ಗಣಿತ

MATHEMATICS

Part - 2

ತರಗತಿ

X

ಕೇರಳ ಸರಕಾರ
ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆ

ತಯಾರಿಸಿದವರು
ರಾಜ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಮಿತಿ (SCERT), ಕೇರಳ

2025

ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆ

ಜನಗಣ ಮನ ಅಧಿನಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯ ವಿಧಾತಾ
ಪಂಜಾಬ ಸಿಂಧು ಗುಜರಾತ ಮರಾಠ
ದ್ರಾವಿಡ ಉತ್ಕಲ ವಂಗ
ವಿಂಧ್ಯ ಹಿಮಾಚಲ ಯಮುನಾ ಗಂಗಾ
ಉಚ್ಛಲ ಜಲಧಿತರಂಗ
ತವಶುಭ ನಾಮೇ ಜಾಗೇ
ತವಶುಭ ಆಶಿಷ ಮಾಗೇ
ಗಾಹೇ ತವಜಯ ಗಾಥಾ
ಜನಗಣ ಮಂಗಲದಾಯಕ ಜಯಹೇ
ಭಾರತ ಭಾಗ್ಯವಿಧಾತಾ
ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ ಜಯಹೇ
ಜಯ ಜಯ ಜಯ ಜಯಹೇ

ಪ್ರತಿಜ್ಞೆ

ಭಾರತವು ನನ್ನ ದೇಶ. ಭಾರತೀಯರೆಲ್ಲರೂ ನನ್ನ ಸಹೋದರ, ಸಹೋದರಿಯರು.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶವನ್ನು ಪ್ರೀತಿಸುತ್ತೇನೆ. ಅದರ ಸಂಪನ್ನ ಹಾಗೂ ವೈವಿಧ್ಯಪೂರ್ಣವಾದ ಪರಂಪರೆಗೆ ನಾನು ಹೆಮ್ಮೆ ಪಡುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ತಂದೆ, ತಾಯಿ ಮತ್ತು ಗುರುಹಿರಿಯರನ್ನು ಗೌರವಿಸುತ್ತೇನೆ ಮತ್ತು ಎಲ್ಲರೊಡನೆ ಸೌಜನ್ಯದಿಂದ ವರ್ತಿಸುತ್ತೇನೆ.

ನಾನು ನನ್ನ ದೇಶ ಮತ್ತು ದೇಶದ ಜನರಿಗೆ ನನ್ನ ಶ್ರದ್ಧೆಯನ್ನು ಮುಡಿಪಾಗಿಡುತ್ತೇನೆ. ಅವರ ಕ್ಷೇಮ ಮತ್ತು ಸಮೃದ್ಧಿಯಲ್ಲೇ ನನ್ನ ಆನಂದವಿದೆ.

ಗಣಿತ

10

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in
e-mail : scertkerala@gmail.com, Phone : 0471 - 2341883
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2025
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of General Education, Government of Kerala

ಪ್ರೀತಿಯ ಮಕ್ಕಳೇ,

ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಲೂ ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡಿದೆವು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಿಯಾ ಸಂಬಂಧಗಳು ಬೀಜಗಣಿತ ತತ್ವಗಳಾಗಿ ವಿಕಾಸಗೊಳ್ಳುವುದನ್ನೂ ಅಳತೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದನ್ನೂ ತಿಳಿದಾಯಿತು. ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಶೇಷತೆಗಳು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ತತ್ವಗಳಾಗುವುದರ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನೂ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಯಿತು. ಇದೇ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಮುಂದುವರಿಯುವುದನ್ನೇ ಈ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ವಿವಿಧ ಶಾಖೆಗಳಾಗಿ ಬೆಳೆಯುವ ಬೀಜಗಣಿತವೂ ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೂ ಸಮ್ಮಿಳಿತವಾಗಿ ನೂತನವಾದ ಗಣಿತ ಶಾಖೆಯು ರೂಪುಗೊಳ್ಳುವುದನ್ನೂ ಇದರಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಎಲ್ಲಾ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಹಾಗೂ ಪ್ರಸ್ತುತ ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಬಳಸಲ್ಪಡುವ ಕೃತಕ ಬುದ್ಧಿಮತ್ತೆಯ ಆವಿಷ್ಕಾರದಲ್ಲಿ ಹೊರತುಪಡಿಸಲಾಗದ ಸಾಧ್ಯತಾ ಸಿದ್ಧಾಂತದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಪಾಠಗಳನ್ನೂ ಇದರಲ್ಲಿ ಒಳಗೊಳ್ಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಗಣಿತವನ್ನು ಐಚ್ಛಿಕ ವಿಷಯವಾಗಿ ಮುಂದೆ ಕಲಿಯುವವರಿಗೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಗಣಿತವೆಲ್ಲವೂ ಈ ಪಾಠಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿವೆ. ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಿಕ್ಷಣದ ಒಂದು ಹಂತ ಪೂರ್ತಿಯಾಗುವಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಚಿಂತನೆಯಲ್ಲೂ ಅಗತ್ಯವಾಗಿ ಇರಬೇಕಾದ ಗಣಿತ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯು ಈ ಪುಸ್ತಕದ ತಿರುಳಾಗಿದೆ. ಕಾರ್ಯಕಾರಣ ಪ್ರಜ್ಞೆಯಿಂದೊಡಗೂಡಿರುವ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿ ಆ ಮೂಲಕ ನಿಗಮನಗಳಿಗೆ ತಲುಪಲಿರುವ ಮನೋಭಾವವನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದು ಈ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಅಂತಃಸತ್ವವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರೀತಿಪೂರ್ವಕ ಹಾರೈಕೆಗಳೊಂದಿಗೆ,

ಡಾ. ಜಯಪ್ರಕಾಶ್ ಆರ್. ಕೆ.
ಡೈರೆಕ್ಟರ್
ಎಸ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ., ಕೇರಳ

TEXT BOOK DEVELOPMENT COMMITTEE

Advisor

Dr. E. Krishnan
Head (Retd.), Department of Mathematics
University College, Thiruvananthapuram

Chairman

Dr. P. Ramesh Kumar
Head (Retd.), Department of Mathematics
University of Kerala, Thiruvananthapuram

Experts

Dr. Shikhi M.
Professor,
College of Engineering Trivandurm,
Thiruvananthapuram

Sumesh S.S.
Assistant. Professor of Mathematics
Dept. of Mathematics & Statistics
Mar Ivanious College, Thiruvananthapuram

Members

R. Ramanujam
HSST Mathematics,
M.N.K.M. Govt. Higher
Secondary School
Pulappatta, Palakkad

Unnikrishnan M.V.
HST Mathematics,
G.H.S.S. Kadannappally,
Kadannappally PO, Kannur

Padmaprasad K.
HST Mathematics,
Pandalloor H.S.S.,
Kadambod Post,
Malappuram

Priya Raj
HST Mathematics,
M.G.D. High School
Pudussery,
Pudussery South P O, Pathana-
mthitta

Vijaya Kumaran T. K.
HSST (Retd.)
G.M.R.H.S.S. for Girls
Paravanadukkam,
Kasaragod

Nandakumar C.
HST Mathematics,
Chothavoor Higher
Secondary School
Champad, Kannur

Ubaidulla K.C.
HST Mathematics,
S.O.H.S. Areekode,
Malappuram

Ayishakutty K. K.
HST Mathematics,
G.H.S. Beenachi,
Sulthanbathery,
Wayanad

C. T. Firoz Babu
HST Mathematics,
G.G.V.H.S.S. Wandoor,
Malappuram

Sreejith Muriyampath
HST Mathematics,
G.H.S.S. Madappally,
Vadakara, Kozhikode

Firoza Moidu
HST Mathematics,
Calicut Girls V.H.S.S.
Kundungal, Kallayi, Kozhikode

Rajesh M.
HST Mathematics,
Kalladi H.S.S. Kumaramputhur,
Mannarkkad, Palakkad

Ullas U.G. (Artist)
HST Physical Science,
C.B.H.S.S. Vallikkunn,
Malappuram

Kannada Version

Subject Expert

Nandikeshan N, DDE (Retd.)

Language Expert

Vishalaksha M, HST (Retd.)

Participants

Harsha Kumar M.
HST, SGKHS Kudlu

Ratheesha D.
HST, GVHSS Karadka

Nagaraja N.
HST, SSHS Sheni

Balakrishna P.
HST, BEMHSS, Kasaragod

Nagesha V.
HST, SATHSS Manjeshwara

Academic Co-ordinator

Dr. Anilkumar A. K.
Research Officer, SCERT

State Council of Education Research and Training (SCERT)
Vidyabhavan, Poojappuram, Thiruvananthapuram - 695 012

ಅನುಕ್ರಮಣಿಕೆ

8	ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು	159
9	ಬಹುಪದಗಳೂ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳೂ	189
10	ವೃತ್ತಗಳೂ ಗೆರೆಗಳೂ	207
11	ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ	225
12	ಘನಾಕೃತಿಗಳು	255
13	ಸ್ಟಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್	277

ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಲವು
ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ನೋಡುವ

ಸಂಶೋಧನೆ

ಐ.ಸಿ.ಟಿ. ಸಾಧ್ಯತೆ

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಪ್ರಸ್ತಾವನೆ

ಭಾರತದ ಜನಗಳಾದ ನಾವು ಭಾರತವನ್ನು ಒಂದು [1]**[ಸಾರ್ವಭೌಮ ಸಮಾಜವಾದೀ ಸರ್ವಧರ್ಮ ಸಮಭಾವದ ಪ್ರಜಾಸತ್ತಾತ್ಮಕ ಗಣರಾಜ್ಯವಾಗಿ]** ರಚಿಸಲು ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮಸ್ತ ನಾಗರಿಕರಿಗೆ:

ಸಾಮಾಜಿಕ, ಆರ್ಥಿಕ ಮತ್ತು ರಾಜಕೀಯ **ನ್ಯಾಯ** ;
ವಿಚಾರ, ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ, ವಿಶ್ವಾಸ, ಧರ್ಮಶ್ರದ್ಧೆ ಮತ್ತು ಉಪಾಸನಾ **ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ** ;
ಸ್ಥಾನಮಾನ ಹಾಗೂ ಅವಕಾಶ **ಸಮಾನತೆ**

ದೊರೆಯುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಮತ್ತು ವ್ಯಕ್ತಿ ಗೌರವವನ್ನು,[2][ರಾಷ್ಟ್ರದ ಏಕತೆಯನ್ನು ಹಾಗೂ ಅಖಂಡತೆಯನ್ನು] ಸುನಿಶ್ಚಿತಗೊಳಿಸಿ ಅವರಲ್ಲಿ **ಭ್ರಾತೃಭಾವನೆಯನ್ನು** ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಲು ಶ್ರದ್ಧಾಪೂರ್ವಕ ಸಂಕಲ್ಪ ಮಾಡಿದವರಾಗಿ;

ನಮ್ಮ ಸಂವಿಧಾನ ಸಭೆಯಲ್ಲಿ 1949ನೆಯ ಇಸವಿ ನವೆಂಬರ್ ತಿಂಗಳ ಇಪ್ಪತ್ತಾರನೆಯ ತಾರೀಕಾದ ಈ ದಿವಸ **ಈ ಮೂಲಕ ಈ ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿ, ಅಧಿನಿಯಮಿಸಿ ಅರ್ಪಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.**

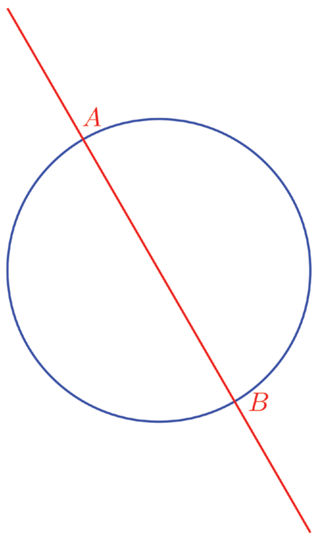
---

1. 1976ನೇ ಇಸವಿಯ ಭಾರತ ಸಂವಿಧಾನ (ನಲವತ್ತೆರಡನೆಯ ತಿದ್ದುಪಡಿ) ಅಧಿನಿಯಮದ 2ನೇ ಪ್ರಕರಣದ ಮೇರೆಗೆ "ಸಂಪೂರ್ಣ ಪ್ರಭುತ್ವ ಸಂಪನ್ನ ಲೋಕತಂತ್ರಾತ್ಮಕ ಗಣರಾಜ್ಯವಾಗಿ" ಎಂಬ ಪದಗಳ ಬದಲಾಗಿ (3-1-1977 ರಿಂದ ಜಾರಿಗೆ ಬರುವಂತೆ) ಪ್ರತ್ಯಾಯೋಜಿಸಲಾಗಿದೆ.
2. ಮೇಲ್ಕಂಡ ಅಧಿನಿಯಮದ 2ನೇ ಪ್ರಕರಣದ ಮೇರೆಗೆ "ರಾಷ್ಟ್ರದ ಏಕತೆಯನ್ನೂ" ಎಂಬ ಪದಗಳ ಬದಲಾಗಿ (3 - 1 - 1977ರಿಂದ ಜಾರಿಗೆ ಬರುವಂತೆ) ಪ್ರತ್ಯಾಯೋಜಿಸಲಾಗಿದೆ.

8 ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು

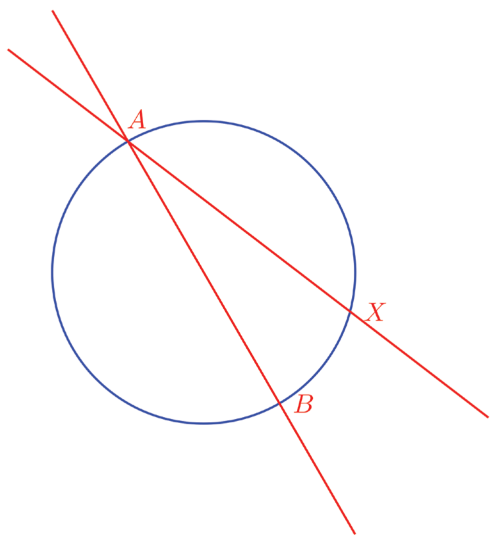
ಗೆರೆಗಳೂ ವೃತ್ತಗಳೂ

ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

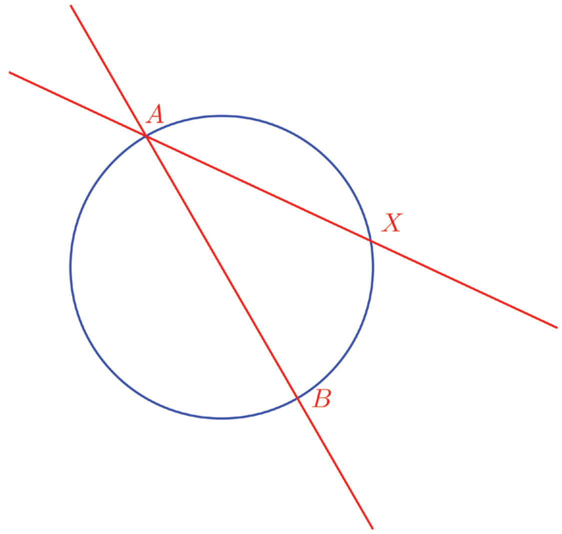


ವೃತ್ತದ A ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ AB; ಇದನ್ನು ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಮುಂದುವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

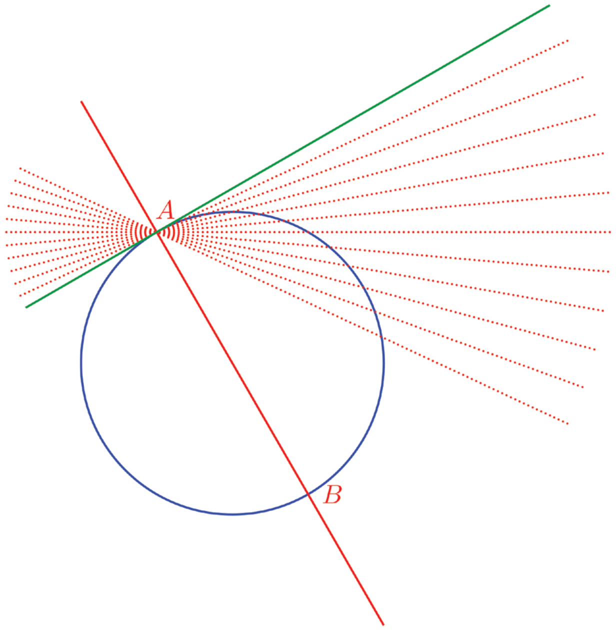
ಈ ಚಿತ್ರವು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಯೇ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು X ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, AX ಎಂಬ ಜ್ಯಾವನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ:



A ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆ, X ನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ A ಯ ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ತಂದರೋ?



ಹೀಗೆ X ನ್ನು ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ A ಯ ಇನ್ನೂ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವಂತೆ ಮಾಡುತ್ತಾ ಬಂದರೋ?



ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ O ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರವಾಗುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ A, X ಎಂಬೀ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Line ಉಪಯೋಗಿಸಿ O, A ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮತ್ತು A, X ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. X ನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು A ಯ ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ತರುವಾಗ AX ಎಂಬ ಗೆರೆಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು? X ಎಂಬ ಬಿಂದು Aಗೆ ತಲುಪುವಾಗಲೋ? O, X ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿರಿ. X ನ ಸ್ಥಾನ A ಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುವಾಗ OAX, AOX ಎಂಬೀ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆ ಉಂಟಾಗುವುದೆಂದು ನೋಡಿರಿ.

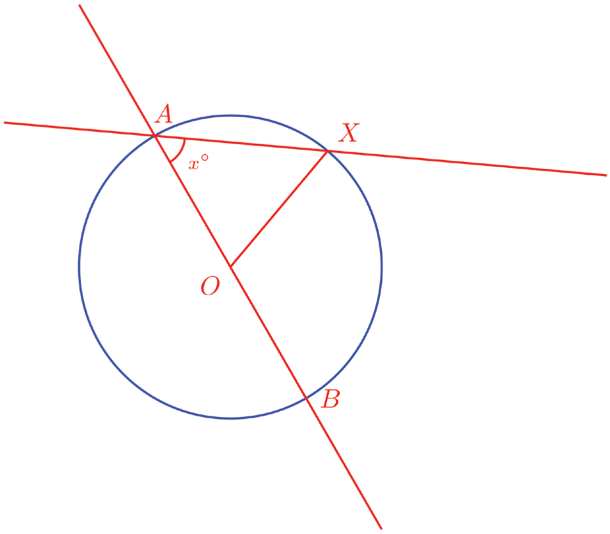
AX ಎಂಬ ಗೆರೆಯು, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಸುರು ಗೆರೆಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವುದಲ್ಲವೇ?

ಈ ಹಸುರು ಗೆರೆಯ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

ಅದು ವೃತ್ತವನ್ನು A ಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು. ಅಲ್ಲವೇ?

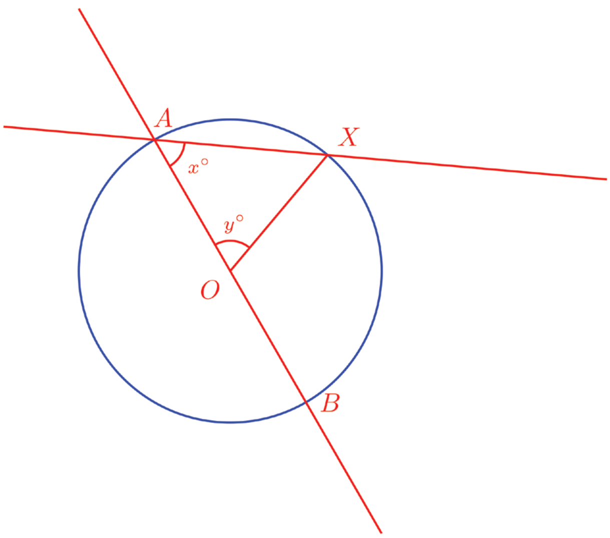
ಈ ಗೆರೆಯನ್ನು ವೃತ್ತದ A ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರುವ **ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ (tangent)** ಎಂದು ಹೇಳುವುದು. ಚಿತ್ರವನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ನೋಡಿರಿ; ವ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೊಳಗೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧ ಕಾಣುವುದೇ?

ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು, ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರುವುದಿಲ್ಲವೇ? ಇದನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು, X ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ A ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವಾಗ, ಈ ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನದ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೋಡುವ:



X ಎಂಬ ಬಿಂದುವು A ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುವಾಗ, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $x°$ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿರುವ ಕೋನವು ದೊಡ್ಡದಾಗುವುದು. ಎಷ್ಟರವರೆಗೆ ದೊಡ್ಡದಾಗುವುದು?

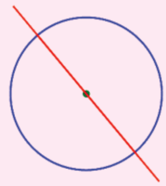
ಅದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು, AX ಎಂಬ ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವನ್ನು $y°$ ಎಂದು ತೆಗೆಯೋಣ.



X ಎಂಬ ಬಿಂದು A ಯ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತಿರುವಂತೆಯೇ, AX ಎಂಬ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವೂ ಅದರ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವೂ ಸಣ್ಣದಾಗುವುದು; ಅಂದರೆ y ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು.

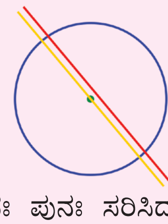
ಚಲಿಸುವ ಗೆರೆಗಳು

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

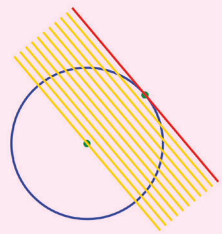


ಒಂದು ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯಿದೆ.

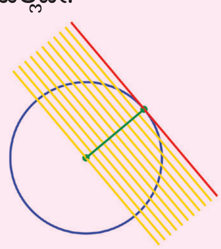
ಗೆರೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಸರಿಸಿದರೆ?



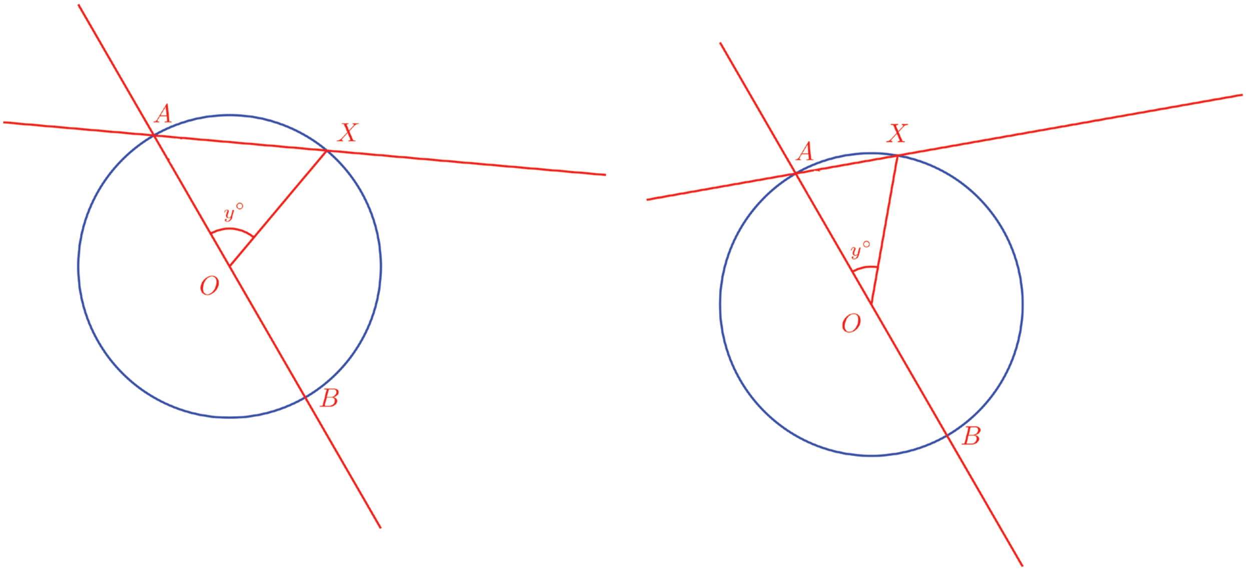
ಗೆರೆಯನ್ನು ಪುನಃ ಪುನಃ ಸರಿಸಿದಾಗ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಮಾತ್ರ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಗೆರೆಗೆ ತಲಪುವುದಲ್ಲವೇ?



ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಕೊನೆಗೆ ಸಿಕ್ಕಿದ ಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯೂ ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.



ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ತ್ರಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದು (Point on Object) ವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅದರ ಮೂಲಕ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ತಲಪುವಾಗ ಗೆರೆಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು?

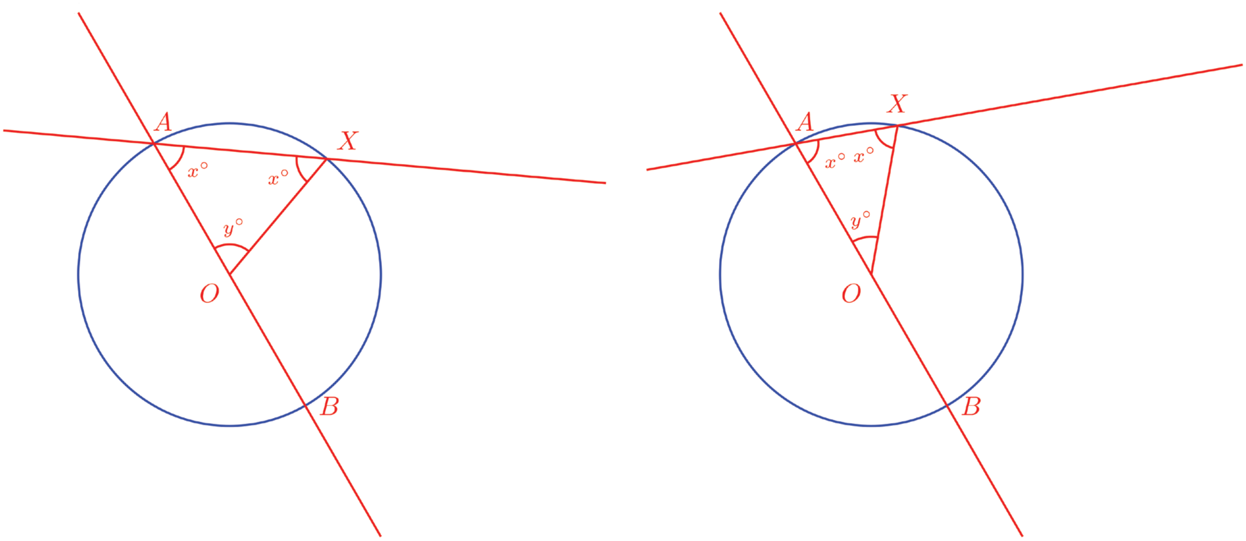


ನಮಗೆ ತಿಳಿಯಬೇಕಾದುದು x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಏನಾಗುವುದು ಎಂದಲ್ಲವೇ;

x ಮತ್ತು y ಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?

OAX ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ OA, OX ಎಂಬೀ ಭುಜಗಳು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿವೆ; ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಉದ್ದ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಆಗ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಇವುಗಳಿಗೆ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಬೇಕಲ್ಲವೇ (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ).

ಆಗ OAX ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಮೂರನೆಯ ಕೋನ $x°$ ಆಗಿದೆ.



ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$2x + y = 180$$

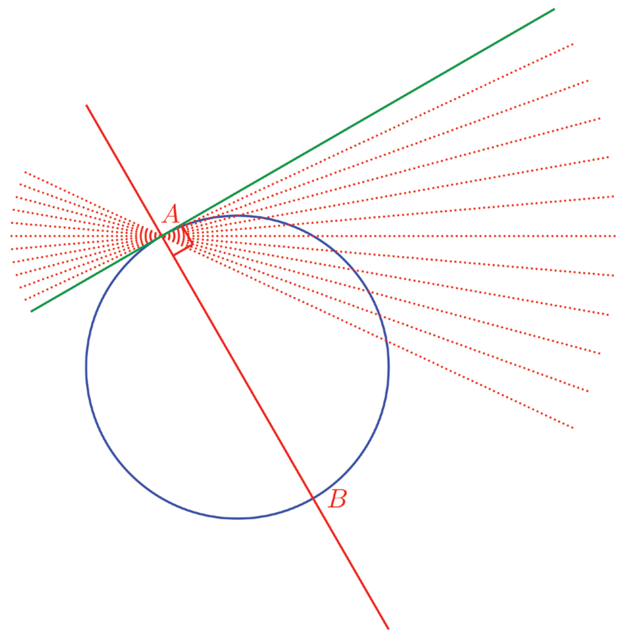
ಅಂದರೆ,

$$x = \frac{1}{2}(180 - y) = 90 - \frac{1}{2}y$$

y ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುವಾಗ, x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು 90 ಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು ಎಂದು ಈ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

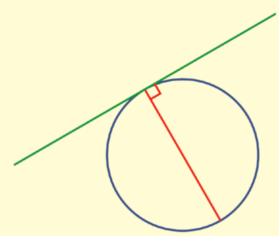
ಅಂದರೆ, X ಎಂಬ ಬಿಂದುವು A ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತಿದ್ದಂತೆಯೇ, AX ಎಂಬ ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನವು $90°$ ಯ ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು;

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗುವಾಗ, $90°$ ಯೇ ಆಗುವುದು;



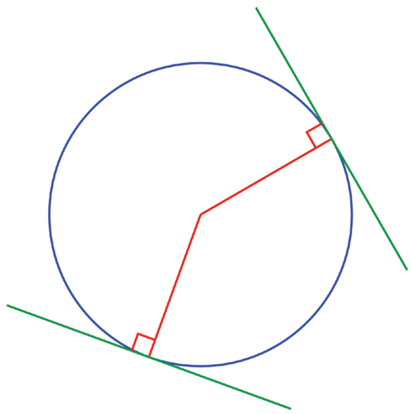
ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು:

ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ,
ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು.

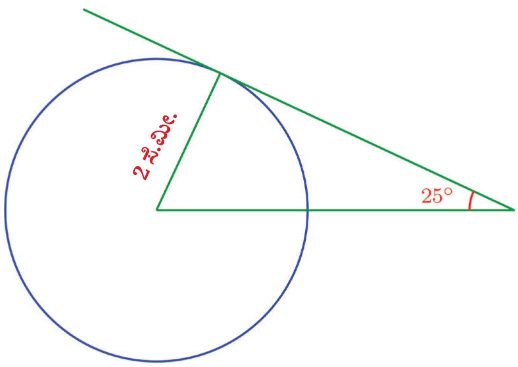


ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ.

ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಎಳೆಯದೇ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಎಳೆದರೂ ಸಾಕು.



ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

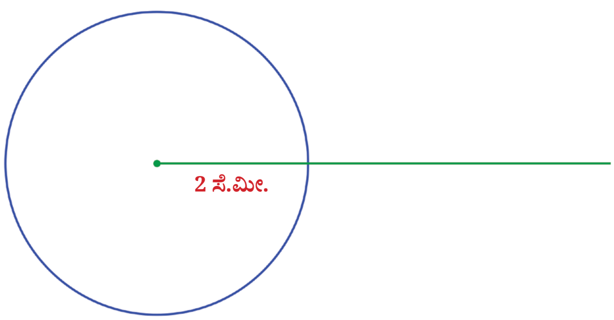


ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸಲು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ Tangents ನ್ನು ತೆಗೆದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಸಾಕು. ಬಿಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಾದರೆ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಲಭಿಸುವುದಲ್ಲವೇ. ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿದ್ದರೋ?

ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಅದರ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಎಳೆದು ಅದಕ್ಕೆ Trace On ನೀಡಿರಿ. ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದ ಬಿಂದುವಿಗೆ Animation ಕೊಟ್ಟು ನೋಡಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ಗೆರೆಯು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಟ್‌ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದೇ?

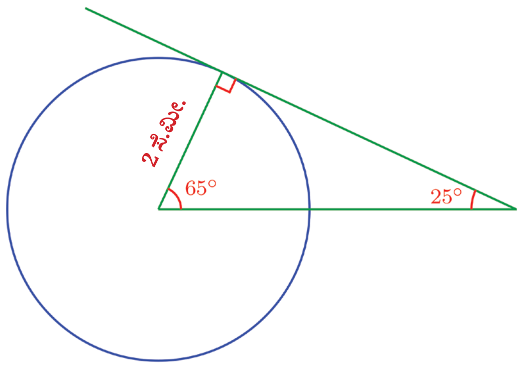
ಮೊದಲು 2 ಸೆ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ನಂತರ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



ಈಗ ವೃತ್ತದ ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು? ಅದು ಮೊದಲ ಗೆರೆಯೊಂದಿಗೆ 25° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಬೇಕಲ್ಲವೇ.

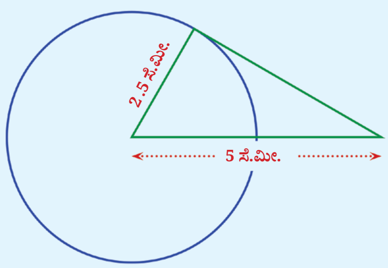
ಮೊದಲಿನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ನೋಡಿರಿ. ಅದರಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೇಲಿನ ಕೋನ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಹಾಗೂ ಇನ್ನೊಂದು ಕೋನವು 25° ಆಗಿದೆ.

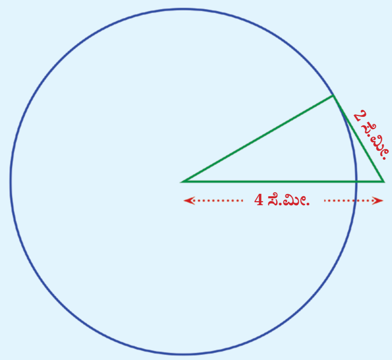
ಆಗ ಮೂರನೇ ಕೋನ ಎಷ್ಟು ಡಿಗ್ರಿ ಆಗುವುದು?



ಇನ್ನು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ.

(1) ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ, ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಗೆರೆ, ಇವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.





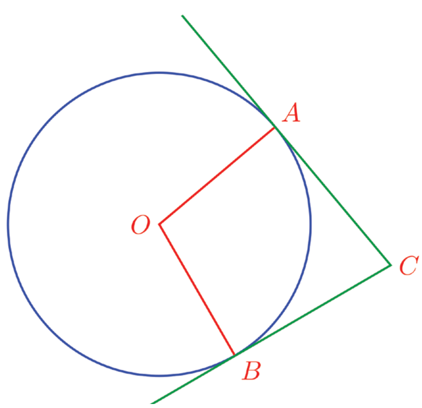
ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಟ್‌ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ.

(2) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಎರಡು ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(3) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರಿ ಯಾವ ವಿಧದ ಚತುರ್ಭುಜ ಉಂಟಾಗುವುದು?

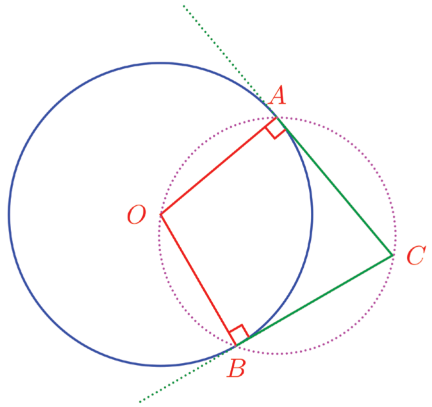
ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೂ ಕೋನಗಳೂ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

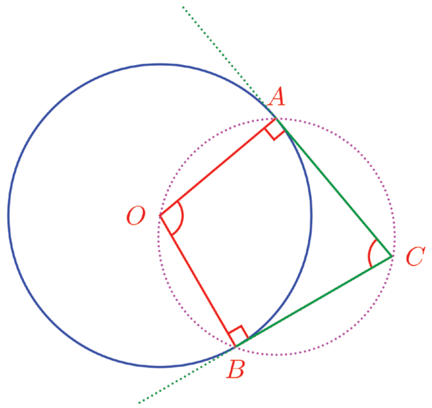


O ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ A, B ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು C ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವುದು.

$OACB$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ A, B ಎಂಬೀ ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಲಂಬಕೋನಗಳಾಗಿವೆ; ಆದುದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 180°. ಆಗ ಈ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿದೆ.



ಈ ರೀತಿಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಉಳಿದ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವೂ 180° ಆಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ.



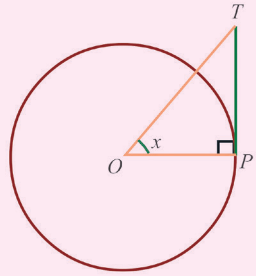
ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನದ ಮತ್ತು ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನದ ಮೊತ್ತವು 180° ಆಗಿದೆ.

ಹೆಸರಿನ ವಿವರ

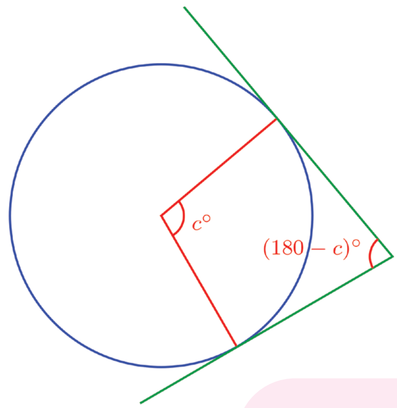
ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು ಎಂಬರ್ಥವಿರುವ tangere ಎಂಬ ಲಾಟಿನ್ ಪದದಿಂದಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ಇಂಗ್ಲೀಷಿನಲ್ಲಿ tangent ಎಂಬ ಹೆಸರು ಬಂದಿದೆ. ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ tan ಎಂಬ ಅಳತೆಯ ಪೂರ್ಣ ಹೆಸರು tangent ಎಂದಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಇದಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯೊಂದಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು?

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

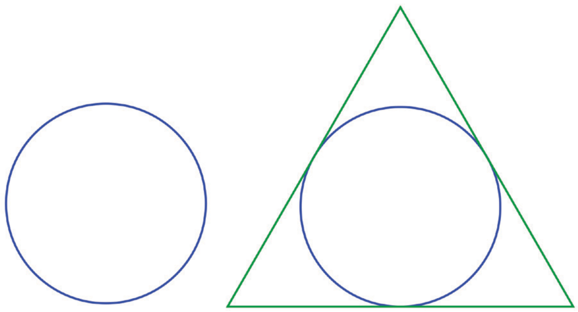


ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು 1 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, PT ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದ $\tan x$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

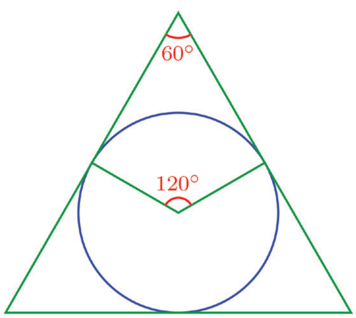
O ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ A, B ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು C ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಚತುರ್ಭುಜ OACB ಯನ್ನು ಎಳೆದು ನೋಡಿರಿ. ಇದು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿದೆಯೇ? Circle through Three Points ಉಪಯೋಗಿಸಿ O, A, B ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. A, B ಎಂಬಿವುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಇವುಗಳು ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಾಗುವಾಗ C ಗೆ ಏನಾಗುವುದು? ದೂರಕ್ಕೆ ಹೋಗುವಾಗಲೋ? ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳಾಗುವಾಗ ಏನಾಗುವುದು?



ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡೋಣ; ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಆವರಿಸಿರುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.



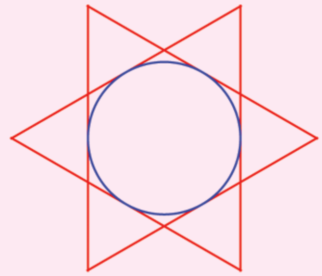
ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ ಅಲ್ಲವೇ. ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾದುದರಿಂದ, ಇವುಗಳು ಸೇರುವಲ್ಲಿನ ಕೋನ 60° ಆಗಿದೆ. ಇವುಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನವೊ?



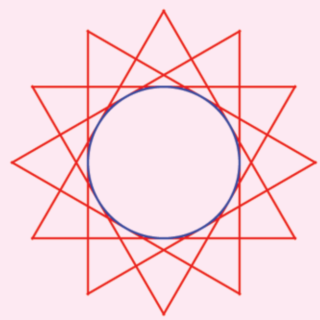
ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ 120° ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಗೆರೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತ

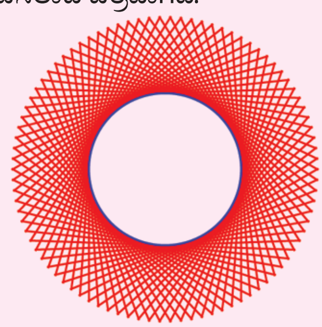
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಆರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು, ಒಂದು ನಕ್ಷತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

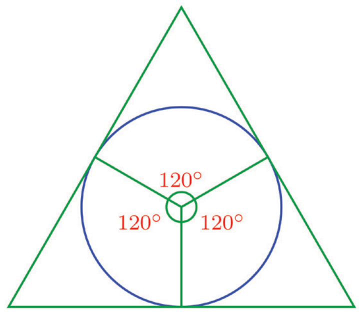


ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 12 ಮಾಡಿದರೋ?

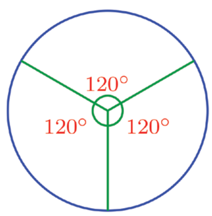


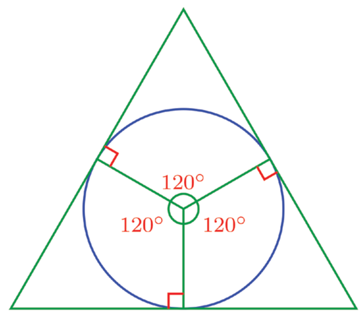
ಇದು ಕಂಪ್ಯೂಟರನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, 90 ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ರಚಿಸಲಾದ ಚಿತ್ರವಾಗಿದೆ.





ಹಾಗಾದರೆ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 120° ಎಡೆಬಿಟ್ಟು ಮೂರು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಎಳೆದು, ಅವುಗಳ ತುದಿಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಯಿತು; ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ತ್ರಿಕೋನವೂ ಸಿಗುವುದು.

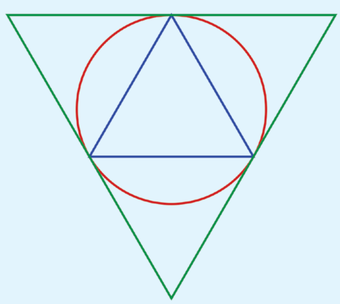




3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

(1) ತ್ರಿಜ್ಯ 2.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ ಈ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಹಾಗೂ ಕೋನಗಳು 40°, 60°, 80° ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

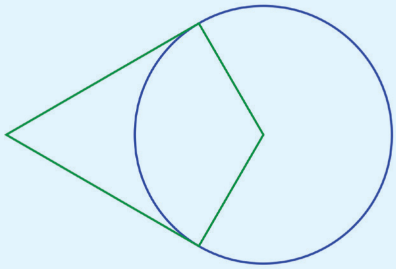
(2) ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಚಿಕ್ಕ (ನೀಲ) ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ. ಅದರ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ದೊಡ್ಡ (ಹಸುರು) ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಾಗಿವೆ:



(i) ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವೆಂದೂ ಅದರ ಭುಜಗಳು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(ii) ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವಂತೆ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

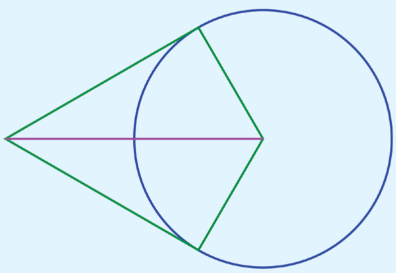
(3) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನೂ, ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನೂ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



(i) ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

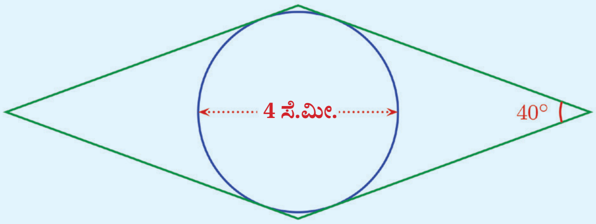
(ii) ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Angle with Given Size ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ 120° ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಾಗ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವು ಲಭಿಸುವುದು. ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲೂ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ 120° ಎಂದು ಕೊಟ್ಟರೆ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು ಸಹ ಸಿಗುವುದು. ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. Segment ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಾಣದಂತೆ ಮಾಡಬೇಕು. ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ Trace on ನೀಡಿದ ಬಳಿಕ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ತೆಗೆದ ಬಿಂದುವಿಗೆ Animation ನೀಡಿ ನೋಡಿರಿ.



(iii) ಈ ಗೆರೆಯು, ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಜ್ಯಾದ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

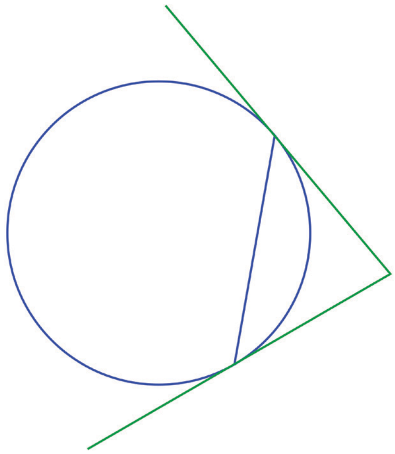
(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ.



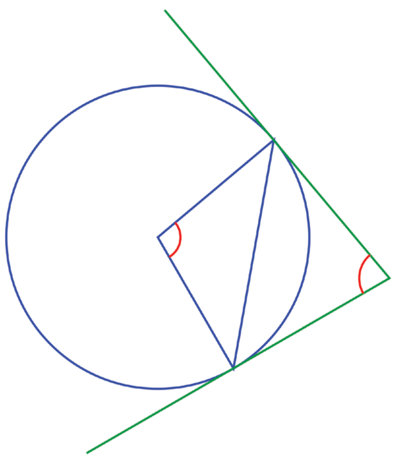
ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಟ್‌ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ.

