ದಿನಗಳು
9	3
10	4
11	3
12	3
13	5
14	6
16	6

(i) ಈ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಲಭಿಸಿದ ರಬ್ಬರ್ ಶೀಟುಗಳ ಮಧ್ಯಮಾನ ಭಾರ ಎಷ್ಟು?

(ii) ರಬ್ಬರ್ ಶೀಟಿನ ಬೆಲೆ ಕಿಲೋಗ್ರಾಮಿಗೆ 175 ರೂಪಾಯಿ ಆಗಿರುವುದಾದರೆ, ಈ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ರಬ್ಬರಿನಿಂದ ಸಿಗಬಹುದಾದ ಮಧ್ಯಮಾನ ಆದಾಯ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ?

(4) ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಸುರಿದ ಮಳೆಯ ಅಳತೆಗನುಸಾರವಾಗಿ ಒಂದು ತಿಂಗಳಿನ ದಿನಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಮಳೆ (ಮಿ.ಮೀ)	ದಿನಗಳು
54	3
56	5
58	6
55	3
50	2
47	4
44	5
41	2

ಆ ತಿಂಗಳಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ದಿನ ಸುರಿದ ಮಳೆಯ ಮಧ್ಯಮಾನ ಅಳತೆ ಎಷ್ಟು?

ವಿಭಾಗ ಪಟ್ಟಿಗಳು

ಮಾಹಿತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ, ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ ಪಟ್ಟಿಯಾಗಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಿರುವ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಇದು 50 ಮಾರ್ಕುಗಳ ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬರೆದ 40 ಮಂದಿಯನ್ನು ಅವರಿಗೆ ಲಭಿಸಿದ ಮಾರ್ಕಿನ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲಾದ ಪಟ್ಟಿಯಾಗಿದೆ. ಇವರ ಮಾರ್ಕುಗಳ ಮಧ್ಯಮಾನ ಎಷ್ಟು?

ಮಾರ್ಕು	ಸಂಖ್ಯೆ
0 - 10	4
10 - 20	6
20 - 30	16
30 - 40	8
40 - 50	6

ಮಧ್ಯಮಾನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಮಾರ್ಕುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷೆ ಬರೆದವರ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು.

ಮಾರ್ಕುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ?

ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 4 ಮಂದಿಗೆ ಲಭಿಸಿರುವುದು 0 ಮಾರ್ಕಿಗೂ 10 ಮಾರ್ಕಿಗೂ ಎಡೆಯಲ್ಲಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಮಾತ್ರವಲ್ಲವೇ ತಿಳಿಯಲು ಸಾಧ್ಯ?

ಇವರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರಿಗೂ ಲಭಿಸಿದ ಮಾರ್ಕು ಎಷ್ಟು ಎಂದು ನಿಖರವಾಗಿ ತಿಳಿಯದೆ ಅವರ ಒಟ್ಟು ಮಾರ್ಕು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಲ್ಲ. ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಇತರ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲೂ ಇದೇ ಸಮಸ್ಯೆಯಿದೆ.

ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯದ ಮಾಹಿತಿಗಳ ಕುರಿತು ಕೆಲವು ಊಹನೆಗಳು ಬೇಕಾಗಿ ಬರಬಹುದು.

ಪಟ್ಟಿಯ ಮೊದಲನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವ 4 ಮಂದಿಯ ಮಾರ್ಕುಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ತಿಳಿಯದಿದ್ದರೂ, ಅವುಗಳು 0 ಮಾರ್ಕಿಗೂ 10 ಮಾರ್ಕಿಗೂ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವುದು ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಆಗ ಈ 4 ಮಂದಿಯ ಮಾರ್ಕುಗಳ ಮಧ್ಯಮಾನವೂ 0 ಮಾರ್ಕಿಗೂ 10 ಮಾರ್ಕಿಗೂ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವುದು. (ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯಮಾನವು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಹಾಗೂ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ).

ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಈ ಮಧ್ಯಮಾನವು 0 ಮಾರ್ಕಿಗೂ 10 ಮಾರ್ಕಿಗೂ ಸರಿಸುಮಾರು ಮಧ್ಯದಲ್ಲಾಗಿರುವುದು.

ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿರುವವರ ಮಾರ್ಕುಗಳ ಮಧ್ಯಮಾನವು, ಆ ವಿಭಾಗದ ಸರಿಯಾಗಿ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ (ವಿಭಾಗ ಮಧ್ಯಮಾನ) ಎಂಬ ಊಹನೆಗನುಸಾರವಾಗಿ ಈ ರೀತಿಯ ಪಟ್ಟಿಗಳಿಂದ ಒಟ್ಟು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ 4 ಮಂದಿಯ ಮಾರ್ಕಿನ ಮಧ್ಯಮಾನವು, 0 ಮಾರ್ಕಿನ ಮತ್ತು 10 ಮಾರ್ಕಿನ ಸರಿಯಾಗಿ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವ 5 ಮಾರ್ಕು ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಅವರ ಒಟ್ಟು ಮಾರ್ಕು $5 \times 4 = 20$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಭಾಗದಲ್ಲೂ ಇರುವವರ ಮಾರ್ಕನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ, ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಹೀಗೆ ದೊಡ್ಡದಾಗಿಸಬಹುದು.

ಮಾರ್ಕು	ಸಂಖ್ಯೆ	ವಿಭಾಗ ಮಧ್ಯಮಾನ	ಒಟ್ಟು ಮಾರ್ಕು
0 - 10	4	5	20
10 - 20	6	15	90
20 - 30	16	25	400
30 - 40	8	35	280
40 - 50	6	45	270
ಒಟ್ಟು	40		1060

ಇನ್ನು ಮಧ್ಯಮಾನವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$1060 \div 40 = 26.5$$

(1) ಒಂದು ತರಗತಿಯ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಅವರ ಎತ್ತರಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲಾದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಎತ್ತರ (ಸೆ.ಮೀ.)	ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ
148 - 152	8
152 - 156	10
156 - 160	15
160 - 164	10
164 - 168	7

ಈ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮಕ್ಕಳ ಮಧ್ಯಮಾನ ಎತ್ತರ ಎಷ್ಟು?

(2) ಒಂದು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಲ್ಲಿರುವ ಅಧ್ಯಾಪಕರುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವರ ಪ್ರಾಯಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ ಬರೆದಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ಪ್ರಾಯ	ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಸಂಖ್ಯೆ
25 - 30	6
30 - 35	14
35 - 40	18
40 - 45	20
45 - 50	5
50 - 55	4
55 - 60	3

ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಮಧ್ಯಮಾನ ಪ್ರಾಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

(3) ಒಂದು ತರಗತಿಯ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಅವರ ಭಾರಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲಾದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಭಾರ (ಕಿ.ಗ್ರಾಂ)	21 - 23	23 - 25	25 - 27	27 - 29	29 - 31	31 - 33
ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ	4	7	8	6	3	1

ಮಧ್ಯಮಾನ ಭಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಭಾಗ IV ಕ

ಮೂಲಭೂತ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು

51ಕ. **ಮೂಲಭೂತ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು – ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಭಾರತದ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಪೌರನ ಕರ್ತವ್ಯಗಳಾಗಿವೆ.**

(ಕ) ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದು, ಅದರ ಆದರ್ಶಗಳನ್ನು, ಸಂಸ್ಥೆಗಳನ್ನು ರಾಷ್ಟ್ರಧ್ವಜವನ್ನು ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು;

(ಖ) ನಮ್ಮ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ ಸಂಗ್ರಾಮಕ್ಕೆ ಸ್ಫೂರ್ತಿದಾಯಕವಾದ ಉದಾತ್ತ ಆದರ್ಶಗಳನ್ನು ಘೋಷಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಅನುಸರಿಸುವುದು.

(ಗ) ಭಾರತದ ಸಾರ್ವಭೌಮತೆಯನ್ನು, ಏಕತೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅಖಂಡತೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಸಂರಕ್ಷಿಸುವುದು.

(ಘ) ದೇಶವನ್ನು ರಕ್ಷಿಸಲು ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರಕ್ಕೆ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸಲು ಕರೆ ಬಂದಾಗ ಅದನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದು.