ಜ್ಯಾವೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯೂ

ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಎರಡು ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

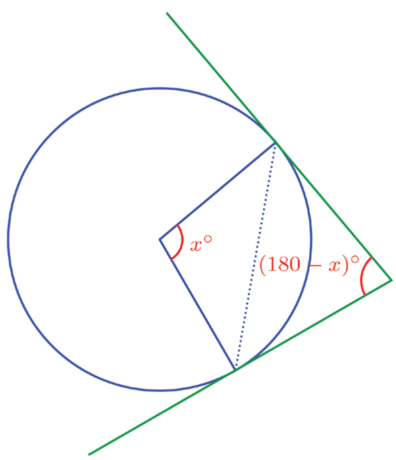


ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?



A ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರಲ್ಲಿ B, C ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದು D ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. AB, AC ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು BC ಎಂಬ ಜ್ಯಾವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. BAC, BDC ಎಂಬೀ ಕೋನಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು? B, C ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

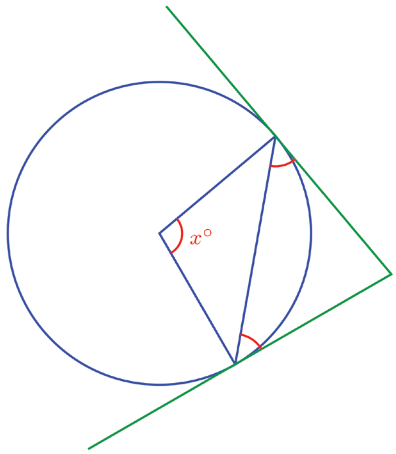
ಈ ಮೊದಲೇ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ, ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತವು $180°$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?



ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲು ನೋಡಿದ ತತ್ವವನ್ನು ಹೀಗೂ ಹೇಳಬಹುದು:

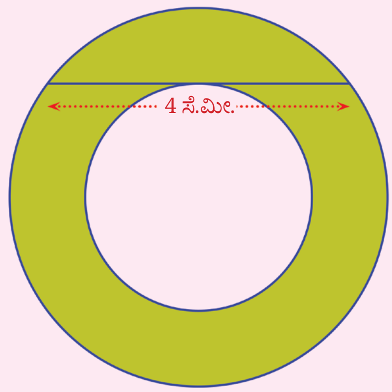
ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನದ ಅಳತೆಯು, $180°$ ಯಿಂದ ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಳೆದುದಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಜ್ಯಾದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಜ್ಯಾದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳಿಗೆ, ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದೊಂದಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು ಎಂದು ನೋಡುವ:

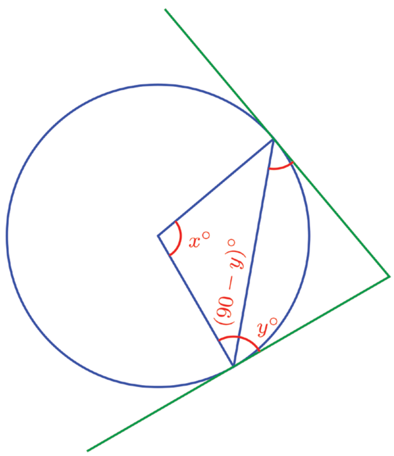


ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸಮಸ್ಯೆ

ಕೆಳಗಿರುವ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಹಸುರು ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?



ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಜ್ಯಾದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು $y°$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಈ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ತ್ರಿಜ್ಯ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ $90°$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು:



ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾವನ್ನೂ ಅದರ ಎರಡೂ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನೂ ಎಳೆಯಿರಿ. ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವನ್ನೂ, ಜ್ಯಾ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೊಗಿನ ಕೋನವನ್ನೂ ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಕೋನಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು? ಜ್ಯಾದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಹಲವು ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ವೃತ್ತದೊಳಗಿನ (ನೀಲ) ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಭುಜಗಳು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾದುದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ; ಆಗ ತ್ರಿಕೋನದ ಆ ಭುಜಗಳ ಎದುರಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.

ಅಂದರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರನೆಯ ಕೋನವು $(90 - y)°$ ಎಂದಾಗುವುದು. ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳ ಮೊತ್ತವು $180°$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$x + (90 - y) + (90 - y) = 180$$

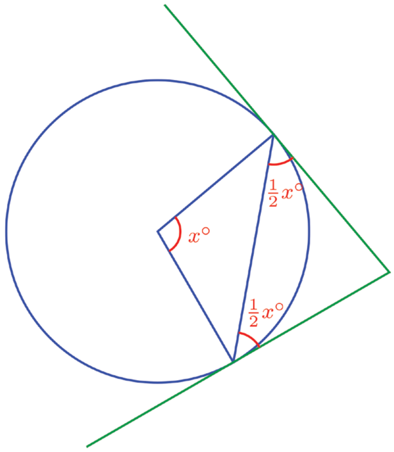
ಇದರಿಂದ

$$x - 2y = 0$$

ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ,

$$y = \frac{1}{2}x$$

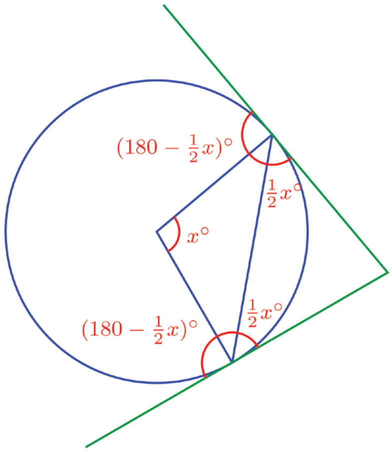
ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಮೇಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಜ್ಯಾದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವೂ $\frac{1}{2}x^\circ$ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:



ಅಂದರೆ

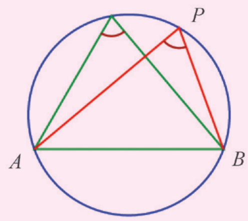
> ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಜ್ಯಾದೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಎರಡೂ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು, ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯಕೋನದ ಅಳತೆಯ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದು.

ಜ್ಯಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳೋ?

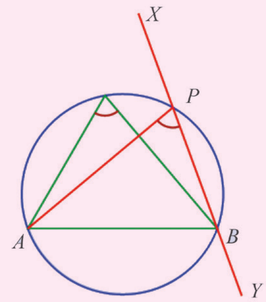


ಬದಲಾಗದ ಕೋನ

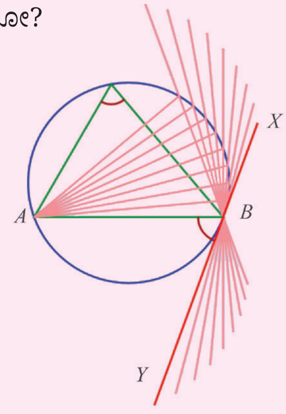
ಒಂದೇ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನ ಆಗಿವೆಯಲ್ಲವೇ?



PB ಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಮುಂದುವರಿಸಿರಿ:

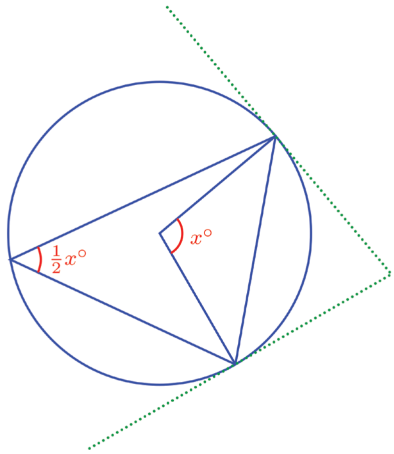


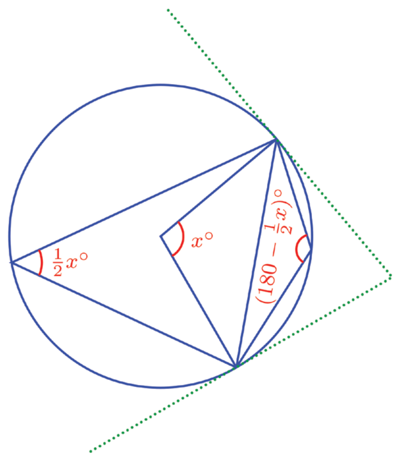
ಇನ್ನು P ಯನ್ನು ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಮುಂದುವರಿಸಿ, B ಗೆ ತಲುಪಿಸಿದರೋ?



XY ಎಂಬ ಗೆರೆಯು B ಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗುವುದು; ಕೋನದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಇಲ್ಲಿ **ವೃತ್ತಗಳೂ ಕೋನಗಳೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದ ಒಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ. ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $x°$ ಆಗಿರುವ ಚಾಪದ ಅಗ್ರ ಬಿಂದುಗಳು ಮರುಚಾಪದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ $\frac{1}{2}x°$ ಮತ್ತು ಅದೇ ಚಾಪದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ $\left(180-\frac{1}{2}x\right)°$ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?



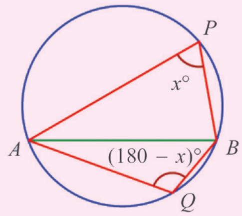


ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಜ್ಯಾದೊಂದಿಗೆ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು $\frac{1}{2}x°$ ಆಗಿದೆ. ಜ್ಯಾದ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತಖಂಡದ ಯಾವುದೇ ಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $\frac{1}{2}x°$ ಯೇ ಆಗಿದೆ.

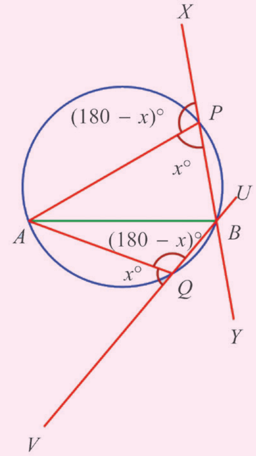
ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಜ್ಯಾದ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ $\left(180-\frac{1}{2}x\right)°$ ಕೋನಗಳೋ?

ಬದಲಾಗುವ ಕೋನಗಳು

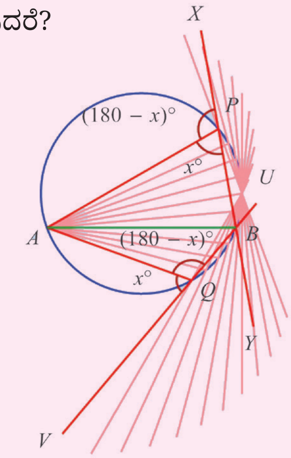
ವೃತ್ತದ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ 180° ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.



ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದಂತೆ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ ಎಳೆಯಿರಿ.



P ಯನ್ನು ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ Q ವಿನ ಕಡೆಗೆ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ?

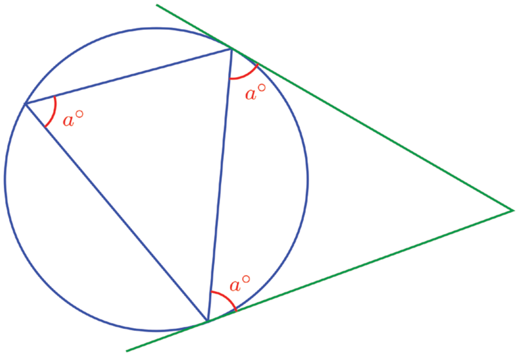


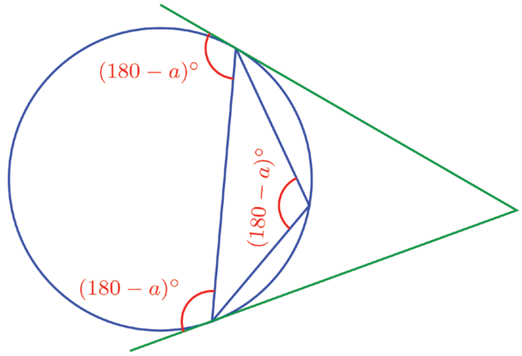
AP ಯ ಕೆಳಗೆ $x°$ ಯೂ ಮೇಲೆ $(180-x)°$ ಯೂ ಆಗಿದೆ. ಚಲನೆಯುದ್ದಕ್ಕೂ ಅಳತೆ ಇದೇ ರೀತಿ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

ಆಗ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾವು ಅದರ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳ ಕುರಿತು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಅಗ್ರಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆಯುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಜ್ಯಾದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡೂ ಕೋನಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗುವುದು.

A ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರಲ್ಲಿ B, C ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. BC ಎಂಬ ಜ್ಯಾವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ಜ್ಯಾವು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಜ್ಯಾದ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು? ಜ್ಯಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತಖಂಡದಲ್ಲಿ D ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. BD, CD ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು D ಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಜ್ಯಾದ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಜ್ಯಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕೋನ (ಕೋನ D) ಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?

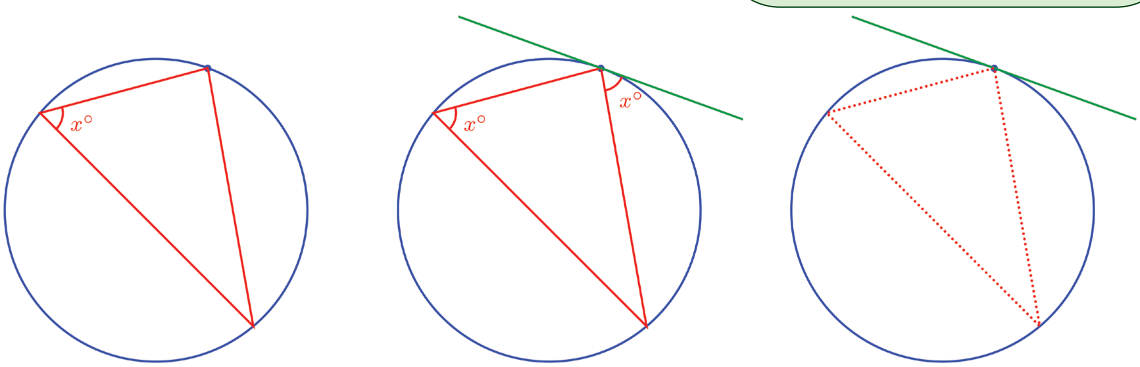




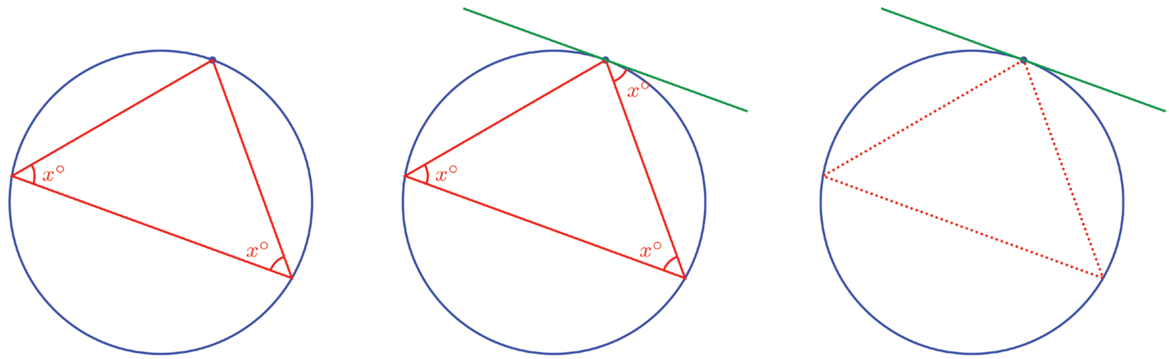
ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು, ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದಲ್ಲವೇ? ಕೇಂದ್ರವು ತಿಳಿಯದಿದ್ದರೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲು, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ಜ್ಯಾದ ಇನ್ನೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕು.

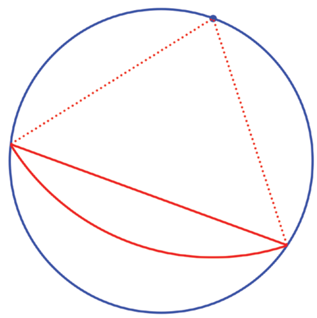
ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. AB ಎಂಬ ಜ್ಯಾವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತದ A, B ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಗಳೊಳಗಿನ ಕೋನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ C ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, AC, BC ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಎಳೆದು $\angle ACB$ ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಕೋನಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು? A, B, C ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.



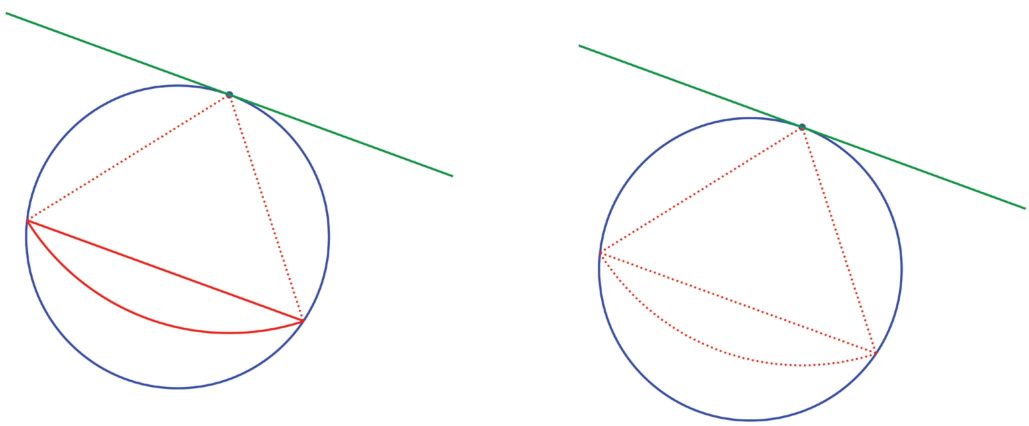
ಇದರಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವವಾಗಿ ರಚಿಸಿದರೆ, ಅದರ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜಕ್ಕೆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ ಸಾಕಾಗುವುದು.



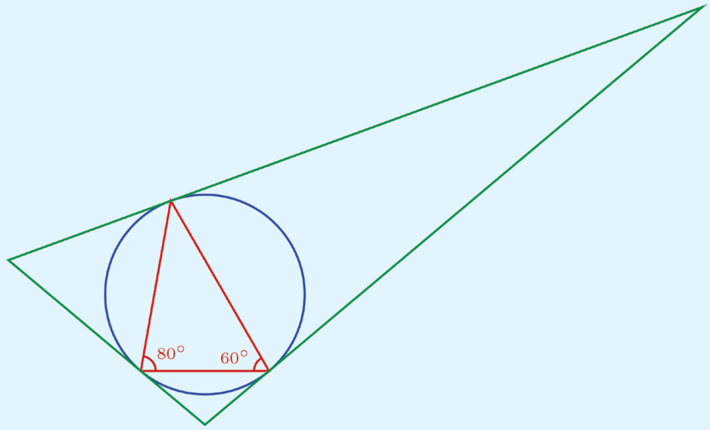
ಆಗ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲು, ಮೊದಲು ಈ ಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಚಾಪ ರಚಿಸಿ, ಅದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಬೇಕು:



ಇನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕಾದ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ, ಈ ಗೆರೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆ ಎಳೆದರೆ ಸಾಕು.

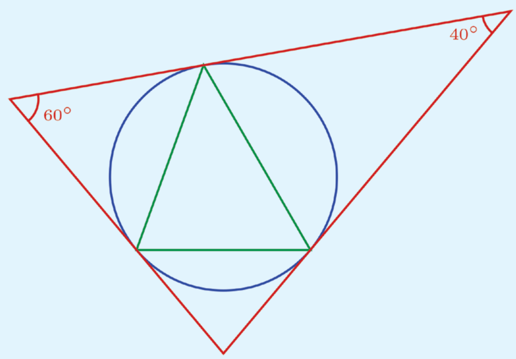


(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಚಿಕ್ಕ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಾಗಿವೆ.



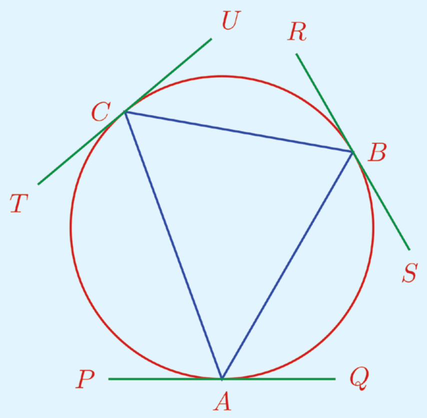
ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಗಿವೆ. ಇವುಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳಾಗಿವೆ.



ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

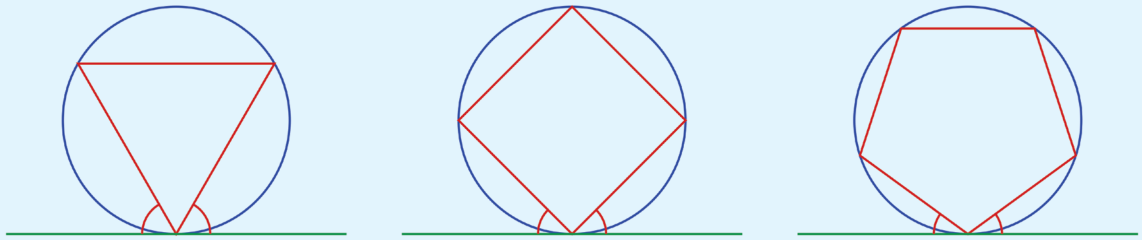
(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, *ABC* ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು *PQ, RS, TU* ಎಂಬೀ ಗೆರೆಗಳಾಗಿವೆ:



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನವಾದವುಗಳನ್ನು ಆಯ್ದು ಬರೆಯಿರಿ.

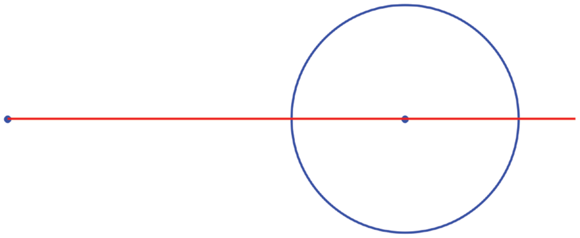
(4) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸಮಬಹುಭುಜಗಳ ಒಂದು ಶಿರದ ಮೂಲಕ ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಸಮಬಹುಭುಜದ ಭುಜಗಳು ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



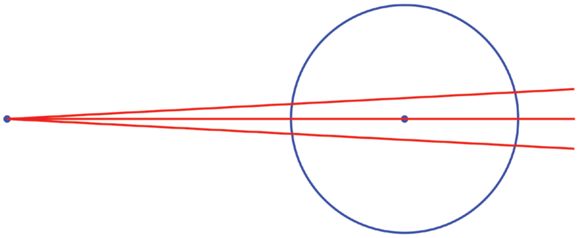
ಹೊರಗಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

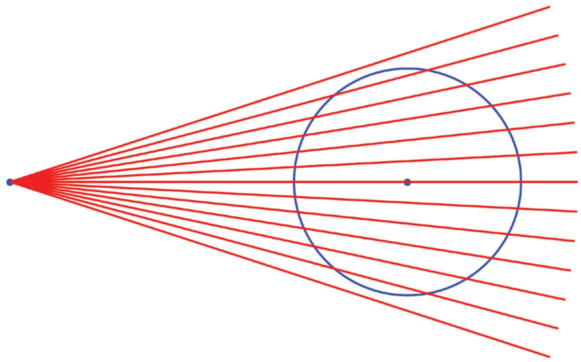


ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಎಳೆದ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳು, ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ಅಗ್ರ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ.

ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿನ ಇದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪ ಮೇಲೆಯೂ ಕೆಳಗೂ ಒಂದೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿ ಎಳೆದರೋ?

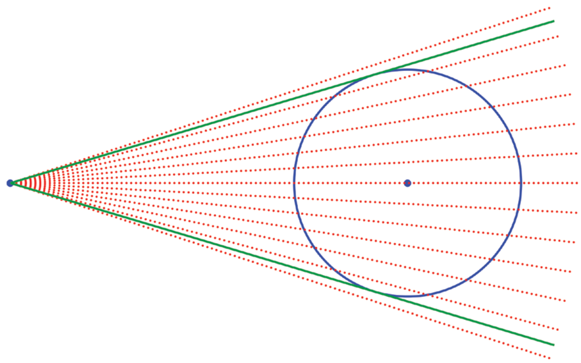


ಗೆರೆಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುಗಳು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಹತ್ತಿರವಾದುವು. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರಚಿಸುತ್ತಾ ಬಂದರೋ?



ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಗೆರೆಗಳಿಗೆ, ಒಂದು ಹಂತದ ನಂತರ ವೃತ್ತದೊಂದಿಗೆ ಯಾವ ಸಂಬಂಧವೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

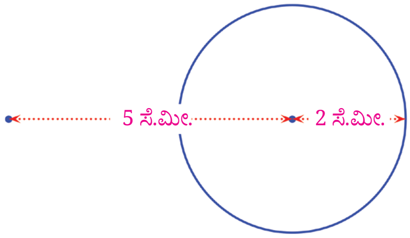
ಆದರೆ ಅದರ ಎಡೆಯಲ್ಲಿ, ಮೇಲೆಯೂ ಕೆಳಗೂ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದಲ್ಲವೆ?



ಇದರಿಂದ ಏನು ತಿಳಿಯುವುದು?

ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

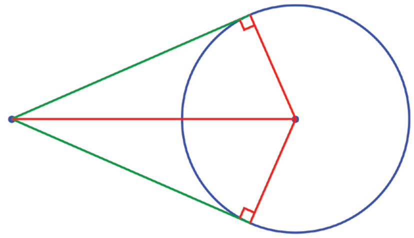
ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದು ಹೇಳಿರುವುದಲ್ಲದೆ, ಈ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದು ತಿಳಿಸಲಿಲ್ಲವಲ್ಲವೆ. ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ತ್ರಿಜ್ಯ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ.

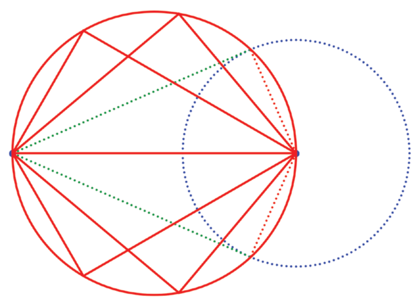
ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ?

ಎಳೆದರೆ ಅದು ಹೇಗಿರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಆಲೋಚಿಸಿದರೆ, ಎಳೆಯಲಿರುವ ವಿಧಾನ ಒಂದು ವೇಳೆ ಮನವರಿಕೆಯಾಗಬಹುದು. ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ರುವುದೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ:



ಹೊರಗಿನಿಂದಿರುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದಲೂ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದಲೂ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳು ಬೇಕಾಗಿರುವುದು.

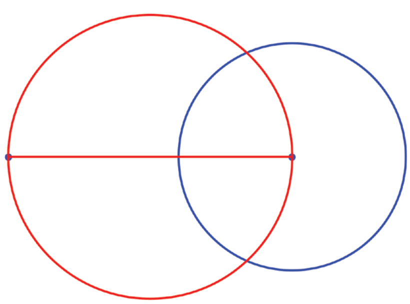
ಇಂತಹ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲು, ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ರಚಿಸಬಹುದಾದ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ.



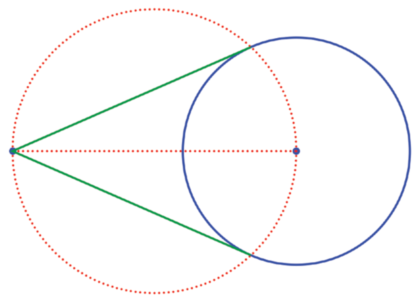
(ಅರ್ಧವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು **ವೃತ್ತಗಳೂ ಕೋನಗಳೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ).

ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಲಂಬ ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯು ಮೊದಲ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವೇ ಆಗಿರಬೇಕು; ಅಂದರೆ, ಗೆರೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಂಗಮಿಸುವುದು ಮೊದಲ ವೃತ್ತದಲ್ಲಾಗಬೇಕು. ಅದಕ್ಕೆ ಹಳೆಯ ವೃತ್ತವೂ ಹೊಸ ವೃತ್ತವೂ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಎಳೆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ?

ಇನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಮೊದಲು, ಹೊರಗಿನ ಬಿಂದುವನ್ನೂ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನೂ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.



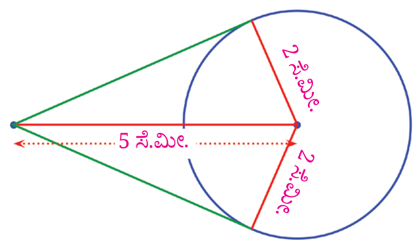
ಈ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಮೊದಲ ವೃತ್ತ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು, ಹೊರಗಿನ ಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಯಿತು.



(1) ತ್ರಿಜ್ಯ 2.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ದೂರವಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(2) ತ್ರಿಜ್ಯ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 7.5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ದೂರವಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈ ಮೊದಲೇ ನೋಡಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಹೊರಗಿನ ಬಿಂದು ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ದೂರವಿರುವುದಲ್ಲವೇ.



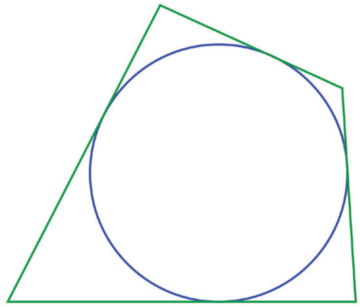
ಆಗ, ಪೈಥಾಗರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು (ಹೊರಗಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು) ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು:

$$\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \text{ ಸೆ.ಮೀ.}$$

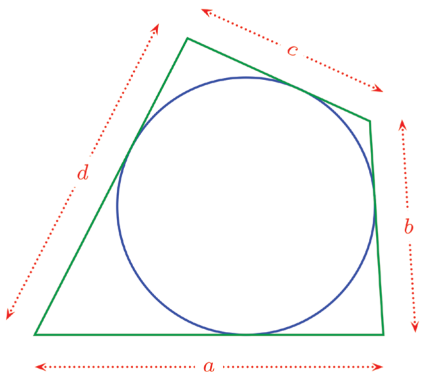
ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನವರೆಗೆ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಈ ಮೊದಲೇ ನೋಡಿರುವೆವು (**ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೂ ಕೋನಗಳೂ** ಎಂಬ ಭಾಗದ ಮೂರನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆ). ಅದನ್ನು ಇನ್ನು ಹೀಗೆಯೂ ಹೇಳಬಹುದು:

ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕಿರುವ ಎರಡೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವವುಗಳಾಗಿವೆ.

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಭುಜಗಳಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

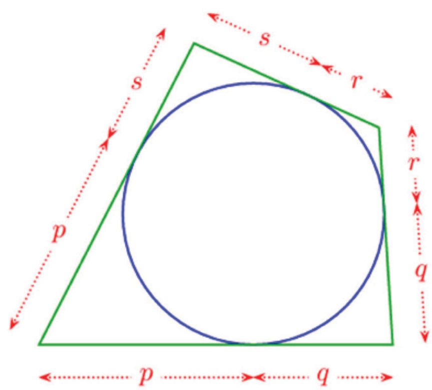


ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು a, b, c, d ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವ:



ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ನಾಲ್ಕೂ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಅವುಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಾಣದಾಗಿಸಬಹುದು. ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತದ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದಿಂದಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು p, q, r, s ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಈ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು:



ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$a = p + q$$
$$b = q + r$$
$$c = r + s$$
$$d = s + p$$

ಇದರಲ್ಲಿ a, b, c, d ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಾಣಬಹುದೇ?

$$a + c = p + q + r + s$$

$$b + d = q + r + s + p$$

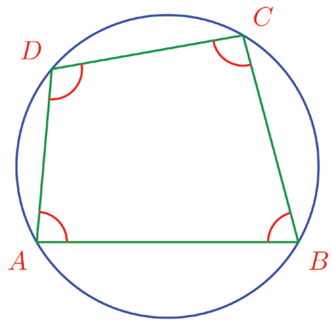
ಅಂದರೆ,

$$a + c = b + d$$

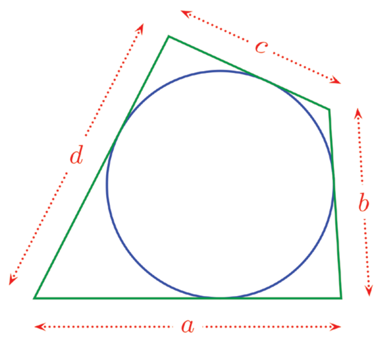
ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳಾಗಿ ಹೇಳಿದರೋ?

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕವಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು.

ವೃತ್ತದ ನಾಲ್ಕು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಎಳೆಯುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು $180°$ ಆಗಿರುವುದೆಂದು **ವೃತ್ತಗಳೂ ಕೋನಗಳೂ** ಎಂಬ ಪಾಠಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ, ವಿರುದ್ಧ ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

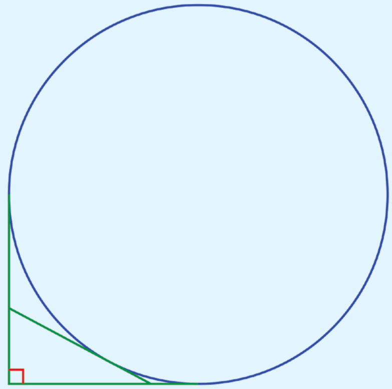


$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$



$a + c = b + d$

(1) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಗಳಾಗಿರುವ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೂ ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯೂ ಸೇರಿ ಉಂಟಾಗುವ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

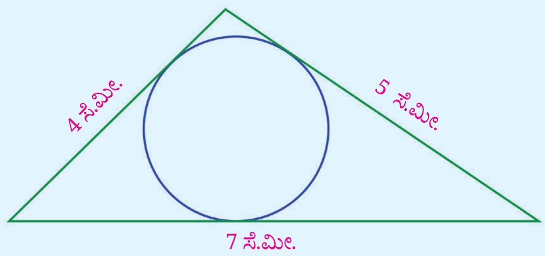


(i) ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಗಳಾಗಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(ii) ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಗಳಾಗಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಉದ್ದವು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

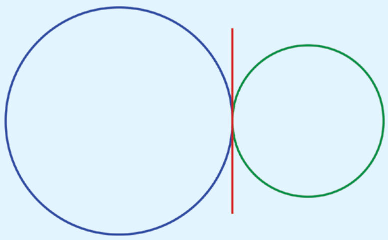
(iii) ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(2) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೂರು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಸೇರಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

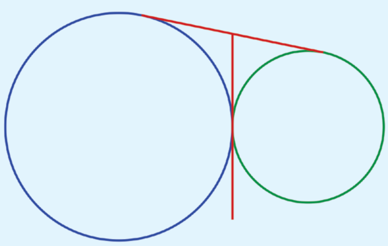


ತ್ರಿಕೋನದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಿರದಿಂದಲೂ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

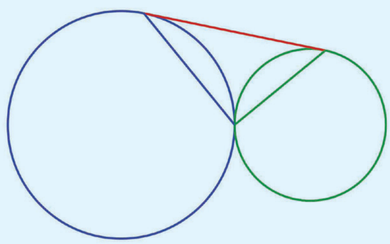
(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಇರುವ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.



(i) ಈ ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು, ಮೊದಲನೇ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



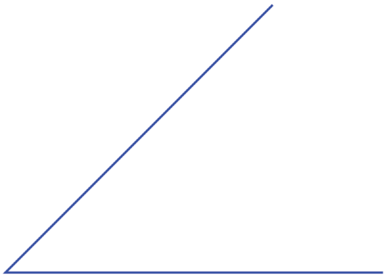
(ii) ಈ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳೂ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ತ್ರಿಕೋನವು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

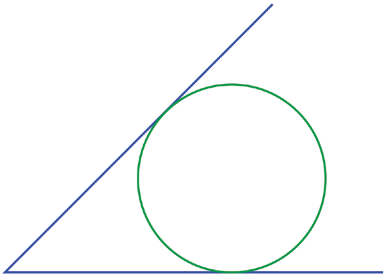


ಗೆರೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತ

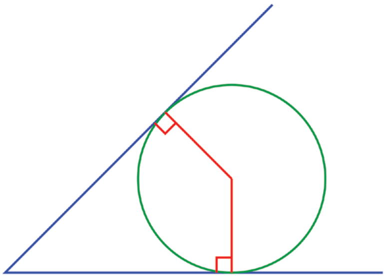
ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಹೊರಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದೂ, ಅವುಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ ನೋಡಿದೆವು.

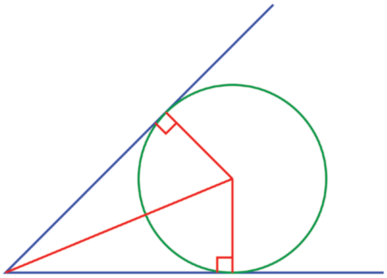
ಆಗ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ: ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಗಮಿಸುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೇ? ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



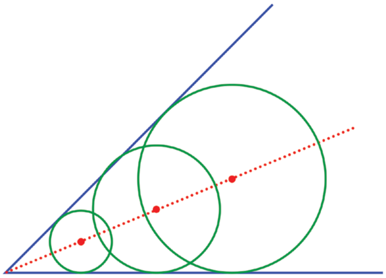


ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಈ ಗೆರೆಗಳಿಗಿರುವ ಲಂಬಗಳು, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿವೆ ಅಲ್ಲವೇ; ಆದುದರಿಂದ ಈ ಲಂಬಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು. ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಈ ಗೆರೆಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ಲಂಬ ದೂರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವಿರುವುದು. ಆಗ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವು ಈ ಗೆರೆಗಳು ಸೇರಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಾಗಿರಬೇಕಲ್ಲವೇ. (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಮಭಾಜಕಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕ** ಎಂಬ ಭಾಗ).



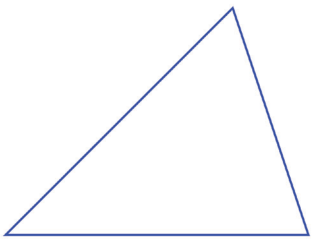


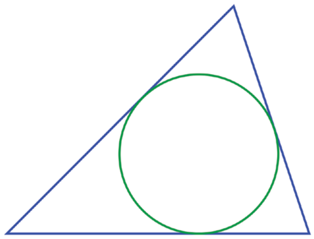
ಈ ಕೋನ ಸಮಭಾಜಕದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ ಈ ಎರಡೂ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.



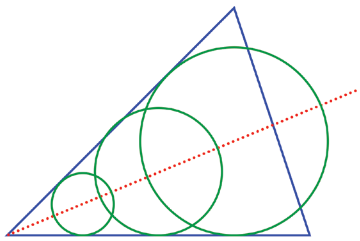
ಹಾಗಾದರೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರೂ ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ.

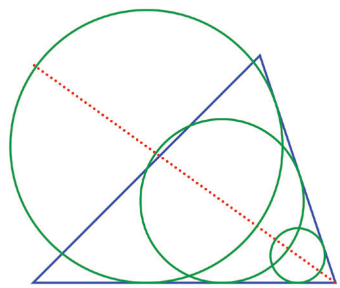
> ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನೂ ಅದರ ಸಮಭಾಜಕವನ್ನೂ ಎಳೆಯಿರಿ. ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕೋನದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಭುಜಕ್ಕೆ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆದು, ಲಂಬವೂ ಭುಜವೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಸಮಭಾಜಕದ ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವಂತೆ ಭುಜದ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ವೃತ್ತವು ಕೋನದ ಎರಡನೇ ಭುಜವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದಿಲ್ಲವೇ? ಸಮಭಾಜಕದ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.





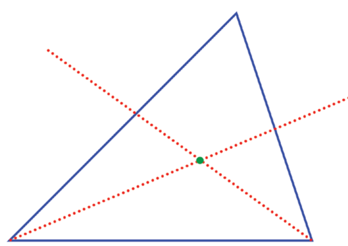
ಕೆಳಗಿನ ಹಾಗೂ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ ಆ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.



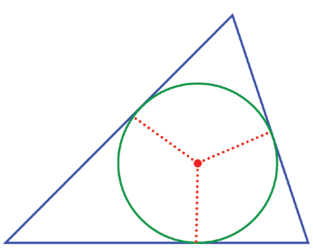


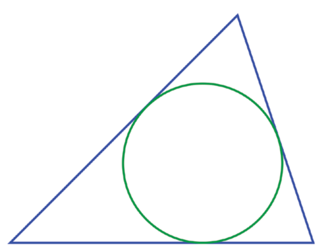
ಕೆಳಗಿನ ಹಾಗೂ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜಗಳು ಸೇರುವ ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ ಆ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನೂ ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಹಾಗಾದರೆ, ಈ ಎರಡು ಸಮಭಾಜಕಗಳಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೋ? ಅಂದರೆ, ಅವುಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದು.



ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮೂರು ಭುಜಗಳಿಗಿರುವ ಲಂಬಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದಲ್ಲವೇ? ಆಗ ಈ ಉದ್ದವನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ಈ ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಮೂರೂ ಭುಜಗಳು ಈ ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳಾಗುವುದು:





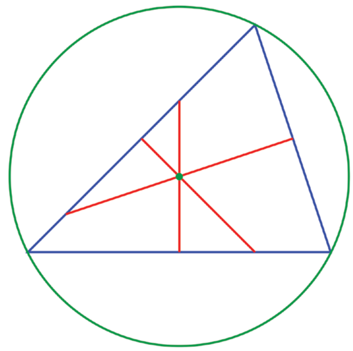
ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದೊಳಗೆ ಅದರ ಮೂರೂ ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದ **ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತ** (incircle) ಎನ್ನುವರು.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದರ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

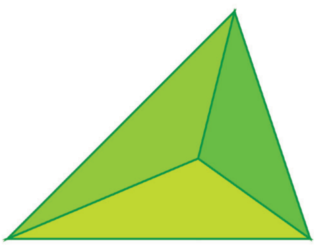
ಇಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಚಾರವನ್ನು ಕೂಡಾ ನೋಡಬಹುದು.
ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತವು ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳನ್ನೂ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದರಿಂದ, ಅದರ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಮೂರೂ ಭುಜಗಳಿಗಿರುವ ಲಂಬಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುವು. ಅಂದರೆ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವು, ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರೂ ಕೋನಗಳ ಸಮಭಾಜಕದ ಬಿಂದುವಾಗಿರುವುದು.ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರು ಕೋನಗಳ ಸಮಭಾಜಕಗಳು, ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದು. ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು **ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ,** (incentre) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಕೋನಗಳ ಸಮಭಾಜಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದು.

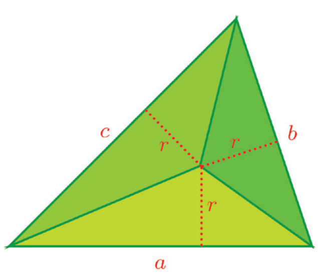
ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಲಂಬ ಸಮಭಾಜಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವುದೆಂದೂ ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ತ್ರಿಕೋನದ ಮೂರೂ ಶಿರಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದೂ ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ. (**ವೃತ್ತಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಪರಿವೃತ್ತ** ಎಂಬ ಭಾಗ).



ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗೆ ಸಂಬಂಧವಿದೆ. ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳನ್ನು ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ, ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಮೂರು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ.



ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಒಂದು ಭುಜವು ಮೊದಲನೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜವೇ ಆಗಿರುವುದು; ಅದರಿಂದ ಇರುವ ಎತ್ತರವು ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವೇ ಆಗಿದೆ. ಆಗ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು a, b, c ಎಂದೂ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು r ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ,



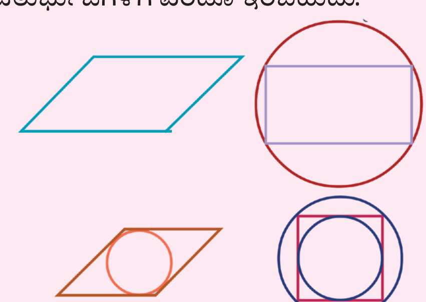
ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

$$\frac{1}{2}ar,\ \frac{1}{2}br,\ \frac{1}{2}cr$$

ಎಂದಾಗುವುದು.

ಪರಿವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತ

ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನೂ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತವನ್ನೂ ಎಳೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಚತುರ್ಭುಜಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಕೆಲವೊಂದಕ್ಕೆ ಎರಡೂ ಇರಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ, ಕೆಲವೊಂದಕ್ಕೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಮಾತ್ರ. ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಚತುರ್ಭುಜಗಳಿಗೆ ಎರಡೂ ಇರಬಹುದು.



ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಟ್ಟು ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ; ಅದನ್ನು A ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ,

$$A = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

ಇದರಲ್ಲಿ $\frac{1}{2}(a+b+c)$ ಎಂಬುದು, ತ್ರಿಕೋನದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಈ ಅಳತೆಯನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ s ಎಂದು ಸೂಚಿಸಲಾಗುವುದೆಂಬುದನ್ನು ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ. (**ಅಭಿನ್ನಕ ಗುಣಾಕಾರ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ತ್ರಿಕೋನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ** ಎಂಬ ಭಾಗ). ಆಗ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹಾಗೂ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$A = sr$$

ಇದನ್ನೇ ಹೀಗೂ ಬರೆಯಬಹದು:

$$r = \frac{A}{s}$$

ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು, ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನುಸುತ್ತಳತೆಯ ಅರ್ಧದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವುದಾಗಿದೆ.

ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು a, b, c ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ಎಂದು ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ. ಇದನ್ನು ಸುತ್ತಳತೆಯ ಅರ್ಧವಾದ s ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ; ಅಂದರೆ

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}}$$

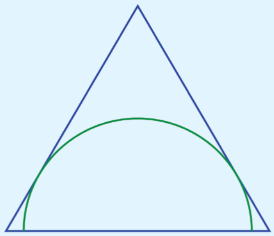
ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

(1) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು 7 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, 9 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅದರ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(2) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಹಾಗೂ ಒಂದು ಕೋನ $50°$ ಆಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಸಮಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅದರ ಎರಡು ಭುಜಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಒಂದು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತವನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿರಿ.



(4) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

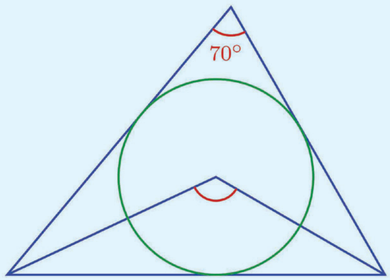
(5) ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು 13, 14, 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರುಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

(6) ಯಾವುದೇ ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿಯೂ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(7) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣ h ಮತ್ತು ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆದರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, $r(h+r)$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(8) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು a ಮತ್ತು b ಹಾಗೂ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ c ಆಗಿವೆ. ಅದರ ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $\frac{1}{2}(a+b-c)$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(9) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಎರಡು ಶಿರಗಳನ್ನು ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ.



(i) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಲಾಗಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲೂ ಒಂದು ಶಿರದಲ್ಲಿರುವ ಕೋನ ಮತ್ತು ಉಳಿದೆರಡು ಶಿರಗಳನ್ನು ಅಂತರ್‌ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳೆಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ ಏನಾಗಿರುವುದು?

(iii) ಈ ಎರಡು ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾದರೆ, ತ್ರಿಕೋನದ ಕೋನವು ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

9 ಬಹುಪದಗಳೂ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳೂ

ಗುಣಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಗಳು

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಹಲವು ಸುಲಭ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ. ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಮಾಡಬಹುದೇ?

$$38 \times 32$$

38 ನ್ನು 30 + 8 ಎಂದೂ, 32 ನ್ನು 30 + 2 ಎಂದೂ ಬರೆದರೋ?

ಎರಡು ಮೊತ್ತಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಕುರಿತು ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ **ಗುಣಾಕಾರ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯೇ?

> ಒಂದು ಮೊತ್ತವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಮೊತ್ತದಿಂದ ಗುಣಿಸಲು, ಮೊದಲ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ನಂತರದ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಿ, ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿಯೂ ಬರೆದಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ?

x, y, u, v ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ

$$(x + y)(u + v) = xu + xv + yu + yv$$

ಇದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ,

$$\begin{aligned} 38 \times 32 &= (30 + 8) \times (30 + 2) \\ &= (30 \times 30) + (30 \times 2) + (8 \times 30) + (8 \times 2) \end{aligned}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ $(30 \times 2) + (8 \times 30)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$\begin{aligned} (30 \times 2) + (8 \times 30) &= (30 \times 2) + (30 \times 8) \\ &= 30 \times (2 + 8) \\ &= 30 \times 10 \\ &= 300 \end{aligned}$$

ಹಾಗಾದರೆ,

$$38 \times 32 = (30 \times 30) + (30 \times 2) + (8 \times 30) + (8 \times 2)$$
$$= 900 + 300 + 16$$
$$= 1216$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 48×42 ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

$$48 \times 42 = 40^2 + (40 \times (8 + 2)) + (8 \times 2)$$
$$= 1600 + 400 + 16$$
$$= 2016$$

78×72 ಆದರೋ?

$$78 \times 72 = 4900 + 700 + 16 = 5616$$

ಈ ಮೂರು ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಮಾಡಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ:

x ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೂ

$$(x + 2)(x + 8) = x^2 + (8 + 2)x + 16$$
$$= x^2 + 10x + 16$$

ಇದರಲ್ಲಿ 2 ಮತ್ತು 8 ರ ಬದಲು ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೋ?

ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನ ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಮಾಡಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಂಪಿನಿಂದ ಸಿಗುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(1) (i) 43×47 (ii) 63×67 (iii) 103×107

(2) (i) 51×52 (ii) 81×82 (iii) 301×302

ಬಹುಪದ ಗುಣಾಕಾರ

ಈ ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವ ಎರಡನೇ ಗುಂಪಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಿಂದ ಸಿಗುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವ ಯಾವುದು?

x ಯಾವುದೇ ಎಣಿಕಾಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೂ

$$(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$$

ಮೊತ್ತಗಳ ಗುಣಾಕಾರದ ಕುರಿತು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, x ಆಗಿ ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ

x ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೂ $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$

ಇದರಲ್ಲಿ x ಆಗಿ ಹಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆಯುವಾಗ $x + 1$ ಆಗಿಯೂ $x + 2$ ಆಗಿಯೂ $x^2 + 3x + 2$ ಆಗಿಯೂ ಹಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುವುವು; ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಅವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವಾಗಿರುವುದು.

ಈ ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಚಕಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಬಹುಪದಗಳಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಮೇಲಿನ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು.

$x + 1$ ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದ ಮತ್ತು $x + 2$ ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದ ಗುಣಲಬ್ಧವು $x^2 + 3x + 2$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವಾಗಿರುವುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಗುಂಪಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಿಂದ ಲಭಿಸಿದ ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದೇ?

ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಿಂದ ಲಭಿಸಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬೀಜಗಣಿತ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ:

- $(x + 2)(x + 8) = x^2 + 10x + 16$
- $(x + 3)(x + 7) = x^2 + 10x + 21$
- $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$

ಇದರಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸಿದ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ, ಗುಣಿಸಿದ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು?

ಹಾಗಾದರೆ ಈ ರೀತಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ವಿಸ್ತೃತವಾದ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದೇ?

x, a, b ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೂ

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಹೇಳಿದರೋ?

$x + a$ ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದ ಮತ್ತು $x + b$ ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದ ಗುಣಲಬ್ಧವು $x^2 + (a + b)x + ab$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವಾಗಿರುವುದು.

ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, $(x + 5)(x + 3)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು?

$$(x + 5)(x + 3) = x^2 + 8x + 15$$

ಮೊತ್ತಗಳೊಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳೊಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಹಾಗೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳೊಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ **ಗುಣಾಕಾರ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ:

- $(x + y)(u - v) = xu - xv + yu - yv$
- $(x - y)(u - v) = xu - xv - yu + yv$

ಇವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಇತರ ಕೆಲವು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು:

- $(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$
- $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$(x+4)(x-1) = x^2 + 3x - 4$$

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$x - 1 = x + (-1)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ

$$(x+4)(x-1) = (x+4)(x+(-1))$$

ಇನ್ನು ಮೊತ್ತಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿರುವ

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ a ಆಗಿ 4 ಮತ್ತು b ಆಗಿ -1 ನ್ನು ತೆಗೆದರೋ?

$$(x+4)(x+(-1)) = x^2 + (4+(-1))x + (4 \times (-1))$$
$$= x^2 + 3x - 4$$

ಅಂದರೆ, ಈ ಮೊದಲು ನೋಡಿರುವಂತೆ

$$(x+4)(x-1) = x^2 + 3x - 4$$

ಎಂದೇ ಸಿಗುವುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $(x-4)(x-1)$ ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿರುವ

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ a ಆಗಿ 4 ಮತ್ತು b ಆಗಿ 1 ಎಂದು ತೆಗೆದು

$$(x-4)(x-1) = x^2 - 5x + 4$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು; $x-4$ ಎಂಬ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು $x+(-4)$ ಎಂಬ ಮೊತ್ತವಾಗಿಯೂ $x-1$ ಎಂಬ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು $x+(-1)$ ಎಂಬ ಮೊತ್ತವಾಗಿಯೂ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆದರೋ?

$$(x-4)(x-1) = (x+(-4))(x+(-1))$$

ಇನ್ನು ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೊತ್ತಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರುವ

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ $a = -4$ ಎಂದೂ $b = -1$ ಎಂದೂ ತೆಗೆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ.

$$(x-4)(x-1) = (x+(-4))(x+(-1))$$
$$= x^2 + ((-4)+(-1))x + ((-4) \times (-1))$$
$$= x^2 - 5x + 4$$

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(x+2)(x+5)$ (ii) $(x+2)(x-5)$ (iii) $(x-2)(x+5)$ (iv) $(x-2)(x-5)$

ಬಹುಪದ ಅಪವರ್ತನಗಳು

ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ, ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವಾಗಿ ಮಾಡುವ ಹಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರುವೆವಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ:

x^2+5x+6 ನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದೇ?

ಇಲ್ಲಿ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೇಳಿದ್ದಾರೆ. ಗುಣಿಸುವ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ, ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು :

$(x+a)(x+b)=x^2+5x+6$ ಆಗಲು, a, b ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

$(x+a)(x+b)$ ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$$

ಆಗ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು :

$x^2+(a+b)x+ab=x^2+5x+6$ ಆಗಲು, a, b ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಇದರಲ್ಲಿ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಸರಿಯಾಗಬೇಕಾದರೆ, $a+b=5$ ಎಂದೂ $ab=6$ ಎಂದೂ ಆದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಪ್ರಶ್ನೆ ಈ ರೀತಿಯಾಗುವುದು:

$a+b=5$ ಮತ್ತು $ab=6$ ಆಗಲು, a, b ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ , ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಈ ರೀತಿ ಆಗುವುದು:

ಮೊತ್ತ 5 ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ 6 ಆಗಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

ಸ್ವಲ್ಪ ಆಲೋಚಿಸಿದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 2 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿವೆ ಎಂದು ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಉತ್ತರವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$$

ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಈ ರೀತಿ ಮಾಡಿದರೋ?

x^2-5x+6 ನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಹಾಗೆ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಹಲವು ಹಂತಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯುವ:

(i) $(x+a)(x+b)=x^2-5x+6$ ಆಗಲು, a, b ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

(ii) $x^2+(a+b)x+ab=x^2-5x+6$ ಆಗಲು, a, b ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಇದರಿಂದ $a+b$, ab ಎಂಬಿವುಗಳ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

ಆಗ ನಮ್ಮ ಚಿಂತನೆಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಸೋಣ:

(iii) $a+b=-5$ ಮತ್ತು $ab=6$ ಆಗಲು a, b ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

(iv) ಮೊತ್ತ –5 ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ 6 ಆಗಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

ಈ ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿರುವ ಹಾಗೆ ಗುಣಲಬ್ಧ 6 ಆಗಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 2 ಮತ್ತು 3 ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ ಮೊತ್ತ –5 ಆಗುವುದಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ.

6 ನ್ನು ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು ಹೇಗೆ?

$$6=(-2)\times(-3)$$

(ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ **ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಸಮಯವೂ ವೇಗವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ)

ಇದು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ,

$$(-2)+(-3) = -2-3=-5$$

(ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ **ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಸ್ಥಾನವೂ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ)

ಹಾಗಾದರೆ ನಮ್ಮ ಕೊನೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು –2 ಮತ್ತು –3 ಆಗಿರುವುದು.

ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಉತ್ತರ :

$$x^2-5x+6 = (x+(-2))(x+(-3))$$
$$= (x-2)(x-3)$$

ಇನ್ನು ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಪದವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೋ?

x^2+5x-6 ನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಹಂತ ಹಂತವಾಗಿ ಬದಲಾಗುವುದು ಹೇಗೆ?

(i) $(x+a)(x+b)=x^2+5x-6$ ಆಗಲು a, b ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

(ii) $x^2+(a+b)x+ab=x^2+5x-6$ ಆಗಲು a, b ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

(iii) $a+b=5$ ಮತ್ತು $ab=-6$ ಆಗಲು a, b ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

(iv) ಮೊತ್ತ 5 ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ –6 ಆಗಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

ಇನ್ನು $-6=(-2)\times 3$ ಎಂದೋ $-6=2\times(-3)$ ಎಂದೋ ಬರೆದರೆ ಗುಣಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 5 ಆಗುವುದಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ.

ಹಾಗಾದರೆ 6 ನ್ನು ಬೇರೆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

$6 = 1 \times 6$ ಎಂಬುದರಿಂದ

$$-6 = (-1) \times 6$$

$$-6 = 1 \times (-6)$$

ಎಂದೆಲ್ಲಾ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಗುಣಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 5 ಆಗುವುದು. ಅಂದರೆ, ಮೇಲಿನ ನಾಲ್ಕನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಉತ್ತರ 6 ಮತ್ತು –1 ಆಗಿರುವುದು; ಬಹುಪದದ ಕುರಿತು ಇರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಉತ್ತರ,

$$x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$$

ಇನ್ನು ಹೆಚ್ಚೇನೂ ಆಲೋಚಿಸದೆ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$x^2 - 5x - 6$ ನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$$

ಏಕೀಕರಣ

x^2+5x+6 ಎಂಬ ಬಹುಪದವಾದರೂ x^2-5x+6 ಎಂಬ ಬಹುಪದವಾದರೂ, ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಬಹುಪದವನ್ನು

$$(x + a)(x + b)$$

ಎಂಬ ಒಂದೇ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು a ಮತ್ತು b ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವುದಲ್ಲವೇ.

ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $a = 2$ ಎಂದೂ $b = 3$ ಎಂದೂ ಎರಡೂ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಕ್ಕಿದವು.

ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $a = -2$ ಎಂದೂ $b = -3$ ಎಂದೂ ಎರಡೂ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಕ್ಕಿದವು.

ಮೂರನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $a = 6$ ಎಂಬ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೂ $b = -1$ ಎಂಬ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಸಿಕ್ಕಿತು. ನಾಲ್ಕನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $a=-6$ ಎಂಬ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯೂ; $b= 1$ ಎಂಬ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಲಭಿಸಿತು. ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಒಂದು ಸಮವಾಕ್ಯದ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

ಎಂಬ ಒಂದು ಸರ್ವಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ ಇದು ಸೂಕ್ತ ಅಲ್ಲವೇ.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆದು ನೋಡಿರಿ:

(i) $x^2 + x - 6$ (ii) $x^2 - x - 6$ (iii) $x^2 + 7x + 6$ (iv) $x^2 - 7x + 6$

ಈ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದೆವು. ಎಲ್ಲಾ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲೂ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

$x^2 + 27x + 180$ ನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಇದನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ ಮೊದಲು

$$(x + a)(x + b) = x^2 + 27x + 180$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ,

$$x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + 27x + 180$$

ಇದರಿಂದ

$$a + b = 27$$

$$ab = 180$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇದುವರೆಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವ ಹಾಗೆ, 180 ನ್ನು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಜೊತೆಯ ಮೊತ್ತವು 27 ಆಗುವುದು ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಅಷ್ಟು ಸುಲಭವಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ. ಇನ್ನೊಂದು ದಾರಿಯನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗೊತ್ತಿದೆ. ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಗೊತ್ತಿರುವುದಾದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ (ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಮವಾಕ್ಯ ಜೋಡಿಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಎರಡು ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ).

ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ?

ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ (**ವರ್ಗ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ವರ್ಗ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

ಇದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= 27^2 - (4 \times 180)\\ &= (400 + 280 + 49) - (72 \times 10)\\ &= 729 - 720\\ &= 9\end{aligned}$$

ಹಾಗಾದರೆ $a - b$ ಯಾವೆಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಬಹುದು?

$$a - b = 3 \quad \text{ಅಥವಾ} \quad a - b = -3$$

ಇದರಲ್ಲಿ $a - b = 3$ ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ

$$\begin{aligned}a + b &= 27\\ a - b &= 3\end{aligned}$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.ಇದರಿಂದ

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2}(27+3) = \frac{1}{2} \times 30 = 15\\ b &= \frac{1}{2}(27-3) = \frac{1}{2} \times 24 = 12\end{aligned}$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

$a - b = -3$ ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ

$$\begin{aligned}a + b &= 27\\ a - b &= -3\end{aligned}$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಇದರಿಂದ

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2}(27-3) = \frac{1}{2} \times 24 = 12\\ b &= \frac{1}{2}(27+3) = \frac{1}{2} \times 30 = 15\end{aligned}$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

ಹೇಗೆ ಆದರೂ ಕೂಡ ಇವುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ,

$$x^2 + 27x + 180 = (x + 12)(x + 15)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವನ್ನು $q(x)$, $r(x)$ ಎಂಬೀ ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ $p(x)=q(x)r(x)$ ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವುದಾದರೆ $q(x)$, $r(x)$ ಎಂಬೀ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು $p(x)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಎಂದು ಹೇಳುವರು. (ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಷಯದಲ್ಲೂ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥವು ಇದೇ ಆಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ; ಉದಾಹರಣೆಗೆ $10 = 2 \times 5$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ 2 ಮತ್ತು 5 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 10 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುವರು).

ಹಾಗಾದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲೂ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆದಿರುವುದಾಗಿದೆ.

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದಗಳನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಎರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $x^2 + 30x + 221$ (ii) $x^2 + 4x - 221$ (iii) $x^2 + x - 156$

ಅಪವರ್ತನಗಳೂ ಮೌಲ್ಯಗಳೂ

ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳು ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಎರಡು ಉತ್ತರ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿರುವ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಪುನಃ ನೋಡೋಣ:

$x^2 - 4x + 3 = 0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ x ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ?

(i) $x^2 - 4x + 3 = 0$

(ii) $x^2 - 4x + 4 = 1$

(iii) $(x - 2)^2 = 1$

(iv) $x - 2 = 1$ ಅಥವಾ $x - 2 = -1$

(v) $x = 3$ ಅಥವಾ $x = 1$

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲು, ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ $x^2 - 4x + 3$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$(x-1)(x-3)=0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ x ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಸೊನ್ನೆ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದರೂ ಸೊನ್ನೆ ಆಗಬೇಕಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ $(x-1)(x-3)=0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ $x-1=0$ ಆಗಬೇಕು, ಅಥವಾ $x-3=0$ ಆಗಬೇಕು.

ಅಂದರೆ $x=1$ ಆಗಬೇಕು, ಅಥವಾ $x=3$ ಆಗಬೇಕು.

ಈ ರೀತಿಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

(i) $x^2-4x+3=0$

(ii) $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

(iii) $(x-1)(x-3)=0$

(iv) $x-1=0$ ಅಥವಾ $x-3=0$

(v) $x=1$ ಅಥವಾ $x=3$

ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಈ ರೀತಿ ಮಾಡಿದರೋ?

$x^2-5x+6=0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ x ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಈ ಹಿಂದಿನ ಲೆಕ್ಕದ ಹಾಗೆ ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೊದಲು ಏನು ಮಾಡಬೇಕು?

x^2-5x+6 ನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದು ಹೇಗೆ?

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

ಇನ್ನು ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು?

(i) $x^2-5x+6=0$

(ii) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

(iii) $(x-2)(x-3)=0$

(iv) $x-2=0$ ಅಥವಾ $x-3=0$

(v) $x=2$ ಅಥವಾ $x=3$

ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $x^2-4x+3=0$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಮೌಲ್ಯಗಳು 1, 3 ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವಿರಲ್ಲವೇ. ಎರಡನೇ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $x^2-5x+6=0$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಮೌಲ್ಯಗಳು 2, 3 ಎಂದು ಸಿಕ್ಕಿತು.

ಹಾಗಾದರೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದಂತೆ ವರ್ಗ ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬದಲು, ಈಗ ಮಾಡಿರುವ ಹಾಗೆ, ಬಹುಪದವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

> ಆಯತದ ಒಂದು ಭುಜವು ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜಕ್ಕಿಂತ 3 ಮೀಟರ್ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವುದು. ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, 270 ಚದರಮೀಟರ್ ಆದರೆ ಈ ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುವು?

ಆಯತದ ಸಣ್ಣ ಭುಜದ ಉದ್ದವನ್ನು x ಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ, ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಉದ್ದವು $x + 3$ ಮೀಟರ್; ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$x(x + 3) = x^2 + 3x \text{ ಚದರಮೀಟರ್}$$

ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$x^2 + 3x = 270 \text{ ಆಗಬೇಕಾದರೆ } x \text{ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?}$$

ಇದನ್ನು ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿದ ಹಾಗೆ ವರ್ಗ ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ, ಸಮವಾಕ್ಯದ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ ನ್ನು ಕೂಡಿಸಬೇಕು.

ಅದಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಅಪವರ್ತನ ಕ್ರಿಯೆಯ ಮೂಲಕ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಮೊದಲು ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯೋಣ:

$$x^2 + 3x - 270 = 0 \text{ ಆಗಬೇಕಾದರೆ } x \text{ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?}$$

ಇನ್ನು $x^2 + 3x - 270$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನಾಗಿಸಬೇಕು

$$x^2 + 3x - 270 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

ಎಂದು ಬರೆದರೆ, ಇದರಿಂದ $a + b$ ಮತ್ತು ab ಸಿಗುವುದು.

$$a + b = 3$$

$$ab = -270$$

ಇದರಿಂದ $a - b$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 9 - (4 \times (-270)) = 9 - (-1080) = 9 + 1080 = 1089$$

ಇನ್ನು $a - b$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು 1089 ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಬರೆದು ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ (**ಚೌಕಗಳು ಮತ್ತು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಚೌಕ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

1089 ರ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ 18 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, 1089 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು 9 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿರುವುದು (ಆರನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

$1089 \div 9$ ನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂದು ಐದನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ?

	9	
	1089−	
100	900	$9 \times 100 = 900$
	189−	
20	180	$9 \times 20 = 180$
	9−	
1	9	$9 \times 1 = 9$
$1089 \div 9 = 121$	0	$9 \times 121 = 1089$

ಹಾಗಾದರೆ,

$$1089 = 9 \times 121$$

ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$1089 = 3^2 \times 11^2 = (3 \times 11)^2 = 33^2$$

(ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ಆವರ್ತನ ಗುಣಾಕಾರ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಮಡಿಯೂ ಘಾತವೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ)

$(a-b)^2 = 33^2$ ಎಂಬುದರಿಂದ $a-b$ ಯ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

$$a - b = 33 \text{ ಅಥವಾ } a - b = -33$$

$a - b = 33$ ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ,

$$a + b = 3$$

$$a - b = 33$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.ಇದರಿಂದ

$$a = \frac{1}{2}(3 + 33) = \frac{1}{2} \times 36 = 18$$

$$b = \frac{1}{2}(3 - 33) = \frac{1}{2} \times (-30) = -15$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಅಂದರೆ,

$$x^2 + 3x - 270 = (x - 15)(x + 18)$$

ಹಾಗಾದರೆ ನಮ್ಮ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಈ ರೀತಿ ಆಯಿತು.

$$(x - 15)(x + 18) = 0 \text{ ಆಗಬೇಕಾದರೆ } x \text{ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?}$$

ಹಿಂದೆ ಹಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇದರ ಉತ್ತರವು $x = 15$ ಅಥವಾ $x = -18$ ಎಂದು ಆಗಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ಒಂದು ಆಯತದ ಭುಜದ ಉದ್ದವಾಗಿರುವ ಕಾರಣ ಋಣಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಆಯತದ ಸಣ್ಣ ಭುಜದ ಉದ್ದವು 15 ಮೀಟರ್.

ದೊಡ್ಡ ಭುಜದ ಉದ್ದವು $15 + 3 = 18$ ಮೀಟರ್.

ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, $a - b = 33$ ಎಂಬುದರ ಬದಲು $a - b = -33$ ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ ಏನು ಸಿಗುವುದೆಂದು ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ.

ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡೋಣ:

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಸಿಗುವುದು. ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು? ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$x + 1 = x^2$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, x ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

$x + 1 = x^2$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, $x^2 - (x + 1) = 0$ ಆಗಬೇಕಲ್ಲವೇ. ಇದರಲ್ಲಿ

$$x^2 - (x + 1) = x^2 - x - 1$$

(ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಳೆಯುವುದರ ಬದಲು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಕಳೆಯಬಹುದು ಎಂದು ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ಗಣಿತದ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಬರಹ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಒಂದೊಂದಾಗಿಯೂ ಮೊತ್ತವಾಗಿಯೂ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ)

ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಈ ರೀತಿ ಆಗುವುದು:

$x^2 - x - 1 = 0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, x ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಇನ್ನು $x^2 - x - 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದವನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನಾಗಿಸುವ:

$$x^2 - x - 1 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

ಎಂದು ಬರೆದರೆ,

$$a + b = -1$$
$$ab = -1$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.ಇದರಿಂದ

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = (-1)^2 - (4 \times (-1))$$
$$= 1 - (-4) = 1 + 4 = 5$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ

$a - b = \sqrt{5}$ ಅಥವಾ $a - b = -\sqrt{5}$

$a - b = \sqrt{5}$ ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ

$$a + b = -1$$
$$a - b = \sqrt{5}$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಇನ್ನು a ಮತ್ತು b ಯನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:

$$a = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$
$$b = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{5}\right) = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

ಅಂದರೆ,

$$x^2 - x - 1 = \left(x + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)$$

ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಈ ರೀತಿ ಆಗುವುದು:

$\left(x + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) = 0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, x ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಅದಲು ಬದಲು

$p(x)$ ಎಂಬ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಎರಡು ಬಹುಪದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ

$$p(x) = (x + a)(x + b)$$

ಎಂದು ಬರೆದು a ಮತ್ತು b ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ.

ಈ ರೀತಿಯ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಸಿಗುವುದು $a + b$ ಮತ್ತು ನಂತರ ಸಿಗುವುದು $(a - b)^2$ ಆಗಿದೆ. ಅವುಗಳು

$$a + b = h$$
$$(a - b)^2 = k^2$$

ಎಂದಾದರೆ, $a - b$ ಆಗಿ k ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ $-k$ ಎಂದು ತೆಗೆಯಬಹುದು.

$a - b = k$ ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ a, b ಹೀಗೆ ಸಿಗುವುದು:

$$a = \frac{1}{2}(h + k)$$
$$b = \frac{1}{2}(h - k)$$

$a - b = -k$ ಎಂದು ತೆಗೆದರೋ?

$$a = \frac{1}{2}(h - k)$$
$$b = \frac{1}{2}(h + k)$$

ಅಂದರೆ a, b ಎಂಬೀ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಗುವುದು. ಏನೇ ಆದರೂ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಇದರ ಉತ್ತರವು

$$x = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ಎಂಬ ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು $-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ಎಂಬ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯು, ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದರೊಂದಿಗೂ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ ಸಿಗುವುದು ಎಂದಾಗಿದೆ.

(1) ಆಯತದ ಒಂದು ಭುಜವು ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜಕ್ಕಿಂತ 2 ಮೀಟರ್ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವುದು. ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 48 ಚದರಮೀಟರ್ ಆದರೆ ಈ ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜದ ಎರಡು ಮಡಿಯಿಂದ ಒಂದು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ನಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಭುಜ; ಎರಡು ಮಡಿಯೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಕೂಡಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ ಕರ್ಣದ ಉದ್ದ. ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(3) 1 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಎಷ್ಟು ಎಣಿಕಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು 300 ಆಗುವುದು?

(4) $x^2 - 2x - 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರವು, x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವುವು?

ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೌಲ್ಯ

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

$2x^2 + 3x - 2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರವು, x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವುವು?

ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \text{ ಆಗಬೇಕಾದರೆ } x \text{ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?}$$

ಇದುವರೆಗೆ ಮಾಡಿರುವ ಇಂತಹ ಲೆಕ್ಕಗಳಿಗಿಂತ ಇದಕ್ಕೆ ಸ್ವಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ. ಹಿಂದೆ ಮಾಡಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ x^2 ಮಾತ್ರ ಇತ್ತು; ಇದರಲ್ಲಿ $2x^2$ ಎಂದು ಇದೆ.

ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲು $2x^2 + 3x - 2$ ನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right)$$

ಇದರಿಂದ $x^2 + \frac{3}{2}x - 1$ ಸೊನ್ನೆ ಆಗುವ ಯಾವುದೇ x ತೆಗೆದರೂ, ಈ ಬಹುಪದದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವ $2x^2 + 3x - 2$ ಸೊನ್ನೆಯೇ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದಲ್ಲವೇ; ಬದಲಾಗಿ $2x^2 + 3x - 2$ ಸೊನ್ನೆ ಆಗುವ ಯಾವುದೇ x ತೆಗೆದರೂ, ಈ ಬಹುಪದದ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವ $x^2 + \frac{3}{2}x - 1$ ಸೊನ್ನೆಯೇ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ x ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಇನ್ನು ಮೊದಲು ಮಾಡಿದ ಹಾಗೆ ಅಪವರ್ತನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ x ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

ಎಂದು ಬರೆದರೆ

$$a + b = \frac{3}{2}$$
$$ab = -1$$

ಇದರಿಂದ

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = \frac{9}{4} - (4 \times (-1)) = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ

$a - b = \frac{5}{2}$ ಅಥವಾ $a - b = -\frac{5}{2}$

$a - b = \frac{5}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ

$$a + b = \frac{3}{2}$$
$$a - b = \frac{5}{2}$$

ಎಂದೂ ಅದರಿಂದ

$$a = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$
$$b = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{2}$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ

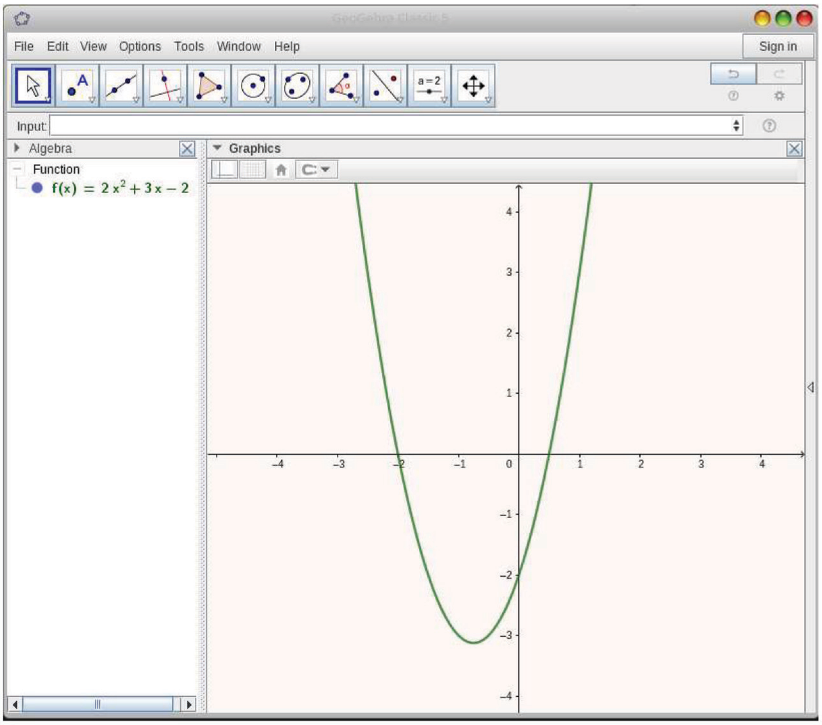
$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = (x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಹೇಳಬಹುದು:

$(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ x ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಇದರ ಉತ್ತರ $x = -2$ ಅಥವಾ $x = \frac{1}{2}$.

ಅಂದರೆ, $2x^2 + 3x - 2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರವು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸಿ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಬಿಂದುಗಳು $(-2, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ಇವುಗಳಾಗಿವೆ.



ಇನ್ನು ಈ ರೀತಿಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನೋಡೋಣ:

ಯಾವುದೇ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದವನ್ನು $ax^2 + bx + c$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಈ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ದಾರಿಯನ್ನು ಹಲವು ಹಂತಗಳಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

(1) ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ : $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

(2) ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಬಹುಪದವನ್ನು ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) ಈ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು $x + p$ ಎಂದೂ $x + q$ ಎಂದೂ ತೆಗೆದರೆ

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq$$

(ii) ಇದರಿಂದ $p + q = \frac{b}{a}$ ಎಂದೂ $pq = \frac{c}{a}$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

(iii) $(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq$ ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $p - q$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iv) ಈ ಹಿಂದೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದ $p + q$ ಮತ್ತು $p - q$ ಆಗಿ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ p, q ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಹಾಗಾದರೆ ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕಾದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು: $(x + p)(x + q) = 0$

(4) ಇದರ ಉತ್ತರ $x = -p$ ಅಥವಾ $x = -q$

ಇನ್ನು $p - q$ ಮತ್ತು ನಂತರ p, q ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ನೋಡುವ:

$$(p-q)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$= \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4ac}{a^2} = \frac{b^2-4ac}{a^2}$$

$$p - q = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} \text{ ಅಥವಾ } p - q = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

$p - q$ ಆಗಿ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ತೆಗೆದು p, q ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:

$$p + q = \frac{b}{a} \qquad p - q = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{b + \sqrt{b^2-4ac}}{a} = \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$q = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{b - \sqrt{b^2-4ac}}{a} = \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ಹಾಗಾದರೆ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಮೌಲ್ಯಗಳು

$$x = -\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ ಅಥವಾ } x = -\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದು ಅಥವಾ ಕಳೆಯುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ $\pm$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯುವುದಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ಎಂಬ ಸಮವಾಕ್ಯ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಮೌಲ್ಯಗಳು

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ನೋಡೋಣ:

$2x^2 + 3x - 2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರವು, x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವುವು?

ಇಲ್ಲಿ ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕಾದ ಸಮವಾಕ್ಯ

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

ಹಾಗಾದರೆ ಮೇಲೆ ಬರೆದ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ

$$a = 2 \qquad b = 3 \qquad c = -2$$

ಎಂದು ತೆಗೆದು ಈ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - (4 \times 2 \times (-2))}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{4}$$

ಅಂದರೆ,

$$x = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ಅಥವಾ

$$x = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

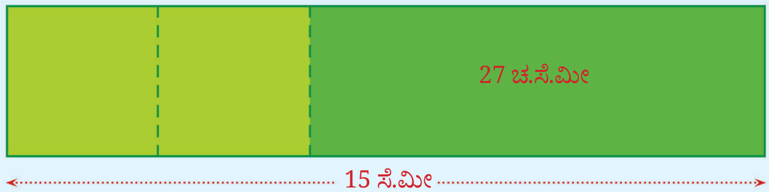
x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸಿ ಹಾದುಹೋಗುವ ಬಿಂದುಗಳು $\left(\frac{1}{2}, 0\right), (-2, 0)$.

(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬಹುಪದಗಳ ಚಿತ್ರಗಳು x - ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ:

(i) $2x^2 - 7x - 1$ (ii) $2x^2 + 7x - 1$ (iii) $9x^2 + 12x + 4$

(2) ಒಂದು ಆಯತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು 42 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಅದರ ಕರ್ಣವು 15 ಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುವು?

(3) ಆಯತಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಕಾಗದದಿಂದ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು:



ಬಾಕಿ ಉಳಿದಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 27 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದು. ಆಯತದ ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವು ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(4) 1, 5, 9, ... ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ 91 ಸಿಗುವುದು?

(5) 28 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಸರಿಗೆಯನ್ನು ಬಗ್ಗಿಸಿ ಒಂದು ಆಯತವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು.

(i) ಕರ್ಣದ ಅಳತೆಯು 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ?

(ii) ಕರ್ಣದ ಅಳತೆಯು 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದರೋ?

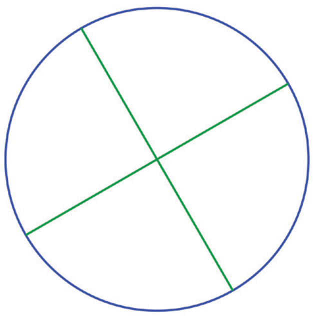
(iii) ಕರ್ಣದ ಅಳತೆಯು 14 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದರೋ?

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಆಯತಗಳ ಎರಡೂ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10 ವೃತ್ತಗಳೂ ಗೆರೆಗಳೂ

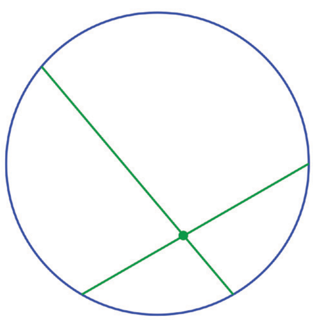
ಜ್ಯಾಗಳು

ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವ್ಯಾಸಗಳು, ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವುವು.

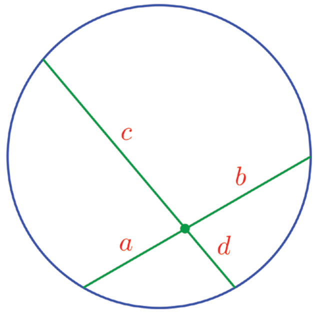


ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ನಾಲ್ಕೂ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳು ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

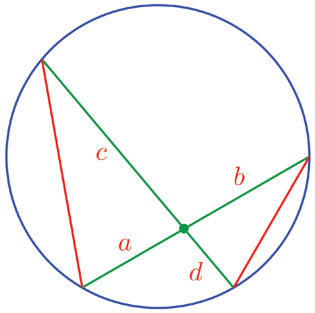
ವ್ಯಾಸವಲ್ಲದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವಾಗಲೋ?



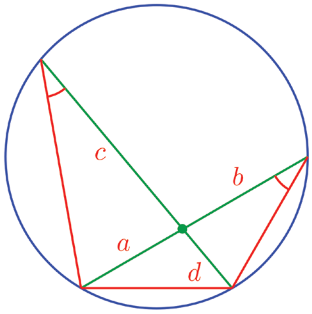
ಭಾಗಗಳೊಂದೂ ಸಮಾನವಾಗಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಆದರೂ ಅವುಗಳೊಳಗೆ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವಿದೆ. ಅದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು a, b ಎಂದೂ, ಇನ್ನೊಂದು ಜ್ಯಾದ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು c, d ಎಂದೂ ತೆಗೆಯೋಣ:

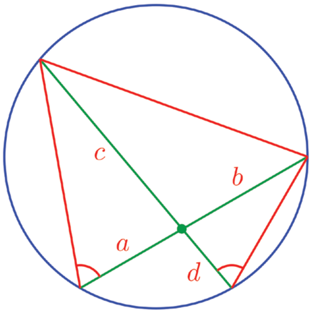


ಭಾಗಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಜ್ಯಾಗಳ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಹಾಗೆ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸೋಣ:

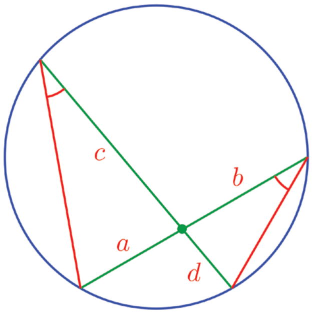


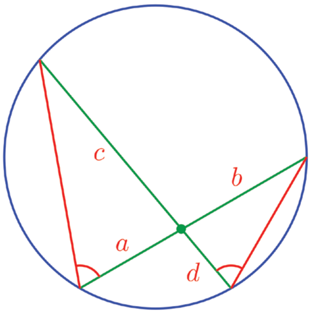
ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೇಲಿನ ಕೋನಗಳು ಒಂದೇ ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ; ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳು, ಇನ್ನೊಂದು ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.





ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೇಲಿನ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ; ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.





ಅಂದರೆ, ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುವು. (ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯ **ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಕೋನಗಳೂ ಭುಜಗಳೂ** ಎಂಬ ಭಾಗ).

ಮೇಲಿನ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು a ಮತ್ತು d ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ; ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು c ಮತ್ತು b ಆಗಿವೆ.

ಇವುಗಳ ಬದಲಾವಣೆ ಸಮಾನ ದರದಲ್ಲಾಗಿವೆ. ಈ ದರವನ್ನು k ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$d = ka$$

$$b = kc$$

ಇದರಲ್ಲಿ k ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿಲ್ಲವಲ್ಲಾ. ಅದನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, a, b, c, d ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧ ಸಿಗಲು, ಮೊದಲ ಸಮವಾಕ್ಯದಿಂದ ಹೀಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಹುದು:

$$k = \frac{d}{a}$$

ಇದನ್ನು ಎರಡನೇ ಸಮವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ,

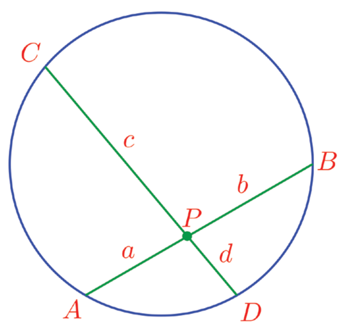
$$b = \frac{d}{a} \times c = \frac{cd}{a}$$

ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$ab = cd$$

ಜ್ಯಾಗಳಿಗೆ AB, CD ಎಂದೂ ಅವುಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ P ಎಂದೂ ಹೆಸರಿಸಿದರೆ ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$PA \times PB = PC \times PD$$



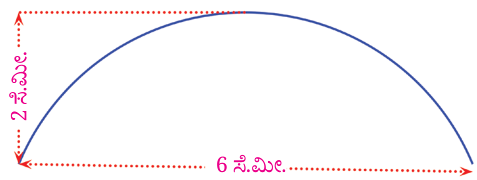
ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರಲ್ಲಿ AB, CD ಎಂಬ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದು Pಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Input Bar ನಲ್ಲಿ PA*PB ಎಂದು ಕೊಟ್ಟರೆ PA × PB ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ Algebra View ನಲ್ಲಿ ನೋಡಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ PC × PD ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಜ್ಯಾಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. P ಎಂಬ ಬಿಂದು ವೃತ್ತದೊಳಗಿರುವಾಗ PA×PB, PC×PD ಇವುಗಳಿಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು?

ಇದನ್ನು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವಾಗ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಇನ್ನೊಂದು ಜ್ಯಾದ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.

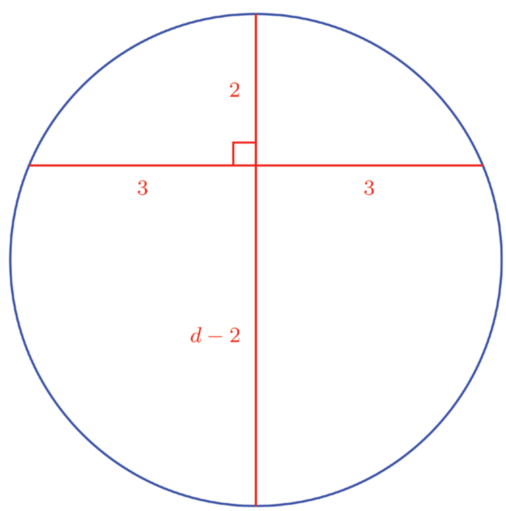
ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು ಒಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮಾಡೋಣ:

ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.



ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪೂರ್ಣ ವೃತ್ತವನ್ನೂ, ಅದರಲ್ಲಿ ಈ ಚಾಪದ ತುದಿಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಜ್ಯಾವನ್ನೂ, ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ವ್ಯಾಸವನ್ನೂ ಊಹಿಸಿ ನೋಡೋಣ. ಈ ವ್ಯಾಸವು, ಜ್ಯಾಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಜ್ಯಾವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು d ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ, ಚಿತ್ರ ಈ ರೀತಿಯಾಗುವುದು:



ತಾವರೆ ಲೆಕ್ಕ

ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರ ಲೀಲಾವತಿ ಎಂಬ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದ ಕುರಿತು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಲಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. (**ಸಮವಾಕ್ಯ ಪರಿಹಾರ** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ **ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆ** ಎಂಬ ಭಾಗ). ಅದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶ್ಲೋಕದ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

> ಚಕ್ರವಾಕ ಪಕ್ಷಿಗಳು ಮತ್ತು ಕ್ರೌಂಚ ಪಕ್ಷಿಗಳು ಸ್ವಚ್ಛಂದವಾಗಿ ವಿಹರಿಸುತ್ತಿರುವ, ನೀರು ತುಂಬಿರುವ ಒಂದು ಸರೋವರದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ಮೊಳದಷ್ಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ತಾವರೆಯ ಮೊಗ್ಗು ತಲೆಯೆತ್ತಿ ನಿಂತಿದೆ. ಅದು ಗಾಳಿಯಲ್ಲಿ ನಿಧಾನವಾಗಿ ಓಲಾಡುತ್ತಾ ಎರಡು ಮೊಳದಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಮುಳುಗಿತು. ಓ ಜಾಣನೇ ನೀರಿನ ಆಳ ಎಷ್ಟು ಎಂದು ಹೇಳು?