(ಙ) ಧಾರ್ಮಿಕ, ಭಾಷಿಕ ಮತ್ತು ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಅಥವಾ ಜಾತಿ ಪಂಗಡಗಳ ಭಿನ್ನತೆಗಳಿಂದ ಅತೀತವಾಗಿ ಭಾರತದ ಎಲ್ಲ ಜನತೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಮರಸ್ಯವನ್ನು ಮತ್ತು ಭ್ರಾತೃತ್ವದ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದು, ಸ್ತ್ರೀಯರ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಕುಂದುಂಟುಮಾಡುವ ಆಚರಣೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬಿಡುವುದು.

(ಚ) ನಮ್ಮ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಭವ್ಯ ಪರಂಪರೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಕಾಪಾಡುವುದು.

(ಛ) ಅರಣ್ಯಗಳು, ಸರೋವರಗಳು, ನದಿಗಳು ಮತ್ತು ವನ್ಯಜೀವಿಗಳು ಸೇರಿದಂತೆ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಪರಿಸರವನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮಾಡುವುದು, ಪ್ರಾಣಿಗಳಿಗೆ ಅನುಕಂಪ ತೋರಿಸುವುದು.

(ಜ) ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಮನೋಭಾವ, ಮಾನವೀಯತೆ, ಜಿಜ್ಞಾಸೆ ಮತ್ತು ಸುಧಾರಣ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದು.

(ಝ) ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಸೊತ್ತನ್ನು ರಕ್ಷಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಹಿಂಸೆಯನ್ನು ತ್ಯಜಿಸುವುದು.

(ಞ) ರಾಷ್ಟ್ರವು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಸಾಧನೆ ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧಿಯ ಔನ್ನತ್ಯಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು ವೈಯಕ್ತಿಕ ಹಾಗೂ ಸಾಮಾಜಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಎಲ್ಲ ಕಾರ್ಯಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಮಾಣಿಕವಾಗಿ ಶ್ರಮಿಸುವುದು.

(ಟ) ಆರರಿಂದ ಹದಿನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ನಡುವಿನ ತನ್ನ ಮಕ್ಕಳಿಗೋ, ತನ್ನ ರಕ್ಷಣೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮಕ್ಕಳಿಗೋ ಆಯಾ ಸಂದರ್ಭಾನುಸಾರ ಹೆತ್ತವರೋ ರಕ್ಷಕರೋ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸಕ್ಕಿರುವ ಅವಕಾಶವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುವುದು.

ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕುಗಳು

ಪ್ರೀತಿಯ ಮಕ್ಕಳೇ,

ನಿಮ್ಮ ಹಕ್ಕುಗಳ ಕುರಿತು ತಿಳಿಯಬೇಕಲ್ಲವೇ? ಹಕ್ಕುಗಳ ಕುರಿತಾಗಿರುವ ತಿಳುವಳಿಕೆಯು ನಿಮ್ಮ ಭಾಗವಹಿಸುವಿಕೆ, ಸಂರಕ್ಷಣೆ, ಸಾಮಾಜಿಕ ನ್ಯಾಯ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಖಾತರಿಪಡಿಸಲು ಪ್ರೇರಣೆಯನ್ನೂ ಪ್ರಚೋದನೆಯನ್ನೂ ನೀಡುತ್ತದೆ. ನಿಮ್ಮ ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಲು ಈಗ ಒಂದು ಆಯೋಗವು ಕಾರ್ಯಾಚರಿಸುತ್ತಿದೆ. 'ಕೇರಳ ಪ್ರಾಂತ್ಯ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕು ಸಂರಕ್ಷಣ ಆಯೋಗ' ಎಂದು ಅದರ ಹೆಸರು. ನಿಮ್ಮ ಹಕ್ಕುಗಳು ಯಾವುವು ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