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿದಂತೆಯೇ ಈ ಲೆಕ್ಕದ ಉತ್ತರ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

ಸಂಸ್ಕೃತ ಶ್ಲೋಕ ಹೀಗಿದೆ:

ಚಕ್ರಕ್ರೌಂಚಕುಲಿತಸಲಿಲೇ
ಕ್ವಾಪಿತೃಷ್ಟಂ ತಟಾಕೇ
ತೋಯಾದೂರ್ಧ್ವ ಕಮಲಕಲೀಕಾಗ್ರಂ
ವಿತಸ್ಥಿ ಪ್ರಮಾಣಂ
ಮಂದಂ ಮಂದಂ ಚಲಿತಮನಿಲೇನಾಹತಂ
ಹಸ್ತಯುಗ್ಮೇ
ತಸ್ಮಿನ್ಮಗ್ನಂ ಗಣಕ ಕಥಯಾ
ಕ್ಷಿಪ್ರಮಂಬುಪ್ರಮಾಣಂ

ಇನ್ನು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ತತ್ವವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ,

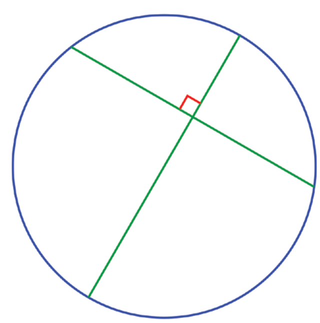
$$2(d - 2) = 3 \times 3 = 9$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಹುದು. ಇದರಿಂದ

$$d = \frac{9}{2} + 2 = 4\frac{1}{2} + 2 = 6\frac{1}{2}$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ, ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವು $6\frac{1}{2}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

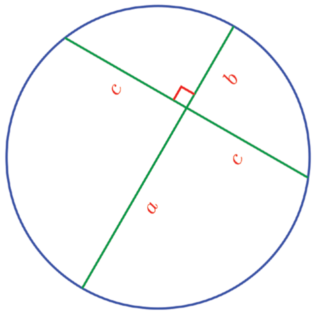
ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ, ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಜ್ಯಾಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವೂ ಇನ್ನೊಂದು ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾವೂ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಅಂತಹ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ವ್ಯಾಸದ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು a, b ಎಂದು ತೆಗೆಯೋಣ.

ವ್ಯಾಸವು, ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದು. (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ವೃತ್ತಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಜ್ಯಾಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ)

ಹಾಗಾದರೆ ವ್ಯಾಸವು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು c ಎಂದು ತೆಗೆಯೋಣ:



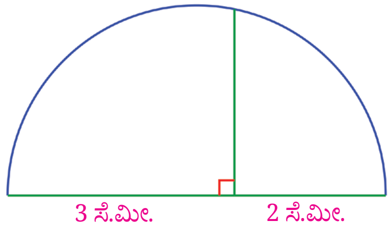
ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಜ್ಯಾಗಳ ಕುರಿತಾದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನನುಸರಿಸಿ a, b, c ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?

$$ab = c^2$$

ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು;

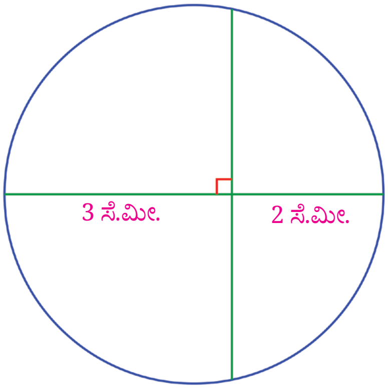
> ವೃತ್ತದ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಅದಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ಛೇದಿಸುವ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು, ಜ್ಯಾದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ವ್ಯಾಸದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವುದು. ಈ ಲಂಬದ ಉದ್ದವು ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

ವೃತ್ತವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಎಳೆದು, ಲಂಬವನ್ನು ಕೆಳಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಆಗುವುದು; ಲಂಬವು ಅದರ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದು:



ಹಾಗಾದರೆ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ತತ್ವವನ್ನನುಸರಿಸಿ, ಲಂಬದ ವರ್ಗವು $3 \times 2 = 6$; ಲಂಬದ ಉದ್ದವು $\sqrt{6}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.

ಹೀಗೆ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲದಷ್ಟು ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

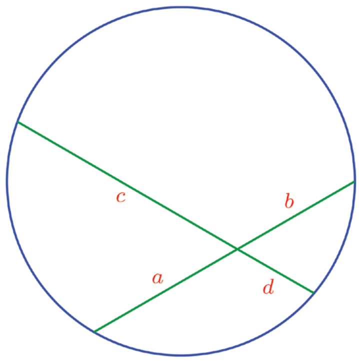
$\sqrt{5}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಎಳೆಯಬಹುದು?

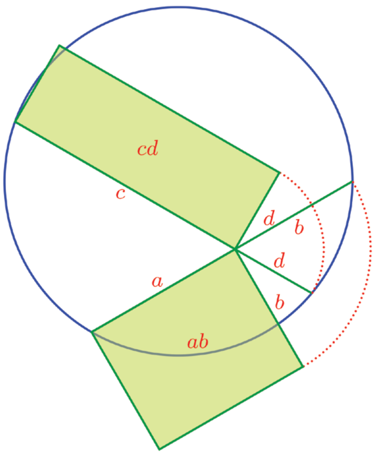
$\sqrt{6}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಬಹುದೇ?

ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು

ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವಾಗ ಸಿಗುವ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಕುರಿತಲ್ಲವೇ ಹೇಳಿರುವುದು. ಉದ್ದಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜ್ಯಾದ ಭಾಗಗಳು ಭುಜಗಳಾಗಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿದ ಆಯತಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವುದು.





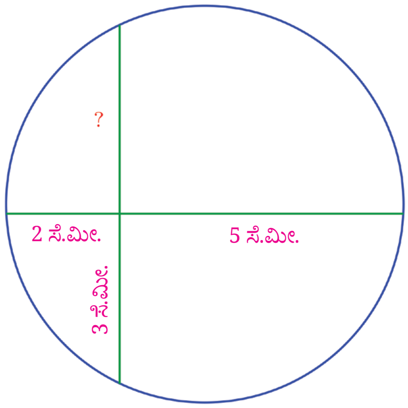
ಒಂದು ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಆಯತವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆ, ಒಂದು ಭುಜ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವಂತೆ ಇನ್ನೊಂದು ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $5 \times 2 = 10$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಲ್ಲವೇ. ಒಂದು ಭುಜ 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಬೇಕಾದರೆ ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜವು $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಬೇಕು. ಸ್ಕೇಲನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಇದನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಅಳತೆ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ.

ಈಗ ಹೇಳಿದ ತತ್ವವನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು?

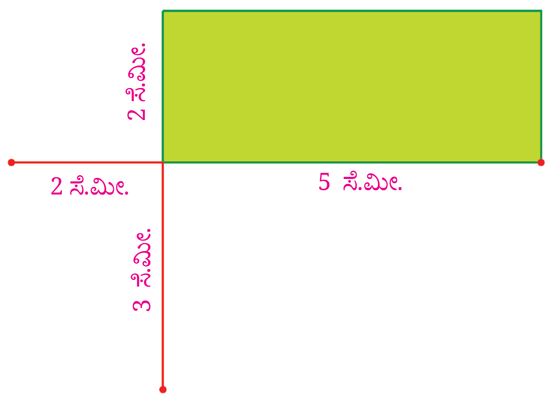
ಒಂದು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಊಹಿಸಿ ನೋಡಿರಿ: ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಭಾಗಗಳು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್; ಇನ್ನೊಂದು ಜ್ಯಾದ ಒಂದು ಭಾಗವು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್. ಬಾಕಿ ಇರುವ ಭಾಗವು ಎಷ್ಟು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗುವುದು?



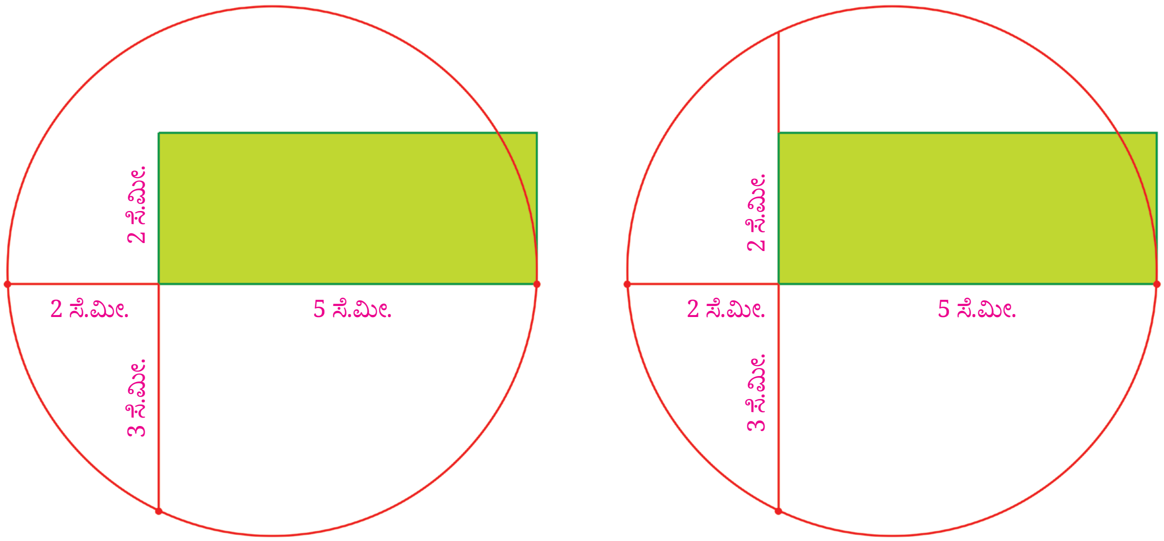
ಬಾಕಿ ಇರುವ ಈ ಭಾಗವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ $2 \times 5 = 10$ ಆಗಬೇಕಲ್ಲವೇ?

ಹಾಗಾದರೆ ಇದು ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ $3\frac{1}{3}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆ; ಇನ್ನು ಇದನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆ?

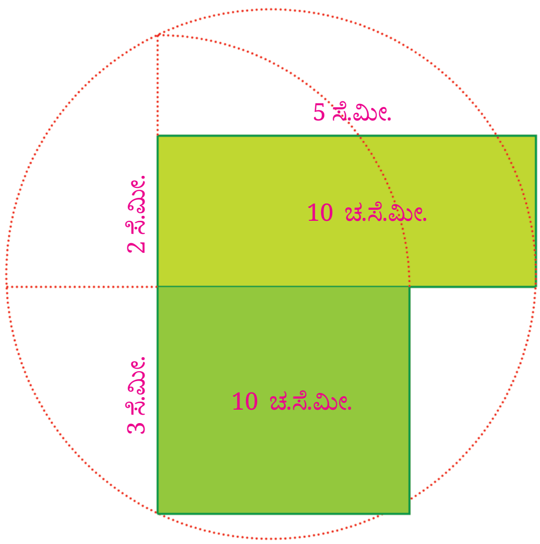
ಮೊದಲು ಆಯತದ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಡಕ್ಕೂ ಎಡಬದಿಯ ಭುಜವನ್ನು 3 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಕೆಳಭಾಗಕ್ಕೂ ಮುಂದುವರಿಸಿ ಎಳೆಯುವ:



ಇನ್ನು ಎಡ, ಬಲ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆದು, ಆಯತದ ಎಡಭಾಗದ ಭುಜವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದರೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ (ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೆಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆಂದು ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ **ವೃತ್ತಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಪರಿವೃತ್ತ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ) :



ಇನ್ನು ಹೀಗೆ ಸಿಕ್ಕಿದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಡ್ಡಕ್ಕೆ ಗುರುತಿಸಿ, ನಮಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು:

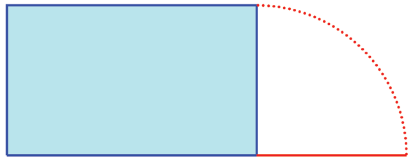


ಹೀಗೆ ರಚಿಸಲು, ಮೊದಲಿನ ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು ತಿಳಿದಿರಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಬೇಕು ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದರೆ ಸಾಕು.

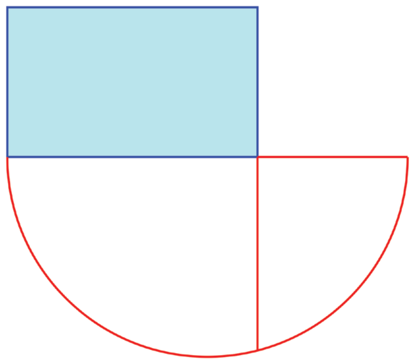
ಒಂದು ಆಯತದಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲು, ಇದೇ ತತ್ವದ ಉಪತತ್ವವಾದ, ವ್ಯಾಸದ ಭಾಗಗಳು ಮತ್ತು ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಜ್ಯಾಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ಆಯತವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

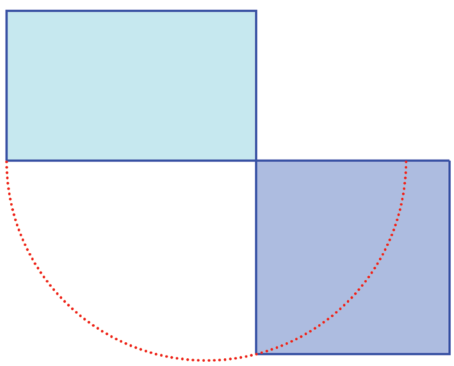
ಇದರಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲು, ಮೊದಲು ಆಯತದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಗಲದಷ್ಟು ಸೇರಿಸಿ ಗೆರೆ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಇನ್ನು ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲವು ಸೇರಿರುವ ಗೆರೆಯು ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ; ಆಯತದ ಬಲಭಾಗದ ಭುಜವನ್ನು ಕೆಳಭಾಗಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಸಿ, ಅರ್ಧವೃತ್ತದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿರಿ.

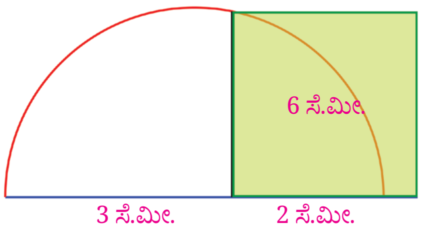


ಈ ಗೆರೆಯು ಚೌಕದ ಭುಜವಾಗಿರುವುದು (ಯಾಕೆ?)



ಇಲ್ಲಿಯೂ, ಮೊದಲ ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಗಳು ತಿಳಿದಿರಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಇನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಲೂ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ತತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\sqrt{6}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು ಹೇಗೆಂದು ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ; ಈ ಉದ್ದವು ಭುಜವಾಗುವಂತೆ 6 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು:



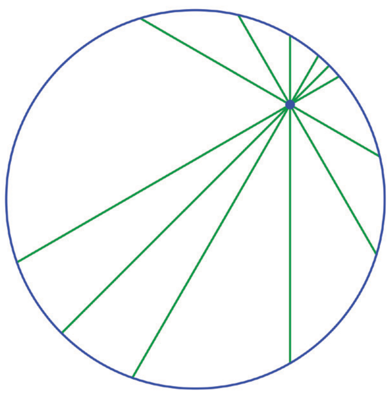
(1) 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದ ಮತ್ತು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಗಲವಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
   (i) ಇಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ, ಉದ್ದ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಆಯತವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.
   (ii) ಇಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(2) 15 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(3) 5 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಮೂರು ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ. (ಪೈಥಾಗರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಿರಲ್ಲವೇ)

ವೃತ್ತವೂ ಬಿಂದುವೂ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

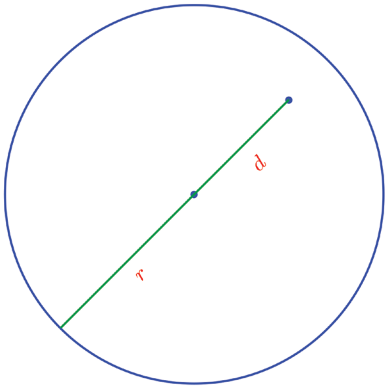


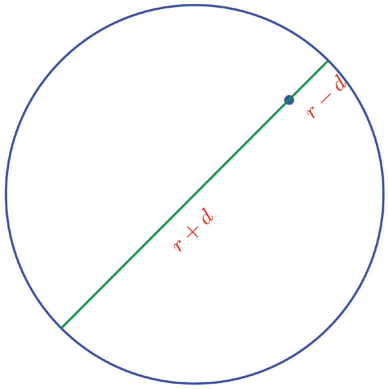
ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ A ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಮತ್ತು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ P ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಗುರುತಿಸಿರಿ. Line ಉಪಯೋಗಿಸಿ AP ಎಂಬ ಗೆರೆ ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ಗೆರೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಹೊಸ ಬಿಂದು B ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಇನ್ನು ಗೆರೆಯನ್ನು ಮರೆಮಾಡಬಹುದು. AB ಎಂಬ ಜ್ಯಾವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. PA × PB ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. A ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. PA × PB ಬದಲಾಗುವುದೇ? P ಯ ಸ್ಥಾನ ಬದಲಾದರೋ? P ಎಂಬ ಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ದೂರ ಹೋದಂತೆ PA × PB ಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು? P ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಆದರೋ? ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಾದರೋ?

ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಹಲವಾರು ಜ್ಯಾಗಳು. ಇವುಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ, ಈ ಬಿಂದು ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವುದಲ್ಲವೇ. ನಾವು ಈಗ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವದ ಪ್ರಕಾರ, ಈ ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಲು, ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು. ಅದು ಕೂಡ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಆದುದರಿಂದ, ಬಿಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಇದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಎಂದೂ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ d ಎಂದೂ ತೆಗೆದರೆ, ವ್ಯಾಸದ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಬಹುದು:

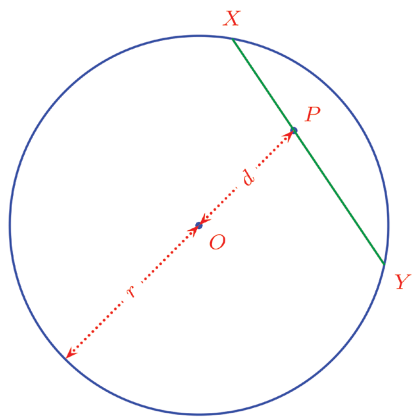




ಹಾಗಾದರೆ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು

$$(r + d)(r - d) = r^2 - d^2$$

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆಯುವ ಯಾವುದೇ ಜ್ಯಾಗಳ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ; ಹಾಗಾದರೆ ಇಂತಹ ಎಲ್ಲಾ ಜ್ಯಾಗಳ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು $r^2 - d^2$ ಆಗಿದೆ.



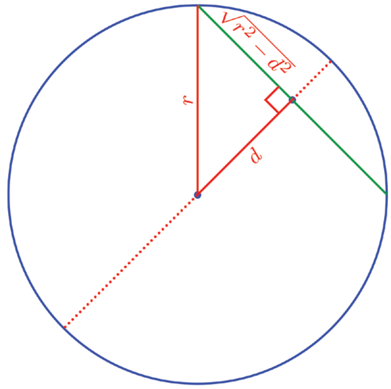
$$PX \times PY = r^2 - d^2$$

ಅಂದರೆ

ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದೊಳಗೆ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ d ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು P ಯ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಯಾವುದೇ ಜ್ಯಾ XY ಯನ್ನು ತೆಗೆದರೂ

$$PX \times PY = r^2 - d^2$$

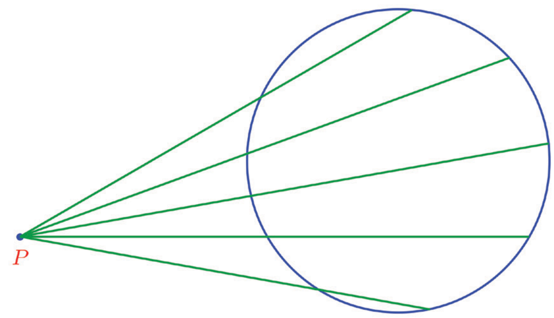
ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ, $r^2 - d^2$ ಎಂಬುದು, P ಯ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯುವ ಜ್ಯಾದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ.



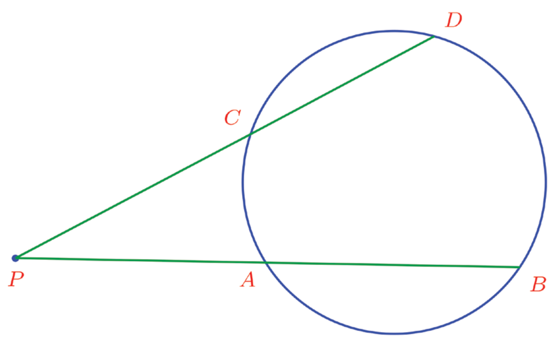
ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ತತ್ವದಲ್ಲಿ, P ವೃತ್ತದೊಳಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು ಮತ್ತು P ಯ ಮೂಲಕವಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು X, Y ಆಗಿವೆ; PX, PY ಇವುಗಳು P ಯಿಂದ ಈ ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವೂ ಆಗಿದೆ.

ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ, P ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದರೋ?

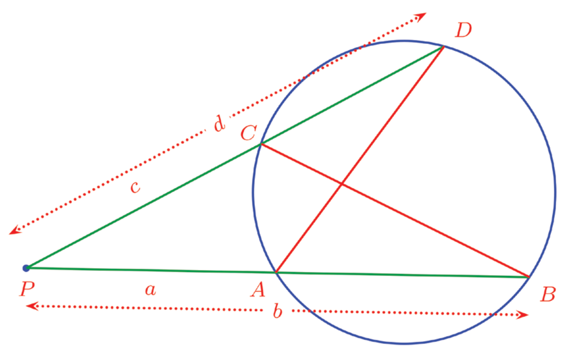
ಇಂತಹ ಗೆರೆಗಳಲ್ಲೂ, P ಯಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದೇ?



ಇಂತಹ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಪರಿಶೋಧಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $PA \times PB$ ಮತ್ತು $PC \times PD$ ಎಂಬುದು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅದನ್ನು ಪರಿಶೋಧಿಸಲು, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಹಾಗೆ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು, ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು. PA, PB ಎಂಬೀ ಉದ್ದಗಳನ್ನು a, b ಎಂದೂ PC, PD ಎಂಬೀ ಉದ್ದಗಳನ್ನು c, d ಎಂದೂ ತೆಗೆಯೋಣ:



PAD, PCB ಎಂಬೀ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಗೆ P ಯಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಕೋನವಿರುವುದು; B ಮತ್ತು D ಯ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. (ಯಾಕೆ?)

ಹಾಗಾದರೆ ಈ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು; ಆದುದರಿಂದ ಸಮಾನ ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಸಮಾನ ದರದಲ್ಲಿ ಬದಲಾಗುವುವು.

ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ B ಮತ್ತು D ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು c ಮತ್ತು a ಆಗಿವೆ.

C ಮತ್ತು A ಕೋನಗಳ ಎದುರಿರುವ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು b ಮತ್ತು d ಆಗಿವೆ.

ಇವುಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವು ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಈ ದರವನ್ನು k ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ,

$$c = ka$$

$$b = kd$$

ಇದರಿಂದ ವೃತ್ತದೊಳಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ವಿಚಾರದಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಂತೆ

$$ab = cd$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು (ಮಾಡಿ ನೋಡಿರಿ).

ಅಂದರೆ

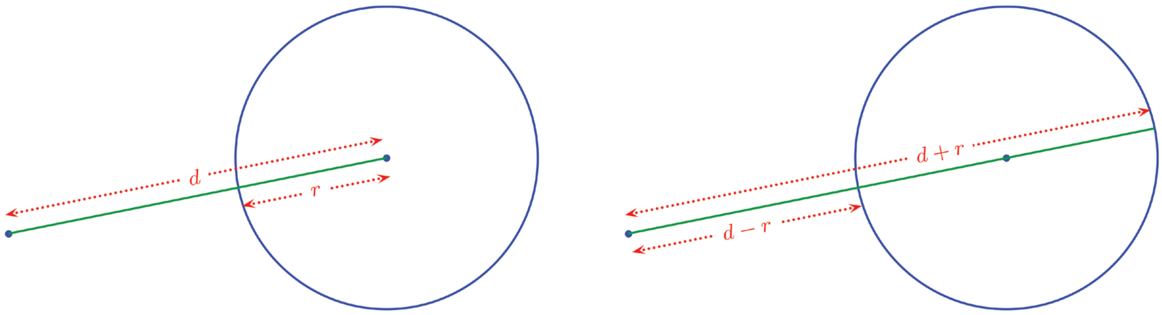
$$PA \times PB = PC \times PD$$

ಹಾಗಾದರೆ ಏನು ಸಿಗುವುದು?

> ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಎಲ್ಲಾ ಗೆರೆಗಳಲ್ಲೂ ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

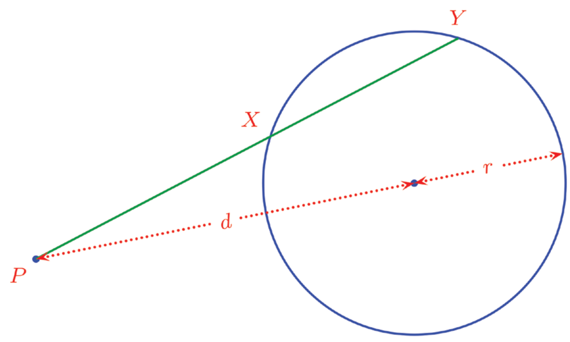
ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಎಂದೂ, ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ d ಎಂದೂ ತೆಗೆಯೋಣ. ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ದೂರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ:



ಹಾಗಾದರೆ ಹೊರಗಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರಗಳು $d - r$ ಮತ್ತು $d + r$ ಎಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು. ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು

$$(d + r)(d - r) = d^2 - r^2$$

ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆಯುವ ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ, ಗೆರೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಇದುವೇ ಆಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ:



$$PX \times PY = d^2 - r^2$$

ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ ಒಂದು ಬಿಂದು P ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. P ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದು T ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ವೃತ್ತದಲ್ಲಿಒಂದು ಬಿಂದು Y ಯನ್ನುಗುರುತಿಸಿ, PY ಎಂಬ ಗೆರೆಯನ್ನುಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ಗೆರೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನುಛೇದಿಸುವ ಹೊಸ ಬಿಂದು X ನ್ನುಗುರುತಿಸಿರಿ. PT^2 (Input PT^2) PX × PY ನ್ನುಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ ಹೋಲಿಸಿರಿ. P ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

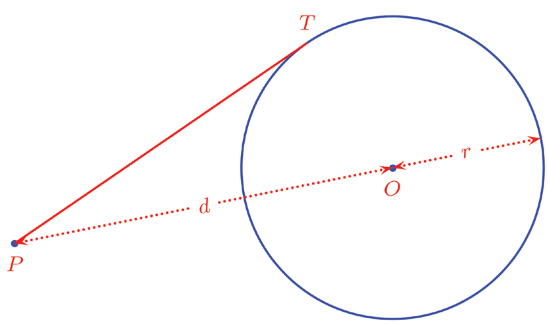
ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ d ದೂರದಲ್ಲಿರುವ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು X ಮತ್ತು Y ಆದರೆ

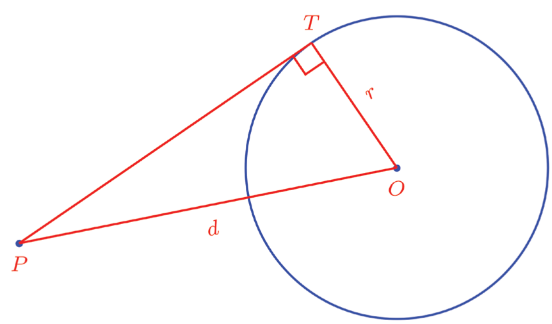
$$PX \times PY = d^2 - r^2$$

P ವೃತ್ತದೊಳಗಾದರೆ $PX \times PY$ ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು P ಯ ಮೂಲಕವಿರುವ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಜ್ಯಾದ ಅರ್ಧದ ವರ್ಗವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದಲ್ಲವೇ.

P ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಾದರೆ, ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದೇ?

ಅದಕ್ಕಾಗಿ P ಯಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆದು ಅದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಬಿಂದು T ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಇನ್ನು P ಮತ್ತು T ಯನ್ನು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವು ಸಿಗುವುದು:



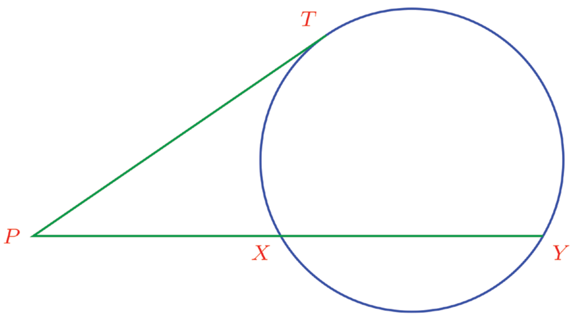


ಇದೊಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾದುದರಿಂದ (ಯಾಕೆ?)

$$d^2 - r^2 = PT^2$$

ಹಾಗಾದರೆ

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಯಾವುದೇ ಗೆರೆಯನ್ನೆಳೆದರೂ, ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು, ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದದ ವರ್ಗವಾಗಿದೆ.



$$PX \times PY = PT^2$$

ಇನ್ನು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ ಇರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಗಳ ಕುರಿತಾದ ತತ್ವಗಳನ್ನು ತುಲನೆ ಮಾಡೋಣ.

ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದೊಳಗೆ, ಕೇಂದ್ರದಿಂದ d ದೂರ ದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದಾದರೆ, d ಎಂಬ ದೂರವು, ತ್ರಿಜ್ಯ r ಗಿಂತಲೂ ಸಣ್ಣದಾಗಿರಬೇಕಲ್ಲವೇ; ಹಾಗಾದರೆ P ಯ ಮೂಲಕವಿರುವ ಗೆರೆಗಳು ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರದ ಗುಣಲಬ್ಧವು $r^2 - d^2$.

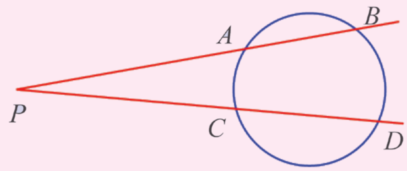
ಬಿಂದು ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಾಗಬೇಕಾದರೆ d ಎಂಬ ದೂರ r ಗಿಂತಲೂ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರಬೇಕು; ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಗುಣಲಬ್ಧವು $d^2 - r^2$.

ಬಿಂದು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ ಆದರೂ r^2, d^2 ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದರಿಂದ ಚಿಕ್ಕದನ್ನು ಕಳೆಯುವುದಾಗಿದೆ; ಅಂದರೆ, ಎರಡರಲ್ಲೂ $r^2 - d^2$ ನ ಕೇವಲಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯುವುದು. (ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ **ರೇಖೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ **ದೂರಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ)

ಹಾಗಾದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

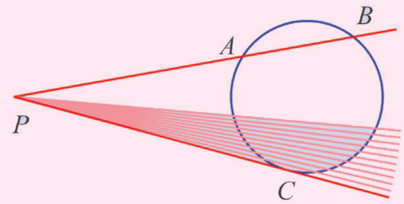
ಬದಲಾಗದ ಸಂಬಂಧ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ಇದರಲ್ಲಿ $PA \times PB = PC \times PD$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

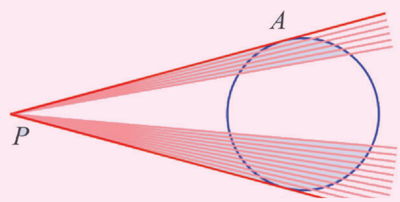
ಕೆಳಗಿನ ಗೆರೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿ ಮಾಡಿದರೋ?



PD ಎಂಬುದು PC ಆಗುವುದು; ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ ಸಂಬಂಧ

$PA \times PB = PC^2$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಮೇಲಿನ ಗೆರೆಯೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾದರೋ?



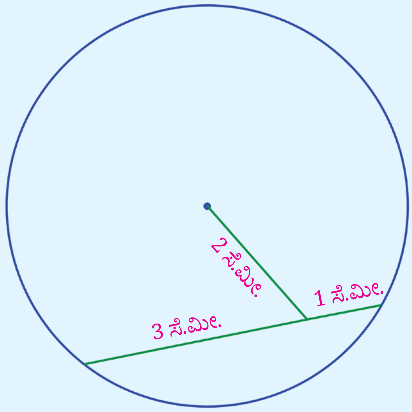
ಈ ಸಂಬಂಧವು $PA^2 = PC^2$ ಅಥವಾ $PA = PC$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದೆಂದು ಹಿಂದೆ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ.

ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ d ದೂರದಲ್ಲಿ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು X ಮತ್ತು Y ಆದರೆ

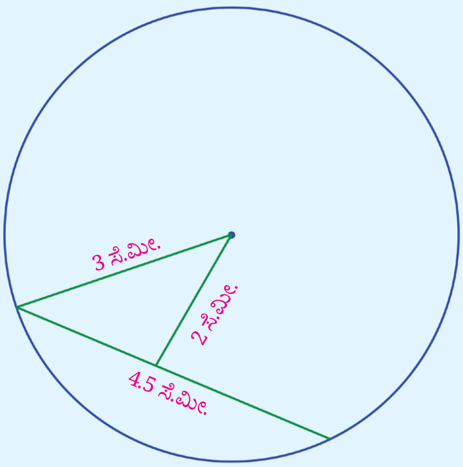
$$PX \times PY = |r^2 - d^2|$$

(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯು ಒಂದು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಎರಡಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು.



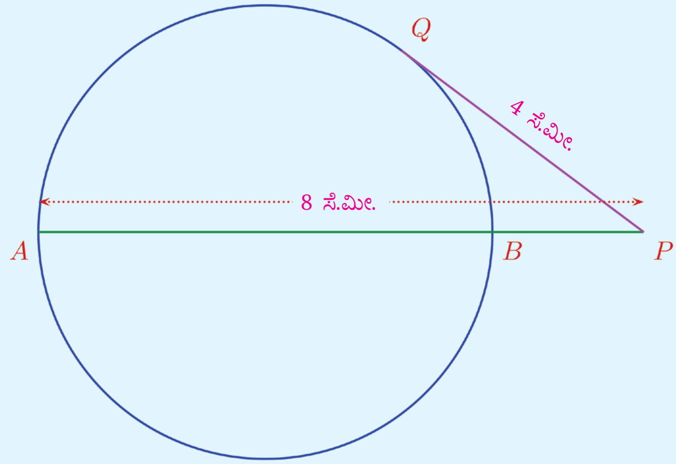
ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು?

(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆ, ಒಂದು ಜ್ಯಾವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವುದು.



ಜ್ಯಾದ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

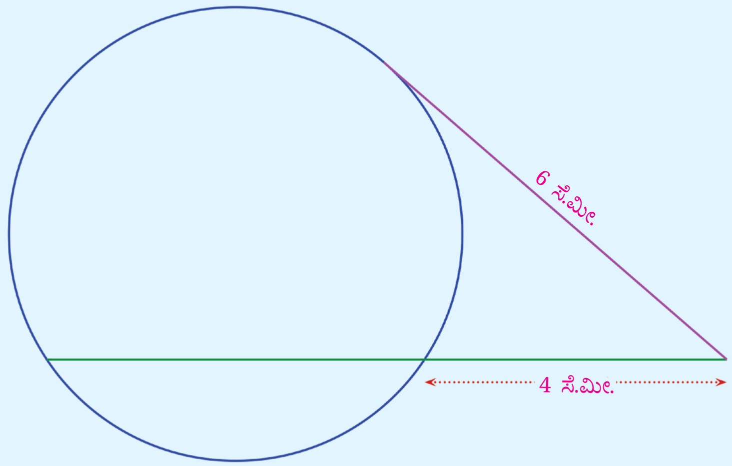
(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AB ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ, P ಯು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದ ಗೆರೆಯ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. P ಯಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು Q ವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದು.

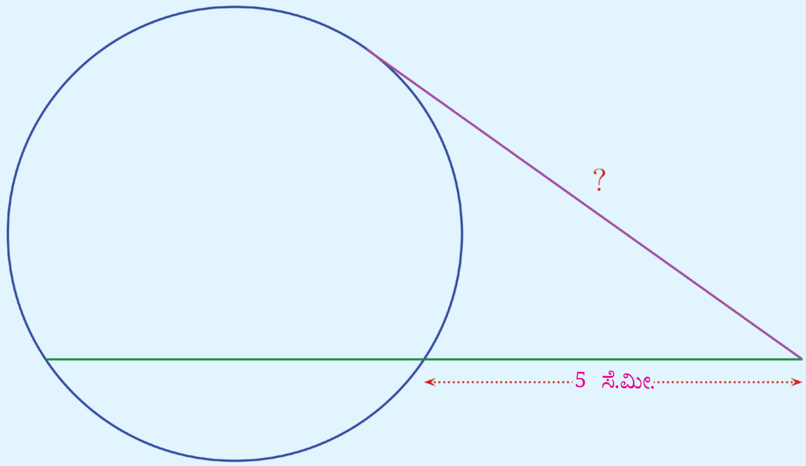


ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು?

(4) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೊದಲ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದ ಗೆರೆಯನ್ನು ಹೊರಗೆ ಮುಂದುವರಿಸಲಾಗಿದೆ, ಅಲ್ಲಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಲಾಗಿದೆ.

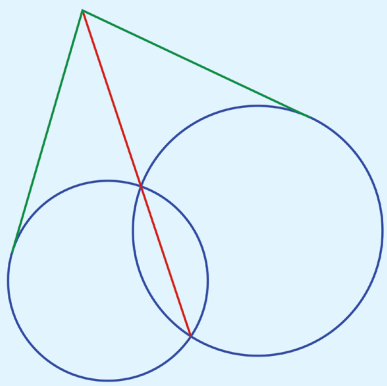
ಇದೇ ಗೆರೆಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಲ್ಪ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಮುಂದುವರಿಸಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿದೆ.





ಈ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

(5) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳಿಗೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ.



ಈ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

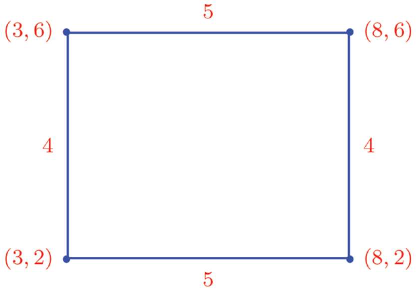
11 ಜ್ಯಾಮಿತಿಯೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ

ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು

ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು **ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ. ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರುವೆವು.

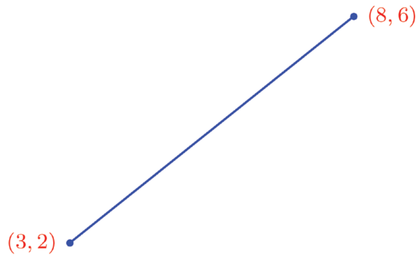
ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಭುಜಗಳು ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಆಯತದ ಒಂದು ಜೊತೆ ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಗಳು (3, 2) ಮತ್ತು (8, 6) ಆದರೆ, ಅದರ ಉಳಿದೆರಡು ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈ ಆಯತದ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು:



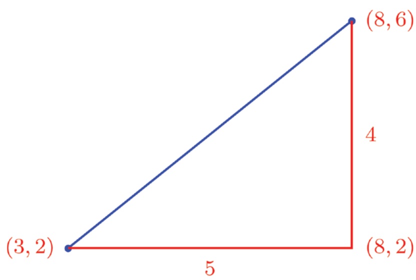
ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು.

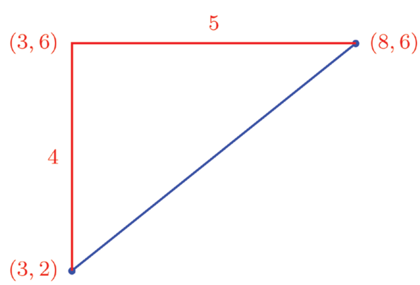
(3, 2) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (8, 6) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವಾಗ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳು ಯಾವುವು?



- x - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $8 - 3 = 5$ ಹೆಚ್ಚುವುದು.
- y - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $6 - 2 = 4$ ಹೆಚ್ಚುವುದು.

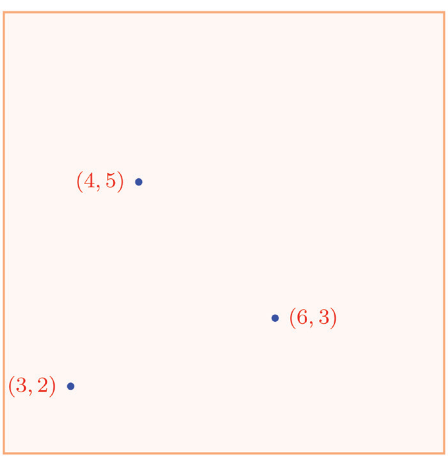
ಈ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಮಾಡಿದರೋ?

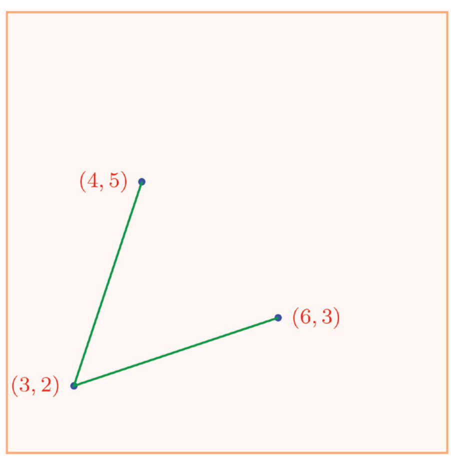


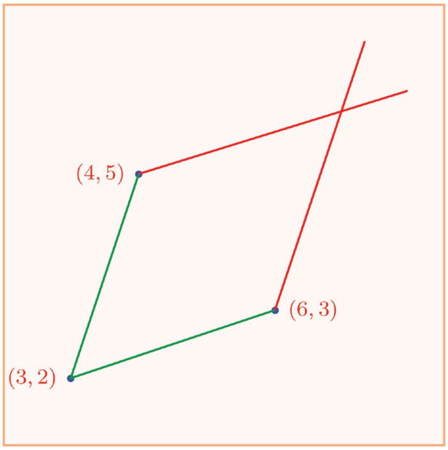


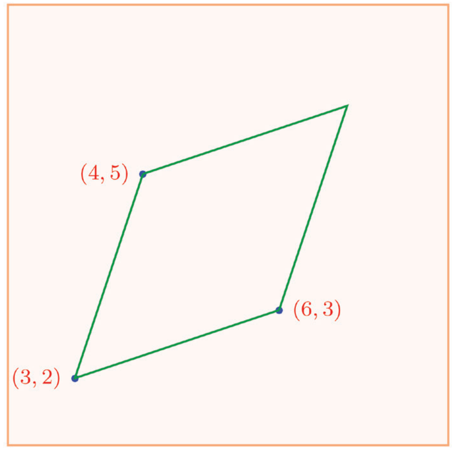
ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಾಗುವಾಗ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಲಂಬಭುಜಗಳು ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.









ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ .

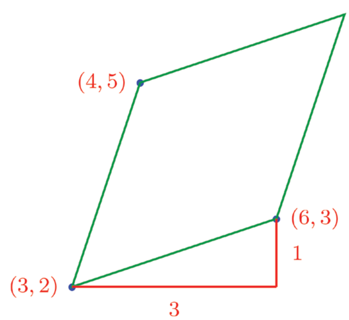
ಇದರ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುದು?

ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಭುಜದ ಎಡಭಾಗದ ಶಿರದಿಂದ ಬಲ ಭಾಗದ ಶಿರಕ್ಕೆ ಸಾಗುವಾಗ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಆಗುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡುವ.

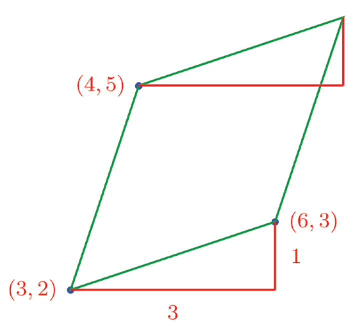
- x - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $6 - 3 = 3$ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು.
- y - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $3 - 2 = 1$ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು.

ಈ ಮೊದಲೇ ಹೇಳಿರುವಂತೆ, ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಈ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಬಹುದು:

> A(0, 0) ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಮತ್ತು B, C ಎಂಬ ಬೇರೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಗುರುತಿಸಿರಿ. Input Bar ನಲ್ಲಿ (x(B) + x(C), y(B) + y(C)) ಎಂದು ನೀಡಿದರೆ D ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದು ಲಭಿಸುವುದು. ABDC ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇದು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಲ್ಲವೇ? ಕಾರಣವೇನು? B, C ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.



ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಭುಜದಲ್ಲಿ, ಬಲಭಾಗದ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಎಡಭಾಗದ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿದರೆ ಸಾಕು. ಅದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ಕೆಳಭಾಗದ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲೂ ರಚಿಸುವ.



ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳಾಗಿವೆ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳು.ಅವುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಹೇಗೆ?

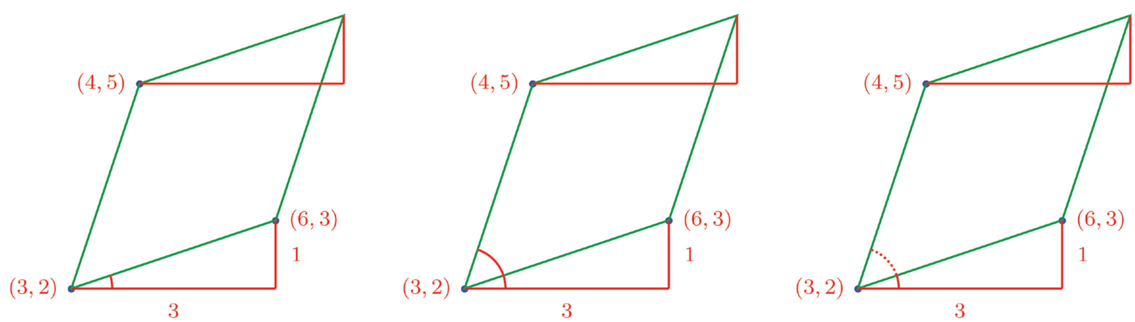
ಈ ತ್ರಿಕೋನವು ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಅದನ್ನು ನೋಡುವಾಗಲೇ ತೋರುವುದಿಲ್ಲವೇ? ಅದನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿದೆಯೋ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

ಕೆಳಭಾಗದ ಹಾಗೂ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕರ್ಣಗಳು ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿರುದ್ಧ ಭುಜಗಳಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು.

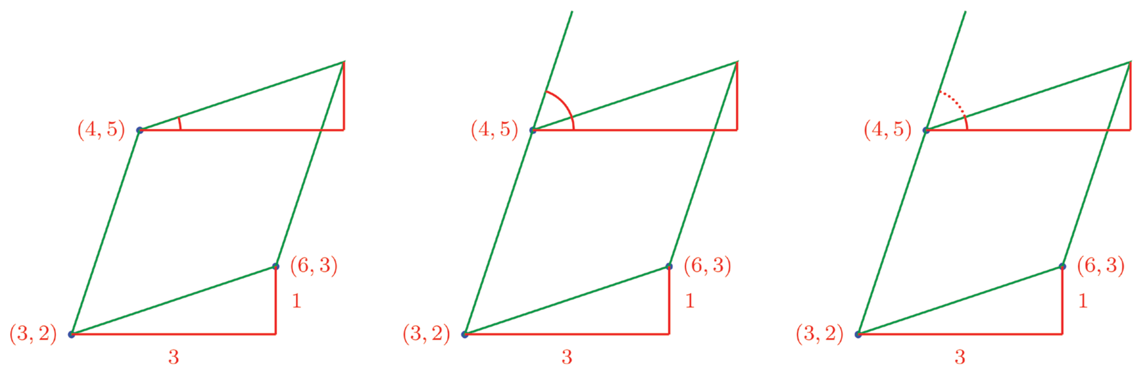
ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳಿಗಾದರೇ?

ಕೆಳಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಡಭಾಗದ ಶಿರಕೋನವನ್ನು ಎರಡು ಕೋನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದಲ್ಲವೇ.

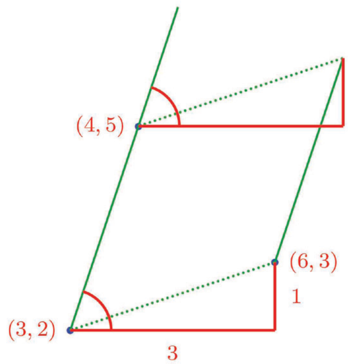
ತ್ರಿಕೋನ ABC ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Move ಟೂಲ್ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ 3 ಅಂತರವಿರುವಂತೆ ಸರಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಯಾವ ಬದಲಾವಣೆ ಉಂಟಾಗುವುದು? ಹೀಗೆ ಲಭಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಮೇಲ್ಭಾಗಕ್ಕೆ 2 ಅಂತರವಿರುವಂತೆ ಸರಿಸಿರಿ. ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಏನು ಸಂಭವಿಸುವುದು? ಮೊದಲನೇ ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಲಭಿಸಿದ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು? ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಆವರ್ತಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

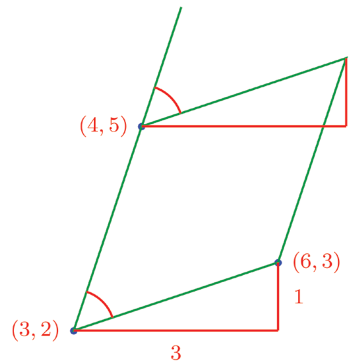


ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿರುವ ಎಡಭಾಗದ ಕೋನವನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು.



ಹೀಗೆ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲೂ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲೂ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋನವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



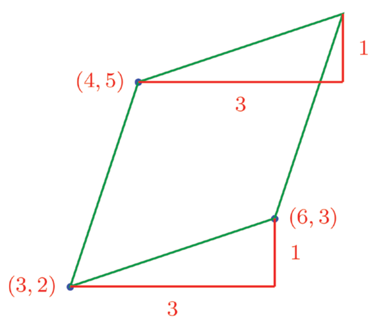


ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಕೋನಗಳು ಎಡಭಾಗದ ಹಸುರು ಗೆರೆ, ಕೆಂಪು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಎರಡು ಸಣ್ಣ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ: ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳು ಸಮಾನ. ಎರಡನೆಯ ಕೋನಗಳು, ಇದೇ ಗೆರೆಯು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲೂ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲೂ ಹಸುರು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಎರಡು ಸಣ್ಣ ಕೋನಗಳಾಗಿವೆ; ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳೂ ಸಮಾನ (ಏಳನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಕೋನಗಳೊಳಗಿನ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ) .

ಆಗ ಈ ಕೋನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳೂ ಸಮಾನವಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ, ಈ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಕೆಳಭಾಗದ ಕೋನಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಮೂರನೇ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವು. ಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಅದರ ಎರಡು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೋನಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಉಳಿದ ಭುಜಗಳಿಗೂ ಸಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವುದು. (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ಸಮಾನ ತ್ರಿಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಎರಡು ಕೋನಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗ).

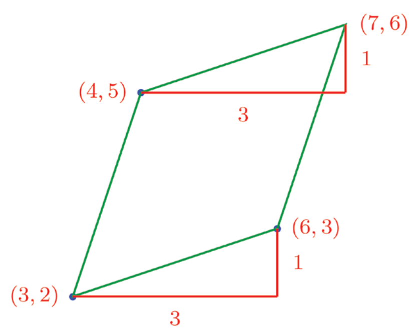
ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಒಂದು ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಅಗತ್ಯಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಲು Translate by Vector ಟೂಲನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದನ್ನು ಬಲಕ್ಕೆ 3 ಮತ್ತು ಮೇಲಕ್ಕೆ 2 ರಷ್ಟು ಸ್ಥಾನಾಂತರಿಸಬೇಕೆಂದಿರಲಿ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ (0, 0), (3, 2) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. Translate by Vector ಟೂಲನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮೊದಲು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲೂ ನಂತರ (0, 0), (3, 2) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲೂ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿರಿ. ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆ ಏನು? (3, 2) ರ ಬದಲಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

ಆಗ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

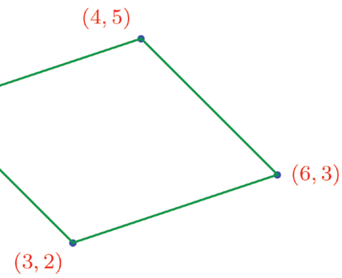


ಇನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ.

- x - ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ $4 + 3 = 7$
- y - ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ $5 + 1 = 6$

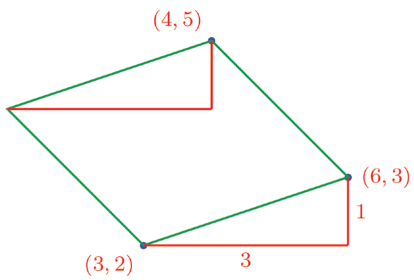


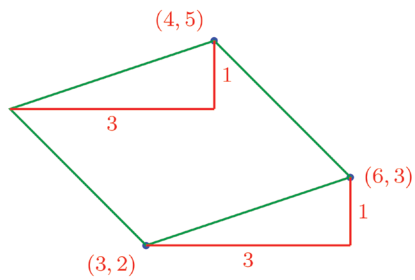
ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ತೆಗೆದ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನೇ ಶಿರಗಳಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ;



ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿರುವಂತೆಯೇ, ಲಂಬಭುಜಗಳು ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲೂ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲೂ ರಚಿಸಿ ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.



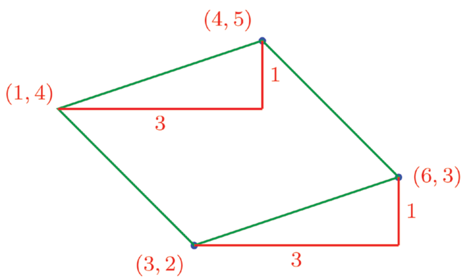


ಇಲ್ಲಿ (4, 5) ಎಂಬ ಶಿರದಿಂದ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯಬೇಕಾದ ಶಿರಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು ಕೆಳಕ್ಕೆ 1 ರಷ್ಟು ಮತ್ತು ಎಡಕ್ಕೆ 3 ರಷ್ಟು ಚಲಿಸಬೇಕು ಅಲ್ಲವೇ.

ಅಂದರೆ,

- y - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 1 ಕಳೆಯಬೇಕು.
- x - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 3 ಕಳೆಯಬೇಕು.

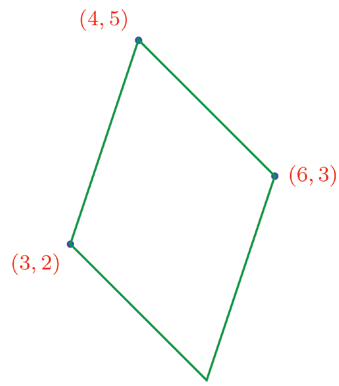
ಆಗ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು (1, 4):



A, B, C ಎಂಬೀ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

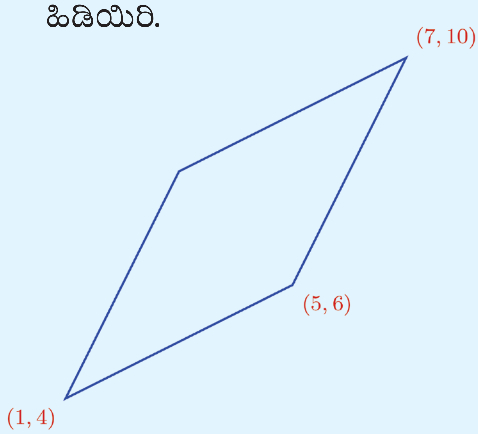
(x(B) + x(C) − x(A), y(B) + y(C) − y(A)) ಎಂದು Input Bar ನಲ್ಲಿ ನೀಡಿದರೆ D ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದು ಸಿಗುವುದು. ABDC ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆಯೇ? ಯಾಕೆ? ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

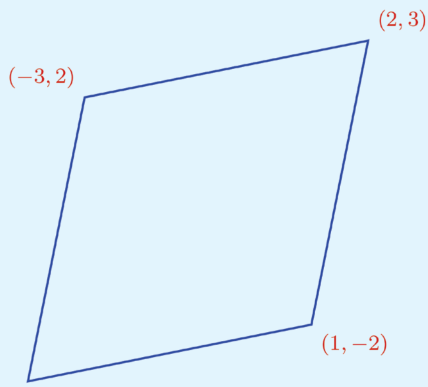
ಇದೇ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗಿರುವಂತೆ ಇನ್ನೂ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ.



ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ?

(1) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

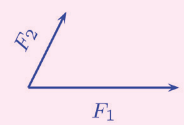




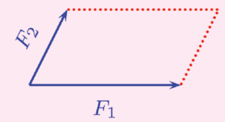
ಬಲಗಳ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ನಿಯಮ

ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಮೇಲೆ ಬಲವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುವಾಗ ಸ್ಥಾನ, ವೇಗ ಮೊದಲಾದವುಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯು, ಬಲದ ಅಳತೆಗೆ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಅದನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುವ ದಿಕ್ಕನ್ನೂ ಅವಲಂಬಿಸಿರುವುದು. ಒಂದೇ ವಸ್ತುವಿನಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಲಗಳನ್ನು ಎರಡು ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಿಸುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಅದೇ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಬಲವನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಪ್ರಯೋಗಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ತರಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ.

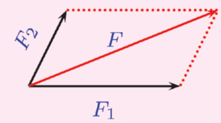
ಈ ಬಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯೋಗಗಳ ಮೂಲಕ ತಿಳಿದುಕೊಂಡ ಒಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮೊದಲ ಎರಡು ಬಲಗಳ ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾದ ಉದ್ದವಿರುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು (ಒಂದು ನ್ಯೂಟನ್ ಬಲಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂಬಂತೆ), ಅವುಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುವ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ರಚಿಸಿರಿ.



ಇನ್ನು ಇವುಗಳು ಸಮೀಪ ಭುಜಗಳಾಗುವಂತೆ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

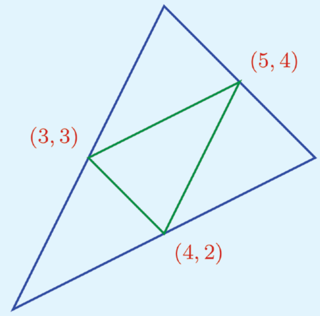


ಈ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣದ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಈ ಎರಡು ಬಲಗಳಿಗೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಫಲಿತ ಬಲ, ಅದರ ಅಳತೆ, ಮೊದಲು ಪರಿಗಣಿಸಿರುವ ಏಕಕವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಕರ್ಣದ ಅಳತೆಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದು.



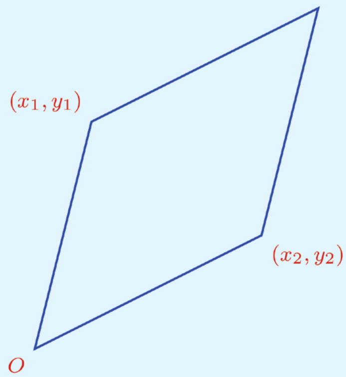
ಬಲಗಳ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ನಿಯಮ (parallelogram law of forces) ಎಂದು ಇದನ್ನು ಹೇಳುವರು.

(2) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳು ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿವೆ:

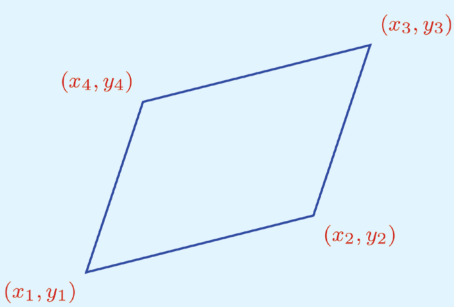


ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆಧಾರಬಿಂದುವಿನೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳು ಸಮೀಪ ಭುಜಗಳಾಗಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?



(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕೂ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ:



ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಳಗೆ ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

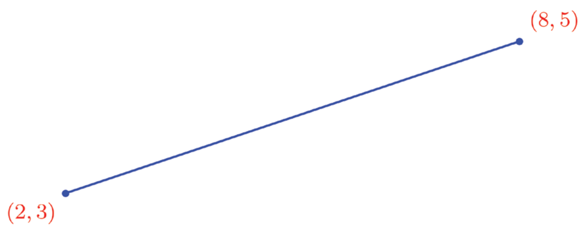
$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$$

$$y_1 + y_3 = y_2 + y_4$$

ಮಧ್ಯಬಿಂದು

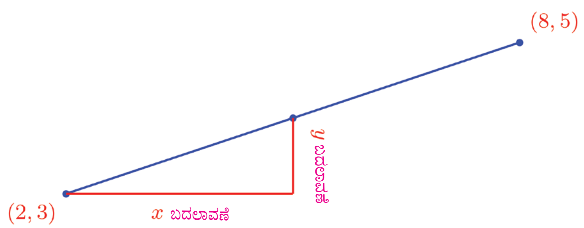
ನಾವು ಇದುವರೆಗೆ ಮಾಡಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳು ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಈ ಬಿಂದುಗಳೊಂದಿಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯವಾಗಿ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಇತರ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕೆಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಾಗಿವೆ. ಇಂತಹ ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ.

ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಎರಡೂ ತುದಿಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

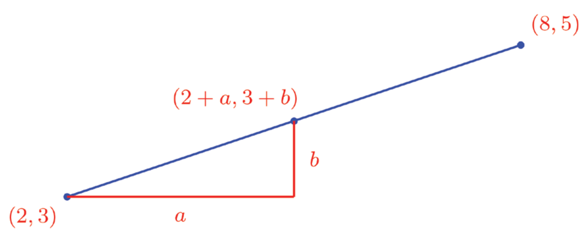


ಈ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

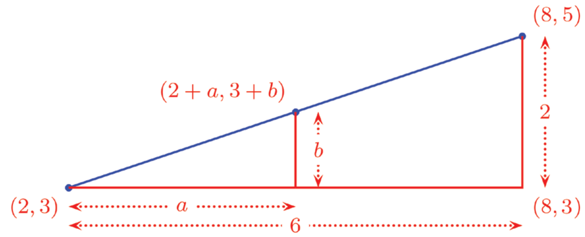
(2, 3) ರಿಂದ (8, 5) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ದೂರವಿರುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯ ಬೇಕಾಗಿದೆ. (2, 3) ರಿಂದ ಈ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತಲುಪುವಾಗ, x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯೂ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಯಿತು.



ಇವುಗಳನ್ನು a, b ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ, ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $(2+a, 3+b)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು;

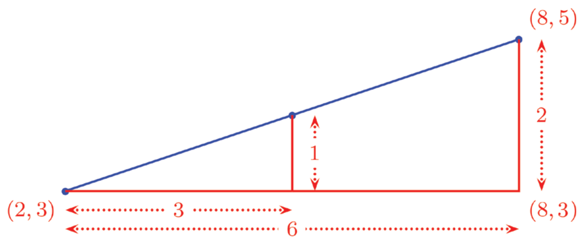


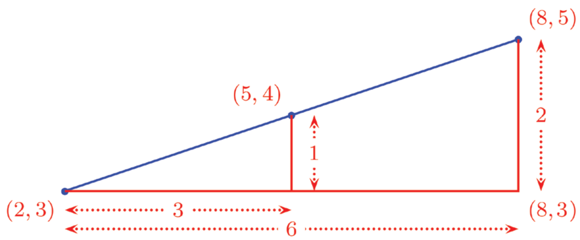
(2, 3) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (8, 5) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವಾಗ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ತ್ರಿಕೋನ ರಚಿಸಿ ತೋರಿಸಬಹುದು.



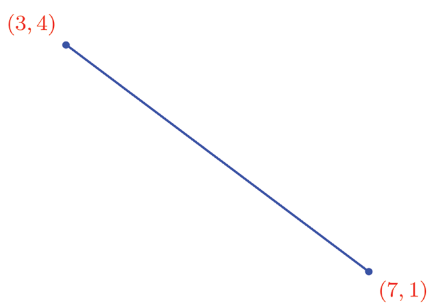
ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ದೊಡ್ಡ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೂ ಅದರೊಳಗಿರುವ ಸಣ್ಣ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೂ ಕೋನಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ (ಹೇಗೆ?). ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಬದಲಾಗುವುದು ಒಂದೇ ದರದಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣವು, ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ ಅರ್ಧ ಆಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಲಂಬಭುಜಗಳೂ ಅರ್ಧವೇ ಆಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ a ಮತ್ತು b ಕ್ರಮವಾಗಿ 3 ಮತ್ತು 1 ಆಗಿವೆ. ಮಧ್ಯಬಿಂದು (5, 4).

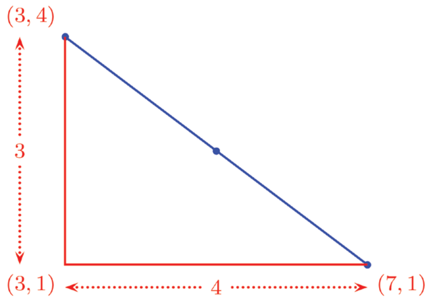


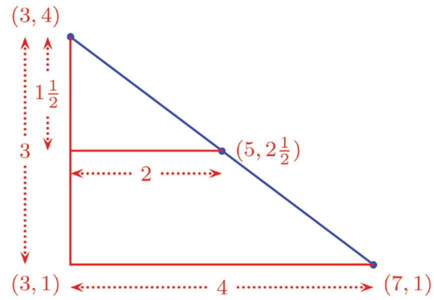


ಇನ್ನು, ಗೆರೆ ಹೀಗಾದರೆ?



(3, 4) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (7, 1) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವಾಗ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 4 ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು ಮತ್ತು y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 3 ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು; ಆಗ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪಲು x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗೆ 2 ಕೂಡಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ $1\frac{1}{2}$ ಕಳೆಯಬೇಕು.

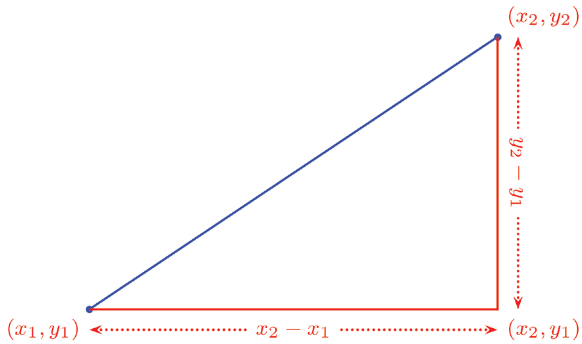


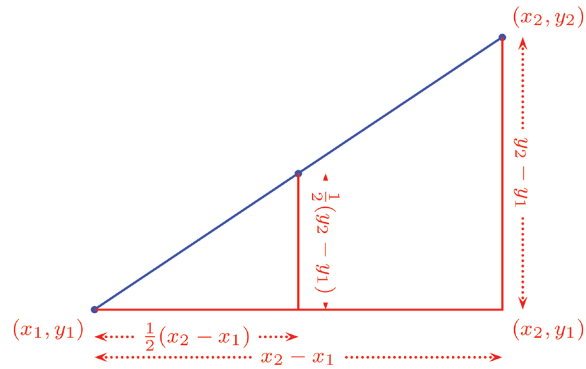


ಹೀಗೆ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\left(5, 2\frac{1}{2}\right)$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ ನೋಡುವ.

ಇವುಗಳ ಸ್ಥಾನವು ಹಲವು ರೀತಿಯಲ್ಲಿರಬಹುದು. ಮೊದಲು ಹೀಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ;





ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ

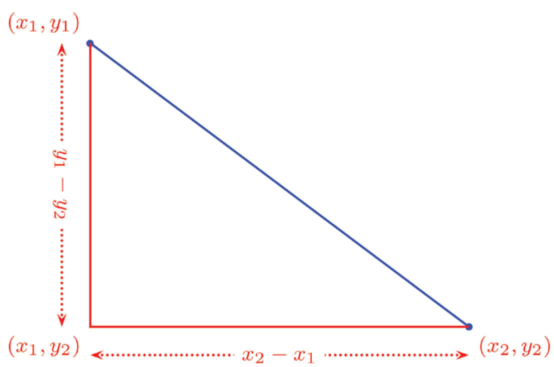
$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

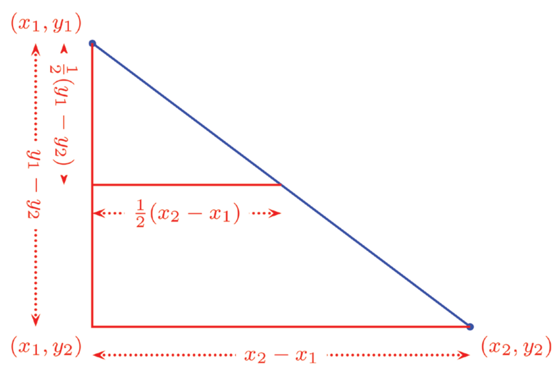
ಎಂದೂ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ

$$y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ?

ಬಿಂದುಗಳು ಹೀಗಾದರೋ?





ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ x-ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

y-ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ

$$y_1 - \frac{1}{2}(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

A, B ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸಿಗಲು (A + B)/2 ಎಂದು Input Bar ನಲ್ಲಿ ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕು.

(x_1, y_1), (x_2, y_2) ಎಂಬಿವುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಿ ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. ಏನು ಸಿಗುವುದು?

(x_1, y_1), (x_2, y_2) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು

$$\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$$

(1) (2,3), (6, 5) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಯಿತು. ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

(2) ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಒಂದು ಜೊತೆ ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು (4, 5) ಮತ್ತು (1, 3) ಆಗಿವೆ. ಅದರ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ. ಎರಡನೇ ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(3) $A(1, 3)$, $B(8, 6)$, $C(12, 13)$, $D(5, 10)$ ಎಂಬಿವುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗಿರುವಂತೆ $ABCD$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಯಿತು. $ABCD$ ಯು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

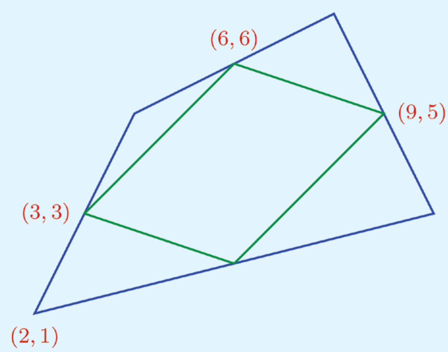
(4) ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು (3, 5), (9, 13), (10, 6) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.

(4) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವು (1, 2) ಮತ್ತು ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು (3, 5) ಆಗಿದೆ. ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವಿರುವ ವ್ಯಾಸದ ಇನ್ನೊಂದು ಅಗ್ರಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಷ್ಟು?

(6) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಚತುರ್ಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಅದರೊಳಗಿರುವ ಸಣ್ಣ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

(i) ದೊಡ್ಡ ಚತುರ್ಭುಜದ ಇತರ ಮೂರು ಶಿರಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) ಸಣ್ಣ ಚತುರ್ಭುಜದ ನಾಲ್ಕನೇ ಶಿರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

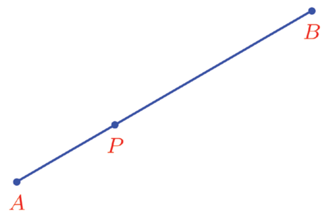


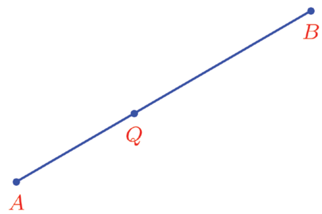
(7) ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(3, 0)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಶಿರಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ನಿಷ್ಪತ್ತಿ

ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎರಡು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿಸುವುದು. ಗೆರೆಯ ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದರೂ, ಅದು ಗೆರೆಯನ್ನು ವಿಭಿನ್ನ ಉದ್ದಗಳಿರುವ ಭಾಗಗಳಾಗಿಸುವುದು. ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಇಂತಹ ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. (ಎಂಟನೇ ತರಗತಿಯ **ನಿಷ್ಪತ್ತಿ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ಗೆರೆಯ ಭಾಗಗಳು** ಎಂಬ ಭಾಗವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿರಿ)

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಈ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ.





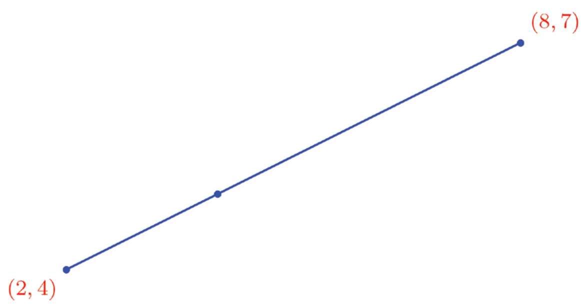
ಮೊದಲ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ AP ಯ ಉದ್ದವು AB ಯ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗ ಮತ್ತು PB ಯ ಉದ್ದವು AB ಯ ಉಳಿದ $\frac{2}{3}$ ಭಾಗವೂ ಆಗಿರುವುದು.

ಇದನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿ ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದು?

P ಎಂಬ ಬಿಂದು, A ಮತ್ತು B ಯನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು $1 : 2$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು. ಬದಲಾಗಿ ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ Q ಎಂಬ ಬಿಂದು A, B ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು $2 : 3$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವುದು ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥವೇನು?

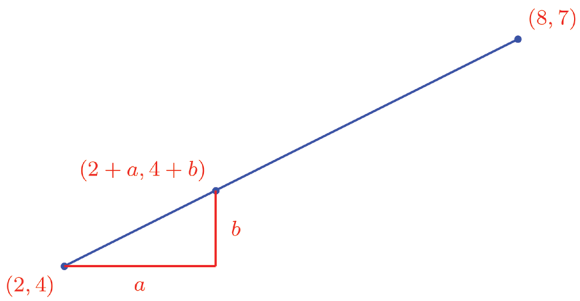
AQ ನ ಉದ್ದ AB ಯ ಉದ್ದದ $\frac{2}{5}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ (QB ಯ ಉದ್ದ AB ಯ ಉದ್ದದ $\frac{3}{5}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ).

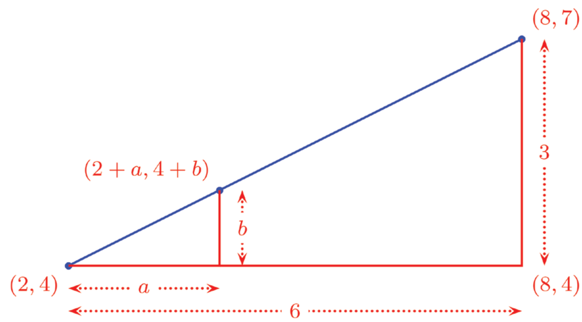
ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವಿಧಾನವನ್ನೇ (ಸ್ವಲ್ಪ ಬದಲಾಯಿಸಿ) ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(2, 4)$, $(8, 7)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು $1 : 2$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ.



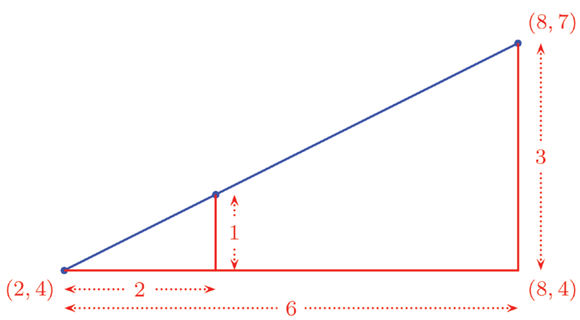
ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರುವ ವಿಧಾನದಲ್ಲೇ, (2, 4) ರಿಂದ ನಮಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವಾಗ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು a ಎಂದು ಮತ್ತು y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು b ಎಂದೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸುವ.

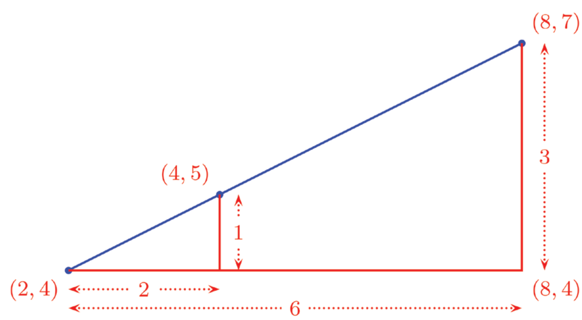
(2, 4) ರಿಂದ (8, 7) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವಾಗ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ರಚಿಸಿ ತೋರಿಸಬಹುದು;





ಇದರಲ್ಲಿ ಸಣ್ಣ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣವು ದೊಡ್ಡ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಕರ್ಣದ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ; ಆದುದರಿಂದ ಲಂಬಭುಜಗಳೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಆಗ ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ನಮಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ.





(2, 4), (8, 7) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ A, B ಎಂದೂ ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ P ಎಂದೂ ಹೆಸರಿಸಿದರೆ, ಮೇಲೆ ನಾವು ಮಾಡಿದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

(1) $AP : PB = 1 : 2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ AB ಯ ಉದ್ದದ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ AP ಯ ಉದ್ದ.

(2) A ಯಿಂದ B ಗೆ ತಲುಪುವಾಗ

  (i) x - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $8 - 2 = 6$ ಹೆಚ್ಚುವುದು.

  (ii) y - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $7 - 4 = 3$ ಹೆಚ್ಚುವುದು.

(3) A ಯಿಂದ P ಗೆ ತಲುಪುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯು ಇವುಗಳ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು.

  (i) x - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $6 \times \frac{1}{3} = 2$ ಹೆಚ್ಚುವುದು.

  (ii) y - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $3 \times \frac{1}{3} = 1$ ಹೆಚ್ಚುವುದು.

(4) P ಯ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು

(i) x - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $2 + 2 = 4$

(ii) y - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $4 + 1 = 5$

(5) P ಯ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(4, 5)$

A, B ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಜಿಸುವ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಬದಲಾದರೂ, ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(1, 6)$, $(11, 2)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು $3 : 5$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿರುವಂತೆ, ಈ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ A, B ಎಂದೂ, ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು P ಎಂದೂ ಹೆಸರಿಸಿ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ;

(1) $AP : PB = 3 : 5$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ AB ಯ ಉದ್ದದ $\frac{3}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ AP ಯ ಉದ್ದ.

(2) A ಯಿಂದ B ಗೆ ತಲುಪುವಾಗ

(i) x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $11 - 1 = 10$ ಹೆಚ್ಚುವುದು.

(ii) y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $6 - 2 = 4$ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು.

(3) A ಯಿಂದ P ಗೆ ತಲುಪುವಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆ ಇದರ $\frac{3}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ.

(i) x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $10 \times \frac{3}{8} = 3\frac{3}{4}$ ಹೆಚ್ಚುವುದು.

(ii) y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $4 \times \frac{3}{8} = 1\frac{1}{2}$ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು.

(4) P ಯ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು

(i) x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $1 + 3\frac{3}{4} = 4\frac{3}{4}$

(ii) y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ $6 - 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

(5) P ಯ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $\left(4\frac{3}{4}, 4\frac{1}{2}\right)$

A, B ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು 3 : 5 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದು ಸಿಗಲು A + (3/8) (B − A) ಎಂದು Input Bar ನಲ್ಲಿ ನೀಡಿದರೆ ಸಾಕು.

(1) A ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(3, 2)$ ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(8, 7)$ ಆಗಿರುವುದು. AB ಎಂಬ ಗೆರೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ P, Q ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.

(i) $AP : PB = 2:3$

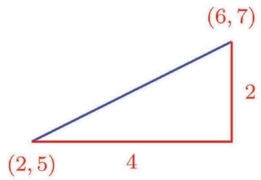
(ii) $AQ : QB = 3:2$

(2) (1, 6), (5, 2) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳು (–1, 5), (3, 7), (1, 1) ಎಂಬಿವುಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಮಧ್ಯಮ ಕೇಂದ್ರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗೆರೆ ಲೆಕ್ಕ

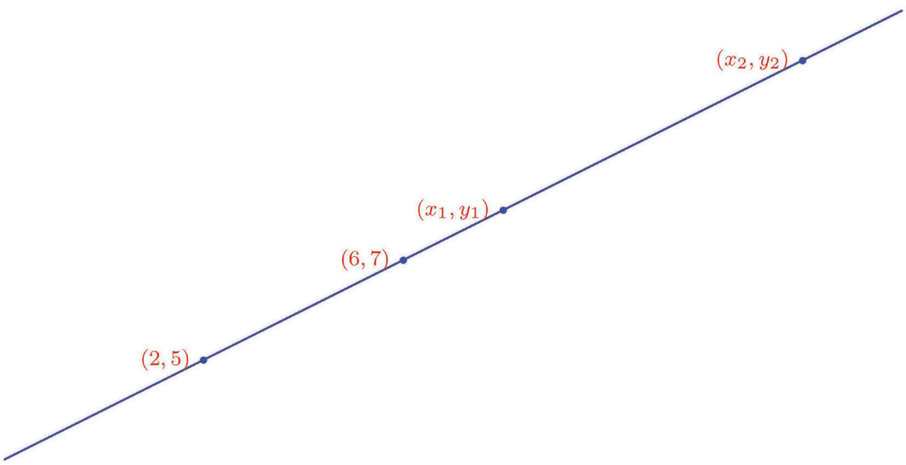
ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.



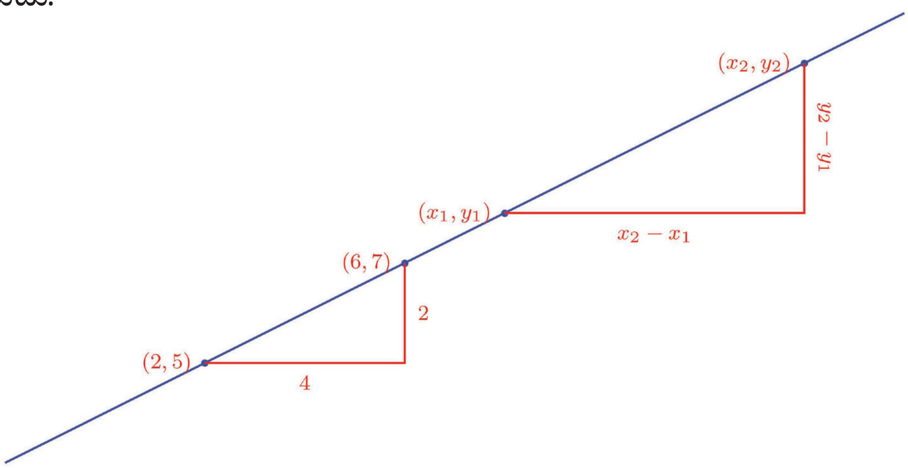
(2, 5) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (6, 7) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲಪುವಾಗ, x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 4 ಮತ್ತು y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 2 ಹೆಚ್ಚುವುದು.

ಅಂದರೆ, x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುವುದರ ಅರ್ಧವಾಗಿದೆ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುವುದು.

ಗೆರೆಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ, ಅದರ ಇತರ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೋ?



(x_1, y_1) ನಿಂದ (x_2, y_2) ವಿಗೆ ತಲಪುವಾಗ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲುಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.



$y_2 - y_1$ ಮತ್ತು $x_2 - x_1$ ಎಂಬಿವುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?

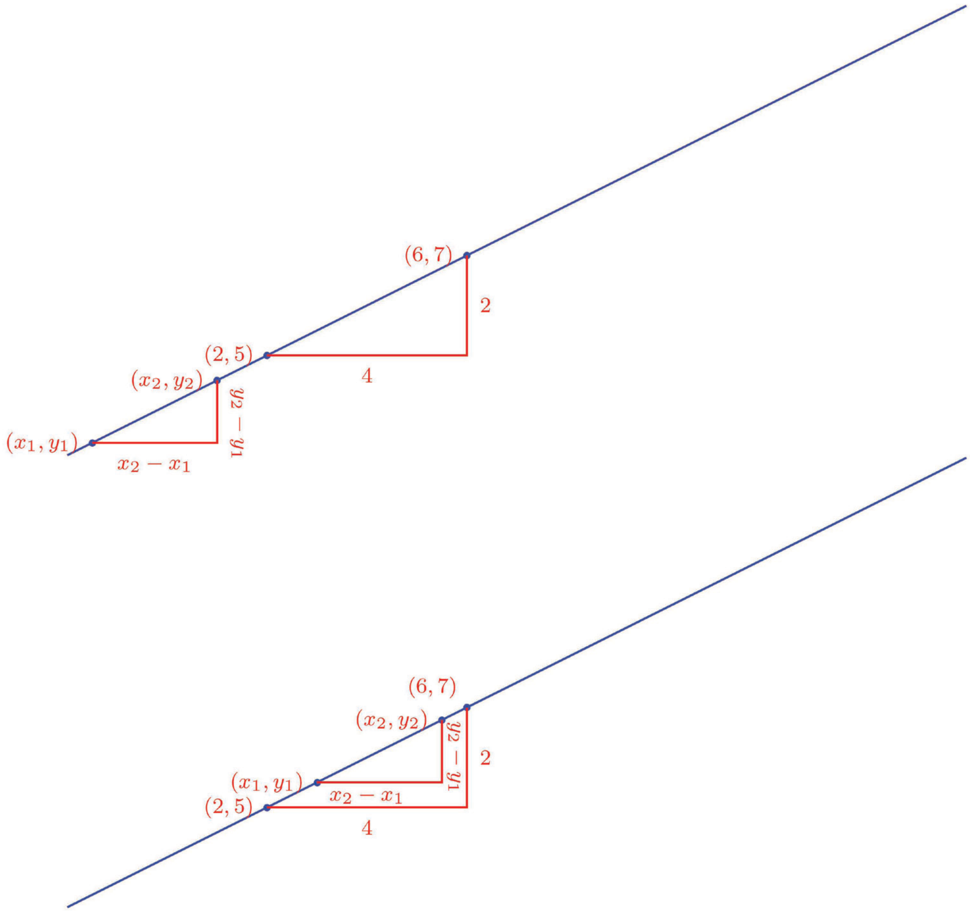
ಇದು ಸಣ್ಣ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಪಾದಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?

(ಯಾಕೆ?)

ಆಗ

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು $(2, 5), (6, 7)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲೇ ಇದ್ದರೂ ಈ ಸಂಬಂಧವು ಸರಿಯಾಗುವುದಲ್ಲವೇ.

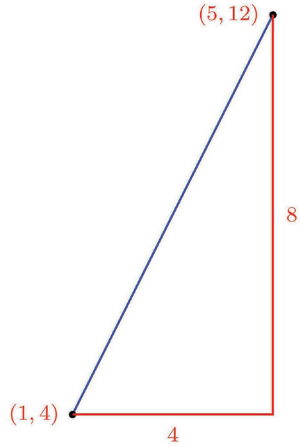


ಆಗ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

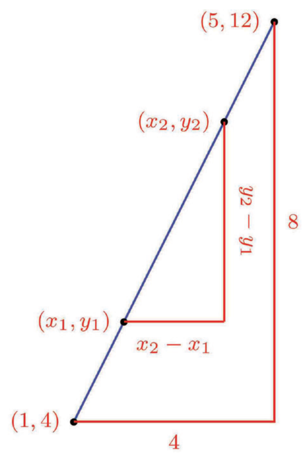
> $(2, 5), (6, 7)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲಪುವಾಗ, y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲುಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯು x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲುಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದು.

(2, 5), (6, 7) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳ ಬದಲಾಗಿ, ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೋ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, (1, 4), (5, 12) ಎಂದು ತೆಗೆದು ನೋಡುವ. ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಮೂಲಕ (1, 4) ರಿಂದ (5, 12) ಕ್ಕೆ ತಲಪುವಾಗ, x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 4 ಹೆಚ್ಚಾಯಿತು; y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 8 ಹೆಚ್ಚಾಯಿತು. ಅಂದರೆ, y ಯ ಬದಲಾವಣೆಯು x ನ ಬದಲಾವಣೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.



ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೋ?



ದೊಡ್ಡ ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರ, ಪಾದದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರವು ಅದರ ಪಾದದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಬೇಕಲ್ಲವೇ. ಆಗ,

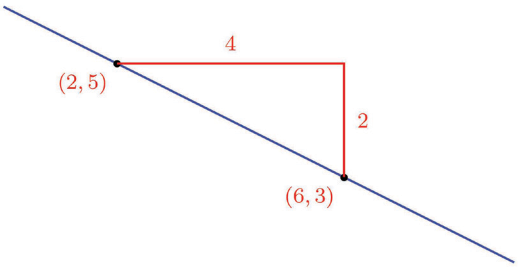
$$y_2 - y_1 = 2(x_2 - x_1)$$

ಅಂದರೆ,

> (1, 4), (5, 12) ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸಂಚರಿಸುವಾಗ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲೂ y ಯ ಬದಲಾವಣೆಯು, x ನ ಬದಲಾವಣೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ.

ಈ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳಲ್ಲೂ x ಹೆಚ್ಚುವಾಗ y ಯೂ ಹೆಚ್ಚುವುದು. ವಿಲೋಮ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೂ ನಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, (2, 5), (6, 3) ಎಂಬೀ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ, x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 4 ಹೆಚ್ಚಾಗುವಾಗ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 2 ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು.



a ಎಂಬ ಹೆಸರಿನ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ ರಚಿಸಿರಿ. A ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ.

(x(A) + a, y(A) + 2a) ಎಂದು Input Bar ನಲ್ಲಿ ನೀಡಿದಾಗ ಒಂದು ಹೊಸ ಬಿಂದು ಸಿಗುವುದು. ಸ್ಲೈಡರಿನಲ್ಲಿ Animation ನೀಡಿ ಬಿಂದುವು ಸಂಚರಿಸುವ ಪಥವನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಬಿಂದುವಿಗೆ Trace on ನೀಡಿ ನೋಡಿರಿ. A ಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ನೋಡಿರಿ.

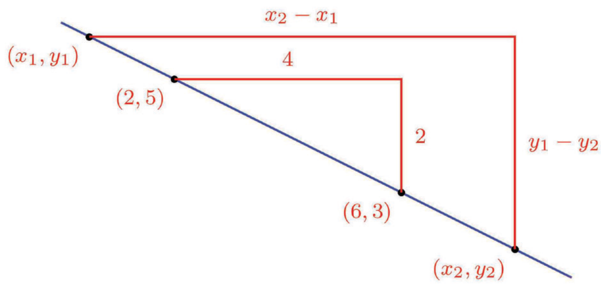
ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಹೇಳಬಹುದು. (2, 5) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (6, 3) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವಾಗ,

x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆ $6 - 2 = 4$

y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆ $3 - 5 = -2$

ಆಗ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆ, x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆಗೆ $-\frac{1}{2}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಎಂದು ತೆಗೆದರೋ?



ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ದೊಡ್ಡ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಡ್ಡಕ್ಕಿರುವ ಭುಜ $x_2 - x_1$ ಮತ್ತು ನೆಟ್ಟಗಿರುವ ಭುಜ $y_1 - y_2$ ಆಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ

$$y_1 - y_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

(x_1, y_1) ನಿಂದ (x_2, y_2) ಗೆ ತಲುಪುವಾಗ

x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆ $x_2 - x_1$

y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆ $y_2 - y_1$

ಆಗ ಮೇಲಿನ ಸಮವಾಕ್ಯವು, ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು.