- ವಾಕ್ ಮತ್ತು ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ.
- ಜೀವ ಮತ್ತು ವ್ಯಕ್ತಿ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯದ ರಕ್ಷಣೆ.
- ಪರಿಪೂರ್ಣವಾದ ಬದುಕು ಹಾಗೂ ವಿಕಾಸದ ಹಕ್ಕು.
- ಜಾತಿ, ಮತ, ವರ್ಗ, ವರ್ಣ ಎಂಬ ಚಿಂತನೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಗೌರವಿಸಲ್ಪಡುವ ಮತ್ತು ಅಂಗೀಕರಿಸಲ್ಪಡುವ ಹಕ್ಕು.
- ದೈಹಿಕ, ಮಾನಸಿಕ ಹಾಗೂ ಲೈಂಗಿಕ ದೌರ್ಜನ್ಯಗಳಿಂದ ರಕ್ಷಣೆ ಪಡೆಯಲೂ ಶುಶ್ರೂಷೆ ಪಡೆಯಲೂ ಇರುವ ಹಕ್ಕು.
- ಬಾಲ ಕಾರ್ಮಿಕತನದಿಂದ ಹಾಗೂ ಅಪಾಯಕಾರಿ ಕೆಲಸಗಳಿಂದ ಬಿಡುಗಡೆ.
- ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವಿಕೆಯ ಹಕ್ಕು.
- ಬಾಲ್ಯವಿವಾಹದಿಂದ ರಕ್ಷಣೆ.
- ವೈಯಕ್ತಿಕ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯನ್ನು ಅರಿತುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಬದುಕುವ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ.
- ನಿರ್ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಒಳಗಾಗದಂತೆ ಸಂರಕ್ಷಣೆ.
- ಉಚಿತ ಹಾಗೂ ಕಡ್ಡಾಯ ಶಿಕ್ಷಣದ ಹಕ್ಕು.
- ಕಲಿಯಲೂ ಆಟವಾಡಲೂ ಇರುವ ಹಕ್ಕು.
- ಪ್ರೀತಿ ಹಾಗೂ ರಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ಒದಗಿಸುವ ಕುಟುಂಬ ಹಾಗೂ ಸಮಾಜವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಹಕ್ಕು.

ನಿಮ್ಮ ಕೆಲವು ಜವಾಬ್ದಾರಿಗಳು

- ಶಾಲೆ, ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಸೊತ್ತುಗಳನ್ನು ಹಾನಿ ಮಾಡದೆ ರಕ್ಷಿಸುವುದು.
- ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಶಿಸ್ತು ಪಾಲಿಸುವುದು.
- ಶಾಲಾ ಅಧಿಕಾರಿಗಳನ್ನು, ಅಧ್ಯಾಪಕರನ್ನು, ಹೆತ್ತವರನ್ನು ಹಾಗೂ ಸಹಪಾಠಿಗಳನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಅಂಗೀಕರಿಸುವುದು.
- ಜಾತಿ, ಮತ, ವರ್ಗ, ವರ್ಣ ಇತ್ಯಾದಿ ಚಿಂತನೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಇತರರನ್ನು ಗೌರವಿಸಲೂ ಅಂಗೀಕರಿಸಲೂ ಸಿದ್ಧರಾಗುವುದು.

ಸಂಪರ್ಕಿಸಬೇಕಾದ ವಿಳಾಸ

ಕೇರಳ ಪ್ರಾಂತ್ಯ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕು ಸಂರಕ್ಷಣ ಆಯೋಗ

'ಶ್ರೀ ಗಣೇಶ್', ಟಿ.ಸಿ. 14/2036, ವಾನ್ ರೋಸ್ ಜಂಕ್ಷನ್,
ಕೇರಳ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, ಪಿ.ಓ. ತಿರುವನಂತಪುರ - 34
ಫೋನ್ : 0471 - 2326603

E-mail : childrights.cpcr@kerala.gov.in, rte.cpcr@kerala.gov.in
Website : www.kescpcr.kerala.gov.in

ಮಕ್ಕಳ ಸಹಾಯವಾಣಿ : 1098, ಅಪರಾಧ ನಿಯಂತ್ರಣ : 1090, ನಿರ್ಭಯ : 1800 425 1400
ಕೇರಳ ಪೋಲೀಸ್ ಸಹಾಯವಾಣಿ : 0471-3243000/44000/45000

*online **R.T.E Monitoring : www.nireekshana.org.in***