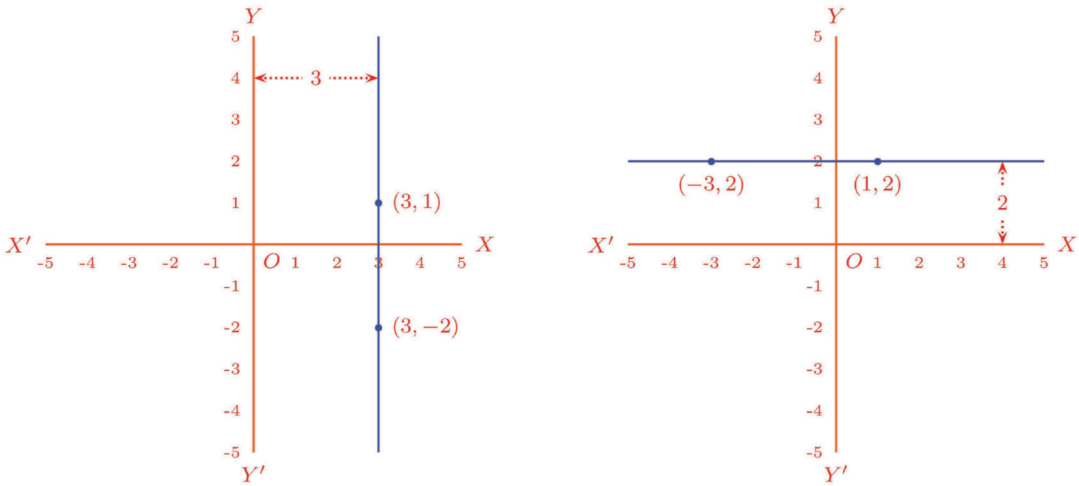
$$y_2 - y_1 = -\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$$

ಈ ಬದಲಾವಣೆಯ ಸಂಬಂಧದ ಕುರಿತು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

(2, 5), (6, 3) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವಾಗ y ಯ ಬದಲಾವಣೆಯು x ನ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು $-\frac{1}{2}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರುವುದು.

ಈ ಎಲ್ಲಾ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, ಗೆರೆಯ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವಾಗ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬದಲಾಗುವುದು. ಹೀಗೆ ಬದಲಾಗದ ಗೆರೆಗಳಿವೆಯೇ?

y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ? ಬದಲಾಗಿ x - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು.



ಆಗ ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಲಭಿಸಿದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತತ್ವವನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು.

> ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆಯು, x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವುದಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ತಿಳಿದಿರುವುದಾದರೆ, ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಹಲವು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಇದನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮೇಲಿನ ಮೊದಲ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ನೋಡುವ. (2,5), (6,7) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿಯೂ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆ, x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ಅರ್ಧವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ.

ಆಗ ಇದರ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ x - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ 2 ಕೂಡಿಸಿ, y - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ 2 ರ ಅರ್ಧ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ, ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು ಸಿಗುವುದು. ಹೀಗೆ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ (2, 5) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ (4, 6) ಎಂಬ ಬಿಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ (4, 6) ರಿಂದ, ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಹೇಳಲಾಗಿರುವ (6, 7) ಎಂಬ ಬಿಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ 2 ರೊಂದಿಗೆ 2 ರಂತೆ ಕೂಡಿಸುವುದು ಮತ್ತು 5 ರೊಂದಿಗೆ 1 ರಂತೆಯೂ ಕೂಡಿಸುತ್ತಾ ಮುಂದುವರಿದರೆ, ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಬಿಂದುಗಳು ಸಿಗುವುದು:

(4,6), (6,7), (8,8), ...

ಕೂಡಿಸುವುದರ ಬದಲಿಗೆ ಕಳೆದರೆ, ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಸಿಗುವುದು.

(0, 4), (–2, 3), (–4, 2), ...

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬಹುದು?

(4, 6), (7, 4) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4, 6) ರಿಂದ (7, 4) ಕ್ಕೆ ತಲುಪುವಾಗ

x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 3 ಹೆಚ್ಚುವುದು.

y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 2 ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು.

ಆಗ (4, 6) ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ x- ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗೆ 3 ರಂತೆ ಕೂಡಿಸಿಯೂ, y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 2 ರಂತೆ ಕಳೆದಾಗ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹಲವು ಬಿಂದುಗಳು ಸಿಗುವುದು.

(7, 4), (10, 2), (13, 0), ...

x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 3 ರಂತೆ ಕಳೆದು, y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗೆ 2 ರಂತೆ ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಇನ್ನೂ ಹಲವು ಬಿಂದುಗಳು ಸಿಗುವುವು.

(1, 8), (–2, 10), (–5, 12), ...

(1) (–1, 4), (1, 2) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) (1, 2), (2, 4), (3, 6) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿವೆ. $(1, y_1), (2, y_2), (3, y_3), \ldots$ ಎಂಬ ಜೊತೆಗಳು ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ಮತ್ತು $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳಾಗಿವೆ. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ ಎಂಬ ಜೊತೆಗಳು ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ

ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೂ, y - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆ, x - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು.:

ಯಾವುದೇ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದರೆ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವುದು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗೆರೆಯ **ಬಾಗುವಿಕೆ (Slope)** ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, (2, 8), (4, 9) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ನೋಡುವ. ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡನೇ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲಪುವಾಗ

x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬದಲಾವಣೆ $4 - 2 = 2$

y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬದಲಾವಣೆ $9 - 8 = 1$

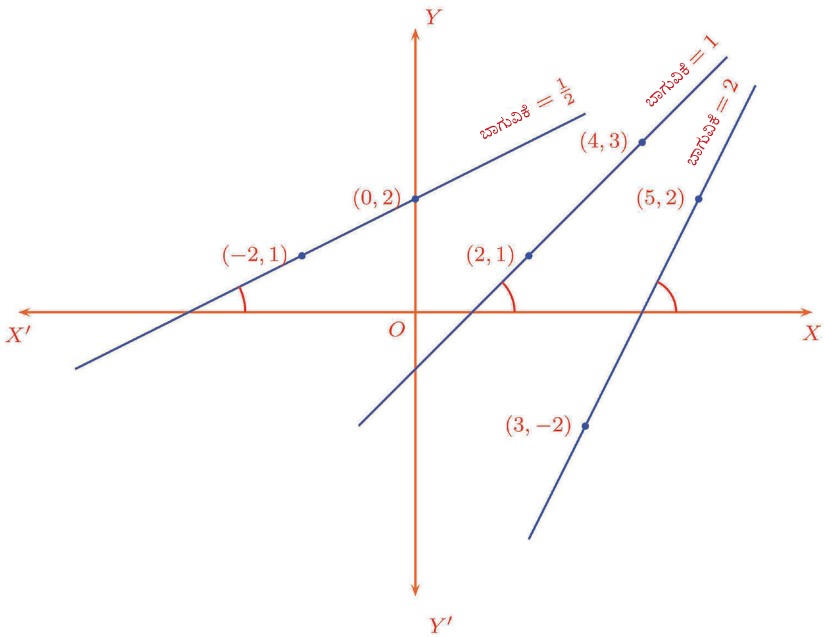
y-ಯ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು x-ನ ಬದಲಾವಣೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{1}{2}$. ಆಗ (2, 8), (4, 9) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ $\frac{1}{2}$.

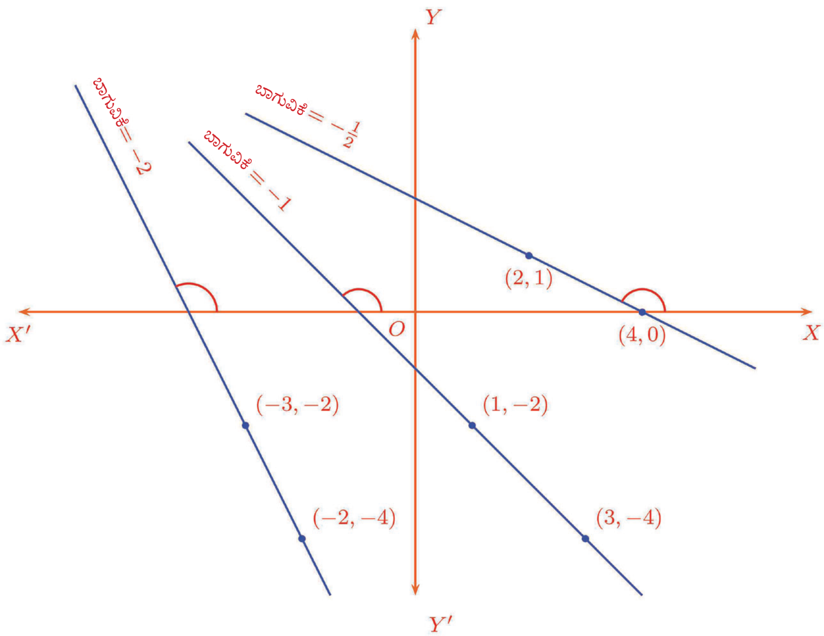
(2, 8), (4, 6) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಾದರೋ?

ಬಾಗುವಿಕೆ

$$\frac{6-8}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ ಎಂದು ಹೇಳುವುದರ ಕಾರಣವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು, ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.:





ಎರಡೂ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಬಾಗುವಿಕೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವಾಗ, x-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಗೆರೆಯ ಭಾಗ ಮತ್ತು x-ಅಕ್ಷಗಳೊಳಗಿನ ಬಲಭಾಗದ ಕೋನವು ಜಾಸ್ತಿಯಾಗುವುದನ್ನು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ?

ಮೊದಲ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಬಾಗುವಿಕೆಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಕೋನಗಳು ಲಂಬಕೋನಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು; ಎರಡನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಬಾಗುವಿಕೆಗಳು, ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಕೋನಗಳು ಲಂಬಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವುದು.

ಆಗ, ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ ಎಂದು ಹೇಳುವ ಸಂಖ್ಯೆ , ಗೆರೆಗೆ x-ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗಿರುವ ಬಾಗುವಿಕೆಯನ್ನೇ ಸೂಚಿಸುವುದಾಗಿದೆ.

ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಬದಲಾಗಿ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ ತಿಳಿದಿದ್ದರೂ ಸಾಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡುವ :

> (1, 6) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ $\frac{3}{4}$ ಆಗಿದೆ. ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 4 ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ $\frac{3}{4}$ ಎಂಬುದರ ಅರ್ಥವು, ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲಪುವಾಗ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲುಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆ, x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲುಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಗೆ $\frac{3}{4}$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿರುವುದಲ್ಲವೇ?

ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ, (1, 6) ರಿಂದ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 4 ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವಾಗ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆ $4 - 1 = 3$; ಆಗ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆ

$$3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$$

y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ

$$6 + 2\frac{1}{4} = 8\frac{1}{4}$$

ಅಂದರೆ $\left(4, 8\frac{1}{4}\right)$ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು slope ಎಂಬ ಟೂಲನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿದರೆ ಸಾಕು.

ಹೀಗೆ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

(1) ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.

(i) (2,3), (4, 5) (ii) (2,3), (4, 1) (iii) (1, 1), (−1, −1) (iv) (0, 1), (1, 0)

(2) (2, 5) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ $-\frac{2}{3}$ ಆಗಿದೆ. ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಇತರ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿರಿ.

(3) (3, 1) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ $-\frac{1}{2}$ ಆಗಿದೆ. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೋಧಿಸಿರಿ.

(i) (5, 2) (ii) (1, 0) (iii) (4, 3) (iv) (2, −1)

(4) $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವುದಾದರೆ $(1, y_1), (2, y_2), (3, y_3), \ldots$ ಎಂಬ ಜೊತೆಗಳು ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವುವು ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಈ ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ ಮತ್ತು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?

(5) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ಮತ್ತು $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವುದು. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... ಎಂಬ ಜೊತೆಗಳು ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರುವುದೆಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಈ ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ ಮತ್ತು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?

(6) (1, 3) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ, ಬಾಗುವಿಕೆ $\frac{1}{2}$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲೂ, ಇದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಬಾಗುವಿಕೆ −2 ಆಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆಯುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲೂ ಇರುವ ಒಂದೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಈ ಗೆರೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಗಳಾಗಿರುವುವು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(ಸೂಚನೆ : ಪೈಥಾಗರಸ್ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯ

ಒಂದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಗೆರೆಯ ಇತರ ಬಿಂದುವಿನ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಆ ಬಿಂದುವಿನ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ರೀತಿಯನ್ನು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

(2, 4), ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ $\frac{2}{3}$ ಆಗಿದೆ. ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 11 ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಬಹುದು?

(i) ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವಾಗ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆಗೆ $\frac{2}{3}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ.

(ii) ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 11 ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ y - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು y ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ $(11, y)$ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದು ವಾಗಿದೆ.

(iii) (2, 4) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $(11, y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ x- ಬದಲಾವಣೆ $11 - 2 = 9$,

y- ಬದಲಾವಣೆ $y - 4$

(iv) $y - 4 = \frac{2}{3} \times 9 = 6$

(v) $y = 4 + 6 = 10$

ಆಗ ಗೆರೆಯ x - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 11 ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ y - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ 10.

ಹೀಗೆ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದರೆ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವಿದೆ.

ಅದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಗೆರೆಯ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು (x, y) ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ.

(i) ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವಾಗ y - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆ x - ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಬದಲಾವಣೆಗೆ $\frac{2}{3}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ.

(ii) (x, y) ಎಂಬುದು ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದು ವಾಗಿದೆ.

ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ಜ್ಯಾಮಿತಿ

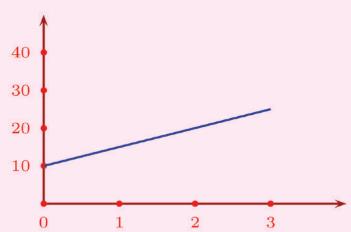
ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಸಂಚರಿಸುವ ದೂರ, ಮೊದಲ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 10 ಮೀಟರ್, ನಂತರದ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 15 ಮೀಟರ್, ನಂತರದ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 20 ಮೀಟರ್ ಎಂಬೀ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸುವ. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿಯೂ ಅದರ ವೇಗವು ಬದಲಾಗುವುದಲ್ಲವೇ. ಅಂದರೆ ಮೊದಲ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ವೇಗ 10 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್, ಎರಡನೇ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ವೇಗ 15 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನಷ್ಟು ಚುಟುಕಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ, ವೇಗವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿಯೂ 5 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವು (acceleration) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 5 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಈ ವಸ್ತುವಿನ t ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ವೇಗ v ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು

$v = 10 + 5t$ ಎಂಬ ಬೀಜಗಣಿತ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸ ಬಹುದು.

ಇನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿ t ಮತ್ತು v ಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಈ ವೇಗ ಹಾಗೂ ಸಮಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೋ?



ಈ ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ 5 ಆಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಬಾಗುವಿಕೆ ಎಂಬುದು t ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ v ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದರ ದರವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ; ಅಂದರೆ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ.

(iii) (2, 4) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (x, y) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ x ಬದಲಾವಣೆ $x - 2$, y ಬದಲಾವಣೆ $y - 4$.

(iv) $y - 4 = \frac{2}{3}(x - 2)$

ಅಂದರೆ,

(2, 4) ರ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ, ಬಾಗುವಿಕೆ $\frac{2}{3}$ ಆಗಿರುವ ಗೆರೆಯ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು (x, y) ಎಂದು ತೆಗೆದರೂ $y - 4 = \frac{2}{3}(x - 2)$

ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯ ಎಂದು ಹೇಳುವರು. ಅಂದರೆ

(2, 4) ರ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ, ಬಾಗುವಿಕೆ $\frac{2}{3}$ ಆಗಿರುವ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಲ್ಲದಂತೆ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$3(y - 4) = 2(x - 2)$$

ಅಂದರೆ,

$$3y - 12 = 2x - 4$$

ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$2x - 3y + 8 = 0$$

ಆಗ ಹೀಗೆಯೂ ಹೇಳಬಹುದು.

(2, 4) ರ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ, ಬಾಗುವಿಕೆ $\frac{2}{3}$ ಆಗಿರುವ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$2x - 3y + 8 = 0$$

ಇನ್ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

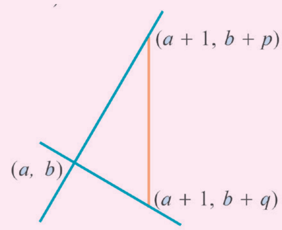
(−1, 2) ಮತ್ತು (1, −2) ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(1, 3), (5, 6) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲೂ (2, 5), (6, 8) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲೂ y ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು x ವ್ಯತ್ಯಾಸದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $\frac{3}{4}$ ಸಿಗುವುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿರಿ. ಈ ಗೆರೆಗಳೊಳಗಿನ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವೇನು?

ಬಾಗುವಿಕೆ ಮತ್ತು ಲಂಬ

ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳ ಬಾಗುವಿಕೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುವೆಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು. ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳ ಬಾಗುವಿಕೆಗಳೊಳಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೇನು?

ಬಾಗುವಿಕೆಗಳು p, q ಆಗಿರುವ ಎರಡು ಗೆರೆಗಳು ಸಂಗಮಿಸುವ ಬಿಂದು (a, b) ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಆಗ $(a + 1, b + p)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಮೊದಲಿನ ಗೆರೆಯಲ್ಲೂ; $(a + 1, b + q)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಎರಡನೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲೂ ಇರುವುದು. (ಯಾಕೆ?) ಗೆರೆಗಳು ಲಂಬವಾಗಿರುವುದಾದರೆ,



$(a, b), (a + 1, b + p), (a + 1, b + q)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಶಿರಗಳಾಗಿವೆ; ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ಕರ್ಣವಾಗಿದೆ.

ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಲಂಬಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳ ವರ್ಗವು $p^2 + 1, q^2 + 1$ ಎಂಬಿವುಗಳೂ, ಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು $|p - q|$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$(p^2 + 1) + (q^2 + 1) = (p - q)^2$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ,

$$2 = -2pq$$

ಅಥವಾ

$$pq = -1$$

ಅಂದರೆ,

ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಗೆರೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯು ಇನ್ನೊಂದು ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆಯ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮದ ಋಣವಾಗಿದೆ.

ಹೀಗೆ ಯೋಚಿಸುವ:

(i) ಗೆರೆಯ ಬಾಗುವಿಕೆ

$$\frac{2-(-2)}{-1-1} = \frac{4}{-2} = -2$$

(ii) ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ತಲುಪುವಾಗ y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯು x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬದಲಾವಣೆಗೆ -2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ.

(iii) ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು (x, y) ಎಂದು ತೆಗೆಯುವ.

(iv) $(-1, 2)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ (x, y) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ x ಬದಲಾವಣೆ $x - (-1) = x + 1$ y ಬದಲಾವಣೆ $y - 2$.

(v) $y - 2 = -2(x + 1)$

ಆಗ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವು

$$y - 2 = -2(x + 1)$$

ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

$$y - 2 = -2x - 2$$

ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ

$$y = -2x$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ

$$2x + y = 0$$

ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದ Input Bar ನಲ್ಲಿ $2x - 3y + 8 = 0$ ಎಂದು ನೀಡಿದಾಗ ಈ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಗೆರೆ ಸಿಗುವುದು. a, b, c ಎಂಬ ಮೂರು ಸ್ಲೈಡರ್‌ಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ, ax + by + c = 0 ಎಂದು Input Bar ನಲ್ಲಿ ನೀಡಿರಿ. ಸ್ಲೈಡರ್ ಗಳನ್ನು ಸರಿಸುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಗೆರೆಗೆ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಬಹುಪದಗಳೂ ಸಮವಾಕ್ಯಗಳೂ

ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಬಹುಪದಗಳ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೇ. $p(x) = 2x + 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ? ಈಗ ಆ ರೀತಿಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

x ಆಗಿ ಹಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ $2x + 1$ ಆಗಿ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲಾಯಿತು; ಈ ಸಂಖ್ಯಾಜೋಡಿಗಳು ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಯಿತು.

ಅಂದರೆ ಹೀಗೆ ಎಳೆದ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯ

$$y = 2x + 1$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಹೇಳಿದರೆ,

$$p(x) = ax + b$$

ಎಂಬ ಒಂದನೇ ಘಾತದ ಬಹುಪದದ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯ

$$y = ax + b$$

(1) ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(0, 0), (1, 1)$ (ii) $(0, 0), (1, -1)$

(iii) $(1, 0), (0, 1)$ (iv) $(-1, 0), (0, -1)$

(2) (i) $(-1, 3)$ ಮತ್ತು $(2, 5)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) (x, y) ಎಂಬ ಬಿಂದು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವುದಾದರೆ $(x + 3, y + 2)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವೂ ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲೇ ಇರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(3) (i) $(-1, 1)$ ಮತ್ತು $(2, 7)$ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) x ಆಗಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದರೂ $(x, 2x+3)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಈ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿಯೇ ಇರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) ಆಧಾರಬಿಂದು ಮತ್ತು $(1, 2)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(5) $(2, 0)$ ಮತ್ತು $(0, 3)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ x-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಅರ್ಧ ಮತ್ತು y-ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರನೇ ಒಂದು ಎಂಬಿವುಗಳ ಮೊತ್ತವು 1 ಆಗಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

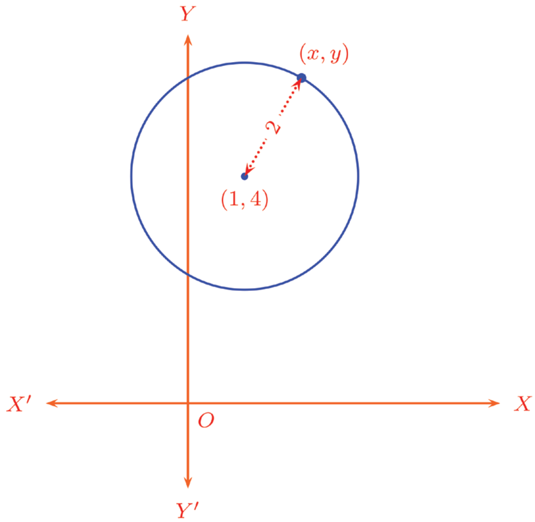
ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯ

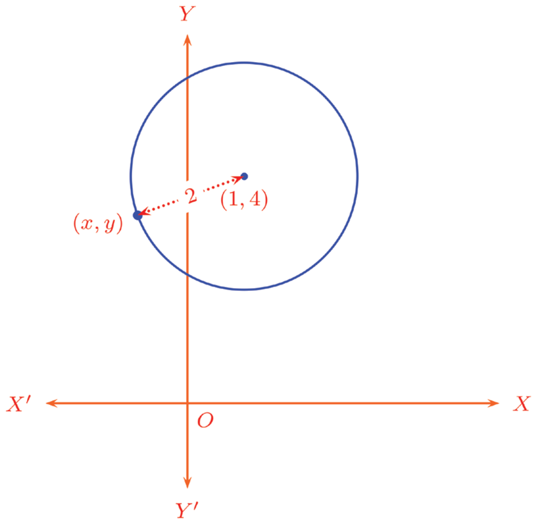
ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು; ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ಈ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಗೆರೆಯ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧದ ಬೀಜಗಣಿತರೂಪ.

(3, 5), (6, 7) ಎಂಬೀ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ಗೆರೆಯ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು Algebra view ನಲ್ಲಿ ನೋಡಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ನಿರ್ಧರಿಸಿದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ, ಸಂಖ್ಯೆಯು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು; ಕೇಂದ್ರದ ಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೇಂದ್ರ $(1, 4)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 2 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ನೋಡುವ. ಈ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಇರುವ ದೂರ 2 ಆಗಿರುವುದು.





$(1, 4)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು ಮತ್ತು (x, y) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳೊಳಗಿನ ದೂರದ ವರ್ಗವು $(x-1)^2 + (y-4)^2$ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ.

(x, y) ಎಂಬುದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಾದರೆ, ಈ ವರ್ಗವು $2^2 = 4$ ಆಗುವುದು. ಅಂದರೆ

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4$$

ಆಗ ವೃತ್ತದ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಈ ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುವುದು; ಬದಲಾಗಿ ಸಮವಾಕ್ಯಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ x, y ಯನ್ನು ತೆಗೆದರೂ, ಅವುಗಳು ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿಗೆ $(1, 4)$ ರಿಂದ ಇರುವ ದೂರ $\sqrt{4} = 2$ ಆಗಿರುವುದು; ಅಂದರೆ ಈ ಬಿಂದು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರುವುದು.

ಆಗ ಇದು, ಕೇಂದ್ರ $(1, 4)$ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 2 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗುವುದು.

ಇದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದರೆ

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$$

ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಆಗ, ಆಧಾರಬಿಂದು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 1 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯವು ಯಾವುದು?

ಈ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆ (x, y) ಎಂದು ತೆಗೆದರೆ, ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಇರುವ ದೂರದ ವರ್ಗವು $x^2 + y^2$; ಇದು ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ

$$x^2 + y^2 = 1$$

ಇದು ಈ ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯವಾಗಿರುವುದು.

(1) ಆಧಾರಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಎಂಟು ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

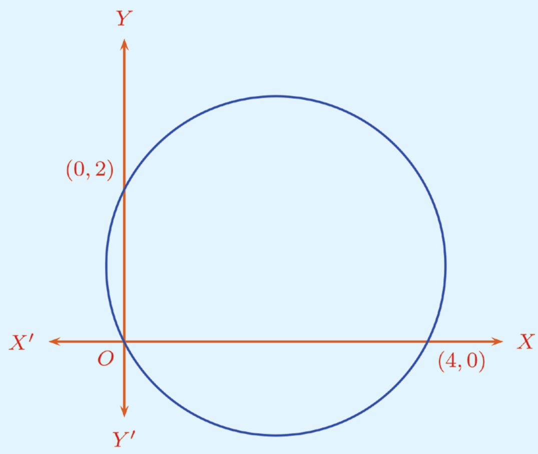
(2) $(2, 3)$, $(4, 7)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಗೆರೆಯು ವ್ಯಾಸವಾಗುವಂತೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಲಾಯಿತು.

(i) ಈ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು?

(iii) ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(3) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

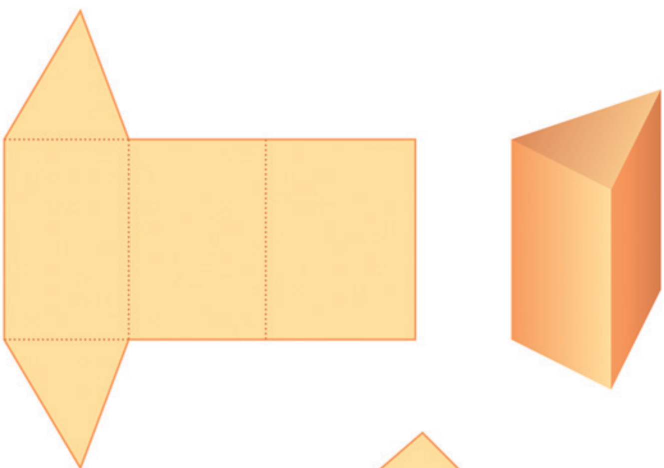


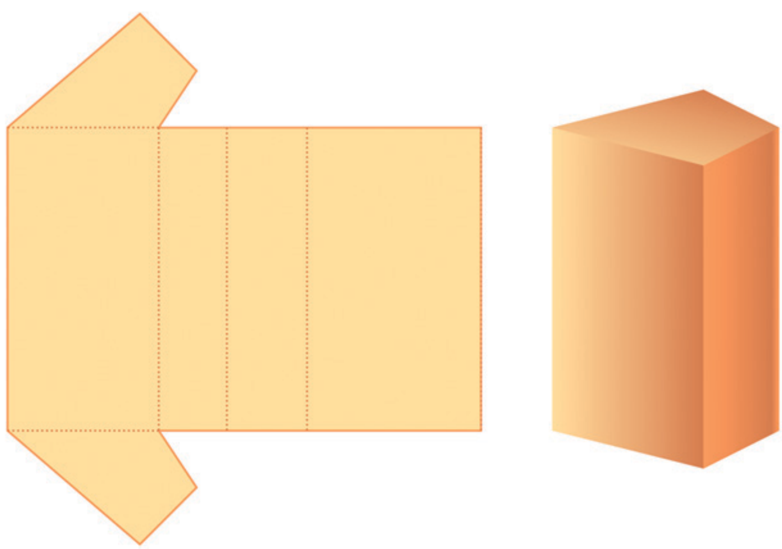
(4) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸಮವಾಕ್ಯವು $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ ಆಗಿದೆ. ಇದರ ಕೇಂದ್ರದ ಸೂಚಕಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12 ಘನಾಕೃತಿಗಳು

ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು

ಹಲವು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಗದಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ, ಮಡಚಿ ಅಂಟಿಸಿ, ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದು:

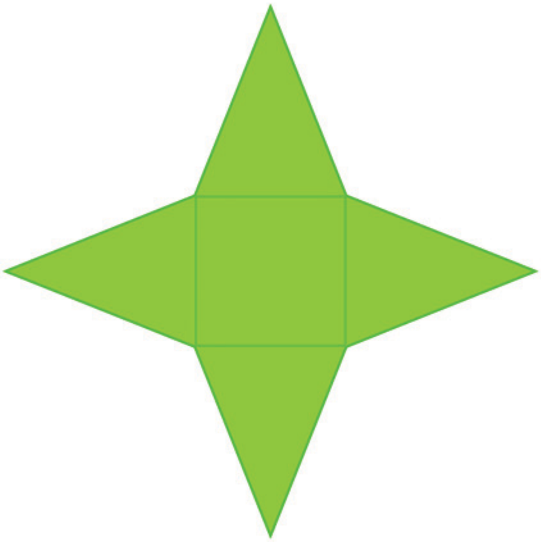




ಇಂತಹ ಸ್ತಂಭಗಳ ಕುರಿತು ಹಲವು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಲ್ಲವೇ.

ಇನ್ನು ಬೇರೊಂದು ಆಕೃತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ ನೋಡೋಣ.

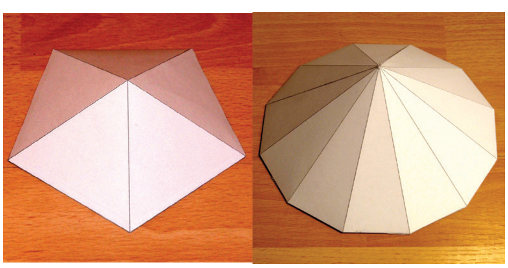
ಮೊದಲು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕು;



ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂಬುದನ್ನು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಲ್ಲವೇ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ನಿರ್ಮಿಸುವ ಮೊದಲು Options → Labeling → No new objects ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿರಿ, ಇದು ಹೆಸರು ಬರದಂತೆ ಮಾಡಲು. Graphics ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. 3D Graphics ನಲ್ಲಿ Extrude to Pyramid ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಚೌಕದಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಲಭಿಸುವ ವಿಂಡೋದಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಎತ್ತರವನ್ನು ನೀಡಬೇಕು. (ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿ, ಎತ್ತರವಾಗಿ ಸ್ಲೈಡರಿನ ಹೆಸರನ್ನು ನೀಡಬೇಕು)

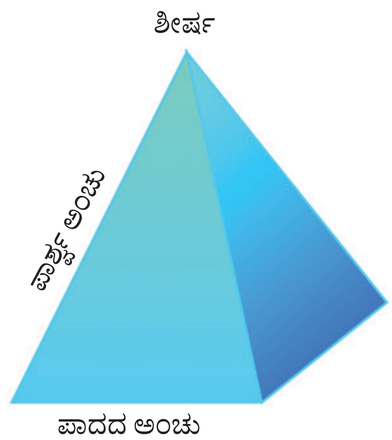
ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಚೌಕ, ಸುತ್ತಲೂ ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳು; ಇವು ನಾಲ್ಕು ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ (ಸಮಾನವಾದ) ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿರಬೇಕು. ಇನ್ನು ಇವುಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಮಡಚಿ ಅಂಟಿಸಿರಿ.



ಇದು ಯಾವ ಆಕೃತಿ? ಸ್ತಂಭವೆಂದು ಕರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ; ಸ್ತಂಭಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಪಾದಗಳು ಮತ್ತು ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಆಯತಗಳು ಇರುವುವು. ಈಗ ನಿರ್ಮಿಸಿದ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಾದರೆ ಕೆಳಗೆ ಚೌಕ, ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚೂಪಾದ ಒಂದು ತುದಿ, ಸುತ್ತಲೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳು.

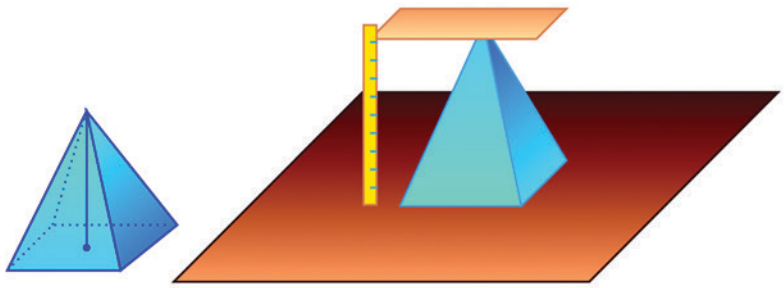
ಚೌಕದ ಬದಲು ಬೇರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಆಯತವಾಗಬಹುದು; ಅದೂ ಅಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ತ್ರಿಕೋನವೋ, ಇತರ ಯಾವುದಾದರೂ ಬಹುಭುಜಗಳೋ ಆಗಬಹುದು. ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. (ಪಾದವು ಸಮಬಹುಭುಜವಾದಾಗ ಅಂದವಿರುವುದು)

ಇಂತಹ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಹೆಸರು **ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು (pyramids)** ಎಂದಾಗಿದೆ.



ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಪಾದವಾಗಿರುವ ಬಹುಭುಜದ ಭುಜಗಳನ್ನು ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳು (base edges) ಎಂದೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಇತರ ಭುಜಗಳನ್ನು ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚುಗಳು (lateral edges) ಎಂದೂ ಕರೆಯುವರು. ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತುದಿಯನ್ನು ಅದರ ಶೀರ್ಷ (apex) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

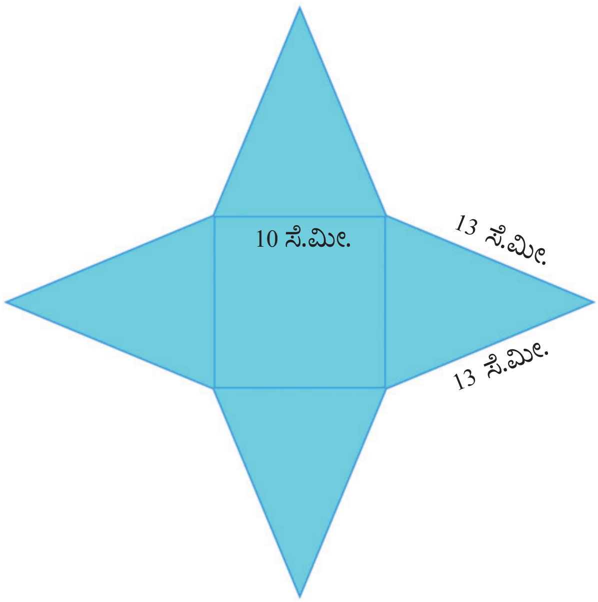
ಒಂದು ಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತಿಯೆಂಬುದು, ಅವುಗಳ ಪಾದಗಳೊಳಗಿನ ಅಂತರವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಒಂದು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿಯೆಂದರೆ ಅದರ ಶೀರ್ಷದಿಂದ ಪಾದಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬ ದೂರವಾಗಿದೆ.



ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

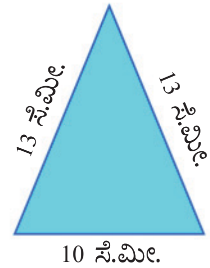
ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳು 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚುಗಳು 13 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಂದರೆ, ಈ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಕಾಗದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಈ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಬಿಡಿಸಿಟ್ಟರೆ ಹೇಗಿರಬಹುದು?



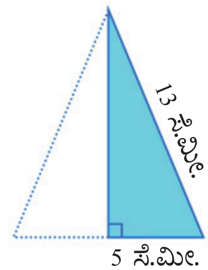
ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಒಂದು ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ತುಂಡರಿಸಿ, ಬಿಡಿಸುವುದು ಹೇಗೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲು ಹೇಳಿದಂತೆ 3D Graphics ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. Net ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡುವಾಗ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ತುಂಡರಿಸಿ ಬಿಡಿಸಿದ ಆಕೃತಿಯು ಲಭಿಸುವುದು (ಇದನ್ನು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ Net ಎಂದು ಕರೆಯುವರು). ಇದರೊಂದಿಗೆ Graphics ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಲೈಡರ್ ಲಭಿಸುವುದು. ಈ ಸ್ಲೈಡರನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ Net ನಿಂದ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. Algebra ಎಂಬಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೆಸರಿನ ನೇರವಾಗಿ ಕ್ಲಿಕ್ ಮಾಡಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು hide ಮಾಡಬೇಕು.

ಇದರ ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 100 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರಾಗಿದೆಯೆಂದು ಕೂಡಲೇ ಹೇಳಬಹುದು; ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನಾದರೋ?



ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಪಾದ ಮತ್ತು ಎತ್ತರದ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧವಾಗಿಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಅದಕ್ಕೆ ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಲಂಬವು ಕೆಳಗಿನ ಭುಜವನ್ನು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡುವುದು.



ಪೈಥಾಗರಸನ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಲಂಬದ ಉದ್ದವು

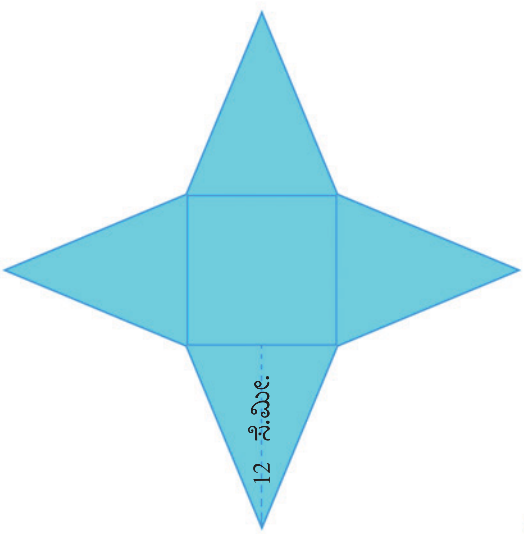
$$\sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್}$$

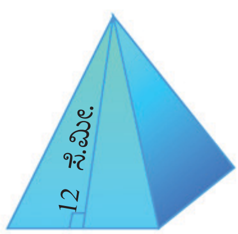
ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆಗ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು,

$5 \times 12 = 60$ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಕಾಗದದ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ, ಈಗ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರವು ಏನಾಗುವುದು?

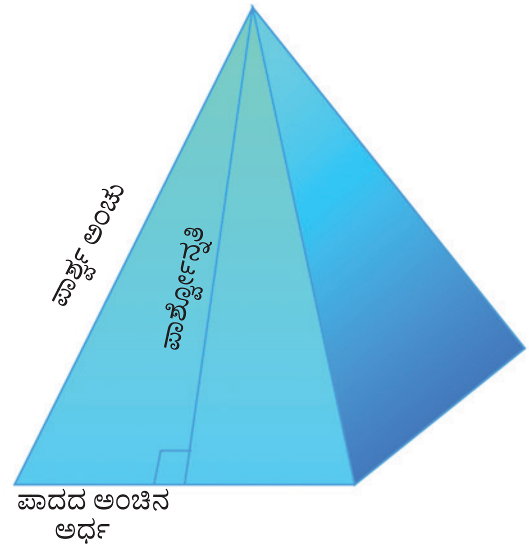




ಈ ಎತ್ತರವನ್ನು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ **ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ (slant height)** ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನುನಿರ್ಮಿಸಿರಿ. Midpoint or Centre ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಒಂದು ಅಂಚಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಮತ್ತು ಪಾದದ ಕರ್ಣದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. Segment ಎಂಬುದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿ, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಇವುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕು. Polygon ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಉನ್ನತಿ, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ, ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚು, ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಅರ್ಧ ಎಂಬಿವುಗಳು ಭುಜಗಳಾಗಿ ಬರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. Net ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಬಿಡಿಸಿಟ್ಟು ನೋಡಬಹುದು. ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಬೇಕಾದರೆ hide ಮಾಡಬಹುದು.

ಈಗ ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಅಂಚು, ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚು ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಗಳೊಳಗಿನ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ; ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬದಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಇದೆ. ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಅರ್ಧ ಲಂಬಭುಜಗಳಾಗಿಯೂ, ಕರ್ಣವಾಗಿ ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚೂ ಇರುವುದು.

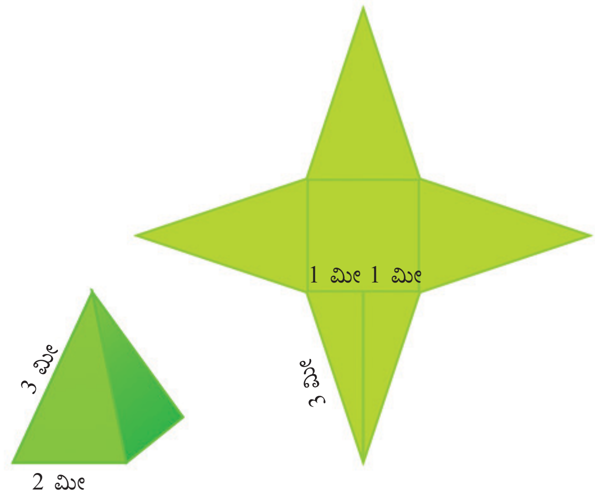


ಇನ್ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಬಹುದೇ?

ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳು 2 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚುಗಳು 3 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 4 ಚದರಮೀಟರ್. ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಅಗತ್ಯವಿದೆ. ಮೊದಲು ಹೇಳಿದ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಭುಜವು ಪಾದದ ಅರ್ಧವಾದ 1 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಕರ್ಣವು, ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚು ಆಗಿರುವ 3 ಮೀಟರ್; ಆದುದರಿಂದ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು

$$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \text{ ಮೀಟರ್}$$



ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಮುಖಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ ಚದರಮೀಟರ್}$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು,

$$4 + (4 \times 2\sqrt{2}) = 4 + 8\sqrt{2} \text{ ಚದರಮೀಟರ್}$$

ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲೇಟರನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ (ಅಥವಾ $\sqrt{2}$ ಕ್ಕೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನವಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ), ಇದು ಸುಮಾರು 15.31 ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

(1) ಭುಜಗಳು 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕ; ಒಂದು ಭುಜ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಅದರಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಶಿರಕ್ಕಿರುವ ಉನ್ನತಿ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು; ಇವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಟ್ಟು ಒಂದು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಎಷ್ಟು ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಕಾಗದ ಬೇಕಾಗುವುದು?

(2) ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಆಟಿಕೆಯ ಪಾದದ ಅಂಚು 16 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಇಂತಹ 500 ಆಟಿಕೆಗಳಿಗೆ ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಲು ಚದರಮೀಟರಿಗೆ ರೂಪಾಯಿ 80 ರಂತೆ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಖರ್ಚಾಗಬಹುದು?

(3) ಒಂದು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವ ಮುಖಗಳು ಸಮಭುಜತ್ರಿಕೋನಗಳಾಗಿವೆ. ಅದರ ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದ 30 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದರೆ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

(4) ಒಂದು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ 40 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್, ಅಂಚುಗಳ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ 92 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5) ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ?

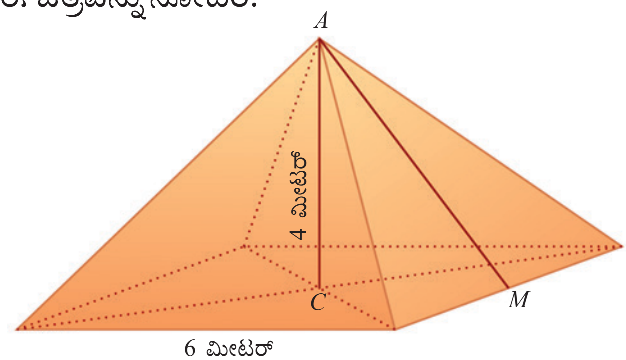
ಉನ್ನತಿಯೂ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯೂ

ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಉನ್ನತಿಯು ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಧಾನ್ಯವಿರುವ ಅಳತೆಯಾಗಿದೆ. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

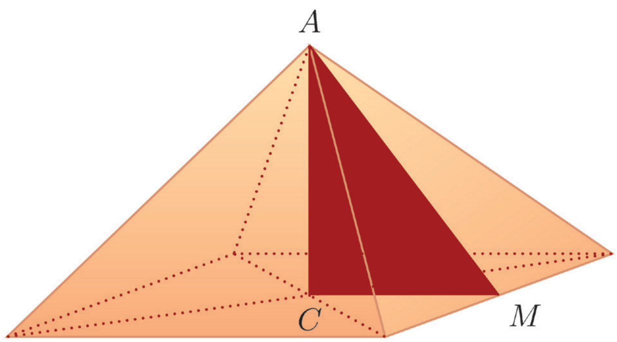
ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಡೇರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಡೇರೆಯ ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳು 6 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಎತ್ತರವು 4 ಮೀಟರ್ ಇರಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಎಷ್ಟು ಚದರಮೀಟರ್ ಕ್ಯಾನ್‌ವಾಸ್ ಬಟ್ಟೆ ಬೇಕಾಗುವುದು?

ಡೇರೆಯ ಅಂಚುಗಳಾಗಿರುವ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯ ಅಗತ್ಯವಿದೆ ಅಲ್ಲವೇ? ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮಾಹಿತಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:



ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು AM ಆಗಿದೆ. CM ನ್ನು ಜೋಡಿಸಿದರೆ, AM ಕರ್ಣವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವು ಲಭಿಸುವುದಲ್ಲವೇ? ಅದರಲ್ಲಿ CM ನ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?



ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು

ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು ಎಂದಾಕ್ಷಣ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಹೊಳೆಯುವ ಚಿತ್ರವು ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳಾಗಿವೆ. ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಹಲವು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಾಗಿ 138 ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆ ಹಚ್ಚಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನವುಗಳನ್ನು ಬಿ.ಸಿ.ಇ. ಎರಡು ಸಾವಿರದ ಅಸುಪಾಸಿನಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಚಿತ್ರದಿಂದ $AM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ಮೀಟರ್ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

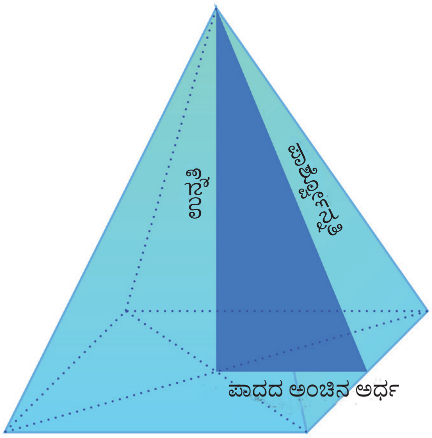
ಆಗ ಡೇರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಒಂದು ಅಂಚಿನ ಉದ್ದ 6 ಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಅದರಿಂದಿರುವ ಉನ್ನತಿ 5 ಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ಇವುಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, $4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 60$ ಚದರಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

ಡೇರೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಇಷ್ಟು ಕ್ಯಾನ್‌ವಾಸ್ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಡ ವಿಚಾರವು ಎಲ್ಲಾ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸರಿಯಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

ಯಾವುದೇ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಾದರೂ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು ಕರ್ಣವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಊಹಿಸಬಹುದು. ಅದರ ಲಂಬಭುಜಗಳು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಅರ್ಧ ಆಗಿರುವುದು.



ಮಹಾಪಿರಮಿಡ್ಡು

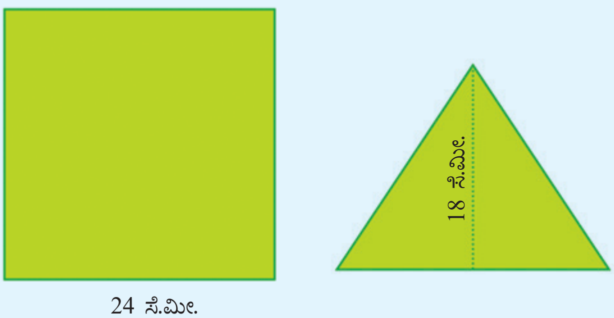
ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಗಿಝಾದಲ್ಲಿರುವ ಮಹಾಪಿರಮಿಡ್ಡು (Great Pyramid of Giza) ಅತಿದೊಡ್ಡ ಪಿರಮಿಡ್ಡಾಗಿದೆ.

ಇದರ ಪಾದವಾಗಿರುವ ಚೌಕಕ್ಕೆ ಸುಮಾರು ಅರ್ಧಲಕ್ಷ ಚದರಮೀಟರಿನಷ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿದೆ. ಉನ್ನತಿ ಸುಮಾರು 140 ಮೀಟರ್ ಇದೆ. ಇದನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಇಪ್ಪತ್ತು ವರ್ಷಗಳ ಅವಧಿ ಬೇಕಾಗಿ ಬಂದಿರಬಹುದು ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲಾಗಿದೆ.

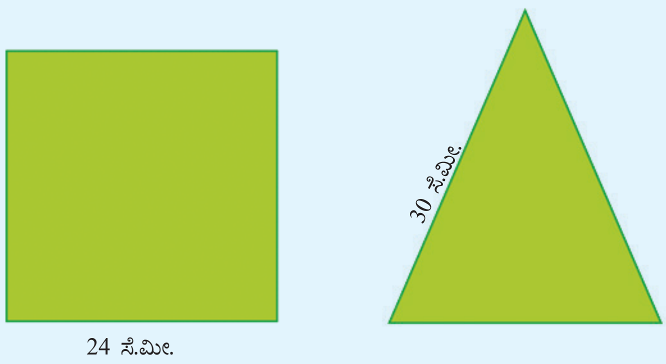
ನಿಖರವಾದ ಚೌಕದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಬೃಹದಾಕಾರದ ಕಲ್ಲುಗಳಿಂದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿ, ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಈ ಭವ್ಯವಾದ ಸಮಾಧಿಗಳು ಮಾನವ ಪರಿಶ್ರಮದ, ನಿರ್ಮಾಣ ಕೌಶಲ್ಯದ ಹಾಗೂ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಜೀವಂತ ಸಾಕ್ಷಿಯಾಗಿ ಎದ್ದು ನಿಂತಿವೆ.

ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲಾಯಿತು.

ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?



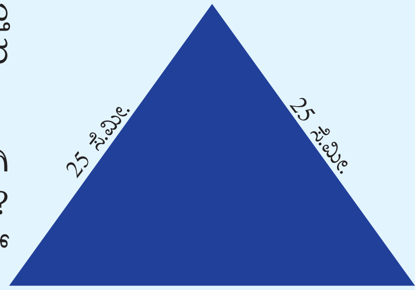
ಚೌಕವೂ ತ್ರಿಕೋನಗಳೂ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಆದರೋ?



(2) ಕಾಗದವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಒಂದು ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಪಾದದ ಅಂಚು 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರಬೇಕು. ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

(3) ಯಾವುದೇ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಉನ್ನತಿ, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವ ಅಂಚು ಎಂಬಿವುಗಳ ವರ್ಗಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

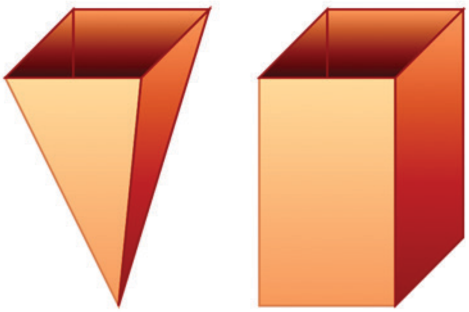
(4) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನವು ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳಾಗಿ ಒಂದು ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಅದರ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು? ಪಾದದ ಅಂಚು 30 ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನ ಬದಲು 40 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದರೋ?



ಸಮಾನವಾದ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕು ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೋ?

ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ

ಯಾವುದೇ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವೆಂಬುದು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಒಂದು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವೋ?



ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನೇ ಪರಿಗಣಿಸುವ. ಮೊದಲು ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ಮಾಡೋಣ, ದಪ್ಪ ಕಾಗದವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ತೆರೆದ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿರಿ.

ಇನ್ನು ಅಷ್ಟೇ ಪಾದದ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯಿರುವ ಒಂದು ತೆರೆದ ಚೌಕ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಹ್ಯೊಗೆ ತುಂಬಿಸಿ ಸ್ತಂಭಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾಯಿಸಿರಿ.

ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ತುಂಬಿದ ಹ್ಯೊಗೆಯ ಎತ್ತರವು ಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಅಳತೆ ಮಾಡಿ ನೋಡಬೇಕು. ಮೂರನೇ ಒಂದಲ್ಲವೇ? ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ಹ್ಯೊಗೆ ತುಂಬಲು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಲ ಹ್ಯೊಗೆಯನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು?

ಆಗ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲದ ಮೂರು ಮಡಿಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು. (ಇದರ ಗಣಿತ ಪರವಾದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಪಾಠದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ)

ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವೆವು.

ಹಾಗಾದರೆ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲದ ಕುರಿತು ಏನು ಹೇಳಬಹುದು?

ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ

ಸಮಾನ ಪಾದ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ ಯಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡು ಮತ್ತು ಚೌಕಸ್ತಂಭವನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಇವುಗಳನ್ನು ಥಕ್ಕನೆ ಗುರುತಿಸಲು ಒಳಗಿರುವ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಬಣ್ಣವನ್ನುಬದಲಾಯಿಸಿ Opacity 100ನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ ಸಾಕು. (Object properties → Color) Volume ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಇವುಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು? ಇವುಗಳ ಪಾದ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದರೋ?

ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಮೂರರಲ್ಲೊಂದಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳು 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು $\frac{1}{3} \times 10^2 \times 8 = 266\frac{2}{3}$ ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

ಲೋಹದಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ಒಂದು ಚೌಕಗಟ್ಟಿಯ ಒಂದು ಅಂಚಿನ ಉದ್ದ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ 25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಪಾದದ ಅಂಚು ಇರುವ ಒಂದು ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ತಯಾರಿಸಲಾಯಿತು. ಅದರ ಉನ್ನತಿ ಎಷ್ಟು?

ಚೌಕಗಟ್ಟಿಯ ಘನಫಲ 15^3 ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

ಇದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ತಯಾರಿಸಿದ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು ಇಷ್ಟೇ ಆಗಿದೆ. ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಉನ್ನತಿಯ ಮೂರರಲ್ಲೊಂದರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವುದಲ್ಲವೇ.

ಕರಗಿಸಿ ತಯಾರಿಸುವ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 25^2 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಉನ್ನತಿಯ ಮೂರರಲ್ಲೊಂದು $\frac{15^3}{25^2}$ ಆಗಿದೆಯೆಂದೂ, ಇದರಿಂದ ಉನ್ನತಿಯು

$$3 \times \frac{15^3}{25^2} = 16.2 \text{ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್}$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು.

(1) ಪಾದದ ಅಂಚು 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟು?

(2) ಎರಡು ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಘನಫಲಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಎರಡನೆಯ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದವು ಮೊದಲನೆಯ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಎರಡನೆಯ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿಯು ಒಂದನೇ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿಯ ಎಷ್ಟು ಮಡಿಯಾಗಿದೆ?

(3) ಎರಡು ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಪಾದದ ಅಂಚುಗಳು 1:2 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಅವುಗಳ ಉನ್ನತಿಗಳು 1:3 ಎಂಬ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಒಂದನೆಯ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು 180 ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆದರೆ ಎರಡನೆಯ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟಾಗಿರಬಹುದು?

(4) ಅಂಚುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದ 18 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

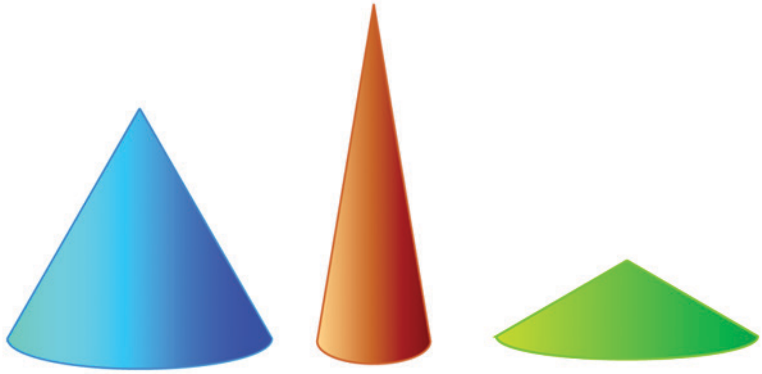
(5) ಒಂದು ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು 25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 896 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6) ಅಂಚುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಅದರ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟು?

(7) ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ 64 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಘನಫಲವು 1280 ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಚೌಕಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

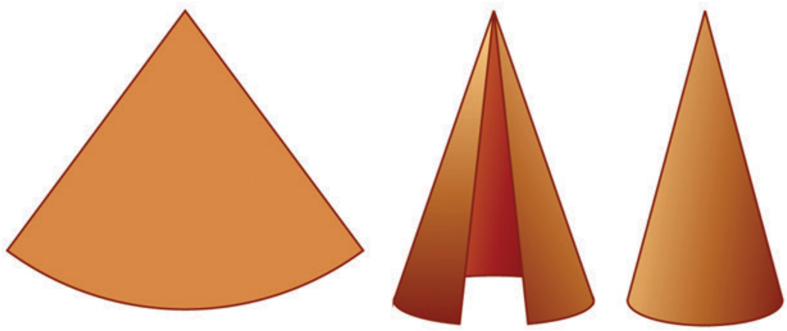
ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡು

ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭಗಳಂತೆ, ಪಾದವು ವೃತ್ತವಾಗಿರುವ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳೂ ಇವೆ.

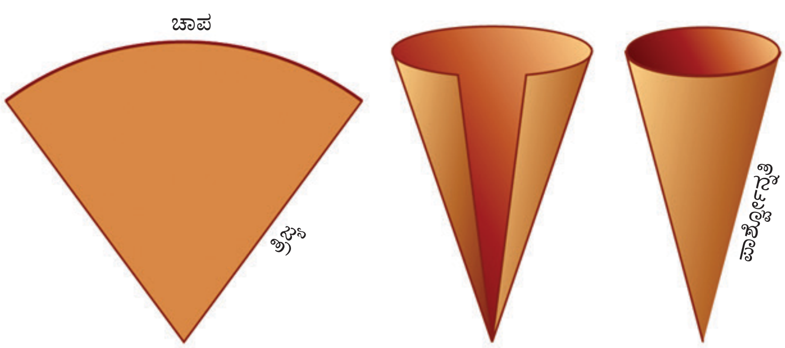


ಇವುಗಳನ್ನು **ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳು (cones)** ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಆಯತವನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿದಂತೆ ಒಂದು ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದು. (ಮುಚ್ಚಿದ ಪಿರಮಿಡ್ ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬೇರೆಯೂ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತ ಬೇಕಾಗುವುದು.)



ಇದರಲ್ಲಿ ಬಾಗಿಸುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಅಳತೆಗಳು ಮತ್ತು ನಿರ್ಮಿಸಿದ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಅಳತೆಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವೇನು?



ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡು

ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಂತೆ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. Graphics ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ 3D Graphics ನಲ್ಲಿ Extrude to Pyramid or Cone ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಅಗತ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಲು ಸ್ಲೈಡರನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಸೆಕ್ಟರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯಾಗುವುದು; ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪದ ಉದ್ದವು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆಯಾಗುವುದು.

ಸೆಕ್ಟರಿನ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾಗಿದೆ. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

> ತ್ರಿಜ್ಯ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದಿಂದ 45° ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವಿರುವ ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು. ಇದನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸುವ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟು?

ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾದ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವೋ?

45° ಎಂಬುವುದು, 360° ಯ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ, ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪದ ಉದ್ದವು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿದೆ. ಆಗ ಈ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪದ ಉದ್ದವು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಈ ಚಾಪವು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿರುವುದು. ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು, ಸುತ್ತಳತೆಗಳಿಗೆ ಅನುಪಾತಿಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ $\frac{1}{8}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯವು

$$12 \times \frac{1}{8} = 1.5 \text{ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್}$$

ಬದಲಾಗಿ ಪ್ರಶ್ನೆ ಈ ರೀತಿಯಾದರೆ?

> ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವುದು ಹೇಗೆ?

ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಸೆಕ್ಟರ್ ಬೇಕು. ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಿಂದಲೇ ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕು. ಇದರ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು ಎಷ್ಟಾಗಿರಬೇಕು?

ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದವಾಗಿರುವ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯುವ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ (ಅದು ಹೇಗೆ?). ಆಗ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪದ ಉದ್ದವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪವು ಅದನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ವೃತ್ತದ $\frac{1}{3}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದರ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನವು $360° \times \frac{1}{3} = 120°$.

(1) ತ್ರಿಜ್ಯ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ 60° ಆಗಿರುವ ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(2) ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ 25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಎಷ್ಟು?

(3) ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸಿದ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎಷ್ಟು?

ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭಕ್ಕಿರುವಂತೆಯೇ, ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿಗೂ ಒಂದು ವಕ್ರಮೈ ಇದೆ; ಅದರ ಓರೆಯಾಗಿ ಮೇಲಕ್ಕಿರುವ ಭಾಗ. ಈ ವಕ್ರಮೈಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ. (ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದಲ್ಲಿ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಂಬುದು ಅದರ ವಕ್ರಮೈಯನ್ನು ಸುತ್ತಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ)

ಜಿಯೋಜಿಬ್ರದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು Algebra ದ Surface ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ತ್ರಿಜ್ಯ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ 30 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಟೋಪಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಎಷ್ಟು ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಕಾಗದ ಬೇಕಾಗಬಹುದು?

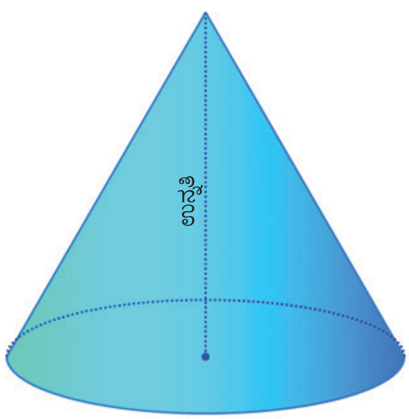
ಇಂತಹ ಟೋಪಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಯು 30 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇಷ್ಟೇ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಿಂದ ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದವಾದ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ ಭಾಗ. ಆಗ ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು, ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯ $\frac{4}{15}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾದ ಸೆಕ್ಟರಿನ ಚಾಪದ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ ನೋಡಿದಾಗ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾದ ಸೆಕ್ಟರ್, ವೃತ್ತದ $\frac{4}{15}$ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಈ ವೃತ್ತದ ಇಷ್ಟೇ ಭಾಗವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ,

$$\pi \times 30^2 \times \frac{4}{15} = \pi \times 2 \times 30 \times 4 = 240\pi \text{ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್.}$$

ಆದುದರಿಂದ, ಟೋಪಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು 240π ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಕಾಗದ ಬೇಕು. (ಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಿ, ಇದು ಸುಮಾರು 754 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.)

ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೇ ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲೂ ಪಾದದಿಂದ ಶೀರ್ಷಕ್ಕಿರುವ ಲಂಬದೂರವು ಉನ್ನತಿಯಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಇದು ಪಾದವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಶೀರ್ಷಕ್ಕಿರುವ ದೂರವಾಗಿದೆ.



ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಒಂದು ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಎಂದೂ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ l ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಸೆಕ್ಟರಿನ ತ್ರಿಜ್ಯ l ಎಂದೂ, ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ $\frac{r}{l} \times 360°$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು.

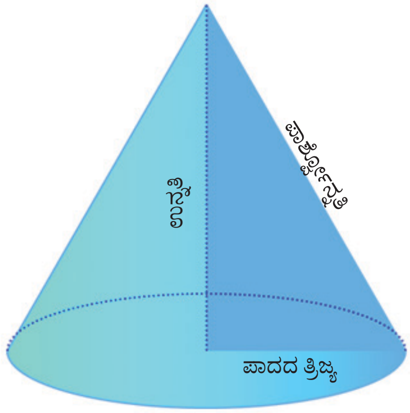
$$\frac{1}{360} \times \left(\frac{r}{l} \times 360\right) \times \pi l^2 = \pi r l$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು (ಒಂಬತ್ತನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಸೆಕ್ಟರಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿದುದು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿರಿ).

ಅಂದರೆ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಪಾದದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಎಂಬಿವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಾಗಿದೆ.

ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲೂ ಉನ್ನತಿ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಎಂಬಿವುಗಳೊಳಗೆ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಂಬಂಧವಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ $\sqrt{5^2+10^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.



(1) ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ 25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

(2) ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 30 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 40 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

(3) ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಹೂದಾನಿಯ ಪಾದದ ವ್ಯಾಸ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಇಂತಹ 10000 ಹೂದಾನಿಗಳ ಹೊರಭಾಗವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಬಣ್ಣದ ಕಾಗದದಿಂದ ಅಂಟಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ಚದರಮೀಟರ್ ಬಣ್ಣದ ಕಾಗದಕ್ಕೆ 2 ರೂಪಾಯಿ ಬೆಲೆಯಾದರೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ ಖರ್ಚಾಗಬಹುದು?

(4) ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ನಿರ್ಮಿಸುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಎರಡು ಮಡಿಯಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ

ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಡೆಸಿದ ಪ್ರಯೋಗದಂತೆ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ನಡೆಸಬಹುದು. ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು, ಅಷ್ಟೇ ಪಾದ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಹೊಯ್ಗೆಯನ್ನು ತುಂಬಿಸಿ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾಯಿಸಿರಿ. ಇಲ್ಲಿಯೂ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲದ ಮೂರರಲ್ಲೊಂದು ಭಾಗವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಎಂದರೆ,

ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ

ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ ಸಮಾನ ಪಾದ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡು ಮತ್ತು ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಇವುಗಳ ಘನಫಲವನ್ನು ತುಲನೆ ಮಾಡುವ.

ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಮೂರರಲ್ಲೊಂದು ಭಾಗ ಆಗಿದೆ.

(ಇದರ ಗಣಿತಪರವಾದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಪಾಠದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ).

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು

$$\frac{1}{3}\times\pi\times 4^2\times 6 = 32\pi$$ ಘನಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ.

(1) ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಮರದ ತುಂಡಿನ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 15 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 40 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ ಕೆತ್ತಿ ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ ಎಷ್ಟು?

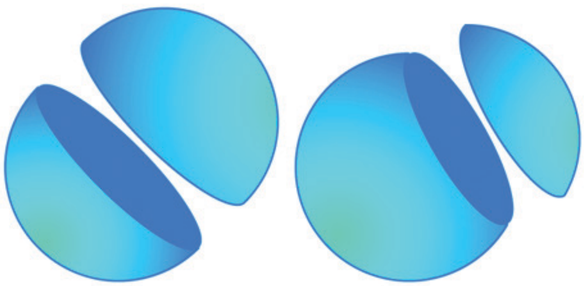
(2) ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 20 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಲೋಹದ ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ 5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಎಷ್ಟು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು?

(3) 216° ಕೇಂದ್ರೀಯ ಕೋನ ಮತ್ತು 25 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಸೆಕ್ಟರನ್ನು ಬಾಗಿಸಿ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದರೆ ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವೂ ಉನ್ನತಿಯೂ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು? ಘನಫಲವೋ?

(4) ಎರಡು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು 3:5 ಹಾಗೂ ಉನ್ನತಿಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 2:3, ಆಗಿರುವುದಾದರೆ ಅವುಗಳ ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎಷ್ಟು?

(5) ಸಮಾನ ಘನಫಲಗಳಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು 4:5 ಆಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ಉನ್ನತಿಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಗೋಳ



ಚೆಂಡಾಟದ ಉತ್ಸಾಹದಲ್ಲಿಯೂ, ಲಡ್ಡಿನ ಸಿಹಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಗೋಳಗಳನ್ನು ಆಸ್ವಾದಿಸಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ. ಇನ್ನು ಗೋಳದ ಗಣಿತವನ್ನು ನೋಡೋಣ. (ಇಂಗ್ಲೀಷ್‌ನಲ್ಲಿ ಗೋಳಕ್ಕೆ sphere ಎಂದು ಹೆಸರು).

ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭವನ್ನು ಅಥವಾ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ, ವೃತ್ತ ಸಿಗುವುದು. ಗೋಳವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕತ್ತರಿಸಿದರೂ ವೃತ್ತ ಸಿಗುವುದು.

ಒಂದು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಅದರ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ಅಂತರ ಸಮಾನವಲ್ಲವೇ. ಗೋಳಕ್ಕೂ ಒಂದು ಕೇಂದ್ರವಿದೆ; ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಆ ಅಂತರವನ್ನು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎನ್ನುವರು. ಅದರ ಎರಡು ಮಡಿಯನ್ನು ವ್ಯಾಸವೆಂದೂ ಹೇಳುವರು.

ಒಂದು ಗೋಳವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಅರ್ಧವಾಗುವಂತೆ ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ, ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸಗಳು ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರ, ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸಗಳೇ ಆಗಿವೆ.

ಇದುವರೆಗೆ ನೋಡಿದ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ, ಗೋಳವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಬಿಡಿಸಿಟ್ಟು ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಸ್ವಲ್ಪವಾದರೂ ನೆರಿಗೆಗಳಿಲ್ಲದೆ ಗೋಳವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಸಮತಲವನ್ನಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ವಾಸ್ತವವಾಗಿದೆ.

ಆದರೆ ಒಂದು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು r ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $4\pi r^2$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. (ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಪಾಠದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ).

ಅಂದರೆ,

ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯದ ವರ್ಗವನ್ನು 4π ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದುದಾಗಿದೆ.

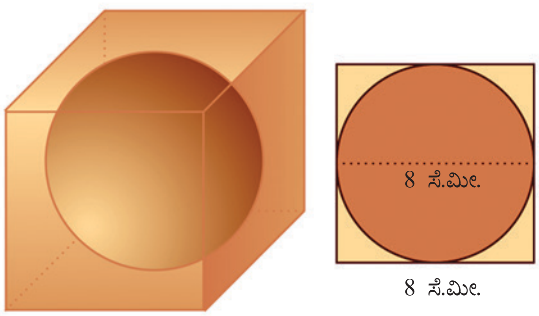
ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಆಗಿರುವ ಗೋಳದ ಘನಫಲವು $\frac{4}{3}\pi r^3$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. (ಇದರ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಪಾಠದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ).

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ನೋಡಿರಿ:

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಚಿನ ಉದ್ದವೂ 8 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕಗಟ್ಟಿ (ಘನ)ಯಿಂದ ಕೆತ್ತಿ ತಯಾರಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?

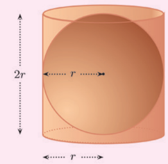
ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸವು ಚೌಕಗಟ್ಟಿಯ ಅಂಚಿನ ಉದ್ದವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಚಿತ್ರದಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$4\pi \times 4^2 = 64\pi \text{ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್}$$



ಗೋಳ ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭ

ಒಂದು ಗೋಳವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಆವರಿಸುವ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ತ್ರಿಜ್ಯವೇ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿಯು ಈ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಎರಡು ಮಡಿ ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ?



ಅಂದರೆ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ತ್ರಿಜ್ಯವು r, ಉನ್ನತಿ $2r$, ಆಗ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$(2\pi r \times 2r)+(2\times\pi r^2)=6\pi r^2$$

ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $4\pi r^2$. ಈ ಎರಡೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ $3 : 2$.

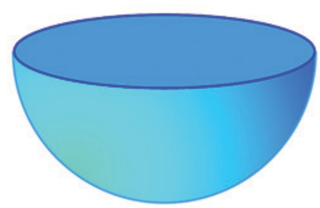
ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಸ್ತಂಭದ ಘನಫಲ

$$\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3 \text{ ಮತ್ತು}$$

ಗೋಳದ ಘನಫಲ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯು 3:2 ಆಗಿದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಒಂದು ಗೋಳವನ್ನು ಎರಡು ಸಮಾನ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದ (hemisphere) ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟು?



ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅರ್ಧ ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತ ಸೇರಿರುವುದಲ್ಲವೇ ಅರ್ಧಗೋಳ.

ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$4\pi \times 12^2 = 576\pi \text{ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್}$$

ಇದರ ಅರ್ಧ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸೇರಿರುವುದು ಅರ್ಧಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು,

$$\pi \times 12^2 = 144\pi \text{ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್}$$

ಆಗ ಅರ್ಧಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\frac{1}{2} \times 576\pi + 144\pi = 432\pi \text{ ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್}$$

(1) ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಒಂದು ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 120 ಚದರಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಅದನ್ನು ತುಂಡರಿಸಿ ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(2) ಎರಡು ಗೋಳಗಳ ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ 27 : 64 ಆಗಿದೆ. ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎಷ್ಟು? ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಎಷ್ಟು?

(3) ಲೋಹದಿಂದ ತಯಾರಿಸಿದ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಉದ್ದ 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯವು 4 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಆಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಕರಗಿಸಿ, 2 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಎಷ್ಟು ಗೋಳಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು?

(4) 12 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಲೋಹದ ಗೋಳವನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಸಮಾನ ಗಾತ್ರವಿರುವ 27 ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಸಣ್ಣ ಗೋಳಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿದರೆ ಸಣ್ಣ ಗೋಳಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಷ್ಟಾಗಿರುವುದು?

(5) 10 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಒಂದು ಗೋಳದಿಂದ 16 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಉನ್ನತಿಯಿರುವ ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು. ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವು ಗೋಳದ ಘನಫಲದ ಎಷ್ಟು ಭಾಗವಾಗಿದೆ?

(6) ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಒಂದು ಗೋಳವನ್ನು ಎರಡು ಅರ್ಧಗೋಳಗಳಾಗಿ ತುಂಡರಿಸಿ ಒಂದರಿಂದ ಗರಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರವಿರುವ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನೂ ಇನ್ನೊಂದರಿಂದ ಗರಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನೂ ತುಂಡರಿಸಿ ತೆಗೆಯಲಾಯಿತು. ಇವುಗಳ ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಯಾವುದು?

(1) ಗಟ್ಟಿಯಾದ ಒಂದು ಅರ್ಧಗೋಳದಿಂದ ಕೆತ್ತಿ ತೆಗೆಯಲಾಗುವ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವಮುಖಗಳ ಪ್ರತ್ಯೇಕತೆಯೇನು?

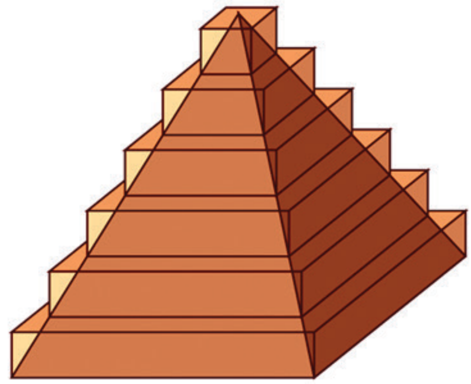
(2) ಚೌಕಗಟ್ಟಿಯಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಇರಿಸಬಹುದಾದ (ಗರಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರದ) ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭ, ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್, ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್, ಗೋಳ ಎಂಬಿವುಗಳ ಘನಫಲಗಳೊಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅನುಬಂಧ

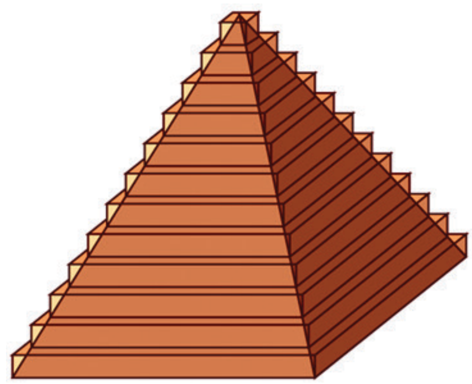
ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಘನಫಲ, ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಘನಫಲ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ನೋಡಿರುವುದಲ್ಲವೇ. ಇವುಗಳು ಹೇಗೆ ಸಿಕ್ಕಿದುವು ಎಂಬುದನ್ನರಿಯಲು ಆಸಕ್ತಿಯಿರುವವರಿಗಾಗಿ, ಅವುಗಳ ವಿವರಣೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ

ಒಂದು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಸರಿಸುಮಾರು ರೂಪವಾಗಿ ಕೆಲವು ಚೌಕ ಚಪ್ಪಡಿಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ಊಹಿಸುವ.



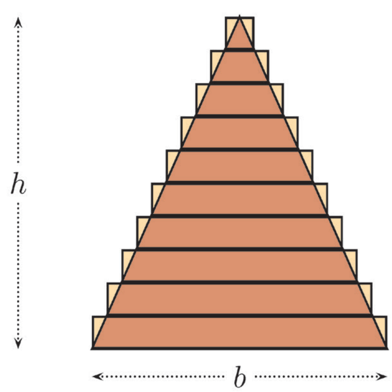
ಚಪ್ಪಡಿಗಳ ದಪ್ಪ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಅಟ್ಟಿಯ ಹೊಂದಿಕೆಯು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿಗೆ ಹೆಚ್ಚು ನಿಖರವಾಗುವುದು.



ಆಗ ಈ ಚಪ್ಪಡಿಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತವು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲಕ್ಕೆ ನಿಕಟವಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 10 ಚಪ್ಪಡಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಯಿತೆಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಪ್ಪಡಿ ಒಂದೊಂದು ಚೌಕಸ್ತಂಭವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ; ಇವುಗಳ ಉನ್ನತಿಯನ್ನು ಸಮಾನವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುವ, ಆಗ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಉನ್ನತಿ h ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಒಂದು ಚಪ್ಪಡಿಯ ಉನ್ನತಿ $\frac{1}{10}h$. ಇನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಪ್ಪಡಿಯ ಪಾದವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಿ?

ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನೂ ಅದನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವ ಚಪ್ಪಡಿಗಳ ಅಟ್ಟಿಯನ್ನೂ ಶೀರ್ಷದ ಮೂಲಕ ಲಂಬವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ, ಈ ರೀತಿಯ ಒಂದು ಆಕೃತಿ ಸಿಗುವುದು.



ಮೇಲಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಸಮಪಾರ್ಶ್ವ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತಾ ಬರುವುದಲ್ಲವೇ; ಇವುಗಳ ಉನ್ನತಿ ವೃದ್ಧಿಸುವುದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಪ್ಪಡಿಯಲ್ಲೂ $\frac{1}{10}h$ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸದೃಶವಾಗಿರುವುದರಿಂದ (ಕಾರಣವೇನು?) ಪಾದಗಳೂ ಇದೇ ದರದಲ್ಲಿಯೇ ಹೆಚ್ಚಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದವನ್ನು b ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಮೇಲಿನಿಂದಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಪಾದ $\frac{1}{10}b, \frac{2}{10}b, ..., b$ ಎಂಬಂತಿರುವುದು.

ಆಗ ಈ ಚಪ್ಪಡಿಗಳ ಘನಫಲ

$$\left(\frac{1}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, \left(\frac{2}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, ..., b^2 \times \frac{1}{10}h$$

ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು?

$$\frac{1}{10}b^2h\left[\frac{1}{10^2} + \frac{2^2}{10^2} + ... + \frac{9^2}{10^2} + \frac{10^2}{10^2}\right] = \frac{1}{1000}b^2h(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2)$$

ಇಂತಹ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು **ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯೂ ಬೀಜಗಣಿತವೂ** ಎಂಬ ಪಾಠದ **ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಹೇಳಲಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2 = \frac{1}{6} \times 10 \times (10 + 1) \times (2 \times 10 + 1)$$

ಆಗ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\frac{1}{1000}b^2h \times \frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 21 = \frac{1}{6}b^2h \times \frac{10}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{21}{10} = \frac{1}{6}b^2h \times 1.1 \times 2.1$$

ಇನ್ನು ಇದರಂತೆ 100 ಚಪ್ಪಡಿಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಿ ನೋಡಿರಿ. (ಅದನ್ನು ರಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ).

ಚಪ್ಪಡಿಗಳ ದಪ್ಪ $\frac{1}{100}h$ ಆಗುವುದು; ಪಾದಗಳ ಅಂಚು $\frac{1}{100}b, \frac{2}{100}b, \frac{3}{100}b, ..., b$ ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವುದು. ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\begin{aligned}\frac{1}{100^3}b^2h \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2) &= \frac{1}{100^3}b^2h \times \frac{1}{6} \times 100 \times 101 \times 201 \\ &= \frac{1}{6}b^2h \times \frac{100}{100} \times \frac{101}{100} \times \frac{201}{100} \\ &= \frac{1}{6}b^2h \times 1.01 \times 2.01\end{aligned}$$

ಚಪ್ಪಡಿಗಳು 1000 ಆದರೆ? ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕದೆಯೇ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\frac{1}{6}b^2h \times 1.001 \times 2.001$$

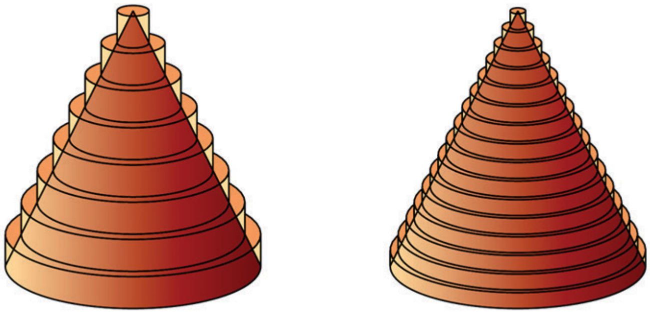
ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದಲ್ಲವೇ. ಈ ಮೊತ್ತಗಳು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಹೆಚ್ಚು ನಿಕಟವಾಗುವುದು?

ಇದುವೇ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ, ಅಂದರೆ,

$$\frac{1}{6}b^2h \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}b^2h$$

ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲ

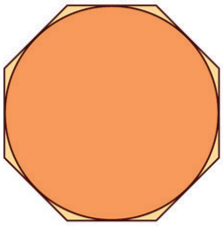
ಚೌಕ ಹಲಗೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಸಿಟ್ಟು ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಸರಿಸುಮಾರು ಆಕೃತಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿದಂತೆಯೇ, ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಹಲಗೆಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಹೊಂದಿಸಿಟ್ಟು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಸರಿಸುಮಾರು ಆಕೃತಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಬಹುದು.



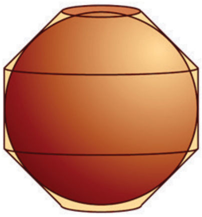
ಇದರ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. (ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡಿರಿ).

ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಇದಕ್ಕಾಗಿ, ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಗೋಳದ ಮಧ್ಯದ ಮೂಲಕ ವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನೂ ಭುಜಗಳೆಲ್ಲವೂ ಅದನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಒಂದು ಸಮಬಹುಭುಜವನ್ನೂ ಊಹಿಸಿರಿ.



ಇನ್ನು ಈ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಒಮ್ಮೆ ತಿರುಗಿಸಿದರೆ, ಒಳಗೊಂದು ಗೋಳವೂ, ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಆಕೃತಿಯೂ ಸಿಗುವುದು.

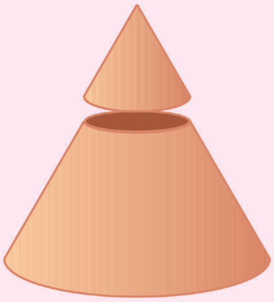


ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಹೊರಗಿರುವ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಎರಡು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್‌ಗಳ ಪೀಠಗಳಾಗಿಯೂ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭವಾಗಿಯೂ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು.

ಬಹುಭುಜದ ಅಂಚುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ, ಹೊರಗಿನ ಆಕೃತಿಯು ಗೋಳಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ನಿಕಟ ವಾಗುವುದು:

ಸಣ್ಣದೂ ದೊಡ್ಡದೂ

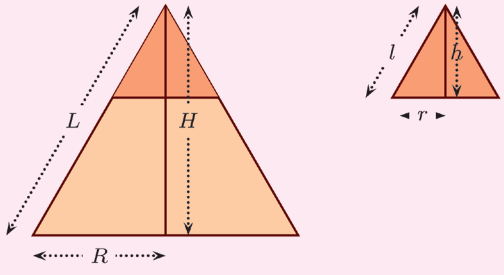
ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿದರೆ, ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತಪಿರಮಿಡ್ ಸಿಗುವುದು.



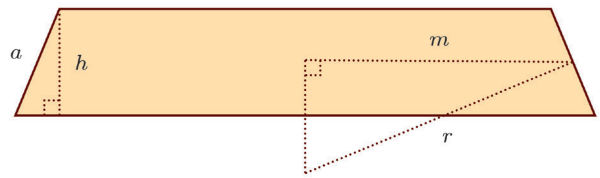
ಸಣ್ಣ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಅಳತೆಗಳೊಳಗೆ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇ?

ಪಾದದತ್ರಿಜ್ಯ, ಉನ್ನತಿ, ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ಎಂಬಿವುಗಳಿಗೆ ದೊಡ್ಡ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಲ್ಲಿ R, H, L ಎಂದೂ ಸಣ್ಣದರಲ್ಲಿ r, h, l ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಚಿತ್ರದಿಂದ

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = \frac{l}{L}$$



ಈ ಪಿರಮಿಡ್ಡ್‌ ಪೀಠಗಳ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ ನೋಡೋಣ. ಇದರ ಮಧ್ಯದ ಮೂಲಕವಿರುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ m ಎಂದೂ, ಉನ್ನತಿ h ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸುವ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಎಂದೂ ಅದನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವ ಭುಜದ ಅಂಚು a ಎಂದೂ ತೆಗೆದರೆ, ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಚಿತ್ರ ಸಿಗುವುದು.



ಇದರ ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಸದೃಶವಾಗಿಸಿದರೆ

$$\frac{m}{r} = \frac{h}{a}$$

ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು, ಅಂದರೆ,

$$am = rh$$

ಇದು ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಪೀಠದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $2\pi ma$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು **ಪೀಠ ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭ** ಎಂಬ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು (ಪುಟ 275). ಮೇಲಿನ ಸಮವಾಕ್ಯದ ಪ್ರಕಾರ, ಇದು $2\pi rh$ ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಇದುವೇ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ h ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ.

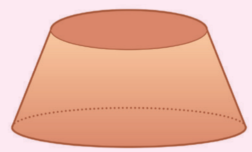
ಆಗ ಸಿಕ್ಕಿದುದೇನು?

ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಗೋಳದ ಸರಿಸುಮಾರು ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಂಬುದು ಅಷ್ಟೇ ಉನ್ನತಿಯೂ, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟೇ ತ್ರಿಜ್ಯವೂ ಇರುವ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ.

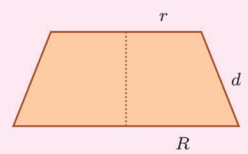
ಆದುದರಿಂದ, ಈ ಸರಿಸುಮಾರು ಆಕೃತಿಯ ಒಟ್ಟು ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ಈ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭಗಳ ಒಟ್ಟು ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿದೆ. ಈ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವುದೇನು? ದೊಡ್ಡದೊಂದು ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭ. ವೃತ್ತವನ್ನು ಆವರಿಸುವ ಬಹುಭುಜದ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುವುದಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ಅದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ನಿಕಟವಾಗುವುದು; ಗೋಳವನ್ನು ಆವರಿಸುವ ಆಕೃತಿಯು, ಗೋಳಕ್ಕೆ ನಿಕಟವಾಗುವುದು. ಈಗ ಕಂಡಂತೆ, ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಷ್ಟು ಈ ಆಕೃತಿಯ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ಗೋಳವನ್ನು ಆವರಿಸುವ ವೃತ್ತಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗಿರುವುದು. ಆಗ ಗೋಳದ

ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪೀಠ

ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗದಿಂದ ಒಂದು ಸಣ್ಣ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡನ್ನು ಪಾದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದರೆ ಕೆಳಗೆ ಉಳಿದ ಭಾಗಕ್ಕೆ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪೀಠ (frustum of a cone) ಎನ್ನುವರು.



ಒಂದು ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪೀಠದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಮತ್ತು ಕೆಳಭಾಗದ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿ ತಿಳಿದಿರುವುದಾದರೆ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ?



ದೊಡ್ಡ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಹಾಗೂ ಸಣ್ಣ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾರ್ಶ್ವೋನ್ನತಿಗಳನ್ನು L, l ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $d = L - l$. ಆಗ ಪೀಠದ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

$$\begin{aligned} \pi RL - \pi rl &= \pi(RL - rl) \\ &= \pi(R(l + d) - rl) \\ &= \pi(Rl + Rd - rl) \end{aligned}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಈ ಮೊದಲೇ ನೋಡಿದಂತೆ. $\frac{r}{R} = \frac{l}{L}$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $Rl = rL$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಆಗ. ಪೀಠದ ವಕ್ರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$\begin{aligned} \pi(rL + Rd - rl) &= \pi(r(L - l) + Rd) \\ &= \pi(rd + Rd) \\ &= \pi(r + R)d \end{aligned}$$

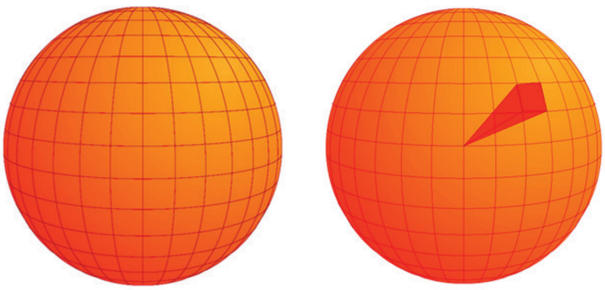
ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದನ್ನು ಆವರಿಸುವ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇ ಆಗಿದೆ. ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ $2r$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$2\pi \times r \times 2r = 4\pi r^2$$

ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ಇದುವೇ ಆಗಿದೆ.

ಗೋಳದ ಘನಫಲ

ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

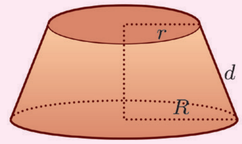


ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಅಡ್ಡಕ್ಕೂ ರಚಿಸಿದ ವೃತ್ತಗಳಿಂದ ಗೋಳವನ್ನು ಹಲವಾರು ಕೋಣೆಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಂತಹ ಒಂದು ಕೋಣೆಯ ಮೂಲೆಗಳನ್ನು ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರದೊಂದಿಗೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನಂತಿರುವ ಒಂದು ಆಕೃತಿ ಸಿಗುವುದು.

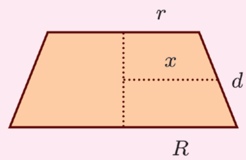
ಇಂತಹ ಆಕೃತಿಗಳು ಸೇರಿರುವುದೇ ಗೋಳ; ಆದುದರಿಂದ ಗೋಳದ ಘನಫಲವೆಂಬುದು ಈ ಆಕೃತಿಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ. ಇನ್ನು ಗೋಳದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋಣೆಗಳನ್ನು, ಗೋಳವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಸಣ್ಣ ಚೌಕಗಳಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ, ಗೋಳವನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವ ಒಂದು ಆಕೃತಿ ಸಿಗುವುದು; ಅದು ನಿಖರವಾದ ಚೌಕ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿರುವುದಾಗಿದೆ. ಈ ಎಲ್ಲಾ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಉನ್ನತಿ, ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವೇ ಆಗಿದೆ. ಇದನ್ನು r ಎಂದೂ, ಒಂದು ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪಾದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ a ಎಂದೂ, ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಅದರ ಘನಫಲ $\frac{1}{3}ar$ ಎಂದೂ ಸಿಗುವುದು. ಗೋಳವನ್ನು ಆವರಿಸಿರುವ ಆಕೃತಿಯ ಘನಫಲವು ಈ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಘನಫಲಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಎಲ್ಲಾ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಪಾದಗಳು ಸೇರಿದರೆ, ಈ ಆಕೃತಿಯ ಹೊರಮೈ ಆಗುವುದು. ಆಗ ಈ ಎಲ್ಲಾ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳ ಪಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತ,

ಪೀಠ ಮತ್ತು ಸ್ತಂಭ

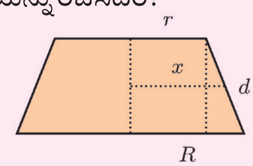
ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತ ಪಿರಮಿಡ್ಡಿನ ಪೀಠದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $\pi(r+R)d$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆವಲ್ಲವೇ.



ಇದರ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ x ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಹೀಗೊಂದು ಚಿತ್ರ ಸಿಗುವುದು.



ಹೀಗೆ ಒಂದು ಗೆರೆಯನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ?



ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನಗಳಿಂದ,

$$\frac{x-r}{R-r} = \frac{1}{2}$$

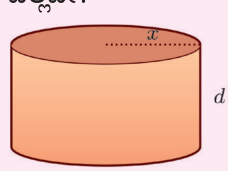
ಎಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದರೆ,

$$x = \frac{1}{2}(R+r)$$

ಎಂದು ಸಿಗುವುದು. ಅಂದರೆ, ಪೀಠದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$2\pi xd.$$

ಇದು, ಪಾದದ ತ್ರಿಜ್ಯ x ಮತ್ತು ಉನ್ನತಿ d ಆಗಿರುವ ವೃತ್ತ ಸ್ತಂಭದ ಪಾರ್ಶ್ವಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಲ್ಲವೇ?



ಈ ಆಕೃತಿಯ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಾಗುವುದು. ಇದನ್ನು s ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಆಕೃತಿಯ ಘನಫಲವು $\frac{1}{3}ar$ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಗೋಳದ ಕೋಣೆಗಳು ಸಣ್ಣದಾಗಿ ಅವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಗೋಳವನ್ನು ಅವರಿಸುವ ಆಕೃತಿಯು ಗೋಳಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚು ನಿಕಟವಾಗುವುದು; s ಎಂಬುದು, ಗೋಳದ ಹೊರಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದೊಂದಿಗೆ ನಿಕಟವಾಗುವುದು. ಅದು $4\pi r^2$ ಆಗಿದೆಯೆಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ. ಆಗ ಗೋಳವನ್ನು ಆವರಿಸುವ ಆಕೃತಿಯ ಘನಫಲ

$$\frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುವುದು. ಇದುವೇ ಗೋಳದ ಘನಫಲವಾಗಿದೆ.

13 ಸ್ಟಾಟಿಸ್ಟಿಕ್ಸ್

ಸರಿಯಲ್ಲದ ಸರಾಸರಿ

ಒಂದು ಗ್ರಾಮದಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುವ 10 ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವು ಈ ರೀತಿಯಿದೆ.

16500	21700	18600	21050	19500
17000	21000	18000	22000	17500

ಈ ಗುಂಪಿನ ಮಧ್ಯಮಾನ ಆದಾಯ ಎಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿ?

ಆದಾಯವೆಲ್ಲವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, 10 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಮಧ್ಯಮಾನ 19285 ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಇನ್ನು ಈ ಹತ್ತು ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯದ ವಿವರಗಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ, ಮಧ್ಯಮಾನವಾಗಿರುವ ಮೊತ್ತ ಮಾತ್ರ ಸಿಕ್ಕಿದರೂ ಇವರ ಆರ್ಥಿಕ ಸ್ಥಿತಿಗತಿಗಳ ಕುರಿತು ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೇಳಬಹುದು.

- ಈ ಎಲ್ಲಾ ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವು 19285 ರೂಪಾಯಿಯ ಹತ್ತಿರದ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ.
- ಯಾವುದೇ ಕುಟುಂಬದ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವು ರೂಪಾಯಿ 19285 ಕ್ಕಿಂತ ತುಂಬಾ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ ತೀರಾ ಕಡಿಮೆ ಅಲ್ಲ.
- 19285 ರೂಪಾಯಿಗಿಂತ ಅಧಿಕ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವಿರುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಈ ಮೊತ್ತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವಿರುವವರ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುಕಡಿಮೆ ಸಮಾನ.

ಇವರ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿಯೇ 175000 ರೂಪಾಯಿ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವಿರುವ ಒಂದು ಕುಟುಂಬ ಕೂಡಾ ಇದೆ ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ 11 ಕುಟುಂಬಗಳ ಮಧ್ಯಮಾನ ಆದಾಯ ಎಷ್ಟಾಯಿತು?

$$\frac{(19285 \times 10) + 175000}{11} = 33441 \text{ ರೂಪಾಯಿ.}$$

ಇನ್ನು ಈ ಮಾಹಿತಿಗಳೊಂದನ್ನೂ ಹೇಳದೆ, ಈಗ ಸಿಕ್ಕಿದ ಮಧ್ಯಮಾನವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೇಳಿದರೆ, ಈ 11 ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯ ಸುಮಾರು 30000 ರೂಪಾಯಿಯೆಂಬ ತಪ್ಪಾದ ತಿಳುವಳಿಕೆ ಉಂಟಾಗುವುದಲ್ಲವೇ? ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹತ್ತೂ ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯದ ಒಂದೂವರೆ ಮಡಿಯ ಹತ್ತಿರವಿದೆ.

ಮಧ್ಯಮಾನ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರ ಉದ್ದೇಶವು, ಒಂದು ವಿಚಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಅನೇಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕುರಿತು ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತಹ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವುದು ಎಂಬುದಲ್ಲವೇ. ಆದರೆ ಗುಂಪಿನ ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿಂತ ತೀರಾ ಸಣ್ಣದೋ, ತುಂಬಾ ದೊಡ್ಡದೋ ಆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (ಎಣಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಿದ್ದರೂ) ಮಧ್ಯಮಾನದಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಪ್ರಭಾವವನ್ನು ಬೀರುವುವು.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಮೊದಲ ಹತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿಂತ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದು ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ, ಇದು ಮಧ್ಯಮಾನದ ಸ್ವರೂಪವನ್ನೇ ಬದಲಾಯಿಸಿತು. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತುಂಬಾ ದೊಡ್ಡದಾದ ಅಥವಾ ತೀರಾ ಸಣ್ಣದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಧ್ಯಮಾನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ತಪ್ಪಾಗಿಸುವ ಇತರ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಹೇಳಬಹುದೇ?

ಇನ್ನೊಂದು ಸರಾಸರಿ

ನಾವು ನೋಡಿದ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ 11 ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯದ ಕುರಿತಾದ ಸರಿಯಾದ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಲ್ಲವೇ. ಅಂತಹ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕುರಿತು ಆಲೋಚಿಸುವ.

ಆದಾಯಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಾತ್ರಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದು, ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, 5 ಕುಟುಂಬಗಳ ಆದಾಯ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯೂ, ಉಳಿದ 5 ಕುಟುಂಬಗಳ ಆದಾಯವು ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವೂ ಆಗಿರುವುದಲ್ಲವೇ.

ಮೊದಲು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆಯುವ.

16500, 17000, 17500, 18000, 18600, 19500, 21000, 21050, 21700, 22000, 175000

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 19500. ಇದನ್ನು ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ **ಮಧ್ಯಮ** (median) ಎಂದು ಹೇಳುವರು.

ಅಂದರೆ, ಈ 11 ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯದ ಮಧ್ಯಮವು 19500 ರೂಪಾಯಿಯಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಒಟ್ಟು ಇರುವ 11 ಕುಟುಂಬಗಳಲ್ಲಿ 5 ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವು 19500 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು 5 ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವು 19500 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ಆಗಿವೆ. ಅಂದರೆ, ಮಧ್ಯಮ ಆದಾಯಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಆದಾಯವಿರುವ ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ಆದಾಯವಿರುವ ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬಿವುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಇನ್ನು ಮೊದಲ 10 ಕುಟುಂಬಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೇ? ಅವರ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದರೆ, ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಬದಲು, 18600, 19500 ಎಂಬೀ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬರುವುದು.

ಇಲ್ಲಿಯೂ ಮಧ್ಯಮವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದು, ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎಣಿಕೆಯು ಸಮಾನವಾಗುವ ವಿಧದಲ್ಲಾಗಿದೆ. 18600 ಮತ್ತು 19500 ಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೂ ಇದು ಸರಿಯಾಗುವುದು. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಮಧ್ಯಮವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಮೊದಲ 10 ಕುಟುಂಬಗಳ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯದ ಮಧ್ಯಮವು $\frac{1}{2}(18600 + 19500) = 19050$ ರೂಪಾಯಿ.

ಮಧ್ಯಮವಾದ 19050 ರೂಪಾಯಿ ಎಂಬುದು, ಮಧ್ಯಮಾನವಾದ 19285 ರೂಪಾಯಿಯಂತೆಯೇ ಮೊದಲ ಹತ್ತು ಕುಟುಂಬಗಳ ಆರ್ಥಿಕ ಸ್ಥಿತಿಯ ಕುರಿತಾದ ಸಾಮಾನ್ಯ ತಿಳುವಳಿಕೆಯನ್ನು ನೀಡುವುದಲ್ಲವೇ. (ಮಧ್ಯಮಾನ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮಗಳೊಳಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇಲ್ಲ)

ಹನ್ನೊಂದನೆಯ ಕುಟುಂಬದ ಅಧಿಕ ಆದಾಯವು ಮಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಬದಲಾವಣೆಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಇಲ್ಲಿ ಬಹಳಷ್ಟು ಪ್ರಾಧಾನ್ಯವಿದೆ. ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಕೆಲವು ಕುಟುಂಬಗಳ ಆದಾಯದ ಮಧ್ಯಮವು

19050 ರೂಪಾಯಿ, ಅದರಲ್ಲೊಂದು ಕುಟುಂಬದ ತಿಂಗಳ ಆದಾಯ 21000 ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ಮಾತ್ರ ಹೇಳಿದರೆ, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ಕುಟುಂಬಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆದಾಯವು ಈಗ ಹೇಳಿದ ಕುಟುಂಬಕ್ಕೆ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

(1) ಉದ್ದ ಜಿಗಿತ ತರಬೇತಿಯಲ್ಲಿ ಅಹಿರತ್ ಜಿಗಿದ ದೂರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

6.10, 6.20, 6.18, 6.20, 6.25, 6.21, 6.15, 6.10

ದೂರಗಳೆಲ್ಲವೂ ಮೀಟರಿನಲ್ಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯಮ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮಾನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವುಗಳೊಳಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿಲ್ಲದಿರಲು ಕಾರಣವೇನು?

(2) ಕೇರಳದ ವಿವಿಧ ಜಿಲ್ಲೆಗಳಲ್ಲಿ 2025ರ ಜೂನ್ ತಿಂಗಳ ಮೊದಲನೇ ವಾರದಲ್ಲಿ ಸುರಿದ ಮಳೆಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಜಿಲ್ಲೆ	ಮಳೆಯ ಪ್ರಮಾಣ (ಮಿ.ಮೀ)
ಕಾಸರಗೋಡು	108.7
ಕಣ್ಣೂರು	89.4
ಕೋಝಿಕ್ಕೋಡ್	74.8
ವಯನಾಡ್	72.0
ಮಲಪ್ಪುರಂ	42.6
ಪಾಲಕ್ಕಾಡ್	35.7
ತ್ರಿಶೂರು	66.4
ಎರ್ನಾಕುಲಂ	73.5
ಕೋಟ್ಟಯಂ	69.1
ಇಡುಕ್ಕಿ	50.5
ಪತ್ತನಂತಿಟ್ಟ	43.6
ಆಲಪ್ಪುಳ	93.1
ಕೊಲ್ಲಂ	39.0
ತಿರುವನಂತಪುರ	37.5

ಆ ವಾರದಲ್ಲಿ ಕೇರಳದಲ್ಲಿ ಸುರಿದ ಮಳೆಯ ಮಧ್ಯಮಾನವನ್ನು ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮಧ್ಯಮಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮಧ್ಯಮಾನವು ಕಡಿಮೆಯಾಗಲು ಕಾರಣವೇನು?

(3) ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯಮವೂ ಮಧ್ಯಮಾನವೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಆವೃತ್ತಿ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮ

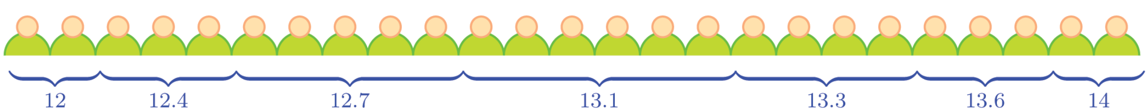
ರಕ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಒಂದು ಡೆಸಿ ಲೀಟರಿನಲ್ಲಿ(ಅಂದರೆ 100 ಮಿಲ್ಲಿಲೀಟರ್) ಎಷ್ಟು ಗ್ರಾಂ ಎಂಬ ದರದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವರು. 25 ಮಕ್ಕಳ ರಕ್ತ ತಪಾಸಣೆಯನ್ನು ನಡೆಸಿ, ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್ (ಗ್ರಾಂ./ ಡೆ.ಲೀ.)	ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ
12.0	2
12.4	3
12.7	5
13.1	6
13.3	4
13.6	3
14.0	2

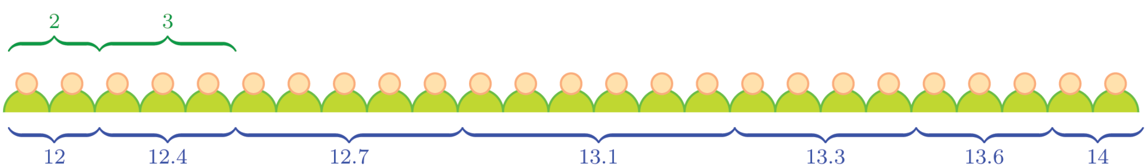
ಇದರಿಂದ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್ ಪ್ರಮಾಣದ ಮಧ್ಯಮಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು?

ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವುದು ಮಧ್ಯಮ; ಅಂದರೆ, ಈ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ 25 ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ 12 ಮಕ್ಕಳ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣ ಮಧ್ಯಮಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರಬೇಕು; 12 ಮಕ್ಕಳದ್ದು ಹೆಚ್ಚೂ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು, ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸಿ, ಹದಿಮೂರನೇ ಮಗುವಿನ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿಲ್ಲಿಸುವುದೆಂದು ಭಾವಿಸಿರಿ.

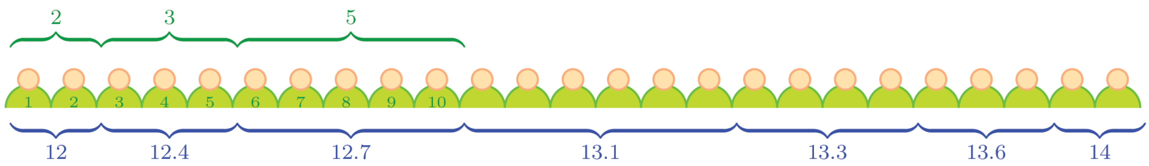


ಮೊದಲ 2 ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್ 12, ನಂತರದ 3 ಮಕ್ಕಳಿಗೆ 12.4 ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಲು ಮುಂದುವರಿಯುವುದು.



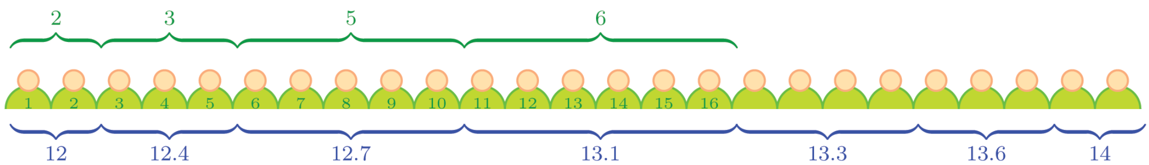
ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವುದು 13 ನೆಯ ಮಗುವಿನ ಅಳತೆಯಲ್ಲವೇ; ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುತ್ತಾ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್‌ನ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಅವನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಮೊದಲ ಎರಡು ಗುಂಪಿನ $2 + 3 = 5$ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ, ಅಳತೆ 12.4 ಆಯಿತು. ಅಂದರೆ, 5 ನೇ ಮಗುವಿನ ರಕ್ತದಲ್ಲಿರುವ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣ 12.4.

ಪುನ: ಮುಂದಿನ ಗುಂಪಿನ 5 ಮಕ್ಕಳನ್ನೂ ಕೂಡಿಸಿದರೆ $5 + 5 = 10$ ಮಕ್ಕಳವರೆಗೆ ಆಯಿತು. ಪ್ರಮಾಣ 12.7 ಕ್ಕೆ ತಲುಪುವುದು.

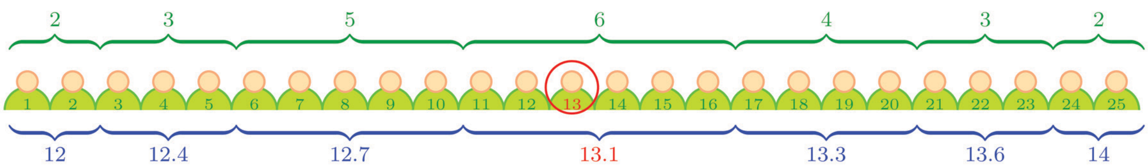


ಅಂದರೆ 10ನೇ ಮಗುವಿನ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣ 12.7.

ಇನ್ನು ಮುಂದಿನ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ 6 ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ $10 + 6 = 16$ ಆಯಿತು.



ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವುದು 13 ನೆಯ ಮಗುವಿನ ಪ್ರಮಾಣವಾಗಿದೆ. ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 11 ರಿಂದ 16ರ ವರೆಗಿರುವ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ಮಕ್ಕಳ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣ 13.1 ಆಗಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಆಗ 13ನೆಯ ಮಗುವಿನ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನಿನ ಪ್ರಮಾಣವೂ 13.1 ಎಂಬುದೇ ಆಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇದುವೇ ಈ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಮಧ್ಯಮವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರದ ಬದಲಾಗಿ ಇದನ್ನೊಂದು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುವ,

ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣ (ಗ್ರಾಂ./ಡೆ.ಲೀ.)	ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ
12.0 ವರೆಗೆ	2
12.4 ವರೆಗೆ	5
12.7 ವರೆಗೆ	10
13.1 ವರೆಗೆ	16
13.3 ವರೆಗೆ	20
13.6 ವರೆಗೆ	23
14.0 ವರೆಗೆ	25

ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 11 ರಿಂದ 16ರ ವರೆಗಿನ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಮಕ್ಕಳ ಹಿಮೋಗ್ಲೋಬಿನ್‌ನ ಅಳತೆ 13.1 ಆಗಿದೆಯೆಂದು ಕಾಣಬಹುದು. ಒಟ್ಟು ಮಕ್ಕಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ 13 ನೆಯವನೂ ಈ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ಕಾರಣ, ಮಧ್ಯಮ 13.1 ಎಂದು ಗಣನೆ ಮಾಡಬಹುದು.

(1) ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ 35 ಕುಟುಂಬಗಳನ್ನು ತಿಂಗಳ ಆದಾಯದ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿರುವುದನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ:

ತಿಂಗಳ ಆದಾಯ (ರೂಪಾಯಿ)	ಕುಟುಂಬಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
10000	3
11000	7
12000	8
13000	5
14000	5
15000	4
16000	3

ಮಧ್ಯಮ ಆದಾಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಹಲವು ವಿಧದ ಕೆಲಸಗಳನ್ನು ಮಾಡುವವರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಿನಗೂಲಿಯ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿರುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ದಿನಗೂಲಿ (ರೂಪಾಯಿ)	ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
700	2
800	4
900	5
1000	7
1100	5
1200	4
1300	3

ದಿನಗೂಲಿಯ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ಹುಟ್ಟಿದ ಶಿಶುಗಳನ್ನು ಭಾರಕ್ಕನುಸರಿಸಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಲಾದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಶಿಶುಗಳ ಭಾರ (ಕಿ.ಗ್ರಾಂ.)	ಶಿಶುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
2.500	4
2.600	6
2.750	8
2.800	10
3.000	12
3.150	10
3.250	8
3.300	7
3.500	5

ಭಾರದ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿರಿ.

ವಿಭಾಗ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯಮ

ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲಸಗಾರರನ್ನು ದಿನಗೂಲಿಯ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿರುವುದನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ದಿನಗೂಲಿ (ರೂ.)	ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
400 - 500	6
500 - 600	7
600 - 700	10
700 - 800	9
800 - 900	5
900 - 1000	4
ಒಟ್ಟು	**41**

ಈ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಮಧ್ಯಮ ದಿನಗೂಲಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು? ಅತಿಕಡಿಮೆ ಕೂಲಿ ಲಭಿಸುವವರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಅತಿಹೆಚ್ಚು ಕೂಲಿ ಲಭಿಸುವ ಕೆಲಸಗಾರರ ವರೆಗೆ ಕ್ರಮೀಕರಿಸಿ, ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಕೆಲಸಗಾರನ ಕೂಲಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಒಟ್ಟು 41 ಕೆಲಸಗಾರರಿದ್ದಾರೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವುದು, ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ 21ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿ.

ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ದಿನಗೂಲಿಯನ್ನು ಹಲವು ವಿಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದಾಗ 21ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿ ಯಾವ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿರುವನು ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ. ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದ ಲೆಕ್ಕದಂತೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಭಾಗ (ಕ್ಲಾಸ್) ದಲ್ಲಿಯೂ ಕೆಲಸಗಾರರನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಜನರಾಗುವರೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡುವ.

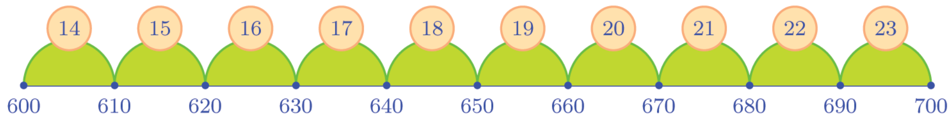
ದಿನಗೂಲಿ (ರೂಪಾಯಿ)	ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
500 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	6
600 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	13
700 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	23
800 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	32
900 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	37
1000 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	41

ಪಟ್ಟಿಗನುಸಾರವಾಗಿ 600 ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಕೂಲಿ ಲಭಿಸುವವರನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, 13ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯವರೆಗೆ ತಲುಪಿದೆವು. 700 ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಕೂಲಿ ಲಭಿಸುವವರನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ 23 ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಾದರು. ಈ ಎರಡು ವಿಧದ ಕೆಲಸಗಾರರ ನಡುವೆ ಇರುವ ವ್ಯಕ್ತಿ ಅಂದರೆ 21ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವುದು. ಆತನ ಕೂಲಿ 600 ಮತ್ತು 700 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದೂ ತಿಳಿಯಿತು.

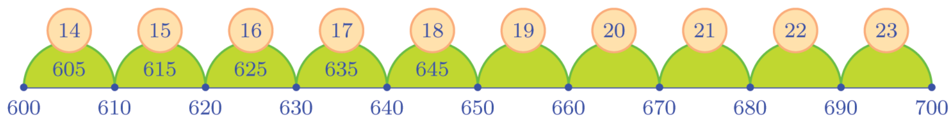
ಕೂಲಿಯನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ನಿಖರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಏನು ಮಾಡಬಹುದು?

14ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯಿಂದ ಮೊದಲ್ಗೊಂಡು 23ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವರೆಗಿನ 10 ಕೆಲಸಗಾರರ ದಿನಗೂಲಿ 600 ರೂಪಾಯಿ ಮತ್ತು 700 ರೂಪಾಯಿಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದಲ್ಲದೆ ಇವರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ದಿನಗೂಲಿ ಎಷ್ಟೆಂದು ತಿಳಿದಿಲ್ಲ ಅಲ್ಲವೇ.

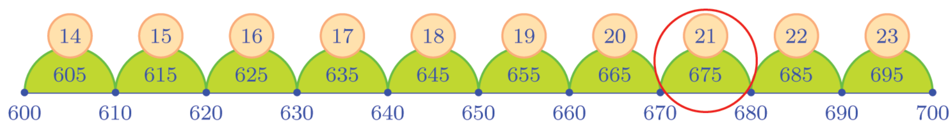
ಆಗ ಕೆಲವು ಊಹನೆಗಳು ಬೇಕಾಗಬಹುದು (ವಿಭಾಗ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಮಧ್ಯಮಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲೂ ಕೆಲವು ಊಹನೆಗಳು ಬೇಕಾಗಿ ಬಂದಿದೆಯಲ್ಲವೇ) 600 ರಿಂದ 700ರ ವರೆಗಿನ 100 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು 10 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲೂ ಒಬ್ಬೊಬ್ಬರೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ :



ಇದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪವಿಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಕೆಲಸಗಾರರ ಕೂಲಿ ಈ ಉಪವಿಭಾಗದ ಮಧ್ಯಬೆಲೆಯೇ ಆಗಿರುವುದೆಂದು ಊಹಿಸುವ :



ಈ ಊಹನೆಗಳ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ 21ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಕೂಲಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದಲ್ಲವೇ.



ಅಂದರೆ, ದಿನಗೂಲಿಯ ಮಧ್ಯಮ 675 ರೂಪಾಯಿ.

ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸದೇ ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ದಿನಗೂಲಿಯ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸಗಾರರನ್ನು ಕ್ರಮೀಕರಿಸುವ ನಮ್ಮ ಊಹನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಮಧ್ಯಮ ಕೂಲಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು?

- 14ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಕೂಲಿ 605 ರೂಪಾಯಿ.
- ನಂತರ 23ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವರೆಗೆ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಕೂಲಿ 10 ರೂಪಾಯಿಯಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುವುದು.
- 14ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯಿಂದ ಮೊದಲ್ಗೊಂಡು, ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ 21ನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ವರೆಗೆ ತಲುಪಲು 7 ಕೆಲಸಗಾರರನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು.

ಆಗ ಇದೊಂದು ಸಂಖ್ಯಾ ಪ್ರಶ್ನೆಯಾಗಲಿಲ್ಲವೇ?

605 ರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ 10ರಂತೆ 7 ಸಲ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು? ಇದರ ಉತ್ತರ

$$605 + (7 \times 10) = 675$$

ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದಲ್ಲವೇ.

ಇಂತಹ ಅನೇಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು **ಸಮಾನಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಗಳು** ಎಂಬ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಕಂಡಿದ್ದೇವಲ್ಲವೇ.

ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸದೆ, ಇದೇ ರೀತಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ ನೋಡುವ. ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲಸಮಾಡುವವರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ಪ್ರಾಯಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಾಯ	ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
25 - 30	4
30 - 35	7
35 - 40	8
40 - 45	10
45 - 50	9
50 - 55	8
ಒಟ್ಟು	**46**

ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಾಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ 46 ಎಂಬುದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದುದರಿಂದ ಕೆಲಸಗಾರರ ಪ್ರಾಯಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಕ್ರಮೀಕರಿಸಿದರೆ 23 ಮತ್ತು 24ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಪ್ರಾಯದ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ಮೊದಲು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ರಚಿಸುವ.

ಪ್ರಾಯ	ಕೆಲಸಗಾರರ ಸಂಖ್ಯೆ
30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	4
35 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	11
40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	19
45 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	29
50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	38
55 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	46

ಇದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ, ಪ್ರಾಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ 20 ರಿಂದ 29 ರ ವರೆಗಿನ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ 10 ಮಂದಿ, 40 ಮತ್ತು 45 ರ ಎಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರಾಯದವರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ನಮಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ 23 ನೇ ಹಾಗೂ 24ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳು ಈ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಇದ್ದಾರಲ್ಲವೇ.

ಈ ಮೊದಲು ಮಾಡಿದಂತೆ 40 ರಿಂದ 45 ರ ವರೆಗಿನ 5 ವರ್ಷಗಳನ್ನು 10 ಸಮಭಾಗ ಮಾಡಿ, ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಉಪವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬೊಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ಇರುವನೆಂದೂ ಅಂತಹ ಓರ್ವ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಪ್ರಾಯವು ಈ ಉಪವಿಭಾಗದ ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸುವ. ಆಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪವಿಭಾಗದ ಅಂತರವು $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ವರ್ಷವಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ 20ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಪ್ರಾಯವು 40 ವರ್ಷ ಹಾಗೂ $40\frac{1}{2}$ ವರ್ಷಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $40\frac{1}{4}$ ವರ್ಷ. ನಂತರ 29ನೇ ಸ್ಥಾನದ ವರೆಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಪ್ರಾಯವೂ $\frac{1}{2}$ ವರ್ಷದಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸುವ, ಆಗ 23 ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಪ್ರಾಯವು

$$40\frac{1}{4} + \left(3 \times \frac{1}{2}\right) = 40\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} = 41\frac{3}{4} \text{ ವರ್ಷ.}$$

24ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ವ್ಯಕ್ತಿಯ ಪ್ರಾಯವು

$$41\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=42\frac{1}{4} \text{ ವರ್ಷ.}$$

ಇನ್ನು ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಾಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಈ ಪ್ರಾಯಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕು.

$$\frac{1}{2}\left(41\frac{3}{4}+42\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\times 84=42$$

ಹೀಗೆ ಮಧ್ಯಮ ಪ್ರಾಯ 42 ಎಂದು ಸಿಗುವುದು.

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ 23 ಮತ್ತು 24 ನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವವರು 40 – 45 ಎಂಬ ಒಂದೇ ಪ್ರಾಯವಿಭಾಗದಲ್ಲಿರುವವರು. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲದ ಇತರ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ವ್ಯತ್ಯಸ್ತವಾಗಿ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗುವುದು. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ.

ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆ ಬರೆದ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಲಭಿಸಿದ ಮಾರ್ಕಿನ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಮಾರ್ಕು	ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ
0 - 10	4
10 - 20	7
20 - 30	9
30 - 40	12
40 - 50	8
ಒಟ್ಟು	**40**

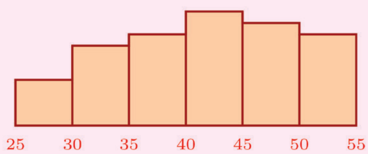
ಮಧ್ಯಮ ಮಾರ್ಕು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬೇಕು.

ಮೊದಲು ಸಂಚಿತ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯುವ.

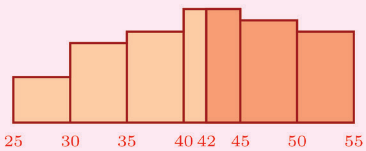
ಮಾರ್ಕು	ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ
10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	4
20 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	11
30 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	20
40 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	32
50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ	40

ಮಧ್ಯಮ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಆವೃತ್ತಿ ಪಟ್ಟಿಯ ಆಯತಚಿತ್ರ ರಚಿಸಿರುವುದು ನೆನಪಿದೆಯಲ್ಲವೇ. ಪ್ರಾಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಆಯತ ಚಿತ್ರ ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ.



ಇದರಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಮವಾದ 42 ರ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವಂತೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಒಂದು ಗೆರೆ ಎಳೆದರೆ ಚಿತ್ರ ಎರಡು ಭಾಗವಾಗುವುದು.



ಈ ಎರಡು ಭಾಗಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಕಷ್ಟವಿಲ್ಲವಲ್ಲವೇ. (ಮಾಡಿ ನೋಡಿ)

ಎಲ್ಲಾ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಮಧ್ಯಮಕ್ಕೆ ಈ ಗುಣವಿದೆಯೇ?

ಇಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳನ್ನು ಮಾರ್ಕಿನ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ (ಅತಿ ಕಡಿಮೆಯಿಂದ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ವರೆಗೆ) ಕ್ರಮೀಕರಿಸಿದಾಗ 30ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಮಾರ್ಕು ಲಭಿಸಿದವರು 20 ಮಂದಿ; ಅಂದರೆ ಒಟ್ಟು ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ 40ರ ಅರ್ಧ.

ಅಂದರೆ ಮಾರ್ಕಿನ ಮಧ್ಯಮವಾಗಿ 30ನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಒಟ್ಟು ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಮಕ್ಕಳ ಮಾರ್ಕು 30ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ, ಉಳಿದ ಮಕ್ಕಳ ಮಾರ್ಕು 30 ಅಥವಾ 30ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಎಂಬುದೇ ಇದರ ಸಮರ್ಥನೆ.

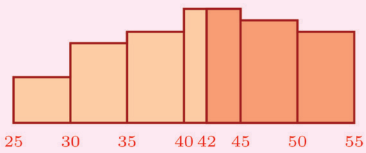
(1) ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಕೆಲವು ಮನೆಗಳ ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಕೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ಕ್ರಮೀಕರಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ವಿದ್ಯುತ್ ಬಳಕೆ (ಯೂನಿಟ್‌ಗಳಲ್ಲಿ)	ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
220 - 240	3
240 - 260	6
260 - 280	7
280 - 300	10
300 - 320	9
320 - 340	4

ವಿದ್ಯುತ್ತಿನ ಬಳಕೆಯ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮಧ್ಯಮ ಸಾಧ್ಯತೆ

ಮಧ್ಯಮದ ಮೂಲಕವಿರುವ ಲಂಬವು, ಆಯತ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಸಮಾನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೋಡಿದೆವಲ್ಲವೇ.



ಹಾಗಾದರೆ, ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಚುಕ್ಕಿ ಹಾಕಿದರೆ, ಅದು ಚಿತ್ರದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. (ಅಥವಾ ಸಾಧ್ಯತೆ $\frac{1}{2}$)

ಆದುದರಿಂದ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಓರ್ವ ಕೆಲಸಗಾರನನ್ನು(ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಪರಿಗಣನೆಯಿಲ್ಲದೆ) ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದರೆ ಆತನ ಪ್ರಾಯವು 42ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಮತ್ತು 42ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(2) ಒಂದು ತರಗತಿಯ ಮಕ್ಕಳನ್ನು, ಗಣಿತ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಲಭಿಸಿದ ಮಾರ್ಕಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಕ್ರಮೀಕರಿಸಿದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಮಾರ್ಕ್	ಮಕ್ಕಳ ಸಂಖ್ಯೆ
0 - 10	4
10 - 20	8
20 - 30	10
30 - 40	9
40 - 50	5

ತರಗತಿಯ ಮಧ್ಯಮ ಮಾರ್ಕನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಒಂದು ಸಂಸ್ಥೆಯ ಉದ್ಯೋಗಿಗಳು ಒಂದು ವರ್ಷ ಪಾವತಿಸಿದ ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆ (ರೂಪಾಯಿ)	ಉದ್ಯೋಗಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ
1000 - 2000	8
2000 - 3000	10
3000 - 4000	15
4000 - 5000	20
5000 - 6000	22
6000 - 7000	8
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3

ಆದಾಯ ತೆರಿಗೆಯ ಮಧ್ಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು

ಭಾರತದ ಸಂವಿಧಾನ

ಭಾಗ IV ಕ

ಮೂಲಭೂತ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು

51ಕ. **ಮೂಲಭೂತ ಕರ್ತವ್ಯಗಳು – ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಭಾರತದ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಪೌರನ ಕರ್ತವ್ಯಗಳಾಗಿವೆ.**

(ಕ) ಸಂವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದು, ಅದರ ಆದರ್ಶಗಳನ್ನು, ಸಂಸ್ಥೆಗಳನ್ನು ರಾಷ್ಟ್ರಧ್ವಜವನ್ನು ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರಗೀತೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು;

(ಖ) ನಮ್ಮ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ ಸಂಗ್ರಾಮಕ್ಕೆ ಸ್ಫೂರ್ತಿದಾಯಕವಾದ ಉದಾತ್ತ ಆದರ್ಶಗಳನ್ನು ಘೋಷಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಅನುಸರಿಸುವುದು;

(ಗ) ಭಾರತದ ಸಾರ್ವಭೌಮತೆಯನ್ನು, ಏಕತೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅಖಂಡತೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಸಂರಕ್ಷಿಸುವುದು;

(ಘ) ದೇಶವನ್ನು ರಕ್ಷಿಸಲು ಮತ್ತು ರಾಷ್ಟ್ರಕ್ಕೆ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸಲು ಕರೆ ಬಂದಾಗ ಅದನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದು;

(ಙ) ಧಾರ್ಮಿಕ, ಭಾಷಿಕ ಮತ್ತು ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಅಥವಾ ಜಾತಿ ಪಂಗಡಗಳ ಭಿನ್ನತೆಗಳಿಂದ ಅತೀತವಾಗಿ ಭಾರತದ ಎಲ್ಲ ಜನತೆಯಲ್ಲಿ ಸಾಮರಸ್ಯವನ್ನು ಮತ್ತು ಭ್ರಾತೃತ್ವದ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದು, ಸ್ತ್ರೀಯರ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಕುಂದುಂಟುಮಾಡುವ ಆಚರಣೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬಿಡುವುದು;

(ಚ) ನಮ್ಮ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ಭವ್ಯ ಪರಂಪರೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಕಾಪಾಡುವುದು.

(ಛ) ಅರಣ್ಯಗಳು, ಸರೋವರಗಳು, ನದಿಗಳು ಮತ್ತು ವನ್ಯಜೀವಿಗಳು ಸೇರಿದಂತೆ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಪರಿಸರವನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಮಾಡುವುದು, ಪ್ರಾಣಿಗಳಿಗೆ ಅನುಕಂಪ ತೋರಿಸುವುದು;

(ಜ) ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಮನೋಭಾವ, ಮಾನವೀಯತೆ, ಜಿಜ್ಞಾಸೆ ಮತ್ತು ಸುಧಾರಣ ಪ್ರವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದು;

(ಝ) ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಸೊತ್ತನ್ನು ರಕ್ಷಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಹಿಂಸೆಯನ್ನು ತ್ಯಜಿಸುವುದು.

(ಞ) ರಾಷ್ಟ್ರವು ನಿರಂತರವಾಗಿ ಸಾಧನೆ ಮತ್ತು ಸಿದ್ಧಿಯ ಔನ್ನತ್ಯಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು ವೈಯಕ್ತಿಕ ಹಾಗೂ ಸಾಮಾಜಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಎಲ್ಲ ಕಾರ್ಯಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಮಾಣಿಕವಾಗಿ ಶ್ರಮಿಸುವುದು;

(ಟ) ಆರರಿಂದ ಹದಿನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ನಡುವಿನ ತನ್ನ ಮಕ್ಕಳಿಗೋ, ತನ್ನ ರಕ್ಷಣೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮಕ್ಕಳಿಗೋ ಆಯಾ ಸಂದರ್ಭಾನುಸಾರ ಹೆತ್ತವರೋ ರಕ್ಷಕರೋ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸಕ್ಕಿರುವ ಅವಕಾಶವನ್ನು ಏರ್ಪಡಿಸುವುದು.

ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕುಗಳು

ಪ್ರೀತಿಯ ಮಕ್ಕಳೇ,

ನಿಮ್ಮ ಹಕ್ಕುಗಳ ಕುರಿತು ತಿಳಿಯಬೇಕಲ್ಲವೇ? ಹಕ್ಕುಗಳ ಕುರಿತಾಗಿರುವ ತಿಳುವಳಿಕೆಯು ನಿಮ್ಮ ಭಾಗವಹಿಸುವಿಕೆ, ಸಂರಕ್ಷಣೆ, ಸಾಮಾಜಿಕ ನ್ಯಾಯ ಎಂಬಿವುಗಳನ್ನು ಖಾತರಿಪಡಿಸಲು ಪ್ರೇರಣೆಯನ್ನೂ ಪ್ರಚೋದನೆಯನ್ನೂ ನೀಡುತ್ತದೆ. ನಿಮ್ಮ ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಸಂರಕ್ಷಿಸಲು ಈಗ ಒಂದು ಆಯೋಗವು ಕಾರ್ಯಾಚರಿಸುತ್ತಿದೆ. 'ಕೇರಳ ಪ್ರಾಂತ್ಯ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕು ಸಂರಕ್ಷಣಾ ಆಯೋಗ' ಎಂದು ಅದರ ಹೆಸರು. ನಿಮ್ಮ ಹಕ್ಕುಗಳು ಯಾವುವು ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

- ವಾಕ್ ಮತ್ತು ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ.
- ಜೀವ ಮತ್ತು ವ್ಯಕ್ತಿ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯದ ರಕ್ಷಣೆ.
- ಪರಿಪೂರ್ಣವಾದ ಬದುಕು ಹಾಗೂ ವಿಕಾಸದ ಹಕ್ಕು.
- ಜಾತಿ, ಮತ, ವರ್ಗ, ವರ್ಣ ಎಂಬ ಚಿಂತನೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಗೌರವಿಸಲ್ಪಡುವ ಮತ್ತು ಅಂಗೀಕರಿಸಲ್ಪಡುವ ಹಕ್ಕು.
- ದೈಹಿಕ, ಮಾನಸಿಕ ಹಾಗೂ ಲೈಂಗಿಕ ದೌರ್ಜನ್ಯಗಳಿಂದ ರಕ್ಷಣೆ ಪಡೆಯಲೂ ಶುಶ್ರೂಷೆ ಪಡೆಯಲೂ ಇರುವ ಹಕ್ಕು.
- ಬಾಲ ಕಾರ್ಮಿಕತನದಿಂದ ಹಾಗೂ ಅಪಾಯಕಾರಿ ಕೆಲಸಗಳಿಂದ ಬಿಡುಗಡೆ.
- ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವಿಕೆಯ ಹಕ್ಕು.
- ಬಾಲ್ಯವಿವಾಹದಿಂದ ರಕ್ಷಣೆ.
- ವೈಯಕ್ತಿಕ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯನ್ನು ಅರಿತುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಬದುಕುವ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ.
- ನಿರ್ಲಕ್ಷ್ಯಕ್ಕೆ ಒಳಗಾಗದಂತೆ ಸಂರಕ್ಷಣೆ.
- ಉಚಿತ ಹಾಗೂ ಕಡ್ಡಾಯ ಶಿಕ್ಷಣದ ಹಕ್ಕು.
- ಕಲಿಯಲೂ ಆಟವಾಡಲೂ ಇರುವ ಹಕ್ಕು.
- ಪ್ರೀತಿ ಹಾಗೂ ರಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ಒದಗಿಸುವ ಕುಟುಂಬ ಹಾಗೂ ಸಮಾಜವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಹಕ್ಕು.

ನಿಮ್ಮ ಕೆಲವು ಜವಾಬ್ದಾರಿಗಳು

- ಶಾಲೆ, ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಸೊತ್ತುಗಳನ್ನು ಹಾನಿ ಮಾಡದೆ ರಕ್ಷಿಸುವುದು.
- ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಕಲಿಕಾ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಶಿಸ್ತು ಪಾಲಿಸುವುದು.
- ಶಾಲಾ ಅಧಿಕಾರಿಗಳನ್ನು, ಅಧ್ಯಾಪಕರನ್ನು, ಹೆತ್ತವರನ್ನು ಹಾಗೂ ಸಹಪಾಠಿಗಳನ್ನು ಗೌರವಿಸುವುದು ಮತ್ತು ಅಂಗೀಕರಿಸುವುದು.
- ಜಾತಿ, ಮತ, ವರ್ಗ, ವರ್ಣ ಇತ್ಯಾದಿ ಚಿಂತನೆಗಳನ್ನು ಮೀರಿ ಇತರರನ್ನು ಗೌರವಿಸಲೂ ಅಂಗೀಕರಿಸಲೂ ಸಿದ್ಧರಾಗುವುದು.

ಸಂಪರ್ಕಿಸಬೇಕಾದ ವಿಳಾಸ:

ಕೇರಳ ಪ್ರಾಂತ್ಯ ಮಕ್ಕಳ ಹಕ್ಕು ಸಂರಕ್ಷಣ ಆಯೋಗ

'ಶ್ರೀ ಗಣೇಶ್', ಟಿ.ಸಿ. 14/2036, ವಾನ್ ರೋಸ್ ಜಂಕ್ಷನ್, ತಿರುವನಂತಪುರ-34

ಫೋನ್ : 0471-2326603

E-mail : childrightscpcr@kerala.gov.in, rtecpcr@kerala.gov.in

Website : www.kescpcr.kerala.gov.in.

ಮಕ್ಕಳ ಸಹಾಯವಾಣಿ : 1098, ಅಪರಾಧ ನಿಯಂತ್ರಣ : 1090, ನಿರ್ಭಯ : 1800 425 1400

ಕೇರಳ ಪೋಲೀಸ್ ಸಹಾಯವಾಣಿ : 0471-3243000/44000/45000

online ***R.T.E Monitoring : www.nireekshana.org.in***